الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم

2023-2024

الرياضيات

نسخة الإمارات العربية المتحدة

الصف
10
تطبيقي

Mc Graw Hill

McGraw-Hill Education

الرياضيات

نسخة الإمارات العربية المتحدة

المسار التطبيقي

Project: McGraw-Hill Education United Arab Emirates Edition Grade 10 Applied Math Vol 2

FM. Front Matter, from Integrated Math II © 2012
4. Quadratic Functions and Equations, from Integrated Math II Chapter 2 © 2012
5. Exponential and Logarithmic Functions and Relation, from Integrated Math II Chapter 4 © 2012
& Exponents and Exponential Functions, from Integrated Math I Chapter 7 © 2012
6. Radical Functions, Rational Functions and Geometry, from Integrated Math I Chapter 8 © 2012
EM. End Matter/Glossary, from Integrated Math II © 2012

صورة الغلاف: jiunn/Shutterstock

mheducation.com/prek-12

جميع الحقوق محفوظة © للعام 2021 لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

جميع الحقوق محفوظة. لا يجوز إعادة إنتاج أي جزء من هذا المنشور أو توزيعه في أي صورة أو بأي وسيلة كانت أو تخزينه في قاعدة بيانات أو نظام استرداد من دون موافقة خطية مسبقة من McGraw-Hill Education. بما في ذلك، على سبيل المثال لا الحصر، التخزين على الشبكة أو الإرسال عبرها أو البث لأغراض التعليم عن بُعد.

الحقوق الحصرية للتصنيع والتصدير عائدة لمؤسسة McGraw-Hill Education. لا يمكن إعادة تصدير هذا الكتاب من البلد الذي باعته له McGraw-Hill Education. هذه النسخة الإقليمية غير متاحة خارج أوروبا والشرق الأوسط وإفريقيا.

طُبع في دولة الإمارات العربية المتحدة.

رقم النشر الدولي: 978-1-39-891068-3 (نسخة الطالب)
MHID: 1-39-891068-6 (نسخة الطالب)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 XXX 22 21 20 19 18 17

النسخة الإلكترونية

رقم النشر الدولي: 978-1-39-891070-6 (نسخة الطالب)
MHID: 1-39-891070-8 (نسخة الطالب)
رقم النشر الدولي: 978-1-39-891071-3 (نسخة المعلم)
MHID: 1-39-891071-6 (نسخة المعلم)

ملخص المحتويات

الوحدة 1 التبرير والبرهان

الوحدة 2 المستقيمات المتوازية والمتعامدة

الوحدة 3 المثلثات المتطابقة

الوحدة 4 الدوال والمعادلات التربيعية

الوحدة 5 الدوال والمعادلات الأسيّة

الوحدة 6 الدوال والمعادلات الجذرية والنسبية

الوحدة 7 علاقات المثلثات

الوحدة 8 الدوائر

الوحدة 9 التناسب والتشابه

كتيب الطالب

يتم تعريف المحتوى على تطبيق التعلم الذكي

1 التبرير والبرهان

الاستعداد للوحدة 1 3

الاستكشاف: مختبر الهندسة الشروط الضرورية والكافية 5

1-1 المسلَّمات والبراهين الحرة 6

1-2 البرهان الجبري 14

1-3 إثبات العلاقات بين الزوايا 29

تقويم

- دليل الدراسة والمراجعة 38
- تدريب على الاختبار 41
- التحضير للاختبارات المعيارية 42
- تدريب على الاختبار المعياري 44

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 المستقيمات المتوازية والمتعامدة

الاستعداد للوحدة 2 47

2-1 **المستقيمات المتوازية والمتقاطعة** 49

التوسّع: مختبر برامج الهندسة الزوايا والمستقيمات المتوازية 55

2-2 **الزوايا المستقيمات المتوازية** 56

الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني استكشاف الميل 63

2-3 **ميل الخط المستقيم** 64

■ **اختبار منتصف الوحدة** 73

2-4 **معادلات المستقيم** 74

التوسّع: مختبر الهندسة معادلات المنصّفات العمودية 82

2-5 **إثبات توازي المستقيمات** 83

2-6 **المتعامدات والمسافة** 91

التقويم

■ **دليل الدراسة والمراجعة** 101

■ **تدريب على الاختبار** 105

■ **التحضير للاختبارات المعيارية** 106

■ **تدريب على الاختبار المعياري** 108

حقوق الطبع والنشر © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

3 المثلثات المتطابقة

الاستعداد للوحدة 3 111

3-1 **تصنيف المثلثات** 113

الاستكشاف: مختبر الهندسة زوايا المثلثات 121

3-2 **زوايا المثلث** 122

3-3 **المثلثات المتطابقة** 131

3-4 **إثبات تطابق المثلثات-تساوي الأضلاع الثلاثة (SSS)، تساوي ضلعين وزاوية (SAS)** 140

التوسّع: مختبر الهندسة برهنة الإنشاءات 149

■ **اختبار منتصف الوحدة** 150

3-5 **إثبات تطابق المثلثات-تساوي زاويتين والضلع المحصور بينهما (ASA) وتساوي زاويتين وضلع (AAS)** 151

التوسّع: مختبر الهندسة التطابق في المثلثات قائمة الزاوية 159

3-6 **المثلثات متساوية الساقين ومتساوية الأضلاع** 161

الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيلات البيانية تحويلات التطابق 170

3-7 **تحويلات التطابق** 172

3-8 **المثلثات والبرهان الإحداثي** 179

الاستكشاف: مختبر الهندسة إنشاء المنصفات 186

الاستكشاف: مختبر الهندسة إنشاء الوسيطات والارتفاعات 187

الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني متباينة المثلث 188

3-9 **مساحة متوازي الأضلاع والمثلث** 189

التقويم

■ **دليل الدراسة والمراجعة** 197

■ **تدريب على الاختبار** 201

■ **التحضير للاختبارات المعيارية** 202

■ **تدريب على الاختبار المعياري** 204

حقوق الطبع والتأليف © محفوظ لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4 الدوال والمعادلات التربيعية

الاستعداد للوحدة 4 201

4-1 تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا 203

التوسع: مختبر الجبر معدل تغير الدالة التربيعية 214

4-2 حل المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني 215

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني المتباينات التربيعية 221

4-3 حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع 222

التوسع: مختبر الجبر إيجاد القيمة العظمى أو الصغرى 228

■ اختبار الوحدة الأول 230

الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني تمثيل بيانات من الحياة اليومية 231

4-4 حل المعادلات التربيعية بالتحليل إلى العوامل 232

4-5 الأعداد المركبة 240

التوسع: مختبر الجبر المستوى المركب 247

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات التربيعية 249

■ اختبار الوحدة الثاني 250

4-6 القانون العام والمميّز 251

4-7 تحويلات الدوال التربيعية 260

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني الدوال التربيعية ومعدل التغير 270

4-8 المتباينات التربيعية 271

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني المزيد من المتباينات التربيعية 278

تقويم

■ دليل الدراسة والمراجعة 280

■ تدريب على الاختبار 286

■ تدريب على الاختبار المعياري 288

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

5 الدوال والمعادلات الأسيّة

الاستعداد للوحدة 5 291

5-1 الدوال الأسيّة 294

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات والمتباينات الأسية 302

5-2 تحديد الدوال بإستخدام الفروق المتتالية 304

التوسع: مختبر الجبر ملاءمة المنحنيات 310

5-3 النمو والاضمحلال (التضاؤل) 312

التوسع: مختبر الجبر تحويل التعابير الأسية 317

5-4 المتتاليات الهندسية في صورة دوال أسيّة 318

التوسع: مختبر الجبر متوسط معدل التغير في الدوال الأسية 324

5-5 الصيغ التكرارية 325

الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات والمتباينات الأسية 331

5-6 حل المعادلات والمتباينات الأسيّة 333

التوسع: مختبر الجبر تحويل التعابير الأسية 340

تقويم

- دليل الدراسة والمراجعة 341
- تدريب على الاختبار 345
- التحضير للاختبارات المعيارية 346
- تدريب على الاختبار المعياري 348

حقوق الطبع والتأليف © محفوظ لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

6 الدوال والمعادلات الجذرية والنسبية

الاستعداد للوحدة 6 352

6-1 دوال الجذر التربيعي 353

التوسّع: مختبر تقنية التمثيل البياني التمثيل البياني لدوال الجذر التربيعي 359

6-2 المعادلات الجذرية 360

■ اختبار منتصف الوحدة 365

6-3 التغير العكسي 366

الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني مجموعة الدوال النسبية 373

6-4 الدوال النسبية 374

6-5 المعادلات النسبية 380

التوسّع: مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات النسبية 387

التقويم

■ دليل الدراسة والمراجعة 389

■ تدريب على الاختبار 392

■ التحضير للاختبارات المعيارية 394

■ تدريب على الاختبار المعياري 396

حقوق الطبع والنشر © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

7 علاقات المثلثات

الاستعداد للوحدة 7 xxx

الاستكشاف: مختبر الهندسة إنشاء المنصفات xxx

7-1 **منصفات المثلثات** xxx

الاستكشاف: مختبر الهندسة إنشاء المتوسطات والارتفاعات xxx

7-2 **متوسطات المثلثات وارتفاعاتها** xxx

7-3 **المتباينات في مثلث واحد** xxx

■ **اختبار منتصف الوحدة** xxx

الاستكشاف: مختبر الهندسة منطق المصفوفة xxx

7-4 **البرهان غير المباشر** xxx

الاستكشاف: مختبر تقنية التمثيل البياني متباينة المثلث xxx

7-5 **متباينة المثلث** xxx

7-6 **المتباينات في مثلثين** xxx

التقويم

■ **دليل الدراسة والمراجعة** xxx

■ **تدريب على الاختبار** xxx

■ **التحضير للاختبارات المعيارية** xxx

■ **تدريب على الاختبار المعياري** xxx

حقوق الطبع والتأليف © محفوظ لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

8 الدوائر

الاستعداد للوحدة 8 xxx

8-1 الدوائر والمحيط xxx

8-2 قياس الزوايا والأقواس xxx

8-3 الأقواس والأوتار xxx

8-4 الزوايا المحيطية xxx

■ اختبار منتصف الوحدة .....

8-5 المماسات xxx

التوسّع: مختبر الهندسة الدوائر المحيطة والمحاطة xxx

8-6 القاطع والمماس وقياس الزوايا xxx

8-7 القطع الخاصة في دائرة xxx

8-8 معادلة الدائرة xxx

التوسّع: مختبر الهندسة القطوع المكافئة xxx

8-9 مساحة الدائرة والقطاع الدائري xxx

التقويم

■ دليل الدراسة والمراجعة xxx

■ تدريب على الاختبار xxx

■ التحضير للاختبارات المعيارية xxx

■ تدريب على الاختبار المعياري xxx

حقوق الطبع والنشر © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9 التناسب والتشابه

الاستعداد للوحدة 9 xxx

9-1 النسب والتناسب xxx

التوسع: مختبر تقنية التمثيل البياني متتالية فيبوناتشي والنسب xxx

9-2 المضلّعات المتشابهة xxx

9-3 المثلثات المتشابهة xxx

التوسع: مختبر الهندسة براهين المستقيمات المتعامدة والمتوازية xxx

9-4 المستقيمات المتوازية والأجزاء المتناسبة xxx

اختبار منتصف الوحدة xxx

9-5 أجزاء المثلثات المتشابهة xxx

التوسع: مختبر الهندسة الأنماط الهندسية المتكررة xxx

9-6 تحويلات التشابه .....

9-7 مقياس الرسم والنماذج المقياسية .....

تقويم

دليل الدراسة والمراجعة xxx

تدريب على الاختبار xxx

التحضير للاختبارات المعيارية xxx

تدريب على الاختبار المعياري xxx

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

كتيب الطالب

الرموز والصيغ والمفاهيم الأساسية

الرموز EM-1

القياسات EM-2

العمليات والعلاقات الحسابية EM-3

الصيغ والمفاهيم الجبرية EM-3

الصيغ والمفاهيم الهندسية EM-5

الدوال والمتطابقات المثلثية EM-6

الدوال الأصلية والعمليات الحسابية على الدوال EM-7

النهايات والتفاضل والتكامل EM-7

الصيغ والمفاهيم الاحصائية EM-8

قاموس المصطلحات متوفر في النسخة الإلكترونية

حقوق الطبع والنشر © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 4

الدوال والمعادلات التربيعية

Chapter Resource Masters (Online) Functions and Equations Unit 4 Integrated Math II Chapter 2 © 2012 McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

السابق

- لقد حللت معادلات تربيعية بالتحليل إلى العوامل وباستخدام خاصية الجذر التربيعي.

الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادراً على:
  - حل معادلات تربيعية بالتمثيل البياني، اكمال المربع، التحليل إلى العوامل والقانون العام.
  - اجراء العمليات باستخدام الاعداد المركبة.
  - التمثيل البياني للدوال التربيعية وحلها.

لماذا؟ ▲

- **التمويل** يمكن تمثيل قيمة السهم في إحدى الشركات بالدالة $f(x) = x^2 - 12x + 75$. وبتمثيل هذه الدالة التربيعية بيانيا، يمكننا التكهن بصورة مدروسة بأداء السهم في المستقبل القريب.

الاستعداد للوحدة

تحديد مدى الاستعداد أجب على التمرين السريع أدناه للتحقق من المهارات المطلوبة لديك. وعد إلى المراجعة السريعة للمساعدة.

مراجعة سريعة

استخدم جدولاً بالقيم لتمثيل كل معادلة بيانيًا.

1. $y = x + 3$
2. $y = 2x + 2$
3. $y = -2x - 3$
4. $y = 0.5x - 1$
5. $4x - 3y = 12$
6. $3y = 6 + 9x$
7. **المدّخرات** بحوزة أحمد AED 100 لشراء جهاز للألعاب. وهو يخطط لادخار AED 10 كل أسبوع. مثّل بيانيًا معادلة لبيان المبلغ الكلي T خلال w أسبوعًا.

حدد ما إذا كان كل ثلاثي حدود هو ثلاثي حدود مربع كامل أم لا. اكتب نعم أو لا. وإن كان كذلك، فحلّله إلى عوامله.

8. $a^2 + 12a + 36$
9. $x^2 + 5x + 25$
10. $x^2 - 12x + 32$
11. $x^2 + 20x + 100$
12. $4x^2 + 28x + 49$
13. $k^2 - 16k + 64$
14. $a^2 - 22a + 121$
15. $5t^2 - 12t + 25$

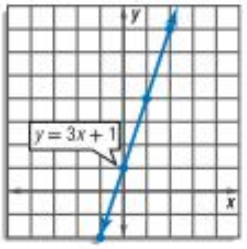
جد قيمة كل تعبير إذا كان $a = -2$ و $b = -1$ و $c = 0$ و $d = 2.5$.

16. $|a - 3|$
17. $|2a + 1|$
18. $|4 - b|$
19. $\left|\frac{1}{2}b - 2\right|$
20. $|12 - 4c|$
21. $|2c - 3| + 1$
22. $|4d - 6|$
23. $|3d - 2| - 8$

تمرين سريع

مثال 1

استخدم جدولاً بالقيم لتمثيل $y = 3x + 1$ بيانيًا.



x	$y = 3x + 1$	y
-1	$3(-1) + 1$	-2
0	$3(0) + 1$	1
1	$3(1) + 1$	4
2	$3(2) + 1$	7

مثال 2

حدد ما إذا كان $x^2 - 10x + 25$ ثلاثي حدود مربع كامل أم لا. اكتب نعم أو لا. وإن كان كذلك، فحلّله إلى عوامله.

1. هل الحدّ الأول مربع كامل؟ نعم
2. هل الحدّ الأخير مربع كامل؟ نعم
3. هل الحدّ الأوسط يساوي $-2(1x)(5)$؟ نعم

$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$

مثال 3

جد قيمة $|2x + 1| - 7$ إذا كان $x = -1$.

$|2x + 1| - 7 = |2(-1) + 1| - 7$ $x = -1$

$= |-2 + 1| - 7$ اضرب.

$= |-1| - 7$ اجمع.

$= 1 - 7$ $|-1| = 1$

$= -6$ اطرح.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

البدء في هذه الوحدة

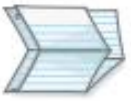
سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهاراتٍ ومفرداتٍ جديدةٍ أثناء دراستك لهذه الوحدة. لكي تستعد، حدّد المفردات المهمّة ونظّم مواردك. قد تحتاج إلى العودة إلى وحدات سابقة لمراجعة المهارات المطلوبة.

المطويات منظّم الدراسة

الدوال والمعادلات التربيعية شكّل المطوية التالية لمساعدتك في تنظيم ملاحظات الوحدة عن الدوال التربيعية. وابدأ بورقة من الدفتر.

1 **اطوِ** الورقة بالاتجاه الطولي بحيث تحاذي حافة الورقة مع خط الهامش.

2 **اطوِ** الورقة طيّتين بالاتجاه العرضي بحيث تصبح لديك أربعة مقاطع.



3 **اقرد** الورقة وقصّها على طول الطيات على اللسان الأمامي فقط.

4 **اكتب اسم** كل مقطع كما هو موضح.

المفردات الجديدة

دالة تربيعية	quadratic function
قطع مكافئ	parabola
محور التماثل	axis of symmetry
رأس	vertex
القيمة الصغرى	minimum
القيمة العظمى	maximum
جذر مكرر	double root
التحويل	transformation
إكمال المربع	completing the square
صيغة تربيعية	Quadratic Formula
المميز	discriminant
دالة درجية	step function
دالة أكبر عدد صحيح	greatest integer function
دالة القيمة المطلقة	absolute value function

مراجعة المفردات

المجال هو كافة القيم المحتملة للمتغير المستقل x

المعامل الرئيس هو معامل الحدّ الأول في كثيرة حدود مكتوبة بالصيغة القياسية

المدى هو كافة القيم المحتملة للمتغير التابع y

في الدالة الممثلة في الجدول، المجال هو {0, 2, 4, 6}. والمدى هو {3, 5, 7, 9}.

x	y
0	3
2	5
4	7
6	9

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4-1 تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا

السابق:
- قمت بتمثيل الدوال الخطية والأسية بيانيًا.

الحالي:
1. تحليل خواص التمثيلات البيانية للدوال التربيعية.
2. تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا.

لماذا؟
- تعدّ شلالات نياجارا في الولايات المتحدة الأمريكية نموذج عرض فريد ومتناسق بين الماء والأضواء والموسيقى. تطلق الرشاشات الماء بشكلٍ يمكن تمثيله نموذجيًا بمعادلاتٍ تربيعية. ويمكنك تمثيل هذه المعادلات بيانيًا لتوضيح مسار الماء.

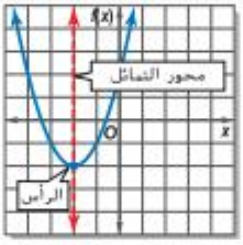
1 خواص الدوال التربيعية

الدوال التربيعية دوال غير خطية يمكن كتابتها بالصيغة $f(x) = ax^2 + bx + c$ حيث $a \neq 0$. وتدعى هذه الصيغة **بالصيغة القياسية** لدالة تربيعية

يطلق على شكل منحنى الدالة التربيعية اسم **القطع المكافئ** والقطوع المكافئة متماثلة بالنسبة إلى مستقيمٍ مركزيٍ يدعى **محور التماثل**. ويقطع محور التماثل القطع المكافئ في نقطةٍ واحدة. يُطلق عليها **الرأس**.

المفهوم الأساسي الدوال التربيعية

الدالة الأصلية:	$f(x) = x^2$
الصيغة القياسية	$f(x) = ax^2 + bx + c$
نوع التمثيل البياني:	قطع مكافئ
محور التماثل:	$x = -\frac{b}{2a}$
التقاطع مع المحور الرأسي y:	c

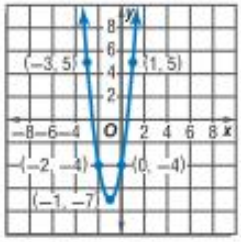


عندما يكون $a > 0$، فإن التمثيل البياني لـ $y = ax^2 + bx + c$ يكون مفتوح إلى الأعلى. والنقطة الأكثر انخفاضًا على التمثيل البياني هي **القيمة الصغرى**. وعندما يكون $a < 0$، فإن التمثيل البياني مفتوح إلى الأسفل. والنقطة الأعلى هي **القيمة العظمى**. والقيمة العظمى أو الصغرى تقابل رأس القطع المكافئ.

مثال 1 تمثيل قطع مكافئ بيانيًا

استخدم جدول قيمٍ لتمثيل $y = 3x^2 + 6x - 4$ بيانيًا. واذكر المجال والمدى.

x	y
1	5
0	−4
−1	−7
−2	−4
−3	5



مثّل الأزواج المرتبة بيانيًا. واربطها لتشكيل تمثيلٍ بياني منتظم. يمتدّ القطع المكافئ إلى ما لا نهاية. والمجال هو عبارة عن الأعداد الحقيقية كلها. والمدى هو $\{y \mid y \geq -7\}$، لأن -7 هي القيمة الصغرى.

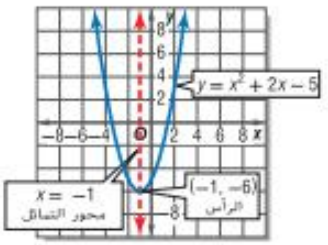
تمرين موجّه

1. استخدم جدول قيمٍ لتمثيل $y = x^2 + 3$ بيانيًا. واذكر المجال والمدى.

المفردات الجديدة
- دالة تربيعية quadratic function
- صيغة قياسية standard form
- قطع مكافئ parabola
- محور التماثل axis of symmetry
- رأس vertex
- القيمة الصغرى minimum
- القيمة العظمى maximum

ممارسات في الرياضيات
التفكير بطريقة تجريدية وكمية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لشركة مؤسسة McGraw-Hill Education



تذكّر أن الأشكال التي تتمتع بالتماثل هي تلك الأشكال التي يتطابق نصفاها تمامًا.

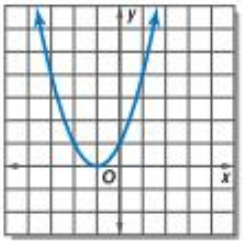
القطع المكافئ متماثل بالنسبة إلى محور التماثل. وكل نقطة تقع على القطع المكافئ على يسار محور التماثل لها نقطة مقابل على النصف الآخر. والدالة متزايدة على أحد جانبي محور التماثل ومتناقصة على الآخر.

عند تحديد الخواص من تمثيلٍ بياني. فالأسهل غالبًا تحديد موقع الرأس أولاً. وهو يقابل النقطة العظمى أو الصغرى للتمثيل البياني.

مثال 2 تحديد الخواص من التمثيلات البيانية

جـد الرأس ومعادلة محور التماثل والتقاطع مع المحور الرأسي y لكل تمثيل بياني.

a.

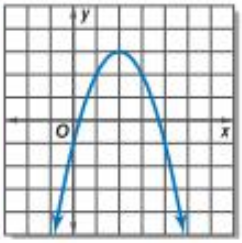


الخطوة 1 جـد الرأس.
نظرًا لأن القطع المكافئ مفتوح إلى الأعلى. فالرأس يقع عند النقطة الصغرى للقطع المكافئ. وهو يقع عند النقطة $(-1, 0)$.

الخطوة 2 جـد محور التماثل. محور التماثل هو المستقيم المار بالرأس والذي يقسم القطع المكافئ إلى نصفين متطابقين. وهو يقع عند $x = -1$.

الخطوة 3 جـد نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y. نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y هي النقطة التي يقطع فيها التمثيل البياني المحور الرأسي y. وتقع كذلك عند $(0, 1)$. إذًا فالتقاطع مع المحور الرأسي y هي 1.

b.



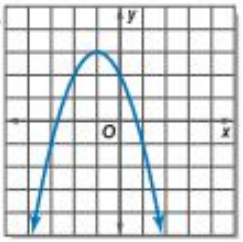
الخطوة 1 جـد الرأس.
القطع المكافئ مفتوح إلى الأسفل. إذًا يقع الرأس عند النقطة العظمى $(2, 3)$.

الخطوة 2 جـد محور التماثل. يقع محور التماثل على المستقيم $x = 2$.

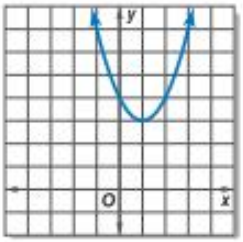
الخطوة 3 جـد نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y. نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y هي النقطة التي يقطع فيها التمثيل البياني المحور الرأسي y. وتقع كذلك عند $(0, -1)$. إذًا فالتقاطع مع المحور الرأسي y هي -1.

تمرين موجّه

2A.



2B.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 تحديد الخواص من الدوال

جـد الرأس ومعادلة محور التماثل والتقاطع مع المحور الرأسي y لكل دالة.

a. $y = 2x^2 + 4x - 3$

$x = -\frac{b}{2a}$ صيغة معادلة محور التماثل

$x = -\frac{4}{2 \cdot 2}$ $b = 4$ و $a = 2$

$x = -1$ بسّط

معادلة محور التماثل هي $x = -1$.

لإيجاد الرأس. استخدم القيمة التي توصلت إليها لمحور التماثل على أنها الإحداثي الأفقي x للرأس. وجـد الإحداثي الرأسي y باستخدام المعادلة الأصلية.

$y = 2x^2 + 4x - 3$ المعادلة الأصلية

$= 2(-1)^2 + 4(-1) - 3$ $x = -1$

$= -5$ بسّط

نقطة رأس القطع هي $(-1, -5)$.

يحدث التقاطع مع المحور الرأسي y دائمًا عند $(0, c)$. إذًا فالتقاطع مع المحور الرأسي y هي -3.

b. $y = -x^2 + 6x + 4$

$x = -\frac{b}{2a}$ صيغة معادلة محور التماثل

$x = -\frac{6}{2(-1)}$ $b = 6$ و $a = -1$

$x = 3$ بسّط

معادلة محور التماثل هي $x = 3$.

$y = -x^2 + 6x + 4$ المعادلة الأصلية

$= -(3)^2 + 6(3) + 4$ $x = 3$

$= 13$ بسّط

نقطة رأس القطع هي $(3, 13)$.

التقاطع مع المحور الرأسي y عند 4.

تمرين موجّه

3A. $y = -3x^2 + 6x - 5$ **3B.** $y = 2x^2 + 2x + 2$

نصيحة دراسية

خواص الدوال عند تحديد خواص دالة، فإن من الأسهل في أغلب الأحيان تحديد محور التماثل أولًا.

نصيحة دراسية

التقاطع مع المحور الرأسي الإحداثي الرأسي y لنقطة التقاطع مع المحور الرأسي y هو أيضًا الحد الثابت (c) للدالة التربيعية بالصيغة القياسية.

ستتعلم في ما يلي كيفية تحديد ما إن كان الرأس نقطةً عظمى أو صغرى.

المفهوم الأساسي القيم العظمى والصغرى

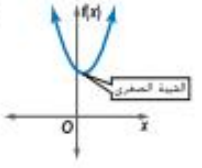
الشرح

التمثيل البياني لـ $f(x) = ax^2 + bx + c$، حيث $a \neq 0$.

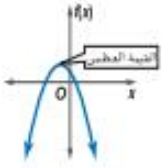
- مفتوح إلى الأعلى وله قيمة صغرى إذا كان $a > 0$.
- مفتوح إلى الأسفل وله قيمة عظمى إذا كان $a < 0$.
- مدى دالة تربيعية هو جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من القيمة الصغرى أو المساوية لها. أو جميع الأعداد الحقيقية الأصغر من القيمة العظمى أو المساوية لها.

أمثلة

a موجب.



a سالب.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 4 القيمتان العظمى والصغرى

ادرس الدالة $f(x) = -2x^2 - 4x + 6$.

a. حدّد إذا ما كان للدالة قيمة عظمى أو صغرى .

في الدالة $f(x) = -2x^2 - 4x + 6$ نجد أن $a = -2$ و $b = -4$ و $c = 6$.

نظرًا أن a سالب. فإن التمثيل البياني مفتوح إلى الأسفل. إذًا للدالة قيمة عظمى.

انتبه!
القيم العظمى والصغرى لا تنس إيجاد كلا إحداثيي الرأس (x, y). القيمة الصغرى أو العظمى هي الإحداثي الرأسي y.

b. اذكر القيمة العظمى أو الصغرى للدالة.

القيمة العظمى هي الإحداثي الرأسي y للرأس.

الإحداثي الأفقي x للرأس هو $\frac{-b}{2a} = \frac{4}{2(-2)} = -1$.

$f(x) = -2x^2 - 4x + 6$	الدالة الأصلية
$f(-1) = -2(-1)^2 - 4(-1) + 6$	$x = -1$
$f(-1) = 8$	بسّط

القيمة العظمى هي 8.

مراجعة المفردات
المجال والمدى المجال هو مجموعة كافة القيم الممكنة للمتغير المستقل x. والمدى هو مجموعة جميع القيم الممكنة للمتغير التابع y.

c. اذكر مجال الدالة ومداها.

المجال هو الأعداد الحقيقية كلها. أما المدى هو جميع الأعداد الحقيقية الأقل من القيمة العظمى أو المساوية لها. أو $\{y \mid y \leq 8\}$.

تمرين موجّه

ادرس الدالة $g(x) = 2x^2 - 4x - 1$.

4A. حدّد إذا ما كان للدالة قيمة عظمى أو قيمة صغرى.

4B. اذكر القيمة العظمى أو الصغرى.

4C. اذكر مجال الدالة ومداها.

2 تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا

لقد تعلمت كيفية إيجاد العديد من الخواص الهامة للدوال التربيعية.

المفهوم الأساسي تمثيل الدوال التربيعية

الخطوة 1 جـد معادلة محور التماثل.

الخطوة 2 جـد الرأس وحدّد ما إذا كان قيمة عظمى أو صغرى.

الخطوة 3 جـد نقطة التقاطع مع المحور الرأسي y.

الخطوة 4 استخدم التماثل لإيجاد نقاطٍ إضافيةٍ على التمثيل البياني، عند الضرورة.

الخطوة 5 صل النقاط بمنحنى متصل.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 5 تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا

مثّل $f(x) = x^2 + 4x + 3$ بيانيًا.

الخطوة 1 جـد معادلة محور التماثل.

$x = \frac{-b}{2a}$ صيغة معادلة محور التماثل

$x = \frac{-4}{2 \cdot 1}$ or -2 $b = 4$ و $a = 1$

الخطوة 2 جـد الرأس وحدّد ما إذا كان قيمة عظمى أو صغرى.

$f(x) = x^2 + 4x + 3$ المعادلة الأصلية

$= (-2)^2 + 4(-2) + 3$ $x = -2$

$= -1$ بسّط

يقع الرأس عند $(-2, -1)$. ونظرًا أن a موجب، فإن التمثيل البياني مفتوح إلى الأعلى، والرأس قيمة صغرى.

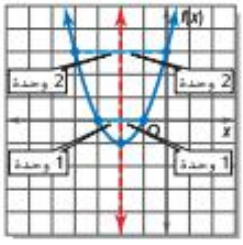
الخطوة 3 جـد التقاطع مع المحور الرأسي y.

$f(x) = x^2 + 4x + 3$ المعادلة الأصلية

$= (0)^2 + 4(0) + 3$ $x = 0$

$= 3$

التقاطع مع المحور الرأسي y هي 3.



الخطوة 4 يقسم محور التماثل القطع المكافئ إلى جزأين متساويين. ولذلك إذا كانت هناك نقطة على طرف، فإن هناك نقطة مقابلة على الطرف الآخر وتبعد المسافة نفسها عن محور التماثل ولها القيمة y نفسها.

الخطوة 5 صل النقاط بمنحنى منتظم.

تمرين موجّه **مثّل كل دالة مما يلي بيانيًا.**

5A. $f(x) = -2x^2 + 2x - 1$

5B. $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$

نصيحة دراسية

التماثل والنقاط عند تحديد مواضع نقطتين تقعان على جهتين متعاكستين من محور التماثل، فإن النقطتين ليستا متساويتي البعد عن محور التماثل فحسب، بل هما متساويتا البعد عن الرأس أيضًا.

ثمة فروقٌ عامةٌ بين الدوال الخطية والتربيعية.

	الدوال الخطية	الدوال التربيعية
المعادلة	$y = mx + b$	$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$
الدرجة	1	2
التمثيل البياني	مستقيم	قطع مكافئ
التزايد/ التناقص	$m > 0$: y متزايدة في المجال بأكمله. $m < 0$: y متناقصة في المجال بأكمله.	$a > 0$: y متناقصة إلى يسار محور التماثل ومتزايدة إلى يمينه. $a < 0$: y متزايدة إلى يسار محور التماثل ومتناقصة إلى يمينه.
السلوك الطرفي	$m > 0$، عندما تتزايد x، تتزايد y، وعندما تتناقص x، تتناقص y. $m < 0$، عندما تتزايد x، تتناقص y، وعندما تتناقص x، تتزايد y.	$a > 0$، عندما تتزايد x، تتناقص y في النصف الأيسر وعندما تتزايد x، تتناقص y في النصف الأيمن. $a < 0$، عندما تتزايد x، تتناقص y في النصف الأيسر وعندما تتزايد x، تتناقص y في النصف الأيمن

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

لقد استخدمت ما تعرفه عن الدوال التربيعية والقطوع المكافئة والتناظر أو التماثل لإعداد تمثيلات بيانية.

ويمكنك تحليل هذه التمثيلات البيانية لحل مسائل من الحياة اليومية.

الربط بالحياة اليومية

حوالي طالب واحد من كل 17 طالب من طلاب الصف الثاني عشر يلعبون كرة القدم. سيذهبون للعب في مدرسة الرابطة الوطنية NCAA للاعبين الرياضيين بين الكليات.

المصدر: الرابطة الوطنية للاعبين الرياضيين بين الكليات

مثال من الحياة اليومية 6 استخدام التمثيل البياني لدالة تربيعية

الانتباء إلى المدرسة يقذف مجلس طلاب مدرسة ثانوية قمصانًا بين جموع الطلاب كلما سجّل الفريق المضيف هدفًا. يمكن تمثيل ارتفاع القميص بالدالة $h(x) = -16x^2 + 48x + 6$، حيث تمثل $h(x)$ ارتفاع القميص بالأقدام بعد x ثانية.

a. مثّل الدالة بيانيًا.

$x = \frac{b}{2a}$ معادلة محور التماثل

$x = -\frac{48}{2(-16)}$ or $\frac{3}{2}$ $b = 48$ و $a = -16$

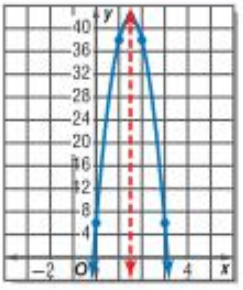
معادلة محور التماثل هي $x = \frac{3}{2}$. إذًا الإحداثي الأفقي x للرأس هو $\frac{3}{2}$.

$y = -16x^2 + 48x + 6$ المعادلة الأصلية

$= -16\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 48\left(\frac{3}{2}\right) + 6$ $x = \frac{3}{2}$

$= -16\left(\frac{9}{4}\right) + 48\left(\frac{3}{2}\right) + 6$ $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

$= -36 + 72 + 6$ or 42 بسّط



بقع الرأس عند $\left(\frac{3}{2}, 42\right)$.

لنوجد نقطةً أخرى. اختر قيمةً لـ x تساوي 0 وعوّض. تقع نقطتنا الجديدة عند $(0, 6)$. والنقطة المناظرة لها على الطرف الآخر من محور التماثل هي $(3, 6)$.

كرّر ذلك واختر قيمةً لـ x تساوي 1 لتحصل على $(1, 38)$ وتكون النقطة المناظرة لها هي $(2, 38)$. اربط النقطتين لتحصل على منحنى منتظم.

b. ما الارتفاع الذي يقذف منه القميص؟

يُقذف القميص عندما يكون الزمن 0. أو عند التقاطع مع المحور الرأسي y.

إذًا، قُذف القميص من ارتفاع 6 ft فوق سطح الأرض.

c. ما أقصى ارتفاع يبلغه القميص؟ ومتى وصل إلى الارتفاع الأقصى؟

يقابل الارتفاع الأقصى للقميص الرأس.

إذًا يبلغ القميص ارتفاعًا أقصى مقداره 42 ft. ويكون الزمن حينها $\frac{3}{2}$ أو 1.5 ثانية بعد القذف.

تمرين موجّه

6. التتبع يشارك عدنان في منافسة رمي الرمح. ويمكن تمثيل ارتفاع الرمح بالمعادلة $y = -16x^2 + 64x + 6$. حيث تمثّل y ارتفاع الرمح بالأقدام بعد مرور x ثانية.

A. مثّل بيانيًا مسار الرمح.

B. ما الارتفاع الذي رُمي منه الرمح؟

C. ما هو أقصى ارتفاع للرمح؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

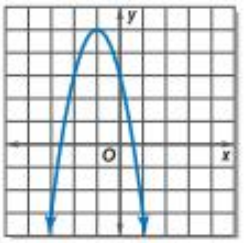
التحقق من فهمك

مثال 1 استخدم جدول قيمٍ لتمثيل كل دالة بيانيًا. واذكر المجال والمدى.

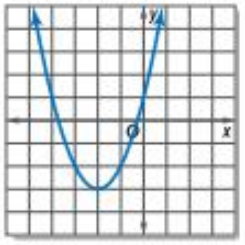
1. $y = 2x^2 + 4x - 6$
2. $y = x^2 + 2x - 1$
3. $y = x^2 - 6x - 3$
4. $y = 3x^2 - 6x - 5$

مثال 2 جـد الرأس ومعادلة محور التماثل والتقاطع مع المحور الرأسي y لكل تمثيل بياني.

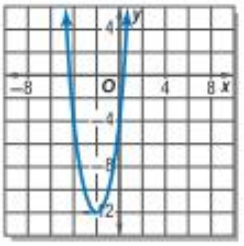
5.



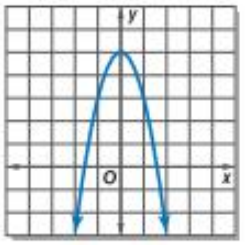
6.



7.



8.



مثال 3 جـد الرأس ومعادلة محور التماثل والتقاطع مع المحور الرأسي y للتمثيل البياني لكل دالة.

9. $y = -3x^2 + 6x - 1$
10. $y = -x^2 + 2x + 1$
11. $y = x^2 - 4x + 5$
12. $y = 4x^2 - 8x + 9$

مثال 4 احسب كل دالة مما يلي.

a. حدّد إذا ما كان للدالة قيمة عظمى أو صغرى.

b. اذكر القيمة العظمى أو الصغرى.

c. ما مجال الدالة ومداها؟

13. $y = -x^2 + 4x - 3$
14. $y = -x^2 - 2x + 2$
15. $y = -3x^2 + 6x + 3$
16. $y = -2x^2 + 8x - 6$

مثال 5 مثّل كل دالة بيانيًا.

17. $f(x) = -3x^2 + 6x + 3$
18. $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$
19. $f(x) = 2x^2 - 8x - 4$
20. $f(x) = 3x^2 - 6x - 1$

مثال 6 21. **الاستنتاج** يقذف بهلوانيّ كرةً في الهواء. ويمكن تمثيل ارتفاع الكرة بالعلاقة $y = -16x^2 + 16x + 5$. حيث تمثل y ارتفاع الكرة عند x ثانية.

a. مثّل هذه الدالة بيانيًا.

b. ما الارتفاع الذي تُرمى منه الكرة؟

c. ما أقصى ارتفاع للكرة؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التمرين وحل المسائل

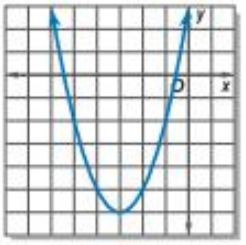
مثال 1 استخدم جدول قيم لتمثيل كل معادلة بيانيًا. واذكر المجال والمدى.

22. $y = x^2 + 4x + 6$ **23.** $y = 2x^2 + 4x + 7$ **24.** $y = 2x^2 - 8x - 5$

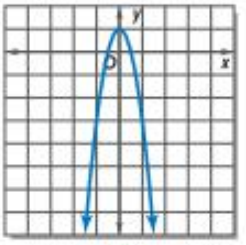
25. $y = 3x^2 + 12x + 5$ **26.** $y = 3x^2 - 6x - 2$ **27.** $y = x^2 - 2x - 1$

مثال 2 جـد الرأس ومعادلة محور التماثل والتقاطع مع المحور الرأسي y لكل تمثيل بياني.

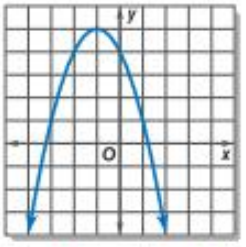
28.



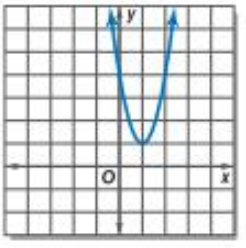
29.



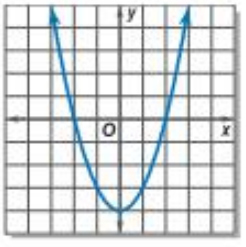
30.



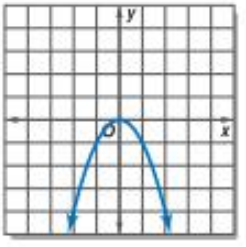
31.



32.



33.



مثال 3 جـد الرأس ومعادلة محور التماثل والتقاطع مع المحور الرأسي y لكل دالة.

34. $y = x^2 + 8x + 10$ **35.** $y = 2x^2 + 12x + 10$ **36.** $y = -3x^2 - 6x + 7$

37. $y = -x^2 - 6x - 5$ **38.** $y = 5x^2 + 20x + 10$ **39.** $y = 7x^2 - 28x + 14$

40. $y = 2x^2 - 12x + 6$ **41.** $y = -3x^2 + 6x - 18$ **42.** $y = -x^2 + 10x - 13$

مثال 4 ادرس كل دالة مما يلي.

a. حدّد إذا ما كان للدالة قيمة عظمى أو صغرى.

b. اذكر القيمة العظمى أو الصغرى.

c. ما مجال الدالة ومداها؟

43. $y = -2x^2 - 8x + 1$ **44.** $y = x^2 + 4x - 5$ **45.** $y = 3x^2 + 18x - 21$

46. $y = -2x^2 - 16x + 18$ **47.** $y = -x^2 - 14x - 16$ **48.** $y = 4x^2 + 40x + 44$

49. $y = -x^2 - 6x - 5$ **50.** $y = 2x^2 + 4x + 6$ **51.** $y = -3x^2 - 12x - 9$

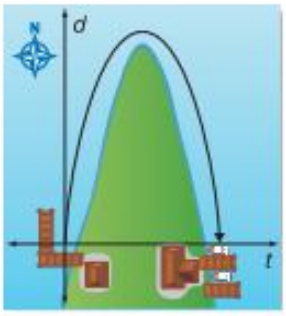
مثال 5 مثّل كل دالة بيانيًا.

52. $y = -3x^2 + 6x - 4$ **53.** $y = -2x^2 - 4x - 3$ **54.** $y = -2x^2 - 8x + 2$

55. $y = x^2 + 6x - 6$ **56.** $y = x^2 - 2x + 2$ **57.** $y = 3x^2 - 12x + 5$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

مثال 6



58. رياضة الزوارق أرست هداية زورقها في نقطة على الساحل الغربي خور دبي. ثم شرعت بالإبحار إلى مرسى دبي. يمكن تمثيل المسافة التي تقطعها هداية بالنسبة إلى الزمن بالمعادلة $d = -16t^2 + 66t$. حيث تمثل d عدد الأقدام التي تقطعها خلال t دقيقة.

a. مثّل هذه الدالة بيانيًا.

b. ما العدد الأقصى الذي قطعته من الأقدام؟

c. كم استغرقت حتى وصلت إلى ميناء الجزيرة؟

حاسبة التمثيل البياني مثل كل دالة بيانيًا. واستخدم خاصية TRACE لإيجاد الرأس على التمثيل البياني. قرّب إلى أقرب جزءٍ من الألف عند الضرورة.

59. $y = 4x^2 + 10x + 6$

60. $y = 8x^2 - 8x + 8$

61. $y = -5x^2 - 3x - 8$

62. $y = -7x^2 + 12x - 10$

63. الجولف يستطيع لاعب الجولف الهاوي أن يضرب الكرة بسرعة ابتدائية نحو الأعلى مقدارها 31.3 m في الثانية. ويمكن تمثيل الارتفاع بالعلاقة $h = -4.9t^2 + 31.3t$. حيث h ارتفاع الكرة بالأمتار بعد مرور t ثانية.

a. مثّل هذه الدالة بيانيًا. ما الذي تمثله أجزاء التمثيل البياني التي تكون فيها $h > 0$ في سياق هذه الحالة؟ وما الذي يمثله السلوك الطرفي للتمثيل البياني؟

b. ما الارتفاع الذي تُضرب منه الكرة؟

c. ما أقصى ارتفاع للكرة؟

d. كم استغرقت الكرة لتصطدم بالأرض؟

e. اذكر المدى و المجال المعقولين لهذا الموقف.

64. جمع التبرعات تبيع الفرقة الموسيقية أزهارًا لشراء ملابس جديدة. وفي العام الماضي، كانت الفرقة تبيع الزهرة الواحدة بـ 5 AED. حيث باعت حينئذٍ 150 زهرة. وتنوي رفع السعر هذا العام. ولكنها تتوقع أن تنخفض المبيعات بمقدار 10 AED مقابل كل زيادة مقدارها 1 AED. وينم التنبؤ بربح المبيعات R الناتج عن بيع الأزهار بالدرهم الإماراتي بالدالة $R = (5 + p)(150 - 10p)$. حيث p عدد زيادات السعر البالغة إحداها 1 AED.

a. اكتب الدالة بالصيغة القياسية.

b. جـد القيمة العظمى للدالة.

c. ما السعر الذي ينبغي أن تباع به الأزهار للحصول على أكبر إيرادات للبيع؟ اشرح استنتاجك.

65. القدم تُركل كرةٌ من مستوى سطح الأرض بسرعةٍ ابتدائية نحو الأعلى مقدارها 90 ft/sec. تعطي المعادلة $h = -16t^2 + 90t$ ارتفاع الكرة h بعد t ثانية.

a. ما ارتفاع الكرة بعد ثانية واحدة؟

b. متى تبلغ الكرة ارتفاع 126 ft؟

c. متى يكون ارتفاع الكرة صفرًا؟ وماذا تمثل هذه النقاط في سياق هذه الحالة؟

66. البنية بفرض أن $f(x) = x^2 - 9$.

a. ما مجال الدالة $f(x)$؟

b. ما مدى الدالة $f(x)$؟

c. ما قيم x التي تجعل الدالة $f(x)$ سالبة؟

d. عندما يكون x عددًا حقيقيًا. فما مجال الدالة $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ ومداها؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

67. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف حل المعادلات التربيعية باستخدام الجداول.

a. **جبريًا** حدّد الدالة المرتبطة بكل معادلة. وانسخ العمودين الأولين من الجدول أدناه وأكملهما.

المعادلة	الدالة المرتبطة	الأصفار	قيم y
$x^2 - x = 12$			
$x^2 + 8x = 9$			
$x^2 = 14x - 24$			
$x^2 + 16x = -28$			

b. **بيانيًا** مثّل كل دالة مرتبطة بيانيًا باستخدام حاسبة للتمثيل البياني.

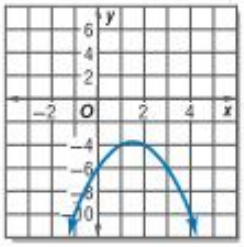
c. **تحليليًا** عدد الأصفار الحقيقية أقل من أو يساوي درجة الدالة المرتبطة. استخدم سمة الجدول على حاسبتك لتحديد أصفار كل دالة مرتبطة. ودوّن الأصفار في الجدول أعلاه. ودوّن أيضًا قيم الدالة التي تزيد بدرجة واحدةٍ عن كل صفر والتي تقل عنه بدرجة واحدة. اطلع على الجدول.

d. **لفظيًا** ادرس قيمتي الدالة المقابلتين لقيم x قبل الصفر وبعده مباشرةً. ما الذي يحدث لقيمة إشارة الدالة قبل الصفر وبعده؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

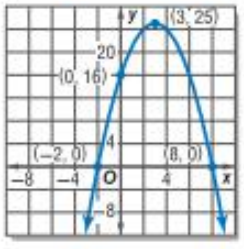
68. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب معادلةً تربيعيةً يكون لتمثيلها البياني محور التماثل $x = -\frac{3}{8}$. لخّص خطواتك.

69. **تحليل الخطأ** تعتقد سندية أن القطعين المكافئين اللذين يمثلهما التمثيل البياني لهما محور التماثل نفسه. ولكن خديجة تخالفها. اعتمادا على الرسم المجاور من منهما على صواب؟ اشرح تفكيرك.



قطع مكافئ مفتوح إلى الأسفل، ويمر بالنقطة (0, −6) وله رأس عند النقطة (2, −4)

70. **تحدٍّ** باستخدام محور التماثل، والتقاطع مع المحور الرأسي y، ونقطة تقاطع واحدة مع المحور الأفقي x، اكتب معادلةً للتمثيل البياني الموضح.



71. **البنية** للتمثيل البياني للدالة التربيعية الرأس (2, 0). وإحدى النقاط على التمثيل البياني هي (5, 9). جِد نقطةً أخرى على التمثيل البياني. واشرح كيف جِدتها.

72. **مسألة غير محددة الإجابة** صِف حالةً من الحياة اليومية تنطوي على معادلةٍ تربيعية. واشرح ماذا يمثل الرأس.

73. **الاستنتاج** أعطِ مثالاً معاكسًا يمثّل حالةً محددةً توضح أن العبارة التالية خاطئة. *رأس القطع المكافئ هو النقطة الصغرى على الدوام في تمثيله البياني.*

74. **الكتابة في الرياضيات** استخدم الجداول والتمثيلات البيانية لمقارنة أوجه التشابه والاختلاف بين الدالة $f(x) = ab^x + c$ عند $b > 0$ و $a \neq 0$ و $b \neq 1$ وبين الدالة التربيعية $g(x) = ax^2 + c$ وبين الدالة الخطية $h(x) = ax + c$. وأدرج في مقارنتك نقاط التقاطع وأجزاء التمثيل البياني التي تتزايد عندها الدوال وتتناقص وتكون موجبة أو سالبة إضافةً إلى القيم النسبية العظمى والصغرى وأوجه التماثل والسلوك النهائي. ما الدالة التي تتجاوز في النهاية الأخرى؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

75. أي مما يلي معادلة مستقيم يمر بالنقطة (2, −5) وعمودي على $2x + 4y = 8$؟

A $y = 2x + 10$
B $y = -\frac{1}{2}x - 4$
C $y = 2x - 9$
D $y = -2x - 1$

76. الهندسة تبلغ مساحة الدائرة 36π وحدة مربعة. إذا ضاعفنا نصف قطر الدائرة، فكم تكون مساحة الدائرة الجديدة؟

F 1296π وحدة مربعة
G 144π وحدة مربعة
H 72π وحدة مربعة
J 9π وحدة مربعة

77. ما مدى الدالة $f(x) = -4x^2 - \frac{1}{2}$؟

A {جميع الأعداد الصحيحة الأكبر من أو تساوي $\frac{1}{2}$}
B {جميع الأعداد الصحيحة غير السالبة}
C {جميع الأعداد الحقيقية}
D {جميع الأعداد الحقيقية الأصغر من أو تساوي $-\frac{1}{2}$}

78. إجابة قصيرة يوصل خميس الجرائد مقابل مبلغ إضافي من المال. وهو يبدأ بتوصيل الجرائد عند الساعة 3:15 P.M. وينتهي عند الساعة 5:05 P.M. فكم يستغرق خميس لينهي جولة التوصيل؟

مراجعة شاملة

حدد ما إذا كان كل ثلاثي حدود هو ثلاثي حدود مربع كامل أم لا. اكتب نعم أو لا. وإن كان كذلك، فحلّله إلى عوامله. (الدرس 9-4)

79. $4x^2 + 4x + 1$ **80.** $4x^2 - 20x + 25$ **81.** $9x^2 + 8x + 16$

حلّل كل كثيرة حدود إن أمكن إلى عواملها الأولية. فإن كان لا يُمكن تحليل كثيرة الحدود، فاكتب *أولية*. (الدرس 8-4)

82. $n^2 - 16$ **83.** $x^2 + 25$ **84.** $9 - 4a^2$

جد ناتج الضرب في كل مما يلي. (الدرس 3-4)

85. $(b - 7)(b + 3)$ **86.** $(c - 6)(c - 5)$ **87.** $(2x - 1)(x + 9)$

88. الولادات المتعددة يمكن تمثيل عدد ولادات التوائم الأربعة Q في دولة ما خلال السنوات الأخيرة بالدالة $Q = -0.5t^3 + 11.7t^2 - 21.5t + 218.6$. حيث t تمثل عدد الأعوام منذ 2002. ما العدد المتوقع من ولادات التوائم الأربعة في هذه الدولة لعام 2017؟ (الدرس 1-4)

89. القابات يمكن تقدير عدد الأمتار من الألواح B الناتجة عن الجذع باستخدام القانون $B = \frac{L}{16}(D^2 - 8D + 16)$. حيث D قطر الجذع بالسنتيمترات و L طول الجذع بالأمتار. فبالنسبة للجذوع التي يبلغ طولها 16 m. ما القطر الذي يعطي تقريبًا 256 m من الألواح؟ (الدرس 9-4)

مراجعة المهارات

جد نقطة تقاطع التمثيل البياني لكل معادلة مع المحور الأفقي x.

90. $x + 2y = 10$ **91.** $2x - 3y = 12$ **92.** $3x - y = -18$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4-1 معدل تغير الدالة التربيعية

يُطلق صاروخ اختباري من الأرض نحو الأعلى بسرعة 144 ft/sec. تمثل المعادلة $y = -16x^2 + 144x$ ارتفاع الصاروخ y بالأقدام بعد x ثانية. تستطيع باستخدام هذه الدالة دراسة معدل تغير الدالة التربيعية.

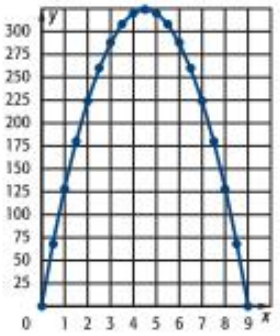
النشاط

الخطوة 1 انسخ الجدول الوارد أدناه.

x	0	0.5	1.0	1.5	...	9.0
y	0					
معدل التغير	-					

الخطوة 2 جد قيمة y المقابلة لكل قيمة x من 0 إلى 9.

الخطوة 3 مثّل الأزواج المرتبة (x, y) بيانيًا على ورق شبكي. صل بين النقاط بمنحنى. ولاحظ أن الدالة تتزايد عند $0 < x < 4.5$ وتتناقص عند $4.5 < x < 9$.



الخطوة 4 تذكّر أن *معدل التغير* هو التغير في y مقسومًا على التغير في x. جد معدل التغير لكل فترة مدتها نصف ثانية في x و y.

تمارين

استخدم الدالة التربيعية $y = x^2$.

1. أنشئ جدولاً للدالة شبيهًا بالجدول الوارد في هذا النشاط باستخدام $x = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$. وجد قيم y المقابلة لقيم x.
2. مثّل الأزواج المرتبة على ورق شبكي. وصل النقاط بمنحنى بياني منتظم. صف متى تتزايد الدالة ومتى تتناقص.
3. جد معدل تغير كل عمود بدءًا من $x = -3$. وقارن معدلات التغير حين تتزايد الدالة وحين تتناقص.
4. **تحدَّ** إذا أُسقط جسمٌ من ارتفاع 100 ft في الهواء، وكانت مقاومة الهواء مهملة، فسيسقط الجسم بسرعة يمكن تمثيلها بالدالة $f(x) = -16x^2 + 100$. حيث $f(x)$ تمثل ارتفاع الجسم بالأقدام بعد x ثانية. أعدّ جدولاً شبيهًا بجدول التمرين 1. واختر قيمًا ملائمة لـ x. املأ قيم x وقيم y ومعدلات التغير. وقارن معدلات التغير. وصف أي أنماط تلاحظها.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

4-2 حل المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني

السابق:
- لقد حللت معادلات تربيعية بالتحليل إلى العوامل.

الحالي:
1. حل المعادلات التربيعية باستخدام التمثيل البياني.
2. تقدير حلول المعادلات التربيعية باستخدام التمثيل البياني

لماذا؟

- لحلبة دورتون أرينا في كارولينا الشمالية بالولايات المتحدة شكل قطعين مكافئين متقاطعين. ويمكن تمثيل شكلي القطعين المكافئين بالمعادلة $y = -x^2 + 127x$. حيث x عرض القطع المكافئ و y طوله بالقدم. ويمكن استخدام نقاط تقاطع المنحنى لهذه الدالة مع المحور الأفقي x لإيجاد المسافة بين نقاط التقاء القطع المكافئ مع الأرض.

المفردات الجديدة

جذر مكرر (double root)

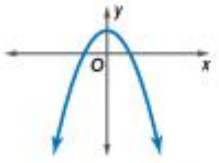
ممارسات في الرياضيات

بناء قرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين. مراعاة الدقة.

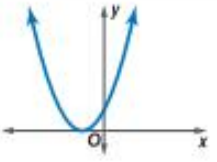
1 الحل بالتمثيل البياني

يمكن كتابة المعادلات التربيعية بالصيغة القياسية $ax^2 + bx + c = 0$. حيث $a \neq 0$. ولكتابة دالةٍ تربيعيةٍ في صورة معادلة. عوّض عن y أو $f(x)$ بـ 0. تذكّر أنه يمكن تحديد حلول معادلة أو جذورها بإيجاد نقاط تقاطع المنحنى المرتبط بها مع المحور الأفقي x.

المفهوم الأساسي حلول المعادلات التربيعية



حلان حقيقيان مختلفان



حل حقيقي وحيد

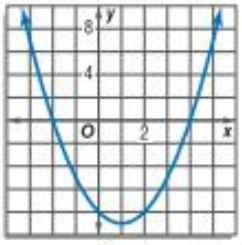
لا حلول حقيقية

مثال 1 جذران

حُلّ $x^2 - 2x - 8 = 0$ بالتمثيل البياني.

مثّل الدالة المرتبطة $f(x) = x^2 - 2x - 8$ بيانيًا.

يبدو أن نقاط تقاطع المنحنى مع المحور الأفقي x تقع عند النقطتين -2 و 4. ولذلك فالحلّان هما -2 و 4.



التحقق تحقق من الحل في المعادلة الأصلية. المعادلة الأصلية

$x^2 - 2x - 8 = 0$ | بسّط. | $x^2 - 2x - 8 = 0$

$(4)^2 - 2(4) - 8 \stackrel{?}{=} 0$ | $x = -2$ أو $x = 4$ | $(-2)^2 - 2(-2) - 8 \stackrel{?}{=} 0$

$0 = 0$ ✓ | | $0 = 0$ ✓

تمرين موجّه حُلّ كل معادلة بالتمثيل البياني.

1A. $-x^2 - 3x + 18 = 0$

1B. $x^2 - 4x + 3 = 0$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

كان الحلان في المثال 1 عددين مختلفين. ويكون الجذران في بعض الأحيان عددًا واحدًا يدعى **الجذر المكرر**.

مثال 2 الجذر المكرر

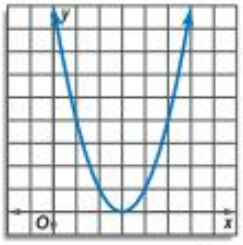
حُلّ $x^2 - 6x = -9$ بالتمثيل البياني.

الخطوة 1 أعد كتابة المعادلة بالصيغة القياسية.

$x^2 - 6x = -9$ المعادلة الأصلية

$x^2 - 6x + 9 = 0$ أضف 9 إلى كل طرف

الخطوة 2 مثّل الدالة المرتبطة بيانيًا $f(x) = x^2 - 6x + 9$.



الخطوة 3 عيّن نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x. ولاحظ أن رأس القطع المكافئ هو نقطة التقاطع الوحيدة مع المحور الأفقي x. ولذلك، ثمة حل وحيد فقط، وهو 3.

التحقق حلّ باستخدام التحليل إلى العوامل.

$x^2 - 6x + 9 = 0$ المعادلة الأصلية

$(x - 3)(x - 3) = 0$ حلل إلى العوامل.

$x - 3 = 0$ or $x - 3 = 0$ خاصية ناتج الضرب الصفري

$x = 3$ $x = 3$ أضف 3 إلى كل طرف.

الحل الوحيد هو 3.

انتبه!

الدقة قد تبدو حلول المعادلة التي عثر عليها من التمثيل البياني دقيقة. فتحقق منها في المعادلة الأصلية للتحقق.

تمرين موجّه

حُلّ كل معادلة بالتمثيل البياني.

2A. $x^2 + 25 = 10x$ **2B.** $x^2 = -8x - 16$

في بعض الأحيان لا تكون الجذور أعدادًا حقيقية. ويمكن أن يكون للمعادلات التربيعية حلّان حقيقيان أو حلّ واحدٌ أو ألا يكون لها حلولٌ حقيقية. وقد قادتنا المعادلات التربيعية ذات الحلول التي ليست أعدادًا حقيقية إلى توسيع نظام الأعداد ليتيح حلولاً لهذه المعادلات. وتدعى تلك الأعداد *بالأعداد المركبة*.

وستدرس الأعداد المركبة في الجبر 2.

مثال 3 لا جذور حقيقية

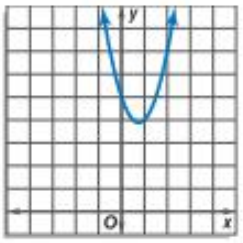
حُلّ $2x^2 - 3x + 5 = 0$ بالتمثيل البياني.

الخطوة 1 أعد كتابة المعادلة بالصيغة القياسية.

يمكن إعادة كتابة هذه المعادلة بالصيغة القياسية.

الخطوة 2 مثّل الدالة المرتبطة بيانيًا.

$f(x) = 2x^2 - 3x + 5$.



الخطوة 3 حدد نقاط تقاطع المنحنى مع المحور الأفقي x. ليس للتمثيل البياني نقاط تقاطع مع المحور الأفقي x. ولذلك فليس لهذه المعادلة حلول من الأعداد الحقيقية. مجموعة الحلول هي $\varnothing$.

تمرين موجّه

حُلّ كل معادلة بالتمثيل البياني.

3A. $-x^2 - 3x = 5$ **3B.** $-2x^2 - 8 = 6x$

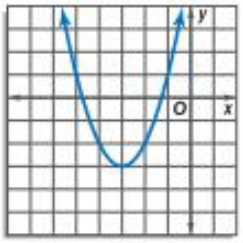
McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © محفوظ الطبع والتأليف

2 تقدير الحلول

لقد كانت الجذور التي توصلنا إليها إلى الآن أعدادًا صحيحة. ولكن جذور المعادلات التربيعية لا تكون في العادة أعدادًا صحيحة. وفي هذه الحالات، استخدم التقدير لتقريب جذور المعادلة.

مثال 4 تقريب الجذور بواسطة جدول

حُلّ $x^2 + 6x + 6 = 0$ باستخدام التمثيل البياني. فإذا لم يكن من الممكن إيجاد جذورٍ صحيحة، فقدّر الجذور مقربةً إلى أقرب جزءٍ من عشرة.



مثّل الدالة المرتبطة $f(x) = x^2 + 6x + 6$ بيانيًا.

نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x تقع بين -5 و -4 وبين -2 و -1.

أعدّ جدولاً باستخدام زيادةٍ مقدارها 0.1 لقيم x الواقعة بين -5 و -4 وبين -2 و -1.

ابحث عن تغير في إشارات قيم الدالة. وقيمة الدالة الأقرب إلى الصفر هي التقريب الأفضل لصفر الدالة.

x	−4.9	−4.8	−4.7	−4.6	−4.5	−4.4	−4.3	−4.2	−4.1
y	0.61	0.24	−0.11	−0.44	−0.75	−1.04	−1.31	−1.56	−1.79

x	−1.9	−1.8	−1.7	−1.6	−1.5	−1.4	−1.3	−1.2	−1.1
y	−1.79	−1.56	−1.31	−1.04	−0.75	−0.44	−0.11	0.24	0.61

في كل جدول، قيمة الدالة الأقرب إلى الصفر عند تغير الإشارة هي -0.11. ولذلك فالجذران هما -4.7 و -1.3 على وجه التقريب.

تمرين موجّه

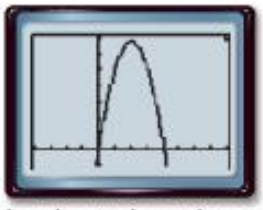
4. حُلّ $2x^2 + 6x - 3 = 0$ باستخدام التمثيل البياني. فإذا لم يكن من الممكن إيجاد جذورٍ صحيحة، فقدّر الجذور مقربةً إلى أقرب جزءٍ من عشرة.

نصيحة دراسية

مواضع الأصفار بما أن الدوال التربيعية متصلة، فيجب أن يكون هناك صفر بين قيمتي اللتان تحملان قيمتا y المتناظرتان المتقابلتين لهما إشارتان معاكستان.

يعدّ تقريب نقاط تقاطع التمثيلات البيانية مع المحور الأفقي x مفيدًا في تطبيقات الحياة اليومية.

مثال 5 من الحياة اليومية تقريب الجذور بواسطة آلة حاسبة


[−4, 7] scl: 1 by [−10, 70] scl: 10

كرة القدم يركل حارس مرمى الكرة بسرعةٍ متجهةٍ نحو الأعلى مقدارها 19.8 ft/s، وتلتقي قدمه بالكرة على ارتفاع 30.5 ft فوق سطح الأرض. تمثل الدالة التربيعية $h = -16t^2 + 65t + 1$ ارتفاع الكرة h بالأقدام بعد t ثانية. كم تبقى الكرة في الهواء تقريبًا؟

عليك إيجاد جذور المعادلة $0 = -16t^2 + 65t + 1$. استعمل حاسبة التمثيل البياني لتمثيل الدالة المرتبطة بيانيًا $f(x) = -16t^2 + 65t + 1$.

تقع نقطة تقاطع المنحنى مع المحور الأفقي x عند القيمة 4 تقريبًا. ولذلك تبقى الكرة في الهواء مدة 4 ثوانٍ تقريبًا.

تمرين موجّه

5. إذا ركل الحارس الكرة بسرعة متجهة إلى الأعلى مقدارها 16.7 m/s ولامست قدمه الكرة على ارتفاع 60.96 cm فوق سطح الأرض. فكم تبقى الكرة في الهواء؟

الربط بالحياة اليومية

بدأت لعبة كرة القدم عام 1863 في بريطانيا بعد تأسيس جمعيةٍ لها. وهي تمارس في جميع قارات العالم.

المصدر: Sports Know How

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التحقق من فهمك

الأمثلة 1-3 **حُلّ كل معادلة بالتمثيل البياني.**

1. $x^2 + 3x - 10 = 0$
2. $2x^2 - 8x = 0$
3. $x^2 + 4x = -4$
4. $x^2 + 12 = -8x$

الأمثلة 4 **حُلّ كل معادلة بالتمثيل البياني. فإذا كان لا يُمكن إيجاد جذورٍ صحيحة، فقدّر الجذور مقربةً إلى أقرب جزءٍ من عشرة.**

5. $-x^2 - 5x + 1 = 0$
6. $-9 = x^2$
7. $x^2 = 25$
8. $x^2 - 8x = -9$

الأمثلة 5 9. **معرض العلوم** بنى زايد صاروخًا تجريبيًا. ويمكن تمثيل طيران الصاروخ بالمعادلة الموضحة، حيث h ارتفاع الصاروخ بالقدم بعد t ثانية. فكم مكث الصاروخ في الهواء تقريبًا؟

التمرين وحل المسائل

الأمثلة 1-3 **حُلّ كل معادلة بالتمثيل البياني.**

10. $x^2 + 7x + 14 = 0$
11. $x^2 + 2x - 24 = 0$
12. $x^2 - 16x + 64 = 0$
13. $x^2 - 5x + 12 = 0$
14. $x^2 + 14x = -49$
15. $x^2 = 2x - 1$
16. $x^2 - 10x = -16$
17. $-2x^2 - 8x = 13$
18. $2x^2 - 16x = -30$
19. $2x^2 = -24x - 72$
20. $-3x^2 + 2x = 15$
21. $x^2 = -2x + 80$

الأمثلة 4 **حُلّ كل معادلة باستخدام التمثيل البياني. فإذا كان لا يُمكن إيجاد جذورٍ صحيحة، فقدّر الجذور مقربةً إلى أقرب جزءٍ من عشرة.**

22. $x^2 + 2x - 9 = 0$
23. $x^2 - 4x = 20$
24. $x^2 + 3x = 18$
25. $2x^2 - 9x = -8$
26. $3x^2 = -2x + 7$
27. $5x = 25 - x^2$

الأمثلة 5 28. **الكرة اللينة** تمثل المعادلة $h = -16t^2 + 47t + 3$ ارتفاع كرةٍ لينة h بالأقدام، وذلك بعد أن ضربتها أماني بـ t ثانية. فكم تبقى الكرة في الهواء؟

29. **ألعاب الملاهي** تنطلق الإفعوانية بالراكبين إلى الأعلى بمسارٍ مستقيم ثم يهبط بهم بمسارٍ مستقيم. تمثل المعادلة $h = -16t^2 + 122t$ ارتفاع الراكبين h بالأقدام من موقع انطلاقهم بعد t ثانية. فكم سيمضي وقت حتى يعود الركاب إلى الأرض؟

استعمل التحليل إلى العوامل لتحديد عدد مرات تقاطع منحنى كل دالة مع المحور الأفقي x. وحدّد كل صفر.

30. $y = x^2 - 8x + 16$
31. $y = x^2 + 4x + 4$
32. $y = x^2 + 2x - 24$
33. $y = x^2 + 12x + 32$

34. **نظرية الأعداد** استخدم معادلةً تربيعيةً لإيجاد عددين مجموعهما 9 وحاصل ضربهما 20.

35. **نظرية الأعداد** استخدم معادلةً تربيعيةً لإيجاد عددين مجموعهما 1 وحاصل ضربهما 12-.

36. **التمثيل** يمكن تمثيل ارتفاع كرة الجولف في الهواء بالمعادلة $h = -16t^2 + 76t$. حيث h ارتفاع الكرة بالأقدام بعد t ثانية.

a. كم مكثت الكرة في الهواء؟
b. ما أقصى ارتفاع للكرة؟
c. متى ستصل الكرة لأقصى ارتفاع؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

37. **التزلج** تشارك عائشة في منافسة التزحلق الهوائي الحر. تمثل المعادلة $h = -16t^2 + 30t + 10$ ارتفاع عائشة h بالأقدام بعد مضي t ثانيةً من مغادرة المنحدر.

a. كم مكثت عائشة في الهواء؟

b. متى ستصل عائشة ارتفاع 15 ft؟

c. للحصول على نقاط إضافية في المسابقة، على المتسابق أن يصل ارتفاع 20 ft. فهل ستحصل عائشة نقاط اضافية؟

38. **التمثيلات المتعددة** ستستكشف في هذه المسألة كيفية التفسير الإضافي للعلاقة بين الدوال التربيعية والتمثيلات البيانية.

a. **بيانيًا** مثّل بيانيًا $y = x^2$.

b. **تحليليًا** اكتب اسم الرأس ونقطتين أخريين على المنحنى.

c. **بيانيًا** مثّل $y = x^2 + 2$ و $y = x^2 + 4$ و $y = x^2 + 6$ على المستوى الإحداثي نفسه كما في المنحنى السابق.

d. **تحليليًا** اكتب احداثيات الرأس ونقطتين من كلٍ من هذه المنحنيات التي لها الإحداثيات الأفقية x الخاصة بالمنحنى الأول نفسها.

e. **تحليليًا** ما النتيجة التي يمكنك استخلاصها من هذا؟

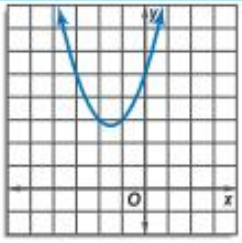
حاسبة التمثيل البياني **حُلّ كل معادلة بالتمثيل البياني.**

39. $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$

40. $x^3 - 8x^2 + 15x = 0$

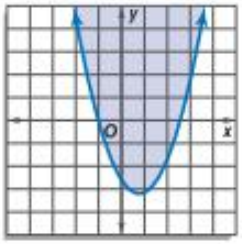
مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

41. **النقد** يوجد إسماعيل وأسامة عدد الأصفار الحقيقية للدالة الممثلة بيانيًا على اليسار. ويقول إسماعيل إن الدالة ليست لها أصفار بسبب عدم وجود نقاط تقاطع مع المحور الأفقي x. ويقول أسامة إن للدالة صفرًا حقيقيًا واحدًا لأن للتمثيل البياني نقطة تقاطع واحدة مع المحور الرأسي y. فهل أي منهما على صواب؟ أشرح تفكيرك.



42. **مسألة غير محددة الإجابة** صف حالةً من الحياة اليومية ينتقل فيها جسمٌ مقذوفٌ في الهواء. واكتب معادلةً تمثل ارتفاع الجسم بالنسبة إلى الزمن. وحدد المدة التي ينتقل خلالها الجسم في الهواء.

43. **الاستنتاج** المنحنى الموضح يخص متباينة تربيعية . حلل المنحنى وحدد ما إذا كانت قيمة y الخاصة بحل المتباينة أكبر *أحيانًا*، *أو دائما*، *أو ليست أكبر مطلقًا* من 2. اشرح.



44. **تحدٍّ** اكتب معادلةً تربيعيةً لها الجذور الموصوفة.

a. جذر مضاعف وحيد

b. جذر نسبي واحد (غير صحيح) وجذر صحيح واحد

c. جذران صحيحان مميزان يشكّلان نظيرين جمعيين.

45. **تحدٍّ** جد جذر $x^2 = 2.25$ دون استخدام آلة حاسبة. واشرح إستراتيجيتك.

46. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيفية تقريب كسور معادلة تربيعية عندما لا تكون الجذور أعدادًا صحيحة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

47. أحرز خلف 50 نقطة من أصل 80 نقطة في أحد الاختبارات. فما النسبة المئوية التي أحرزها خلف في الاختبار؟

A 62.5%
B 16%
C 6.25%
D 1.6%

48. يحتاج بدر أن يرخي برغيًا. ويتطلب ذلك مفتاحًا مقاسه أصغر من $\frac{7}{8}$ in وأكبر من $\frac{3}{4}$ in . فأي من القياسات التالية على بدر أن يستخدم؟

F $\frac{3}{8}$ inch
G $\frac{5}{8}$ inch
H $\frac{13}{16}$ inch
J $\frac{15}{16}$ inch

49. إجابة موسعة يغادر زورقان رصيف الميناء. وينتقل أحدهما مسافة 4 km شرقًا ثم 5 km شمالاً. بينما ينتقل الآخر مسافة 12 km جنوبًا و 9 km غربًا. صمم رسمًا تخطيطيًا يمثل المسارات التي يقطعها الزورقان.وما المسافة التي تفصل بينهما بالكيلومترات؟

50. يمثل القانون $s = \frac{1}{2}at^2$ المسافة s بالأمتار التي يقطعها جسمٌ ساقطٌ سقوطًا حرًا على كوكبٍ ما أو على القمر خلال زمنٍ معطى t بالثواني. حَل القانون لإيجاد a وهو التسارع الناتج عن الجاذبية.

A $a = \frac{1}{2}t^2 - s$
B $a = 2s - t^2$
C $a = s - \frac{1}{2}t^2$
D $a = \frac{2s}{t^2}$

مراجعة شاملة

اكتب معادلة محور التماثل، وجـد إحداثيات رأس منحنى كل دالة. وحدّد إن كان الرأس نقطةً عظمى أو صغرى، ثم مثّل الدالة بيانيًا. (الدرس 1-4)

51. $y = 3x^2$
52. $y = -4x^2 - 5$
53. $y = -x^2 + 4x - 7$
54. $y = x^2 - 6x - 8$
55. $y = 3x^2 + 2x + 1$
56. $y = -4x^2 - 8x + 5$

حَلّ كلّ معادلة مما يلي، وتحقق الحلول. (الدرس 9-4)

57. $2x^2 = 32$
58. $(x - 4)^2 = 25$
59. $4x^2 - 4x + 1 = 16$
60. $2x^2 + 16x = -32$
61. $(x + 3)^2 = 5$
62. $4x^2 - 12x = -9$

جـد كل مجموع أو فرق. (الدرس 1-4)

63. $(3n^2 - 3) + (4 + 4n^2)$
64. $(2d^2 - 7d - 3) - (4d^2 + 7)$
65. $(2b^3 - 4b^2 + 4) - (3b^4 + 5b^2 - 9)$
66. $(8 - 4h^2 + 6h^4) + (5h^2 - 3 + 2h^3)$

مراجعة المهارات

مثّل كل دالة بيانيًا.

67. $y = x^2 + 5$
68. $y = x^2 - 8$
69. $y = 2x^2 - 7$
70. $y = -x^2 + 2$
71. $y = -0.5x^2 - 3$
72. $y = (-x)^2 + 1$

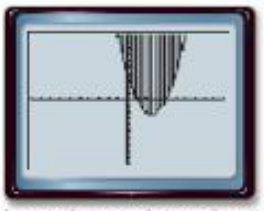
McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

4-2 مختبر تقنية التمثيل البياني
المتباينات التربيعية

تذكّر أن منحنى المتباينة الخطية يتألف من الحدّ ومن نصف المستوى المظلل. وتقع مجموعة حلول المتباينة في المنطقة المظللة من المنحنى. ومنحنى المتباينات التربيعية يشبه منحنى المتباينات الخطية.

النشاط 1 ظلّل الجزء الداخلي من القطع المكافئ

مثّل $y \geq x^2 - 5x + 4$ بيانيًا في نافذة العرض القياسية.


[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

أولاً. امسح جميع الدوال من قائمة $Y =$.

لتمثيل $y \geq x^2 - 5x + 4$ بيانيًا. أدخل المعادلة في القائمة $Y =$.
ثم استخدم السهم الأيسر لاختيار =. واضغط على ENTER إلى حين اختيار التظليل فوق السّطر.

خطوات العملية على الحاسبة: ◀ ◀ ENTER ENTER ◀ ▶ X,T,θ,n x^2 — 5 X,T,θ,n + 4 ZOOM 6

تقع جميع الأزواج المرتبة التي من أجلها y *أكبر أو تساوي* $x^2 - 5x + 4$ فوق *الخط أو عليه* وهي عبارة عن حلول.

وسيُستخدم إجراء مشابه للتمثيل البياني لمتباينات تقع المنطقة المظللة بالنسبة لها خارج القطع المكافئ.

النشاط 2 ظلّل الجزء الداخلي من القطع المكافئ

مثّل $y - 4 \leq x^2 - 5x$ بيانيًا في نافذة العرض القياسية.

[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

امسح التمثيل البياني المعروض أولاً.

خطوات العملية على الحاسبة: Y= CLEAR

ثم أعد كتابة $y - 4 \leq x^2 - 5x$ في صورة $y \leq x^2 - 5x + 4$. ومثلها بيانيًا.

خطوات العملية على الحاسبة: ◀ ◀ ENTER ENTER ENTER ▶ ▶ X,T,θ,n x^2 — X,T,θ,n + 4 GRAPH 5

تقع جميع الأزواج المرتبة التي من أجلها y *أصغر أو تساوي* $x^2 - 5x + 4$
تحت *الخط أو عليه* وهي عبارة عن حلول.

تمارين

1. قارن وقابل التمثيلين البيانيين الموضحين أعلاه.
2. مثل $y - 2x + 6 \geq 5x^2$ بيانيًا في نافذة العرض القياسية.
   واذكر أسماء ثلاثة حلول للمتباينة.
3. مثل $y - 6x \leq -x^2 - 3$ بيانيًا في نافذة العرض القياسية.
   واذكر أسماء ثلاثة حلول للمتباينة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4-3 حَلّ المعادلات التربيعية بإكمال المربع

السابق
- لقد حللت معادلات تربيعية باستخدام خاصية الجذر التربيعي.

الحالي
1 إكمال المربع في حالة ثلاثي حدود ليس مربعا كاملا.
2 حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع.

لماذا؟
- في المسابقات، يقذف المتزلجون أنفسهم من نصف أنبوب إلى الهواء لتنفيذ الحِيَل. يمكن استخدام المعادلة $h = -16t^2 + 20t + 12$ لتمثيل ارتفاعهم بالأمتار بعد t من الثواني.

لإيجاد مدى طول المتزلج في الهواء إذا كان على ارتفاع 25 مترا من نصف الأنبوب، يمكنك إيجاد حل $-16t^2 + 20t + 12 = 25$ باستخدام طريقة تُسمّى إكمال المربع.

المفردات الجديدة

إكمال المربع
completing the square

ممارسات في الرياضيات
استخدام نماذج الرياضيات.

1 إكمال المربع

لقد حللت سابقًا المعادلات باستخدام الجذر التربيعي لكل طرف. لم تصلح هذه الطريقة إلا لأن التعبير الموجود على الطرف الأيسر كان مربعًا كاملاً. في ثلاثيات حدود المربع الكامل التي يكون فيها المعامل الرئيسي 1، توجد علاقة بين **معامل الحد x** و**الحد الثابت**.

$$(x + 5)^2 = x^2 + 2(5)(x) + 5^2$$
$$= x^2 + 10x + 25$$

لاحظ أن $25 = \left(\frac{10}{2}\right)^2$. للحصول على الحد الثابت، اقسم معامل الحد x على 2 وربّع الناتج. يمكن تحويل أي تعبير تربيعي في الصيغة $x^2 + bx$ إلى مربع كامل باستخدام طريقة تُسمّى **إكمال المربع**.

المفهوم الأساسي إكمال المربع

الشرح لإكمال المربع لأي تعبير تربيعي للصيغة $x^2 + bx$. اتبع الخطوات التالية.

الخطوة 1 جد نصف b، المعامل x.

الخطوة 2 ربّع ناتج الخطوة 1.

الخطوة 3 اجمع ناتج الخطوة 2 إلى $x^2 + bx$.

الرموز $$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

مثال 1 اكمال المربع

جد قيمة c التي تجعل $x^2 + 4x + c$ ثلاثي حدود مربع كامل.

الطريقة 1 استخدام القطع الجبرية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

نصيحة دراسية

الخوارزميات الخوارزمية عبارة عن سلسلة من الخطوات لتنفيذ إجراء أو حلّ مسألة.

الطريقة 2 استخدام خوارزمية إكمال المربع.

الخطوة 1 جِـد $\frac{1}{2}$ من 4. $\frac{4}{2}=2$

الخطوة 2 ربّع الناتج في الخطوة 1. $2^2=4$

الخطوة 3 أضف ناتج الخطوة 2 إلى x^2+4x. x^2+4x+4

وبالتالي، $c = 4$. لاحظ أن $x^2+4x+4=(x+2)^2$.

تمرين موجّه

1. جِـد قيمة c التي تجعل r^2-8r+c ثلاثي حدود مربع كامل.

2 حَلّ المعادلات بإكمال المربع

يمكنك إكمال المربع لحل المعادلات التربيعية. أولاً، يجب عليك جعل الحدين x^2 و bx بطرف واحد.

مثال 2 حلّ معادلة بإكمال المربع

حُلّ المعادلة: $x^2-6x+12=19$ بإكمال المربع.

$x^2-6x+12=19$	المعادلة الأصلية
$x^2-6x=7$	اطرح 12 من كل طرف.
$x^2-6x+9=7+9$	نظرًا لأن $\left(\frac{-6}{2}\right)^2=9$، فأضف 9 لكل طرف.
$(x-3)^2=16$	حلل إلى العوامل x^2-6x+9.
$x-3=\pm4$	احسب الجذر التربيعي لكل طرف.
$x=3\pm4$	أضف 3 إلى كل طرف.
$x=3+4$ or $x=3-4$	افصل الحلول.
$=7$ $\quad =-1$	الحلّان هما 7 و -1.

تمرين موجّه

2. حل $x^2-12x+3=8$ بإكمال المربع.

لحل معادلة تربيعية لا يكون المعامل الرئيسي فيها 1. قسّم كل حد على المعامل. وبعد ذلك افصل الحدين x^2 - و x وأكمل المربع.

مثال 3 معادلة مع $a \neq 1$

حُلّ المعادلة: $-2x^2+8x-18=0$ بإكمال المربع.

$-2x^2+8x-18=0$	المعادلة الأصلية
$\frac{-2x^2+8x-18}{-2}=\frac{0}{-2}$	اقسم كل طرف على -2.
$x^2-4x+9=0$	بسّط.
$x^2-4x=-9$	اطرح 9 من كل طرف.
$x^2-4x+4=-9+4$	نظرًا لأن $\left(\frac{-4}{2}\right)^2=4$، فأضف 4 إلى كل طرف.
$(x-2)^2=-5$	حلل إلى العوامل x^2-4x+4.

لا توجد أعداد حقيقية لها مربع سالب. إذن، هذه المعادلة ليس لها حلول حقيقية.

انتبه!

المعامل الرئيسي تذكر أن المعامل الرئيسي يجب أن يكون 1 قبل أن تكمل المربع.

تمرين موجّه

3. حلّ المعادلة: $3x^2-9x-3=21$ بإكمال المربع.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الربط بالحياة اليومية

تنع منافسة أقدم المدارس الثانوية العامة بين مدرسة ويلزلي الثانوية ومدرسة مرتفعات نيدهام الثانوية في ماساتشوستس. وقد وقعت أول مباراة كرة قدم بينهما في عام 1882 في نيدهام.

المصدر: مجلة USA Football

مثال من الحياة اليومية 4 استخدام منحنى الدالة التربيعية

القمصان الرياضية يشتري طلاب السنة الأخيرة في مدرسة ثانوية قمصانًا رياضية لارتدائها من أجل ألعاب كرة القدم. يمكن تمثيل تكلفة القمصان بالمعادلة $C = 0.1x^2 + 2.4x + 25$، حيث C هو المبلغ الذي يكلفه شراء عدد x من القمصان. فكم عدد القمصان التي بإمكانهم شراؤها مقابل 430 AED؟

يمتلك طلاب السنة الأخيرة 430 AED. لذا اجعل المعادلة تساوي 430 وأكمل المربع.

$0.1x^2 + 2.4x + 25 = 430$	المعادلة الأصلية
$\frac{0.1x^2 + 2.4x + 25}{0.1} = \frac{430}{0.1}$	اقسم كل طرف على 0.1.
$x^2 + 24x + 250 = 4300$	بسّط.
$x^2 + 24x + 250 - 250 = 4300 - 250$	اطرح 250 من كل طرف.
$x^2 + 24x = 4050$	بسّط.
$x^2 + 24x + 144 = 4050 + 144$	نظرًا لأن $\left(\frac{24}{2}\right)^2 = 144$، فأضف 144 إلى كل طرف.
$x^2 + 24x + 144 = 4194$	بسّط.
$(x + 12)^2 = 4194$	حلل إلى العوامل $x^2 + 24x + 144$.
$x + 12 = \pm\sqrt{4194}$	احسب الجذر التربيعي لكل طرف.
$x = -12 \pm \sqrt{4194}$	اطرح 12 من كل طرف.

استخدم حاسبة لتقريب كل قيمة x.

$x = -12 - \sqrt{4194}$ أو $x = -12 + \sqrt{4194}$	افصل الحلول.
≈ -76.8 ≈ 52.8	جد قيمة.

بما أنه لا يمكنك شراء عدد سالب من القمصان الرياضية، فإن الحل السالب غير منطقي. يمكن لطلاب السنة الأخيرة تحمل شراء 52 قميصًا رياضيًا.

تمرين موجّه

4. إذا كان طلاب السنة الأخيرة قادرين على زيادة المبلغ إلى 620 AED. فكم عدد القمصان التي باستطاعتهم شراؤها؟

التحقق من فهمك

المثال 1 **جد قيمة c التي تجعل كل ثلاثي حدود مربعًا كاملاً.**

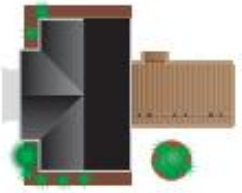
1. $x^2 - 18x + c$
2. $x^2 + 22x + c$
3. $x^2 + 9x + c$
4. $x^2 - 7x + c$

المثالان 2–3 **حُلّ كل معادلة بإكمال المربع. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.**

5. $x^2 + 4x = 6$
6. $x^2 - 8x = -9$
7. $4x^2 + 9x - 1 = 0$
8. $-2x^2 + 10x + 22 = 4$

المثال 4

9. تمثيل النماذج يبني طارق شرفةً خشبية خلف منزل عائلته. ولديه ما يكفي من الخشب لتصبح مساحة الشرفة $144\ ft^2$. ويجب أن يكون طول الشرفة أكبر من عرضها بـ 10 ft. فما الأبعاد التي يجب أن تكون عليها الشرفة؟



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 1 **جـد قيمة c التي تجعل كل ثلاثي حدود مربعًا كاملاً.**

10. $x^2 + 26x + c$
11. $x^2 - 24x + c$
12. $x^2 - 19x + c$
13. $x^2 + 17x + c$
14. $x^2 + 5x + c$
15. $x^2 - 13x + c$
16. $x^2 - 22x + c$
17. $x^2 - 15x + c$
18. $x^2 + 24x + c$

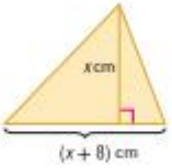
المثالان 3-2 **حُلّ كل معادلة مما يلي بإكمال المربع. وقرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.**

19. $x^2 + 6x - 16 = 0$
20. $x^2 - 2x - 14 = 0$
21. $x^2 - 8x - 1 = 8$
22. $x^2 + 3x + 21 = 22$
23. $x^2 - 11x + 3 = 5$
24. $5x^2 - 10x = 23$
25. $2x^2 - 2x + 7 = 5$
26. $3x^2 + 12x + 81 = 15$
27. $4x^2 + 6x = 12$
28. $4x^2 + 5 = 10x$
29. $-2x^2 + 10x = -14$
30. $-3x^2 - 12 = 14x$

مثال 4 31. **المعرفة المالية** يمكن تمثيل السعر p بالدرهم الإماراتي لسهمٍ معين عن طريق المعادلة التربيعية $p = 3.5t - 0.05t^2$. حيث t تمثل عدد الأيام بعد شراء السهم. إذن. متى تكون قيمة السهم AED 60؟

الهندسة جـد قيمة x لكل شكل. وقرّب لأقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

32. $A = 45\ \text{cm}^2$

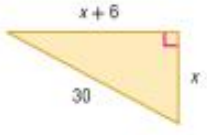


33. $A = 110\ \text{m}^2$

34. **نظرية الأعداد** ناتج ضرب عددين صحيحين زوجيين متتاليين هو 224. جـد الأعداد الصحيحة.

35. **الدقة** ناتج ضرب عددين صحيحيين فرديين سالبين متتاليين هو 483. جـد الأعداد الصحيحة.

36. **الهندسة** جـد مساحة المثلث أدناه.



حُلّ كل معادلة مما يلي بإكمال المربع. وقرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

37. $0.2x^2 - 0.2x - 0.4 = 0$
38. $0.5x^2 = 2x - 0.3$
39. $2x^2 - \frac{11}{5}x = -\frac{3}{10}$
40. $\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x = \frac{5}{6}$
41. $\frac{1}{4}x^2 + 2x = \frac{3}{8}$
42. $\frac{2}{5}x^2 + 2x = \frac{1}{5}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

43. **علم الفلك** يُعطى ارتفاع جسمٍ ما عدد t من الثواني بعد سقوطه بالعلاقة $h = -\frac{1}{2}gt^2 + h_0$. حيث h_0 هو الارتفاع الابتدائي و g هو التسارع بسبب الجاذبية. يكون التسارع بسبب الجاذبية قرب سطح المريخ $3.73\ m/s^2$. بينما يكون على الأرض $9.8\ m/s^2$. افترض أن جسمًا يسقط من ارتفاع ابتدائي يبلغ 120 m فوق سطح كل كوكب.

a. على سطح أي كوكب سيصل الجسم أولاً؟

b. كم المدة التي سيستغرقها الجسم للوصول إلى الأرض على كل كوكب؟ قرّب كل إجابة لأقرب جزء من عشرة.

c. هل تبدو الأزمنة التي يستغرقها الجسم للوصول إلى الأرض منطقيةً؟ اشرح استنتاجك.

44. جِد جميع قيم c التي تجعل $x^2 + cx + 100$ ثلاثي حدود مربع كامل.

45. جِد جميع قيم c التي تجعل $x^2 + cx + 225$ ثلاثي حدود مربع كامل.

46. **الرسم** قبل أن تبدأ شيماء برسم صورة، تشد قماشها على إطارٍ خشبي. يبلغ طول الإطار 60 cm وعرضه 4 cm. ولديها ما يكفي من القماش لتغطية $480\ cm^2$. وتقرر شيماء زيادة أبعاد الإطار. فإذا كانت الزيادة في الطول 10 أمثال الزيادة في العرض، فما هي الأبعاد التي يكون عليها الإطار؟ في .

47. **التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، سوف تستكشف خاصية المعادلات التربيعية.**

ثلاثي حدود	$b^2 - 4ac$	عدد الجذور
$x^2 - 8x + 16$	0	1
$2x^2 - 11x + 3$		
$3x^2 + 6x + 9$		
$x^2 - 2x + 7$		
$x^2 + 10x + 25$		
$x^2 + 3x + 12$		

a. **جدوليًا** انسخ الجدول الموضح وأكمل العمود الثاني.

b. **جبريًا** اجعل كل ثلاثي حدود يساوي الصفر، وحُلّ المعادلة بإكمال المربع. أكمل العمود الأخير للجدول بعدد الجذور لكل معادلة.

c. **لفظيًا** قارن عدد الجذور لكل معادلة بالناتج في العمود $b^2 - 4ac$. هل هناك علاقة بين هذه القيم؟ إذا كان كذلك، صف هذه العلاقة.

d. **تحليليًا** توقع عدد الحلول التي ستكون للمعادلة $2x^2 - 9x + 15 = 0$. تحقق من توقع عن طريق حل المعادلة.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

48. **المثابرة** بمعرفة $y = ax^2 + bx + c$ مع $a \neq 0$. اشتق المعادلة لمحور التماثل بإكمال المربع وإعادة كتابة المعادلة بالصيغة $y = a(x - h)^2 + k$.

49. **الاستنتاج** حدد عدد الحلول الموجودة في $x^2 + bx = c$ إذا كان $c < -\left(\frac{b}{2}\right)^2$. اشرح.

50. **أي مما يلي لا ينتمي للمجموعة؟** حدّد التعبير الذي لا ينتمي إلى التعابير الثلاثة الأخرى. اشرح استنتاجك.

$n^2 + \frac{1}{3}n + \frac{1}{9}$ | $n^2 - \frac{2}{3}n + \frac{1}{9}$ | $n^2 + n + \frac{1}{4}$ | $n^2 - n + \frac{1}{4}$

51. **مسألة غير محددة بإجابة** اكتب معادلة تربيعية يكون الحل الوحيد لها 4.

52. **الكتابة في الرياضيات** قارن وبين الفرق بين الاستراتيجيات التالية لحل $x^2 - 5x - 7 = 0$: إكمال المربع والتمثيل البياني والتحليل إلى العوامل.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

53. يبلغ طول المستطيل 3 أمثال عرضه. وتبلغ مساحة المستطيل $75\ cm^2$. جد طول المستطيل بالسنتيمترات.

A 25 B 15 C 10 D 5

54. الاحتمال في أحد المهرجانات، يسحب الفائزون في إحدى الألعاب قطعة نقود كجائزة. وتوجد قطعة نقود واحدة لكل جائزة. وتتضمن الجوائز 9 تذاكر أفلام، و 8 ألعاب محشوة، و 5 قبعات، و 10 حبال قفز، و 4 فلائد لامعة. فما احتمال أن يفوز أول شخص يسحب قطعة نقدية بتذكرة أفلام؟

F $\frac{1}{36}$ G $\frac{1}{9}$ H $\frac{9}{61}$ J $\frac{1}{4}$

55. إجابة شبكية يمكن تمثيل عدد سكان إحدى المدن عن طريق $P = 22{,}000 + 125t$. حيث P تمثل عدد السكان و t تمثل عدد السنوات من عام 2000. فكم عدد السنوات بعد عام 2000 سيكون عدد السكان 26000؟

56. يعمل عبد الكريم بتوصيل البيتزا لدى مطعم بيتزا كينج. ويتقاضى AED 6 في الساعة بالإضافة إلى AED 2.50 لكل بيتزا يوصلها. وكسب عبد الكريم AED 280 الأسبوع الماضي. فإذا عمل ما مجموعه 30 ساعة، فكم عدد قطع البيتزا التي قام بتوصيلها؟

A 250 قطعة بيتزا

B 184 قطعة بيتزا

C 40 قطعة بيتزا

D 34 قطعة بيتزا

مراجعة شاملة

صف كيف أن منحنى كل دالة مرتبطٌ بالمنحنى لـ $f(x) = x^2$.

57. $g(x) = -12 + x^2$

58. $h(x) = (x + 2)^2$

59. $g(x) = 2x^2 + 5$

60. $h(x) = \frac{2}{3}(x - 6)^2$

61. $g(x) = 6 + \frac{4}{3}x^2$

62. $h(x) = -1 - \frac{3}{2}x^2$

63. ألعاب الملاهي تنقل لعبة شعبية في مدينة الملاهي الركاب إلى قمة برج تبلغ 250 ft ثم تنزلهم. ومعادلة ارتفاع الراكب هي $h = -16t^2 + 250$. حيث h هو الارتفاع t هو الزمن بالثواني. وتوقف اللعبة نزول الراكب على ارتفاع 40 ft من الأرض. أكتب معادلة تمثل نزول الراكب. كم الوقت المستغرق للهبوط من 250 ft إلى 40 ft؟ (الدرس 2–4)

صف كيف أن منحنى كل دالة مرتبطٌ بالمنحنى لـ $f(x) = x^2$. (الدرس 3–4)

64. $g(x) = x^2 - 8$

65. $h(x) = \frac{1}{4}x^2$

66. $h(x) = -x^2 + 5$

67. $g(x) = (x + 10)^2$

68. $g(x) = -2x^2$

69. $h(x) = -x^2 - \frac{4}{3}$

مراجعة المهارات

جد قيمة $\sqrt{b^2 - 4ac}$ لكل مجموعة من القيم. وقرّب لأقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

70. $a = 2, b = -5, c = 2$

71. $a = 1, b = 12, c = 11$

72. $a = -9, b = 10, c = -1$

73. $a = 1, b = 7, c = -3$

74. $a = 2, b = -4, c = -6$

75. $a = 3, b = 1, c = 2$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لشركة مؤسسة McGraw-Hill Education

4-3 إيجاد القيمة العظمى أو الصغرى

في الدرس 3-4، تعرفنا على صيغة رأس المعادلة لدالة تربيعية. وسوف تتعلم كيفية كتابة المعادلات بصيغة الرأس واستخدامها لتحديد السمات الرئيسية للتمثيلات البيانية للدوال التربيعية.

النشاط 1 إيجاد الحد الأدنى

اكتب $y = x^2 + 4x - 10$ بصيغة الرأس. حَدِّد محور التماثل والقيم القصوى والأصغر. ثُمَّ مثِّل الدالة بيانيًا.

الخطوة 1 أكمل المربع لكتابة الدالة بصيغة الرأس.

$y = x^2 + 4x - 10$ الدالة الأصلية

$y + 10 = x^2 + 4x$ أضف 10 إلى كل طرف

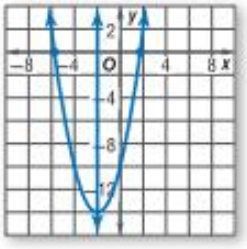
$y + 10 + 4 = x^2 + 4x + 4$ نظرًا لأن $\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$ فأضف 4 إلى كل طرف

$y + 14 = (x + 2)^2$ حلل إلى العوامل $x^2 + 4x + 4$

$y = (x + 2)^2 - 14$ اطرح 14 من كل طرف لكتابة بصيغة الرأس

الخطوة 2 حدّد محور التماثل والقيم القصوى بناءً على المعادلة في صيغة الرأس. يقع الرأس عند (h, k) أو $(-14, -2)$. ونظرًا لأنه لا توجد إشارة سالبة قبل الحد x^2، فإن القطع المكافئ مفتوح لأعلى وتبلغ قيمته الصغرى عند $(-14, -2)$.
معادلة محور التماثل هي $x = -2$.

الخطوة 3 جد حل x لإيجاد الأصفار.



$(x + 2)^2 - 14 = 0$ صيغة الرأس، $y = 0$

$(x + 2)^2 = 14$ أضف 14 إلى كل طرف.

$x + 2 = \pm\sqrt{14}$ احسب الجذر التربيعي لكل طرف.

$x \approx -5.74$ or 1.74 اطرح 2 من كل طرف.

القيم الصغرية هي -5.74 و 1.74 تقريبًا.

الخطوة 4 استخدم السمات الرئيسية لتمثيل الدالة بيانيًا.

قد يكون هناك معامل سلبي قبل الحد التربيعي. عندما يكون الأمر هكذا، فإن القطع المكافئ مفتوح لأسفل وتبلغ قيمته العظمى.

النشاط 2 إيجاد القيمة العظمى

اكتب $y = -x^2 + 6x - 5$ بصيغة الرأس. حَدِّد محور التماثل والقيم القصوى والأصغر. ثُمَّ مثِّل الدالة بيانيًا.

الخطوة 1 أكمل المربع لكتابة معادلة الدالة بصيغة الرأس.

$y = -x^2 + 6x - 5$ الدالة الأصلية

$y + 5 = -x^2 + 6x$ أضف 5 لكل طرف.

$y + 5 = -(x^2 - 6x)$ أخرج -1 عامل مشترك.

$y + 5 - 9 = -(x^2 - 6x + 9)$ فأضف -9 إلى ف طرف. نظرًا لأن $\left(\frac{6}{2}\right)^2 =$

$y - 4 = -(x - 3)^2$ حلل إلى العوامل $x^2 - 6x + 9$.

$y = -(x - 3)^2 + 4$ أضف 4 إلى كل طرف للكتابة بصيغة الرأس.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الخطوة 2 حدد محور التماثل والقيم القصوى بناءً على المعادلة في صيغة الرأس. تقع الرأس عند (h, k) أو $(3, 4)$. وحيث إنه لا يوجد إشارة سالبة قبل الحد x^2 فإن القطع المكافئ مفتوح لأسفل ويبلغ الحد الأقصى عند $(3, 4)$. ومعادلة محور التماثل هي $x = 3$.

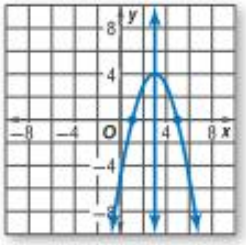
الخطوة 3 جـد حل x لإيجاد الأصفار.

$0 = -(x - 3)^2 + 4$ $y = 0$ صيغة الرأس.

$(x - 3)^2 = 4$ أضف $(x - 3)^2$ إلى كل طرف.

$x - 3 = \pm 2$ احسب الجذر التربيعي لكل طرف.

$x = 5$ or 1 أضف 3 لكل طرف.



الخطوة 4 استخدم السمات الرئيسية لتمثيل الدالة بيانيًا.

تحليل النتائج

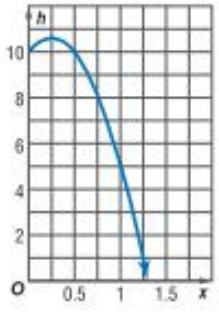
1. لماذا تحتاج إلى إكمال المربع لكتابة معادلة دالة تربيعية بصيغة الرأس؟

اكتب كل معادلة بصيغة الرأس. حَدِّد محور التماثل والقيم القصوى والأصفار. ثُمّ مثل الدالة بيانيًا.

2. $y = x^2 + 6x$
3. $y = x^2 - 8x + 6$
4. $y = x^2 + 2x - 12$
5. $y = x^2 + 6x + 8$
6. $y = x^2 - 4x + 3$
7. $y = x^2 - 2.4x - 2.2$
8. $y = -4x^2 + 16x - 11$
9. $y = 3x^2 - 12x + 5$
10. $y = -x^2 + 6x - 5$

النشاط 3 استخدام القيم القصوى في الحياة اليومية

الغوص تقفز ليلى من منصة الغوص إلى الأعلى وباتجاه الخارج قبل الغوص في حوض السباحة. الدالة $h = -9.8t^2 + 4.9t + 10$، حيث h هو ارتفاع الغواص بالأمتار فوق حوض السباحة بعد عدد t من الثواني تقريبيًا لغوص ليلى. مَثِّل الدالة بيانيًا. ثُمَّ جـد الحد الأقصى للارتفاع الذي تصل إليه ومعادلة محور التماثل.



الخطوة 1 مثّل الدالة بيانيًا.

الخطوة 2 أكمل المربع لكتابة معادلة الدالة بصيغة الرأس.

$h = -9.8t^2 + 4.9t + 10$

$h = -9.8(t - 0.25)^2 + 10.6125$

الخطوة 3 تقع الرأس عند $(0.25, 10.6125)$. لذا فإن أقصى ارتفاع هو 10.6125 m.

معادلة محور التماثل هي $x = 0.25$.

تمرين

11. **لعبة الكرة اللينة** تُلقي مها كرةً في الهواء. وفقًا للدالة $h = -16t^2 + 40t + 5$. حيث h هو الارتفاع بالأمتار و t يمثل الزمن بالثواني تقريبيًا لرمية مها. مثّل الدالة بيانيًا. ثُمَّ جـد أقصى ارتفاع للكرة ومعادلة محور التماثل. متى تصطدم الكرة بالأرض؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

اختبار الوحدة الأول
الدروس من 1-4 إلى 3-4

استخدم جدول قيم لتمثيل كل معادلة بيانيًا. واذكر المجال والمدى. (الدرس 1-4)

1. $y = x^2 + 3x + 1$
2. $y = 2x^2 - 4x + 3$
3. $y = -x^2 - 3x - 3$
4. $y = -3x^2 - x + 1$

ادرس الدالة $y = x^2 - 5x + 4$. (الدرس 1-4)

5. اكتب معادلة محور التماثل.
6. جـد إحداثيات الرأس. هل تمثل نقطة عُظمى أم صُغرى؟
7. مثّل الدالة بيانيًا. انظر الهامش.

8. **كرة القدم** تُركَل كرةٌ من مستوى سطح الأرض بسرعةٍ ابتدائية نحو الأعلى بمقدار 90 ft/sec. وتُعطى المعادلة $h = -16t^2 + 90t$ ارتفاع الكرة h بعد عدد t من الثواني. (الدرس 1-4)
   a. ما ارتفاع الكرة بعد ثانية واحدة؟
   b. كم عدد الثواني التي ستستغرقها الكرة للوصول إلى أقصى ارتفاع لها؟
   c. متى يكون ارتفاع الكرة صفرًا؟ وماذا تمثل هذه النقاط في هذه الحالة؟

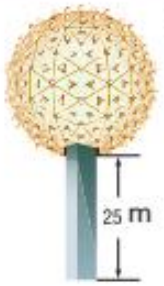
حُلّ كل معادلة باستخدام التمثيل البياني. فإذا كان لا يُمكن إيجاد جذورٍ صحيحة، فقدِّر الجذور مقربةً إلى أقرب جزءٍ من عشرة. (الدرس 2-4)

9. $x^2 + 5x + 6 = 0$
10. $x^2 + 8 = -6x$
11. $-x^2 + 3x - 1 = 0$
12. $x^2 = 12$

13. **كرة القاعدة** يضرب جمال كرة القاعدة. وتُمثّل المعادلة $h = -16t^2 + 120t$ ارتفاع الكرة h بالأقدام بعد t من الثواني. فكم تبقى الكرة في الهواء؟ (الدرس 2-4)

14. **البناء** يُصلح كريم السقف من سفيفة. وفجأةً أسقط صندوق المسامير من ارتفاع 14 ft. يمكن تمثيل هذا بالمعادلة $h = -16t^2 + 14$. حيث h هو الارتفاع بالأقدام و t هو الزمن بالثواني. صِف كيفية ارتباط المنحنى بـ $h = t^2$. (الدرس 2-4)

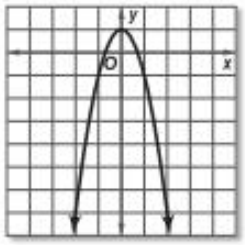
15. **الحفلات** يقيم والدا عبير حفلة تخرج من أجلها. في الساعة 10:00، سوف تنزلق كرة أسفل العمود بمقدار 25 m وستضيء. والدالة التي تمثل السقوط هي $h = -t^2 + 5t + 25$. حيث h هو ارتفاع الكرة بالأمتار بعد t من الثواني. فكم عدد الثواني التي ستستغرقها الكرة للوصول إلى قاع العمود؟ (الدرس 2-4)



تصِف كيف أن التمثيل البياني لكل دالة مرتبطٌ بالتمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$. (الدرس 2-4)

16. $g(x) = x^2 + 3$
17. $h(x) = 2x^2$
18. $g(x) = x^2 - 6$
19. $h(x) = \frac{1}{5}x^2$
20. $g(x) = -x^2 + 1$
21. $h(x) = -\frac{5}{8}x^2$

22. **الاختيار من متعدد** أيٌّ مما يلي معادلة للدالة الموضحة في التمثيل البياني؟ (الدرس 2-4)



A $y = -2x^2$
B $y = 2x^2 + 1$
C $y = x^2 - 1$
D $y = -2x^2 + 1$

حُلّ كل معادلة مما يلي بإكمال المربع. وقرب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر. (الدرس 3-4)

23. $x^2 + 4x + 2 = 0$
24. $x^2 - 2x - 10 = 0$
25. $2x^2 + 4x - 5 = 7$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4-4 مختبر تقنية التمثيل البياني
تمثيل بيانات من الحياة اليومية

يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني TI-83/84 Plus لتمثيل نقاط البيانات التي يمثل معها المنحنى الأفضل ملاءمة دالةً تربيعية.

الماء هناك زجاجة مملوءة بالماء. يسمح للمياه بالتسرب من خلال ثقب صنع بالقرب من قاع الزجاجة. ويوضح الجدول مستوى المياه y مقيسًا بالسنتيمترات من قاع الزجاجة بعد x ثوانٍ.

الزمن (s)	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220
مستوى المياه (cm)	42.6	40.7	38.9	37.2	35.8	34.3	33.3	32.3	31.5	30.8	30.4	30.1

جـد ومثّل بيانيًا معادلة انحدار خطية ومعادلة انحدار تربيعية.
حدد أي المعادلتين أفضل ملاءمة للبيانات.

النشاط

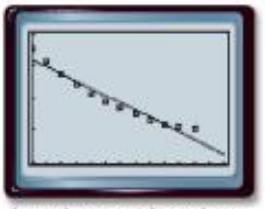
الخطوة 1 **جـد ومثّل بيانيًا معادلة انحدار خطية.**

- أدخل الأزمنة في **L1** ومستويات المياه في **L2**. ثم جـد معادلة انحدار خطية.

خطوات العملية على الحاسبة: *ارجع إلى الدرس 5-1.*

- استخدم **STAT PLOT** من أجل التمثيل البياني لمخطط انتشار. انسخ المعادلة إلى الدالة **Y=** ومثلها بيانيًا.

خطوات العملية على الحاسبة: *مراجعة المخططات الإحصائية والتمثيل البياني لمعادلة انحدار في الدرس 1-5.*

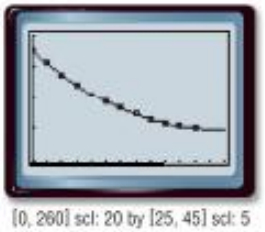


[0, 260] scl: 20 by [25, 45] scl: 5

الخطوة 2 **جـد ومثّل بيانيًا معادلة انحدار تربيعية.**

- جـد معادلة الانحدار التربيعي. ثم انسخ المعادلة إلى الدالة **Y=** ومثلها بيانيًا.

خطوات العملية على الحاسبة: STAT ▶ 5 ENTER Y= VARS 5 ▶ ▶ ENTER GRAPH



[0, 260] scl: 20 by [25, 45] scl: 5

لاحظ أن التمثيل البياني لمعادلة الانحدار الخطي يظهر مائلًا بنقطتي بيانات فقط. ومع ذلك، يتناسب التمثيل البياني لمعادلة الانحدار التربيعي مع البيانات بشكل جيد جدًا.

التمارين

راجع الجدول.

الزمن (s)	الطول cm
0.1	3.04
0.2	5.76
0.3	8.16
0.4	10.24
0.5	12
0.6	13.44
0.7	14.56

1. جـد ومثّل بيانيًا معادلة انحدار خطية ومعادلة انحدار تربيعية للبيانات.
حدد أي المعادلتين أفضل ملاءمة للبيانات.
2. قدّر ارتفاع قدم اللاعب بعد ثانية و 1.5 ثانية. استخدم الرياضيات الذهنية للتحقق من معقولية تقديراتك.
3. قارن وبيّن الفرق بين التقديرات التي حصلت عليها في التمرين 2.
4. كيف يمكن لاختيار معادلة انحدار لا تتناسب مع البيانات بشكل جيد أن يؤثر على التنبؤات المقدمة باستخدام المعادلة؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

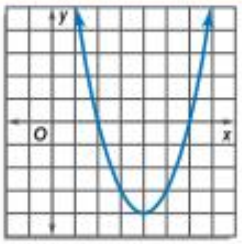
4-4 حل المعادلات التربيعية بالتحليل إلى العوامل

السابق:
- وجدت العوامل المشتركة الكبرى لمجموعات الأعداد.

الحالي:
1. كتابة معادلات تربيعية بالصيغة القياسية.
2. حل المعادلات التربيعية باستخدام التحليل إلى العوامل.

لماذا؟
- الصيغة **المحللة إلى العوامل** من المعادلة التربيعية هي $a(x - p)(x - q) = 0$. وفي المعادلة، تمثل q وp تقاطعات مع المحور x على المنحنى المعادلة.

تقاطعات المحور x للمنحنى الموجود على اليسار هي 2 و6. وفي هذا الدرس، سوف تتعلم كيفية تحويل معادلة تربيعية في الصيغة المحللة إلى العوامل إلى الصيغة القياسية والعكس.



التمثيل البياني
2 و6 هي
تقاطعات المحور x.

الصيغة القياسية	الصيغة المحللة إلى العوامل
$0 = x^2 - 8x + 12$	$0 = (x - 6)(x - 2)$
	العوامل

المفردات الجديدة
صيغة محللة إلى العوامل factored form
طريقة فويل FOIL method

ممارسات في الرياضيات
التفكير بطريقة تجريدية وكمية.

1 الصيغة القياسية
يمكنك استخدام طريقة فويل لكتابة المعادلة التربيعية المكتوبة بالصيغة المحللة إلى العوامل بالصيغة القياسية. تستخدم **طريقة فويل** خاصية التوزيع لضرب ذوات الحدين.

المفهوم الأساسي طريقة فويل لضرب ذوات الحدين

الشرح
لضرب اثنتين من ذواتي حدين، جد مجموع نواتج ضرب *F* "*الحدود الأولى*"، و*O* "*الحدود الطرفية*"، و*I* "*الحدود الوسطى*"، و*L* "*الحدود الأخيرة*".

أمثلة

ناتج ضرب الحدود الأخيرة	ناتج ضرب الحدود الوسطى	ناتج ضرب الحدود الطرفية	ناتج ضرب الحدود الأولى	
↓	↓	↓	↓	
$(-6)(-2)$	$+ (-6)(x)$	$+ (x)(-2)$	$+ (x)(x)$	$= (x - 6)(x - 2)$

F O I L

$= x^2 - 2x - 6x + 12$ or $x^2 - 8x + 12$

مثال 1 تحويل الجمل إلى معادلات.

اكتب معادلة تربيعية بالصيغة القياسية باستخدام $-\frac{1}{3}$ و6 كجذرين لها.

$(x - p)(x - q) = 0$	اكتب النمط.
$\left[x - \left(-\frac{1}{3}\right)\right](x - 6) = 0$	عوّض p بـ $-\frac{1}{3}$ وq بـ 6.
$\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 6) = 0$	بسّط.
$x^2 - \frac{17}{3}x - 2 = 0$	اضرب.
$3x^2 - 17x - 6 = 0$	اضرب كل طرف في 3 بحيث تكون b وc أعدادًا صحيحة.

تمرين موجّه

1. اكتب معادلة تربيعية بالصيغة القياسية باستخدام $\frac{3}{4}$ و-5 كجذرين لها.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

2 حل المعادلات باستخدام التحليل إلى العوامل

حل المعادلات التربيعية باستخدام التحليل إلى العوامل هو تطبيق على خاصية ناتج الضرب الصفري.

المفهوم الأساسي خاصية ناتج الضرب الصفري

الشرح بالنسبة لأي أعداد حقيقية a و b. إذا كان $ab = 0$ فإنه إما $a = 0$. أو $b = 0$. أو كلّ من a و b يساوي 0.

مثال إذا كان $(x + 3)(x - 5) = 0$. فإن $x + 3 = 0$ أو $x - 5 = 0$.

مثال 2 التحليل باخراج العامل المشترك الأكبر

حُلّ المعادلة $16x^2 + 8x = 0$.

$16x^2 + 8x = 0$	المعادلة الأصلية.
$8x(2x) + 8x\ (1) = 0$	اخراج العامل المشترك الأكبر.
$8x(2x + 1) = 0$	خاصية التوزيع
$8x = 0$ أو $2x + 1 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$x = 0$ $\quad 2x = -1$	حل كلتا المعادلتين.
$x = -\frac{1}{2}$	

تمرين موجّه **حُلّ كل معادلة.**

2A. $20x^2 + 15x = 0$ **2B.** $4y^2 + 16y = 0$ **2C.** $6a^5 + 18a^4 = 0$

مراجعة المفردات

المربع الكامل هو عدد يكون جذره التربيعي موجبًا وعددًا صحيحًا

لثلاثيات الحدود وذوات الحدين التي تكون مربعات كاملة نوع خاص من قواعد التحليل إلى العوامل. ولاستخدام هذه القواعد. يجب أن تكون الحدود الأولى والأخيرة مربعات كاملة ويجب أن تكون الحدود الوسطى ضعف ناتج ضرب الجذور التربيعية للحدود الأولى والأخيرة.

مثال 3 المربعات الكاملة وفروق المربعات

حُلّ كل من المعادلات التالية.

a. $x^2 + 16x + 64 = 0$

$x^2 = (x)^2;\ 64 = (8)^2$	الحدان الأول والأخير مربعان كاملان.
$16x = 2(x)(8)$	الحد الأوسط يساوي $2ab$.
$x^2 + 16x + 64$	معادلة ثلاثية حدود مربع كامل.
$x^2 + 16x + 64 = 0$	المعادلة الأصلية
$(x + 8)^2 = 0$	حلل إلى العوامل باستخدام النمط.
$x + 8 = 0$	احسب الجذر التربيعي لكل طرف.
$x = -8$	الحل.

b. $x^2 = 64$

$x^2 = 64$	المعادلة الأصلية
$x^2 - 64 = 0$	اطرح 46 من كل طرف.
$x^2 - (8)^2 = 0$	اكتب بالصيغة $a^2 - b^2$.
$(x + 8)(x - 8) = 0$	حلل الفرق بين المربعين.
$x + 8 = 0$ or $x - 8 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$x = -8$ $\quad x = 8$	الحل.

تمرين موجّه

3A. $4x^2 - 12x + 9 = 0$ **3B.** $81x^2 - 9x = 0$ **3C.** $6a^2 - 3a = 0$

نصيحة دراسية

الجذور التربيعية بالنظر. لاحظ أن الجذرين التربيعيين للعدد 64 هما 8− و 8. أيضًا. في المعادلة $x^2 = 4$. سيكون الحل 2− و 2.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يتم استخدام نمط خاص عند تحليل ثلاثية الحدود التي بصيغة $ax^2 + bx + c$ إلى العوامل. أولاً، اضرب قيمتي a و c. ثم جد قيمتي m و p، بحيث ناتج ضربهما يساوي ac ومجموعهما يساوي b.

انظر في $6x^2 + 13x - 5$: $ac = 6(-5) = -30$.

عوامل العدد −30	المجموع	عوامل العدد −30	المجموع
1, −30	−29	−1, 30	29
2, −15	−13	**−2, 15**	**13**
3, −10	−7	−3, 10	7
5, −6	−1	−5, 6	1

يمكن الآن كتابة الحد الأوسط، $13x$، بالصيغة $-2x + 15x$.

يمكن الآن تحليل كثيرة الحدود هذه إلى العوامل من خلال التجميع.

$6x^2 + 13x - 5 = 6x^2 + mx + px - 5$	اكتب النمط.
$= 6x^2 - 2x + 15x - 5$	$m = -2$ و $p = 15$
$= (6x^2 - 2x) + (15x - 5)$	جمّع الحدود.
$= 2x(3x - 1) + 5(3x - 1)$	اخراج العامل المشترك الأكبر
$= (2x + 5)(3x - 1)$	خاصية التوزيع

نصيحة دراسية

البنية إذا كانت قيمتا m و p موجودتين، فعندئذٍ يمكن تحليل ثلاثية الحدود إلى العوامل دائمًا.

مثال 4 تحليل ثلاثية الحدود إلى العوامل

حُلّ كل من المعادلات التالية.

a. $x^2 + 9x + 20 = 0$

$ac = 20$ $a = 1, c = 20$

عوامل العدد 20	المجموع	عوامل العدد 20	المجموع
1, 20	21	−1, −20	−21
2, 10	12	−2, −10	−12
4, 5	**9**	−4, −5	−9

$x^2 + 9x + 20 = 0$	التعبير الأصلي
$x^2 + mx + px + 20 = 0$	اكتب النمط.
$x^2 + 4x + 5x + 20 = 0$	$m = 4$ و $p = 5$
$(x^2 + 4x) + (5x + 20) = 0$	جمّع الحدود بالعوامل المشتركة.
$x(x + 4) + 5(x + 4) = 0$	اخراج العامل المشترك الأكبر من كل قوس.
$(x + 5)(x + 4) = 0$	خاصية التوزيع
$x + 5 = 0$ أو $x + 4 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$x = -5$ $x = -4$	حل كل معادلة.

b. $6y^2 - 23y + 20 = 0$

$ac = 120$	$a = 6, c = 20$
$m = -8, p = -15$	$-8(-15) = 120; -8 + (-15) = -23$
$6y^2 - 23y + 20 = 0$	المعادلة الأصلية
$6y^2 + my + py + 20 = 0$	اكتب النمط.
$6y^2 - 8y - 15y + 20 = 0$	$m = -8$ و $p = -15$
$(6y^2 - 8y) + (-15y + 20) = 0$	جمّع الحدود بالعوامل المشتركة.
$2y(3y - 4) - 5(3y - 4) = 0$	اخراج العامل المشترك الأكبر من كل قوس.
$(2y - 5)(3y - 4) = 0$	خاصية التوزيع
$2y - 5 = 0$ أو $3y - 4 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$2y = 5$ $3y = 4$	حل كلتا المعادلتين.
$y = \frac{5}{2}$ $y = \frac{4}{3}$	

نصيحة دراسية

ثلاثيات الحدود لا يهم إذا تم تبديل قيم m و p عند التجميع.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تمرين موجّه

4A. $x^2 - 11x + 30 = 0$

4B. $x^2 - 4x - 21 = 0$

4C. $15x^2 - 8x + 1 = 0$

4D. $-12x^2 + 8x + 15 = 0$

مثال من الحياة اليومية 5 حلّ المعادلات بالتحليل إلى العوامل

ألعاب القوى **يمكن تمثيل ارتفاع الرمح بالقدم باستخدام المعادلة $h(t) = -16t^2 + 79t + 5$، حيث تعبر t عن الزمن بالثواني بعد رمي الرمح. كم يظل الرمح محلقاً في الهواء؟**

لتحديد المدة التي يستغرقها الرمح وهو في الهواء، نحتاج إلى معرفة متى الارتفاع يساوي 0. يمكننا إجراء ذلك عن طريق حل المعادلة $-16t^2 + 79t + 5 = 0$.

$-16t^2 + 79t + 5 = 0$	المعادلة الأصلية
$m = 80; p = -1$	$-16(5) = -80,\ 80 \times (-1) = -80,\ 80 + (-1) = 79$
$-16t^2 + 80t - t + 5 = 0$	اكتب النمط.
$(-16t^2 + 80t) + (-t + 5) = 0$	جمّع الحدود بالعوامل المشتركة.
$16t(-t + 5) + 1(-t + 5) = 0$	اخراج العامل المشترك الأكبر من كل قوس.
$(16t + 1)(-t + 5) = 0$	خاصية التوزيع
$16t + 1 = 0$ أو $-t + 5 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$16t = -1$ $\quad -t = -5$	بحل كلتا المعادلتين.
$t = -\frac{1}{16}$ $\quad t = 5$	الحل.

الربط بالحياة اليومية

كسرت الكوبية أوسليديس ميندينز الرقم القياسي العالمي المسجل لرمي الرمح في عام 2002 بمسافة بلغت 71.52 متراً.

المصدر: مجريدة *New York Times*

تحقق لدينا حلان.

- الحل الأول سالب. وبما أن الزمن لا يمكن أن يكون سالبًا، فيمكن استبعاد هذا الحل.
- الحل الثاني 5 ثوانٍ يبدو معقولاً للزمن الذي يستغرقه الرمح في الهواء.
- يمكن التأكد من الإجابة عن طريق التعويض في المعادلة الأصلية.

$$-16t^2 + 79t + 5 = 0$$
$$-16(5)^2 + 79(5) + 5 \stackrel{?}{=} 0$$
$$-400 + 395 + 5 \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0 \ \checkmark$$

ظل الرمح في الهواء لمدة 5 ثوانٍ.

تمرين موجّه

5. القنز بالحبال سجل جمال لشقيقه القفز بالحبل من ارتفاع 300 ft. في الزمن الذي رفع الحبل شقيقه مرة أخرى لأعلى. كان على ارتفاع 44 ft فوق سطح الأرض. إذا بدأ جمال التسجيل بمجرد سقوط شقيقه، كم من الزمن انقضى عندما ارتد الحبل مرة أخرى؟ استخدم المعادلة $f(t) = -16t^2 + c$، حيث c هي الارتفاع بالقدم.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

مثال 1 **اكتب معادلةً تربيعيةً بالصيغة القياسية باستخدام الجذر (الجذور) المعطى.**

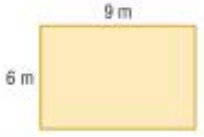
1. $-8, 5$
2. $\frac{3}{2}, \frac{1}{4}$
3. $-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}$

الأمثلة 2-4 **حلّل كل كثيرة حدود إلى العوامل.**

4. $35x^2 - 15x$
5. $18x^2 - 3x + 24x - 4$
6. $x^2 - 12x + 32$
7. $x^2 - 4x - 21$
8. $2x^2 + 7x - 30$
9. $16x^2 - 16x + 3$

مثال 5 **حُلّ كل من المعادلات التالية.**

10. $x^2 - 36 = 0$
11. $12x^2 - 18x = 0$
12. $12x^2 - 2x - 2 = 0$
13. $x^2 - 9x = 0$
14. $x^2 - 3x - 28 = 0$
15. $2x^2 - 24x = -72$



16. **الاستنتاج المنطقي** تريد حورية مضاعفة مساحة حديقتها عن طريق زيادة الطول والعرض بنفس المقدار. كم ستكون أبعاد حديقتها حينئذٍ؟

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **اكتب معادلةً تربيعيةً بالصيغة القياسية باستخدام الجذر (الجذور) المعطى.**

17. 7
18. $-5, \frac{1}{2}$
19. $\frac{1}{5}, 6$

الأمثلة 2-4 **حلّل كل كثيرة حدود إلى العوامل.**

20. $40a^2 - 32a$
21. $51c^3 - 34c$
22. $32xy + 40bx - 12ay - 15ab$
23. $3x^2 - 12$
24. $15y^2 - 240$
25. $48cg + 36cf - 4dg - 3df$
26. $x^2 + 13x + 40$
27. $x^2 - 9x - 22$
28. $3x^2 + 12x - 36$
29. $15x^2 + 7x - 2$
30. $4x^2 + 29x + 30$
31. $18x^2 + 15x - 12$
32. $8x^2z^2 - 4xz^2 - 12z^2$
33. $9x^2 - 25$
34. $18x^2y^2 - 24xy^2 + 36y^2$

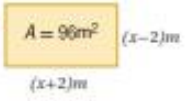
مثال 3 **حُلّ كل من المعادلات التالية.**

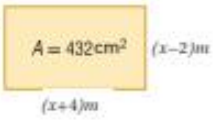
35. $15x^2 - 84x - 36 = 0$
36. $12x^2 + 13x - 14 = 0$
37. $12x^2 - 108x = 0$
38. $x^2 + 4x - 45 = 0$
39. $x^2 - 5x - 24 = 0$
40. $x^2 = 121$
41. $x^2 + 13 = 17$
42. $-3x^2 - 10x + 8 = 0$
43. $-8x^2 + 46x - 30 = 0$

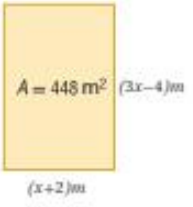
44. **الهندسة** يزيد طول وتر مثلث قائم الزاوية بمقدار 1 cm عن طول أحد الأضلاع ويزيد 4 cm عن ثلاثة أمثال طول الضلع الآخر. جد أبعاد المثلث.

45. **نظرية الأعداد** جد عددين صحيحين زوجيين متتاليين ناتج ضربهما 624.

الهندسة **جد قيمة x وأبعاد كل مستطيل.**

46. 

47. 

48. 

McGraw-Hill Education محفوظ لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

حُلّ كل معادلة باستخدام التحليل إلى العوامل.

49. $12x^2 - 4x = 5$ **50.** $5x^2 = 15x$ **51.** $16x^2 + 36 = -48x$

52. $75x^2 - 60x = -12$ **53.** $4x^2 - 144 = 0$ **54.** $-7x + 6 = 20x^2$

55. السينما تخطط إحدى الشركات لبناء مجمع سينمائي ضخم. أخبر المحلل المالي مديرها بأن دالة الربح لدار السينما الخاصة بهم كانت $P(x) = -x^2 + 48x - 512$. حيث إن x هي عدد شاشات العرض، و $P(x)$ هي الربح المكتسب بآلاف الدراهم. حدد مدى إنتاج شاشات العرض الذي يضمن أن الشركة لن تخسر المال.

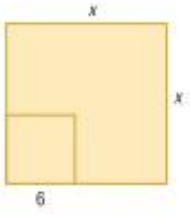
اكتب معادلةً تربيعيةً بالصيغة القياسية باستخدام الجذر (الجذور) المعطى.

56. $-\frac{4}{7}, \frac{3}{8}$ **57.** 3.4, 0.6 **58.** $\frac{2}{11}, \frac{5}{9}$

حُلّ كل معادلة باستخدام التحليل إلى العوامل.

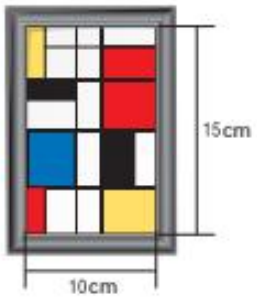
59. $10x^2 + 25x = 15$ **60.** $27x^2 + 5 = 48x$ **61.** $x^2 + 0.25x = 1.25$

62. $48x^2 - 15 = -22x$ **63.** $3x^2 + 2x = 3.75$ **64.** $-32x^2 + 56x = 12$



65. التصميم تم قطع مربع من الشكل الموجود على اليمين. اكتب تعبيرًا عن مساحة الشكل المتبقي، ثم حلل التعبير إلى العوامل.

66. المثابرة بعد تحليل السوق، قامت إحدى الشركات التي تبيع المواقع الإلكترونية بتحديد ربحية منتجاتها من خلال تمثيلها بالمعادلة $P(x) = -16x^2 + 368x - 2035$. حيث إن x هي سعر كل موقع إلكتروني و $P(x)$ هي ربح الشركة. حدد مدى سعر المواقع الإلكترونية الذي معه تكون الشركة رابحة.



67. اللوحات تريد أسماء إضافة اطار إلى لوحتها، بحيث يكون موزعًا بالتساوي. ويكون له نفس مساحة اللوحة نفسها. ما هي أبعاد اللوحة مع إدراج الحد؟

68. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، سوف تدرس $a(x - p)(x - q) = 0$.

a. **بيانيًا** التمثيل البياني للدالة ذات الصلة مع $a = 1$، $p = 2$، و $q = -3$.

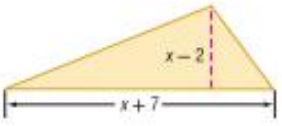
b. **تحليليًا** ما هي حلول المعادلة؟

c. **بيانيًا** التمثيل البياني للدوال ذات الصلة مع $a = 4$، -3، و $\frac{1}{2}$ على نفس التمثيل البياني.

d. **لفظيًا** ما أوجه التشابه والاختلاف بين التمثيلات البيانية؟

e. **لفظيًا** ما الاستنتاجات التي يمكنك التوصل إليها حول العلاقة بين الصيغة المحللة إلى العوامل للمعادلة التربيعية وحلولها؟

69. الهندسة تبلغ مساحة المثلث $26\ cm^2$. جد طول القاعدة.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

70. كرة القدم عندما تُركل كرة قدم في الهواء، يمكن تمثيل الارتفاع بالأمتار فوق سطح الأرض من خلال المعادلة $h(t) = -4.9t^2 + 14.7t$ والمسافة التي تقطعها من خلال المعادلة $d(t) = 16t$. حيث تعبر t عن الزمن بالثواني.

a. كم استغرقت الكرة في الهواء؟

b. ما المسافة التي تقطعها الكرة قبل أن ترتطم بالأرض؟ *(إرشاد: تجاهل مقاومة الهواء.)*

c. ما أقصى ارتفاع للكرة؟

حلّل كل كثيرة حدود إلى العوامل.

71. $18a - 24ay + 48b - 64by$

72. $3x^2 + 2xy + 10y + 15x$

73. $6a^2b^2 - 12ab^2 - 18b^3$

74. $12a^2 - 18ab + 30ab^3$

75. $32ax + 12bx - 48ay - 18by$

76. $30ac + 80bd + 40ad + 60bc$

77. $5ax^2 - 2by^2 - 5ay^2 + 2bx^2$

78. $12c^2x + 4d^2y - 3d^2x - 16c^2y$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

79. تحليل الخطأ تحل كل من حورية وخديجة المعادلة $-12x^2 + 5x + 2 = 0$. هل أي منهما صحيح؟ اشرح استنتاجك.

حورية

$-12x^2 + 5x + 2 = 0$

$-12x^2 + 8x - 3x + 2 = 0$

$4x(-3x + 2) - (3x + 2) = 0$

$(4x - 1)(3x + 2) = 0$

$x = \frac{1}{4}$ أو $-\frac{2}{3}$

خديجة

$-12x^2 + 5x + 2 = 0$

$-12x^2 + 8x - 3x + 2 = 0$

$4x(-3x + 2) + (-3x + 2) = 0$

$(4x + 1)(-3x + 2) = 0$

$x = -\frac{1}{4}$ أو $\frac{2}{3}$

80. تحدٍّ حل المعادلة $3x^6 - 39x^4 + 108x^2 = 0$ عن طريق التحليل إلى العوامل.

81. تحدٍّ فيما يلي أدناه توضيح لقاعدة التحليل إلى العوامل فرق المكعبات. استخدم هذه القاعدة للتحليل إلى العوامل $40x^5 - 135x^2y^3$.

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

82. مسألة غير محددة الإجابة اختر عددين صحيحين ثم اكتب معادلة بالصيغة القياسية باستخدام الجذرين. كيف ستتغير المعادلة إذا تم تغيير إشارة الجذرين؟

83. تحدٍّ في معادلة تربيعية لها الصيغة $(x - p)(x - q) = 0$. اثبت أن محور تماثل الدالة التربيعية ذات الصلة يقع في المنتصف بين نقطتي التقاطع مع المحور x وهما p و q.

84. اكتب سؤالاً يستخدم أحد الزملاء إستراتيجية خمن وتحقق لتحليل ثلاثيات الحدود $x^2 + bx + c$ الى العوامل. اكتب سؤالاً لمساعدته على التفكير في طريقة لاستخدام هذه الإستراتيجية مع $ax^2 + bx + c$.

85. الفرضيات حدّد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحةً *أحيانًا* أم *دائمًا* أم غير صحيحة على الإطلاق. اشرح استنتاجك.

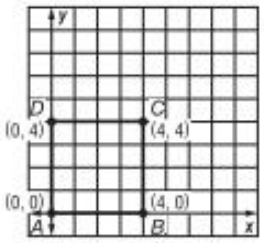
في معادلة تربيعية بالصيغة القياسية. يكون كل من a و b و c أعدادًا صحيحة.
إذا كانت b عددًا فرديًا. فلا يمكن أن تكون المعادلة التربيعية ثلاثية حدود مربع كامل.

86. الكتابة في الرياضيات اشرح كيف تحلل ثلاثية حدود بالصيغة القياسية مع $a > 1$ الى العوامل.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

87. إجابة قصيرة إذا تم تحويل $ABCD$ عن طريق $(x, y) \rightarrow (3x, 4y)$. فحدد مساحة $A'B'C'D'$.



88. في $y = 2|6 - 3x| + 4$. أي مجموعة تصف x عندما تكون $y < 6$؟

A $\left\{x \middle| \frac{5}{3} < x < \frac{7}{3}\right\}$

B $\left\{x \middle| x < \frac{5}{3} \text{ or } x > \frac{7}{3}\right\}$

C $\left\{x \middle| x < \frac{5}{3}\right\}$

D $\left\{x \middle| x > \frac{7}{3}\right\}$

89. الاحتمال يمكن أن تحتوي كلمة مرور مكونة من 5 أحرف على أعداد من 0 إلى 9 و 26 حرفًا من الحروف الأبجدية. ولا يمكن تكرار أي من الأحرف. ما احتمال أن تبدأ كلمة المرور بحرف ساكن؟

F $\frac{21}{26}$

G $\frac{21}{35}$

H $\frac{21}{36}$

J $\frac{5}{36}$

90. SAT/ACT إذا كان $c = \frac{8a^3}{b}$. ماذا يحدث لقيمة c عندما تتم مضاعفة كل من a و b؟

A. c لا تتغير.

B. c يتم تنصيفه.

C. c تتم مضاعفة.

D. يتم ضرب c في 4.

E. يتم ضرب c في 8.

مراجعة شاملة

مثّل كل دالة بيانيًا. (الدرس 4-7)

91. $f(x) = |3x + 2|$

92. $f(x) = \begin{cases} x - 2, & x > -1 \\ x + 3, & x \leq -1 \end{cases}$

93. $f(x) = [\![x + 1]\!]$

94. $f(x) = \left|\frac{1}{4}x - 1\right|$

مثّل بيانيًا كل مجموعة من الأزواج المرتبة. حدد ما إذا كانت الأزواج المرتبة تمثل دالة خطية أم دالة تربيعية أم دالة أسّية . (الدرس 4-6)

95. $\{(-2, 5), (-1, 3), (0, 1), (1, -1), (2, -3)\}$

96. $\{(0, 0), (1, 3), (2, 4), (3, 3), (4, 0)\}$

97. $\left\{\left(-2, \frac{1}{4}\right), (0, 1), (1, 2), (2, 4), (3, 8)\right\}$

98. $\{(-3, 1), (-2, -5), (-1, -7), (0, -5), (1, 1)\}$

99. المعرفة المالية حدّد مبلغ الاستثمار إذا تم استثمار AED 250 بنسبة مرابحة قدرها 7.3% تُركب بمعدل ربع سنوي لمدة 40 سنة. (الدرس 4-3)

100. الغوص لتجنب الاصطدام بأي صخور. تقفز غواصة بالقرب من منحدرات صخرية لأعلى وللخارج. وتوضح المعادلة $h = -16t^2 + 4t + 26$ ارتفاعها h بالقدم بعد t ثوانٍ من القفز. جد الزمن التي تعود فيه إلى ارتفاع 26 ft. (4-2)

مراجعة المهارات

بسّط.

101. $\sqrt{5} \times \sqrt{15}$

102. $\sqrt{8} \times \sqrt{32}$

103. $2\sqrt{3} \times \sqrt{27}$

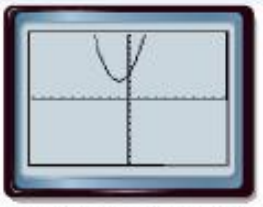
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4-5 الأعداد المركبة

السابق
- قمت بتبسيط الجذور التربيعية.

الحالي
1 إجراء العمليات على الأعداد التخيلية البحتة.
2 إجراء العمليات على الأعداد المركبة.

لماذا؟
- انظر إلى الرسم البياني للمعادلة $y = x^2 + 2x + 4$ الموجود على اليمين. لاحظ كيف أن هذا الرسم البياني لا توجد به تقاطعات على المحور x وبالتالي ليس به أي جذور. هل يعني هذا أنه ليس هناك حلول للمعادلة $0 = x^2 + 2x + 4$؟


[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

استخدم ميزة **Solver** (أداة الحل) الموجودة في قائمة MATH (الرياضيات) بحاسبة التمثيل البياني. أدخل المعادلة وحدد $x = 2$ باعتبارها تخمينك للحل.

اضغط على ENTER ALPHA وسوف تحاول الآلة الحاسبة حل المعادلة. وتشير الحاسبة من خلال رسالة الخطأ إلى عدم وجود حل. لذلك لا توجد حلول حقيقية. ومع ذلك، توجد حلول تخيلية.

1 الأعداد التخيلية البحتة

لقد عملت في دراستك للرياضيات حتى الآن بأعداد حقيقية. وقد قادت المعادلات مثل المعادلة الواردة أعلاه علماء الرياضيات إلى تحديد أعداد تخيلية. ويتم تعريف **الوحدة التخيلية** بالعلاقة $i^2 = -1$. ويمثل العدد i الجذر التربيعي الأساسي للعدد -1 أي أن $i = \sqrt{-1}$.

تسمى الأعداد التي بالصيغة $6i$، و $-2i$، و $i\sqrt{3}$ **الأعداد التخيلية البحتة**. والأعداد التخيلية البحتة هي جذور تربيعية للأعداد الحقيقية السالبة. لأي عدد حقيقي موجب b، و $bi = \sqrt{-b^2} = \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{-1}$.

مثال 1 الجذور التربيعية للأعداد السالبة

بسّط.

a. $\sqrt{-27}$

$$\begin{aligned}\sqrt{-27} &= \sqrt{-1 \cdot 3^2 \cdot 3} \\ &= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3} \\ &= i \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 3i\sqrt{3}\end{aligned}$$

b. $\sqrt{-216}$

$$\begin{aligned}\sqrt{-216} &= \sqrt{-1 \cdot 6^2 \cdot 6} \\ &= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{6^2 \cdot 6} \\ &= i \cdot 6 \cdot \sqrt{6} = 6i\sqrt{6}\end{aligned}$$

تمرين موجّه

1A. $\sqrt{-18}$

1B. $\sqrt{-125}$

خاصية التبديل وخاصية التجميع للضرب صحيحتان مع الأعداد التخيلية البحتة. موضح أدناه القوى الدنيا الأولى لـ i أدناه.

$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = i^2 \cdot i = -i$	$i^4 = (i^2)^2 = 1$
$i^5 = i^4 \cdot i = i$	$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$	$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$	$i^8 = (i^2)^4 = 1$

المفردات الجديدة
- الوحدة التخيلية — imaginary unit
- عدد تخيلي بحت — pure imaginary number
- عدد مركب — complex number
- مترافقات مركبة — complex conjugates

ممارسات في الرياضيات
مراعاة الدقة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 2 نواتج ضرب الأعداد التخيلية البحتة

بسّط.

a. $-5i \cdot 3i$

$-5i \cdot 3i = -15i^2$ اضرب.

$= -15(-1)$ $i^2 = -1$

$= 15$ بسّط.

b. $\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-15}$ $i = \sqrt{-1}$

$\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-15} = i\sqrt{6} \cdot i\sqrt{15}$ اضرب.

$= i^2\sqrt{90}$ بسّط.

$= -1 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{10}$ اضرب.

$= -3\sqrt{10}$

تمرين موجّه

2A. $3i \cdot 4i$ **2B.** $\sqrt{-20} \cdot \sqrt{-12}$ **2C.** i^{31}

يمكنك حل بعض المعادلات التربيعية باستخدام **خاصية الجذر التربيعي**. ومثل الفرق بين المربعات. يمكن تحليل مجموع مربعين إلى العوامل في مجموعة الأعداد المركبة.

مثال 3 حل المعادلة باستخدام الحلول التخيلية البحتة

حُلّ $x^2 + 64 = 0$.

الطريقة 1 خاصية الجذر التربيعي

$x^2 + 64 = 0$

$x^2 = -64$

$x = \pm\sqrt{-64}$

$x = \pm 8i$

الطريقة 2 التحليل إلى العوامل

$x^2 + 64 = 0$

$x^2 + 8^2 = 0$

$x^2 - (-8^2) = 0$

$(x + 8i)(x - 8i) = 0$

$(x + 8i) = 0$ or $(x - 8i) = 0$

$x = -8i$ $x = 8i$

تمرين موجّه

حُلّ كل من المعادلات التالية.

3A. $4x^2 + 100 = 0$ **3B.** $x^2 + 4 = 0$

مهنة من الحياة اليومية

المهندس الكهربائي

يصمم المهندسون الكهربائيون المعدات الكهربائية مثل مشغلات الموسيقى الرقمية والمحركات الكهربائية وأنظمة الإضاءة والرادار والملاحة ويطورون هذه المعدات ويختبرونها ويشرفون على صنعها. ويلزم الحصول على درجة البكالوريوس في الهندسة لجميع الوظائف الهندسية للخريجين الجدد تقريبًا.

2 العمليات باستخدام الأعداد المركبة

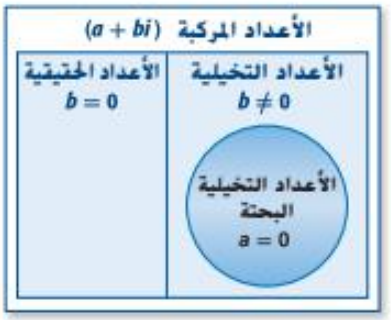
انظر إلى $3i + 2$ حيث إن 2 هو عدد حقيقي و $3i$ عدد تخيلي بحت. فالحدود ليست متشابهة ولا يمكن جمعها. ويعرف هذا النوع من التعابير باسم **العدد المركب**.

المفهوم الأساسي الأعداد المركبة

الشرح العدد المركب هو أي عدد يمكن كتابته بالصيغة $a + bi$. حيث a و b عددان حقيقيان وتكون i وحدة تخيلية. وتسمى a الجزء الحقيقي. وتسمى b الجزء التخيلي.

أمثلة $1 - 3i = 1 + (-3)i$ $5 + 2i$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



يظهر مخطط فن مجموعة الأعداد المركبة.

- إذا كان $b = 0$، فإن العدد المركب عددًا حقيقيًا.
- إذا كان $b \neq 0$، فإن العدد المركب تخيليًا.
- إذا كان $a = 0$، فإن العدد المركب عددًا تخيليًا بحتًا.

يتساوى عددان مركبان فقط إذا تساوت الأجزاء الحقيقية لهما وتساوت الأجزاء التخيلية لهما. أي أن، $a + bi = c + di$ إذا كان $a = c$ و $b = d$.

نصيحة دراسية

الأعداد المركبة في حين أن الأعداد الحقيقية مركبة أيضًا، يشير مصطلح *العدد المركب* عادةً إلى عدد غير حقيقي.

مثال 4 معادلة الأعداد المركبة

جد قيمتي x و y التي تجعل $3x - 5 + (y - 3)i = 7 + 6i$ صحيحة.

اجعل الأجزاء الحقيقية مساوية لبعضها البعض والأجزاء التخيلية مساوية لبعضها البعض.

$3x - 5 = 7$	أجزاء حقيقية	$y - 3 = 6$	أجزاء حقيقية
$3x = 12$	أضف 5 إلى كل طرف.	$y = 9$	أضف 3 إلى كل طرف.
$x = 4$	اقسم الطرفين على 3.		

تمرين موجّه

4. جد قيمتي x و y التي تجعل $5x + 1 + (3 + 2y)i = 2x - 2 + (y - 6)i$ صحيحة.

تكون خواص التبديل والتجميع والتوزيع للضرب والجمع صحيحة مع الأعداد المركبة. فعند جمع أو طرح أعداد مركبة، اجمع بين الحدود المتماثلة. أي اجمع بين الأجزاء الحقيقية، واجمع بين الأجزاء التخيلية.

مثال 5 جمع الأعداد المركبة وطرحها

بسّط.

a. $(5 - 7i) + (2 + 4i)$

$(5 - 7i) + (2 + 4i) = (5 + 2) + (-7 + 4)i$ خاصية التبديل وخاصية التجميع

$= 7 - 3i$ بسّط.

b. $(4 - 8i) - (3 - 6i)$

$(4 - 8i) - (3 - 6i) = (4 - 3) + [-8 - (-6)]i$ خاصية التبديل وخاصية التجميع

$= 1 - 2i$ بسّط.

تمرين موجّه

5A. $(-2 + 5i) + (1 - 7i)$ **5B.** $(4 + 6i) - (-1 + 2i)$

نصيحة دراسية

قراءة في الرياضيات يستخدم المهندسون الكهربائيون **j** كوحدة تخيلية لتجنب الالتباس مع **i** الخاصة بالتيار.

تستخدم الأعداد المركبة مع الكهرباء. وفي هذه المسائل، تمثل j عادةً وحدة تخيلية. في الدائرة ذات التيار المتردد، يمكن تمثيل الجهد والتيار ومقاومة أو ممانعة التيار، بأعداد مركبة. ولمضاعفة هذه الأعداد، استخدم طريقة فويل.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال من الحياة اليومية 6 ضرب الأعداد المركبة

الكهرباء في دائرة التيار المتردد، يكون الجهد V، والتيار C، والمقاومة I مرتبطين بالصيغة $V = C \cdot I$. جد الجهد في دائرة يكون فيها التيار $2 + 4j$ أمبير والمقاومة $9 - 3j$ أوم.

$V = C \cdot I$ — صيغة الكهرباء

$= (2 + 4j) \cdot (9 - 3j)$ — $I = 9 - 3j$ و $C = 2 + 4j$

$= 2(9) + 2(-3j) + 4j(9) + 4j(-3j)$ — طريقة فويل

$= 18 - 6j + 36j - 12j^2$ — اضرب.

$= 18 + 30j - 12(-1)$ — $j^2 = -1$

$= 30 + 30j$ — اجمع.

يكون الجهد $30 + 30i$ فولت.

تمرين موجّه

6. جد الجهد في دائرة يكون فيها التيار $4j - 2$ أمبير والمقاومة $2j - 3$ أوم.

الربط بالحياة اليومية

يعتبر فرع مصابيح الأعياد المتسلسلة مثالا على دائرة التوالي. ويؤثر عدد المصابيح في الدائرة على قوة التيار مما يؤثر بالتالي على سطوع المصابيح.

المصدر: مجلة *Popular Science*

يُطلق على عددين مركبين في الصيغة $a + bi$ و $a - bi$ اسم **عددان مركبان مترافقان**. ودائما ما يكون ناتج ضرب المرافقات المركبة عدداً حقيقيًا. ويمكنك استخدام هذه الحقيقة لتبسيط ناتج قسمة عددين مركبين.

مثال 7 قسمة الأعداد المركبة

بسّط.

a. $\frac{2i}{3 + 6i}$

$\frac{2i}{3 + 6i} = \frac{2i}{3 + 6i} \cdot \frac{3 - 6i}{3 - 6i}$ — $3 + 6i$ و $3 - 6i$ مترافقان مركبان.

$= \frac{6i - 12i^2}{9 - 36i^2}$ — اضرب.

$= \frac{6i - 12(-1)}{9 - 36(-1)}$ — $i^2 = -1$

$= \frac{6i + 12}{45}$ — بسّط.

$= \frac{4}{15} + \frac{2}{15}i$ — الصيغة $a + bi$

b. $\frac{4 + i}{5i}$

$\frac{4 + i}{5i} = \frac{4 + i}{5i} \cdot \frac{i}{i}$ — اضرب في $\frac{i}{i}$

$= \frac{4i + i^2}{5i^2}$ — اضرب.

$= \frac{4i - 1}{-5}$ — $i^2 = -1$

$= \frac{1}{5} - \frac{4}{5}i$ — الصيغة $a + bi$

تمرين موجّه

7A. $\frac{-2i}{3 + 5i}$ **7B.** $\frac{2 + i}{1 - i}$

نصيحة دراسية

التكنولوجيا يمكن إجراء العمليات على الأعداد المركبة باستخدام حاسبة التمثيل البياني TI-83/84 Plus. استخدم الدالة [i] 2nd لإدخال التعبير. ثم اضغط على ENTER MATH لعرض الإجابة. ENTER

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 **بسّط.**

1. $\sqrt{-81}$
2. $\sqrt{-32}$
3. $(4i)(-3i)$
4. $3\sqrt{-24} \cdot 2\sqrt{-18}$
5. i^{40}
6. i^{63}

مثال 3 **حُلّ كل من المعادلات التالية.**

7. $4x^2 + 32 = 0$
8. $x^2 + 1 = 0$

مثال 4 **جد قيمتي a وb التي تجعل كل معادلة صحيحة.**

9. $3a + (4b + 2)i = 9 - 6i$
10. $4b - 5 + (-a - 3)i = 7 - 8i$

الأمثلة 5 و 7 **بسّط.**

11. $(-1 + 5i) + (-2 - 3i)$
12. $(7 + 4i) - (1 + 2i)$
13. $(6 - 8i)(9 + 2i)$
14. $(3 + 2i)(-2 + 4i)$
15. $\frac{3 - i}{4 + 2i}$
16. $\frac{2 + i}{5 + 6i}$

مثال 6 17. **الكهرباء** يبلغ التيار في جزء من دائرة متوالية $3i + 5$- أمبير. ويبلغ التيار في جزء آخر من الدائرة $9i + 7$ أمبير. اجمع هذه الأعداد المركبة لإيجاد إجمالي التيار في الدائرة.

التمرين وحل المسائل

المثالان 1 و 2 **البنية بسّط.**

18. $\sqrt{-121}$
19. $\sqrt{-169}$
20. $\sqrt{-100}$
21. $\sqrt{-81}$
22. $(-3i)(-7i)(2i)$
23. $4i(-6i)^2$
24. i^{11}
25. i^{25}
26. $(10 - 7i) + (6 + 9i)$
27. $(-3 + i) + (-4 - i)$
28. $(12 + 5i) - (9 - 2i)$
29. $(11 - 8i) - (2 - 8i)$
30. $(1 + 2i)(1 - 2i)$
31. $(3 + 5i)(5 - 3i)$
32. $(4 - i)(6 - 6i)$
33. $\frac{2i}{1 + i}$
34. $\frac{5}{2 + 4i}$
35. $\frac{5 + i}{3i}$

مثال 3 **حُلّ كل من المعادلات التالية.**

36. $4x^2 + 4 = 0$
37. $3x^2 + 48 = 0$
38. $2x^2 + 50 = 0$
39. $2x^2 + 10 = 0$
40. $6x^2 + 108 = 0$
41. $8x^2 + 128 = 0$

مثال 4 **جد قيم x و y التي تجعل كل معادلة صحيحة.**

42. $9 + 12i = 3x + 4yi$
43. $x + 1 + 2yi = 3 - 6i$
44. $2x + 7 + (3 - y)i = -4 + 6i$
45. $5 + y + (3x - 7)i = 9 - 3i$
46. $a + 3b + (3a - b)i = b + bi$
47. $(2a - 4b)i + a + 5b = 15 + 58i$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

الأمثلة 5 و 7 **بسّط.**

48. $\sqrt{-10} \cdot \sqrt{-24}$
49. $4i\left(\frac{1}{2}i\right)^2(-2i)^2$
50. i^{61}
51. $(4 - 6i) + (4 + 6i)$
52. $(8 - 5i) - (7 + i)$
53. $(-6 - i)(3 - 3i)$
54. $\frac{(5 + i)^2}{3 - i}$
55. $\frac{6 - i}{2 - 3i}$
56. $(-4 + 6i)(2 - i)(3 + 7i)$
57. $(1 + i)(2 + 3i)(4 - 3i)$
58. $\frac{4 - i\sqrt{2}}{4 + i\sqrt{2}}$
59. $\frac{2 - i\sqrt{3}}{2 + i\sqrt{3}}$

مثال 6 60. **الكهرباء** تبلغ المقاومة في جزء من دائرة على التوالي $8i + 7$ أوم. وتبلغ المقاومة في جزء آخر من الدائرة $4i + 13$- أوم. اجمع هذه الأعداد المركبة لإيجاد إجمالي المقاومة في الدائرة.

الكهرباء استخدم الصيغة $V = C \cdot I$.

61. يبلغ التيار في دائرة $6j$ أمبير. وتبلغ المقاومة $j + 5$- أوم. كم يبلغ الجهد؟ $27j + 21$ فولت

62. يبلغ الجهد في دائرة $12i + 20$- فولت. وتبلغ المقاومة $4i + 6$- أوم. كم يبلغ التيار؟

63. جد مجموع $7 + (4 + 5i)x^2 - ix$ و $(2 + 6i)x - 8i + 3x^2$.

64. بسّط $[(2 + i)x^2 - ix + 5 + i] - [(-3 + 4i)x^2 + (5 - 5i)x - 6]$.

65. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف المعادلات التربيعية التي فيها جذور مركبة.

أ. **جبريًا** اكتب معادلة تربيعية بالصيغة القياسية باستخدام $3i$ و $-3i$ كجذور لها.

ب. **بيانيًا** مثّل بيانيًا المعادلة التربيعية الموجودة في الجزء a عن طريق منحنى الدالة المرتبطة بها. انظر الهامش.

ج. **جبريًا** اكتب معادلة تربيعية بالصيغة القياسية باستخدام $i + 2$ و $i - 2$ كجذور لها.

د. **بيانيًا** مثّل بيانيًا المعادلة التربيعية الموجودة في الجزء c عن طريق منحنى الدالة المرتبطة بها. انظر الهامش.

هـ. **تحليليًا** كيف تعرف متى ستحتوي المعادلة التربيعية على حلول مركبة فقط؟ انظر الهامش.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

66. **النقد** تقوم أماني وميسون بتبسيط $(2i)(3i)(4i)$. أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

أماني	ميسون
$24i^3 = -24$	$24i^3 = -24i$

67. **تحدَّ** بسّط $(1 + 2i)^3$.

68. **الاستنتاج** حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة *دائمًا أو أحيانًا أو ليست صحيحة على الإطلاق*. اشرح استنتاجك.

يحتوي *كل* عدد مركب *على* جزء حقيقي وجزء تخيلي.

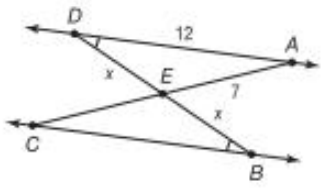
69. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب عددين مركبين ناتج ضربهما 20.

70. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيف ترتبط الأعداد المركبة بالمعادلات التربيعية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

71. إجابة موسعة انظر الشكل للإجابة على ما يلي.



أ. حدد مثلثين متطابقين من خلال ذكر الرؤوس بالترتيب الصحيح.

ب. اشرح سبب تطابق المثلثين.

ج. ما طول $\overline{EC}$؟ اشرح إجراءاتك.

72. $= (3 + 6)^2$

A $2 \times 3 + 2 \times 6$
B 9^2
C $3^2 + 6^2$
D $3^2 \times 6^2$

73. SAT/ACT يتقاضى أحد المتاجر AED 49 للبنطلون. يزيد هذا السعر بنسبة 40% عن المبلغ الذي يتكلفه المتجر لشراء البنطلون. بعد التخفيضات، يسمح لأي موظف بشراء أي بنطلونات متبقية بخصم 30% من تكلفة المتجر. كم ستبلغ تكلفة شراء البنطلونات على الموظف بعد التخفيضات؟

F AED 10.50
G AED 12.50
H AED 13.72
J AED 24.50
K AED 35.00

74. ما قيمتي x و y عندما يكون $(5 + 4i) - (x + yi) = (-1 - 3i)$؟

A $x = 6, y = 7$
B $x = 4, y = i$
C $x = 6, y = i$
D $x = 4, y = 7$

مراجعة شاملة

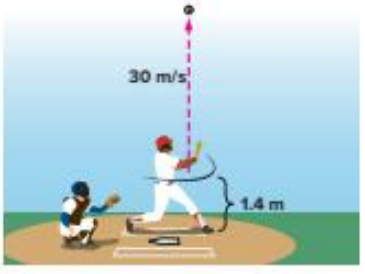
حُلّ كل معادلةٍ باستخدام التحليل إلى العوامل. (الدرس 2-4)

75. $2x^2 + 7x = 15$

76. $4x^2 - 12 = 22x$

77. $6x^2 = 5x + 4$

78. البيسبول ضرب لاعب بيسبول الكرة لأعلى بسرعة ابتدائية بلغت 30 m/sec. وعلى ارتفاع 1.4 ft فوق سطح الأرض. يمثل ارتفاع $h(t)$ الكرة بالقدم والزمن t بالثواني بالعلاقة $h(t) = -4.9t^2 + 30t + 1.4$. ما مقدار الزمن لدى اللاعب المنافس للوصول أسفل الكرة إذا التقطها على ارتفاع 1.7 ft فوق سطح الأرض؟ هل تبدو إجابتك منطقية؟ اشرح. (الدرس 2-4)



79. الكهرباء تساوي المقاومة في أحد أجزاء دائرةٍ موصولةٍ على التوالي $4j + 3$ من وحدة الأوم. وتساوي المقاومة في جزء آخر من الدائرة $6j - 2$ من وحدة الأوم . اجمع هذين العددين المركبين لإيجاد المقاومة الكلية في الدائرة. (الدرس 3-4)

بسّط. (الدرس 3-4)

80. $(8 + 5i)^2$

81. $4(3 - i) + 6(2 - 5i)$

82. $\frac{5 - 2i}{6 + 9i}$

اكتب معادلةً تربيعيةً بالصيغة القياسية بحيث يكون لها الجذر (الجذور) التالي. (الدرس 2-4)

83. $\frac{4}{5}, \frac{3}{4}$

84. $-\frac{2}{5}, 6$

85. $-\frac{1}{4}, -\frac{6}{7}$

مراجعة المهارات

حدد ما إذا كان كل ثلاثي حدود هو ثلاثي حدود مربع كامل أم لا. اكتب نعم أو لا.

86. $x^2 + 16x + 64$

87. $x^2 - 12x + 36$

88. $x^2 + 8x - 16$

89. $x^2 - 14x - 49$

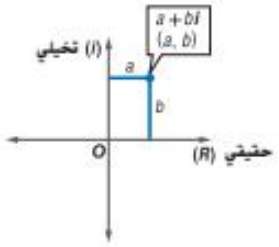
90. $x^2 + x + 0.25$

91. $x^2 + 5x + 6.25$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4-5 مختبر الجبر
المستوى المركب

يمكن تمثيل العدد المركب $a + bi$ بيانيًا في **المستوى المركب** من خلال تمثيله باستخدام النقطة (a, b). وبصورة مشابهة للمستوى الإحداثي، يتكوّن المستوى المركب من محورين اثنين. تمثّل المركّبة الحقيقية على **المحور الحقيقي**، وهو الأفقي. وتمثّل المركّبة التخيلية على **المحور التخيلي**، وهو الرأسي. ويمكن الإشارة إلى المستوى المركّب أيضًا باسم **بمستوى أرجاند (ar GON)**.



مثال 1 التمثيل البياني في المستوى المركب

مثل بيانيًا $z = 3 + 4i$ في المستوى المركب.

الخطوة 1 مثّل z بالنقطة (a, b).

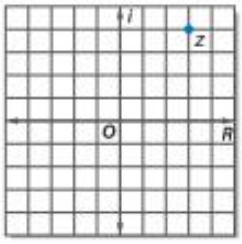
المركّبة الحقيقية a لـ z هي العدد 3.

المركّبة التخيّلية bi لـ z هي $4i$.

يمكن تمثيل z بالنقطة (a, b) أو $(3, 4)$.

الخطوة 2 مثّل بيانيًا z في المستوى المركب.

أنشئ المستوى المركب وعيّن النقطة $(3, 4)$.



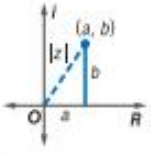
تذكّر أنه في الأعداد الحقيقية، تمثّل القيمة المطلقة مسافة العدد عن الصفر على خط الأعداد. وبصورة مماثلة، فإن **القيمة المطلقة لعددٍ مركب** هي مسافته عن نقطة الأصل في المستوى المركب. وعند تمثيل $a + bi$ بيانيًا في المستوى المركب، فإن القيمة المطلقة لـ $a + bi$ هي المسافة من (a, b) إلى نقطة الأصل. ويمكن إيجادها من خلال قانون المسافة.

$$\sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

المفهوم الأساسي القيمة المطلقة للعدد المركب

القيمة المطلقة للعدد المركب $z = a + bi$ هي

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المستوى المركب يتبع

مثال 2 القيمة المطلقة لعدد مركب

جد القيمة المطلقة لـ $z = -5 + 12i$.

الخطوة 1 حدّد قيمتي a و b.

المركبة الحقيقية a لـ z هي -5. والمركبة التخيلية bi لـ z هي $12i$.

وهكذا $a = -5$ و $b = 12$.

الخطوة 2 جد القيمة المطلقة لـ z.

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ القيمة المطلقة لعدد مركب

$= \sqrt{(-5)^2 + 12^2}$ $b = 12$ و $a = -5$

$= \sqrt{169}$ or 13 بسّط.

القيمة المطلقة لـ $z = -5 + 12i$ هي 13.

يمكن بجمع الأعداد المركبة وطرحها بيانيًا.

مثال 3 التبسيط بالتمثيل البياني

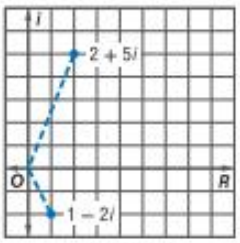
بسّط $(1 - 2i) - (-2 - 5i)$ بالتمثيل البياني.

الخطوة 1 اكتب $(1 - 2i) - (-2 - 5i)$ بالصورة $(1 - 2i) + (2 + 5i)$.

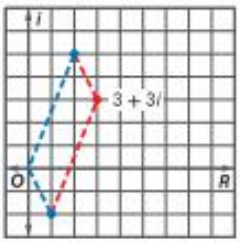
الخطوة 2 مثّل $1 - 2i$ و $2 + 5i$ بيانيًا على المستوى المركب نفسه. صل كل نقطة بنقطة الأصل باستخدام قطعةٍ مستقيمةٍ متقطّعة.

الخطوة 3 أكمل متوازي الأضلاع الذي يضم القطعتين المستقيمتين بمثابة اثنين من أضلاعه. عيّن نقطةً يلتقي فيها الضلعان الإضافيان.

حلّ $(1 - 2i) - (-2 - 5i)$ هو $3 + 3i$.



الخطوة 2



الخطوة 3

التمارين

مثّل كلّ عددٍ في المستوى المركب.

1. $z = 3 + i$
2. $z = -4 - 2i$
3. $z = 2 - 2i$

جد القيمة المطلقة لكل عدد مركب.

4. $z = -4 - 3i$
5. $z = 7 - 2i$
6. $z = -6 - i$

بسّط بالتمثيل البياني.

7. $(6 + 5i) + (-2 - 3i)$
8. $(8 - 2i) - (4 + 7i)$
9. $(5 + 6i) + (-4 + 3i)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4-5B مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المعادلات التربيعية

يمكنك استخدام الحاسبة البيانية المزودة بتقنية CAS لحل المعادلات التربيعية.

النشاط إيجاد الجذور

حُلّ كل من المعادلات التالية.

a. $3x^2 - 4x + 1 = 0$

الخطوة 1 أضف صفحة **Calculator** (حاسبة) جديدة.

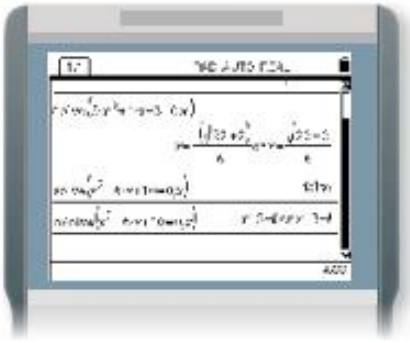
الخطوة 2 اختر الأداة **Solve** (الحل) من القائمة **Algebra**.

الخطوة 3 اكتب $3x^2 - 4x + 1 = 0$ متبوعةً بفاصلة، x. ثم اضغط **Enter** (إدخال).
الحلّان هما $x = \frac{1}{3}$ أو $x = 1$.

b. $6x^2 + 4x - 3 = 0$

الخطوة 1 اختر أداة **Solve** (الحل) من القائمة **Algebra** (الجبر).

الخطوة 2 اكتب $6x^2 - 4x - 3 = 0$ متبوعةً بفاصلة، x. ثم أدخل.
الحلّان هما $x = \frac{-2 \pm \sqrt{22}}{6}$.



c. $x^2 - 6x + 10 = 0$.

الخطوة 1 اختر أداة **Solve** (الحل) من القائمة **Algebra** (الجبر).

الخطوة 2 اكتب $x^2 - 6x + 10 = 0$ متبوعةً بفاصلة، و x. ثم enter اضغط **Enter** (إدخال).
تُرجع الآلة الحاسبة القيمة *false* (خطأ). ويعني ذلك أنه لا توجد حلول حقيقية.

الخطوة 3 في القائمة، اختر **Algebra** (الجبر). ثم **Complex** (مركب).
ثم **Solve** (الحل). أعد إدخال المعادلة.
الحلّان هما $x = 3 \pm i$.

تدريب

حُلّ كل من المعادلات التالية.

1. $x^2 - 2x - 24 = 0$
2. $-x^2 + 4x - 1 = 0$
3. $0 = -3x^2 - 6x + 9$
4. $x^2 - 2x + 5 = 0$
5. $0 = 4x^2 - 8$
6. $0 = 2x^2 - 4x + 1$
7. $x^2 + 3x + 8 = 5$
8. $25 + 4x^2 = -20x$
9. $x^2 - x = -6$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

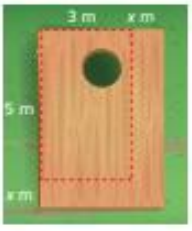
اختبار الوحدة الثاني
الدروس من 4-4 إلى 4-5

اكتب معادلةً تربيعيةً بالصيغة القياسية بحيث يكون لها الجذر (الجذور) التالي. (الدرس 4-4)

1. 7, 2
2. 0, 3
3. −5, 8
4. −7, −8
5. −6, −3
6. 3, −4
7. $1, \frac{1}{2}$
8. **نظرية الأعداد** جد عددين صحيحين موجبين متتاليين ناتج ضربهما 624. (الدرس 4-4)
9. **الهندسة** يزيد طول مستطيلٍ بمقدار 2 m عن عرضه. جد أبعاد المستطيل إذا علمت أن مساحته تساوي 63 m مربعًا. (الدرس 4-4)

حُلّ كل معادلةٍ باستخدام التحليل إلى العوامل. (الدرس 4-3)

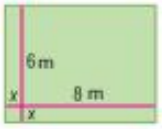
10. $x^2 - x - 12 = 0$
11. $3x^2 + 7x + 2 = 0$
12. $x^2 - 2x - 15 = 0$
13. $2x^2 + 5x - 3 = 0$
14. اكتب معادلةً تربيعيةً بالصيغة القياسية لها الجذران 6− و $\frac{1}{4}$. (الدرس 4-4)
15. **الألعاب** أنشأ عبيد منصةً للعبة رمي أكياس الفاصوليا. وكان بعدا المنصة الأصلية في المخططات 3 m في 5 m. ولكنّه جعل منصّته أكبر بإضافة x متر إلى كل ضلع. مساحة المنصّة الجديدة تساوي 35 m². (الدرس 4-4)



a. اكتب معادلةً تربيعيةً تمثل مساحة هذه المنصّة.

b. جد بعدي المنصّة التي صنعها جلال.

16. **المثلثات** جد أبعاد مثلثٍ إذا علمت أن قياس قاعدته يساوي $\frac{2}{3}$ من قياس ارتفاعه وتساوي مساحته 12 cm². (الدرس 4-4)
17. **البناء** يركّب علي بلاطةً إسمنتيةً في فنائه الخلفي. وكان ينوي أن يكون للبلاطة الأصلية البعدان 8 m في 6 m. ولكنّه ارتأى أن يجعل بلاطته أكبر بإضافة x مترًا إلى كل ضلع. مساحة البلاطة الجديدة تساوي 120 m². (الدرس 4-4)



a. اكتب معادلةً تربيعيةً تمثّل مساحة البلاطة الجديدة.

b. جد أبعاد البلاطة.

بسّط. (الدرس 4-5)

18. $\sqrt{-81}$
19. $\sqrt{-25x^4y^5}$
20. $(15 - 3i) - (4 - 12i)$
21. i^{37}
22. $(5 - 3i)(5 + 3i)$
23. $\frac{3 - i}{2 + 5i}$
24. تساوي المقاومة في أحد أجزاء دارةٍ موصولةٍ على التوالي $3 + 4j$ من وحدة الأوم وتساوي المقاومة في جزءٍ آخر من الدارة $6 - 7j$ من وحدة الأوم . اجمع هذين العددين المركبين لإيجاد المقاومة الكلية في الدارة. (الدرس 4-5)

بسّط. (الدرس 4-5)

25. $(3 - 4i) - (9 - 5i)$
26. $\frac{4i}{4 - i}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 4-6

القانون العام والمميّز

السابق:
- حللتَ معادلاتٍ بإكمال المربع.

الحالي:
1. حل المعادلات التربيعية باستخدام القانون العام.
2. استخدام المميز لتحديد عدد ونوع جذور معادلة تربيعية.

لماذا؟
- مسابقة منجنيق البطين فعاليةٌ يبني فيها المشترك منجنيقًا ويطلق بطيخةً على هدف.

يمكن تمثيل مسار البطيخة بالدالة التربيعية $h = -4.9t^2 + 117t + 42$، وفيها h ارتفاع البطيخة وt عدد الثواني.

لكي تتنبأ متى ستضرب البطيخة الهدف، يمكنك حلّ المعادلة $0 = -4.9t^2 + 117t + 42$. كان سيتعذر حلّ هذه المعادلة باستخدام التحليل إلى العوامل أو التمثيل البياني أو إكمال المربع.

المفردات الجديدة

القانون العام Quadratic Formula

المميّز discriminant

ممارسات في الرياضيات

البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

1 القانون العام

لقد وجدت حلول بعض المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني وبالتحليل إلى العوامل وباستخدام خاصية الجذر التربيعي. وهناك أيضًا صيغةٌ يمكن استخدامها في حل أي معادلةٍ تربيعية. ويمكن اشتقاق هذه الصيغة من خلال حلّ الصيغة القياسية للمعادلة التربيعية.

	الحالة الخاصة (مثال)		الحالة العامة
المعادلة التربيعية القياسية	$2x^2 + 8x + 1 = 0$		$ax^2 + bx + c = 0$
اقسم كل طرف على a.	$x^2 + 4x + \frac{1}{2} = 0$		$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
اطرح $\frac{c}{a}$ من كل طرف.	$x^2 + 4x = -\frac{1}{2}$		$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$
أكمل المربع.	$x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{4}{2}\right)^2$		$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$
حلل الطرف الأيسر إلى العوامل.	$(x + 2)^2 = -\frac{1}{2} + \left(\frac{4}{2}\right)^2$		$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$
بسّط الطرف الأيمن.	$(x + 2)^2 = \frac{7}{2}$		$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$
خاصيّة الجذر التربيعي	$x + 2 = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$		$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
اطرح $\frac{b}{2a}$ من كل طرف.	$x = -2 \pm \sqrt{\frac{7}{2}}$		$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
بسّط.	$x = \frac{-4 \pm \sqrt{14}}{2}$		$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

تعرف المعادلة $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ على أنها **القانون العام**.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

نصيحة دراسية

القانون العام رغم أن التحليل إلى العوامل قد يكون طريقةً أسهل لحلّ بعض المعادلات، إلا أنه يمكن استخدام القانون العام لحلّ أي معادلةٍ تربيعية.

المفهوم الأساسي القانون العام

الشرح تُعطى حلول المعادلات التربيعية ذات الصيغة $ax^2 + bx + c = 0$. حيث $a \neq 0$. من خلال القانون التالي.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثال

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$$

مثال 1 جذران نسبيان

حُلّ $x^2 - 10x = 11$ باستخدام القانون العام.

أولاً، اكتب المعادلة بالصيغة $ax^2 + bx + c = 0$ وحدّد a و b و c.

$$\begin{array}{rcl} & & ax^2 + bx + c = 0 \\ & & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ x^2 - 10x = 11 & \rightarrow & 1x^2 - 10x - 11 = 0 \end{array}$$

بعد ذلك عوّض بهذه القيم في القانون العام.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ القانون العام

$$= \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(-11)}}{2(1)}$$ عوّض عن a بـ 1 وعن b بـ -10 وعن c بـ -11.

$$= \frac{10 \pm \sqrt{100 + 44}}{2}$$ اضرب.

$$= \frac{10 \pm \sqrt{144}}{2}$$ بسّط.

$$= \frac{10 \pm 12}{2}$$ $\sqrt{144} = 12$

$$x = \frac{10 + 12}{2} \text{ or } x = \frac{10 - 12}{2}$$ اكتب في صورة معادلتين.

$$= 11 \qquad = -1$$ بسّط.

الحلّان هما -1 و 11.

التحقق عوّض بكلتا القيمتين في المعادلة الأصلية.

$$\begin{array}{rl} x^2 - 10x = 11 & \\ (-1)^2 - 10(-1) \stackrel{?}{=} 11 & \\ 1 + 10 \stackrel{?}{=} 11 & \\ 11 = 11 \ \checkmark & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} x^2 - 10x = 11 & \\ (11)^2 - 10(11) \stackrel{?}{=} 11 & \\ 121 - 110 \stackrel{?}{=} 11 & \\ 11 = 11 \ \checkmark & \end{array}$$

تمرين موجّه

حُلّ كل معادلة باستخدام القانون العام.

1A. $x^2 + 6x = 16$

1B. $2x^2 + 25x + 33 = 0$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © محفوظ الطبع والتأليف

مثال 2 الجذر النسبي الوحيد

حُلّ $x^2 + 8x + 16 = 0$ باستخدام القانون العام.

حدّد a و b و c. ثمّ عوّض بهذه القيم في القانون العام.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ القانون العام

$$= \frac{-(8) \pm \sqrt{(8)^2 - 4(1)(16)}}{2(1)}$$ عوّض عن a بـ 1 عن b بـ 8 عن c بـ 16.

$$= \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2}$$ بسّط.

$$= \frac{-8}{2} \text{ or } -4$$ $\sqrt{0} = 0$

[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

الحل يساوي -4.

التحقق يوضح التمثيل البياني للدالة ذات الصلة أنه لا يوجد حلّ عند $x = -4$.

تمرين موجّه

حُلّ كل معادلة باستخدام القانون العام.

2A. $x^2 - 16x + 64 = 0$

2B. $x^2 + 34x + 289 = 0$

الربط بتاريخ الرياضيات

براهماغوبتا (598-668)

قدّم عالم الرياضيات الهندي براهماغوبتا الصيغة العامة الأولى لحل المعادلة التربيعية $ax^2 + bx = c$. والتي نعرف الآن بالقانون العام.

يمكنك التعبير عن الجذور غير النسبية بالضبط من خلال كتابتها بالصيغة الجذرية.

مثال 3 الجذور غير النسبية

حُلّ $2x^2 + 6x - 7 = 0$ باستخدام القانون العام.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ القانون العام

$$= \frac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(2)(-7)}}{2(2)}$$ عوّض عن a بـ 2 وعن b بـ 6 وعن c بـ -7.

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{92}}{4}$$ بسّط.

$$= \frac{-6 \pm 2\sqrt{23}}{4} \text{ أو } \frac{-3 \pm \sqrt{23}}{2}$$ $\sqrt{92} = \sqrt{4 \cdot 23}$ أو $2\sqrt{23}$

الحلّان التقريبيان هما -3.9 و 0.9.

[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

التحقق تحقق من هاتين النتيجتين باستخدام التمثيل البياني للدالة التربيعية ذات الصلة $y = 2x^2 + 6x - 7$. باستخدام الدالة الصفرية **ZERO** في حاسبة التمثيل البياني. يكون صفرا الدالة ذات الصلة هما -3.9 و 0.9.

تمرين موجّه

حُلّ كل معادلة باستخدام القانون العام.

3A. $3x^2 + 5x + 1 = 0$

3B. $x^2 - 8x + 9 = 0$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

عند استخدام القانون العام. إذا كانت قيمة المجذور سالبة، فسيكون الحل مركبًا. وتبدو الحلول المركبة دائمًا في صورة أزواج مترافقة.

نصيحة دراسية
الأعداد المركبة تذكّر أن تكتب حلولك بالصيغة a + bi، والتي تسمّى أحيانًا *الصيغة القياسية للعدد المركب*.

مثال 4 الجذور المركّبة

حُلّ $x^2 - 6x = -10$ باستخدام القانون العام.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ القانون العام

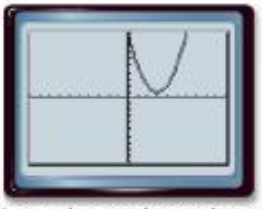
$$= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)}$$ عوّض عن a بـ 1 وعن b بـ -6 وعن c بـ 10.

$$= \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2}$$ بسّط.

$$= \frac{6 \pm 2i}{2}$$ $\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)}$ or $2i$

$$= 3 \pm i$$ بسّط.

الحلّان هما العددان المركبان $3 + i$ و $3 - i$.


[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

التحقق يوضح منحني الدالة المرتبطة أن الحلّين مركّبان، ولكنه لا يساعدك في إيجادهما. وللتحقق من الحلّين المركّبين، عوّض بهما في المعادلة الأصلية.

$x^2 - 6x = -10$	القانون العام
$(3 + i)^2 - 6(3 + i) \stackrel{?}{=} -10$	$x = 3 + i$
$9 + 6i + i^2 - 18 - 6i \stackrel{?}{=} -10$	مربّع المجموع؛ خاصية التوزيع
$-9 + i^2 \stackrel{?}{=} -10$	بسّط.
$-9 - 1 = -10$ ✓	$i^2 = -1$
$x^2 - 6x = -10$	المعادلة الأصلية
$(3 - i)^2 - 6(3 - i) \stackrel{?}{=} -10$	$x = 3 - i$
$9 - 6i + i^2 - 18 + 6i \stackrel{?}{=} -10$	مربّع المجموع؛ خاصية التوزيع
$-9 + i^2 \stackrel{?}{=} -10$	بسّط.
$-9 - 1 = -10$ ✓	$i^2 = -1$

تمرين موجّه

حُلّ كل معادلة باستخدام القانون العام.

4A. $3x^2 + 5x + 4 = 0$

4B. $x^2 - 4x = -13$

2 الجذور والمميّز

انتبه في الأمثلة السابقة إلى العلاقات القائمة بين قيمة التعبير الواقع تحت الجذر وبين جذور المعادلة التربيعية. ويطلق على التعبير $b^2 - 4ac$ اسم **المميّز**.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ ← **المميّز**

يمكن استخدام المميّز لتحديد عدد جذور المعادلة التربيعية ونوعها. ويلخّص الجدول في الصفحة التالية الأنواع الممكنة للجذور. ويمكن استخدام المميّز أيضًا للتحقق من عدد الحلول ونوعها بعد حلّ المعادلة.

عندما تكون قيمة المميز في القانون العام صفرًا، فيكون للمعادلة التربيعية بالضبط جذرٌ نسبيٌ وحيد.

مراجعة المفردات
المجذور هو القيمة الواقعة تحت رمز الجذر

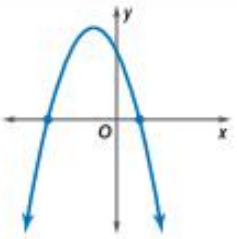
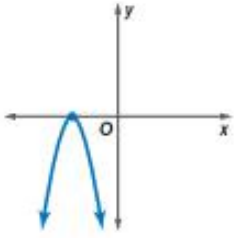
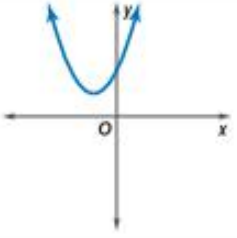
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

نصيحة دراسية

الجذور تذكّر أن حلول أي معادلة تسمى بالجذور أو الأصفار وهي القيم التي يقطع عندها منحنى الدالة المرتبطة بها المحور الأفقي x.

المفهوم الأساسي المميّز

تأمل المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$. حيث a و b و c أعداد نسبية و $a \neq 0$.

قيمة المميّز	نوع الجذور وعددها	مثال على رسم منحنى الدالة المرتبطة بالمعادلة
$b^2 - 4ac > 0$؛ مربع كامل $b^2 - 4ac$	جذران حقيقيان نسبيان	
$b^2 - 4ac > 0$؛ ليس مربعًا كاملاً $b^2 - 4ac$	جذران حقيقيان غير نسبيين	
$b^2 - 4ac = 0$	جذر حقيقي نسبي واحد مكرر	
$b^2 - 4ac < 0$	جذران مركبان	

مثال 5 وصف الجذور

جد قيمة المميّز لكل معادلة تربيعية. ثم صف عدد الجذور ونوعها.

a. $7x^2 - 11x + 5 = 0$

$a = 7, b = -11, c = 5$

$b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4(7)(5)$

$= 121 - 140$

$= -19$

المميز سالب ، هناك جذران مركبان.

b. $x^2 + 22x + 121 = 0$

$a = 1, b = 22, c = 121$

$b^2 - 4ac = (22)^2 - 4(1)(121)$

$= 484 - 484$

$= 0$

المميز يساوي الصفر ، اذا هناك جذر نسبي واحد مكرر.

تمرين موجّه

5A. $-5x^2 + 8x - 1 = 0$

5B. $-7x + 15x^2 - 4 = 0$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

لقد درست مجموعةً من طرق حل المعادلات التربيعية. ويلخص الجدول أدناه هذه الطرق.

نصيحة دراسية
المفكّرة الدراسية قد ترغب في نسخ قائمة الطرق هذه على مفكّرة الرياضيات أو المطوية خاصتك للاحتفاظ بها بمثابة مرجعٍ أثناء دراستك.

ملخص المفهوم حلّ المعادلات التربيعية

الطريقة	يمكن استخدامها	متى تُستخدَم
التمثيل البياني	أحيانًا	تُستخدم فقط إذا لم يكن الحلّ الدقيق مطلوبًا. وهي تستخدم على النحو الأفضل للتحقق من صحّة الحلول التي جـدت جبريًا.
التحليل إلى العوامل	أحيانًا	تُستخدم إذا كان الحدّ الجبري الثابت صفرًا أو إذا كان من السهل تحديد العوامل. **مثال** $x^2 - 7x = 0$
خاصيّة الجذر التربيعي	أحيانًا	تُستخدم في المعادلات التي فيها المربع الكامل يساوي مقدارًا ثابتًا. **مثال** $(x - 5)^2 = 18$
إكمال المربع	دائمًا	مفيدة في المعادلات ذات الصيغة $x^2 + bx + c = 0$ حيث b عدد زوجي. **مثال** $x^2 + 6x - 14 = 0$
القانون العام	دائمًا	مفيدة عندما تخفق الطرق الأخرى أو تكون مملةً جدًا. **مثال** $2.3x^2 - 1.8x + 9.7 = 0$

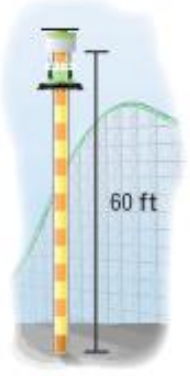
التحقق من فهمك

الأمثلة 4-1 **حُلّ كل معادلة باستخدام القانون العام.**

1. $x^2 + 12x - 9 = 0$
2. $x^2 + 8x + 5 = 0$
3. $4x^2 - 5x - 2 = 0$
4. $9x^2 + 6x - 4 = 0$
5. $10x^2 - 3 = 13x$
6. $22x = 12x^2 + 6$
7. $-3x^2 + 4x = -8$
8. $x^2 + 3 = -6x + 8$

المثالان 3 و 4

9. **تمثيل النماذج** تصعد إحدى ألعاب مدينة الملاهي بالراكبين إلى قمة برجٍ ثم تهبط بهم بسرعةٍ تصل إلى 80 ft/sec. للدالّة التي تمثّل هذه اللعبة الصيغة $h = -16t^2 - 64t + 60$. وحيث h الارتفاع بالأقدام و t الزمن بالثواني. كم ثانية يستغرق هبوط المركبة من ارتفاع 60 ft إلى ارتفاع 0 ft؟



مثال 5 **أكمل الجزأين a و b في كل معادلة تربيعية.**

a. **جـد قيمة المميّز.**

b. **صِف عدد الجذور ونوعها.**

10. $3x^2 + 8x + 2 = 0$
11. $2x^2 - 6x + 9 = 0$
12. $-16x^2 + 8x - 1 = 0$
13. $5x^2 + 2x + 4 = 0$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الأمثلة 1–4 **حُلّ كل معادلة باستخدام القانون العام.**

14. $x^2 + 45x = -200$

15. $4x^2 - 6 = -12x$

16. $3x^2 - 4x - 8 = -6$

17. $4x^2 - 9 = -7x - 4$

18. $5x^2 - 9 = 11x$

19. $12x^2 + 9x - 2 = -17$

20. القفز يقفز المتنافسون في مسابقةِ للقفز من منصةٍ ارتفاعها 10 m إلى الأعلى وباتجاه الخارج قبل أن يغطسوا في بركة السباحة أسفلهم. ويمكن تقدير ارتفاع الغاطس h بالأمتار فوق المسبح بعد t ثانيةً وفقًا للمعادلة $h = -4.9t^2 + 3t + 10$.

a. حدّد المجال والمدى اللذين بهما تكون هذه الدالة منطقية.

b. متى يصطدم الغطاس بالماء؟

مثال 5 **أكمل الأجزاء من a إلى c في كل معادلة تربيعية.**

a. جد قيمة المميّز.

b. صِف عدد الجذور ونوعها.

c. جد الحلول الدقيقة باستخدام القانون العام.

21. $2x^2 + 3x - 3 = 0$

22. $4x^2 - 6x + 2 = 0$

23. $6x^2 + 5x - 1 = 0$

24. $6x^2 - x - 5 = 0$

25. $3x^2 - 3x + 8 = 0$

26. $2x^2 + 4x + 7 = 0$

27. $-5x^2 + 4x + 1 = 0$

28. $x^2 - 6x = -9$

29. $-3x^2 - 7x + 2 = 6$

30. $-8x^2 + 5 = -4x$

31. $x^2 + 2x - 4 = -9$

32. $-6x^2 + 5 = -4x + 8$

33. ألعاب الفيديو عندما كان طارق في المنزل، أحضر له صديقه خالد شريطًا للعبةٍ إلكترونية. وقف طارق عند نافذة غرفة النوم ووقف خالد تحت النافذة مباشرةً. فإذا رمى خالد شريط اللعبة إلى طارق بسرعةٍ ابتدائية تساوي 35 ft/sec، تعطى معادلة ارتفاع الشريط h بالقدم بعد t ثانيةً بالصيغة $h = -16t^2 + 35t + 5$.

a. إذا كان ارتفاع النافذة 25 ft فوق الأرض، فهل ستكون لدى طارق 0 أو 1 أو 2 من فرص التقاط شريط اللعبة؟

b. إذا لم يتمكن طارق من التقاط شريط اللعبة، فمتى سيصطدم بالأرض؟

34. الاستنتاج المنطقي يصمّم مهندسون مدنيّون مخططًا من طريقٍ سينخفض دون مستوى سطح البحر. ويمكن تمثيل منحنى الطريق بالمعادلة $y = 0.00005x^2 - 0.06x$، حيث x المسافةُ الأفقية بالأمتار بين النقطتين اللتين يكون عندهما الطريق عند مستوى سطح البحر و y تمثل الارتفاع. يريد المهندسون وضع لافتات للتوقف في المواقع التي يتساوى فيها ارتفاع الطريق مع مستوى سطح البحر. فما المسافة الأفقية التي سيضعون عندها لافتات التوقف؟

أكمل الأجزاء من a إلى c في كل معادلة تربيعية.

a. جد قيمة المميّز.

b. صِف عدد الجذور ونوعها.

c. جد الحلول الدقيقة باستخدام القانون العام.

35. $5x^2 + 8x = 0$

36. $8x^2 = -2x + 1$

37. $4x - 3 = -12x^2$

38. $0.8x^2 + 2.6x = -3.2$

39. $0.6x^2 + 1.4x = 4.8$

40. $-4x^2 + 12 = -6x - 8$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

العام	عدد الوفيات من بين كل 100000
2000	91.8
2002	89.7
2004	85.5
2010	60.3
2015	؟
2017	؟

41. **التدخين** لقد أدى تراجع التدخين في الولايات المتحدة الأمريكية إلى انخفاض في معدل الوفيات الناتجة عن سرطان الرئة. ويمكن تقدير عدد الوفيّات من بين كل 100000 شخص y من وفقا للعلاقة $y = -0.26x^2 - 0.55x + 91.81$. حيث x يمثل عدد الأعوام بعد عام 2000.

a. احسب عدد الوفيّات من بين كل 100000 شخص لعامي 2015 و 2017.

b. استخدم القانون العام للحلّ لإيجاد x عند $y = 50$.

c. وفقا للدالة الدالة التربيعية، متى يكون معدل الوفيات صفرًا من بين كل 100000؟ وهل تعتقد أن هذا التنبؤ منطقي؟ لِمَ أو لِمَ لا؟

42. **نظرية الأعداد** نحصل على المجموع S للأعداد الصحيحة المتتالية n ،... 3، 2، 1 من الصيغة $S = \frac{1}{2}n(n + 1)$. كم عدد الأعداد الصحيحة المتتالية، بدءا من 1، للوصول الى المجموع 666؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

43. **التفكير النقدي** يحدّد عبد الله وعبد العزيز عدد حلول المعادلة $3x^2 - 5x = 7$. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

عبد الله

$3x^2 - 5x = 7$

$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(7)$

$= -59$

بما أن المميّز سالب، فليست هناك حلول حقيقية.

عبد العزيز

$3x^2 - 5x = 7$

$3x^2 - 5x - 7 = 0$

$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(-7)$

$= 109$

بما أن المميّز موجب، فهناك حلّان حقيقيان.

44. **تحدٍّ** جد حلول المعادلة $4ix^2 - 4ix + 5i = 0$ باستخدام القانون العام.

45. **الاستنتاج** حدّد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة *أحيانًا*، أم *دائما*، أم أنها ليست صحيحة على الإطلاق. اشرح استنتاجك.

a. في معادلةٍ تربيعيةٍ من الصيغة القياسية، إذا كان لـ a و c إشارتان مختلفتان، فستكون الحلول حقيقية.

b. إذا كان مميّز معادلةٍ تربيعيةٍ أكبر من 1، فإن الجذرين يكونان عددين حقيقيين غير نسبيين.

46. **مسألة غير محددة الإجابة** ارسم التمثيل البياني المقابل واذكر عدد الجذور ونوعها لكلّ مما يلي.

a. $b^2 - 4ac = 0$

b. دالة تربيعية فيها $f(x)$ لا تساوي الصفر على الإطلاق.

c. دالة تربيعية فيها $f(a) = 0$ و $a \neq b$، $f(b) = 0$.

d. المميّز أقل من الصفر.

e. a و b كلاهما حل ويمكن تمثيلهما بكسرين.

47. **تحدٍّ** جد قيمة (قيم) m في المعادلة التربيعية $x^2 + x + m + 1 = 0$ بحيث يكون لها حل وحيد.

48. **الكتابة في الرياضيات** صف ثلاث طرق مختلفة لحلّ $x^2 - 2x - 15 = 0$. وما الطريقة التي تفضلها، ولماذا؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

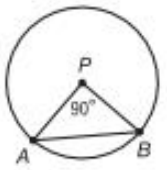
49. حدّدت شركةٌ أن ربحها الشهري P يُستنتج من العلاقة $P = -8x^2 + 165x - 100$. وفيها x سعر بيع كل وحدة من وحدات المنتج. فأي مما يلي هو التقدير الأفضل للسعر الأقصى للوحدة والذي يمكن أن تبيع به الشركةُ دون أن تخسر المال؟

A AED 10 B AED 20 C AED 30 D AED 40

50. SAT/ACT ما مجموعة الأعداد من بين ما يلي والتي يكون فيها الوسط أكبر من الوسيط؟

F {4, 5, 6, 7, 8}
G {4, 6, 6, 6, 8}
H {4, 5, 6, 7, 9}
J {3, 5, 6, 7, 8}
K {2, 6, 6, 6, 6}

51. إجابة قصيرة في الشكل أدناه، P هي مركز الدائرة التي نصف قطرها 15 cm. فما مساحة المثلث $\triangle APB$؟



52. 75% من 88 تساوي 60% من أي عدد؟

A 100 B 101 C 108 D 110

مراجعة شاملة

بسّط. (الدرس 5-4)

53. i^{26} **54.** $\sqrt{-16}$ **55.** $4\sqrt{-9} \cdot 2\sqrt{-25}$

56. السلامة على الطرق السريعة يستطيع المهندسون استخدام الصيغة $d = 0.05v^2 + 1.1v$ لتقدير مسافة التوقف الصغرى d بالأمتار لسيارةٍ تسير بسرعة v كيلومترًا في الساعة. فإذا كان بإمكان سيارةٍ التوقف بعد 20 m. فما أعلى سرعة قد تكون تسير عندها عندما ضغط السائق على المكابح أول مرة؟ (الدرس 6-4)

57. الجسور تُقارب الكابلات الداعمة لجسر البوابة الذهبية شكل قطعٍ مكافئ. ويمكن تمثيل القطع المكافئ بالدالة التربيعية $y = 0.00012x^2 + 6$. حيث تمثل x المسافة من محور التماثل وتمثل y ارتفاع الكابلات. المعادلة التربيعية المرتبطة هي $0.00012x^2 + 6 = 0$. (الدرس 6-4)

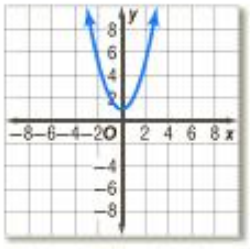
a. احسب قيمة المميّز.

b. بِمَ يخبرك المميّز عن الكابلات الداعمة لجسر البوابة الذهبية؟

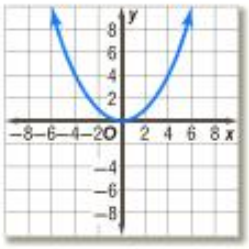
مراجعة المهارات

اكتب معادلةً لكل منحنى مرسوم في ما يلي.

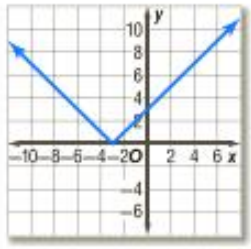
58.



59.



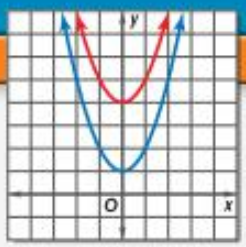
60.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 4-7

تحويلات الدوال التربيعية



السابق
- مثلت دوالاً تربيعية بيانيًا باستخدام الرأس ومحور التماثل.

الحالي
1 تطبيق الإزاحات على الدوال التربيعية.
2 تطبيق تغيير الأبعاد على الدوال التربيعية
3 كتابة دالة تربيعية بالصيغة $y = a(x - h)^2 + k$.
4 تحويل التمثيلات البيانية للدوال التربيعية ذات الصيغة $y = a(x - h)^2 + k$

لماذا؟
- التمثيلان البيانيان الموضحان على الجهة اليمنى لهما المقاس والشكل نفسهما. ولكن لاحظ أن رأس القطع المكافئ الأحمر أعلى على المحور الرأسي y من رأس القطع المكافئ الأزرق. وإزاحة القطع المكافئ إلى الأعلى والأسفل مثالٌ عن عملية تحويل.

المفردات الجديدة
- التحويل transformation
- الإزاحة translation
- تغيير الأبعاد/التمدد dilation
- الانعكاس reflection
- صيغة الرأس vertex form

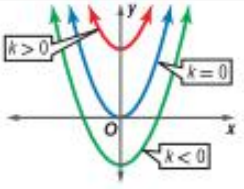
ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.
البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.
محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 الإزاحات

تغيّر **الإزاحة** مواقع الأشكال. فأحد أنواع التحويل، ويدعى **الإزاحة**، يحرّك الشكل إلى الأعلى أو الأسفل أو اليسار أو اليمين. عند إضافة ثابتٍ k أو طرحه من دالةٍ أصلية، يكون التمثيل البياني للدالة الناتجة $f(x) \pm k$ هو التمثيل البياني للدالة الأصلية مزاحًا إلى الأعلى أو الأسفل.

الدالة الأصلية في مجموعة الدوال التربيعية هي $f(x) = x^2$. ولجميع الدال التربيعية الأخرى تمثيلات بيانيةٌ هي تحويلاتٌ للتمثيل البياني للدالة $f(x) = x^2$.

المفهوم الأساسي الإزاحة الرأسية



التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^2 + k$ هو التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^2$ مزاحًا رأسيًا.

إذا كان $k > 0$، فإن التمثيل البياني $f(x) = x^2$ يزاح $|k|$ وحدة **إلى الأعلى**.

إذا كان $k < 0$، فإن التمثيل البياني $f(x) = x^2$ يزاح $|k|$ وحدة **إلى الأسفل**.

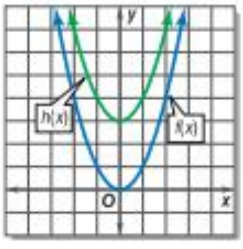
مثال 1 وصف الإزاحة وتمثيلها بيانيًا

صِف كيفية ارتباط كل دالة بالتمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$.

a. $h(x) = x^2 + 3$

$k = 3$ ، $3 > 0$

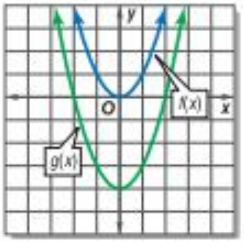
$h(x)$ هي إزاحة للتمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$ إلى الأعلى لمسافة 3 وحدات.



b. $g(x) = x^2 - 4$

$k = -4$ ، $-4 < 0$

$g(x)$ هي إزاحة للتمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$ إلى الأسفل لمسافة 4 وحدات.



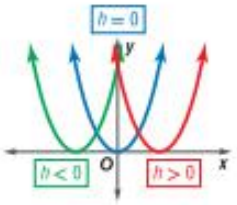
تمرين موجّه

1A. $f(x) = x^2 - 7$ **1B.** $g(x) = 5 + x^2$ **1C.** $h(x) = -5 + x^2$ **1D.** $f(x) = x^2 + 1$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكن إزاحة التمثيل البياني التربيعي أفقيًا بطرح حدٍّ واحدٍ لـ h من x.

المفهوم الأساسي الإزاحة الأفقية



التمثيل البياني للدالة $g(x)=(x-h)^2$ هي التمثيل البياني للدالة $f(x)=x^2$ مزاحًا بالاتجاه الأفقي.

إذا كان $h > 0$، التمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$ يُزاح لمسافة h وحدة **يمينًا**.

إذا كان $h < 0$، التمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$ يُزاح لمسافة $|h|$ وحدة **يسارًا**.

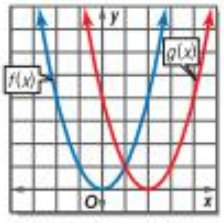
مثال 2 الإزاحة الأفقية

صِف كيفية ارتباط كل دالة بالتمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$.

a. $g(x) = (x - 2)^2$

$k = 0$، $h = 2$، $2 > 0$

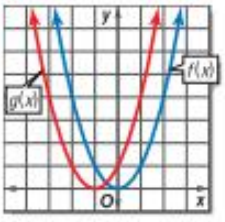
$g(x)$ هي إزاحة للتمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$ إلى اليمين لمسافة وحدتين.



b. $g(x) = (x + 1)^2$

$k = 0$، $h = -1$، $-1 < 0$

$g(x)$ هي إزاحة للتمثيل البياني لـ $f(x) = x$ إلى اليسار لمسافة وحدة واحدة.



تمرين موجّه

2A. $g(x) = (x - 3)^2$

2B. $g(x) = (x + 2)^2$

ويمكن إزاحة التمثيل البياني التربيعي بالاتجاهين الأفقي والعمودي.

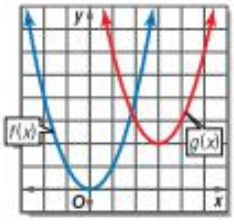
مثال 3 الإزاحة الأفقية والعمودية

صِف كيفية ارتباط كل دالة بالتمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$.

a. $g(x) = (x - 3)^2 + 2$

$k = 2$، $h = 2$، $3 > 0$

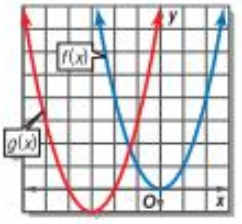
$g(x)$ هي إزاحة للتمثيل البياني لـ $f(x) = x^3$ إلى اليمين لمسافة 3 وحدات وإلى الأعلى لمسافة وحدتين.



b. $g(x) = (x + 3)^2 - 1$

$k = -1$، $h = -3$، $-3 < 0$

$g(x)$ هي إزاحة للتمثيل البياني لـ $f(x) = x$ إلى اليسار لمسافة 3 وحدات وإلى الأسفل لمسافة وحدة واحدة.



تمرين موجّه

3A. $g(x) = (x + 2)^2 + 3$

3B. $g(x) = (x - 4)^2 - 4$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 تغيير الأبعاد والإزاحة

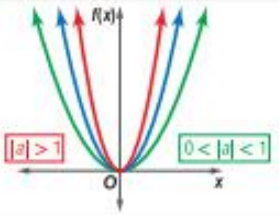
ثمة نوع آخر من التحويلات، ويدعى تغيير الأبعاد. و**تغيير الأبعاد** يجعل التمثيل البياني أضيق من التمثيل البياني الأصلي أو أعرض منه. وعند ضرب الدالة الأصلية $f(x) = x^2$ بثابت a، فإن التمثيل البياني للدالة الناتجة $f(x) = ax^2$ إما أن يتمدد أو ينضغط رأسيًا.

المفهوم الأساسي تغيير الأبعاد

التمثيل البياني لـ $g(x) = ax^2$ هو التمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$ ممدّدًا أو مضغوطًا رأسيًا.

إذا كان $|a| > 1$، فإن التمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$ يتمدد رأسيًا.

إذا كان $0 < |a| < 1$، فإن التمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$ ينضغط رأسيًا.



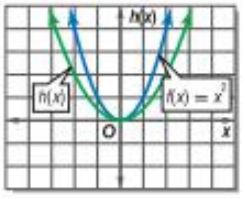
مثال 4 وصف تغيير الأبعاد وتمثيلها بيانيًا

صِف كيفية ارتباط كل دالة بالتمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$.

a. $h(x) = \frac{1}{2}x^2$

$a = \frac{1}{2}$ و $0 < \frac{1}{2} < 1$

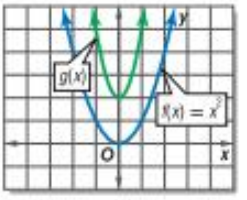
$h(x)$ هي تغيير لأبعاد التمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$ المضغوط رأسيًا.



b. $g(x) = 3x^2 + 2$

$a = 3$ و $3 > 1$, $k = 2$ و $2 > 0$

$g(x)$ هي تغيير لأبعاد التمثيل البياني لـ $f(x) = x$ الممدّد رأسيًا والمزاح إلى الأعلى لمسافة وحدتين.



تمرين موجّه

4A. $j(x) = 2x^2$ **4B.** $h(x) = 5x^2 - 2$ **4C.** $g(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2$

نصيحة دراسية

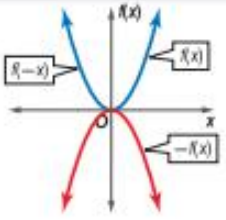
الاستنتاج المنطقي عند تمديد التمثيل البياني لدالة تربيعية رأسيًا، يصبح شكل التمثيل البياني الجديد أضيق من التمثيل البياني للدالة الأصلية. وعند ضغطه رأسيًا، يصبح التمثيل البياني الجديد أعرض من التمثيل البياني للدالة الأصلية.

يقلب **الانعكاس** الشكل بالنسبة إلى مستقيم.

المفهوم الأساسي الانعكاس

التمثيل البياني لـ $-f(x)$ هو انعكاس التمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$ بالنسبة للمحور الأفقي x.

التمثيل البياني لـ $f(-x)$ هو انعكاس التمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$ بالنسبة للمحور الرأسي y.



نصيحة دراسية

الانعكاس يؤدي انعكاس الدالة $f(x) = x^2$ بالنسبة للمحور الرأسي y إلى إعطاء الدالة نفسها، وذلك لأن $f(-x) = (-x)^2 = x^2$.

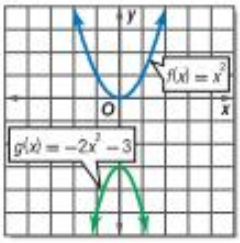
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 5 وصف التحويلات وتمثيلها بيانيًا

صِف كيفية ارتباط كل دالة بالتمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$.

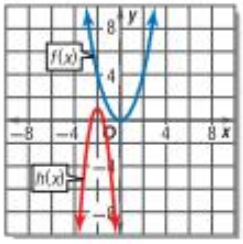
a. $g(x) = -2x^2 - 3$

- $a = -2$ و $-2 < 0$ و $|-2| > 1$. إذًا هناك انعكاس بالنسبة للمحور الأفقي x والتمثيل البياني ممدّد رأسيًا.
- $k = -3$ و $-3 < 0$. إذًا هناك إزاحة إلى الأسفل لمسافة 3 وحدات.



b. $h(x) = -4(x + 2)^2 + 1$

- $a = -4$ و $-4 < 0$ و $|-4| > 1$. إذًا هناك انعكاس بالنسبة للمحور الأفقي x والتمثيل البياني ممدّد رأسيًا.
- $h = -2$ و $-2 < 0$. إذًا هناك إزاحة لمسافة وحدتين إلى اليسار.
- $k = 1$ و $1 > 0$. إذًا هناك إزاحة إلى الأعلى لمسافة وحدة واحدة.



تمرين موجّه

5A. $h(x) = 2(-x)^2 - 9$ **5B.** $g(x) = \frac{1}{5}x^2 + 3$ **5C.** $j(x) = -2(x - 1)^2 - 2$

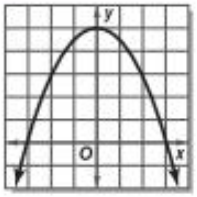
انتبه!

التحويلات يمكن أن يؤدي التمثيل البياني للدالة $f(x) = -ax^2$ إلى تحويلين للتمثيل البياني الخاص بـ $f(x) = x^2$ وهما: انعكاس بالنسبة للمحور الأفقي x إذا كان $a > 0$ إضافة إلى انضغاط أو تمدّد اعتمادًا على القيمة المطلقة لـ a.

يمكنك استخدام ما تعرفه عن خواص التمثيلات البيانية للمعادلات التربيعية لمطابقة المعادلات مع التمثيلات البيانية.

مثال 6 على الاختبار المعياري تحديد معادلة تمثيل بياني

أي مما يلي معادلة للدالة الموضّحة في التمثيل البياني؟



A $y = \frac{1}{2}x^2 - 5$ C $y = -\frac{1}{2}x^2 + 5$

B $y = -2x^2 - 5$ D $y = 2x^2 + 5$

قراءة فقرة الاختبار

لديك تمثيل بياني. وعليك إيجاد معادلته.

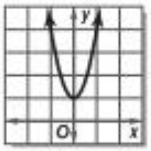
حل فقرة الاختبار

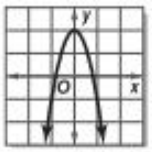
التمثيل البياني مفتوح إلى الأسفل. ولذلك فقد عُكس التمثيل البياني لـ $y = x^2$ بالنسبة للمحور الأفقي x. ويتعين أن يكون معامل القوة الأعلى سالبًا. ولذلك علينا حذف الخيارين A و D.

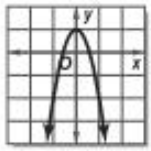
القطع المكافئ مزاحٌ إلى الأعلى لمسافة 5 وحدات. ولذلك فإن $k = 5$. انظر إلى المعادلات. في الخيارين C و D فقط يكون $k = 5$. الإجابة هي C.

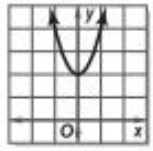
تمرين موجّه

6. أي مما يلي هو التمثيل البياني لـ $y = -3x^2 + 1$؟

F 

G 

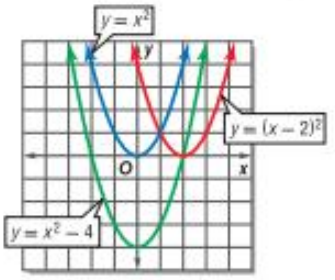
H 

J 

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تذكر أن مجموعة التمثيلات البيانية هي جملة من التمثيلات البيانية التي تعرض خاصيةً واحدةً أو عدة خواص متشابهة. والتمثيل البياني الأصلي هو التمثيل البياني الأبسط في العائلة. أيًا كانت عائلة الدوال التربيعية، فإن $y = x^2$ هو التمثيل البياني الأصلي.

يمكن رسم التمثيلات البيانية الأخرى لمجموعة الدوال التربيعية. مثل $y = (x - 2)^2$ و $y = x^2 - 4$، من خلال تحويل التمثيل البياني لـ $y = x^2$.



3 كتابة الدوال التربيعية بصيغة الرأس

تُكتب كل دالةٍ أعلاه **بصيغة الرأس** $y = a(x - h)^2 + k$، حيث (h, k) رأس القطع المكافئ و $x = h$ محور التماثل و a تحدد شكل القطع المكافئ واتجاه انفتاحه.

حين تكون الدالة التربيعية بالصيغة $y = ax^2 + bx + c$، فيمكنك إكمال المربع لكتابة الدالة بصيغة الرأس. فإذا لم يكن معامل الحدّ التربيعي يساوي 1، إذًا فعليك تحليل عامل الحدّين التربيعي والخطي قبل إكمال المربع. وبعد إكمال المربع وكتابة الدالة بصيغة الرأس، فإن قيمة k تشير إلى قيمةٍ صغرى إذا كان $a < 0$ أو تشير إلى قيمة عظمى إذا كان $a > 0$.

مثال 7 كتابة الدوال بصيغة الرأس

اكتب كل دالة بصيغة الرأس.

a. $y = x^2 + 6x - 5$

$y = x^2 + 6x - 5$	الدالة الأصلية
$y = (x^2 + 6x + 9) - 5 - 9$	أكمل المربع.
$y = (x + 3)^2 - 14$	بسّط.

b. $y = -2x^2 + 8x - 3$

$y = -2x^2 + 8x - 3$	الدالة الأصلية
$y = -2(x^2 - 4x) - 3$	جمّع $ax^2 + bx$ وحلّل إلى العوامل، ثم اقسم على a.
$y = -2(x^2 - 4x + 4) - 3 - (-2)(4)$	أكمل المربع.
$y = -2(x - 2)^2 + 5$	بسّط.

تمرين موجّه

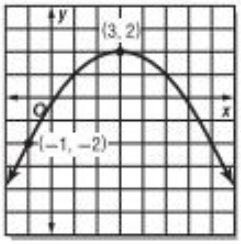
1A. $y = x^2 + 4x + 6$ **1B.** $y = 2x^2 - 12x + 17$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

بمعرفة الرأس ونقطةٍ إضافيةٍ على التمثيل البياني للقطع المكافئ. يمكنك كتابة معادلة القطع المكافئ بصيغة الرأس.

مثال 8 على الاختبار المعياري كتابة معادلة إذا كان التمثيل البياني معلومًا

ما معادلة الدالة الموضّحة في التمثيل البياني؟



A $y = -4(x - 3)^2 + 2$

B $y = -\frac{1}{4}(x - 3)^2 + 2$

C $y = \frac{1}{4}(x + 3)^2 - 2$

D $y = 4(x + 3)^2 - 2$

قراءة فقرة الاختبار

لديك تمثيل بياني لقطع مكافئ عُيّن رأسه ونقطةٌ في تمثيله البياني. وعليك إيجاد معادلة له.

حل فقرة الاختبار

يقع رأس القطع المكافئ عند النقطة $(3, 2)$. إذًا $h = 3$ و $k = 2$. وبما أن $(-1, -2)$ نقطة على التمثيل البياني. فلنفترض أن $x = -1$ و $y = -2$. عوّض بهاتين القيمتين في صيغة الرأس للمعادلة وحُلّ لإيجاد a.

$y = a(x - h)^2 + k$	صيغة الرأس
$-2 = a(-1 - 3)^2 + 2$	عوّض بالعدد 2− عن y، وبالعدد 1− عن x وبالعدد 3 عن h وبالعدد 2 عن k.
$-2 = a(16) + 2$	بسّط.
$-4 = 16a$	اطرح 2 من كل طرف.
$-\frac{1}{4} = a$	اقسم كل طرف على 16.

معادلة القاطع المكافئ بصيغة الرأس هي $y = -\frac{1}{4}(x - 3)^2 + 2$.

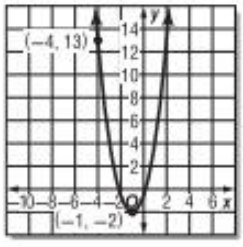
الإجابة هي B.

نصيحة عند حل الاختبار

معنى a لا تحدد إشارة a في صيغة الرأس عرض القطع المكافئ. وتحدد الإشارة إن كان القطع المكافئ مفتوحًا إلى الأعلى أو الأسفل. وتحدّد عرض القطع المكافئ بالقيمة المطلقة لـ a.

تمرين موجّه

2. أي مما يلي معادلة للدالة الموضحة في التمثيل البياني؟



F $y = \frac{9}{25}(x - 1)^2 + 2$

G $y = \frac{3}{5}(x + 1)^2 - 2$

H $y = \frac{5}{3}(x + 1)^2 - 2$

J $y = \frac{25}{9}(x - 1)^2 + 2$

4 تحويلات التمثيلات البيانية التربيعية

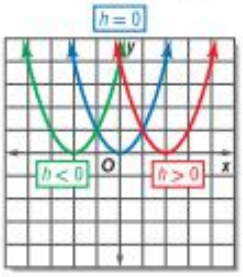
لقد تعلمت سابقاً كيف تؤثر التحويلات المختلفة على التمثيلات البيانية للدوال الرئيسة. ويلخّص ما يلي هذه التحويلات للدوال التربيعية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

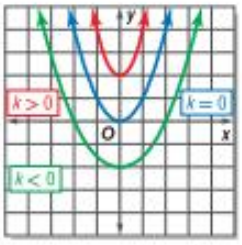
ملخص المفهوم تحويلات الدوال التربيعية

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

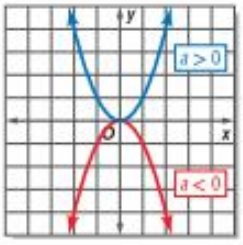
h. الإزاحة الأفقية
h وحدة إلى اليمين إذا كانت **h** موجبة
|h| وحدة إلى اليسار إذا كانت **h** سالبة



k. الإزاحة الرأسية
k وحدات لأعلى إذا كانت **k** موجبة
|k| وحدات لأسفل إذا كانت **k** سالبة

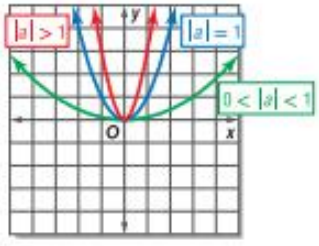


a. انعكاس
إذا كانت $a > 0$، فإن التمثيل البياني مفتوح للأعلى.
إذا كانت $a < 0$، فإن التمثيل البياني مفتوح للأسفل.



مفتوح

a. تغيير الأبعاد
إذا كانت $|a| > 1$، فإن التمثيل البياني يتمدّد رأسيًا. إذا كانت $0 < |a| < 1$، فإن التمثيل البياني ينضغط رأسيًا.



نصيحة دراسية
القيمة المطلقة
$0 < |a| < 1$ تعني أن a عدد نسبي بين 0 و1. مثل $\frac{3}{4}$.
أو عدد نسبي بين −1 و 0. مثل −0.3.

مثال 9 تمثيل المعادلات بصيغة الرأس

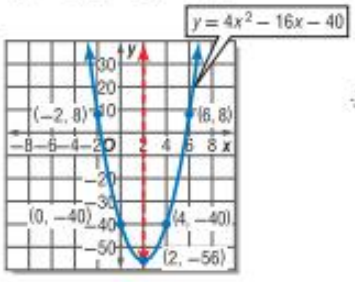
مثّل بيانيًا $y = 4x^2 - 16x - 40$.

الخطوة 1 أعد كتابة المعادلة بصيغة الرأس.

$y = 4x^2 - 16x - 40$	المعادلة الأصلية
$y = 4(x^2 - 4x) - 40$	خاصية التوزيع
$y = 4(x - 4x + 4) - 40 - 4(4)$	أكمل المربع.
$y = 4(x - 2)^2 - 56$	بسّط.

الخطوة 2 يقع الرأس عند $(2, -56)$. محور التماثل هو $x = 2$. ونظرًا لأن $a = 4$، فإن التمثيل البياني أضيق من التمثيل البياني لـ $y = x^2$.

الخطوة 3 عيّن نقاطًا إضافية لمساعدتك في إتمام التمثيل البياني.



تمرين موجّه

3A. $y = (x - 3)^2 - 2$

3B. $y = 0.25(x + 1)^2$

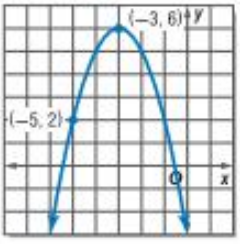
McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

التحقق من فهمك

مثال 7 **اكتب كل دالة بصيغة الرأس.**

1. $y = x^2 + 6x + 2$ **2.** $y = -2x^2 + 8x - 5$ **3.** $y = 4x^2 + 24x + 24$

مثال 8 **4. الاختيار من متعدد** ما الدالة الموضحة في التمثيل البياني؟



A $y = -(x + 3)^2 + 6$
B $y = -(x - 3)^2 - 6$
C $y = -2(x + 3)^2 + 6$
D $y = -2(x - 3)^2 - 6$

مثال 9 **مثّل كل دالة بيانيًا.**

5. $y = (x - 3)^2 - 4$ **6.** $y = -2x^2 + 5$ **7.** $y = \frac{1}{2}(x + 6)^2 - 8$

التمرين وحل المسائل

مثال 7 **اكتب كل دالة بصيغة الرأس.**

8. $y = x^2 + 9x + 8$ **9.** $y = x^2 - 6x + 3$ **10.** $y = -2x^2 + 5x$

11 $y = x^2 + 2x + 7$ **12.** $y = -3x^2 + 12x - 10$ **13.** $y = x^2 + 8x + 16$

14. $y = 2x^2 - 4x - 3$ **15.** $y = 3x^2 + 10x$ **16.** $y = x^2 - 4x + 9$

17. $y = -4x^2 - 24x - 15$ **18.** $y = x^2 - 12x + 36$ **19.** $y = -x^2 - 4x - 1$

مثال 8 **20. الألعاب النارية** خلال عرض الألعاب النارية، يُمثّل ارتفاع صاروخ h بالأمتار بعد t ثانية من خلال الدالة $h = -4.9(t - 4)^2 + 80$. مثّل الدالة بيانيًا.

21. المعرفة المالية يؤجّر متجر لتأجير الدراجات في المتوسط 120 دراجةً في الأسبوع ويحتسب مبلغ AED 25 مقابل التأجير ليوم واحد. يقدّر المدير أن تخفيض درهمٍ واحدٍ في سعر الإيجار سيؤدي إلى تأجير 15 دراجةً إضافية. ويمكن تمثيل أقصى إيراد يتوقعه المدير من خلال $y = -15x^2 + 255x + 3000$. حيث y هو الإيراد الأسبوعي و x هو عدد الدراجات المؤجرة. اكتب هذه الدالة بصيغة الرأس. ثم مثّلها بيانيًا.

مثال 9 **مثّل كل دالة بيانيًا.**

22. $y = (x - 5)^2 + 3$ **23.** $y = 9x^2 - 8$ **24.** $y = -2(x - 5)^2$

25. $y = \frac{1}{10}(x + 6)^2 + 6$ **26.** $y = -3(x - 5)^2 - 2$ **27.** $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$

28. $y = 2x^2 + 10$ **29.** $y = -(x + 3)^2$ **30.** $y = \frac{1}{6}(x - 3)^2 - 10$

31. $y = (x - 9)^2 - 7$ **32.** $y = -\frac{5}{8}x^2 - 8$ **33.** $y = -4(x - 10)^2 - 10$

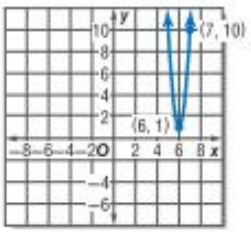
34. تمثيل النماذج شركة تصنيع ألواح شراعية لركوب الأمواج تستخدم عمليةً مؤتمتةً لصناعة الصواري الخاصة بالألواح. والدالّة $f(x) = \frac{1}{250}x^2 + \frac{3}{5}x$ مبرمجةٌ في الحاسب لصنع هذا النوع من الصواري.

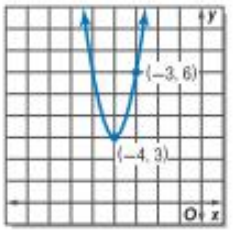
a. اكتب الدالة التربيعية بصيغة الرأس. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

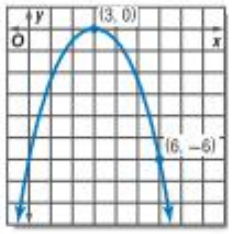
b. صف كيف يمكن للمصنع تعديل الدالة لصنع صوارٍ بمنحنى أكبر أو أقل.

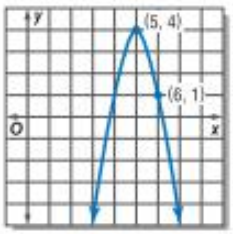
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

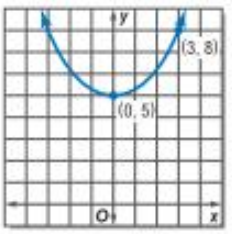
اكتب معادلةً بصيغة الرأس لكل قطع مكافئ.

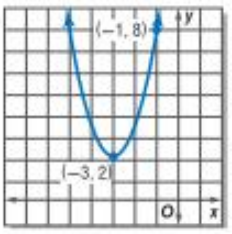
35. 

36. 

37. 

38. 

39. 

40. 

اكتب كل دالة بصيغة الرأس. ثم حدّد الرأس ومحور التماثل واتجاه الفتحة.

41. $3x^2 - 4x = 2 + y$

42. $-2x^2 + 7x = y - 12$

43. $-x^2 - 4.7x = y - 2.8$

44. $x^2 + 1.4x - 1.2 = y$

45. $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{26}{9} = y$

46. $x^2 + 7x + \frac{49}{4} = y$

47. **السيارات** يمكن استخدام القانون $S(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$ لتحديد الموقع $S(t)$ للجسم بعد مضي t ثانية وعند معدّل تسارع a وسرعة ابتدائية v_0. يمكن لسيارة نبيلة أن تتسارع بمقدار $0.002\ \text{km/s}^2$.

a. عبّر عن $S(t)$ بصيغة الرأس إذا تسارعت نبيلة من 35 km/h في الساعة لتدخل في طريق سريع.

b. كم ستستغرق نبيلة لتصل إلى متوسط السرعة لحركة المرور في الطريق السريع البالغ 68 km/h؟
(إرشاد: استخدم التسارع • الزمن = السرعة.)

c. إذا كان طول منحدر الدخول $\frac{1}{8}$ km. فهل سيتسنّى لنبيلة الوقت الكافي ليصل إلى متوسط السرعة لحركة السير على الطريق السريع؟ اشرح.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

48. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب معادلة قطع مكافئ تمت إزاحته وتم ضغطه وانعكاسه بالنسبة إلى المحور الأفقي x.

49. **تحدٍّ** اشرح كيف يمكنك إيجاد معادلة قطع مكافئ باستخدام إحداثيات النقاط الثلاث على التمثيل البياني.

50. **تحدٍّ** اكتب الصيغة القياسية لمعادلة تربيعية $ax^2 + bx + c = y$ بصيغة الرأس. حدد الرأس ومحور التماثل.

51. **الاستنتاج** صف التمثيل البياني لـ $f(x) = a(x - h)^2 + k$ عند $a = 0$. هل التمثيل البياني مماثل للتمثيل البياني لـ $g(x) = ax^2 + bx + c$ عند $a = 0$؟ اشرح.

52. **الفرضيات** اشرح كيف يمكن استخدام التمثيل البياني لـ $y = x^2$ لتمثيل أي دالة تربيعية بيانيًا. وليشتمل وصفك على التأثيرات الناتجة عن تغيير a و h و k في المعادلة $y = a(x - h)^2 + k$. وقارن بين التمثيل البياني لـ $y = x^2$ وبين التمثيل البياني لـ $y = a(x - h)^2 + k$ باستخدام أي قيم تختارها لـ a و h و k.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبار المعياري

53. تحتاج شجيرات مزهرة إلى مزيج من 70% تربة و 30% فيرميكوليت. فكم العدد التقريبي لدلاء الفيرميكوليت التي ينبغي إضافتها إلى 20 دلوًا من التربة؟

A 6.0 **C** 14.0

B 8.0 **D** 24.0

54. SAT/ACT مجموع العددين الصحيحين x و y يساوي القيمة 495. ورقم الآحاد للعدد x هو 0. فإذا قسمنا x على 10. فإن النتيجة تساوي y. فما قيمة x؟

F 40 **J** 250

G 45 **K** 450

H 245

55. ما مجموعة حلول المتباينة $|4x - 1| < 9$؟

A $\{x \mid 2.5 < x$ أو $x < -2\}$

B $\{x \mid x < 2.5\}$

C $\{x \mid x > -2\}$

D $\{x \mid -2 < x < 2.5\}$

56. إجابة قصيرة افترض أن لديك متجرًا تشتري فيه دزينة مفاتيح الربط بمبلغ AED 30 وتبيع كل مفتاح مقابل AED 3.50. فما النسبة المئوية للسعر المضاف إلى مفاتيح الربط؟

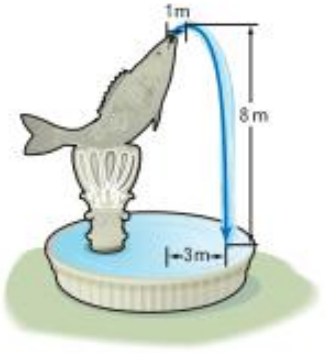
مراجعة شاملة

حُلّ كل معادلة باستخدام طريقة حل من اختيارك. جد الحلول الدقيقة (الدرس 4-4)

57. $4x^2 + 15x = 21$ **58.** $-3x^2 + 19 = 5x$ **59.** $6x - 5x^2 + 9 = 3$

بسّط. (الدرس 3-4)

60. $(3 + 4i)(5 - 2i)$ **61.** $(\sqrt{6} + i)(\sqrt{6} - i)$ **62.** $\frac{1 + i}{1 - i}$ **63.** $\frac{4 - 3i}{1 + 2i}$



64. نوافير الماء يمكن تمثيل ارتفاع تيار ماء متدفق من نافورة باستخدام دالة تربيعية. افترض أن الماء المتدفق من فوهة النافورة يبلغ ارتفاعًا أقصاه 8 m ويبعد مسافة 1 m من فوهة النافورة. (الدرس 5-4)

a. إذا كان الماء يهبط على بعد 3 m من فوهة النافورة. جد دالة تربيعية تمثّل ارتفاع الماء $h(d)$ عند أي مسافة معطاة d m من فوهة النافورة. ثم قارن التمثيل البياني للدالة مع الدالة الأصلية.

b. افترض أن أحد العاملين يرفع ضغط الماء بحيث يبلغ تيار الماء ارتفاعًا أقصى مقداره 12.5 m على مسافة 15 cm من فوهة النافورة. وفي هذه الحالة يهبط الماء على بعد 3.75 m من فوهة النافورة. اكتب دالة تربيعية جديدة لـ $h(d)$. وكيف تؤثر التغيرات في h و k على شكل التمثيل البياني؟

مراجعة المهارات

حدّد ما إذا كانت القيمة المعطاة تحقق المتباينة.

65. $3x^2 - 5 > 6; x = 2$ **66.** $-2x^2 + x - 1 < 4; x = -2$ **67.** $4x^2 + x - 3 \leq 36; x = 3$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4-7 مختبر الجبر
الدوال التربيعية ومعدل التغير

لقد تعلمت أن للدالة الخطية
معدل تغير ثابت. وفي هذا المختبر،
ستستكشف معدل تغير الدوال التربيعية.

النشاط تحديد معدّل التغيير

تأمل $f(x) = 0.1875x^2 - 3x + 12$.

الخطوة 1 أنشئ جدولاً كالجدول أدناه. واستخدم قيمًا تتراوح بين 0 و 16 لـ x.

x	0	1	2	3	...	16
y	12	9.1875	6.75			
فروق الدرجة الأولى						
فروق الدرجة الثانية						

الخطوة 2 جـد كل قيمة لـ y. على سبيل المثال، عند $x = 1$، فإن $y = 0.1875(1)^2 - 3(1) + 12$ أو 9.1875.

الخطوة 3 مثّل الأزواج المرتبة (x, y) بيانيًا. ثم اربط النقاط بمنحنى أملس. لاحظ أن الدالة تتناقص عند $0 < x < 8$ وأنها تتزايد عند $8 < x < 16$.

الخطوة 4 يمكن إيجاد معدل التغير من نقطة إلى النقطة التالية باستخدام صيغة الميل. الميل من النقطة (0, 12) إلى النقطة (1, 9.1875) يساوي: $\frac{9.1875 - 12}{1 - 0}$ أو -2.8125.

هذا هو الفرق من الدرجة الأولى عند $x = 1$. أكمل الجدول لجميع فروق الدرجة الأولى. وصف أي أنماط في الفروق.

الخطوة 5 يمكن إيجاد الفروق من الدرجة الثانية عبر طرح فروق الدرجة الأولى المتتالية. على سبيل المثال، يتم إيجاد الفرق من الدرجة الثانية عند $x = 2$ عبر طرح الفرق من الدرجة الأولى عند $x = 1$ من الفرق من الدرجة الأولى عند $x = 2$. صف أي أنماط في الفروق.

التمارين

لكل دالة من الدوال التالية، أنشئ جدول قيم بقيم x المعطاة . ومثل كل دالة بيانيًا. ثمّ حدّد فروق الدرجة الأولى والدرجة الثانية.

1. $y = -x^2 + 2x - 1$ عند $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

2. $y = 0.5x^2 + 2x - 2$ عند $x = -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1$

3. $y = -3x^2 - 18x - 26$ عند $x = -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0$

4. **التخمين** أعد النشاط مع دالة تكعيبية. في أي فرق ترتيب ستتوقع أن تساوي $g(x) = x^4$ ثابتًا عنده؟ $h(x) = x^n$؟

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © محفوظ الطبع والتأليف

الدرس 4-8 المتباينات التربيعية

.. السابق
- لقد قمت بحل المتباينات الخطية.

.. الحالي
1. تمثيل المتباينات التربيعية ذات المتغيرين بيانيا.
2. حل المتباينات التربيعية بمتغير واحد.

.. لماذا؟
- يمكن تمثيل بالون ماء أطلق من مقلاع باستخدام عدة معادلات ومتباينات تربيعية مختلفة.

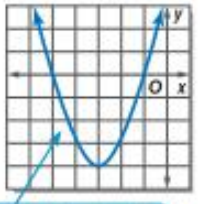
بفرض أنه يمكن التعبير عن ارتفاع بالون الماء $h(t)$ بالمتر فوق سطح الأرض بعد مرور t ثانية من إطلاقه بالمعادلة التربيعية $h(t) = -4.9t^2 + 32t + 1.2$. يمكنك حل المتباينة التربيعية لتحديد المسافة التي سيرتفع إليها البالون فوق سطح الأرض.

المفردات الجديدة
المتباينة التربيعية
quadratic inequality

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

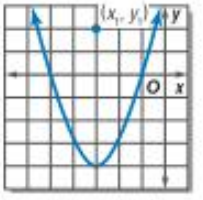
1 التمثيل البياني للمتباينات التربيعية
يمكنك تمثيل **المتباينات التربيعية** بمتغيرين بيانيًا مستخدمًا الأسلوب نفسه المتبع في التمثيل البياني للمتباينات الخطية بمتغيرين.

الخطوة 1 مثّل الدالة المرتبطة بيانيًا.



هل ينبغي أن يكون القطع المكافئ متصلاً أم منقوطًا؟

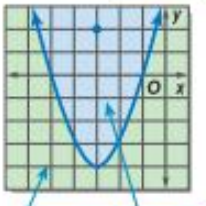
الخطوة 2 اختبر نقطةً لا تقع على القطع المكافئ.



$y_1 \stackrel{?}{\geq} a(x_1)^2 + b(x_1) + c$

هل (x_1, y_1) حل؟

الخطوة 3 ظلّل وفقًا لما سبق.



(x_1, y_1) هي حل.

(x_1, y_1) ليست حلاً.

مثال 1 تمثيل المتباينة التربيعية بيانيًا

مثّل بيانيًا $y > x^2 + 2x + 1$.

الخطوة 1 مثّل الدالة المرتبطة بيانيًا $y = x^2 + 2x + 1$. ينبغي أن يكون القطع المكافئ منقوطًا.

الخطوة 2 اختبر نقطةً لا تقع على التمثيل البياني للقطع المكافئ.

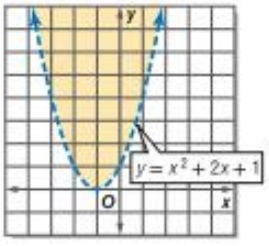
$y > x^2 + 2x + 1$

$-1 \stackrel{?}{>} 0^2 + 2(0) + 1$

$-1 \not> 1$

إذًا $(0, -1)$ ليست حلاً للمتباينة.

الخطوة 3 ظلل المنطقة التي لا تحتوي على نقطة $(0, -1)$.



تمرين موجّه

مثّل كل متباينة بيانيًا.

1A. $y \leq x^2 + 2x + 4$

1B. $y < -2x^2 + 3x + 5$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

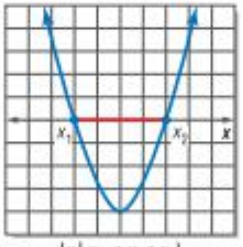
2 حل المتباينات التربيعية يمكن حل المتباينات التربيعية بمتغير واحد باستخدام التمثيلات البيانية للدوال التربيعية المتصلة.

$ax^2 + bx + c < 0$

مثّل بيانيًا $y = ax^2 + bx + c$ وحدد قيم x التي يقع التمثيل البياني عندها *أسفل* المحور x.

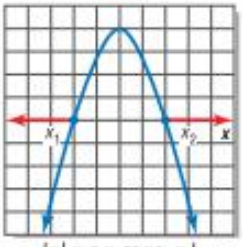
بالنسبة لـ $\geq$، أضف نقاط تقاطع x في الحل.

$a > 0$



$\{x \mid x_1 < x < x_2\}$

$a < 0$



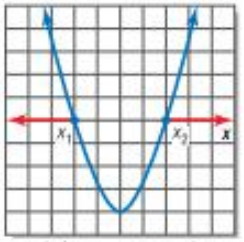
$\{x \mid x < x_1 \text{ or } x > x_2\}$

$ax^2 + bx + c > 0$

مثّل بيانيًا $y = ax^2 + bx + c$ وحدد قيم x التي يقع التمثيل البياني عندها *فوق* المحور x.

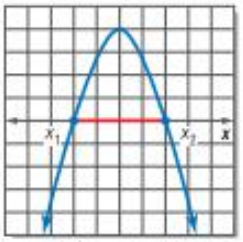
بالنسبة لـ $\leq$، أضف نقاط تقاطع x في الحل.

$a > 0$



$\{x \mid x < x_1 \text{ or } x > x_2\}$

$a < 0$



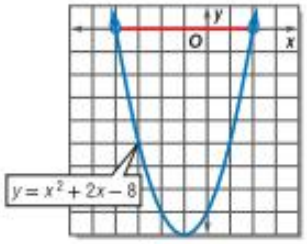
$\{x \mid x_1 < x < x_2\}$

مثال 2 إيجاد حل $ax^2 + bx + c < 0$ بالتمثيل البياني

حُلّ $x^2 + 2x - 8 < 0$ بالتمثيل البياني.

يتكون الحل من قيم x التي يقع منحنى الدالة المرتبطة بها *أسفل* المحور x. ابدأ بإيجاد جذور الدالة المرتبطة.

$x^2 + 2x - 8 = 0$	معادلة متصلة
$(x - 2)(x + 4) = 0$	حلل إلى العوامل.
$x - 2 = 0$ أو $x + 4 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$x = 2$ $\quad x = -4$	جد حل كل معادلة.



ارسم منحنى القطع المكافئ الذي يقطع المحور x عند -4 و 2. وينبغي أن يكون المنحنى مفتوح للأعلى لأن $a > 0$. والمنحنى يقع تحت المحور x بين $x = -4$ و $x = 2$. ومن ثم، فإن مجموعة الحل هي $\{x \mid -4 < x < 2\}$ أو $(-4, 2)$.

تحقق اختبر قيمة واحدة من x أقل من -4، إحداهما بين -4 و 2، والثانية أكبر من 2 في المتباينة الأصلية.

اختبار $x = 5$.

$x^2 + 2x - 8 < 0$

$5^2 + 2(5) - 8 \stackrel{?}{<} 0$

$27 < 0$ ✗

اختبار $x = 0$.

$x^2 + 2x - 8 < 0$

$0^2 + 2(0) - 8 \stackrel{?}{<} 0$

$-8 < 0$ ✓

اختبار $x = -6$.

$x^2 + 2x - 8 < 0$

$(-6)^2 + 2(-6) - 8 \stackrel{?}{<} 0$

$16 < 0$ ✗

تمرين موجّه

حُلّ كل متباينة باستخدام التمثيل البياني.

2A. $0 > x^2 + 5x - 6$

2B. $-x^2 + 3x + 10 \leq 0$

نصيحة دراسية

حل المتباينات التربيعية بالتمثيل البياني

ليس من الضروري رسم التمثيل البياني للدالة التربيعية المرتبطة بدقة. فقد تم إيجاد أصفار الدالة جبريًا.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © محفوظ الطبع والتأليف

مثال 3 إيجاد حل $ax^2 + bx + c \geq 0$ بالتمثيل البياني

حُلّ $2x^2 + 4x - 5 \geq 0$ بالتمثيل البياني.

يتكون الحل من قيم x التي يقع التمثيل البياني للدالة المرتبطة بها على المحور x أو فوقه. ابدأ بإيجاد جذور الدالة المرتبطة.

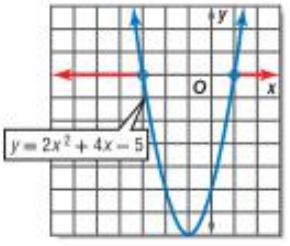
$2x^2 + 4x - 5 = 0$ المعادلة المتصلة

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ استخدام القانون العام

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(2)(-5)}}{2(2)}$ عوّض عن a بـ 4، وعن b بـ 2، وعن c بـ -5.

$x = \frac{-4 + \sqrt{56}}{4}$ أو $x = \frac{-4 - \sqrt{56}}{4}$ بسّط واكتب في صورة معادلتين.

≈ 0.87 أو ≈ -2.87 بسّط.



ارسم منحنى القطع المكافئ الذي يقطع المحور x عند -2.87 و 0.87. المنحنى مفتوح للأعلى لأن $a > 0$. والمنحنى يقع على المحور x وفوقه عند $x \leq -2.87$ و $x \geq 0.87$ تقريبًا. ومن ثم، يكون الحل تقريبًا $\{x \mid x \leq -2.87 \text{ أو } x \geq 0.87\}$ أو $(-\infty, -2.87] \cup [0.87, \infty)$.

تمرين موجّه

حل كل متباينة باستخدام التمثيل البياني.

3A. $x^2 - 6x + 2 > 0$

3B. $-4x^2 + 5x + 7 \geq 0$

يمكن حل المسائل من الحياة اليومية بالاستعانة بالتمثيل البياني للمتباينات التربيعية.

الربط بالحياة اليومية

يستغرق الأمر بضع ملي ثواني حتى ينفجر بالون الماء. يمكن أن تصور كاميرا عالية السرعة تأثير السائل قبل أن تجذب الجاذبية الأرضية البالون لأسفل.

المصدر: ناسا

حقوق الطبع والتأليف © مجموعة ماكجروهيل للتعليم

مثال 4 من الحياة اليومية حل متباينة تربيعية

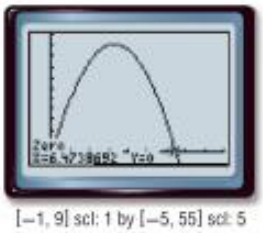
بالونات المياه راجع بداية الدرس، ما الزمن الذي سيكون بالون المياه حينه على ارتفاع 3 m أو أقل من سطح الأرض بعد إطلاقه؟

تصف الدالة $h(t) = -4.9t^2 + 32t + 1.2$ ارتفاع بالون الماء. ومن ثم، ينبغي أن توجد قيم t التي تكون عندها $h(t) \leq 3$.

$h(t) \leq 3$ المتباينة الأصلية

$-4.9t^2 + 32t + 1.2 \leq 3$ $h(t) = -4.9t^2 + 32t + 1.2$

$-4.9t^2 + 32t - 1.8 \leq 0$ اطرح 3 من كل طرف.



[−1, 9] scl: 1 by [−5, 55] scl: 5

مثّل بيانيًا الدالة المرتبطة $y = -4.9x^2 + 32x - 1.8$ مستعينًا بحاسبة التمثيل البياني. أصفار الدالة هي 0.06 و 6.47 تقريبًا. ويقع التمثيل البياني أسفل المحور x حيث $x < 0.06$ و $x > 6.47$.

إذًا، يوجد بالون الماء في إطار 3 m فوق سطح الأرض، أثناء الثانية 0.06 الأولى بعد إطلاق هذا البالون، ومرة أخرى عند الثانية 6.47 حتى يهبط البالون إلى الأرض.

تمرين موجّه

4. الصواريخ يمكن تمثيل ارتفاع $h(t)$ نموذج صاروخ بالمتر بعد مرور t ثانية من إطلاقه باستخدام الدالة $h(t) = -16t^2 + 82t + 0.25$. ما الفترة الزمنية التي سيكون ارتفاع الصاروخ عندها 100 m على الأقل فوق سطح الأرض؟

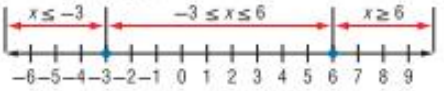
مثال 5 حل المتباينة التربيعية جبريًا

حُلّ المتباينة $x^2 - 3x \le 18$.

الخطوة 1 جد حل المعادلة التربيعية المرتبطة $x^2 - 3x = 18$.

$x^2 - 3x = 18$	المعادلة التربيعية المرتبطة
$x^2 - 3x - 18 = 0$	اطرح 18 من كل طرف.
$(x - 3)(x - 6) = 0$	حلل إلى العوامل.
$x + 3 = 0$ أو $x - 6 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$x = -3$ $\quad x = 6$	جد حل كل معادلة.

الخطوة 2 ارسم النقطتين -3 و 6 على خط الأعداد. استخدم هاتين النقطتين. فهذه القيم هي حلول المتباينة الأصلية. ولاحظ أن خط الأعداد قُسم إلى ثلاثة أجزاء.



الخطوة 3 اختبر قيمة كل فترة لترى هل تحقق المتباينة الأصلية أم لا.

$x \ge 6$	$-3 \le x \le 6$	$x \le -3$
اختبار $x = 8$.	اختبار $x = 0$.	اختبار $x = -5$.
$x^2 - 3x \le 18$	$x^2 - 3x \le 18$	$x^2 - 3x \le 18$
$(8)^2 - 3(8) \stackrel{?}{\le} 18$	$(0)^2 - 3(0) \stackrel{?}{\le} 18$	$(-5)^2 - 3(-5) \stackrel{?}{\le} 18$
$40 \not\le 18$	$0 \le 18$	$40 \not\le 18$

مجموعة الحل هي $\{x \mid -3 \le x \le 6\}$ أو $[-3, 6]$.

تمرين موجّه

حُلّ كل متباينة جبريًا.

5A. $x^2 + 5x < -6$

5B. $x^2 + 11x + 30 \ge 0$

نصيحة دراسية

حل المتباينات التربيعية جبريًا

تكون مجموعة حل المتباينة التربيعية جميعها من أعداد حقيقية عندما تحقق نقاط الاختبار الثلاث المتباينة. وتكون المجموعة خالية عندما لا تحقق أي من نقاط الاختبار المتباينة.

التحقق من فهمك

مثال 1 **مثّل كل متباينة بيانيًا.**

1. $y \le x^2 - 8x + 2$
2. $y > x^2 + 6x - 2$
3. $y \ge -x^2 + 4x + 1$

المثالان 2–3 **الاستنتاج المنطقي** **حل كل متباينة تربيعية مستعينًا بالتمثيل البياني.**

4. $0 < x^2 - 5x + 4$
5. $x^2 + 8x + 15 < 0$
6. $-2x^2 - 2x + 12 \ge 0$
7. $0 \ge 2x^2 - 4x + 1$

مثال 4

8. **كرة القدم** ركل لاعب الوسط الكرة نحو المرمى أثناء المباراة. يمكن تمثيل ارتفاع الكرة بالمتر فوق سطح الأرض $h(t)$ عند الزمن t بالمعادلة $h(t) = -0.1t^2 + 2.4t + 2$. إذا كان ارتفاع المرمى 2 m. فما الوقت الذي ستتمكن الركلة عنده من دخول المرمى؟

مثال 5 **حُلّ كل متباينة جبريًا.**

9. $x^2 + 6x - 16 < 0$
10. $x^2 - 14x > -49$
11. $x^2 + 12x \ge 28$
12. $x^2 - 4x \le 21$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © محفوظ لصالح وثائق

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **مثّل كل متباينة بيانيًا.**

13. $y \geq x^2 + 5x + 6$
14. $x^2 - 2x - 8 < y$
15. $y \leq -x^2 - 7x + 8$
16. $-x^2 + 12x - 36 > y$
17. $y > 2x^2 - 2x - 3$
18. $y \geq -4x^2 + 12x - 7$

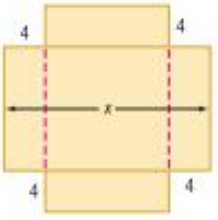
المثالان 3-2 **حُلّ كل متباينة مستعينًا بالتمثيل البياني.**

19. $x^2 - 9x + 9 < 0$
20. $x^2 - 2x - 24 \leq 0$
21. $x^2 + 8x + 16 \geq 0$
22. $x^2 + 6x + 3 > 0$
23. $0 > -x^2 + 7x + 12$
24. $-x^2 + 2x - 15 < 0$
25. $4x^2 + 12x + 10 \leq 0$
26. $-3x^2 - 3x + 9 > 0$
27. $0 > -2x^2 + 4x + 4$
28. $3x^2 + 12x + 36 \leq 0$
29. $0 \leq -4x^2 + 8x + 5$
30. $-2x^2 + 3x + 3 \leq 0$

مثال 4

31. **تصميمات معمارية** يأخذ مدخل غرفة مقوس شكل قطع مكافئ يمكن تمثيله بالمعادلة $f(x) = -x^2 + 6x + 1$. ما المسافة من جانبي القوس التي يكون الارتفاع عندها 7 m على الأقل؟

32. **التصنيع** يُصنع الصندوق بقص مربعات مساحتها 4 cm من كل جانب من قطعة مربعة من الورق المقوى، ثم تُطوى الجوانب. إذا كانت $V(x) = 4x^2 - 64x + 256$ تمثل حجم الصندوق، فما أبعاد قطعة الورق المقوى الأصلية إذا كان حجم الصندوق لا يتجاوز $750\ cm^3$؟



مثال 5 **حُلّ كل معادلة جبريًا.**

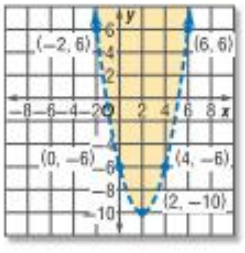
33. $x^2 - 9x < -20$
34. $x^2 + 7x \geq -10$
35. $2 > x^2 - x$
36. $-3 \leq -x^2 - 4x$
37. $-x^2 + 2x \leq -10$
38. $-6 > x^2 + 4x$
39. $2x^2 + 4 \geq 9$
40. $3x^2 + x \geq -3$
41. $-4x^2 + 2x < 3$
42. $-11 \geq -2x^2 - 5x$
43. $-12 < -5x^2 - 10x$
44. $-3x^2 - 10x > -1$

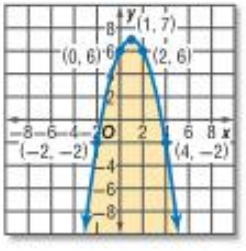
45. **المثابرة** تريد عائلة أن تضع زخارف بطول جانبي حمام السباحة لديها. وسيكون عرض الزخارف واحدًا على الجانبين، ولن تتجاوز المساحة الإجمالية لحمام السباحة والزخارف $750\ m^2$.

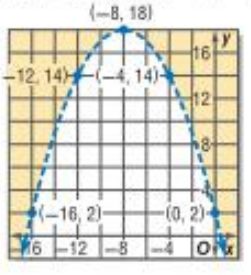
a. مثّل المتباينة التربيعية بيانيًا.

b. حدد قياسات العرض المحتملة للزخارف.

اكتب متباينةً تربيعية لكل تمثيل بياني.

46.


47.


48.


حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

حُلّ كل متباينة تربيعية مستخدمًا التمثيل البياني أو جدولاً أو جبريًا.

49. $-2x^2 + 12x < -15$

50. $5x^2 + x + 3 \geq 0$

51. $11 \leq 4x^2 + 7x$

52. $x^2 - 4x \leq -7$

53. $-3x^2 + 10x < 5$

54. $-1 \geq -x^2 - 5x$

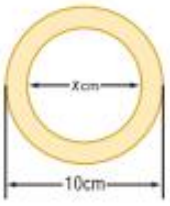
55. **الأعمال** تستخدم إحدى شركات تصنيع الإلكترونيات الدالة $P(x) = x(-27.5x + 3520) + 20{,}000$ في عمل نموذج لأرباحها الشهرية عند بيع x ألف مُشغل صوتي رقمي.

a. مثّل بيانيًا المتباينة التربيعية لأرباح شهرية قيمتها AED 100,000 على الأقل.

b. كم جهاز مُشغل صوتي رقمي يجب أن تبيع الشركة المُصنعة لتحقيق أرباح قيمتها AED 100,000 على الأقل شهريًا؟

c. على فرض أن الشركة المصنعة لديها مصاريف شهرية إضافية قيمتها AED 25000. فسّر كيف يؤثر ذلك على التمثيل البياني لدالة الأرباح. ثم حدد كم جهاز مُشغل صوتي رقمي ينبغي أن تبيعه الشركة المُصنعة لتحقيق أرباح قيمتها AED 100000 على الأقل.

56. **المرافق** يقوم أحد المقاولين بتركيب أنابيب الصرف لمرفأ السيارات الخاص بأحد مراكز التسوق. وينبغي أن يكون القطر الخارجي للأنبوب 10 cm. ويجب أن تكون مساحة المقطع العرضي $35\ cm^2$ على الأقل وألا تزيد عن $42\ cm^2$.



a. مثّل المتباينات التربيعية بيانيًا.

b. ما سمك أنبوب الصرف التي يمكن أن يستخدمها المقاول؟

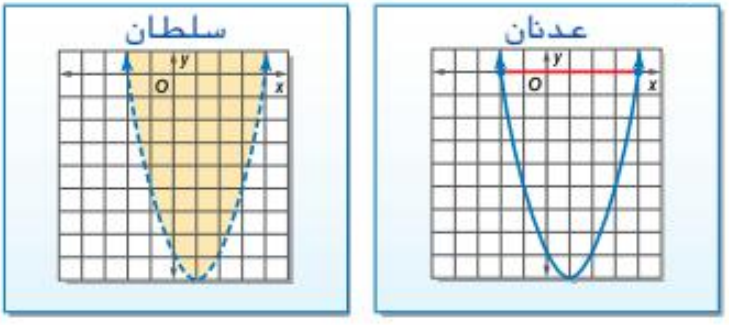
مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

57. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب متباينة تربيعية لكل حالة.

a. مجموعة الحل هي جميع الأعداد الحقيقية.

b. مجموعة الحل هي المجموعة الخالية.

58. **نقد** استخدم سلطان وعدنان تمثيلاً بيانيًا لحل المتباينة التربيعية $x^2 - 2x - 8 > 0$. أيهما على صواب؟ اشرح.



59. **الاستنتاج** هل حدود مجموعة حل $x^2 + 4x - 12 \leq 0$ مثلي قيمة حدود $\frac{1}{2}x^2 + 2x - 6 \leq 0$؟ فسّر.

60. **الاستنتاج** حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة *أحيانًا*، أم *دائمًا*، أم غير صحيحة على الإطلاق. برّر استنتاجك.

تقاطع c *و* $y \leq -ax^2 + c$ *و* $y \geq ax^2 - c$ *هي المجموعة الخالية.*

61. **تحدٍّ** مثّل بيانيًا تقاطع التمثيلين البيانيين $y \leq -x^2 + 4$ و $y \geq x^2 - 4$.

62. **الكتابة في الرياضيات** ما أوجه تشابه الأساليب المستخدمة في حل المتباينات التربيعية والمعادلات التربيعية؟ وما أوجه اختلافها؟

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © محفوظ الطبع والتأليف

تدريب على الاختبار المعياري

63. إجابة شبكية ينبغي أن تزرع أرض مساحتها 24.34 m في 12.12 m. يمكن أن يغطي كل كيس بذور $20.9\ m^2$ من الأرض. كم كيس بذور ستحتاج؟

64. SAT/ACT ناتج ضرب عددين صحيحين ما بين 107 و 116. أيّ مما يلي لا يمكن أن يكون أحد الأعداد الصحيحة؟

A 5
B 10
C 12
D 15
E 23

65. الاحتمال يجب ترتيب خمسة طلاب بجانب بعضهم البعض بحيث يكون الطالب الأطول في المنتصف والطالبان الأقصران على الطرفين. إذا لم يكن هناك طالبان متساويين في الطول، فكم ترتيبًا مختلفًا يمكن ترتيبه؟

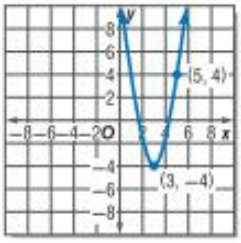
F 2
G 4
H 5
J 6

66. إجابة قصيرة بسّط $\frac{5+i}{6-3i}$.

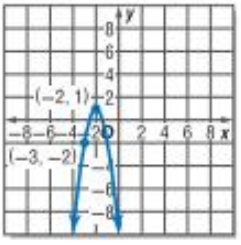
مراجعة شاملة

اكتب معادلةً بصيغة الرأس لكل قطع مكافئ. (الدرس 8-4)

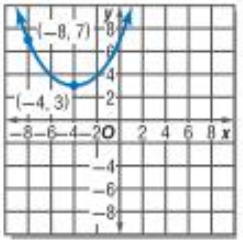
67.



68.



69.



أكمل الجزأين a و b في كل معادلة تربيعية.

a. جد قيمة المميز.

b. صف عدد الجذور ونوعها. (الدرس 7-4)

70. $4x^2 + 7x - 3 = 0$

71. $-3x^2 + 2x - 4 = 9$

72. $6x^2 + x - 4 = 12$

73. عدد كيلومترات استهلاك الوقود يُمكننا إيجاد عدد كيلومترات استهلاك الوقود y بالكيلومتر لكل لتر في سيارة ما باستخدام المعادلة $y = 10 + 0.9x - 0.01x^2$. حيث x هي سرعة السيارة بين 10 km/h و 75 km/h. جد مدى السرعات التي تعطي عدد كيلومترات استهلاك الوقود لا 25 km/L على الأقل. (الدرس 6-4)

اكتب كل معادلة في صيغة الرأس، إذا لم تكن مكتوبة بتلك الصيغة. حدد الرأس، ومحور التماثل واتجاه الفتحة. ثم مثّل الدالة بيانيًا (الدرس 8-4)

74. $y = -6(x + 2)^2 + 3$

75. $y = -\frac{1}{3}x^2 + 8x$

76. $y = (x - 2)^2 - 2$

77. $y = 2x^2 + 8x + 10$

مراجعة المهارات

استخدم خاصية التوزيع لإيجاد كل ناتج ضرب.

78. $-6(x - 4)$

79. $8(w + 3x)$

80. $-4(-2y + 3z)$

81. $-1(c - d)$

82. $0.5(5x + 6y)$

83. $-3(-6y - 4z)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4-8 مختبر تقنية التمثيل البياني
المزيد من المتباينات التربيعية

أكمل ما يلي لمزيد من التمرين على تمثيل المتباينات بيانيًا.

النشاط 1 تظليل الجزء الخارجي من القطع المكافئ

مثّل $y \geq -4x^2 + 12x - 7$ بيانيًا في نافذة العرض القياسية.

أولاً، امسح جميع الدوال من قائمة Y=.

لتمثيل $y \geq -4x^2 + 12x - 7$ بيانيًا، أدخل المعادلة في قائمة Y=.

ثم استخدم السهم الأيسر لتحديد =. اضغط على ENTER حتى يتم تحديد التظليل فوق المستقيم.

خطوات العملية على الحاسبة: ◀ ◀ ENTER ENTER ▶ ▶ (−) 4 X,T,θ,n x^2 + 12 X,T,θ,n (−) 7 Zoom 6

تقع جميع الأزواج المرتّبة التي تكون عندها y أكبر من *أو* تساوي $-4x^2 + 12x - 7$ فوق *المستقيم أو عليه* وهي حلول للمتباينة.

النشاط 2 تظليل الجزء الداخلي من القطع المكافئ

مثّل $y \leq -x^2 - 7x + 8$ بيانيًا في نافذة العرض القياسية.

امسح التمثيل البياني المعروض أولاً.

خطوات العملية على الحاسبة: Y= CLEAR

خطوات العملية على الحاسبة: ◀ ◀ ENTER ENTER ENTER ▶ ▶ (−) X,T,θ,n x^2 (−) 7 X,T,θ,n + 8 GRAPH

تقع جميع الأزواج المرتّبة التي تكون عندها y أقل من *أو* تساوي $-x^2 - 7x + 8$ أسفل *المستقيم أو* عليه وهي حلول للمتباينة.

تمارين

1. قارن وقابل التمثيلين البيانيين الموضحين أعلاه.
2. في كل متباينة مذكورة في الأنشطة أعلاه، اكتب متباينة جديدة ومثّلها بيانيًا بحيث يكون لها أجزاء معكوسة من القطع المكافئ المُظلل.

حقوق الطبع والتأليف © محتفظ لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مختبر تقنية التمثيل البياني
تمثيل الحركة

إعداد التجربة

- ضع لوحة على كومة من الكتب لعمل منحدر.
- صل جهاز جمع البيانات بحاسبة التمثيل البياني. وضعهما أعلى المنحدر ليتمكن الجهاز من قراءة حركة السيارة على المنحدر.
- أمسك السيارة على ارتفاع 15.24 cm تقريبًا من أسفل المنحدر. واضبط الجهاز على صفر.

ممارسات في الرياضيات
استخدام نماذج الرياضيات.

النشاط

الخطوة 1 يضغط أحد أعضاء المجموعة على الزر لبدء تجميع البيانات.

الخطوة 2 يضع عضو آخر السيارة عند نهاية المنحدر. بعد أن تبدأ عملية جمع البيانات. ادفع السيارة دفعًا بسيطًا وسريعًا حتى تسير أعلى المنحدر نحو جهاز رصد الحركة.

الخطوة 3 أوقف جمع البيانات عندما تعود السيارة إلى نهاية المنحدر. واحفظ البيانات باسم "التجربة 1".

الخطوة 4 أزل دفترًا من الكومة. ثم كرر التجربة واحفظ البيانات باسم "التجربة 2". وفي التجربة 3. قم بعمل منحدر أكثر انحدارًا وكرر التجربة.

تحليل النتائج

1. ما نوع الدالة التي يُمكن استخدامها في تمثيل البيانات؟ برر إجابتك.

2. استخدم قائمة **CALC** (حساب) في إيجاد رأس المنحنى. سجّل الإحداثيات في جدول مثل ذلك المرسوم يسارًا.

التجربة	الرأس (h, k)	النقطة (x, y)	المعادلة
1			
2			
3			

3. استخدم ميزة **TRACE** (تتبع) في الحاسبة في إيجاد إحداثيات نقطة أخرى على التمثيل البياني. ثم استخدم إحداثيات الرأس والنقطة في إيجاد معادلة المنحنى.

4. جـد معادلة المنحنى للتجربة 2 و 3.

5. ما أوجه المقارنة بين معادلات التجارب 1 و 2 و 3؟ أي تمثيل بياني هو الأعرض. وأيها هو الأضيق؟ فسّر معنى ذلك في سياق الموقف. كيف يتم تمثيل ذلك في المعادلات؟

6. ما الذي تمثله نقاط التقاطع x والرأس في كل تمثيل بياني؟

7. لم كانت قيم h و k مختلفة في كل تجربة؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا (الدرس 4-1)

- يمكن وصف الدالة التربيعية بمعادلة صيغتها $y = ax^2 + bx + c$. حيث $a \neq 0$.
- محور التماثل للمنحنى لـ $y = ax^2 + bx + c$. حيث $a \neq 0$. هو $x = -\frac{b}{2a}$.

حل المعادلات التربيعية بيانيًا (الدروس 4-2)

- جذور المعادلة التربيعية هي أصفار الدالة التربيعية المرتبطة. ويمكنك إيجاد أصفار الدالة التربيعية من خلال إيجاد نقاط تقاطع المنحنى مع المحور x.

حل المعادلات التربيعية (الدروس 4-3)

- **الخطوة 1** - أكمل المربع: جد نصف b، ومعامل x. **الخطوة 2**- قم بتربيع نتيجة الخطوة 1. **الخطوة 3** - أضف نتيجة الخطوة 2 إلى $x^2 + bx$.
- القانون العام: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

حل المعادلات التربيعية (الدروس 4-2 و 4-4و 4-6)

- يمكن حل المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني. وتكون الحلول نقاط التقاطع مع المحور x أو أصفار الدالة التربيعية ذات الصلة.
- يمكن حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع. ولإكمال المربع لـ $x^2 + bx$. جد $\frac{1}{2}$ لـ b. ورتع هذا الناتج. ثم اجمع الناتج إلى $x^2 + bx$.
- يمكن حل المعادلات التربيعية باستخدام القانون العام، $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

الأعداد المركبة (الدرس 4-5)

- i هي الوحدة التخيلية: $i^2 = -1$ و $i = \sqrt{-1}$

تحويلات الدوال التربيعية (الدرس 4-7)

- $f(x) = x^2 + c$ يزيح التمثيل البياني لأعلى أو لأسفل.
- $f(x) = ax^2$ يضغط التمثيل البياني أو يوسعه رأسيًا.
- التمثيل البياني لـ $y = (x - h)^2 + k$ هو التمثيل البياني لـ $y = x^2$ لكنه مُزاح بمقدار $|h|$ وحدات يسارًا إذا كانت h سالبة أو بمقدار h وحدات يمينًا إذا كانت h موجبة وبمقدار k وحدات لأعلى إذا كانت k موجبة أو بمقدار $|k|$ وحدات لأسفل إذا كانت k سالبة.
- تأمل المعادلة $y = a(x - h)^2 + k$، حيث $a \neq 0$ إذا كان $a > 0$، فإن التمثيل البياني يفتح لأعلى؛ وإذا كانت $a < 0$ فإن التمثيل البياني يفتح لأسفل. إذا كانت $|a| > 1$، فإن التمثيل البياني يكون أضيق من التمثيل البياني لـ $y = x^2$. إذا كانت $|a| < 1$، فإن التمثيل البياني يكون أوسع من التمثيل البياني لـ $y = x^2$.

المتباينات التربيعية (الدرس 4-8)

- مثّل الدالة المرتبطة بيانيًا. واختر نقطة *ليست* على القطع المكافئ، وحدد هل هذا حل أم لا. وظلل المنطقة المناسبة للحل.

المطويات منظّم الدراسة

تأكد من تدوين المفاهيم الأساسية في المطوية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المفردات الأساسية

دالة القيمة المطلقة absolute value function	عدد تخيلي بحت pure imaginary number
محور التماثل axis of symmetry	المتباينة التربيعية quadratic inequality
إكمال المربع completing the square	خاصيّة الجذر التربيعي Square Root Property
تغيير الأبعاد(التمدد) dilation	صيغة الرأس vertex form
المميّز discriminant	دالة متعددة التعريف piecewise-defined function
جذر مكرر double root	دالة خطية متقطعة piecewise-linear function
دالة العدد الصحيح الأكبر greatest integer function	صيغة تربيعية Quadratic Formula
القيمة العظمى maximum	دالة تربيعية quadratic function
القيمة الصغرى minimum	الانعكاس reflection
قطع مكافئ parabola	صيغة قياسية standard form
مرافقات مركبة complex conjugates	دالة درجية step function
عدد مركب complex number	التحويل transformation
المميّز discriminant	الإزاحة translation
صيغة محللة إلى العوامل factored form	رأس vertex
طريقة فويل FOIL method	
الوحدة التخيلية imaginary unit	

مراجعة المفردات

حدد ما إذا كانت كل جملة مما يلي *صوابا* أم *خطأ*. وإذا كانت *خطأ*، فاستبدل المصطلح الموجود تحته خطّ بحيث تصبح الجملة صحيحة.

1. يتقاطع محور التماثل مع القطع المكافئ في نقطة واحدة تُسمى الرأس.

2. تُستخدم طريقة تُسمى طريقة فويل في جعل التعبير التربيعي تربيعًا كاملاً حتى يتم حل المعادلة المرتبطة.

3. العدد $6i$ يُسمى عددًا تخيليًا بحتًا.

4. العددان $3i + 2$ و $3i - 2$ يُسميان مركبين مترافقين.

5. يمكن إيجاد محور التماثل للدالة التربيعية باستخدام المعادلة $x = -\frac{b}{2a}$.

6. الرأس هو النقطة العظمى أو الصغرى في قطع مكافئ.

7. منحنى الدالة تربيعية عبارة عن خط مستقيم.

8. يكون لمنحنى الدالة التربيعية قيمة عظمى إذا كان معامل الحد x^2 موجبًا.

9. المعادلة التربيعية التي لمنحناها نقطتا تقاطع مع المحور x يكون لها جذر حقيقي واحد.

10. التعبير $b^2 - 4ac$ يسمى المميز.

11. الدالة التي تعرّف تعريفات مختلفة بالنسبة للأجزاء المختلفة لمجالها تسمى دالة متعددة التعريف.

12. مدى دالة أكبر عدد صحيح هو مجموعة الأعداد الحقيقية كلها.

13. حلول المعادلة التربيعية تُسمى جذورًا.

14. منحنى الدالة الأصلية يُزاح للأسفل ليشكّل منحنى الدالة $f(x) = x^2 + 5$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة درس بدرس

4-1 تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا

تأمل كل معادلة.

a. حدّد ما إذا كان للدالة قيمة عظمى أو صغرى.

b. حدّد القيمة العظمى أو الصغرى.

c. ما مجال الدالة ومداها؟

11. $y = x^2 - 4x + 4$

12. $y = -x^2 + 3x$

13. $y = x^2 - 2x - 3$

14. $y = -x^2 + 2$

15. الصاروخ تم إطلاق صاروخ لعبة بسرعة متجهة لأعلى مقدارها 32 ft/s وتعطي المعادلة $h = -16t^2 + 32t$ ارتفاع الكرة بعد t ثوان من إطلاقه.

a. حدّد ما إذا كان للدالة قيمة عظمى أو صغرى.

b. حدّد القيمة العظمى أو الصغرى.

c. حدّد مجالاً ومدى معقولين لهذا الموقف.

تأمل $f(x) = x^2 + 6x + 5$.

a. ***حدّد ما إذا كان للدالة قيمة عظمى أو صغرى.***

إذا كان $f(x) = x^2 + 6x + 5$. فإن $a = 1$ و $b = 6$ و $c = 5$.

لأن a موجب، فإن منحنى الدالة يكون مفتوح للأعلى. وإذًا يكون للدالة قيمة صغرى.

b. ***حدّد القيمة العظمى أو الصغرى للدالة.***

القيمة الصغرى هي الإحداثي الرأسي y للرأس.

الإحداثي الأفقي x للرأس هو $\frac{-b}{2a}$ أو $\frac{-6}{2(1)}$ أو -3.

$f(x) = x^2 + 6x + 5$	الدالة الأصلية
$f(-3) = (-3)^2 + 6(-3) + 5$	$x = -3$
$f(-3) = -4$	بسّط.

القيمة الصغرى هي -4.

c. ***حدّد مجال الدالة ومداها.***

المجال هو جميع الأعداد الحقيقية. والمدى هو جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من القيمة الصغرى أو المساوية لها. أو $\{y | y \geq -4\}$.

4-2 حل المعادلات التربيعية بالتمثيل البياني

حُلّ كل معادلة بالتمثيل البياني. وإذا كان لا يُمكن إيجاد جذور صحيحة، فقدّر الجذور مقربةً إلى أقرب جزء من عشرة.

16. $x^2 - 3x - 4 = 0$

17. $-x^2 + 6x - 9 = 0$

18. $x^2 - x - 12 = 0$

19. $x^2 + 4x - 3 = 0$

20. $x^2 - 10x = -21$

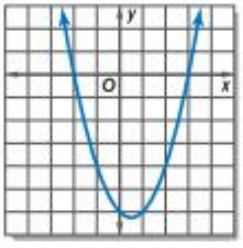
21. $6x^2 - 13x = 15$

22. نظرية الأعداد جد عددين مجموعهما 2 وناتج ضربهما -15.

مثال 2

حُلّ $x^2 - x - 6 = 0$ بالتمثيل البياني.

مثّل بيانيًا الدالة ذات الصلة $f(x) = x^2 - x - 6$.



يبدو أن نقاط التقاطع مع المحور x في التمثيل البياني تقع عند -2 و 3. إذًا فالحلان هما -2 و 3.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4-3 حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع

حُلّ كل معادلة مما يلي بإكمال المربع. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

23. $x^2 + 6x + 9 = 16$

24. $-a^2 - 10a + 25 = 25$

25. $y^2 - 8y + 16 = 36$

26. $y^2 - 6y + 2 = 0$

27. $n^2 - 7n = 5$

28. $-3x^2 + 4 = 0$

37. نظرية الأعداد جد عددين مجموعهما -2 وناتج ضربهما -48.

مثال 3

حُلّ $x^2 - 16x + 32 = 0$ بإكمال المربع. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

اعزل الحدين x^2 و x. ثم أكمل المربع وجد الحل.

$x^2 - 16x + 32 = 0$	المعادلة الأصلية
$x^2 - 16x = -32$	اعزل الحدين x^2 و x.
$x^2 - 16x + 64 = -32 + 64$	أكمل المربع.
$(x - 8)^2 = 32$	حلّل إلى العوامل.
$x - 8 = \pm\sqrt{32}$	احسب الجذر التربيعي.
$x = 8 \pm \sqrt{32}$	اجمع 8 إلى كل طرف.
$x = 8 \pm 4\sqrt{2}$	بسّط.

الحلان هما 2.3 و 13.7 تقريبًا.

4-4 حل المعادلات التربيعية بالتحليل إلى العوامل

اكتب معادلةً تربيعيةً بالصيغة القياسية مستخدمًا الجذور المعطاة.

29. $5, 6$

30. $-4, 2$

31. $\frac{1}{6}, 5$

32. $-3, -7$

33. $-\frac{2}{3}, 1$

34. $-\frac{1}{4}, -1$

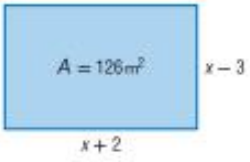
حُلّ كل معادلة باستخدام التحليل إلى العوامل.

35. $2x^2 - 2x - 24 = 0$

36. $2x^2 - 5x - 3 = 0$

37. $3x^2 - 16x + 5 = 0$

14. جد قيمة x وأبعاد المستطيل أدناه.



مثال 4

اكتب معادلةً تربيعية بالصيغة القياسية مستخدمًا $-\frac{1}{2}$ و 4 كجذري المعادلة.

$(x - p)(x - q) = 0$	اكتب النمط.
$\left[x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right](x - 4) = 0$	عوّض عن p بـ $-\frac{1}{2}$ وعن q بـ 4.
$\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 4) = 0$	بسّط.
$x^2 - \frac{7}{2}x - 2 = 0$	اضرب.
$2x^2 - 7x - 4 = 0$	اضرب كل طرف في 2 بحيث يكون b و c عددين صحيحين.

مثال 5

حُلّ $2x^2 - 3x - 5 = 0$ بالتحليل إلى العوامل.

$2x^2 - 3x - 5 = 0$	معادلة أصلية
$(2x - 5)(x + 1) = 0$	حلل ثلاثي الحدود إلى العوامل
$2x - 5 = 0$ أو $x + 1 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$x = \frac{5}{2}$ $\quad x = -1$	

مجموعة الحل هي $\left\{x \mid x = -1, \frac{5}{2}\right\}$ أو $\left\{-1, \frac{5}{2}\right\}$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4-5 الأعداد المركبة

مثال 6

بسّط $(12 + 3i) - (-5 + 2i)$.

$(12 + 3i) - (-5 + 2i)$

$= [12 - (-5)] + (3 - 2)i$ قم بتجميع الأجزاء الحقيقية والتخيلية.

$= 17 + i$ بسّط.

مثال 7

حلّ $3x^2 + 12 = 0$.

$3x^2 + 12 = 0$ المعادلة الأصلية

$3x^2 = -12$ اطرح 12 من كل طرف.

$x^2 = -4$ اقسم كل طرف على 3.

$x = \pm\sqrt{-4}$ خاصية الجذر التربيعي

$x = \pm 2i$ $\sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}$

بسّط.

38. $\sqrt{-8}$

39. $(6 + 2i) - (4 - 3i)$

40. $(2 - i) + (13 + 4i)$

41. $(6 + 5i)(3 - 2i)$

19. الكهرباء تبلغ المقاومة في طرف دائرة توالٍ $2j + 3$ أوم. وتبلغ المقاومة في طرف آخر من الدائرة $3j - 4$ أوم. اجمع هذه الأعداد المركبة لإيجاد إجمالي المقاومة في الدائرة.

حُلّ كل من المعادلات التالية.

42. $2x^2 + 50 = 0$

43. $4x^2 + 16 = 0$

44. $3x^2 + 15 = 0$

45. $8x^2 + 16 = 0$

46. $4x^2 + 1 = 0$

4-6 القانون العام والمميز

أكمل الأجزاء a-c لكل معادلة تربيعية.

a. جد قيمة المميز.

b. صف عدد الجذور ونوعها.

c. جد الحلول الدقيقة باستخدام القانون العام.

47. $x^2 - 10x + 25 = 0$

48. $x^2 + 4x - 32 = 0$

49. $2x^2 + 3x - 18 = 0$

50. $2x^2 + 19x - 33 = 0$

51. $x^2 - 2x + 9 = 0$

52. $4x^2 - 4x + 1 = 0$

53. $2x^2 + 5x + 9 = 0$

54. العلوم الفيزيائية قذفت لميس كرةً بسرعة ابتدائية تبلغ 40 ft/s. وكانت معادلة ارتفاع الكرة هي $h = -16t^2 + 40t + 5$. حيث يمثل h الارتفاع بالقدم ويمثل t الزمن بالثانية. متى ستسقط الكرة على الأرض؟

مثال 8

حلّ $x^2 - 4x - 45 = 0$ باستخدام القانون العام.

في $x^2 - 4x - 45 = 0$، $a = 1$ و $b = -4$ و $c = -45$.

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ القانون العام

$= \dfrac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-45)}}{2(1)}$

$= \dfrac{4 \pm 14}{2}$

اكتب في صيغة معادلتين.

$x = \dfrac{4 + 14}{2}$ أو $x = \dfrac{4 - 14}{2}$

$= 9$ $= -5$

مجموعة الحل هي $\{-5, 9\}$ أو $\{x \mid x = -5, 9\}$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4-7 تحويلات الدوال التربيعية

اكتب كل معادلة تربيعية بصيغة الرؤوس، إذا لم تكن مكتوبة بتلك الصيغة. ثم حدد الرؤوس ومحور التماثل واتجاه المنحنى. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

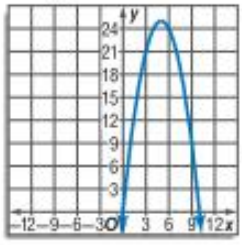
55. $y = -3(x - 1)^2 + 5$

56. $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 12$

57. $y = 2x^2 + 12x - 8$

58. $y = 3x^2 + 36x + 25$

59. يبين التمثيل البياني الموجود يسارًا ناتج ضرب عددين مجموعهما 10. جد دالة تمثل ناتج الضرب هذا واستخدمها في تحديد العددين اللذين ينتجان أكبر ناتج ضرب.



مثال 9

اكتب الدالة التربيعية $y = 3x^2 + 24x + 15$ بصيغة الرؤوس، ثم حدد الرأس ومحور التماثل واتجاه الفتحة.

$y = 3x^2 + 24x + 15$ المعادلة الأصلية

$y = 3(x^2 + 8x) + 15$ قسم إلى مجموعات وحلل إلى العوامل.

$y = 3(x^2 + 8x + 16) + 15 - 3(16)$ أكمل التربيع.

$y = 3(x + 4)^2 - 33$ أعد كتابة $x^2 + 8x + 16$ في صيغة تربيع كامل.

إذا $a = 3$، و $h = -4$، و $k = -33$. يوجد الرأس عند $(-4, -33)$ ومحور التماثل هو $x = -4$. حيث a موجبة والتمثيل البياني مفتوح لأعلى.

4-8 المتباينات التربيعية

مثّل كل متباينة تربيعية بيانيًا.

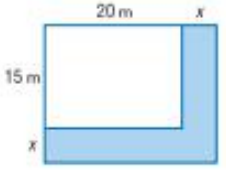
60. $y \geq x^2 + 5x + 4$

61. $y > x^2 - 6x + 8$

62. $y < -x^2 + 5x - 6$

63. $y \leq x^2 + 10x - 4$

64. يريد عمر أن يضع رصيفًا خشبيًا بطول الحديقة. وسيكون عرض الرصيف الخشبي واحدًا على الجانبين. ولا يمكن أن يزيد إجمالي مساحة الحديقة والرصيف الخشبي عن $500\ m^2$. ما عرض الرصيف الخشبي؟



حلّ كل متباينة جبريًا أو مستعينًا بالتمثيل البياني.

65. $x^2 + 8x + 12 > 0$

66. $6x + x^2 \geq -9$

67. $2x^2 + 3x - 20 > 0$

68. $4x^2 - 3 < -5x$

69. $3x^2 + 4 > 8x$

مثال 10

مثّل بيانيًا $y > x^2 + 3x + 2$.

الخطوة 1 مثّل الدالة المرتبطة بيانيًا. $y > x^2 + 3x + 2$. ونظرًا لأن رمز المتباينة $>$ مستخدم، فسيكون القطع المكافئ مرسومًا بخطوط متقطعة.

الخطوة 2 اختبر نقطة لا تقع على التمثيل البياني للقطع المكافئ مثل $(0, 0)$.

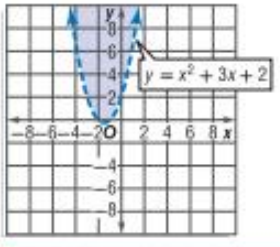
$y > x^2 + 3x + 2$

$(0) \stackrel{?}{>} (0)^2 + 3(0) + 2$

$0 \not> 2$

إذا، $(0, 0)$ ليست حلاً للمتباينة.

الخطوة 3 ظلل المنطقة التي لا تشتمل على النقطة $(0, 0)$.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4 تدريب على الاختبار

استخدم جدول قيم لتمثيل الدوال التالية بيانيًا، وحدّد المجال والمدى.

1. $y = x^2 + 2x + 5$
2. $y = 2x^2 - 3x + 1$

تأمل $y = x^2 - 7x + 6$.

3. حدّد ما إذا كان للدالة قيمة عظمى أو صغرى.
4. حدّد القيمة العظمى أو الصغرى.
5. ما المجال والمدى؟

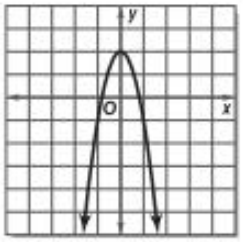
حُلّ كل معادلة بالتمثيل البياني. وإن كان من غير الممكن إيجاد جذور صحيحة، فقدّر الجذور مقربة إلى أقرب جزء من عشرة.

6. $x^2 + 7x + 10 = 0$
7. $x^2 - 5 = -3x$

صِف كيفية ارتباط كل دالة بالتمثيل البياني لـ $f(x) = x^2$.

8. $g(x) = x^2 - 5$
9. $g(x) = -3x^2$
10. $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4$

11. الاختيار من متعدد أي مما يلي معادلة للدالة الموضحة في التمثيل البياني؟



A $y = -3x^2$

B $y = 3x^2 + 1$

C $y = x^2 + 2$

D $y = -3x^2 + 2$

حل كل معادلة بإكمال المربع.

12. $x^2 + 2x + 5 = 0$
13. $x^2 - x - 6 = 0$
14. $2x^2 - 36 = -6x$

حُلّ كل معادلة مما يلي باستخدام القانون العام، وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر.

15. $x^2 - x - 30 = 0$
16. $x^2 - 10x = -15$
17. $2x^2 + x - 15 = 0$

18. البيسبول يضرب إسماعيل كرة البيسبول في الهواء. وتمثّل المعادلة $h = -16t^2 + 60t + 3$ ارتفاع h الكرة بالأقدام بعد t من الثواني. فما مدة بقاء الكرة في الهواء؟

19. مثّل بيانيًا $\{(2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, -4)\}$. حدّد ما إذا كانت الأزواج المرتبة تمثّل *دالة* خطية، أم *دالة* تربيعية، أم *دالة* أسية.

20. ابحث عن نمط في الجدول لتحديد أي نوع من النماذج هو الأفضل في وصف البيانات.

x	0	1	2	3	4
y	1	3	5	7	9

21. نادي السيارات يوضّح الجدول عدد أعضاء نادي السيارات على مدار أربعة أعوام متتالية بعد افتتاحه.

الزمن (بالسنوات)	0	1	2	3	4
الأعضاء	10	20	40	80	160

a. حدّد أي نموذج هو الأفضل في تمثيل البيانات.

b. اكتب دالة تمثّل البيانات.

c. توقّع عدد أعضاء نادي السيارات بعد 6 سنوات.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار

22. الاختيار من متعدد أيّ من المعادلات المذكورة أدناه لها جذور عند -6 و $\frac{1}{5}$؟

A $0 = 5x^2 - 29x - 6$

B $0 = 5x^2 + 31x + 6$

C $0 = 5x^2 + 29x - 6$

D $0 = 5x^2 - 31x + 6$

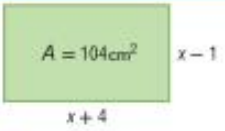
23. الفيزياء قُذفت كرة في الهواء في اتجاه رأسي بسرعة 112 ft/s. وكانت الكرة قد أطلقت من مسافة 6 ft فوق سطح الأرض. ويمثل الارتفاع فوق سطح الأرض t ثانية بعد الإطلاق باستخدام $h(t) = -16t^2 + 112t + 6$.

a. متى ستصل الكرة لـ الكرة 130 ft؟

b. هل يمكن أن تصل الكرة 250 ft؟ فسّر.

c. بعد كم ثانية من إطلاق الكرة سترتطم الكرة بالأرض؟

24. تبلغ مساحة المستطيل الموجود أدناه 104 cm^2. جد قيمة x وأبعاد المستطيل.



25. الاختيار من متعدد ما قيمة c التي تجعل ثلاثي الحدود $x^2 - 12x + c$ ثلاثي حدود تربيعيًا كاملاً؟

F 6

G 12

H 36

J 144

حُلّ كل متباينة جبريًا أو مستعينًا بالتمثيل البياني.

26. $x^2 + 6x > -5$

27. $4x^2 - 19x \leq -12$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4 تدريب على الاختبار المعياري

الاختيار من متعدّد

اقرأ كل سؤال، ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي يقدمها لك معلمك أو في أي ورقة أخرى.

1. المنحنى لـ $g(x) = \frac{2}{5}x^2 - 4x + 2$ مُزاح لأسفل بمقدار 5 وحدات لرسم منحنى الدالة $h(x)$. أيّ مما يلي يمكن أن يكون $h(x)$؟

F $h(x) = \frac{2}{5}x^2 - 4x + 7$

G $h(x) = \frac{2}{5}x^2 - 4x - 3$

H $h(x) = \frac{2}{5}x^2 - 9x + 2$

J $h(x) = \frac{2}{5}x^2 + x + 2$

2. يمكن استخدام الدالة $P(t) = -0.068t^2 + 7.85t + 56$ في تقدير تعداد سكان مدينة بالآلاف في الفترة ما بين عامي 1960 و 2000. مدى t الدالة هو عدد السنوات منذ عام 1960. وفقًا للنموذج، في أي سنة بلغ تعداد المدينة 200,000 نسمة؟

F 1974 H 1981

G 1977 J 1983

3. ماذا يحدث لمنحنى المعادلة $y = x^2 + 4$ عند تقييرها إلى $y = x^2 - 3$؟

F يتغير ميل المنحنى.

G يتسع المنحنى.

H يحتفظ المنحنى بالشكل نفسه. وتتحرك رأس المنحنى لأسفل.

J يحتفظ المنحنى بالشكل نفسه. وتُزاح رأس المنحنى يسارًا.

4. أي معادلة سينشأ عنها أضيق قطع مكافئ عند تمثيله بيانيًا؟

A $y = 3x^2$ C $y = -6x^2$

B $y = \frac{3}{4}x^2$ D $y = -\frac{3}{4}x^2$

5. أيّ مما يلي لا يصف منحنى $y = -2x^2 + 4$ بدقة؟

A القطع المكافئ متناظر حول المحور y.

B القطع المكافئ مفتوح لأسفل.

C نقطة الأصل في القطع المكافئ هي رأسه.

D يقطع القطع المكافئ المحور x في موقعين مختلفين.

6. أيّ مما يلي *ليس* عاملاً لـ $x^4 - 6x^2 - 27$؟

A $x^2 + 3$ C $x + 3$

B $x - 3$ D $x^2 - 3$

7. مثّل بيانيًا $f(x) \geq |x - 2|$ على شبكة إحداثية.

8. **إجابة شبكية** كم مرة يقطع منحنى $y = x^2 - 4x + 10$ المحور x؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إجابة مختصرة/إجابة شبكية

اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو ورقة أخرى.

9. إجابة شبكية بسّط $-2i \cdot 5i$.

10. صف إزاحة التمثيل البياني لـ $y = (x + 5)^2 - 1$ إلى التمثيل البياني لـ $y = (x - 1)^2 + 3$.

الإجابة المبسطة

دوّن إجاباتك على ورقة. واكتب الحل هنا.

11. بالنسبة للمعادلة التربيعية المعطاة $y = ax^2 + bx + c$. صف ما يخبرك به المميز $b^2 - 4ac$ عن جذور المعادلة. انظر الهامش.

12. يعمل والد خليفة على تصنيع صندوق أدوات على شكل منشور مستطيل. ويريد أن يجعل سطح مساحته $32\ m^2$. وسيكون ارتفاع الصندوق أقصر من عرضه بمتر واحد. وسيكون الطول أطول من الارتفاع 3 m.

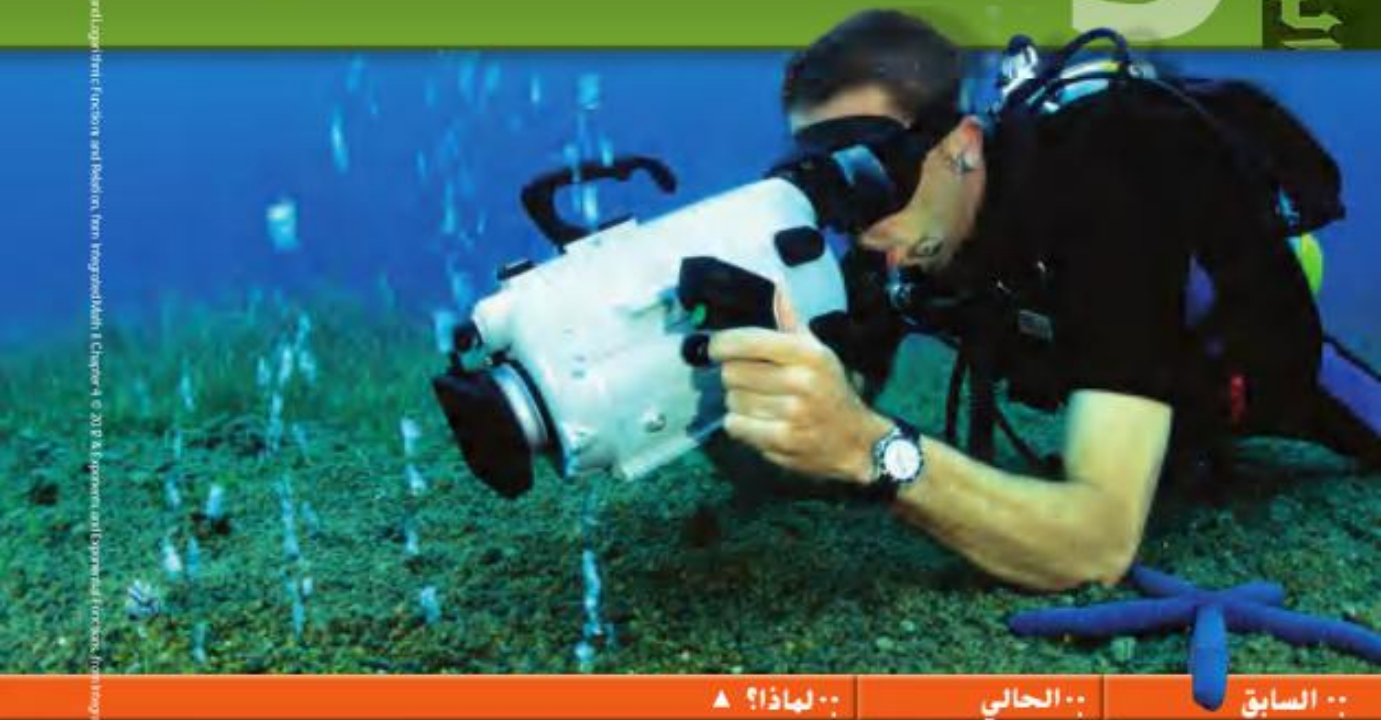
a. ارسم نموذجًا لتمثيل المسألة.

b. اكتب دالة كثيرة الحدود تمثل مساحة سطح صندوق الأدوات.

c. ما أبعاد صندوق الأدوات؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

5 الدوال والمعادلات الأسيّة



Chapter Source(s) from: Exponential and Logarithmic Functions and Models in Nature, from Integrated Math I, Chapter 4 © 2019 & Exponents and Exponential Functions from Integrated Math I, Chapter 7 © 2019

السابق

- قمت بتمثيل الدوال وتحويلات الدوال بيانيا.

الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادراً على:
  - تمثيل الدوال الأسيّة بيانيا.
  - حلّ المعادلات والمتباينات الأسيّة.
  - حل المسائل التي تتضمن نموا وتضاؤلاً أسيّا.
  - تحديد الدوال باستخدام الفروق المتتالية والنسب المشتركة

لماذا؟ ▲

- **العلوم** الرياضيات والعلوم علمان متلازمان. وسواءٌ أكنت تدرس الكيمياء أو علم الحياء أو علم المتحجرات أو علم الحيوان أو علم الإنسان. فإنك ستحتاج إلى مهارات رياضية قوية. وفي هذه الوحدة، سوف تتعلم الجوانب الرياضية للعلوم كالميروسات الحاسوبية وتعداد الحشرات ونموّ الجراثيم والانضمام الخلوي وعلم الفلك والأعاصير والزلازل.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الاستعداد للوحدة

تحديد مدى الاستعداد حل اختبار التمرين السريع أدناه للتحقق من المهارات المطلوبة لديك. وعد إلى المراجعة السريعة للمساعدة.

تمرين سريع

بسّط. افترض أنه لا يوجد متغيّر يساوي صفرًا.

1. $a^4a^3a^5$
2. $(2xy^3z^2)^3$
3. $\frac{-24x^8y^5z}{16x^2y^8z^6}$
4. $\left(\frac{-8r^2n}{36n^3t}\right)^2$

5. **الكثافة** كثافة جسم ما تساوي الكتلة مقسومة على الحجم. لدينا جسمٌ كتلته 7.5×10^3 gm وحجمه 1.5×10^3 cm^3. ما هي كثافة الجسم؟

جـد معكوس كلّ من الدّوال التالية. ثمّ مثل الدّالة ومعكوسها بيانيًا.

6. $f(x) = 2x + 5$
7. $f(x) = x - 3$
8. $f(x) = -4x$
9. $f(x) = \frac{1}{4}x - 3$
10. $f(x) = \frac{x-1}{2}$
11. $y = \frac{1}{3}x + 4$

حدّد ما إذا كان كل زوج من الدوال التالية عبارة عن دالتين متعاكستين.

12. $f(x) = x - 6$, $g(x) = x + 6$
13. $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = 2x - 5$

14. **الطعام** يبلغ سعر قطعة البيتزا متوسطة الحجم بالجبن في مطعم بيتزا 12 AED إضافةً إلى 2 AED لكلّ طبقة إضافية. فإذا كانت $f(x) = 2x + 12$ تمثّل تكلفة البيتزا المتوسطة التي تضم عدد x من الطبقات. فجـد $f^{-1}(x)$ واشرح معناها.

مراجعة سريعة

مثال 1

بسّط $\frac{(a^3bc^2)^2}{a^4a^2b^2bc^5c^3}$ وافترض أنّه لا يوجد متغير يساوي صفرًا.

$\frac{(a^3bc^2)^2}{a^4a^2b^2bc^5c^3}$

بسّط البسط باستخدام قوة القوة وبسّط المقام باستخدام قاعدة ناتج ضرب القوى.

$= \frac{a^6b^2c^4}{a^6b^3c^8}$

بسّط باستخدام قاعدة ناتج قسمة القوى.

$= \frac{1}{bc^4}$ or $b^{-1}c^{-4}$

مثال 2

جـد معكوس $f(x) = 3x - 1$.

الخطوة 1 عوّض عن $f(x)$ بـ y في المعادلة الأصلية.

$f(x) = 3x - 1 \rightarrow y = 3x - 1$

الخطوة 2 بدّل بين x و y: $x = 3y - 1$.

الخطوة 3 حلّ لإيجاد قيمة y.

$x = 3y - 1$ بالعكس

$x + 1 = 3y$ أضف 1 إلى كل طرف.

$\frac{x+1}{3} = y$ اقسم كل طرف على 3.

$\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} = y$ بسّط.

الخطوة 4 عوّض عن y بـ $f^{-1}(x)$.

$y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

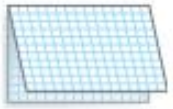
البدء في هذه الوحدة

ستتعلم عدة مفاهيم ومهاراتٍ ومفرداتٍ جديدة أثناء دراستك لهذه الوحدة. ولكي تستعد، حدّد المفردات المهمّة ونظّم مواردك.

المطويات منظّم الدراسة

الدوال والعلاقات الأسيّة والجذرية اصنع المطوية التالية لمساعدتك في تنظيم ملاحظاتك الخاصة بالدوال الأسيّة. وابدأ بورقتي تمثيل بياني.

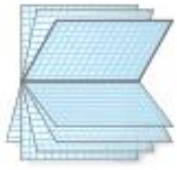
1 **اطوِ** الورقتين إلى نصفين بالعرض.



2 **على** الورقة الأولى. قصّ لمسافة 5 cm على طول الطية وعلى الجانبين.

3 **على** الورقة الثانية. قصّ منطقة المركز على طول الطية مع ترك مسافة 5 cm على الطرفين بدون قصّ.

4 **أدخل** الورقة الأولى من خلال الورقة الثانية وحاذ بين الطيّتين. ثمّ سمّ الصفحات بأرقام الدروس.



المفردات الجديدة

الدالة الأسيّة	exponential function
النمو الأسي	exponential growth
خط تقارب	asymptote
عامل النمو	growth factor
التضاؤل الأسي	exponential decay
عامل التضاؤل	decay factor
المعادلة الأسيّة	exponential equation
المرابحة المركبة	compound interest
المتباينة الأسيّة	exponential inequality
مرافق	conjugate
معادلات جذرية	radical equations

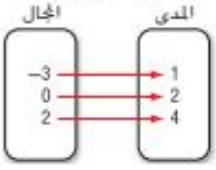
مراجعة المفردات

المجال مجموعة جميع إحداثيات x بالأزواج المرتبة في علاقة ما

الدالة علاقة يُقرن فيها كل عنصر من عناصر المجال مع عنصر واحد فقط من عناصر المدى

المدى مجموعة جميع إحداثيات y بالأزواج المرتبة في علاقةٍ ما

$\{(-3,1), (0, 2), (2, 4)\}$



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

ملاحظاتي

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

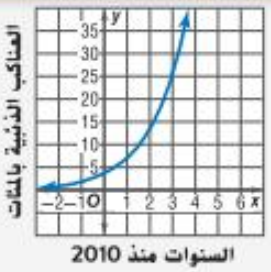
5-1 الدوال الأسيّة

السابق:
- أوجدت قيمة التعابير العددية التي تتضمن أسسًا.

الحالي:
1. تمثيل دوال النمو الأسي بيانيًا.
2. تمثيل دوال النمو والتضاؤل بيانيًا.

لماذا؟
- قد تبدو العناكب الذئبة مخيفة بأجسامها وسيقانها الكبيرة المشعرة، لكنها غير ضارة للبشر. يوضح التمثيل البياني مجموعة عناكب ذئبة تتزايد مع الوقت. لاحظ أن التمثيل البياني ليس خطيًا.

التمثيل البياني يمثل الدالة $y = 3(2)^x$. هذا مثال لدالة أسيّة.



المفردات الجديدة
- الدالة الأسيّة
  exponential function
- دالة النمو الأسي
  exponential growth function
- دالة التضاؤل(الاضمحلال) الأسيّ
  exponential decay function

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

1 تمثيل الدوال الأسيّة بيانيًا

تُعتبر **الدالة الأسيّة** دالة مكتوبة على الصيغة $y = ab^x$، حيث $a \neq 0, b > 0, b \neq 1$. لاحظ أن الأساس ثابت والأس متغير. الدوال الأسيّة غير خطية.

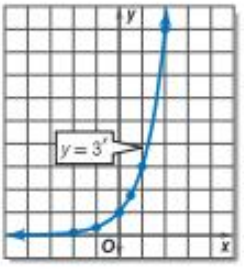
المفهوم الأساسي الدالة الأسيّة

الشرح الدالة الأسيّة دالة يمكن كتابتها بالصيغة $y = ab^x$، حيث $a \neq 0, b > 0, b \neq 1$.

أمثلة $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $y = 4^x$ $y = 2(3)^x$

مثال 1 التمثيل بيانيًا باستخدام $a > 0, b > 1$

مثّل بيانيًا $y = 3^x$. جد المقطع من المحور الرأسيّ y واذكر المجال والمدى.



x	3^x	y
−2	3^{-2}	$\frac{1}{9}$
−1	3^{-1}	$\frac{1}{3}$
0	3^0	1
$\frac{1}{2}$	$3^{\frac{1}{2}}$	≈1.73
1	3^1	3
2	3^2	9

يتقاطع التمثيل البياني مع المحور الرأسيّ y عند 1.
إذًا المقطع من المحور الرأسيّ y هو 1. المجال هو جميع الأعداد الحقيقية والمدى هو جميع الأعداد الحقيقية الموجبة.

لاحظ أن التمثيل البياني يقترب من المحور الأفقي x ولا توجد تقاطع مع المحور الأفقي x. التمثيل البياني متزايد على المجال كله.

تمرين موجّه

1. مثّل بيانيًا $y = 7^x$. جد التقاطع مع المحور الرأسيّ y واذكر المجال والمدى.

الدوال بالصيغة $y = ab^x$، حيث $a > 0, b > 1$، تُسمى **دوال النمو الأسيّ** وكلها لها نفس شكل التمثيل البياني كما في المثال 1. الدوال بالصيغة $y = ab^x$، حيث $a > 0$ و $0 < b < 1$ تُسمى **دوال الاضمحلال الأسيّ** ولها أيضًا الشكل العام نفسه.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

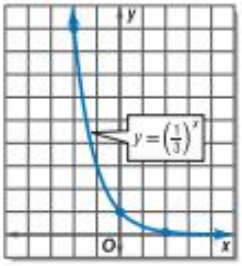
نصيحة دراسية

إذا كانت قيمة a أقل من $a < 0$ 0. فسينعكس التمثيل البياني بالمحور الأفقي x.

مثال 2 التمثيل بيانيًا باستخدام $a > 0$ و $0 < b < 1$

مثّل بيانيًا $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. جد المقطع من المحور الرأسيّ y واذكر المجال والمدى.

x	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	y
-2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$	9
0	$\left(\frac{1}{3}\right)^0$	1
2	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\frac{1}{9}$



المقطع من المحور الرأسيّ y هو 1. المجال هو جميع الأعداد الحقيقية والمدى هو جميع الأعداد الحقيقية الموجبة. لاحظ أنه مع زيادة x. تتناقص قيم y بسرعة أقل.

تمرين موجّه

2. مثّل بيانيًا $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$. جد المقطع من المحور الرأسيّ y واذكر المجال والمدى.

يمكن تلخيص الخصائص الأساسية للتمثيلات البيانية للدوال الأسيّة كالتالي.

المفهوم الأساسي التمثيلات البيانية للدوال الأسيّة

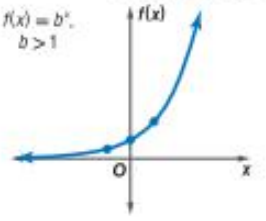
دوال النمو الأسيّ

المعادلة: $f(x) = ab^x,\ a > 0,\ b > 1$

المجال، المدى: جميع الأعداد الحقيقية: جميع الأعداد الحقيقية الموجبة

نقاط التقاطع: نقطة تقاطع واحدة مع المحور الرأسيّ y. لا توجد نقاط تقاطع مع المحور الأفقي x

السلوك الطرفي: مع تزايد x. تتزايد $f(x)$: مع تناقص x. تقترب $f(x)$ من 0



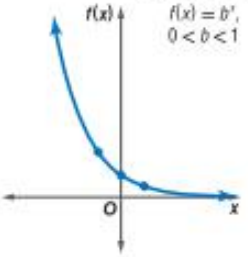
دوال الاضمحلال الأسيّ

المعادلة: $f(x) = ab^x,\ a > 0,\ 0 < b < 1$

المجال، المدى: جميع الأعداد الحقيقية: جميع الأعداد الحقيقية الموجبة

نقاط التقاطع: نقطة تقاطع واحدة مع المحور الرأسيّ y. لا توجد نقاط تقاطع مع المحور الأفقي x

السلوك الطرفي: مع تزايد x. تقترب $f(x)$ من 0: مع تناقص x. تتزايد $f(x)$



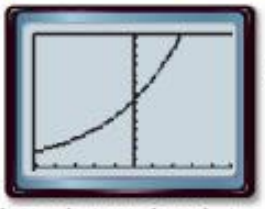
تحدث الدوال الأسيّة في الكثير من مواقف الحياة اليومية.

مثال 3 من الحياة اليومية استخدام الدوال الأسيّة في حل المسائل

الصودا تمثل الدالة $C = 179(1.029)^t$ مقدار الصودا المستهلك في العالم، حيث C هي المقدار المستهلك بمليارات اللترات t هي عدد السنوات منذ عام 2000.

a. مثّل الدالة بيانيًا. ما قيم C ذات المعنى في سياق المسألة؟

بما أن t تمثل الزمن، $t > 0$. عندما تكون $t = 0$. يبلغ الاستهلاك 179 مليار لتر. ولهذا. فقي سياق هذه المسألة. $C > 179$ ذات معنى.



[−50, 50] scl: 10 by [0, 350] scl: 25

الربط بالحياة اليومية

الولايات المتحدة هي أكبر مستهلك للصودا في العالم. في أحد الأعوام مؤخرًا. كان استهلاك الولايات المتحدة يمثل ثلث إجمالي استهلاك العالم من الصودا.

المصدر: معهد وورلد واتش

McGraw-Hill Education

b. كم كان مقدار استهلاك الصودا في عام 2005؟

$C = 179(1.029)^t$ المعادلة الأصلية

$= 179(1.029)^5$ $t = 5$

≈ 206.5 استخدم حاسبة.

كان استهلاك العالم من الصودا في عام 2005 يبلغ 206.5 مليار لتر تقريبًا.

تمرين موجّه

3. علم الأحياء يتضاعف عدد نوع معين من البكتيريا كل 20 دقيقة. بدءًا بـ 10 خلايا في مزرعة. يمكن تمثيل العدد بالدالة $B = 10(2)^t$. حيث B هي عدد خلايا البكتيريا t هي الزمن بزيادات مقدارها 20 دقيقة. كم سيبلغ العدد بعد ساعتين؟

2 تمثيل دوال النمو والتضاؤل بيانياً

تذكر مما سبق أن الدوال الخطية لها معدل تغير ثابت. ليس للدوال الأسيّة معدلات تغير ثابتة. لكن لها نسب ثابتة.

مثال 4 تحديد السلوك الأسيّ

حدد ما إذا كانت مجموعة البيانات المعروضة أدناه تعرض سلوكًا أسيًّا. اكتب نعم أو لا. ولماذا؟

x	0	5	10	15	20	25
y	64	32	16	8	4	2

الطريقة 1 البحث عن نمط.

تفع قيم المجال على مسافات منتظمة تبلغ 5. ابحث عن عامل مشترك بين قيم المدى.

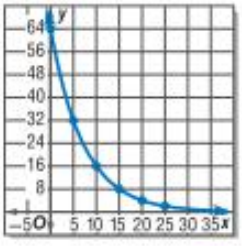
64 32 16 8 4 2

$\times\frac{1}{2}\ \times\frac{1}{2}\ \times\frac{1}{2}\ \times\frac{1}{2}\ \times\frac{1}{2}$

تختلف قيم المدى حسب العامل المشترك $\frac{1}{2}$.

بما أن قيم المجال تفع على مسافات منتظمة وتختلف قيم المدى حسب عامل مشترك موجب، فربما تكون البيانات أسيّة. قد تتضمن معادلتها $\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

الطريقة 2 مثّل البيانات بيانيًا.



ارسم النقاط وصلها بواسطة منحنى منتظم.
يوضح التمثيل البياني قيمة سريعة التناقص y مع زيادة x.
هذه سمة في السلوك الأسيّ يتراوح فيها الأساس بين 0 و 1.

تمرين موجّه

4. حدد ما إذا كانت مجموعة البيانات المعروضة أدناه تعرض سلوكًا أسيًّا. اكتب نعم أو لا. اشرح السبب.

x	0	3	6	9	12	15
y	12	16	20	24	28	32

نصيحة في حل المسائل

وضع قائمة مرتبة

بعيد وضع قائمة مرتبة لقيم x وقيم y المقابلة لها في تمثيل الدالة بيانيًا. يمكن أن يساعدك هذا أيضًا في تحديد الأنماط في البيانات.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمثل التمثيل البياني لـــ $f(x) = b^x$ تمثيلاً بيانيًا أصليًا للدوال الأسيّة. ويمكن تطبيق نفس الأساليب المستخدمة لتحويل التمثيلات البيانية للدوال الأخرى التي درستها على التمثيلات البيانية للدوال الأسيّة.

المفهوم الأساسي تحويلات الدوال الأسيّة

$$f(x) = ab^{x-h} + k$$

h : الإزاحة الأفقية	k : الإزاحة الرأسية
تكون وحدات h جهة اليمين إذا كانت h موجبة تكون وحدات $\|h\|$ جهة اليسار إذا كانت h سالبة	تكون وحدات k لأعلى إذا كانت k موجبة تكون وحدات $\|k\|$ لأسفل إذا كانت k سالبة

a : الاتجاه والشكل

إذا كان $a < 0$، فسينعكس التمثيل البياني على المحور الأفقي x. إذا كان $|a| > 1$، فسيمتد التمثيل البياني رأسيًا. إذا كان $|a| < 1 < 0$، فسيكون التمثيل البياني مضغوطًا رأسيًا.

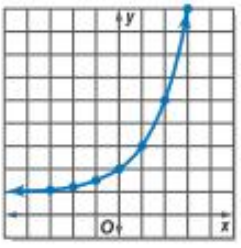
مثال 5 التمثيل البياني للتحويلات

مثّل كل دالة بيانيًا. اذكر المجال والمدى.

a. $y = 2^x + 1$

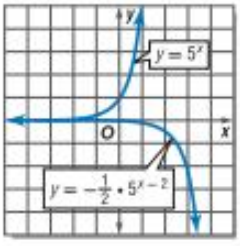
تمثل المعادلة إزاحة منحني الدالة $y = 2^x$ وحدة لأعلى.

x	$y = 2^x + 1$
-3	$2^{-3} + 1 = 1.125$
-2	$2^{-2} + 1 = 1.25$
-1	$2^{-1} + 1 = 1.5$
0	$2^0 + 1 = 2$
1	$2^1 + 1 = 3$
2	$2^2 + 1 = 5$
3	$2^3 + 1 = 9$



المجال = {جميع الأعداد الحقيقية}. المدى= $\{y \mid y > 1\}$

b. $y = -\frac{1}{2} \cdot 5^{x-2}$



تمثل المعادلة تحويلاً لمنحني الدالة $y = 5^x$.

مثّل $y = 5^x$ بيانيًا وحوّل المنحني.

- $a = -\frac{1}{2}$: ينعكس التمثيل البياني في المحور الأفقي x وينضغط رأسيًا.
- $h = 2$ تتم إزاحة المنحني بمقدار وحدتين إلى اليمين.
- $k = 0$: لا تتم إزاحةالمنحني رأسيًا.

المجال = {جميع الأعداد الحقيقية} المدى = $\{y \mid y < 0\}$

تمرين موجّه

5A. $y = 2^{x+3} - 5$

5B. $y = 0.1(6)^x - 3$

نصيحة دراسية

الدقة تذكر أن السلوك الطرفي هو سلوك المنحنى حيث تقترب x من اللانهاية الموجبة أو اللانهاية السالبة. في المثال 5a، عندما تقترب x من اللا نهاية، تقترب y من اللا نهاية. وفي المثال 5b، عندما تقترب x من اللانهاية، تقترب y من اللا نهاية السالبة.

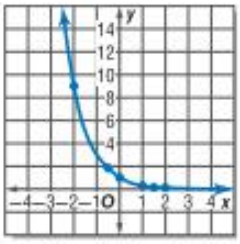
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 6 تمثيل دوال التضاؤل الأسي بيانيًا

مثّل كل دالة بيانيًا. اذكر المجال والمدى.

a. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
-3	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$
-2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$
$-\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
0	$\left(\frac{1}{3}\right)^{0} = 1$
1	$\left(\frac{1}{3}\right)^{1} = \frac{1}{3}$
$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{1}{27}}$
2	$\left(\frac{1}{3}\right)^{2} = \frac{1}{9}$



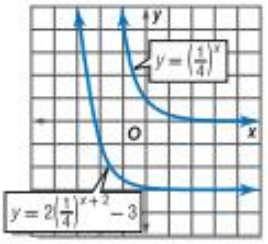
المجال هو جميع الأعداد الحقيقية. والمدى هو جميع الأعداد الحقيقية الموجبة.

b. $y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 3$

تمثل المعادلة تحويلاً لمنحني الدالة $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

افحص كل مُعلمة.

- $a = 2$: المنحني ممتد رأسيًا.
- $h = -2$: تتم إزاحة **المنحني** بمقدار وحدتين إلى اليسار.
- $k = -3$: تتم إزاحةالمنحني بمقدار 3 وحدات إلى الأسفل.



المجال هو كل الأعداد الحقيقية. والمدى هو كل الأعداد الحقيقية الأكبر من -3.

تمرين موجّه.

6A. $y = -3\left(\frac{2}{5}\right)^{x-4} + 2$

6B. $y = \frac{3}{8}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} + 1$

نصيحة دراسية

التضاؤل الأسي تأكد من عدم الخلط بين تعبير الأساس الذي تكون فيه $|a| > 1$ والتضاؤل الأسي، والذي تكون فيه $b > 1$ و $0 < b < 1$.

كما هو الحال بالنسبة للنمو الأسي، يمكنك أيضًا تمثيل التضاؤل الأسي بتناقص ثابت للنسبة المئوية على مدار فترات زمنية محددة باستخدام الدالة التالية.

$$A(t) = a(1 - r)^t$$

يُطلق على أساس التعبير الأسي $1 - r$. اسم **معامل التضاؤل**.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 **مثّل كل دالة بيانيًا. جـد المقطع من المحور الرأسيّ y واذكر المجال والمدى.**

1. $y = 2^x$
2. $y = -5^x$
3. $y = -\left(\frac{1}{5}\right)^x$
4. $y = 3\left(\frac{1}{4}\right)^x$
5. $f(x) = 6^x + 3$
6. $f(x) = 2 - 2^x$

مثال 3 7. **علم الأحياء** تمثل الدالة $f(t) = 100(1.05)^t$ نمو أعداد ذبابة الفاكهة. حيث $f(t)$ هي الذباب t هي الزمن بالأيام.

a. ما قيم المجال والمدى المعقولة في سياق هذا الموقف؟ اشرح.

b. بعد أسبوعين. كم يبلغ تقريبًا عدد الذباب في هذا التجمع؟

مثال 4 حدد ما إذا كانت مجموعة البيانات المعروضة أدناه تعرض سلوكًا أسيًا. اكتب نعم أو لا. اشرح لِمَ أو لِمَ لا.

8.

x	1	2	3	4	5	6
y	−4	−2	0	2	4	6

9.

x	2	4	6	8	10	12
y	1	4	16	64	256	1024

مثال 5 **مثّل كل دالة بيانيًا. اذكر المجال والمدى.**

10. $f(x) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{x-3} - 4$
11. $f(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} + 5$
12. $f(x) = -\frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^{x-4} + 3$
13. $f(x) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^{x+6} + 7$

التمرين وحل المسائل

المثالان 1 و 2 **مثّل كل دالة بيانيًا. جـد المقطع من المحور الرأسيّ y واذكر المجال والمدى.**

14. $y = 2x\,8^x$
15. $y = 2x\left(\frac{1}{6}\right)^x$
16. $y = \left(\frac{1}{12}\right)^x$
17. $y = -3x\,9^x$
18. $y = -4x\,10^x$
19. $y = 3x\,11^x$
20. $y = 4^x + 3$
21. $y = \frac{1}{2}(2^x - 8)$
22. $y = 5(3^x) + 1$
23. $y = -2(3^x) + 5$

مثال 3 24. **استخدام النماذج** يزيد عدد البكتيريا في مزرعة وفقًا للنموذج $p = 300(2.7)^{0.02t}$.
حيث t هي عدد الساعات t = 0 تقابل الساعة 9:00 صباحًا.

a. استخدم هذا النموذج لتقدير عدد البكتيريا الساعة 11 صباحًا

b. مثّل الدالة بيانيًا واذكر اسم نقطة التقاطع p. صف ما تمثله نقطة التقاطع p وصف مجال ومدى منطقيين لهذا الموقف.

مثال 4 **حدد ما إذا كانت مجموعة البيانات المعروضة أدناه تعرض سلوكًا أسيًّا. اكتب نعم أو لا. اشرح السبب.**

25.

x	−4	0	4	8	12
y	2	−4	8	−16	32

26.

x	−6	−3	0	3
y	5	10	15	20

27.

x	−8	−6	−4	−2
y	0.25	0.5	1	2

28.

x	20	30	40	50	60
y	1	0.4	0.16	0.064	0.0256

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

29. **التصوير الفوتوغرافي** تعمل منال على تكبير صورة لعمل ملصق للمدرسة. ستقوم بتكبير الصورة بنسبة 150% بشكل متكرر. تمثل الدالة $P = 1.5^x$ الحجم الجديد للصورة التي يجري تكبيرها. حيث x هي عدد التكبيرات. كم ضعفًا يبلغ حجم الصورة بعد 4 تكبيرات؟

30. **المعرفة المالية** أودع محمد AED 500 في حساب ادخار وبعد 8 سنوات، وصلت قيمة استثماره إلى AED 807.07. تمثل المعادلة $A = d(1.005)^{12t}$ قيمة استثمار محمد A بعد t سنوات بإيداع مبدئي يبلغ d.

a. ماذا ستكون قيمة استثمار محمد إذا كان قد أودع AED 1000؟

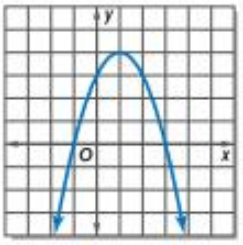
b. ماذا ستكون قيمة استثمار محمد إذا كان قد أودع AED 250؟

c. جد تفسير $d(1.005)^{12t}$ لتشرح كيفية تأثير مبلغ الإيداع الأصلي على قيمة استثمار محمد.

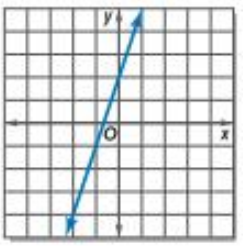
حدد فيما إذا كانت كل دالة خطية، أو أسيّة، أو ليست أيًا منهما.

31.

32.



33.



34. $y = 4^x$

35. $y = 2x(x - 1)$

36. $5x + y = 8$

37. **التخرج** ارتفع عدد الخريجين في مدرسة عليا بعامل 1.055 كل عام منذ عام 2001 في عام 2001، تخرج 110 طلاب. تمثل الدالة $N = 110(1.055)^t$ عدد الطلاب N المتوقع أن يتخرجوا بعد t أعوام من 2001. كم عدد الطلاب الذين سيتخرجون في عام 2012؟

صف التمثيل البياني لكل معادلة كتحويل للتمثيل البياني $y = 2^x$.

38. $y = 2^x + 6$

39. $y = 3(2)^x$

40. $y = -\frac{1}{4}(2)^x$

41. $y = -3 + 2^x$

42. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

43. $y = -5(2)^x$

44. **الغزلان** يتضاعف عدد الغزلان في حديقة عامة كل عام. في عام 2000، كان هناك 25 غزالاً في الحديقة. تمثل الدالة $N = 25(2)^t$ عدد الغزلان N في الحديقة بعد t سنوات من عام 2000. ماذا سيكون عدد الغزلان في عام 2015؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

45. **المثابرة** اكتب دالة أسيّة يمر تمثيلها البياني بالنقطتين (0, 3) و (1, 6)

46. **التبرير** حدد ما إذا كان منحني الدالة $y = ab^x$. حيث $a \neq 0, b > 0$ و $b \neq 1$. يتقاطع أحيانًا، أو دائمًا، أو لا يتقاطع أبدًا مع نقطة التقاطع الأفقية x. اشرح استنتاجك.

47. **مسألة غير محددة** الإجابة جد دالة أسيّة تمثل موقفًا من الحياة اليومية ومثّل الدالة بيانيًا. حلل التمثيل البياني واشرح سبب تمثيل الموقف بدالة أسيّة وليس دالة خطية.

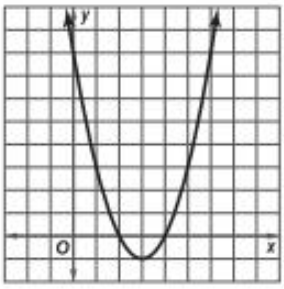
48. **التبرير** استخدم الجداول والتمثيلات البيانية للمقارنة والمقابلة بين الدالة الأسيّة $f(x) = ab^x + c$. حيث $a \neq 0, b > 0, b \neq 1$. والدالة الخطية $g(x) = ax + c$. اذكر نقاط التقاطع، والفترات التي تكون فيها الدوال متزايدة أو متناقصة أو موجبة أو سالبة، والقيم العظمى والصغرى النسبية، والتناظر، والسلوك الطرفي.

49. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيفية تحديد ما إذا كانت مجموعة بيانات تعرض سلوكًا أسيًا.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبار المعياري

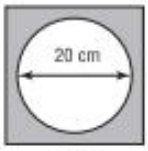
50. إجابة قصيرة ما التقاطع مع المحور الأفقي x في الدالة الممثلة بيانيًا أدناه؟



51. استثمر مازن AED 300 في حساب ادخار. تمثل المعادلة $A = 300(1.005)^{12t}$ المبلغ في حساب مازن A بعد t سنوات. ما المبلغ الذي سيكون في حساب مازن بعد 7 أعوام؟

A AED 25,326
B AED 456.11
C AED 385.01
D AED 301.52

52. الهندسة وضعت نورا قطعة ورق دائرية على صورة مربعة كما يظهر بالأسفل. إذا تمددت الصورة 4 cm خارج الدائرة من كل جانب، فما محيط الصورة المربعة؟



F 64 cm
G 80 cm
H 94 cm
J 112 cm

53. تقع النقطتان اللتان إحداثياتهما (0, −3) و (2, 7) على المستقيم l. يحتوي المستقيم p على (3, −1) وهو عمودي على المستقيم l. ما الإحداثي الأفقي x للنقطة التي يتقاطع عندها l مع p؟

A $\frac{1}{2}$
B $-\frac{2}{5}$
C $-\frac{1}{2}$
D -3

مراجعة شاملة

جد قيمة ناتج الضرب. وعبّر عن النتائج بكل من الترميز العلمي بالصيغة القياسية.

54. $(1.9 \times 10^2)(4.7 \times 10^6)$

55. $(4.5 \times 10^{-3})(5.6 \times 10^4)$

56. $(3.8 \times 10^{-4})(6.4 \times 10^{-8})$

بسّط.

57. $\sqrt[3]{343}$

58. $\sqrt[6]{729}$

59. $\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$

60. $729^{\frac{5}{6}}$

61. $216^{\frac{5}{3}}$

62. $\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{3}{2}}$

63. سباق الهدم عندما تصطدم سيارة بجسم، يُقاس التلف بأثر الاصطدام. بالنسبة لسيارة معينة، يتحدد أثر الاصطدام I بواسطة $I = 2v^2$، حيث تمثل v السرعة بالكيلومتر في الدقيقة. ما أثر الاصطدام إذا كانت سرعة السيارة تبلغ 4 km/min؟

استخدم طريقة الحذف في حل كل نظام تباينات.

64.
$x + y = -3$
$x - y = 1$

65.
$3a + b = 5$
$2a + b = 10$

66.
$3x - 5y = 16$
$-3x + 2y = -10$

مراجعة المهارات

جد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية حسابية.

67. 1, 3, 5, 7, …

68. −6, −4, −2, 0, …

69. 6.5, 9, 11.5, 14, …

70. 10, 3, −4, −11, …

71. $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, 2, \frac{11}{4}, \ldots$

72. $1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

5-1 مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المعادلات والمتباينات الأسيّة

يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لحل المعادلات الأسية من خلال التمثيل البياني أو من خلال استخدام خاصية الجدول. وللقيام بذلك، سوف تكتب المعادلات في صيغة أنظمة معادلات.

النشاط 1

حُلّ $3^{x-4} = \frac{1}{9}$.

الخطوة 1 مثّل كل طرف من المعادلة بيانيًا في صورة دالة منفصلة. أدخل 3^{x-4} باعتبارها **Y1**. تأكد من تضمين قوسين حول الأس.

أدخل $\frac{1}{9}$ باعتبارها **Y2**. ثم مثّل المعادلتين بيانيًا.

[−10, 10] scl: 1 by [−1, 1] scl: 0.1

الخطوة 2 استخدم خاصية **intersect**.

يمكنك استخدام خاصية **intersect (تقاطع)** من قائمة **CALC (احسب)** لتقريب الزوج المرتّب الخاص بالنقطة التي تتقاطع عندها التمثيلات البيانية.

تبين شاشة الحاسبة أن الإحداثي x للنقطة التي يتقاطع عندها المنحنيان هو 2. لذا، فإن حل المعادلة هو 2.

[−10, 10] scl: 1 by [−1, 1] scl: 0.1

الخطوة 3 استخدم خاصية **TABLE**.

يمكنك أيضا استخدام خاصية **TABLE (الجدول)** لتحديد موقع النقطة التي يتقاطع عندها المنحنيان.

يظهر الجدول قيم x وقيم y المتماثلة لكل تمثيل بياني. افحص الجدول للعثور على قيمة x التي تساويها قيم y في التمثيلات البيانية.

عند $x = 2$، تكون لكلتا الدالتين قيمة y تبلغ $0.\overline{1}$ أو $\frac{1}{9}$. وبالتالي، فإن حل المعادلة هو 2.

تحقق عوّض بالعدد 2 عن x في المعادلة الأصلية

$3^{x-4} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9}$	المعادلة الأصلية
$3^{2-4} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9}$	عوّض بالعدد 2 عن x.
$3^{-2} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9}$	بسّط.
$\frac{1}{9} = \frac{1}{9}$ ✓	تم التحقق من الحل.

يمكن استخدام إجراء مماثل لحل المتباينات الأسية.

(يتبع في الصفحة التالية)

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

النشاط 2 وصف

حُلّ $2^{x-2} \geq 0.5^{x-3}$.

الخطوة 1 أدخل المتباينات ذات الصلة.

أعد كتابة المسألة في صورة نظام متباينات.

المتباينة الأولى هي $y \geq 2^{x-2}$ أو $y \leq 2^{x-2}$. وبما أن هذه المتباينة تتضمن إشارة *أقل من أو يساوي*، فيجب أن تظلل أسفل المنحنى.

أدخل الحد أولاً ثم استخدم السهم ومفاتيح ENTER لاختيار أيقونة "التظليل أسفل".

المتباينة الثانية هي $y \geq 0.5^{x-3}$. ظلل فوق المنحنى لأن هذه المتباينة تحتوي على إشارة *أكبر من أو يساوي*.

خطوات العملية على الحاسبة:

Y= ◀ ◀ ENTER ENTER ENTER ▶ ▶ 2 ^ (

X,T,θ,n − 2) ENTER ◀ ◀ ENTER ENTER ▶

▶ .5 ^ (X,T,θ,n − 3)

[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

الخطوة 2 مثّل النظام بيانيًا.

خطوات العملية على الحاسبة: GRAPH

قيم x للنقاط الواقعة في المنطقة التي تتداخل فيها المناطق المظللة هي مجموعة حل المتباينة الأصلية. وباستخدام خاصية **intersect (تقاطع)**. يمكنك استنتاج أن مجموعة الحل هي $\{x \mid x \geq 2.5\}$.

الخطوة 3 استخدم خاصية **TABLE**.

تحقق باستخدام خاصية **TABLE (الجدول)**. وقم بإعداد الجدول لإظهار قيم x بزيادات تساوي 0.5.

خطوات العملية على الحاسبة: 2nd [TBLSET] 0 ENTER .5 ENTER 2nd [TABLE]

لاحظ أنه بالنسبة لقيم x التي تكون أكبر من $x = 2.5$. فإن **Y1 > Y2**. وهذا يؤكد أن حل المتباينة يكون $\{x \mid x \geq 2.5\}$.

تمارين

حُلّ كل معادلة أو متباينة.

1. $9^{x-1} = \frac{1}{81}$
2. $4^{x+3} = 2^{5x}$
3. $5^{x-1} = 2^{x}$
4. $3.5^{x+2} = 1.75^{x+3}$
5. $-3^{x+4} = -0.5^{2x+3}$
6. $6^{2-x} - 4 < -0.25^{x-2.5}$
7. $16^{x-1} > 2^{2x+2}$
8. $3^{x} - 4 \leq 5^{\frac{x}{2}}$
9. $5^{x+3} \leq 2^{x+4}$
10. **الكتابة في الرياضيات** وضّح سبب عمل هذه التقنية الخاصة بتمثيل نظام معادلات أو متباينات بيانيًا على حل المعادلات والمتباينات الأسية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

5-2 تحديد الدوال باستخدام الفروق المتتالية

السابق
- مثّلت الدوال الخطية والتربيعية والأسية بيانيًا.

الحالي
1. تحديد الدوال الخطية والتربيعية والأسيّة من البيانات الواردة.
2. كتابة المعادلات التي تمثل بيانات.

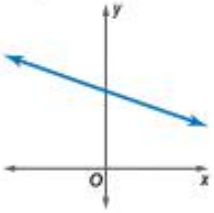
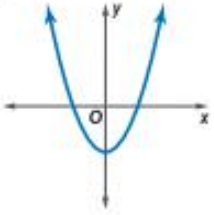
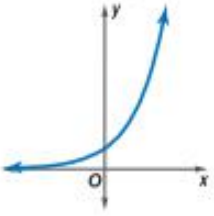
لماذا؟
- يبيع فريق الجوالف في كل سنة الحلوى لجمع المال للجمعيات الخيرية. ومن خلال معرفة نوع الدالة الذي يمثل مبيعات الحلوى، يمكنهم تحديد أفضل سعرٍ للحلوى.

ممارسات في الرياضيات
محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 تحديد الدوال

يمكنك استخدام الدوال الخطية والدوال التربيعية والدوال الأسيّة لتمثيل البيانات. فيما يلي قائمة بالصيغ العامة للمعادلات وتمثيل بياني لكل نوع من الدوال.

ملخص المفهوم الدوال الخطية وغير الخطية

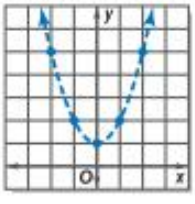
الدالة الخطية	الدالة التربيعية	الدالة الأسيّة
$y = mx + b$	$y = ax^2 + bx + c$	$y = ab^x$ حيث $b > 0$.
		

مثال 1 اختيار نموذجًا باستخدام تمثيل النماذج

مثّل بيانيًا كل مجموعة من الأزواج المرتبة. حدد ما إذا كانت الأزواج المرتبة تمثل دالة خطية أم دالة تربيعية أم دالة أُسيّة.

a. $\{(-2, 5), (-1, 2), (0, 1), (1, 2), (2, 5)\}$

يظهر أن الأزواج المرتبة تمثل دالة تربيعية.



b. $\left\{\left(-2, \frac{1}{4}\right), \left(-1, \frac{1}{2}\right), (0, 1), (1, 2), (2, 4)\right\}$

يظهر أن الأزواج المرتبة تمثل دالة أسية.

تمرين موجّه

1A. $(-2, -3), (-1, -1), (0, 1), (1, 3)$

1B. $(-1, 0.25), (0, 1), (1, 4), (2, 16)$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

طريقة أخرى لتحديد يصف أي نموذج يصف البيانات أفضل هو استخدام الأنماط. تُسمّى فروق قيم y المتتالية *الفروق الأولى*. تُسمّى فروق الفروق الأولى المتتالية *الفروق الثانية*.

- إذا كانت جميع فروق قيم y المتتابعة متساوية، فإن الدالة تمثل دالةً خطية.
- إذا كانت الفروق الثانية متساوية جميعًا، ولكن الفروق الأولى غير متساوية، فإن البيانات تمثل دالةً تربيعية.
- إذا كانت نسبة قيم y المتتالية متساويةً جميعًا، و $r \neq 1$. فإن البيانات تمثل دالةً أسيّة.

انتبه!
قيم x. قبل أن تتحقق من الفروق المتتالية أو النسب، تأكد من أن قيم x متزايدة بالمقدار نفسه.

مثال 2 اختيار نموذجًا باستخدام الفروق أو النسب

ابحث عن نمط في كل جدول قيم لتحديد أي نوع من النماذج هو الأفضل في وصف البيانات.

a.

x	−2	−1	0	1	2
y	−8	−3	2	7	12

الفروق الأولى: $-8 \quad -3 \quad 2 \quad 7 \quad 12$ (الفروق: 5، 5، 5، 5)

بما أن الفوارق الأولى متساوية جميعها، فإن جدول القيم يمثل دالةً خطية.

b.

x	−1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	0.5

الفروق الأولى: $8 \quad 4 \quad 2 \quad 1 \quad 0.5$ (الفروق: −4، −2، −1، −0.5)

الفروق الأولى ليست جميعها متساوية. إذًا، لا يمثل جدول القيم دالةً خطية. جد الفروق الثانية وقارن.

الفروق الأولى: $-4 \quad -2 \quad -1 \quad -0.5$

الفروق الثانية: 2، 1، 0.5

الفروق الثانية ليست جميعها متساوية. إذًا، لا يمثل جدول القيم دالةً تربيعية. جد نسب قيم y ثم قارن.

النسب: $8 \quad 4 \quad 2 \quad 1 \quad 0.5$ ($\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$، $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$، $\frac{1}{2}$، $\frac{0.5}{1}=\frac{1}{2}$)

نسب قيم y المتتابعة متساوية. وبالتالي، يمكن تمثيل جدول القيم عن طريق دالةٍ أسية.

تمرين موجّه

2A.

x	−3	−2	−1	0	1
y	−3	−7	−9	−9	−7

2B.

x	−2	−1	0	1	2
y	−18	−13	−8	−3	2

2 كتابة المعادلات

عندما تجد النموذج الأفضل في وصف البيانات، فيمكنك كتابة معادلة للدالة. بالنسبة للدالة التربيعية في هذا الدرس، سيكون للمعادلة هذه الصيغة $y = ax^2$.

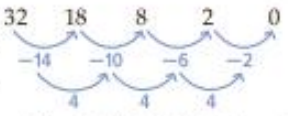
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 كتابة معادلة

حدد نوع النموذج الأفضل في وصف البيانات. ثُمَّ اكتب معادلةً الدالة التي تمثل البيانات.

الخطوة 1 حدد أي نموذج يلائم البيانات.

x	-4	-3	-2	-1	0
y	32	18	8	2	0



الفروق الأولى:

الفروق الثانية:

بما أن الفروق الثانية متساوية، فإن الدالة الخطية تمثل البيانات.

الخطوة 2 اكتب معادلة الدالة التي تمثل البيانات.

المعادلة لها الصيغة التالية $y = ax^2$. جِـد قيمة a عن طريق اختيار زوج مُرتب واحد من الأزواج المرتبة. لنستخدم $(-1, 2)$.

$y = ax^2$ معادلة للدالة التربيعية

$2 = a(-1)^2$ $x = -1$ و $y = 2$

$2 = a$ المعادلة التي تمثل البيانات هي $y = 2x^2$

انتبه!
إيجاد a في المثال 3، يمكن استخدام النقطة $(0, 0)$ لإيجاد قيمة a. سيتبع عليك تقسيم كل طرف على 0. ما يعطيك قيمة غير محددة لـ a.

تمرين موجّه

3A.

x	−2	−1	0	1	2
y	11	7	3	−1	−5

3B.

x	−3	−2	−1	0	1
y	0.375	0.75	1.5	3	6

مثال 4 من الحياة اليومية كتابة معادلة لموقف من الحياة اليومية

نادي الكتاب يوضح الجدول عدد أعضاء نادي الكتاب لأربع سنوات متتالية. حدد أي نموذج هو الأفضل في تمثيل البيانات. ثُمَّ اكتب دالةً تمثل البيانات.

الاستيعاب يجب علينا إيجاد نموذج للبيانات. وبعد ذلك نكتب دالةً.

الزمن (السنوات)	0	1	2	3	4
الأعضاء	5	10	20	40	80

الخطة إيجاد نموذج باستخدام الفروق المتتالية أو النسب. وبعد ذلك استخدام الصيغة العامة للمعادلة لكتابة دالة.

الحل النسبة الثابتة هي 2. هذه قيمة القاعدة. تُمثّل الدالة الأسية بالصيغة $y = ab^x$ البيانات.

$y = ab^x$ معادلة للدالة الأسية

$5 = a(2)^0$ $b = 2$ و $b = 2$

$5 = a$ الدالة التي تمثل البيانات هي $y = 5 \cdot 2^x$

تحقق استخدمت $(0, 5)$ لكتابة الدالة. تحقق أن كل زوج مرتب آخر يحقق المعادلة.

الربط بالحياة اليومية
أظهر استطلاع أجرته الجمعية الوطنية للتعليم أن 87% من جميع المراهقين المشاركين في الاستطلاع وجدوا أن القراءة باعثة على الاسترخاء. ورأى 85% أن القراءة مفيدة. ووجد 79% أن القراءة مثيرة.

المصدر: *American Demographics*

تمرين موجّه

4. إعلانات يوضح الجدول تكلفة وضع إعلان في صحيفة. حدد النموذج الذي يصف البيانات بأفضل صورة واكتب دالة تُمثّل البيانات.

عدد الخطوط	5	6	7	8
التكلفة الإجمالية (AED)	14.50	16.60	18.70	20.80

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

مثال 1 **مثّل بيانيًا كل مجموعة من الأزواج المرتبة. حدد ما إذا كانت الأزواج المرتبة تمثل دالة خطيةً أم دالةً تربيعية أم دالةً أُسّية.**

1. $(-2, 8), (-1, 5), (0, 2), (1, -1)$

2. $(-3, 7), (-2, 3), (-1, 1), (0, 1), (1, 3)$

3. $(-3, 8), (-2, 4), (-1, 2), (0, 1), (1, 0.5)$

4. $(0, 2), (1, 2.5), (2, 3), (3, 3.5)$

مثال 2 **ابحث عن نمط في كل جدول قيم لتحديد أي نوع من النماذج هو الأفضل في وصف البيانات.**

5.

x	0	1	2	3	4
y	5	8	17	32	53

6.

x	−3	−2	−1	0
y	−6.75	−7.5	−8.25	−9

7.

x	−1	0	1	2	3
y	3	6	12	24	48

8.

x	3	4	5	6	7
y	−1.5	0	2.5	6	10.5

مثال 3 **حدد نوع النموذج الأفضل في وصف البيانات. ثُمَّ اكتب معادلةً للدالة التي تمثل البيانات.**

9.

x	−1	0	1	2	3
y	1	3	9	27	81

10.

x	−5	−4	−3	−2	−1
y	125	80	45	20	5

11.

x	−3	−2	−1	0	1
y	1	1.5	2	2.5	3

12.

x	−1	0	1	2
y	−1.25	−1	−0.75	−0.5

مثال 4

13. النباتات يوضح الجدول ارتفاع أحد النباتات لأربعة أسابيع متتالية. حدد أي نوع من الدوال يُمثّل الارتفاع بأفضل صورة. ثُمَّ اكتب دالة تمثل البيانات.

الأسبوع	0	1	2	3	4
الطول (cm)	3	3.5	4	4.5	5

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **مثّل بيانيًا كل مجموعة من الأزواج المرتبة. حدد ما إذا كانت الأزواج المرتبة تمثل دالة خطيةً أم دالةً تربيعية أم دالةً أُسّية.**

14. $(-1, 1), (0, -2), (1, -3), (2, -2), (3, 1)$

15. $(1, 2.75), (2, 2.5), (3, 2.25), (4, 2)$

16. $(-3, 0.25), (-2, 0.5), (-1, 1), (0, 2)$

17. $(-3, -11), (-2, -5), (-1, -3), (0, -5)$

18. $(-2, 6), (-1, 1), (0, -4), (1, -9)$

19. $(-1, 8), (0, 2), (1, 0.5), (2, 0.125)$

المثالان 2-3 **ابحث عن النمط في كل جدول لتحديد أي نوع من النماذج هو الأفضل في وصف البيانات. ثُمَّ اكتب معادلة للدالة التي تمثل البيانات.**

20.

x	−3	−2	−1	0
y	−8.8	−8.6	−8.4	−8.2

21.

x	−2	−1	0	1	2
y	10	2.5	0	2.5	10

22.

x	−1	0	1	2	3
y	0.75	3	12	48	192

23.

x	−2	−1	0	1	2
y	0.008	0.04	0.2	1	5

24.

x	0	1	2	3	4
y	0	4.2	16.8	37.8	67.2

25.

x	−3	−2	−1	0	1
y	14.75	9.75	4.75	−0.25	−5.25

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 4

26. المواقع الإلكترونية تتبعت إحدى الشركات عدد زوار موقعها الإلكتروني على مدى 4 أيام. حدد أي نموذج هو الأفضل في تمثيل عدد زوار الموقع فيما يتعلق بالوقت. ثُمّ اكتب دالةً تمثل البيانات.

اليوم	0	1	2	3	4
الزوار (بالآلاف)	0	0.9	3.6	8.1	14.4

27. المكالمات تعتمد تكلفة المكالمة الدولية على طول المكالمة. ويوضح الجدول التكلفة حتى 6 دقائق.

طول المكالمة (بالدقيقة)	1	2	3	4	5	6
التكلفة (AED)	0.12	0.24	0.36	0.48	0.60	0.72

a. مثّل البيانات بيانيًا وحدد أي نوع من الدوال يمثل البيانات بأفضل صورة.
b. اكتب معادلة للدالة التي تُمثّل البيانات.
c. استخدم معادلتك لتحديد تكلفة مكالمة تستغرق 10 دقائق.

28. انخفاض القيمة تنخفض قيمة سيارةٍ ما بمرور الوقت. ويوضح الجدول قيمة السيارة خلال مدة من الزمن.

العام	0	1	2	3	4
القيمة (AED)	18,500	15,910	13,682.60	11,767.04	10,119.65

a. حدد أي نوع من الدوال هو الأفضل في تمثيل البيانات.
b. اكتب معادلة للدالة التي تمثل البيانات.
c. استخدم معادلتك لتحديد الثمن الذي تستحقه السيارة بعد 7 سنوات.

29. البكتيريا يقدر العلماء أن مزرعة بكتريا يبلغ تعدادها الأولي 12 سوف تتضاعف كل ساعة.

a. أنشئ جدولاً يوضح تعداد البكتريا في الأربع ساعات الأولى.
b. أي نوع من النماذج يمثل البيانات بأفضل صورة؟
c. اكتب دالة تُمثّل البيانات.
d. كم سيصبح عدد البكتريا بعد 8 ساعات؟

30. الطباعة تتقاضى شركة طباعة الرسوم الموضحة لطباعة المنشورات الدعائية. اكتب دالةً تمثّل إجمالي تكلفة المنشورات الدعائية، وحدد كم ستكون تكلفة 30 منشورًا دعائيًا.

الطباعة السريعة

رسوم الإعداد	25 درهمًا
المنشور الدعائي	15 فلسًا

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

31. تحدٍ اكتب دالةً بها فروق ثانية ثابتة، وفروق أولى غير ثابتة، وتقاطع مع المحور الرأسي y عند $y = -5$، وتحتوي على النقطة (3, 2).

32. الفرضيات ما نوع الدالة التي سيكون لها فروق ثالثة ثابتة ولكن ليس فروق ثانية ثابتة؟ اشرح.

33. مسألة غير محددة الإجابة اكتب دالةً خطية يكون لها فرق أول ثابت بمقدار 4.

34. البرهان اكتب فقرة برهان لتوضيح أن الدوال الخطية تنمو بفروق متساوية خلال فترات متساوية، وأن الدوال الأسية تنمو بعوامل متساوية خلال فترات متساوية. (إرشاد: افترض أن $y = ax$ تمثل دالةً خطية وافترض أن $y = a^x$ تمثل دالةً أسية.)

35. الكتابة في الرياضيات كيف يمكنك تحديد ما إذا كان يمكن تمثيل مجموعةٍ من البيانات عن طريقة دالةٍ خطية أو دالةٍ تربيعية أو دالةٍ أسية ؟

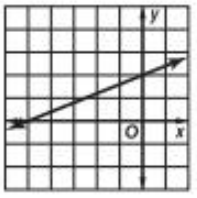
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

36. الإجابة القصيرة اكتب معادلة تمثل البيانات في الجدول.

x	0	1	2	3	4
y	3	6	12	24	48

37. ما معادلة المستقيم المرسوم؟



A $y = \frac{2}{5}x + 2$

B $y = \frac{2}{5}x - 2$

C $y = \frac{5}{2}x + 2$

D $y = \frac{5}{2}x - 2$

38. تقع النقطة $(r, -4)$ على معادلة المستقيم $2x + 3y = -8$. أوجد قيمة r.

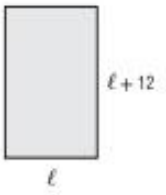
F -10

G 0

H 2

J 8

39. الهندسة تبلغ مساحة المستطيل $220\ m^2$. جد طول ℓ.



A 8 m

B 10 m

C 22 m

D 34 m

مراجعة شاملة

حُلّ كل معادلة بأخذ الجذر التربيعي لكل طرف. وقرّب إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم الأمر

40. $x^2 = 25$

41. $x^2 + 6x + 9 = 16$

42. $x^2 - 14x + 49 = 15$

ابحث عن نمط في كل جدول قيم لتحديد أي نوع من النماذج يصف البيانات بأفضل طريقة.

43.

x	0	1	2	3	4
y	4	5	6	7	8

44.

x	1	2	3	4	5
y	2	4	8	16	32

45.

x	-3	-2	-1	0	1
y	14	9	6	5	6

46.

x	3	4	5	6	7
y	3	5	7	9	11

47. العلوم الفيزيائية تُطلَق قذيفة لأعلى من مستوى الأرض. ونحصل على ارتفاعها h بالأمتار بعد t ثوانٍ عن طريق $h = 96t - 16t^2$. جد قيمة (قيم) t عندما h تساوي 96 m.

مراجعة المهارات

جد قيمة كل تعبير إذا كان $y = -1$ و $x = -3$ و $z = 4$.

48. $|x - 4|$

49. $|2y + 1|$

50. $|4 - z|$

51. $\left|\frac{1}{2}x + 2\right|$

52. $|12 - 4z|$

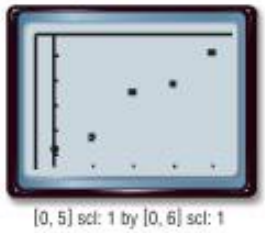
53. $|2y - 3| - 6$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

5-2 مختبر تقنية التمثيل البياني
ملاءمة المنحنيات

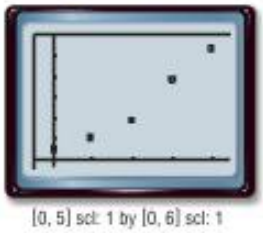
إذا كانت هناك زيادة أو نقص ثابت في قيم البيانات، فإن هناك توجهًا خطيًا. إذا كانت القيم متزايدة أو متناقصة بصورة سريعة أكثر، فقد يكون هناك اتجاه تربيعي أو أسي.

الاتجاه الخطي



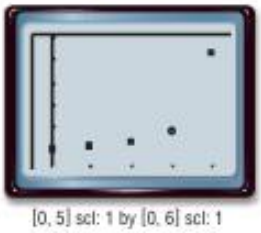
[0, 5] scl: 1 by [0, 6] scl: 1

الاتجاه التربيعي



[0, 5] scl: 1 by [0, 6] scl: 1

الاتجاه الأسي



[0, 5] scl: 1 by [0, 6] scl: 1

باستخدام حاسبة التمثيل البياني، يمكنك إيجاد معادلة الانحدار المناسبة.

النشاط

مخطط الخطوط الجوية يوضح الجدول المتوسط الشهري لعدد رحلات الطيران في كل عام من خلال مخطط الخطوط الجوية الذي أنشئ في عام 2000.

العام	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
رحلات الطيران	17	20	24	28	33	38	44	50

الخطوة 1 رسم مخطط انتشار.

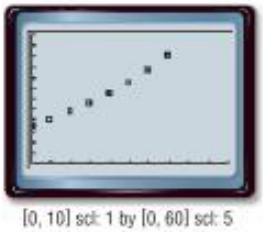
- أدخل عدد السنوات منذ سنة 2000 في **L1** وعدد رحلات الطيران في **L2**.

خطوات العملية على الحاسبة: *مراجعة إدخال قائمة في الصفحة 255.*

- استخدم **STAT PLOT** لتمثيل مخطط الانتشار بيانيًا.

خطوات العملية على الحاسبة: *مراجعة المخططات الإحصائية في صفحة 256.*

استخدم ZOOM 9 للتمثيل البياني.



[0, 10] scl: 1 by [0, 60] scl: 5

من مخطط الانتشار يمكننا رؤية أن البيانات قد يكون لها إما اتجاه تربيعي أو اتجاه أسي.

الخطوة 2 جد معادلة الانحدار.

سوف نتحقق من كلا الاتجاهين من خلال فحص معادلتي انحدارهما.

- اختر **DiagnosticOn** من زر **CATALOG**.
- حدد **QuadReg** في قائمة **STAT**.

خطوات العملية على الحاسبة: STAT ▶ 5 ENTER ENTER

المعادلة بالصيغة $y = ax^2 + bx + c$

المعادلة تقريبًا هي $y = 0.25x^2 + 3x + 17$.

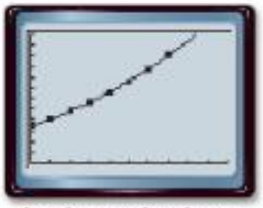
R^2 هو **معامل التحديد**. كلما كان R^2 أقرب إلى 1، كان التمثيل أفضل. من أجل الحصول على المعادلة الأسية اختر **ExpReg** في قائمة **STAT**. من أجل اختبار التمثيل التربيعي أو الأسي، اجعل كلاً منهما ملائمًا واستخدم التمثيل الذي يكون مع قيمة R^2 أقرب إلى 1.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © محفوظ الطبع والتأليف

الخطوة 3 مثّل معادلة الانحدار التربيعية بيانيًا.

• انسخ المعادلة إلى قائمة Y= ومثّل بيانيًا.

خطوات العملية على الحاسبة: Y= VARS 5 ▶ ▶ 1 ZOOM 9

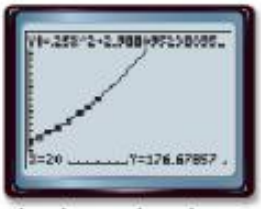


[0, 10] scl: 1 by [0, 60] scl: 5

الخطوة 4 توقع استخدام المعادلة.

إذا استمر هذا الاتجاه، فيمكننا التمثيل البياني الخاص بمعادلتنا لتوقع العدد الشهري للرحلات الجوية التي ستقوم بها شركة الطيران في سنة محددة. كي نتحقق من سنة 2020 أولاً، اضبط النافذة.

خطوات عملية على الحاسبة: 2nd CALC 1 في $x =$ أدخل 20 ENTER.



[0, 25] scl: 1 by [0, 200] scl: 5

سيكون هناك حوالي 177 رحلة جوية شهريًا إذا استمر هذا الاتجاه.

التمارين

أنشئ مخططًا لكل مجموعة من نقاط البيانات. حدد ما إذا كان ينبغي استخدام معادلة انحدارخطية، أو تربيعية أو *أسية*.اذكر معامل التحديد.

1.

x	y
1	30
2	40
3	50
4	55
5	50
6	40

2.

x	y
0.0	12.1
0.1	9.6
0.2	6.3
0.3	5.5
0.4	4.8
0.5	1.9

3.

x	y
0	1.1
2	3.3
4	2.9
6	5.6
8	11.9
10	19.8

4.

x	y
1	1.67
5	2.59
9	4.37
13	6.12
17	5.48
21	3.12

5. الخَبز أعدت أماني كعكة وتنتظرها لتبرد حتى تزينها. يوضح الجدول درجة حرارة الكعكة كل 5 دقائق بعد أن أخرجتها أماني من الفرن.

درجة الحرارة (°F)	الزمن (بالدقيقة)
350	0
244	5
178	10
137	15
112	20
96	25
89	30

a. ارسم مخطط انتشار للبيانات.

b. أي معادلة انحدار لها قيمة R^2 أقرب إلى 1؟ هل هذه هي أفضل معادلة تلائم سياق المسألة؟ اشرح استنتاجك.

c. جد معادلة الانحدار المناسبة. واذكر عامل التحديد. ما المجال والمدى؟

d. سوف تزين أماني الكعكة عندما تصل درجة حرارة الغرفة (70°F).ستخدم معادلة الانحدار لتوقع متى يمكنها تزيين كعكتها.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

5-3 النمو والاضمحلال (التضاؤل)

السابق

- لقد حلّلت الدوال الأسيّة.

الحالي

1. حل المسائل التي تتضمن نموًا أسيًا.
2. حل المسائل التي تتضمن اضمحلالًا أسيًا.

لماذا؟

- ازداد عدد المدونات الإلكترونية أو المدونات بمعدل شهري يبلغ 13.7% تقريبًا على مدار 21 شهرًا. يمكن تمثيل متوسط عدد المدونات في الشهر بـ $y = 1.1(1 + 0.137)^t$ أو $y = 1.1(1.137)^t$. حيث تمثل y إجمالي عدد المدونات بالملايين. و t هي عدد الأشهر منذ نوفمبر 2003.

المفردات الجديدة

المرابحة المركبة compound interest

ممارسات في الرياضيات

استخدام نماذج الرياضيات.

1 النمو الأسيّ

تكون معادلة عدد المدونات بالصيغة $y = a(1 + r)^t$. هذه هي المعادلة العامة للنمو الأسيّ.

المفهوم الأساسي معادلة النمو الأسيّ

$y = a(1 + r)^t$

- a هي المبلغ المبدئي.
- t هي الزمن.
- y هي المبلغ النهائي.
- r هي معدل التغير الذي يتم التعبير عنه ككسر عشري. $r > 0$.

مثال 1 من الحياة اليومية النمو الأسيّ

المسابقة تبدأ جوائز مسابقة إحدى المحطات الإذاعية ببطاقة هدايا بقيمة AED 100. في أحد الأيام، يتم الإعلان عن اسم. أمام الشخص 15 دقيقة ليتصل وإلا تتأجل الجائزة لليوم التالي وتزيد بنسبة 2.5%.

a. اكتب معادلة لتمثيل مبلغ بطاقة الهدايا بالدرهم بعد t من الأيام بدون فائزين.

$y = a(1 + r)^t$	معادلة النمو الأسيّ
$y = 100(1 + 0.025)^t$	$a = 100 = 2.5\%$ أو 0.025
$y = 100(1.025)^t$	بسّط.

في المعادلة $y = 100(1.025)^t$. تمثل y مبلغ بطاقة الهدايا. و t هي عدد الأيام منذ بدء المسابقة.

b. كم ستبلغ قيمة بطاقة الهدايا إذا لم يفز أحد بعد 10 أيام؟

$y = 100(1.025)^t$	معادلة مبلغ بطاقة الهدايا
$= 100(1.025)^{10}$	$t = 10$
≈ 128.01	استخدم حاسبة.

خلال 10 أيام، ستبلغ قيمة بطاقة الهدايا AED 128.01.

تمرين موجّه

1. **التعليم** ارتفعت تكاليف التعليم الجامعي بنسبة 5% كل عام منذ عام 2000. إذا كانت تكلفة التعليم في عام 2000 قد بلغت AED 10,850. فاكتب معادلة لمبلغ تكلفة التعليم بعد t سنوات من عام 2000. توقع تكلفة التعليم في هذه الكلية في عام 2015.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المرابحة المركبة هي المرابحة المتحصلة أو المدفوعة على كل من الاستثمار الأولي والمرابحة المتحصلة سابقًا. إنها أحد تطبيقات النمو الأسيّ.

المفهوم الأساسي معادلة للمرابحة المركبة

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

- A هي المبلغ الحالي.
- P هي المبلغ الأساسي أو الأولي.
- r هي معدل المرابحة السنوية ويتم التعبير عنه ككسر عشري. $r > 0$.
- n هي عدد مرات تركيب المرابحة في كل عام هي الزمن بالسنوات.

مثال 2 من الحياة اليومية المرابحة المركبة

المالية **استثمر والدا هدى AED 14,000 بنسبة 6% في السنة مركبة شهريًا. ما المبلغ الذي سيكون في الحساب بعد 10 أعوام؟**

$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ معادلة المرابحة المركبة

$= 14{,}000\left(1 + \frac{0.06}{12}\right)^{12(10)}$ $P = 14{,}000$ $r = 6\%$ أو 0.06 $n = 12$ $t = 10$

$= 14{,}000(1.005)^{120}$ بسّط.

$\approx 25{,}471.55$ استخدم حاسبة.

سيكون هناك حوالي AED 25,471.55 في 10 سنوات.

تمرين موجّه

2. المالية حدّد مبلغ أحد الاستثمارات إذا تم استثمار AED 300 بمعدل مرابحة مركبة شهريًا يساوي 3.5% شهريًا لمدّة 22 عامًا.

مهنة من الحياة اليومية

المستشار المالي يقدم المستشارون الماليون المساعدة للناس في تخطيط مستقبلهم المالي. يتبع المستشار المالي الجيد مهارات حسابية ومهارات حل المسائل والتواصل. يفضل بشدة بالحصول على درجة البكالوريوس لكنها ليست مفروضة.

2 الاضمحلال (التضاؤل) الأسيّ

في الاضمحلال (التضاؤل) الأسيّ، يتناقص المبلغ الأصلي بنسبة مئوية واحدة خلال مدةٍ زمنيةٍ محدّدة. يمكن استخدام أحد أشكال معادلة النمو كمعادلة عامة للاضمحلال الأسيّ.

المفهوم الأساسي معادلة الاضمحلال (التضاؤل) الأسيّ

$$y = a(1 - r)^t$$

- a هي المبلغ المبدئي.
- t هي الزمن.
- r هي معدل الاضمحلال (التضاؤل) ويتم التعبير عنه ككسر عشري. $0 < r < 1$.
- y هي المبلغ النهائي.

نصيحة دراسية

النمو والاضمحلال (التضاؤل) بما أن r تُجمع مع 1. ستكون القيمة داخل القوسين أكبر من 1 في دوال النمو الأسيّ. في دوال الاضمحلال (التضاؤل) الأسيّ، ستقل هذه القيمة عن 1 بما أن r مطروحة من 1.

مثال 3 من الحياة اليومية الاضمحلال (التضاؤل) الأسيّ

السباحة **عوامة طفل لحمام سباحة منفوخة تمامًا تفقد 6.6% من الهواء بداخلها كل يوم. كانت العوامة تحتوي في الأصل على 74000 cm^3 من الهواء.**

a. اكتب معادلة تمثل فقدان الهواء.

$y = a(1 - r)^t$ معادلة الاضمحلال (التضاؤل) الأسيّ

$= 74000(1 - 0.066)^t$ $a = 74000 = 6.6\%$ أو 0.066

$= 74000(0.934)^t$ بسّط.

$y = 74000(0.934)^t$. حيث y هي الهواء في العوامة بالبوصة المكعبة بعد t أيام.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

ضع تقديرًا لكمية الهواء في العوامة بعد 7 أيام.

$y = 74000(0.934)^t$ معادلة فقدان الهواء

$= 74000(0.934)^7$ $t = 7$

≈ 45880 استخدم حاسبة.

سيبلغ مقدار الهواء في العوامة بعد 7 أيام $45880\ cm^3$ تقريبًا.

تمرين موجّه

3. **تعداد السكان** ظل تعداد سكان مقاطعة كامبل في ولاية كنتاكي يتناقص بمعدل متوسط يبلغ 0.3% تقريبًا في السنة. في عام 2000، بلغ سكانها 88,647. اكتب معادلة تمثل تعداد السكان منذ عام 2000. إذا استمر الاتجاه، فتوقع تعداد السكان في عام 2010.

التحقق من فهمك

مثال 1

1. **المرتب** حصلت السيدة هداية على وظيفة كمعلمة براتب أولي يبلغ AED 125000. وفقًا لعقدها، سوف تحصل على زيادة تبلغ 1.5% من مرتبها كل عام. كم سيبلغ مرتب السيدة هداية بعد 7 سنوات؟

مثال 2

2. **المال** استثمر يوسف AED 400 في حساب بنسبة مرابحة تبلغ 5.5% مركبة شهريًا. كم ستبلغ قيمة استثمار يوسف خلال 8 سنوات؟

مثال 3

3. **الالتحاق** في عام 2000، انضم 2200 طالب لمدرسة بولاريس الثانوية. كان الالتحاق ينخفض بنسبة 2% سنويًا.
   a. اكتب معادلة للالتحاق بمدرسة بولاريس الثانوية بعد t سنوات من عام 2000.
   b. إذا استمر هذا الاتجاه، فكم عدد الطلاب الذين سيلتحقون في عام 2015؟

التمرين وحل المسائل

مثال 1

4. **العضويات** باعت صالة الألعاب الرياضية 550 عضوية في عام 2001. ومنذ ذلك الوقت، ارتفع عدد العضويات التي تم بيعها بنسبة 3% سنويًا.
   a. اكتب معادلة لعدد العضويات التي تم بيعها في صالة الألعاب الرياضية بعد t من السنوات من عام 2001.
   b. إذا استمر هذا الاتجاه، فتوقع عدد العضويات التي ستبيعها الصالة في عام 2020.

5. **الحواسيب** ارتفع عدد الأشخاص الذين يمتلكون حواسيب بنسبة 23.2% سنويًا منذ عام 1990. إذا كان نصف مليون شخص يمتلكون حاسوبًا في 1990، فتوقع عدد الأشخاص الذين سيمتلكون حاسوبًا في عام 2015.

6. **العملات** اشترى ماجد قطعة نقد معدنية نادرة من تاجر مقابل AED 300. ارتفعت قيمة العملة بنسبة 5% كل عام. حدد قيمة قطعة النقد المعدنية بعد 5 سنوات.

مثال 2

7. **الاستثمارات** استثمر محمود AED 6600 بنسبة مرابحة تبلغ 4.5% مركبة شهريًا. حدد قيمة استثماره بعد 4 سنوات.

8. **المرابحة المركبة** استثمرت نسرين AED 1200 بمعدل مرابحة يبلغ 5.75% مركبة كل ثلاثة أشهر. حدد قيمة استثمارها بعد 7 سنوات. حوالي AED 1789.54

9. **الدقة** تدخر نجلاء المال لرحلة إلى جزر البهاما تتكلف AED 1087.76. وضعت AED 550 في حساب ادخار يدفع مرابحة مركبة تبلغ 7.25% كل ثلاثة أشهر. هل سيكون لديها مال كافٍ في الحساب بعد 4 سنوات؟ اشرح.

مثال 3

10. **الاستثمارات** كان استثمار علي بمبلغ AED 4500 يخسر قيمته بمعدل 2.5% كل عام. كم ستبلغ قيمة استثماره خلال 5 سنوات؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

11. **تعداد السكان** في السنوات من 2010 إلى 2015، من المتوقع أن ينخفض تعداد سكان واشنطن العاصمة بمعدل 0.9% سنويًا تقريبًا. في عام 2010، كان تعداد السكان 530,000 تقريبًا. ما تعداد السكان المتوقع في واشنطن العاصمة في عام 2015؟

12. **السيارات** اشترى فارس سيارة مقابل AED 18,995. تنخفض قيمة السيارة بمعدل 18% سنويًا. بعد 6 سنوات، عرض فالح أن يشتري السيارة مقابل AED 4500. هل ينبغي أن يبيع فارس السيارة؟ اشرح.

13. **الإسكان** ارتفع سعر المنزل المتوسط في الولايات المتحدة بنسبة 1.4% في المتوسط في كل عام بين 2005 و2007. افترض أن هذا المعدل سيستمر.

المصدر: مجلة الشؤون العقارية

a. اكتب معادلة لسعر المنزل المتوسط بعد t من السنوات عام 2007.

b. تنبأ بسعر المنزل المتوسط في عام 2018.

14. **العناصر** عمر النصف للعنصر النشط إشعاعيًا هو الزمن الذي يستغرقه لكي يتحلل نصف كمية العنصر. عمر النصف للبلوتونيوم 241 هو 14.4 عامًا. يمكن تمثيل عدد الجرامات A المتبقية من البلوتونيوم 241 بعد t من السنوات بـ $A = p(0.5)^{\frac{t}{14.4}}$، حيث p هي الكمية الأصلية من العنصر.

a. كم يبقى من عينة وزنها 0.2 gm بعد 72 سنة؟

b. كم يبقى من عينة وزنها 5.4 gm بعد 1095 يومًا؟

15. **دمج الدوال** يسع حمام سباحة 77,600 L من الماء بحد أقصى. يتبخر الماء بمعدل 0.5% في الساعة. يحتوي حمام السباحة حاليًا على 71,900 L من الماء.

a. اكتب دالة أسية w(t) للتعبير عن مقدار الماء المتبقي في حمام السباحة بعد الزمن t حيث t هي عدد الساعات بعد أن وصل حمام السباحة إلى 71,900 L.

b. في نفس هذا الزمن، يتم تشغيل خرطوم لإعادة ملء حمام السباحة بمعدل 1,100 L/h. اكتب دالة p(t) حيث t هي زمن تشغيل الخرطوم بالساعات، للتعبير عن مقدار الماء الذي يجري ضخه في حمام السباحة.

c. جد قيمة $C(t) = p(t) + w(t)$. ماذا تمثل هذه الدالة الجديدة؟

d. **استخدم التمثيل البياني لـ** C(t) لتحديد المدة المطلوبة لتشغيل الخرطوم لملء حمام السباحة حتى سعته القصوى.

مسائل مهارات التفكير العليا

16. **التبرير** حدد معدل النمو (كنسبة مئوية) لعدد سكان يزيد أربعة أضعاف كل عام. اشرح.

17. **الدقة** استثمر منصور AED 1200 في حساب بنسبة مرابحة تبلغ 8% مركبة شهريًا. استخدم حاسبة لتحديد المدة التقريبية التي سيحتاجها استثمار منصور للوصول إلى AED 2500

18. **التبرير** يتضاعف مقدار الماء في حاوية كل دقيقة. بعد 8 دقائق امتلأت الحاوية. بعد كم دقيقة امتلأت الحاوية إلى نصفها؟ اشرح.

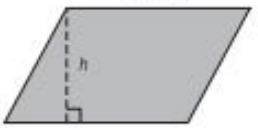
19. **الكتابة في الرياضيات** ما الذي ينبغي أن تراعيه عند استخدام النماذج الأسية لاتخاذ القرارات؟

20. **الكتابة في الرياضيات** قارن وقابل بين قانون النمو الأسي وقانون الاضمحلال (التضاؤل) الأسي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

21. الهندسة تبلغ مساحة متوازي الأضلاع $35\ cm^2$. جـد الارتفاع **h** لمتوازي الأضلاع.



A 3.5 cm
B 4 cm
C 5 cm
D 7 cm

22. أي الآتي أكبر من $64^{\frac{1}{3}}$؟

F $2^{2^{\frac{1}{3}}}$
G $64^{\frac{1}{6}}$
H $64^{\frac{1}{2}}$
J 64^{-3}

23. اشترى عيسى سيارة مقابل AED 22,900. تنخفض قيمة السيارة بمعدل 16% سنويًا. أي من المعادلات التالية يمثل قيمة سيارة عيسى بعد 5 سنوات؟

A $A = 22{,}900(1.16)^5$
B $A = 22{,}900(0.16)^5$
C $A = 16(22{,}900)^5$
D $A = 22{,}900(0.84)^5$

24. إجابة شبكة تبلغ مساحة أحد الأسطح 4 m في 6 m. إذا كان عامل الطلاء يفرض AED 9.75 على المتر المربع شاملاً الضريبة. فكم ستبلغ تكلفة طلاء السطح بالدرهم؟

مراجعة شاملة

مثّل كل دالة بيانيًا. جـد المقطع من المحور الرأسيّ *y* واذكر المجال والمدى.

25. $y = 3^x$ **26.** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **27.** $y = 6^x$

جـد قيمة كل ناتج ضرب. عبّر عن النتائج بكل من الترميز العلمي والصيغة القياسية.

28. $(4.2 \times 10^3)(3.1 \times 10^{10})$ **29.** $(6.02 \times 10^{23})(5 \times 10^{14-})$ **30.** $(7 \times 10^5)^2$

31. $(1.1 \times 10^{2(2-}$ **32.** $(9.1 \times 10^{7-}10 \times 4.2)^{(2-)}$ **33.** $(3.14 \times 10^2)(6.1 \times 10^{3-})$

34. التخطيط لحدث لا تفرض إحدى القاعات رسم إيجار طالما يتم إنفاق AED 4000 على الأقل على الطعام. في حفلة التخرج تفرض القاعة AED 28.95 على الشخص للطعام.
كم عدد الأشخاص الذين يجب أن يحضروا حفلة التخرج لتجنب دفع رسم إيجار القاعة؟

حدد ما إذا كان التمثيلان البيانيان لكل زوج من المعادلات *متوازيين* أو *متعامدين* أو *ليسا أيًا منهما*.

35. $y = -2x + 11$
$y + 2x = 23$

36. $3y = 2x + 14$
$-3x - 2y = 2$

37. $y = -5x$
$y = 5x - 18$

38. الأعمار يوضح الجدول الأعمار المكافئة للخيول والبشر. اكتب معادلة تربط العمر البشري بعمر الخيل وتجد عمر الخيل المكافئ لإنسان يبلغ عمره 16 عامًا.

عمر الخيل (x)	0	1	2	3	4	5
عمر الإنسان (y)	0	3	6	9	12	15

جـد السعر الإجمالي لكل عنصر.

39. البطلة AED 14.00؛ الضريبة: 5.5%

40. الصندل AED 29.99؛ الضريبة: 5.75% AED 31.71

41. حقيبة الظهر AED 35.00؛ الضريبة: 7%

مراجعة المهارات

مثّل كل مجموعة من الأزواج المرتبة بيانيًا.

42. (3, 0), (0, 1), (−4, −6) **43.** (0, −2), (−1, −6), (3, 4) **44.** (2, 2), (−2, −3), (−3, −6)

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © حقوق الطبع والتأليف

تحويل التعابير الأسيّة

يمكنك استخدام خواص الأسس النسبية في تحويل الدوال الأسيّة إلى صيغ أخرى لحل مسائل من الحياة اليومية.

النشاط كتابة التعابير الأسيّة المكافئة

تحاول نبيلة أن تختار بين خطتي حساب ادخار. تقدم الخطة A نسبة مرابحة شهرية مركبة تبلغ 0.25%، بينما تُقدم الخطة B مرابحة مركبة سنوية تبلغ 2.5%. أي الخطتين أفضل؟ اشرح.

للمقارنة بين الخطتين، يجب أن نقارن بين النسبتين بالتكرار المركب نفسه. من طرق عمل هذا المقارنة بين نسبتي المرابحة الشهريتين التقريبيتين في الخطتين. وتُسميان أيضًا نسبة *المرابحة* الشهرية الفعلية. بينما تستطيع استخدام قانون المرابحة المركبة لإيجاد هذه النسبة، يمكنك أيضًا استخدام خواص الأسس.

اكتب دالة لتمثيل المبلغ A الذي ستكسبه نبيلة بعد t من السنوات من الخطة B. للتيسير، افترض أن المبلغ الأولي لاستثمار نبيلة هو 1 AED.

$$y = a(1 + r)^t \qquad \text{معادلة النمو الأسي}$$

$$A(t) = 1(1 + 0.025)^t \qquad y = A(t),\ a = 1,\ r = 2.5\% \text{ أو } 0.025$$

$$= 1.025^t \qquad \text{بسّط.}$$

اكتب الآن دالة تعادل $A(t)$ تمثل 12 تركيبًا في السنة، بقوة تبلغ $12t$، بدلاً من 1 في السنة بقوة أسيّة تبلغ $1t$.

$$A(t) = 1.025^{1t} \qquad \text{الدالة الأصلية}$$

$$= 1.025^{\left(\frac{1}{12} \times 12\right)t} \qquad 1 = \frac{1}{12} \times 12$$

$$= \left(1.025^{\frac{1}{12}}\right)^{12t} \qquad \text{رفع القوى}$$

$$\approx 1.0021^{12t} \qquad (1.025)^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{1.025} \text{ أو حوالي } 1.0021$$

من هذه الدالة المكافئة، يمكننا تحديد أن النسبة الشهرية الفعلية في الخطة B تبلغ 0.0021 تقريبًا أو حوالي 0.21% في الشهر. تقل هذه النسبة عن نسبة المرابحة الشهرية 0.25% في الشهر التي تقدمها الخطة A. إذًا الخطة A هي الخطة الأفضل.

النموذج والتحليل

1. استخدم قانون المرابحة المركبة $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ لتحديد نسبة المرابحة الشهرية الفعلية للخطة B. كيف تقارن هذه النسبة بالنسبة المحسوبة باستخدام الأسلوب الوارد في النشاط بالأعلى؟
2. اكتب دالة لتمثيل المبلغ A الذي ستكسبه نبيلة بعد t من الأشهر في الخطة A. ثم استخدم خواص الأسس لكتابة دالة تعادل $A(t)$ لتمثل المبلغ المكتسب بعد t من السنوات.
3. من التعبير الذي كتبته في التمرين 2، حدد نسبة المرابحة السنوية الفعلية حسب الخطة A. استخدم هذه النسبة لشرح السبب في أن الخطة A هي الخطة الأفضل.
4. افترض أن الخطة A عرضت نسبة مرابحة مركبة كل ثلاثة أشهر تبلغ 1.5%. استخدم خواص الأسس لشرح أيهما الخطة الأفضل.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

5-4 المتتاليات الهندسية في صورة دوال أسيّة

السابق:
- ربطت المتتاليات الحسابية بالدوال الخطية.

الحالي:
1. تحديد المتتاليات الهندسية وإنشاؤها.
2. ربط المتتاليات الهندسية بالدوال الأسيّة.

لماذا؟
- ترسل رسالة إلكترونية تسلسلية إلى صديق لبعيد إرسالها إلى خمسة أشخاص آخرين. يعيد كل من هؤلاء الأشخاص الخمسة الرسالة الإلكترونية إلى خمسة أشخاص آخرين. يشكّل عدد الرسائل الإلكترونية الجديدة متتالية هندسية.

المفردات الجديدة

متتالية هندسية
geometric sequence

نسبة مشتركة
common ratio

ممارسات في الرياضيات

حاول إيجاد البنية واستخدامها.

1 التعرف على المتتاليات الهندسية

ينشئ الشخص الأول 5 رسائل إلكترونية. إذا أرسل كل واحد من هؤلاء الأشخاص رسالة إلكترونية إلى 5 أشخاص آخرين، يتم إنشاء 25 رسالة إلكترونية. إذا أرسل كل واحد من الـ 25 شخصًا 5 رسائل إلكترونية، يتم إنشاء 125 رسالة إلكترونية. تسلسل الرسائل الإلكترونية الناشئة، 1, 5, 25, 125, ... يُعد مثالاً على **متتالية هندسية**.

في المتتالية الهندسية، الحد الأول ليس صفرًا وكل حد بعد الأول يتحدد بضرب الحد السابق في قيمة ثابتة غير الصفر r تُسمى **النسبة المشتركة**. يمكن إيجاد النسبة المشتركة عبر قسمة أي حدٍ على الحدّ السابق له.

مثال 1 تحديد المتتاليات الهندسية

حدد ما إذا كانت كل متتالية مما يلي *حسابية*، أم *هندسية*، أم *ليست أيًا منهما*. اشرح.

a. 256, 128, 64, 32, ...

جد نسب الحدود المتتابعة.

$$256 \xleftarrow{\frac{128}{256} = \frac{1}{2}} 128 \xleftarrow{\frac{64}{128} = \frac{1}{2}} 64 \xleftarrow{\frac{32}{64} = \frac{1}{2}} 32$$

بما أن النسب ثابتة، فالمتتالية هندسية. النسبة المشتركة هي $\frac{1}{2}$.

b. 4, 9, 12, 18, ...

جد نسب الحدود المتتابعة.

$$4 \xleftarrow{\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}} 9 \xleftarrow{\frac{12}{9} = 1\frac{1}{3}} 12 \xleftarrow{\frac{18}{12} = 1\frac{1}{2}} 18$$

النسب ليست ثابتة، إذًا فالمتتالية ليست هندسية.

جد الفروق في الحدود المتتابعة.

$$4 \xleftarrow{9 - 4 = 5} 9 \xleftarrow{12 - 9 = 3} 12 \xleftarrow{18 - 12 = 6} 18$$

لا يوجد فرق مشترك، إذًا فالمتتالية ليست حسابية. ولهذا، فالمتتالية ليست هندسية أو حسابية.

تمرين موجّه

1A. 1, 3, 9, 27, ...

1B. −20, −15, −10, −5, ...

1C. 2, 8, 14, 22, ...

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

بمجرد معرفة النسبة المشتركة، يمكن توليد المزيد من الحدود في متتالية. يمكن إعادة كتابة القانون بالصيغة $a_n = a_1 r^{n-1}$. حيث n عدد الحدود و r هي النسبة المشتركة.

مثال 2 إيجاد حدود المتتاليات الهندسية

جـد الحدود الثلاثة التالية في كل متتالية هندسية.

a. 1, −4, 16, −64, ...

الخطوة 1 جـد النسبة المشتركة.

1 ← −4 ← 16 ← −64

$\frac{-4}{1} = -4$ $\quad \frac{16}{-4} = -4$ $\quad \frac{-64}{16} = -4$

الخطوة 2 اضرب كل حد في النسبة المشتركة لإيجاد الحدود الثلاثة التالية.

−64 ← 256 ← −1024 ← 4096

×(−4) ×(−4) ×(−4)

الحدود الثلاثة التالية هي 256 و 1024− و 4096.

b. 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$ ...

الخطوة 1 جـد النسبة المشتركة.

9 ← 3 ← 1 ← $\frac{1}{3}$

$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ $\quad \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ $\quad \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$

قيمة r هي $\frac{1}{3}$.

الخطوة 2 اضرب كل حد في النسبة المشتركة لإيجاد الحدود الثلاثة التالية.

$\frac{1}{3}$ ← $\frac{1}{9}$ ← $\frac{1}{27}$ ← $\frac{1}{81}$

$\times\frac{1}{3}$ $\quad \times\frac{1}{3}$ $\quad \times\frac{1}{3}$

الحدود الثلاثة التالية هي $\frac{1}{9}$ و $\frac{1}{27}$ و $\frac{1}{81}$.

تمرين موجّه

2A. −3, 15, −75, 375, ...

2B. 24, 36, 54, 81, ...

نصيحة دراسية

البناء إذا كانت حدود متتالية هندسية تتبدل من حدود موجبة إلى سالبة أو بالعكس، فالنسبة المشتركة سالبة.

الربط بتاريخ الرياضيات

توماس روبرت مالتوس (1766–1834) درس مالتوس أعداد السكان وكانت له آراء متشائمة في مستقبل سكان العالم. ذكر في أبحاثه أن "السكان يتزايدون بنسبة هندسية، بينما تتزايد سبل المعيشة بنسبة حسابية."

2 المتتاليات والدول الهندسية

سيكون من المرهق التوصل إلى الحد n في متتالية هندسية إذا استخدمنا الطريقة المذكورة أعلاه. يوضح الجدول أدناه قاعدة لإيجاد الحد رقم n في متتالية هندسية.

الرتبة n	1	2	3	4	...	n
الحد a_n	a_1	$a_1 r$	$a_1 r^2$	$a_1 r^3$	...	$a_1 r^{n-1}$

لاحظ أن النسبة المشتركة بين الحدود هي r. يوضح الجدول أنه للوصول إلى الحد n، فإنك تضرب الحد الأول في النسبة المشتركة r مرفوعة إلى القوة $n - 1$. يمكن تعريف المتتالية الهندسية بدالة أسيّة تمثل فيها n المتغير المستقل، و a_n هي المتغير التابع و r هي الأساس. المجال هو أعداد الحدود.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المفهوم الأساسي الحد النوني a_n لمتتالية هندسية

يتحدد a_n الحد النوني n لمتتالية هندسية حيث الحد الأول a_1 والنسبة المشتركة r بالقانون التالي. حيث n و a_1 هي أي عدد صحيح موجب و $r \neq 0$.

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

مثال 3 إيجاد النوني a_n لمتتالية هندسية

a. اكتب معادلة للحد n للمتتالية ... ,48 ,−24 ,12 ,−6.

الحد الأول في المتتالية هو -6. إذًا $a_1 = -6$. جد الآن النسبة المشتركة.

$-6 \quad 12 \quad -24 \quad 48$

النسبة المشتركة هي -2

$\frac{12}{-6} = -2 \qquad \frac{-24}{12} = -2 \qquad \frac{48}{-24} = -2$

$a_n = a_1 r^{n-1}$	قانون الحد رقم n
$a_n = -6(-2)^{n-1}$	$a_1 = -6$ و $r = 2$

b. جد الحد التاسع في هذه المتتالية.

$a_n = a_1 r^{n-1}$	قانون الحد رقم n
$a_9 = -6(-2)^{9-1}$	للحد رقم $n = 9$.
$= -6(-2)^8$	بسّط.
$= -6(256)$	$(-2)^8 = 256$
$= -1536$	

تمرين موجّه

3. اكتب معادلة للحد n في المتتالية الهندسية ... ,12 ,24 ,48 ,96 . ثم جد الحد العاشر في المتتالية.

انتبه!

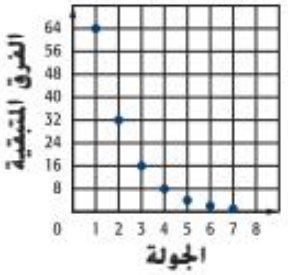
النسبة المشتركة السالبة

إذا كانت النسبة المشتركة سالبة. كما في المثال 3. فتأكد من إدراج النسبة المشتركة بين قوسين. $-2^8 \neq (-2)^8$

مثال 4 من الحياة اليومية تمثيل متتالية هندسية بيانيًا

كرة السلة تبدأ بطولة الاتحاد الوطني للرياضة الجامعية لكرة السلة للنساء بـ 64 فريقًا. في كل جولة، يتبقى نصف الفرق في المنافسة إلى أن يتبقى فريق واحد فقط. ارسم تمثيلاً بيانيًا لتمثيل عدد الفرق المتبقية في كل جولة.

بالمقارنة بالجولات السابقة. يبقى نصف الفرق. إذًا $r = \frac{1}{2}$. ولهذا. المتتالية الهندسية التي تمثل هذا الموقف هي 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1. إذًا في الجولة الثانية. يتنافس 32 فريقًا. وفي الجولة الثالثة يتنافس 16 فريقًا وهكذا. استخدم هذه المعلومات لرسم تمثيل بياني.



تمرين موجّه

4. التنس سقطت كرة تنس من ارتفاع 12 m. ترتد الكرة في كل مرة حتى 80% من الارتفاع الذي سقطت منه. ارسم تمثيلاً بيانيًا لتمثيل ارتفاع الكرة بعد كل ارتداد.

الربط بالحياة اليومية

جرت أول مسابقة لاتحاد الرياضات الجامعية الوطني لكرة السلة للنساء في عام 1982. فازت جامعة تينيسي بأكثر الألقاب الوطنية بتحقيقها 8 ألقاب حتى عام 2010.

المصدر: NCAA الرياضة

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

مثال 1 **حدد ما إذا كانت كل متتالية *حسابية*، أم *هندسية*، أم *ليست أيًا منهما*. اشرح.**

1. 200, 40, 8, ...
2. 2, 4, 16, ...
3. −6, −3, 0, 3, ...
4. 1, −1, 1, −1, ...

مثال 2 **جـد الحدود الثلاثة التالية في كل متتالية هندسية.**

5. 10, 20, 40, 80, ...
6. 100, 50, 25, ...
7. $4, -1, \frac{1}{4}, \ldots$
8. −7, 21, −63, ...

مثال 3 **اكتب صيغة للحد النوني n في كل متتالية هندسية وجـد الحد المشار إليه.**

9. الحد الخامس في ... ,−6, −24, −96
10. الحد السابع في ... ,−1, 5, −25
11. الحد العاشر في ... ,72, 48, 32
12. الحد التاسع في ... ,112, 84, 63

مثال 4 13. **التجربة** في تجربة في حصة لمادة الفيزياء، أسقطت لميس كرة من ارتفاع 16 m. يصل كل ارتداد إلى 70% من ارتفاع الارتداد السابق. ارسم تمثيلاً بيانيًا لتمثيل ارتفاع الكرة بعد كل ارتداد.

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **حدد ما إذا كانت كل متتالية *حسابية*، أم *هندسية*، أم *ليست أيًا منهما*. اشرح.**

14. 4, 1, 2, ...
15. 10, 20, 30, 40, ...
16. 4, 20, 100, ...
17. 212, 106, 53, ...
18. −10, −8, −6, −4, ...
19. 5, −10, 20, 40, ...

مثال 2 **جـد الحدود الثلاثة التالية في كل متتالية هندسية.**

20. 2, −10, 50, ...
21. 36, 12, 4, ...
22. 4, 12, 36, ...
23. 400, 100, 25, ...
24. −6, −42, −294, ...
25. 1024, −128, 16, ...

مثال 3 26. الحد الأول في متسلسلة هندسية هو 1. والنسبة المشتركة هي 9. ما الحد الثامن في المتتالية؟

27. الحد الأول في متسلسلة هندسية هو 2. والنسبة المشتركة هي 4. ما الحد الرابع عشر في المتتالية؟

28. ما الحد الخامس عشر في المتتالية الهندسية ... ,−81, 27, −9؟

29. ما الحد العاشر في المتتالية الهندسية ... ,6, −24, 96؟

مثال 4 30. **البندول** تظهر حركة الأرجحة الأولى لبندول. في كل حركة أرجحة تالية، يبلغ طول القوس 60% من طول حركة الأرجحة السابقة. ارسم تمثيلاً بيانيًا يمثل طول القوس بعد كل حركة أرجحة.

31. جـد الحد الثامن في متتالية هندسية بحيث تكون $a_3 = 81$ و $r = 3$.

32. **التبرير** في موقع خرائط عبر الإنترنت، يلاحظ السيد عدنان أنه عندما ينقر فوق نقطة على الخريطة، تقوم الخريطة بتكبير تلك النقطة. يزيد التكبير بنسبة 20% في كل مرة.

a. اكتب قانونًا للحد رقم n في المتتالية الهندسية يمثل التكبير في كل مستوى تكبير. (*إرشاد*: النسبة المشتركة ليست 0.2 فقط.)

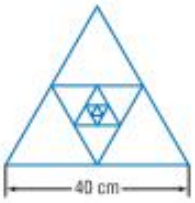
b. ما الحد الرابع في هذه المتتالية؟ ما الذي يمثله؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

33. **المصروف** عرض والدا ليلى عليها خيارين لتحصل على مصروفها على مدار 9 أسابيع خلال الصيف. يمكنها أن تحصل على AED 30 كل أسبوع أو AED 1 في الأسبوع الأول و AED 2 في الأسبوع الثاني و AED 4 في الأسبوع الثالث وهكذا.

a. هل يمثل الخيار الثاني متتالية هندسية؟ اشرح.

b. ما الخيار الذي ينبغي أن تختاره ليلى؟ اشرح.



34. **مثلث سيربنسكي** فكّر في المثلثات المتساوية الأضلاع المرسومة على اليسار. يبلغ محيط كل مثلث نصف محيط المثلث الأكبر التالي. فما محيط أصغر مثلث؟

35. إذا كان الحد الثاني في المتتالية الهندسية هو 3 والحد الثالث هو 1. فجد الحدين الأول والرابع في المتتالية.

36. إذا كان الحد الثالث في المتتالية الهندسية هو -12 والحد الرابع هو 24. فجد الحدين الأول والخامس في المتتالية.

37. **الزلازل** يُستخدم مقياس ريختر لقياس قوة الزلزال. يوضح الجدول الزيادة في مقدار القيم على مقياس ريختر.

رقم ريختر (x)	الزيادة في المقدار (y)	معدل التغير (الميل)
1	1	–
2	10	9
3	100	
4	1000	
5	10,000	

a. انسخ الجدول وأكمله. تذكر أن معدل التغير هو التغير في y مقسومًا على التغير في x.

b. ارسم الأزواج المرتبة (الزيادة في المقدار، رقم ريختر).

c. صف التمثيل البياني الذي صنعته من بيانات مقياس ريختر. هل معدل التغير بين أي نقطتين واحد؟

d. اكتب معادلة أسيّة تمثل مقياس ريختر.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

38. **التحدي** اكتب متتالية هندسية وحسابية. اشرح إجابتك.

39. **التفكير النقدي** يعمل إبراهيم وأحمد على التوصل إلى الحد التاسع في المتتالية الهندسية $-5, 10, -20, \ldots$. فهل أيّ منهما على صواب؟ وضّح استنتاجك.

إبراهيم

$r = \frac{10}{-5}$ أو -2

$a_9 = -5 \times (-2)^{9-1}$

$= -5 \times -256$

$= 1280$

أحمد

$r = \frac{10}{-5}$ أو -2

$a_9 = -5(-2)^{9-1}$

$= -5(512)$

$= -2560$

40. **التبرير** اكتب متتالية أعداد تشكل نمطًا لكنها ليست حسابية ولا هندسية. اشرح النمط.

41. **الكتابة في الرياضيات** ما وجه الشبه بين التمثيلات البيانية للمتتاليات الهندسية والدوال الأسيّة؟ هل هي مختلفة؟

42. **الكتابة في الرياضيات** اذكر بإيجاز كيفية التوصل إلى حد معين في متتالية هندسية.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبار المعياري

43. جـد الحد الحادي عشر في المتتالية الهندسية $3, -6, 12, -24, \ldots$.

A 6144 C 33
B 3072 D −6144

44. ما إجمالي مبلغ الاستثمار الظاهر في الجدول أدناه إذا كانت المرابحة مركبة شهريًا؟

الأولي	AED 500
طول مدة الاستثمار	4 سنوات
نسبة المرابحة السنوية	5.25%

F AED 613.56 H AED 616.56
G AED 616.00 J AED 718.75

45. إجابة قصيرة تملك أسماء مبلغ AED 6.50 بقطع نقدية معدنية من فئات 25 فلسًا و 10 فلسات. إذا كانت لديها 35 قطعة إجمالاً. فكم عدد القطع التي لديها من كل فئة؟

46. ما مجال ومدى الدالة $y = 4(3^x) - 2$؟

A D = {كل الأعداد الحقيقية}. $R = \{y | y > -2\}$
B D = {كل الأعداد الحقيقية}. $R = \{y | y > 0\}$
C D = {كل الأعداد الصحيحة}. $R = \{y | y > -2\}$
D D = {كل الأعداد الصحيحة}. $R = \{y | y > 0\}$

مراجعة شاملة

جـد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية هندسية.

47. 2, 6, 18, 54, ...

48. −5, −10, −20, −40, ...

49. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$

50. −3, 1.5, −0.75, 0.375, ...

51. 1, 0.6, 0.36, 0.216, ...

52. 4, 6, 9, 13.5, ...

مثّل كل دالة بيانيًا. جـد المقطع من المحور الرأسيّ y واذكر المجال والمدى.

53. $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 5$

54. $y = 2(4)^x$

55. $y = \frac{1}{2}(3^x)$

56. التخطيط المساحي تنمو شجرة صنوبر أزرق بمقدار 15 cm كل سنة في المتوسط. التخطيط المساحي ينمو نبات الشوكران بمقدار 10 cm كل سنة في المتوسط. إذا كان طول الصنوبر الأزرق يبلغ 120 cm وطول الشوكران 180 cm. فاكتب نظام معادلات لتمثيل نموهما. جـد الحل وفسره في سياق الموقف.

57. المال يعرض سيتي بنك حذا أدنى للرصيد يبلغ AED 1500 للحفاظ على مجانية خدمات إصدار الشيكات. إذا كان السيد إسماعيل سيكتب شيكات بالمبالغ المدرجة في الجدول. فما المبلغ الذي ينبغي أن يبدأ به لكي يحصل على إصدار الشيكات مجانًا؟

الشيك	المبلغ
750	AED 1300
751	AED 947

اكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع للمستقيم باستخدام الميل المعطى والمقطع من المحور الرأسيّ y المعطاة.

58. الميل: 4، المقطع من المحور الرأسيّ y : 2

59. الميل: 3−، المقطع من المحور الرأسيّ y: $-\frac{2}{3}$

60. الميل: $-\frac{1}{4}$ ، المقطع من المحور الرأسيّ y : 5−

61. الميل: $-\frac{1}{2}$ ، المقطع من المحور الرأسيّ y: 9−

62. الميل: $-\frac{2}{5}$، المقطع من المحور الرأسيّ y : $\frac{3}{4}$

63. الميل: 6−، المقطع من المحور الرأسيّ y: 7−

مراجعة المهارات

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. وإن لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب هذه أبسط صورة.

64. $3u + 10u$

65. $5a - 2 + 6a$

66. $6m^2 - 8m$

67. $4w^2 + w + 15w^2$

68. $13(5 + 4a)$

69. $(4t - 6)16$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

5-4 متوسط معدل التغير في الدوال الأسيّة

أنت تعلم أن معدل التغير في الدالة الخطية ثابت بالنسبة لأي نقطتين على التمثيل البياني. معدل تغير دالة أسية ليس ثابتًا.

النشاط تقييم خطط الاستثمار

يملك علي 2000 AED لاستثمارها في إحدى خطتين. تقدم الخطة 1 زيادة على مبلغه الأولي تبلغ 75 AED كل عام، بينما تعرض الخطة 2 دفع مرابحة مركبة شهريًا تبلغ 3.6%. تتحدد قيمة الدرهم لكل استثمار بعد t أعوام بـ $A_1 = 2000 + 75t$ و $A_2 = 2000(1.003)^{12t}$، على الترتيب. استخدم قيم الدالة ومتوسط معدل التغير والتمثيلات البيانية للمعادلات لتفسير الخطط والمقارنة بينها.

الخطوة 1 انسخ الجدول أدناه واستكمله بإيجاد القيم المجهولة لكل من A_1 و A_2.

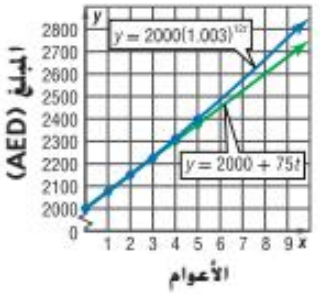
t	0	1	2	3	4	5
A_1						
A_2						

الخطوة 2 جد متوسط معدل التغير لكل خطة من $t = 0$ إلى 1، و $t = 3$ إلى 4، و $t = 0$ إلى 5.

الخطة 1: $\frac{2075 - 2000}{1 - 0}$ أو 75 $\frac{2300 - 2225}{4 - 3}$ أو 75 $\frac{2375 - 2000}{5 - 0}$ أو 75

الخطة 2: $\frac{2073.2 - 2000}{1 - 0}$ أو 73.2 $\frac{2309.27 - 2227.74}{4 - 3}$ أو حوالي 82 $\frac{2393.79 - 2000}{5 - 0}$ أو حوالي 79

الخطوة 3 مثل بيانيًا الأزواج المرتبة لكل دالة. قم بالتوصيل بين كل مجموعة نقاط بمنحنى منتظم.



الخطوة 4 استخدم التمثيل البياني ومعدلات التغير للمقارنة بين الخطط. كلا التمثيلين البيانيين له معدل تغير يبلغ في العام الأول حوالي 75 AED في السنة. من العام 3 إلى 4، تواصل الخطة 1 الزيادة بمعدل 75 AED في السنة. لكن الخطة 2 تنمو بمعدل يزيد على 81 AED في السنة. متوسط معدل التغير على مدار أول خمسة أعوام في الخطة 1 يبلغ 75 AED في العام وللخطة 2 يزيد على 78 AED في العام. يشير هذا إلى أنه مع زيادة عدد الأعوام، ينمو الاستثمار في الخطة 2 بمعدل أسرع بشكل متزايد. يدعم هذا الفجوة المتزايدة بين تمثيليهما البيانيين.

تمارين

تنخفض قيمة أحد أجهزة الشركة مع الوقت بسبب الإستهلاك. تمثل الدالة $y = 16{,}000(0.985)^{2t}$ القيمة بعد t أعوام.

1. ما متوسط معدل التغير على مدى أول خمس أعوام؟
2. ما متوسط معدل التغير في القيمة من العام 5 إلى العام 10؟
3. ما الاستنتاج الخاص بالقيمة الذي يمكن أن نتوصل إليه بناء على متوسطات معدلات التغير هذه؟
4. **الانتظام** انسخ الجدول واستكمله لـ $y = x^4$.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y							

قارن متوسط معدل التغير لـ $x = -3$ إلى 0 ولـ $x = 0$ إلى 3 وفسّر ذلك.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

5-5 الصيغ التكرارية

السابق:
- لقد كتبت صيغًا مباشرة للتعبير عن المتتاليات الحسابية والهندسية.

الحالي:
1. استخدام صيغًا تكرارية لإدراج الحدود في متتالية.
2. كتابة صيغة تكرارية للمتتاليات الحسابية والهندسية.

لماذا؟
- يتم نقل العملاء بحافلات مكوكية من منازلهم إلى المتاجر الاستهلاكية الكبرى للتسوق. تعتمد التكلفة الإجمالية للخدمة على العدد الإجمالي للعملاء. تظهر تكاليف أول ستة عملاء.

عدد العملاء	التكلفة (AED)
1	25
2	35
3	45
4	55
5	65
6	75

1 استخدام الصيغ التكرارية (الضمنية)

تسمح لك الصيغة الصريحة بإيجاد أي حد a_n في متتالية باستخدام صيغة مكتوبة بدلالة n. على سبيل المثال، يمكن استخدام $a_n = 2n$ لإيجاد الحد رقم خمسة في المتتالية $a_5 = 2(5)$ ...، 2, 4, 6, 8, أو 10.

تسمح لك **الصيغة التكرارية أو الضمنية** بإيجاد الحدّ رقم n في متتالية من خلال إجراء عملياتٍ على واحدٍ أو أكثر من الحدود السابقة. بما أن كل حد في المتتالية أعلاه أكبر بمقدار 2 عن الحد السابق له، يمكننا جمع 2 على الحد الرابع لإيجاد أن الحد الخامس يساوي 2 + 8 أو 10. ثم يمكننا كتابة صيغة تكرارية لـ a_n.

$$\begin{aligned} a_1 &= & &= 2 \\ a_2 &= 2 + 2 \text{ أو } a_1 + 2 & &= 4 \\ a_3 &= 2 + 4 \text{ أو } a_2 + 2 & &= 6 \\ a_4 &= 2 + 6 \text{ أو } a_3 + 2 & &= 8 \\ &\vdots & &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + 2 \end{aligned}$$

الصيغة التكرارية للمتتالية أعلاه هي $a_1 = 2,\ a_n = a_{n-1} + 2$ لـ $n \geq 2$ حيث n عدد صحيح. الحد المشار إليه بـ a_{n-1} يمثل الحد السابق مباشرة لـ a_n. لاحظ أن الحد الأول a_1 معطى وكذلك مجال n.

المفردات الجديدة
صيغة تكرارية
recursive formula

ممارسات في الرياضيات
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

مثال 1 استخدام صيغة تكرارية

جد أول خمسة حدود في المتتالية، حيث $a_1 = 7$ و $a_n = 3a_{n-1} - 12$، إذا كانت $n \geq 2$.

استخدم $a_1 = 7$ والصيغة التكرارية لإيجاد الحدود الأربعة التالية.

$a_2 = 3a_{2-1} - 12$ ($n = 2$)
$= 3a_1 - 12$ (بسّط. $a_1 = 7$)
$= 3(7) - 12 = 9$

$a_3 = 3a_{3-1} - 12$ ($n = 3$)
$= 3a_2 - 12$ (بسّط. $a_2 = 9$)
$= 3(9) - 12 = 15$

$a_4 = 3a_{4-1} - 12$ ($n = 4$)
$= 3a_3 - 12$ (بسّط. $a_3 = 15$)
$= 3(15) - 12 = 33$

$a_5 = 3a_{5-1} - 12$ ($n = 5$)
$= 3a_4 - 12$ (بسّط. $a_4 = 33$)
$= 3(33) - 12 = 87$

أول خمسة حدود هي 7 و9 و 15 و 33 و 87.

تمرين موجّه

1. جد أول خمسة حدود في المتتالية، حيث $a_1 = -2$ و $a_n = (-3)\,a_{n-1} + 4$، إذا كانت $n \geq 2$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 كتابة الصيغ التكرارية لكتابة صيغة تكرارية لمتتالية حسابية أو هندسية. استكمل الخطوات التالية.

المفهوم الأساسي كتابة الصيغ التكرارية

الخطوة 1 حدد ما إذا كانت المتتالية حسابية أم هندسية بإيجاد فرق مشترك أو نسبة مشتركة.

الخطوة 2 اكتب صيغة تكرارية.

المتتاليات الحسابية $a_n = a_{n-1} + d$. حيث d هي الفرق المشترك

المتتاليات الهندسية $a_n = r \times a_{n-1}$. حيث r هي النسبة المشتركة

الخطوة 3 اذكر الحد الأول والمجال في n.

نصيحة دراسية

تعريف n للحد n في متتالية. يجب أن تكون قيمة n عددًا صحيحًا موجبًا. على الرغم من أنه يجب ذكر مجال n. سنفترض بدءًا من هذه النقطة أن n عدد صحيح.

مثال 2 كتابة الصيغ التكرارية

اكتب صيغةً تكراريةً لكل متتالية مما يلي.

a. 17, 13, 9, 5, ...

الخطوة 1 اطرح أولاً كل حد من الحد الذي يليه.

$13 - 17 = -4$ $\quad 9 - 13 = -4$ $\quad 5 - 9 = -4$

هناك فرق مشترك يبلغ -4. المتتالية حسابية.

الخطوة 2 استخدم قانون المتتالية الحسابية.

$a_n = a_{n-1} + d$ الصيغة التكرارية للمتتالية الحسابية

$a_n = a_{n-1} + (-4)$ $d = -4$

الخطوة 3 الحد الأول a_1 هو 17. و $n \geq 2$.

الصيغة التكرارية للمتتالية هي $a_1 = 17,\ a_n = a_{n-1} - 4,\ n \geq 2$.

نصيحة دراسية

المجال يتحدد مجال n بالحدود المذكورة. بما أن الحد الأول مذكور بالفعل. فمن المنطقي أن يكون الحد الأول الذي ستسري عليه الصيغة هو الحد الثاني للمتتالية أو عندما تكون $n = 2$.

b. 6, 24, 96, 384, ...

الخطوة 1 اطرح أولاً كل حد من الحد الذي يليه.

$24 - 6 = 18$ $\quad 96 - 24 = 72$ $\quad 384 - 96 = 288$

لا يوجد فرق مشترك. ابحث عن نسبة مشتركة بقسمة كل حد على الحد السابق له.

$\frac{24}{6} = 4$ $\quad \frac{96}{24} = 4$ $\quad \frac{384}{96} = 4$

هناك نسبة مشتركة تبلغ 4. المتتالية هندسية.

الخطوة 2 استخدم صيغة المتتالية الهندسية.

$a_n = r \times a_{n-1}$ الصيغة التكرارية للمتتالية الهندسية

$a_n = 4a_{n-1}$ $r = 4$

الخطوة 3 الحد الأول a_1 هو 6. و $n \geq 2$.

الصيغة التكرارية للمتتالية هي $a_1 = 6,\ a_n = 4a_{n-1},\ n \geq 2$.

تمرين موجّه

2A. 4, 10, 25, 62.5, ...

2B. 9, 36, 63, 90, ...

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

يمكن تمثيل المتتالية بكل من الصيغة الصريحة والصيغة التكرارية.

مهنة من الحياة اليومية

النقل من المتوقع أن ينمو عدد الوظائف في مجال النقل بما يقرب من 1.1 مليون وظيفة بين عامي 2004 و 2014. تحدد مجالات معينة متطلبات تعليمية. وتشمل ديلومًا من مدرسة عليا وشكلاً من أشكال التدريب المتخصص.

المصدر: وزارة العمل في الولايات المتحدة

مثال 3 كتابة صيغتين تكرارية وصريحة

التكلفة **ارجع إلى بداية الدرس. افترض أن N هي عدد العملاء.**

a. اكتب صيغة تكرارية للمتتالية.

الخطوتان 1 و 2 اطرح أولاً كل حد من الحد الذي يليه.

$35 - 25 = 10 \qquad 45 - 35 = 10 \qquad 55 - 45 = 10$

هناك فرق مشترك يبلغ 10. المتتالية حسابية.

الخطوة 3 استخدم قانون المتتالية الحسابية.

$a_n = a_{n-1} + d$ الصيغة التكرارية للمتتالية الحسابية

$a_n = a_{n-1} + 10$ $d = 10$

الخطوة 4 الحد الأول a_1 هو 25، و $n \geq 2$.

الصيغة التكرارية للمتتالية هي $a_1 = 25,\ a_n = a_{n-1} + 10,\ n \geq 2$.

b. اكتب صيغة صريحة للمتتالية.

الخطوة 1 الفرق المشترك هو 10.

الخطوة 2 استخدم صيغة الحد رقم n لمتتالية حسابية.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ صيغة للحد رقم n

$= 25 + (n-1)10$ $a_1 = 25$ و $d = 10$

$= 25 + 10n - 10$ خاصية التوزيع

$= 10n + 15$ بسّط.

الصيغة الصريحة للمتتالية هي $a_n = 10n + 15$.

تمرين موجّه

3. **المدخرات** يحقق المال الذي يملكه بدر في حسابه الادخاري ربحًا كل عام. لا يقوم بأي سحوبات أو إيداعات إضافية. يبلغ رصيد الحساب في بداية كل عام AED 10,000 و AED 10,300 و AED 10,609 و AED 10,927.27 وهكذا. اكتب صيغة تكرارية وصيغة صريحة للمتتالية.

إذا كانت عدة حدود متتالية مطلوبة، فتكون الصيغة التكرارية مفيدة بينما إذا كان الحد رقم n في متتالية هو فقط المطلوب، فتكون الصيغة الصريحة مفيدة. ولهذا من المفيد أحيانًا التحول بين الصيغتين.

مثال 4 التنقل بين الصيغتين التكرارية والصريحة

a. اكتب صيغة تكرارية لـ $a_n = 6n + 3$.

$a_n = 6n + 3$ صيغة صريحة لمتتالية حسابية حيث $a_1 = 6(1) + 3$ و $d = 6$ أو 9. ولهذا فالصيغة التكرارية لـ a_n هي $a_1 = 9,\ a_n = a_{n-1} + 6,\ n \geq 2$.

b. اكتب صيغة صريحة لـ $a_1 = 120,\ a_n = 0.8a_{n-1},\ n \geq 2$.

$a_n = 0.8a_{n-1}$ صيغة تكرارية لمتتالية هندسية حيث $a_1 = 120$ و $r = 0.8$. ولهذا، فالصيغة الصريحة لـ a_n هي $a_n = 120(0.8)^{n-1}$.

نصيحة دراسية

المتتالية الهندسية تذكّر أن صيغة الحد n لمتتالية هندسية هي $a_n = a_1 r^{n-1}$.

تمرين موجّه

4A. اكتب صيغة تكرارية لـ $a_n = 4(3)^{n-1}$.

3a. اكتب صيغة صريحة لـ $a_1 = -16,\ a_n = a_{n-1} - 7,\ n \geq 2$.

حقوق الطبع © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

مثال 1 **جـد الحدود الخمسة الأولى في كل متتالية.**

1. $a_1 = 16,\ a_n = a_{n-1} - 3,\ n \geq 2$

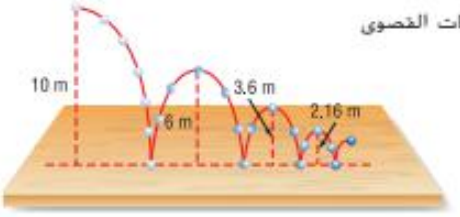
2. $a_1 = -5,\ a_n = 4a_{n-1} + 10,\ n \geq 2$

مثال 2 **اكتب صيغةً تكراريةً لكل متتالية.**

3. 1, 6, 11, 16, ...

4. 4, 12, 36, 108, ...

مثال 3



5. الكرة سقطت كرة من ارتفاع 10 m. موضح بالصورة الارتفاعات القصوى التي تصل إليها الكرة في أول ثلاثة ارتدادات.

a. اكتب صيغة تكرارية للمتتالية.

b. اكتب صيغة صريحة للمتتالية.

مثال 4 **لكل صيغة تكرارية، اكتب صيغة صريحة. لكل صيغة صريحة، اكتب صيغة تكرارية.**

6. $a_1 = 4,\ a_n = a_{n-1} + 16,\ n \geq 2$

7 $a_n = 5n + 8$

8. $a_n = 15(2)^{n-1}$

9. $a_1 = 22,\ a_n = 4a_{n-1},\ n \geq 2$

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **جـد الحدود الخمسة الأولى من كل متتالية.**

10. $a_1 = 23,\ a_n = a_{n-1} + 7,\ n \geq 2$

11. $a_1 = 48,\ a_n = -0.5a_{n-1} + 8,\ n \geq 2$

12. $a_1 = 8,\ a_n = 2.5a_{n-1},\ n \geq 2$

13. $a_1 = 12,\ a_n = 3a_{n-1} - 21,\ n \geq 2$

14. $a_1 = 13,\ a_n = -2a_{n-1} - 3,\ n \geq 2$

15. $a_1 = \frac{1}{2},\ a_n = a_{n-1} + \frac{3}{2},\ n \geq 2$

مثال 2 **اكتب صيغةً تكراريةً لكل متتالية.**

16. 12, −1, −14, −27, ...

17. 27, 41, 55, 69, ...

18. 2, 11, 20, 29, ...

19. 100, 80, 64, 51.2, ...

20. 40, −60, 90, −135, ...

21. 81, 27, 9, 3, ...

مثال 3

22. وضع النماذج يبني مهندس تصميم معماري فناء من القرميد. يشمل جزء من الفناء نمطًا مكونًا من مثلثات. موضح بالصورة أول أربعة صفوف من النمط.

a. اكتب صيغة تكرارية للمتتالية.

b. اكتب صيغة صريحة للمتتالية.

مثال 4 **لكل صيغة تكرارية، اكتب صيغة صريحة. لكل صيغة صريحة، اكتب صيغة تكرارية.**

23. $a_n = 3(4)^{n-1}$

24. $a_1 = -2,\ a_n = a_{n-1} - 12,\ n \geq 2$

25. $a_1 = 38,\ a_n = \frac{1}{2}a_{n-1},\ n \geq 2$

26. $a_n = -7n + 52$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

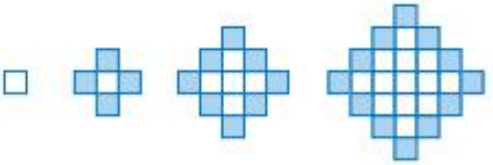
27. **الرسائل النصية** تلقت أماني رسالة نصية متسلسلة أعادت إرسالها إلى خمس من صديقاتها. أعادت كل واحدة من صديقاتها إرسال الرسالة النصية إلى خمس صديقات أخريات، وهكذا.

a. جـد أول خمسة حدود في هذا التسلسل تمثل عدد الأشخاص الذين يتلقون الرسالة النصية في الجولة n.

b. اكتب صيغة تكرارية للمتتالية.

c. إذا كانت أماني تمثل a_1، فجـد a_8.

28. **الهندسة** فكّر في النمط أدناه. يزداد عدد المربعات الزرقاء وفقًا لنمط معين.



a. اكتب صيغة تكرارية للمتتالية التي تمثل عدد المربعات الزرقاء في كل شكل.

b. إذا كان المربع الأول يمثل a_1، فجـد عدد المربعات الزرقاء في a_8.

29. **الأشجار** يتباطأ نمو نوع معين من الأشجار مع تقدم الشجرة في العمر. تظهر ارتفاعات الشجرة على مدار الأربع سنوات الماضية.

a. اكتب صيغة تكرارية لارتفاع الشجرة.

b. إذا استمر النمط، فما الطول الذي ستصل إليه الشجرة بعد عامين آخرين؟ قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة من المتر.

30. **التمثيلات المتعددة** متتالية فيبوناتشي ليست حسابية أو هندسية ويمكن تعريفها بأنها صيغة تكرارية. الحدود الأولى هي ... 1, 1, 2, 3, 5, 8,

a. منطقيًا حدد العلاقة بين حدود المتتالية. ما الحدود الخمسة التالية في المتتالية؟

b. جبريًا اكتب صيغة للحد رقم n إذا كانت $a_1 = 1$ و $a_2 = 1$ و $n \geq 3$.

c. جبريًا جـد الحد رقم 15.

d. تحليليًا اشرح السبب في أن متتالية فيبوناتشي ليست متتالية حسابية.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

31. **تحليل الخطأ** يعمل بلال وجاسم على حل مسألة رياضية تتضمن المتتالية ... 2, −2, 2, −2, 2, . يعتقد بلال أنه يمكن كتابة المتتالية بصيغة تكرارية. ويرى جاسم أنه يمكن كتابة المتتالية بصيغة صريحة. فهل أيّ منهما على صواب؟ اشرح.

32. **التحدي** جـد a_1 للمتتالية حيث $a_4 = 1104$ و $a_n = 4a_{n-1} + 16$.

33. **الفرضيات** حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أم خاطئة. علل استنتاجك.

توجد صيغة تكرارية واحدة فقط لكل متتالية.

34. **التحدي** جـد صيغة تكرارية لـ ... 4, 9, 19, 39, 79,

35. **الكتابة في الرياضيات** اشرح الفرق بين الصيغة الصريحة والصيغة التكرارية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

36. جـد صيغة تكرارية للمتتالية ... 12, 24, 36, 48, .

A $a_1 = 12,\ a_n = 2a_{n-1},\ n \geq 2.$

B $a_1 = 12,\ a_n = 4a_{n-1} - 24,\ n \geq 2.$

C $a_1 = 12,\ a_n = a_{n-1} + 12,\ n \geq 2.$

D $a_1 = 12,\ a_n = 12a_{n-1} + 12,\ n \geq 2.$

37. الهندسة تبلغ مساحة أحد المستطيلات $36m^4n^6$ m مربع. يبلغ طول المستطيل $6m^3n^3$ m. فما عرض المستطيل؟

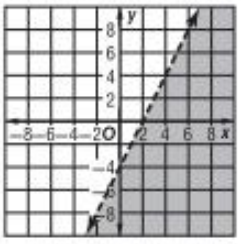
F $216m^7n^9$ m

G $6mn^3$ m

H $42m^7n^3$ m

J $30mn^3$ m

38. جـد متباينة في التمثيل البياني المعروض.



A $y > 2x - 4$

B $y \geq 2x - 4$

C $y < 2x - 4$

D $y \leq 2x - 4$

39. اكتب معادلة للمستقيم المار بالنقطتين $(-2, -20)$ و $(4, 58)$.

F $y = 13x + 6$

G $y = 19x - 18$

H $y = 19x + 18$

J $y = 13x - 6$

مراجعة شاملة

جـد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية هندسية.

40. 675, 225, 75, ...

41. 16, −24, 36, ...

42. 6, 18, 54, ...

43. 512, −256, 128, ...

44. 125, 25, 5, ...

45. 12, 60, 300, ...

46. الاستثمار استثمر أحمد AED 2000 بنسبة مرابحة مركبة تبلغ 5.75% شهريًا. ما المبلغ الذي سيكون مع أحمد بعد 5 سنوات؟

47. الجولات السياحية تسافر أسرة راشد وأسرة صالح معًا في رحلة لزيارة مصنع حلويات. موضح الجدول أدناه عدد الأشخاص في كل أسرة والتكلفة الإجمالية. جـد أسعار دخول الشخص البالغ والأطفال.

الأسرة	عدد البالغين	عدد الأطفال	التكلفة الإجمالية
راشد	2	3	AED 58
صالح	2	1	AED 38

اكتب كل معادلة بالصيغة القياسية.

48. $y + 6 = -3(x + 2)$

49. $y - 12 = 4(x - 7)$

50. $y + 9 = 5(x - 3)$

51. $y - 1 = \frac{1}{3}(x + 15)$

52. $y + 10 = \frac{2}{5}(x - 6)$

53. $y - 4 = -\frac{2}{7}(x + 1)$

مراجعة المهارات

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. وإن لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب *هذه أبسط صورة*.

54. $8x + 3y^2 + 7x - 2y$

55. $4(x - 16) + 6x$

56. $4n - 3m + 9m - n$

57. $6r^2 + 7r$

58. $-2(4g - 5h) - 6g$

59. $9x^2 - 7x + 16y^2$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © محفوظ الطبع والتأليف

5-6 مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المعادلات والمتباينات الأسيّة

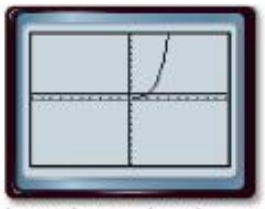
يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لحل المعادلات الأسيّة من خلال التمثيل البياني أو من خلال استخدام خاصية الجدول. وللقيام بذلك، سوف تكتب المعادلات في صيغة أنظمة معادلات.

النشاط 1

حُلّ $3^{x-4} = \frac{1}{9}$.

الخطوة 1 مثّل كل طرف من المعادلة بيانيًا في صورة دالة منفصلة. أدخل 3^{x-4} باعتبارها **Y1**. تأكد من تضمين قوسين حول الأس.

أدخل $\frac{1}{9}$ باعتبارها **Y2**. ثم مثّل المعادلتين بيانيًا.



[−10, 10] scl: 1 by [−1, 1] scl: 0.1

الخطوة 2 استخدم خاصية **intersect**.

يمكنك استخدام خاصية **intersect (تقاطع)** من قائمة **CALC (احسب)** لتقريب الزوج المرتّب الخاص بالنقطة التي تتقاطع عندها التمثيلات البيانية.

[−10, 10] scl: 1 by [−1, 1] scl: 0.1

تبين شاشة الحاسبة أن الإحداثي x للنقطة التي يتقاطع عندها المنحنيان هو 2. لذا، فإن حل المعادلة هو 2.

الخطوة 3 استخدم خاصية **TABLE**.

يمكنك أيضًا استخدام خاصية **TABLE (الجدول)** لتحديد موقع النقطة التي يتقاطع عندها المنحنيان.

يظهر الجدول قيم x وقيم y المتماثلة لكل تمثيل بياني. افحص الجدول للعثور على قيمة x التي تساويها قيم y في التمثيلات البيانية.

عند $x = 2$، تكون لكلتا الدالتين قيمة y تبلغ $0.\overline{1}$ أو $\frac{1}{9}$. وبالتالي، فإن حل المعادلة هو 2.

تحقق عوّض بالعدد 2 عن x في المعادلة الأصلية

$3^{x-4} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9}$	المعادلة الأصلية
$3^{2-4} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9}$	عوّض بالعدد 2 عن x.
$3^{-2} \stackrel{?}{=} \frac{1}{9}$	بسّط.
$\frac{1}{9} = \frac{1}{9}$ ✓	تم التحقق من الحل.

يمكن استخدام إجراء مماثل لحل المتباينات الأسيّة.

(يتبع في الصفحة التالية)

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

حل المعادلات والمتباينات الأسية تابع

النشاط 2 وصف

حُلّ $2^{x-2} \geq 0.5^{x-3}$.

الخطوة 1 أدخل المتباينات ذات الصلة.

أعد كتابة المسألة في صورة نظام متباينات.

المتباينة الأولى هي $y \geq 2^{x-2}$ أو $y \leq 2^{x-2}$. وبما أن هذه المتباينة تتضمن إشارة *أقل من أو يساوي*، فيجب أن تظلل أسفل المنحنى.

أدخل الحد أولاً ثم استخدم السهم ومفاتيح ENTER لاختيار أيقونة "التظليل أسفل". ◣.

المتباينة الثانية هي $y \geq 0.5^{x-3}$. ظلل فوق المنحنى لأن هذه المتباينة تحتوي على إشارة *أكبر من أو يساوي*.

خطوات العملية على الحاسبة:

Y= ◀ ◀ ENTER ENTER ENTER ▶ ▶ 2 ^ (X,T,θ,n − 2) ENTER ◀ ◀ ENTER ENTER ▶ ▶ .5 ^ (X,T,θ,n − 3)

[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

الخطوة 2 مثّل النظام بيانيًا.

خطوات العملية على الحاسبة: GRAPH

قيم x للنقاط الواقعة في المنطقة التي تتداخل فيها المناطق المظللة هي مجموعة حل المتباينة الأصلية. وباستخدام خاصية **intersect (تقاطع)**. يمكنك استنتاج أن مجموعة الحل هي $\{x \mid x \geq 2.5\}$.

الخطوة 3 استخدم خاصية **TABLE**.

تحقق باستخدام خاصية **TABLE (الجدول)**. وقم بإعداد الجدول لإظهار قيم x بزيادات تساوي 0.5.

خطوات العملية على الحاسبة: 2nd [TABLE] 2nd [TBLSET] 0 ENTER .5 ENTER

لاحظ أنه بالنسبة لقيم x التي تكون أكبر من $x = 2.5$. فإن **Y1 > Y2**. وهذا يؤكد أن حل المتباينة يكون $\{x \mid x \geq 2.5\}$.

تمارين

حُلّ كل معادلة أو متباينة.

1. $9^{x-1} = \frac{1}{81}$
2. $4^{x+3} = 2^{5x}$
3. $5^{x-1} = 2^{x}$
4. $3.5^{x+2} = 1.75^{x+3}$
5. $-3^{x+4} = -0.5^{2x+3}$
6. $6^{2-x} - 4 < -0.25^{x-2.5}$
7. $16^{x-1} > 2^{2x+2}$
8. $3^{x} - 4 \leq 5^{\frac{x}{2}}$
9. $5^{x+3} \leq 2^{x+4}$
10. **الكتابة في الرياضيات** وضّح سبب عمل هذه التقنية الخاصة بتمثيل نظام معادلات أو متباينات بيانيًا على حل المعادلات والمتباينات الأسية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

5-6 حل المعادلات والمتباينات الأسيّة

السابق	الحالي	لماذا؟
• قمت بتمثيل الدوال الأسيّة بيانيًا.	1 حل المعادلات الأسيّة.	• تتجه العضوية بمواقع شبكات التواصل الاجتماعي إلى الزيادة بمعدل أسي. ويمكن تمثيل نمو هذه العضوية على أحد المواقع من خلال المعادلة $y = 2.2(1.37)^x$. حيث x هو عدد الأعوام منذ 2004 و y هو عدد الأعضاء بالملايين. يمكنك استخدام $y = 2.2(1.37)^x$ لتحديد كم سيكون عدد الأعضاء في عام ما محدد. أو لتحديد العام الذي بلغت فيه العضوية مستوى معينًا.
	2 حل المتباينات الأسيّة.	

المفردات الجديدة
المعادلة الأسيّة
exponential equation
المرابحة المركبة
compound interest
المتباينة الأسيّة
exponential inequality

ممارسات في الرياضيات
التفكير بطريقة تجريدية وكمية.

1 إيجاد حل المعادلات الأسيّة

في **المعادلة الأسيّة**، تأتي المتغيرات على شكل أسس.

المفهوم الأساسي خاصية المساواة في الدوال الأسيّة

الشرح افترض أن $b > 0$ و $b \neq 1$. فإن $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كانت $x = y$.

مثال إذا كانت $3^x = 3^5$، فإن $x = 5$. وإذا كانت $x = 5$، فإن $3^x = 3^5$.

يمكن استخدام خاصية التساوي لحل المعادلات الأسيّة.

مثال 1 حل المعادلات الأسيّة

حُلّ كل من المعادلات التالية.

a. $2^x = 8^3$

$2^x = 8^3$	المعادلة الأصلية
$2^x = (2^3)^3$	أعد كتابة 8 بالصيغة 2^3.
$2^x = 2^9$	قوة لقوة
$x = 9$	خاصية المساواة في الدوال الأسيّة

b. $9^{2x-1} = 3^{6x}$

$9^{2x-1} = 3^{6x}$	المعادلة الأصلية
$(3^2)^{2x-1} = 3^{6x}$	أعد كتابة 9 بالصيغة 3^2.
$3^{4x-2} = 3^{6x}$	قوة لقوة
$4x - 2 = 6x$	خاصية المساواة في الدوال الأسيّة
$-2 = 2x$	اطرح $4x$ من كل طرف.
$-1 = x$	اقسم كل طرف على 2.

تمرين موجّه

1A. $4^{2x-1} = 64$

1B. $5^{5x} = 125^{x+2}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكنك استخدام المعلومات المتعلقة بالنمو أو التضاؤل لكتابة المعادلة الخاصة بدالة أسيّة.

مثال 2 من الحياة اليومية كتابة الدالة الأسيّة

العلوم **بدأت هدى تجربة بـــ 7500 خلية بكتيرية. وبعد 4 ساعات، أصبح هناك 23,000 خلية.**

a. اكتب دالة أسية يمكن استخدامها في تمثيل عدد البكتيريا بعد x من الساعات إذا كان عدد البكتيريا يتغير بالمعدل نفسه.

في بداية التجربة، كان الزمن 0 ساعة وكان يوجد 7500 خلية بكتيرية. وبالتالي، تكون قيمة التقاطع مع المحور الرأسي y، وقيمة a هي 7500.

عندما يكون $x = 4$، يكون عدد الخلايا البكتيرية 23,000. عوّض عن هذه القيم في دالة أسيّة لتحديد قيمة b.

$y = ab^x$	دالة أسية
$23{,}000 = 7500 \cdot b^4$	عوّض عن x بـــ 4، وعن y بـــ 23,000، وعن a بـــ 7500.
$3.067 \approx b^4$	اقسم كل طرف على 7500.
$\sqrt[4]{3.067} \approx b$	احسب الجذر الرابع لكل طرف.
$1.323 \approx b$	استخدام الحاسبة.

المعادلة التي تمثل عدد البكتيريا هي $y \approx 7500(1.323)^x$.

b. كم عدد الخلايا البكتيرية التي يمكن توقعها في العينة بعد 12 ساعة؟

$y \approx 7500(1.323)^x$	تمثيل المعادلة
$\approx 7500(1.323)^{12}$	عوّض عن x بـــ 12.
$\approx 215{,}665$	استخدام آلة حاسبة.

سيكون هناك تقريبًا 215,665 خلية بكتيرية بعد 12 ساعة.

تمرين موجّه

2. إعادة التدوير قامت جهة تصنيع بتوزيع 3.2 ملايين علبة ألومنيوم في عام 2005.

A. وفي 2010، وزّعت هذه الجهة 420,000 علبة مُصنّعة من العلب المُعاد تدويرها، والتي قامت بتوزيعها من قبل. وبافتراض أن معدل إعادة التدوير يستمر، اكتب معادلة لتمثيل توزيع العلب المُصنّعة من الألومنيوم المُعاد تدويره كل عام.

B. كم عدد العلب المُصنّعة من الألومنيوم المُعاد تدويره الذي يمكن توقعه في عام 2050؟

مسائل من الحياة اليومية

في عام 2008، ساهم معدل إعادة تدوير المعادن في الولايات المتحدة البالغ 35% في الوقاية من انبعاث ما يقارب 25 مليون طن متري من الكربون في الهواء – الكمية المنبعثة سنويًا من 4.5 ملايين سيارة تقريبًا.

المصدر: وكالة حماية البيئة

تُستخدم الدوال الأسيّة في الحالات التي تنطوي على مرابحة مركبة. **المرابحة المركبة** هي فائدة يتم دفعها على أساس رأس المال الأصلي للاستثمار بالإضافة إلى أي فوائد مكتسبة سابقًا.

المفهوم الأساسي المرابحة المركبة

يمكنك حساب المرابحة المركبة باستخدام الصيغة التالية.

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

حيث يمثل A المبلغ في الحساب بعد t من الأعوام، ويمثل P المبلغ الأصلي المستثمر، ويمثل r نسبة المرابحة السنوية، ويمثل n عدد الفترات المركبة كل عام.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 المرابحة المركبة

يدفع حساب استثماري مرابحة سنوية مركبة بنسبة 4.2% شهريًا. فإذا تم استثمار مبلغ AED 2500 في هذا الحساب، فكم سيصبح الرصيد بعد 15 عامًا؟

افهم جـد المبلغ الإجمالي في الحساب بعد 15 عامًا.

خطط استخدم قانون المرابحة المركبة.

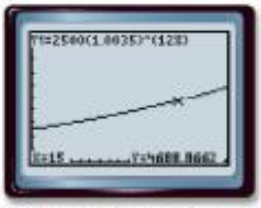
$P = 2500$. و $r = 0.042$. و $n = 12$. و $t = 15$

جـد الحل

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$ قانون المرابحة المركبة

$$= 2500\left(1 + \frac{0.042}{12}\right)^{12 \cdot 15}$$ $P = 2500, r = 0.042, n = 12, t = 15$

$$\approx 4688.87$$ استخدم حاسبة.



[0, 20] scl: 1 by [0, 10,000] scl: 1000

تحقق مثّل المعادلة المقابلة بيانيًا $y = 2500(1.0035)^{12t}$. استخدم قيمة CALC؛ لإيجاد y عندما تكون $x = 15$.

قيمة y البالغة 4688.8662 قريبة جدًا من 4688.87. لذلك فالإجابة صحيحة.

تمرين موجّه

3. جـد رصيد الحساب بعد 20 عامًا إذا تم وضع AED 100 في حساب يدفع مرابحة مركبة قدرها 1.2% مرتين في الشهر.

انتبه!
النسب المئوية تذكر أن تحويل جميع النسب المئوية إلى صيغة كسور عشرية. 2.4% تصبح 0.042.

2 حل المتباينات الأسيّة

المتباينة الأسيّة هي متباينة تتضمن مقادير أسية.

المفهوم الأساسي خاصية التباين في الدوال الأسيّة

الشرح افترض أن $b > 1$. فإن $b^x > b^y$ فقط عندما تكون $x > y$. و $b^x < b^y$ إذا وفقط إذا كانت $x < y$

مثال إذا كانت $2^x > 2^6$. فإن $x > 6$. وإذا كانت $x > 6$. فإن $2^x > 2^6$.

تنطبق هذه الخاصية أيضًا على ≥ و ≤.

مثال 4 حل المتباينات الأسيّة

حُلّ $16^{2x-3} < 8$.

$16^{2x-3} < 8$ المتباينة الأصلية

$(2^4)^{2x-3} < 2^3$ أعد كتابة 16 بالصيغة 2^4 و 8 بالصيغة 2^3.

$2^{8x-12} < 2^3$ رفع القوى

$8x - 12 < 3$ خاصية التباين في الدوال الأسيّة

$8x < 15$ اجمع 12 إلى كل طرف.

$x < \frac{15}{8}$ اقسم كل طرف على 8.

تمرين موجّه

حُلّ كل متباينة مما يلي.

4A. $3^{2x-1} \geq \frac{1}{243}$

4B. $2^{x+2} > \frac{1}{32}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

مثال 1 **حُلّ كل من المعادلات التالية.**

1. $3^{5x} = 27^{2x-4}$
2. $16^{2y-3} = 4^{y+1}$
3. $2^{6x} = 32^{x-2}$
4. $49^{x+5} = 7^{8x-6}$

مثال 2 5. **العلوم** انقسام الخلية هو العملية التي تنقسم فيها الخلية إلى اثنتين. وتُعد *الإشريكية القولونية* واحدة من أسرع أنواع البكتيريا نموًا. ذلك أنه يمكنها أن تتكاثر بنصفها في 15 دقيقة.

a. اكتب دالة أسية لتمثيل عدد الخلايا c بعد عدد t من الدقائق.

b. إذا بدأت بخلية *إشريكية قولونية* واحدة. فكم سيكون عدد الخلايا خلال ساعة واحدة؟

مثال 3 6. تدفع شهادة إيداع مرابحة مركبة كل أسبوعين قدرها 2.25%. فإذا أودعت AED 500 في هذه الشهادة. فكم سيكون الرصيد بعد 6 أعوام؟

مثال 4 **حُلّ كل من المتباينات التالية.**

7. $4^{2x+6} \leq 64^{2x-4}$
8. $25^{y-3} \leq \left(\frac{1}{125}\right)^{y+2}$

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **حُلّ كل من المعادلات التالية.**

9. $8^{4x+2} = 64$
10. $5^{x-6} = 125$
11. $81^{a+2} = 3^{3a+1}$
12. $256^{b+2} = 4^{2-2b}$
13. $9^{3c+1} = 27^{3c-1}$
14. $8^{2y+4} = 16^{y+1}$

مثال 2 15. **تمثيل النماذج** في عام 2009. استلمت ريهام مبلغًا قدره AED 10,000 من جدتها. واستثمر والداها هذا المبلغ المالي كله. وبحلول عام 2021. سيكون هذا المبلغ قد نما ليصل إلى AED 16,960.

a. اكتب دالة أسية يمكن استخدامها لتمثيل المبلغ المالي y. واكتب الدالة بحيث يكون x هو عدد الأعوام منذ عام 2009.

b. افترض أن هذا المبلغ المالي استمر في النمو بنفس المعدل. فكم سيكون رصيد هذا الحساب في عام 2031؟

اكتب دالة أسية للتمثيل البياني الذي يمر بالنقاط المعطاة.

16. (0, 6.4) و (3, 100)
17. (0, 256) و (4, 81)
18. (0, 128) و (5, 371,293)
19. (0, 144) و (4, 21,609)

مثال 3 20. جد رصيد الحساب بعد 7 أعوام إذا تم إيداع مبلغ AED 700 في حساب يدفع مرابحة مركبة قدرها 4.3% شهريًا.

21. حدد كم سيكون المبلغ الموجود في حساب تقاعد بعد 20 عامًا إذا تم استثمار AED 5000 بنسبة مرابحة مركبة قدرها 6.05% أسبوعيًا.

22. يقدم حساب توفير مرابحة مركبة قدرها 0.7% كل شهرين. وإذا تم إيداع مبلغ AED 110 في هذا الحساب. فكم سيكون الرصيد بعد 15 عامًا؟

23. يدفع حساب توفير جامعي مرابحة سنوية مركبة قدرها 13.2% كل نصف عام. فكم سيكون رصيد الحساب بعد 12 عامًا إذا تم إيداع مبلغ AED 21,000 بشكل أولي؟

مثال 4 **حُلّ كل من المتباينات التالية.**

24. $625 \geq 5^{a+8}$
25. $10^{5b+2} > 1000$
26. $\left(\frac{1}{64}\right)^{c-2} < 32^{2c}$
27. $\left(\frac{1}{27}\right)^{2d-2} \leq 81^{d+4}$
28. $\left(\frac{1}{9}\right)^{3t+5} \geq \left(\frac{1}{243}\right)^{t-6}$
29. $\left(\frac{1}{36}\right)^{w+2} < \left(\frac{1}{216}\right)^{4w}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

30. **العلوم** تبلغ حرارة كوب من الشوكولاته الساخنة 90°C عند الزمن $t = 0$. وهذا الكوب تحاط بهواء درجة حرارته ثابتة عند 20°C. فإذا تم تقليبه بانتظام، ستصبح حرارته بالدرجة المئوية بعد t من الدقائق $y(t) = 20 + 70(1.071)^{-t}$.

a. جـد درجة حرارة الشوكولاته الساخنة بعد 15 دقيقة.

b. جـد درجة حرارة الشوكولاته الساخنة بعد 30 دقيقة.

c. درجة الحرارة المثالية للشرب هي 60°C. فهل سيكون كوب الشوكولاته الساخنة عند درجة الحرارة هذه أم أقل منها بعد 10 دقائق؟

31 **الحيوانات** تُظهر الدراسات أن أي حيوان سوف يدافع عن منطقته في حيز يُقدّر بالأمتار المربعة يكون متناسبًا بشكل طردي مع قوة قدرها 1.31 من وزن الحيوان بالكيلوغرام.

a. إذا دافع قندس وزنه 45 kg عن مساحة قدرها $170\ m^2$. فاكتب معادلة تمثل المساحة a التي يتم الدفاع عنها بواسطة قندس وزنه w من الكيلوجرامات.

b. يعتقد العلماء أنه منذ آلاف السنين، كان أسلاف القندس بطول 11 ft وبوزن 430 lb. استخدم معادلتك لتحديد المساحة التي دافعت عنها تلك الحيوانات.

حُلّ كل من المعادلات التالية.

32. $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+1} = 8^{2x+1}$

33. $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-5} = 25^{3x+2}$

34. $216 = \left(\frac{1}{6}\right)^{x+3}$

35. $\left(\frac{1}{8}\right)^{3x+4} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2x+4}$

36. $\left(\frac{2}{3}\right)^{5x+1} = \left(\frac{27}{8}\right)^{x-4}$

37. $\left(\frac{25}{81}\right)^{2x+1} = \left(\frac{729}{125}\right)^{-3x+1}$

38. **تمثيل النماذج** في عام 1950، بلغ تعداد سكان العالم 2.556 مليار نسمة. وبحلول عام 1980، ازداد العدد إلى 4.458 مليارات نسمة.

a. اكتب دالة أسية بالصيغة $y = ab^x$ والتي يمكن استخدامها لتمثيل تعداد سكان العالم y بالمليارات للفترة من 1950 وحتى 1980. اكتب المعادلة بحيث يكون x هو عدد الأعوام منذ 1950. (قرّب قيمة b إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.)

b. افترض أن هذا التعداد استمر في النمو بهذا المعدل. قدّر التعداد في عام 2000.

c. في عام 2000، بلغ تعداد سكان العالم حوالي 6.08 مليارات نسمة. قارن تقديرك بالتعداد الفعلي للسكان.

d. استخدم المعادلة التي كتبتها في الجزء a لتقدير تعداد سكان العالم في العام 2020. ما مدى دقة هذا التقدير برأيك؟ اشرح استنتاجك.

39. **الأشجار** يتغير قطر الدائرة لقاعدة جذع شجرة بالسنتيمترات طرديًا مع $\frac{3}{2}$ قوة ارتفاعها بالأمتار.

a. يبلغ طول شجرة سكوية صغيرة 6 m. ويبلغ قطر قاعدتها 19.1 cm. استخدم هذه المعلومات لكتابة معادلة للقطر d الخاص بقاعدة شجرة السكوية إذا كان ارتفاعها يبلغ h من الأمتار.

b. يبلغ طول شجرة الجنرال شيرمان في حديقة سكويا الوطنية بكاليفورنيا حوالي 84 m. جـد قطر قاعدة شجرة الشيرمان العامة.

40. **المعرفة المالية** لدى السيدة آمنة خطتان استثماريتان مختلفتان تتعلقان بالتقاعد لتختار واحدة من بينهما.

a. اكتب معادلتين للخيار A والخيار B بناءً على الحد الأدنى للإيداعات.

b. ارسم تمثيلاً بيانيًا لإظهار الأرصدة لكل خيار استثماري بعد عدد t من الأعوام.

c. اشرح ما إذا كان الخيار A أو الخيار B هو الخيار الأفضل للاستثمار.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

41. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف الزيادة السريعة لإحدى الدوال الأسيّة. تم قص ورقة كبيرة إلى نصفين. ووضعت إحدى القطعتين الناتجتين على القطعة الأخرى. بعد ذلك، تم قص القطعتين الموجودتين في هذه الكومة إلى نصفين ووضعت القطع الناتجة فوق بعضها البعض. افترض أنه تم تكرار هذا الإجراء عدة مرات.

a. **عمليًا** نفّذ هذا النشاط وقم بإحصاء عدد الأوراق في الكومة بعد القص أول مرة. كم سيكون عدد قُصاصات الورق في الكومة بعد ثاني عملية قص؟ وكم سيكون عدد قُصاصات الورق بعد ثالث مرة؟ وكم سيكون عدد قُصاصات الورق بعد رابع مرة؟

b. **جدوليًا سجّل نتائجك في جدول.**

c. **رمزيًا** استخدم النمط الموجود في الجدول لكتابة معادلة لعدد قُصاصات الورق في الكومة بعد عدد x من عمليات القصّ.

d. **تحليليًا** يبلغ سُمك ورقة عادية حوالي 0.003 cm. اكتب معادلة للتعبير عن سُمك كومة من هذه الورقة بعد عدد x من عمليات القصّ.

e. **تحليليًا** كم سيكون سُمك كومة الورق بعد 30 قصة؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

42. **الكتابة في الرياضيات** في مسألة عن المرابحة المركبة، صف ماذا يحدث عندما تصبح الفترات المركّبة أكثر تكرارًا، بينما يظل المبلغ الأصلي والوقت الكلي كما هما.

43. **تحليل الخطأ** يحل كل من آمنة وبدرية المعادلة $6^{x-3} > 36^{-x-1}$. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

آمنة

$6^{x-3} > 36^{-x-1}$

$6^{x-3} > (6^2)^{-x-1}$

$6^{x-3} > 6^{-2x-2}$

$x - 3 > -2x - 2$

$3x > 1$

$x > \frac{1}{3}$

بدرية

$6^{x-3} > 36^{-x-1}$

$6^{x-3} > (6^2)^{-x-1}$

$6^{x-3} > 6^{-2x-2}$

$x - 3 > -2x - 2$

$3x > 1$

$x > \frac{1}{3}$

44. **تحدٍّ** حل لإيجاد x: $16^{18} + 16^{18} + 16^{18} + 16^{18} + 16^{18} = 4^x$.

45. **مسألة غير محددة الإجابة** ما التغيير الذي قد يكون أكثر فائدةً لقرض مدته 5 أعوام بمرابحة مركبة نسبتها 8% شهريا: تقليل المدة إلى 4 أعوام أم تقليل نسبة المرابحة إلى 6.5%؟

46. **الفرضيات** حدّد ما إذا كانت العبارات التالية صحيحةً أحيانًا أم دائمًا أم غير صحيحة على الإطلاق. اشرح استنتاجك.

a. $2^x > -8^{20x}$ لجميع قيم x.

b. يتزايد التمثيل البياني لمعادلة نمو أسي.

c. يتزايد التمثيل البياني لمعادلة تضاؤل أسي.

47. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب متباينةً أسيّة مع حل $x \leq 2$.

48. **البرهان** أثبت أن $27^{2x} \cdot 81^{x+1} = 3^{2x+2} \cdot 9^{4x+1}$.

49. **الكتابة في الرياضيات** إذا كانت لديك الكميتين الأولية والنهائية لمادة مشعة ما ومقدار الزمن الذي يمر، فكيف يمكنك تحديد معدل زيادة أو انخفاض الكمية من أجل كتابة معادلة؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

50. $3 \times 10^{-4} =$

A 0.003
B 0.0003
C 0.00003
D 0.000003

51. أي مما يلي يمكن أن لا يكون حلاً لـ $5 - 3x < -3$؟

F 2.5
G 3
H 3.5
J 4

52. إجابة شبكية تتمثل الزوايا الثلاث لمثلث في $3x$ و $x + 10$ و $2x - 40$. جد قياس أصغر زاوية في المثلث.

53. SAT/ACT أي مما يلي يكون مساويًا لـ $(x)(x)(x)(x)$ لجميع رموز x؟

A $x + 4$
B $4x$
C $2x^2$
D $4x^2$
E x^4

مراجعة شاملة

مثّل كل دالة بيانيًا. (الدرس 1-5)

54. $y = 2(3)^x$

55. $y = 5(2)^x$

56. $y = 4\left(\frac{1}{3}\right)^x$

استخدم خاصية التوزيع لتحليل كل كثيرة حدود إلى العوامل. (الدرس 4-4)

57. $4m^3n^2 + 16m^2n^3 - 8m^3n^4$

58. $12j^4k^4 + 36j^3k^2 - 3j^2k^5$

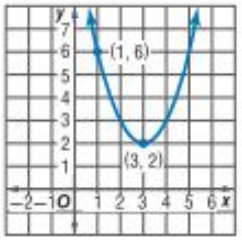
حلّل كل كثيرة حدود إلى العوامل.

59. $x^2 - 4x + 3xy - 12y$

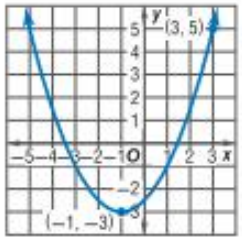
60. $4a - 10ab + 6b - 15b^2$

اكتب معادلةً بصيغة الرأس لكل قطع مكافئ. (الدرس 4-7)

61.



62.



مثّل كل دالة بيانيًا. اذكر المجال والمدى. (الدرس 1-5)

63. $f(x) = \frac{2}{3}(2^x)$

64. $f(x) = 4^x + 3$

65. $f(x) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^x - 1$

66. الجوائز تستخدم آلة لإلقاء الفيضان على الجمهور في مباريات لكرة السلة. (الدرس 4-7)

a. ما الارتفاع الأولي للفيض؟

b. إذا تم الإمساك بالفيض بعد ثانيتين، فماذا سيكون الارتفاع؟

مراجعة المهارات

جد $[g \circ h](x)$ و $[h \circ g](x)$.

66. $h(x) = 2x - 1$
$g(x) = 3x + 4$

67. $h(x) = x^2 + 2$
$g(x) = x - 3$

68. $h(x) = x^2 + 1$
$g(x) = -2x + 1$

69. $h(x) = -5x$
$g(x) = 3x - 5$

70. $h(x) = x^3$
$g(x) = x - 2$

71. $h(x) = x + 4$
$g(x) = |x|$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

5-6 تحويل التعابير الأسيّة

يمكنك استخدام خواص الأسس النسبية في تحويل الدوال الأسيّة إلى صيغ أخرى لحل مسائل من الحياة اليومية.

النشاط اكتب التعابير الأسية المكافئة

تحاول غاية أن تختار من بين خطتي حساب ادخار. وتقدم الخطة A نسبة مرابحة مركبة شهرية تبلغ 0.25%، بينما تقدم الخطة B نسبة مرابحة مركبة سنوية تبلغ 2.5%. فأي الخطتين الأفضل؟ اشرح.

من أجل المقارنة بين الخطتين، يجب أن نقارن النسبتين بالتكرار المركب نفسه. فالطريقة الأولى للقيام بهذا تتمثل في المقارنة بين نسبتي المرابحة الشهريتين التقريبيتين للخطتين. واللتين تُسميان أيضًا نسبة المرابحة الشهرية *الفعلية*. وعلى الرغم من أنه يمكنك استخدام قانون المرابحة المركبة لإيجاد هذه النسبة، فيمكنك أيضًا استخدام خواص الأسس.

اكتب دالة لتمثيل المبلغ A الذي ستكسبه غاية بعد عدد t من السنوات من خلال الخطة B. وللتيسير، افترض أن المبلغ الأولي لاستثمار غاية هو 1 AED.

$y = a(1 + r)^t$ معادلة النمو الأسي

$A(t) = 1(1 + 0.025)^t$ $y = A(t)$ أو $a = 1$ أو $r = 2.5\%$ أو 0.025

$= 1.025^t$ بسّط.

الآن، اكتب دالة تعادل $A(t)$ تمثل 12 تركيبًا في السنة، بقوة تبلغ $12t$، بدلاً من 1 في السنة، بقوة تبلغ $1t$.

$A(t) = 1.025^{1t}$ الدالة الأصلية

$= 1.025^{\left(\frac{1}{12} \cdot 12\right)t}$ $1 = \frac{1}{12} \cdot 12$

$= \left(1.025^{\frac{1}{12}}\right)^{12t}$ قوة أسية لقوة أسية

$\approx 1.0021^{12t}$ $(1.025)^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{1.025}$ أو حوالي 1.0021

من هذه الدالة المكافئة، يمكننا تحديد أن نسبة المرابحة الشهرية الفعلية حسب الخطة B تبلغ 0.0021 تقريبًا أو حوالي 0.21% في الشهر. حيث تقل هذه النسبة عن نسبة المرابحة الشهرية البالغة 0.25% في الشهر التي تقدمها الخطة A. إذًا، فإن الخطة A هي الخطة الأفضل.

التمثيل والتحليل

1. استخدم قانون المرابحة المركبة $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ لتحديد نسبة المرابحة الشهرية الفعلية للخطة B. ما وجه مقارنة هذه النسبة بالنسبة المحسوبة باستخدام الطريقة الواردة في النشاط أعلاه؟

2. اكتب دالة لتمثيل المبلغ A الذي ستكسبه غاية بعد عدد t من الأشهر في الخطة A. ثم استخدم خواص الأسس لكتابة دالة تعادل $A(t)$ التي تمثل المبلغ المُكتسب بعد عدد t من السنوات.

3. من التعبير الذي كتبته في التمرين 2، حدد نسبة المرابحة السنوية الفعلية حسب الخطة A. استخدم هذه النسبة لشرح السبب في كون الخطة A هي الخطة الأفضل.

4. افترض أن الخطة A عرضت نسبة مرابحة مركبة ربع سنوية تبلغ 1.5%. استخدم خواص الأسس لتوضيح أيهما الخطة الأفضل.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

5 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

الدوال الأسيّة (الدرسان 5-5 و 5-6)

- معادلة النمو الأسي هي $y = a(1 + r)^t$، حيث $r > 0$. معادلة الاضمحلال الأسي هي $y = a(1 - r)^t$، حيث y . $0 < r < 1$ هي المبلغ النهائي، و a المبلغ الأولي، و r هي معدل التغيير و t هي الزمن بالأعوام.

مطويات منظّم الدراسة

تأكد من إدراج المفاهيم الأساسية في المطوية.

المفردات الأساسية

أحادية الحد monomial	نسبة مشتركة common ratio
الأس السالب negative exponent	المرابحة المركبة compound interest
الجذر النوني n nth root	ثابت constant
رتبة المقدار order of magnitude	الجذر التكعيبي cube root
الأس النسبي rational exponent	الاضمحلال الأسيّ exponential decay
صيغة تكرارية recursive formula	المعادلة الأسيّة exponential equation
الترميز العلمي scientific notation	الدالة الأسيّة exponential function
الأس الصفري zero exponent	النمو الأسيّ exponential growth
	متتالية هندسية geometric sequence

مراجعة المفردات

اختر أفضل كلمة أو مصطلح لإكمال كل جملة بالشكل الأمثل.

1. $7xy^4$ مثال على _____.
2. _____ من 95,234 هي 10^5.
3. 2 هي _____ لـ 8.
4. يمكن تمديد قواعد العمليات باستخدام الأسس لتنطبق على التعابير التي بها _____ مثل $7^{\frac{2}{3}}$.
5. العدد المكتوب بـ _____ يكون بالصيغة $a \times 10^n$، حيث $1 \le a < 10$ و n عدد صحيح.
6. $f(x) = 3^x$ مثال على _____.
7. $a_1 = 4$ و $a_n = 3a_{n-1} - 12$، إذا كانت $n \ge 2$، هي _____ للمتتالية ... 4, −8, −20, −32,.
8. $2^{3x-1} = 16$ مثال على _____
9. معادلة _____ هي $y = C(1 - r)^t$.
10. إذا كانت $a^n = b$ للعدد الصحيح الموجب n، فإن a هي _____ لـ b.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة درس بدرس

5-1 الدوال الأسيّة

مثّل كل دالة بيانيًا. جـد المقطع من المحور الرأسيّ y واذكر المجال والمدى.

42. $y = 2^x$

43. $y = 3^x + 1$

44. $y = 4^x + 2$

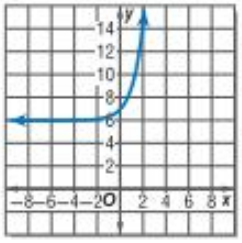
45. $y = 2^x - 3$

46. **علم الأحياء** يزداد عدد البكتيريا في طبق معملي وفقًا للنموذج $p = 550(2.7)^{0.008t}$. حيث t هي عدد الساعات و $t = 0$ تقابل الساعة 1:00 مساءً استخدم هذا النموذج لتقدير عدد البكتيريا في الطبق في الساعة 5:00 مساءً

مثال 1

مثّل بيانيًا $y = 3^x + 6$. جـد نقطة التقاطع مع المحور الرأسيّ واذكر المجال والمدى.

x	$3^x + 6$	y
−3	$3^{-3} + 6$	6.04
−2	$3^{-2} + 6$	6.11
−1	$3^{-1} + 6$	6.33
0	$3^0 + 6$	7
1	$3^1 + 6$	9



نقطة التقاطع مع المحور الرأسيّ y هي $(0, 7)$. المجال هو كل الأعداد الحقيقية والمدى هو كل الأعداد الحقيقية الأكبر من 6.

5-2 تحديد الدوال باستخدام الفروق المتتالية

ابحث عن نمط في كل جدول قيم لتحديد أي نوع من النماذج هو الأفضل في وصف البيانات، ثُمّ اكتب معادلة للدالة التي تمثّل البيانات.

45.

x	0	1	2	3	4
y	0	3	12	27	48

46.

x	0	1	2	3	4
y	1	2	4	8	16

47.

x	0	1	2	3	4
y	0	-1	-4	-9	-16

مثال 2

حدّد النموذج الأفضل في وصف البيانات، ثُمّ اكتب معادلة للدالة التي تمثّل البيانات.

x	0	1	2	3	4
y	3	4	5	6	7

الخطوة 1

تمثّل البيانات دالة خطية.

الخطوة 2

الميل يساوي 1 والتقاطع مع المحور y هو 3. إذًا فالمعادلة هي $y = x + 3$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

5-3 النمو والاضمحلال (التضاؤل)

47. جـد القيمة النهائية لمبلغ AED 2500 تم استثماره بنسبة مرابحة تبلغ 2% مركبة شهريًا لمدة 10 سنوات.

48. أجهزة الحاسوب يتعرض حاسوب علياء للإهلاك بمعدل 3% في السنة. اشترت الحاسوب مقابل AED 1200.

a. اكتب دالة لتمثيل هذا الموقف.

b. كم ستبلغ قيمة الحاسوب بعد 5 سنوات؟

مثال 3

جـد القيمة النهائية لمبلغ AED 2000 تم استثماره بنسبة مرابحة مركبة تبلغ 3% كل ثلاثة أشهر لمدة 8 سنوات.

$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ معادلة المرابحة المركبة

$= 2000\left(1 + \frac{0.03}{4}\right)^{4(8)}$ $P = 2000$، و $r = 0.03$، و $n = 4$، و $t = 8$

$\approx$ AED 2540.22 استخدم حاسبة.

5-4 المتتاليات الهندسية في صورة دوال أسية

جـد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية هندسية.

49. $-1, 1, -1, 1, \ldots$

50. $3, 9, 28, \ldots$

51. $256, 128, 64, \ldots$

اكتب معادلة للحد n في كل متتالية هندسية.

52. $-1, 1, -1, 1, \ldots$

53. $3, 9, 27, \ldots$

54. $256, 128, 64, \ldots$

55. الرياضة سقطت كرة سلة من ارتفاع 20 m ثم ظلت ترتد إلى $\frac{1}{2}$ ارتفاعها بعد كل ارتداد. ارسم تمثيلاً بيانيًا يمثل هذا الموقف.

مثال 4

جـد الحدود الثلاثة التالية للمتتالية الهندسية $2, 6, 18, \ldots$.

الخطوة 1 جـد النسبة المشتركة. يبلغ كل عدد 3 أضعاف العدد السابق. إذًا $r = 3$.

الخطوة 2 اضرب كل حد في النسبة المشتركة لإيجاد الحدود الثلاثة التالية.

$18 \times 3 = 54,\ 54 \times 3 = 162,\ 162 \times 3 = 486$

الحدود الثلاثة التالية هي 54 و 162 و 486.

مثال 5

اكتب معادلة الحد n للمتتالية الهندسية $-3, 12, -48, \ldots$.

النسبة المشتركة هي -4. إذًا $r = -4$.

$a_n = a_1 r^{n-1}$ قانون الحد n

$a_n = -3(-4)^{n-1}$ $a_1 = -3$ و $r = -4$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة درس بدرس

5-5 الصيغ التكرارية

جـد الحدود الخمسة الأولى من كل متتالية.

56. $a_1 = 11,\ a_n = a_{n-1} - 4,\ n \geq 2$

57. $a_1 = 3,\ a_n = 2a_{n-1} + 6,\ n \geq 2$

اكتب صيغةً تكراريةً لكل متتالية مما يلي.

58. 2, 7, 12, 17, ...

59. 32, 16, 8, 4, ...

60. 2, 5, 11, 23, ...

مثال 6

اكتب صيغة تكرارية للمتتالية ... 3, 1, −1, −3, .

الخطوة 1 اطرح أولاً كل حد من الحد الذي يليه.

$1 - 3 = -2,\ -1 - 1 = -2,\ -3 - (-1) = -2$

هناك فرق مشترك يبلغ -2. المتتالية حسابية.

الخطوة 2 استخدم قانون المتتالية الحسابية.

$a_n = a_{n-1} + d$ الصيغة التكرارية

$a_n = a_{n-1} + (-2)$ $d = -2$

الخطوة 3 الحد الأول a_1 هو 3 و $n \geq 2$.

الصيغة التكرارية هي $a_1 = 3,\ a_n = a_{n-1} - 2,\ n \geq 2$.

5-6 حل المعادلات والمتباينات الأسية

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يلي.

12. $16^x = \frac{1}{64}$

13. $3^{4x} = 9^{3x+7}$

14. $64^{3n} = 8^{2n-3}$

15. $8^{3-3y} = 256^{4y}$

16. $9^{x-2} > \left(\frac{1}{81}\right)^{x+2}$

17. $27^{3x} \leq 9^{2x-1}$

18. **البكتيريا** بدأ عدد أحد أنواع البكتيريا بـ 5000 كائن بكتيري. وبعد 8 ساعات، بلغ عدد البكتيريا 28,000 في العينة.

a. اكتب دالة أسية يمكن استخدامها في تمثيل عدد البكتيريا بعد x من الساعات إذا كان عدد البكتيريا يتغير بالمعدل نفسه.

مثال 7

حُـلّ $4^{3x} = 32^{x-1}$ لإيجاد قيمة x.

$4^{3x} = 32^{x-1}$ المعادلة الأصلية

$(2^2)^{3x} = (2^5)^{x-1}$ أعد كتابة المعادلة بحيث يكون للطرفين الأساس ذاته.

$2^{6x} = 2^{5x-5}$ قوة لقوة

$6x = 5x - 5$ خاصية المساواة في الأسس

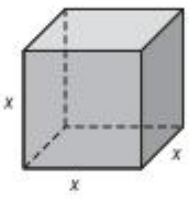
$x = -5$ اطرح $5x$ من كل طرف.

الحل يساوي -5.

5 تدريب على الاختبار

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

1. $(x^{2})(7x^{8})$
2. $(5a^{7}bc^{2})(-6a^{2}bc^{5})$
3. **الاختيار من متعدد** عبّر عن حجم الجسم الصلب بدالة أحادية الحد.



A x^{3} C $6x^{3}$

B $6x$ D x^{6}

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. افترض أنه لا يوجد مقام يساوي 0.

4. $\frac{x^{6}y^{8}}{x^{2}}$
5. $\left(\frac{2a^{4}b^{3}}{c^{6}}\right)^{0}$
6. $\frac{2xy^{-7}}{8x}$

بسّط.

7. $\sqrt[3]{1000}$
8. $\sqrt[5]{3125}$
9. $1728^{\frac{1}{3}}$
10. $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{2}}$
11. $27^{\frac{2}{3}}$
12. $10{,}000^{\frac{3}{4}}$
13. $27^{\frac{5}{3}}$
14. $\left(\frac{1}{121}\right)^{\frac{3}{2}}$

حُلّ كل من المعادلات التالية.

15. $12^{x} = 1728$
16. $7^{x-1} = 2401$
17. $9^{x-3} = 729$

عبّر عن كل عدد بالترميز العلمي.

18. 0.00021
19. 58,000

عبّر عن كل عدد بالصيغة القياسية.

20. 2.9×10^{-5}
21. 9.1×10^{6}

جِد قيمة كل ناتج ضرب أو ناتج قسمة. عبّر عن النتائج بالترميز العلمي.

22. $(2.5 \times 10^{3})(3 \times 10^{4})$
23. $\frac{8.8 \times 10^{2}}{4 \times 10^{-4}}$
24. **علم الفلك** يبلغ متوسط المسافة من كوكب عطارد إلى الشمس 57,910,000 km. عبّر عن هذه المسافة بالترميز العلمي.

مثّل كل دالة بيانيًا. جِد المقطع من المحور الرأسيّ y، واذكر المجال والمدى.

25. $y = 2(5)^{x}$
26. $y = -3(11)^{x}$
27. $y = 3^{x} + 2$

جِد الحدود الثلاثة التالية لكل متتالية هندسية.

28. 2, −6, 18, ...
29. 1000, 500, 250, ...
30. 32, 8, 2, ...
31. **الاختيار من متعدد** استثمرت شيماء AED 500 في حساب بنسبة مرابحة مركبة تبلغ 6.5% شهريًا. كم ستبلغ قيمة استثمار شيماء خلال 10 سنوات؟

F AED 600.00

G AED 938.57

H AED 956.09

J AED 957.02

32. **الاستثمارات** كان استثمار سها بمبلغ AED 3000 يخسر من قيمته بمعدل 3% كل عام. كم ستبلغ قيمة استثمارها خلال 6 سنوات؟

جِد الحدود الخمسة الأولى من كل متتالية.

33. $a_{1} = 18,\ a_{n} = a_{n-1} - 4,\ n \geq 2$
34. $a_{1} = -2,\ a_{n} = 4a_{n-1} + 5,\ n \geq 2$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

5 التحضير للاختبارات المعيارية

استخدام حاسبة علمية أو حاسبة تمثيل بياني

الحاسبات العلمية وحاسبات التمثيل البياني أدوات قوية لحل المسائل.
هناك أوقات يمكن استخدام حاسبة فيها لإجراء الحسابات بشكل أسرع وأسهل، مثل الحسابات التي تتضمن أرقامًا كبيرة للغاية. إلا أن هناك أوقات من اللازم فيها استخدام حاسبة، مثل تقدير الأعداد غير النسبية.

إستراتيجيات استخدام حاسبة علمية أو حاسبة تمثيل بياني

الخطوة 1

تعرف على الوظائف المتعددة التي تقوم بها الحاسبة العلمية وحاسبة التمثيل البياني إلى جانب المواقف التي ينبغي استخدامها فيها:

- **الأسس** الترميز العلمي، الحسابات ذات الأعداد الكبيرة أو الصغيرة
- **π (Pi)** حل مسائل الدائرة، مثل المحيط والمساحة
- **الجذور التربيعية** المسافة على مستوى إحداثي، نظرية فيثاغورث
- **التمثيلات البيانية** تحليل ثنائيات البيانات في مخطط انتشار، تمثيل الدوال بيانيًا، إيجاد جذور المعادلات

الخطوة 2

استخدام الحاسبة العلمية أو حاسبة التمثيل البياني في حل المسألة.

- تذكر أن تعمل بكفاءة قدر الإمكان. قد يتم إجراء بعض الخطوات ذهنيًا أو باليد، بينما ينبغي استكمال خطوات أخرى باستخدام حاسبتك.
- إذا سمح الوقت، فتحقق من إجابتك.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها.

تبلغ المسافة من الشمس إلى كوكب المشتري 7.786×10^{11} m تقريبًا. إذا كانت سرعة الضوء تبلغ 3×10^{8} m/sec تقريبًا، فكم يستغرق الضوء للوصول من الشمس إلى كوكب المشتري؟ قرّب إلى أقرب دقيقة.

A حوالي 43 دقيقة
B حوالي 51 دقيقة
C حوالي 1876 دقيقة
D حوالي 2595 دقيقة

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

اقرأ المسألة بعناية. حصلت على المسافة التقريبية بين الشمس وكوكب المشتري إلى جانب سرعة الضوء. كلا المقدارين مذكوران بترميز علمي. مطلوب منك أن تجد عدد الدقائق التي يستغرقها الضوء للوصول من الشمس إلى كوكب المشتري. استخدم مسافة العلاقة = السرعة × الزمن لإيجاد المقدار.

$$d = r \times t$$

$$\frac{d}{r} = t$$

لإيجاد مقدار الزمن، اقسم المسافة على السرعة. لاحظ أن وحدات الزمن ستكون الثواني.

$$\frac{7.786 \times 10^{11}\ \text{m}}{3 \times 10^{8}\ \text{m/s}} = t \text{ ثانية}$$

استخدم حاسبة علمية للتوصل بسرعة إلى ناتج القسمة. في معظم الحاسبات العلمية، يُستخدم مفتاح EE لإدخال الأرقام بالترميز العلمي.

خطوات العملية على الحاسبة: (7.786 2nd [EE] 11) ÷ (3 2nd [EE] 8) ENTER

النتيجة هي 2595.33333333 ثانية. لتحويل هذا العدد إلى دقائق، استخدم حاسبتك لقسمة النتيجة على 60. يعطي هذا إجابة تبلغ حوالي 43.2555 دقيقة. الإجابة هي A.

تمارين

اقرأ كل مسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها.

1. منذ إنشاء موقع إلكتروني شهير على الإنترنت قبل 5 سنوات، تم بيع حوالي 2.504×10^{7} عنصر أو تداوله عليه. ما المتوسط اليومي لعدد العناصر التي يتم بيعها أو تداولها على مدار 5 سنوات؟

A حوالي 9640 عنصرًا في اليوم

B حوالي 13,720 عنصرًا في اليوم

C حوالي 1,025,000 عنصر في اليوم

D حوالي 5,008,000 عنصر في اليوم

2. جد قيمة $\sqrt{ab}$ إذا كانت $a = 121$ و $b = 23$.

F حوالي 5.26

G حوالي 9.90

H حوالي 12

J حوالي 52.75

3. يبلغ تعداد سكان الولايات المتحدة 3.034×10^{8} نسمة تقريبًا. تبلغ مساحة البلد $9.17 \times 10^{6}\ \text{km}^2$ تقريبًا. ما متوسط *الكثافة السكانية* (عدد الأشخاص في الميل المربع) في الولايات المتحدة؟

A حوالي 136.3 شخص في الكيلومتر المربع

B حوالي 30.2 شخص في الكيلومتر المربع

C حوالي 94.3 شخص في الكيلومتر المربع

D حوالي 33.1 شخص في الكيلومتر المربع

4. تصنع غاية غطاء لطبلة الفرقة العسكرية. يبلغ قطر الطبلة 20 cm. ضع تقديرًا لمساحة سطح الطبلة الكبيرة.

F $31.41\ \text{m}^2$

G $62.83\ \text{cm}^2$

H $78.54\ \text{cm}^2$

J $314.16\ \text{cm}^2$

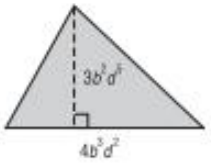
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري
تراكمي، الوحدات من 1 إلى 5

اختيار من متعدد

اقرأ كُل سؤال. ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي قدمها المعلم أو ورقة أخرى.

1. عبّر عن مساحة المثلث بالأدنى بدالة أحادية الحد.



A $12b^5d^7$

B $12b^6d^{10}$

C $6b^6d^{10}$

D $6b^5d^7$

2. حوّل التعبير التالي لأبسط صورة.

$$\left(\frac{2w^2z^5}{3y^4}\right)^3$$

F $\frac{2w^5z^8}{3y^7}$

G $\frac{8w^6z^{15}}{27y^{12}}$

H $\frac{8w^5z^8}{27y^7}$

J $\frac{2w^6z^{15}}{3y^{12}}$

3. ما معادلة المستقيم المتعامد على $y = \frac{3}{5}x - 3$؟

A $y = -\frac{5}{3}x + 2$

B $y = -\frac{3}{5}x + 2$

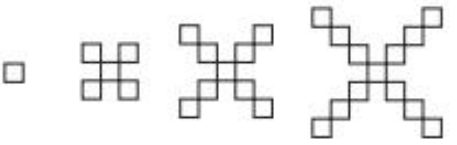
C $y = \frac{5}{3}x - 2$

D $y = \frac{3}{5}x - 2$

نصيحة عند حل الاختبار

السؤال 2 استخدم قوانين الأسس لتحويل التعبير لأبسط صورة. تذكّر أن الأسس عند الضرب تُجمع وعند القسمة تُطرح وعند الرفع تضرب.

4. اكتب صيغة تكرارية للمتتالية التي تمثل عدد المربعات في كل شكل.



F $a_1 = 1, a_n = 4a_{n-1} - 3, n \geq 1$

G $a_1 = 1, a_n = 4a_{n-1}, n \geq 2$

H $a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 4, n \geq 2$

J $a_1 = 1, a_n = 4a_{n-1} + 4, n \geq 2$

5. جد قيمة $(4.2 \times 10^{-6})(5.7 \times 10^{8})$.

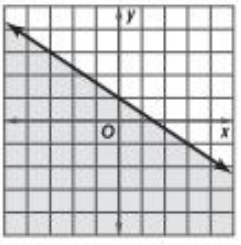
A 2.394×10^{15}

B 23.94×10^{14}

C 9.9×10^{14}

D 2.394×10^{48}

6. أي المتباينات تظهر في التمثيل البياني؟



F $y \leq -\frac{2}{3}x - 1$

G $y \leq -\frac{3}{4}x - 1$

H $y \leq -\frac{2}{3}x + 1$

J $y \leq -\frac{3}{4}x + 1$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الإجابة المختصرة/الإجابة الشبكية

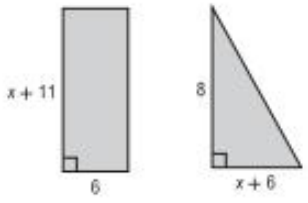
7. أنشأ سعيد موقع ويب لفريق الأولمبياد العلمي. يظهر العدد الإجمالي للزيارات التي تلقاها الموقع.

اليوم	إجمالي الزيارات	اليوم	إجمالي الزيارات
3	5	17	27
6	7	21	33
10	12	26	40
13	17	34	55

a. جـد معادلة خط الانحدار.

b. توقع عدد الزيارات الإجمالي الذي سيكون الموقع الإلكتروني قد تلقاه بحلول اليوم 46.

8. جـد قيمة x بحيث يكون للأشكال المساحة نفسها.



9. ما حل نظام المعادلات التالي؟ اكتب الحل هنا.

$$\begin{cases} y = 6x - 1 \\ y = 6x + 4 \end{cases}$$

10. إجابة شبكية في مركز ألعاب عائلي، اشترت كل من عائلتي عامر وعبد الله رموز لعبة فيديو ورموز ملعب لضرب الكرة كما يظهر في الجدول.

الأسرة	عامر	عبد الله
عدد رموز لعبة الفيديو	25	30
عدد رموز ملعب ضرب الكرة	8	6
التكلفة الإجمالية	AED 26.50	AED 25.50

ما تكلفة رمز ملعب ضرب الكرة بالدرهم في مركز الألعاب العائلي؟

الإجابة الموسعة

اكتب إجاباتك على ورقة. اكتب الحل هنا.

11. يعرض الجدول أدناه المسافات من الشمس إلى كوكب عطارد والأرض والمريخ وزحل. استخدم البيانات للإجابة عن كل سؤال.

الكوكب	المسافة من الشمس (بالكيلومتر)
عطارد	5.79×10^7
الأرض	1.50×10^8
المريخ	2.28×10^8
زحل	1.43×10^9

a. من بين الكواكب المدرجة، أيهم الأقرب إلى الشمس؟

b. كم ضعفًا يبلغ بُعد المريخ عن الشمس بالمقارنة بالأرض؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 6

الدوال والمعادلات الجذرية والنسبية

Chapter Sourced From: Radical Functions, Rational Functions and Geometry for Integrated Math I Chapter 8 © 2012 McGraw-Hill Education
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

السابق

- وجدت حل المعادلات التربيعية والأسية.

الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرا على:
  - تمثيل الدوال الجذرية بيانيا وتحويلها.
  - تبسيط التعابير الجذرية وجمعها وطرحها وضربها.
  - حل المعادلات الجذرية.
  - استخدام نظرية فيثاغورس.

لماذا؟ ▲

- **محيطات** تتولد تسونامي، أو الأمواج الكبرى، من الزلازل الواقعة تحت البحر. ويمكن استخدام المعادلة الجذرية لإيجاد سرعة تسونامي بالأمتار في الثانية أو عبق المحيط بالأمتار.

الاستعداد للوحدة

1 خيار الكتاب المدرسي

أجب عن أسئلة التدريب السريع التالية. يُرجى الرجوع إلى الجزء "مراجعة سريعة" للحصول على المساعدة.

مراجعة سريعة

جِـد كل جذر تربيعي. وعند الضرورة، قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

1. $\sqrt{82}$
2. $\sqrt{26}$
3. $\sqrt{15}$
4. $\sqrt{99}$

5. صندوق الرمل يصنع عيسى صندوق مكعبا مساحة قاعدته $100\ ft^2$. فكم طول الضلع في الصندوق؟

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

6. $(21x + 15y) - (9x - 4y)$
7. $13x - 5y + 2y$
8. $(10a - 5b) + (6a + 5b)$
9. $6m + 5n + 4 - 3m - 2n + 6$
10. $x + y - 3x - 4y + 2x - 8y$

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

11. $2x^2 - 4x = 0$
12. $6x^2 - 5x - 4 = 0$
13. $x^2 - 7x + 10 = 0$
14. $2x^2 + 7x - 5 = -1$

15. الهندسة مساحة المستطيل المجاور تساوي $90\ m^2$. جِـد x.

تدريب سريع

مثال 1

جِـد الجذر التربيعي لـ $\sqrt{50}$. وعند الضرورة، قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

استخدم الآلة الحاسبة. $\sqrt{50} = 7.071067812....$

إلى أقرب جزء من مئة، $\sqrt{50} = 7.07$.

مثال 2

بسّط $3x + 7y - 4x - 8y$.

$3x + 7y - 4x - 8y$

$= (3x - 4x) + (7y - 8y)$ اجمع الحدود المتشابهة.

$= -x - y$ بسّط.

مثال 3

حُـلّ المعادلة $x^2 - 5x + 6 = 0$.

$x^2 - 5x + 6 = 0$ المعادلة الأصلية

$(x - 3)(x - 2) = 0$ حلل إلى العوامل.

$x - 3 = 0$ أو $x - 2 = 0$ خاصية ناتج الضرب الصفري

$x = 3$ $x = 2$ حل كل معادلة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

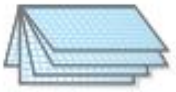
البدء في الوحدة

سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهارات ومفردات جديدة خلال دراستك لهذه الوحدة. للاستعداد، حدد المصطلحات المهمة ونظّم مواردك.

مطويات منظّم الدراسة

الدوال الجذرية والهندسة اصنع هذه المطوية لمساعدتك على تنظيم ملاحظاتك عن الوحدة 6 المتعلقة بالدوال الجذرية والهندسة. ابدأ باستخدام أربع ورقات من ورق التمثيل البياني.

1 **اطوِ** الورق إلى نصفين بالعرض.



2 **دبّس** بطول الطية.

3 **اقلب** الطية إلى اليمين واكتب عنوان الوحدة في الأمام. في كل صفحة يمنى من المطوية، اكتب عنوان درس من دروس الوحدة.

المفردات الجديدة

- دالة الجذر التربيعي square root function
- مجذور radicand
- دالة جذرية radical function
- تعبير جذري radical expression
- مرافق conjugate
- إنطاق المقام rationalize the denominator
- مغلقة closed
- معادلات جذرية radical equations
- حلول دخيلة extraneous solutions
- تغير عكسي inverse variation
- قاعدة ناتج الضرب product rule
- دالة نسبية rational function
- قيم مستبعدة excluded values
- خط تقارب asympote
- معادلة نسبية rational equation
- مسألة عمل work problem
- مسألة معدل rate problem

مراجعة المفردات

طريقة فويل لضرب زوج من ثنائيات الحدود، جد مجموع نواتج ضرب الحدين الأولين، والحدين الطرفيين، والحدين الوسطيين، والحدين الأخيرين

المربع الكامل عدد يكون جذره التربيعي عددًا نسبيًا

التناسب هو معادلة لها الصيغة $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, b \neq 0$ d $\neq 0$ توضح أن النسبتين متكافئتان

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$$
$$ad = bc$$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © محقوق الطبع والتأليف

6-1 دوال الجذر التربيعي

السابق
- مثّلت الدوال الخطية والأسية والتربيعية بيانيًا وحللتها.

الحالي
1. تمثيل تمددات الدوال الجذرية وتحليلها.
2. تمثيل انعكاسات وإزاحات الدوال الجذرية بيانيًا وتحليلها.

لماذا؟
- يستخدم العلماء أصوات الحيتان لتتبع تحركاتها. ويمكن إيجاد المسافة إلى الحوت عن طريق الربط بين الزمن وسرعة الصوت في الماء.

يمكن وصف سرعة الصوت في الماء بدالة الجذر التربيعي $c = \sqrt{\frac{E}{d}}$. حيث E تمثل مجموعة معامل المرونة للماء و d تمثل كثافة الماء.

المفردات الجديدة
- **دالة الجذر التربيعي** square root function
- **دالة جذرية** radical function
- **مجذور** radicand

ممارسات في الرياضيات
مراعاة الدقة.

1 تمدد الدوال الجذرية

تشتمل **دالة الجذر التربيعي** على الجذر التربيعي لمتغير. وتعد دوال الجذر التربيعي نوعًا من أنواع **الدالة الجذرية**. ويُطلق على التعبير تحت اشارة الجذر: **المجذور**. لكي يكون الجذر التربيعي عددًا حقيقيًا، لا يمكن أن يكون المجذور سالبًا. القيم التي تجعل المجذور سالبًا لا يتم تضمينها في المجال.

المفهوم الأساسي دالة الجذر التربيعي

الدالة الأصلية:	$f(x) = \sqrt{x}$
نوع التمثيل البياني:	منحنى
المجال:	$\{x \mid x \geq 0\}$
المدى:	$\{y \mid y \geq 0\}$

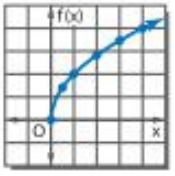
مثال 1 تمدد دالة الجذر التربيعي

مثّل $f(x) = 2\sqrt{x}$ بيانيًا. واذكر المجال والمدى.

الخطوة 1 أنشئ جدولاً.

x	0	0.5	1	2	3	4
f(x)	0	≈1.4	2	≈2.8	≈3.5	4

الخطوة 2 عيّن النقاط. ارسم منحنى منتظمًا.



المجال هو $\{x \mid x \geq 0\}$. والمدى هو $\{y \mid y \geq 0\}$. لاحظ أن التمثيل البياني يتزايد على المجال بالكامل. والقيمة الصغرى هي 0. ولا يوجد تماثل.

تمرين موجّه

1A. $g(x) = 4\sqrt{x}$

1B. $h(x) = 6\sqrt{x}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 الانعكاس والإزاحة للدوال الجذرية

تذكر أنه عندما تكون القيمة a سالبة في الدالة التربيعية $f(x) = ax^2$، يكون التمثيل البياني للدالة الأصلية منعكسًا للأسفل على المحور x.

المفهوم الأساسي التمثيل البياني لـ $y = a\sqrt{x+h} + k$

الخطوة 1 ارسم تمثيلاً بيانيًا لـ $y = a\sqrt{x}$. يبدأ التمثيل البياني عند نقطة الأصل ويمر بالنقطة $(1, a)$. إذا كان $a > 0$، فالتمثيل البياني يكون في الربع الأول.
إذا كان $a < 0$، فالتمثيل البياني يكون منعكسًا للأسفل على المحور x ويكون في الربع الرابع.

الخطوة 2 أزح التمثيل البياني k وحدات لأعلى إذا كان $k > 0$ و $|k|$ وحدات لأسفل إذا كان $k < 0$.

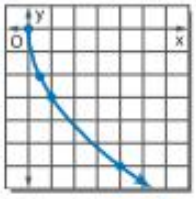
الخطوة 3 أزح التمثيل البياني h وحدات يسارًا إذا كان $h > 0$ و $|h|$ وحدات يمينًا إذا كان $h < 0$.

نصيحة دراسية
التمثيل البياني للدوال الجذرية اختر المربعات الكاملة لقيم x التي سوف تنتج عنها إحداثيات سهلة التعيين.

مثال 2 انعكاس دالة الجذر التربيعي

مثّل $y = -3\sqrt{x}$ بيانيًا. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.

أنشئ جدولًا للقيم. ثم عيّن النقاط على النظام الإحداثي وارسم منحنى متنظمًا يصلها بعض.



x	0	0.5	1	4
y	0	≈−2.1	−3	−6

لاحظ أن التمثيل البياني يكون في الربع الرابع. ويتم الحصول عليه عن طريق تمدد التمثيل البياني لـ $y = \sqrt{x}$ رأسيًا ثم انعكاسه على المحور x. المجال هو $\{x \mid x \geq 0\}$. والمدى هو $\{y \mid y \leq 0\}$.

تمرين موجّه

2A. $y = -2\sqrt{x}$

2B. $y = -4\sqrt{x}$

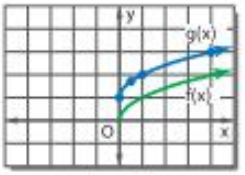
نصيحة دراسية
إزاحة الدوال الجذرية إذا كان $h > 0$، فإن الدالة الجذرية $f(x) = \sqrt{x-h}$ تمثل إزاحة أفقية بمقدار h وحدات يمينًا.
$f(x) = \sqrt{x+h}$ هي إزاحة أفقية بمقدار h وحدات يسارًا.

مثال 3 إزاحة دالة الجذر التربيعي

مثّل كل دالة بيانيًا. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.

a. $g(x) = \sqrt{x} + 1$

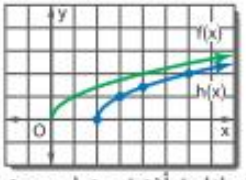
x	0	0.5	1	4	9
y	0	≈1.7	2	3	4



لاحظ أن قيم $g(x)$ أكبر بواحد من قيم $f(x) = \sqrt{x}$.
هذه إزاحة رأسية بمقدار وحدة واحدة لأعلى من الدالة الأصلية.
المجال هو $\{x \mid x \geq 0\}$. والمدى هو $\{y \mid y \geq 1\}$.

b. $h(x) = \sqrt{x-2}$

x	2	3	4	6
y	0	1	≈1.4	2



هذه إزاحة أفقية بمقدار وحدتين يمينًا من الدالة الأصلية. المجال هو $\{x \mid x \geq 2\}$. والمدى هو $\{y \mid y \geq 0\}$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

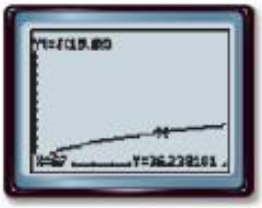
تمرين موجّه

3A. $g(x) = \sqrt{x} - 4$ **3B.** $h(x) = \sqrt{x} + 3$

يمكن تمثيل ظاهرة فيزيائية مثل الحركة عن طريق الدوال الجذرية. غالبًا ما تكون هذه الدوال تحويلات من دالة الجذر التربيعي الأصلية.

مثال 4 من الحياة اليومية تحليل الدالة الجذرية

الجسور **يمتد جسر جولدن جيت لمسافة 67 m تقريبًا فوق سطح الماء. السرعة المتجهة v لجسم ما في سقوط حر من h متر تُحددها المعادلة $v = \sqrt{2gh}$، حيث g هو ثابت التسارع $9.8\ m/s^2$. مثّل الدالة بيانيًا. إذا سقط جسم ما من الجسر، فماذا ستكون سرعته المتجهة عندما يصطدم بالماء؟**



استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل الدالة بيانيًا.

لإيجاد السرعة المتجهة للجسم، عوّض بـ 67 m عن h.

$v = \sqrt{2gh}$	الدالة الأصلية
$= \sqrt{2(9.8)(67)}$	$g = 9.8$ و $h = 67$
$= \sqrt{1313.2}$	بسّط.
$\approx 36.2\ m/s$	استخدم الآلة الحاسبة.

السرعة المتجهة للجسم تقدر بحوالي 36.2 m/s بعد السقوط من ارتفاع 67 m.

الربط بالحياة اليومية

تعبر 39 مليون سيارة تقريبًا جسر جولدن جيت في سان فرانسيسكو كل عام.

المصدر: مركز سان فرانسيسكو للمؤتمرات والزوار

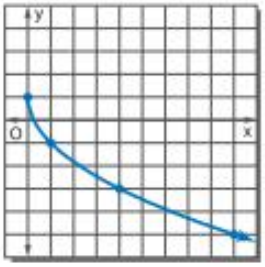
تمرين موجّه

4. استخدم التمثيل البياني أعلاه لتقدير الارتفاع الأولي لجسم ما إذا كان يتحرك بمعدل 20 m/s عند اصطدامه بالماء.

ويمكن الجمع بين تحويلات مثل الانعكاسات والإزاحات والتمددات في معادلة واحدة.

مثال 5 تحويلات دالة الجذر التربيعي

مثّل $y = -2\sqrt{x} + 1$ بيانيًا، وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.



x	0	1	4	9
y	1	−1	−3	−5

هذا التمثيل البياني نتيجة تمدد رأسي للتمثيل البياني لـ $y = \sqrt{x}$ يتبعه انعكاس على المحور x، ثم إزاحة لأعلى بمقدار وحدة واحدة. المجال هو $\{x | x \geq 0\}$، والمدى هو $\{y | y \leq 1\}$.

تمرين موجّه

5A. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x} - 1$ **5B.** $y = -2\sqrt{x - 1}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

الأمثلة 3-1 **مثّل كل دالة بيانيًا. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.**

1. $y = 3\sqrt{x}$
2. $y = -5\sqrt{x}$
3. $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$
4. $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$
5. $y = \sqrt{x} + 3$
6. $y = \sqrt{x} - 2$
7. $y = \sqrt{x + 2}$
8. $y = \sqrt{x - 3}$

مثال 4 9. **السقوط الحر** الزمن t، بالثواني، الذي يستغرقه جسم ما للسقوط على مسافة d، بالأمتار، يُعطى بالدالة $t = \frac{5}{11}\sqrt{d}$ (مع افتراض صغرية مقاومة الهواء). مثّل الدالة بيانيًا. واذكر المجال والمدى.

مثال 5 **مثّل كل دالة بيانيًا، وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.**

10. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x} + 2$
11. $y = -\frac{1}{4}\sqrt{x} - 1$
12. $y = -2\sqrt{x + 1}$
13. $y = 3\sqrt{x - 2}$

التمرين وحل المسائل

الأمثلة 3-1 **مثّل كل دالة بيانيًا. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.**

14. $y = 5\sqrt{x}$
15. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$
16. $y = -\frac{1}{3}\sqrt{x}$
17. $y = 7\sqrt{x}$
18. $y = -\frac{1}{4}\sqrt{x}$
19. $y = -\sqrt{x}$
20. $y = -\frac{1}{5}\sqrt{x}$
21. $y = -7\sqrt{x}$
22. $y = \sqrt{x} + 2$
23. $y = \sqrt{x} + 4$
24. $y = \sqrt{x} - 1$
25. $y = \sqrt{x} - 3$
26. $y = \sqrt{x} + 1.5$
27. $y = \sqrt{x} - 2.5$
28. $y = \sqrt{x + 4}$
29. $y = \sqrt{x - 4}$
30. $y = \sqrt{x + 1}$
31. $y = \sqrt{x - 0.5}$
32. $y = \sqrt{x + 5}$
33. $y = \sqrt{x - 1.5}$

مثال 4 34. **الهندسة** محيط المربع يُعطى بالدالة $P = 4\sqrt{A}$ ، حيث A هي مساحة المربع.

a. مثّل الدالة بيانيًا.

b. حدد محيط مربع له المساحة $225\ m^2$.

c. متى سيصبح المحيط والمساحة بقيمة واحدة؟

مثال 5 **مثّل كل دالة بيانيًا، وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.**

35. $y = -2\sqrt{x} + 2$
36. $y = -3\sqrt{x} - 3$
37. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x + 2}$
38. $y = -\sqrt{x - 1}$
39. $y = \frac{1}{4}\sqrt{x - 1} + 2$
40. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x - 2} + 1$

41. **الطاقة** يكون لجسم ما طاقة حركية عندما يتحرك. السرعة المتجهة بالأمتار لكل ثانية لجسم ما كتلته m kg بطاقة E جول، تُعطى بالدالة $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$. استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل الدالة التي تعبر عن السرعة المتجهة لكرة سلة كتلتها 0.6 kg. بيانيًا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

42. الهندسة نصف قطر الدائرة يُعطى بالمعادلة $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$.
حيث A هي مساحة الدائرة.

a. مثّل الدالة بيانيًا.

b. استخدم حاسبة التمثيل البياني لتحديد نصف قطر دائرة لها المساحة $27\ cm^2$.

43 سرعة الصوت تُحدد سرعة الصوت في الهواء بدرجة حرارة الهواء. السرعة v بالأمتار لكل ثانية تُعطى بالمعادلة $c = 331.5\sqrt{1 + \frac{t}{273.15}}$ حيث t هي درجة حرارة الهواء بالدرجات المئوية.

a. استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل الدالة بيانيًا.

b. ما مدى سرعة انتقال الصوت عندما تكون درجة الحرارة $55°C$؟

c. كيف ستتأثر سرعة الصوت عندما ترتفع درجة الحرارة إلى $65°C$؟

44. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، ستتعرف على العلاقة بين التمثيلات البيانية لدوال الجذر التربيعي والقطوع المكافئة.

a. بيانيًا مثّل $y = x^2$ بيانيًا على نظام إحداثي.

b. جبريًا اكتب دالة متعددة التعريف لوصف التمثيل البياني لـ $y^2 = x$ في كل ربع.

c. بيانيًا على النظام الإحداثي نفسه، مثّل $y = \sqrt{x}$ و $y = -\sqrt{x}$ بيانيًا.

d. بيانيًا على النظام الإحداثي نفسه، مثّل $y = x$ بيانيًا. عيّن النقاط (2, 4)، و (4, 2)، و (1, 1).

e. تحليليًا قارن بين التمثيل البياني للقطع المكافئ بالتمثيلات البيانية لدوال الجذر التربيعي.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

التحدي حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم خاطئة. أعطِ مثالًا أو مثالا مضادًا لدعم إجابتك.

45. الأعداد في مجال الدالة الجذرية تكون غير سالبة دائمًا.

46. الأعداد في مدى الدالة الجذرية تكون غير سالبة دائمًا.

47. الكتابة في الرياضيات لماذا توجد حدود لمجال دوال الجذر التربيعي ومداها؟

48. الأدوات اكتب دالة جذرية يكون مجالها كل الأعداد الحقيقة التي تكون أكبر من أو تساوي 2 ويكون مداها كل الأعداد الحقيقة التي تكون أقل من أو تساوي 5.

49. أي مما يلي لا ينتمي إلى المجموعة؟ جد المعادلة التي لا تتوافق مع المجموعة. اشرح.

$y = \frac{\sqrt{x}}{6}$	$y = \sqrt{x} + 3$	$y = 0.7\sqrt{x}$	$y = 3\sqrt{x}$

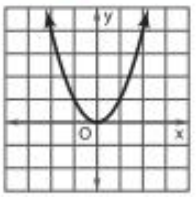
50. مسألة غير محددة الإجابة اكتب دالة تكون نتيجة انعكاس وإزاحة وتمدد للتمثيل البياني الأصلي لـ $y = \sqrt{x}$.

51. التبرير إذا كان مدى الدالة $y = a\sqrt{x}$ هو $\{y \mid y \leq 0\}$، فما الذي يمكنك استنتاجه بشأن قيمة a؟ اشرح استنتاجك.

52. الكتابة في الرياضيات قارن وقابل بين التمثيلين البيانيين لـ $f(x) = \sqrt{x} + 2$ و $g(x) = \sqrt{x + 2}$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

53. 

أي دالة تمثل بشكل *أفضل* التمثيل البياني؟

A $y = x^2$ C $y = \sqrt{x}$

B $y = 2^x$ D $y = x$

54. العبارة "$x < 10$ و $3x - 2 \geq 7$" تكون صحيحة عندما x يساوي ماذا؟

F 0 H 8

G 2 J 12

55. أي مما يلي هي معادلة مستقيم موازٍ للمستقيم الذي معادلته $y = -\frac{1}{2}x + 3$ ويمر بالنقطة $(-1, -2)$؟

A $y = \frac{1}{2}x$ C $y = -\frac{1}{2}x + 2$

B $y = 2x + 3$ D $y = -\frac{1}{2}x - 2$

56. الإجابة القصيرة إذا كان منسق حدائق يحتاج إلى فرش نشارة خشبية على 6 أحواض زهور مستطيلة وقياسها 8 m في 4 m، و 4 أحواض زهور مستديرة نصف قطر كل منها يبلغ 3 m. وتغطي عبوة النشارة الخشبية الواحدة $25\ m^2$. فكم عدد عبوات النشارة الخشبية المطلوبة لتغطية الأحواض الزهرية؟

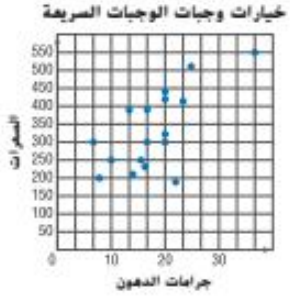
مراجعة شاملة

57. الصحة تتمرن خولة كل يوم بالمشي والجري لمسافة لا تقل عن 3 km. وتمشي خولة بمعدل 4 km/h، وتجري بمعدل 8 km/h. افترض أنه متاح لديها نصف ساعة فقط للتمرن اليوم.

a. ارسم تمثيلاً بيانيًا يوضح المدد الزمنية الممكنة التي يمكن أن تقضيها في المشي والجري اليوم.

b. أعط ثلاثة حلول ممكنة.

58. التغذية حدد ما إذا كان التمثيل البياني يعبر عن ارتباط موجب، أم *سالب*، أم لا يعبر عن أي ارتباط. وإذا كان هناك ارتباط موجب أو سالب، فاشرح دلالته في هذه الحالة.



مراجعة المهارات

حلل كل أحادي الحد إلى عوامله بالكامل.

59. $28n^3$ **60.** $-33a^2b$ **61.** $150rt$

62. $-378nq^2r^2$ **63.** $225a^3b^2c$ **64.** $-160x^2y^4$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مختبر تقنية التمثيل البياني
6-1 التمثيل البياني لدوال الجذر التربيعي

ممارسات في الرياضيات
استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

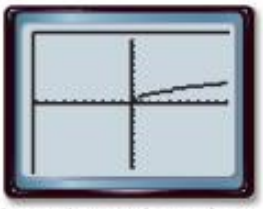
لكي يكون الجذر التربيعي عددًا حقيقيًا، لا يمكن أن يكون المجذور سالبًا. عند تمثيل الدالة الجذرية بيانيًا، حدد متى سيكون المجذور سالبًا واستبعد هذه القيم من المجال.

النشاط 1 الدالة الأصلية

مثّل $y = \sqrt{x}$ بيانيًا.

أدخل المعادلة في القائمة Y= . وارسم التمثيل البياني في نافذة العرض القياسية.

خطوات العملية على الحاسبة: Y= 2nd $[\sqrt{\ }]$ X,T,θ,n) ZOOM 6



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

1A. تفحّص التمثيل البياني. ما مجال الدالة؟

1B. ما مدى الدالة؟

النشاط 2 إزاحة الدالة الأصلية

مثّل $y = \sqrt{x - 2}$ بيانيًا.

أدخل المعادلة في القائمة Y= . وارسم التمثيل البياني في نافذة العرض القياسية.

خطوات العملية على الحاسبة: Y= 2nd $[\sqrt{\ }]$ X,T,θ,n − 2) ZOOM 6

[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

2A. ما مجال الدالة ومداها؟

2B. ما وجه المقارنة بين التمثيل البياني لـ $y = \sqrt{x - 2}$ والتمثيل البياني للدالة الأصلية $y = \sqrt{x}$؟

تمارين

مثّل كل دالة مما يلي بيانيًا، وارسم التمثيل البياني على الورقة. واذكر المجال والمدى. واشرح وجه الاختلاف بين التمثيل البياني عن التمثيل البياني للدالة الأصلية $y = \sqrt{x}$.

1. $y = \sqrt{x - 1}$
2. $y = \sqrt{x + 3}$
3. $y = \sqrt{x} - 2$
4. $y = \sqrt{-x}$
5. $y = -\sqrt{x}$
6. $y = \sqrt{2x}$
7. $y = \sqrt{2 - x}$
8. $y = \sqrt{x - 3} + 2$

حُـلّ كل معادلة مما يلي لإيجاد y. هل تمثل المعادلة دالة؟ اشرح استنتاجك.

9. $x = y^2$
10. $x^2 + y^2 = 4$
11. $x^2 + y^2 = 2$

أكتب دالة بتمثيل بياني يزيح $y = \sqrt{x}$ في كل اتجاه مما يلي.

12. إزاحة 4 وحدات يسارًا
13. إزاحة 7 وحدات لأعلى
14. إزاحة 6 وحدات لأسفل
15. إزاحة 5 وحدات يمينًا و 3 وحدات لأعلى

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

6-2 المعادلات الجذرية

السابق:
- أجريت الجمع والطرح والضرب على التعابير الجذرية.

الحالي:
1. حل المعادلات الجذرية.
2. حل المعادلات الجذرية ذات الحلول الدخيلة.

لماذا؟
- طول خط الماء للقارب الشراعي هو طول الخط الذي تصنعه حافة المياه عندما يكون القارب مبتلاً. وسرعة جسم القارب هي أسرع سرعة يمكن أن يتحرك بها.

يمكنك تقدير سرعة جسم القارب h باستخدام الصيغة $h = 1.34\sqrt{\ell}$. حيث ℓ هو طول خط المياه للقارب الشراعي.

المفردات الجديدة
- **معادلات جذرية** (radical equations)
- **حلول دخيلة** (extraneous solutions)

ممارسات في الرياضيات
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين. استخدام نماذج الرياضيات.

1 معادلات جذرية

المعادلات التي تشتمل على متغيرات في صورة مجذور، مثل $h = 1.34\sqrt{\ell}$. تُسمى **معادلات جذرية**. ولإيجاد حلها، يجب أولاً عزل المتغير المطلوب في أحد طرفي المعادلة. ثم يتم تربيع طرفي المعادلة للتخلص من الجذر.

المفهوم الأساسي خاصية المساواة في الأس

الشرح إذا قمت بتربيع طرفي معادلة صحيحة، فالمعادلة الناتجة ستكون صحيحة أيضًا.

الرموز إذا كان $a = b$، فإن $a^2 = b^2$.

أمثلة إذا كان $\sqrt{x} = 4$ ، فإن $(\sqrt{x})^2 = 4^2$.

مثال 1 من الحياة اليومية المتغير في صورة مجذور

الإبحار **يبحر أسامة وإسماعيل في قارب شراعي لصديق لهما. ووجدا أن سرعة جسم القارب تبلغ 9 km/h بعد قياسها. فأوجد طول خط الماء للقارب الشراعي. قرّب إلى أقرب متر.**

الفهم أنت تعلم مدى سرعة تحرك القارب وأنها ترتبط بالطول.

التخطيط يقطع القارب 9 km/h. صيغة سرعة جسم القارب هي $h = 1.34\sqrt{\ell}$.

الحل

$h = 1.34\sqrt{\ell}$	صيغة سرعة جسم القارب
$9 = 1.34\sqrt{\ell}$	عوّض بـ 9 عن h.
$\frac{9}{1.34} = \frac{1.34\sqrt{\ell}}{1.34}$	اقسم كل طرف على 1.34.
$6.72 \approx \sqrt{\ell}$	بسّط.
$(6.72)^2 \approx (\sqrt{\ell})^2$	قم بتربيع طرفي المعادلة.
$45.16 \approx \ell$	بسّط.

طول خط الماء للقارب الشراعي يبلغ حوالي 45 m.

التحقق تحقق عن طريق التعويض بالتقدير في الصيغة الأصلية.

$h = 1.34\sqrt{\ell}$	صيغة سرعة جسم القارب
$9 \stackrel{?}{\approx} 1.34\sqrt{45}$	$\ell = 45$ و $h = 9$
$9 \approx 8.98899327$ ✓	اضرب.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تمرين موجّه

1. **القيادة** المعادلة $v = \sqrt{21.4r}$ تمثل السرعة المتجهة القصوى التي تستطيع السيارة التحرك بها بأمان على منحنى دون حاجز إذا كانت v هي السرعة المتجهة القصوى بالكيلومترات و r هو نصف قطر الانعطاف بالأمتار. إذا صُمم الطريق لسرعة أقصاها 550 m/s. فما نصف قطر الانعطاف؟

لإيجاد حل المعادلة الجذرية، اعزل الجذر أولاً. ثم قم بتربيع طرفي المعادلة.

مثال 2 التعبير في صورة مجذور

حُـلّ المعادلة: $\sqrt{a+5} + 7 = 12$.

$\sqrt{a+5} + 7 = 12$	المعادلة الأصلية
$\sqrt{a+5} = 5$	اطرح 7 من كل طرف.
$(\sqrt{a+5})^2 = 5^2$	قم بتربيع كل طرف.
$a + 5 = 25$	بسّط.
$a = 20$	اطرح 5 من كل طرف.

انتبه!

تربيع كل طرف

تذكر أنه عندما تقوم بتربيع طرفي المعادلة، فإنه يجب عليك تربيع طرف المعادلة بالكامل حتى إذا كان يوجد أكثر من حد واحد في هذا الطرف.

تمرين موجّه

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

2A. $\sqrt{c-3} - 2 = 4$

2B. $4 + \sqrt{h+1} = 14$

2 الحلول الدخيلة

في بعض الأحيان، ينتج عن تربيع طرفي المعادلة حلّ لا يُعتد به كحل للمعادلة الأصلية. ويُطلق على أمثاله **الحلول الدخيلة**. لذلك، يجب عليك التحقق من جميع الحلول في المعادلة الأصلية.

مثال 3 المتغير عند كل طرف

حُـلّ المعادلة: $\sqrt{k+1} = k - 1$. **تحقق من صحة الحل.**

$\sqrt{k+1} = k - 1$	المعادلة الأصلية
$(\sqrt{k+1})^2 = (k-1)^2$	قم بتربيع كل طرف.
$k + 1 = k^2 - 2k + 1$	بسّط.
$0 = k^2 - 3k$	اطرح k و 1 من كل طرف.
$0 = k(k-3)$	حلل إلى العوامل.
$k = 0$ or $k - 3 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$k = 3$	الحل.

التحقق

المعادلة الأصلية	$\sqrt{k+1} = k - 1$	$\sqrt{k+1} = k - 1$
$k = 3$	$\sqrt{0+1} \stackrel{?}{=} 0 - 1$	$\sqrt{3+1} \stackrel{?}{=} 3 - 1$
بسّط	$\sqrt{1} \stackrel{?}{=} -1$	$\sqrt{4} \stackrel{?}{=} 2$
خطأ	$1 \neq -1$ ✗	$2 = 2$ ✓
		صواب

بما أن 0 لا تحقق المعادلة الأصلية، فإن 3 هو الحل الوحيد.

نصيحة دراسية

الحلول الدخيلة

عند التحقق من الحلول بحثًا عن الحلول الدخيلة، فنحن لا نهتم سوى بالجذور الأساسية.

تمرين موجّه

حُـلّ كل من المعادلات التالية. تحقق من صحة الحل.

3A. $\sqrt{t+5} = t + 3$ −1

3B. $x - 3 = \sqrt{x-1}$

محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education © مجموعة ماكجرو وشركاه

التحقق من فهمك

مثال 1

1. **الهندسة** مساحة سطح كرة سلة هي $x\ cm^2$. فما نصف قطر كرة السلة إذا كانت صيغة مساحة سطح الكرة هي $S_A = 4\pi r^2$؟

المثالان 2-3

حُـلّ كل من المعادلات التالية. تحقق من صحة الحل.

2. $\sqrt{10h} + 1 = 21$
3. $\sqrt{7r + 2} + 3 = 7$
4. $5 + \sqrt{g - 3} = 6$
5. $\sqrt{3x - 5} = x - 5$
6. $\sqrt{2n + 3} = n$
7. $\sqrt{a - 2} + 4 = a$

التمرين وحل المسائل

مثال 1

8. **التمارين الرياضية** افترض أن الدالة $S = \pi\sqrt{\frac{9.8\ell}{1.6}}$. حيث S تمثل السرعة بالأمتار في الثانية و ℓ هو طول ساق الشخص بالأمتار. يمكنها إيجاد السرعة القصوى التقريبية التي يستطيع الشخص ركضها.

   a. ما سرعة الركض القصوى لشخص طول ساقه 1.1 m مع التقريب لأقرب جزء من عشرة من المتر؟

   b. ما طول ساق شخص سرعة ركضه 6.7 m/s مع التقريب لأقرب جزء من عشرة من المتر؟

   c. كلما ازداد طول الساق، تزداد السرعة القصوى أم تقل؟ اشرح.

الأمثلة 2-3

حُـلّ كل من المعادلات التالية. تحقق من صحة الحل.

9. $\sqrt{a} + 11 = 21$
10. $\sqrt{t} - 4 = 7$
11. $\sqrt{n - 3} = 6$
12. $\sqrt{c + 10} = 4$
13. $\sqrt{h - 5} = 2\sqrt{3}$
14. $\sqrt{k + 7} = 3\sqrt{2}$
15. $y = \sqrt{12 - y}$
16. $\sqrt{u + 6} = u$
17. $\sqrt{r + 3} = r - 3$
18. $\sqrt{1 - 2t} = 1 + t$
19. $5\sqrt{a - 3} + 4 = 14$
20. $2\sqrt{x - 11} - 8 = 4$

21. **المسافات المقطوعة** المدة الزمنية t، بالثواني، التي يستغرقها بندول بسيط لإكمال تأرجح كامل يُطلق عليها الفترة. وهي تُعطى بالمعادلة $t = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{9.8}}$. حيث ℓ هو طول البندول، بالأمتار.

   a. يكمل بندول الأرجوحة العملاقة الفترة في حوالي 8 ثوانٍ. فكم يبلغ طول ذراع البندول تقريبًا؟ قرّب إلى أقرب متر.

   b. هل ازدياد طول البندول يسبب تزايد الفترة أم تناقصها؟ اشرح.

حُـلّ كل من المعادلات التالية. تحقق من صحة الحل.

22. $\sqrt{6a - 6} = a + 1$
23. $\sqrt{x^2 + 9x + 15} = x + 5$
24. $6\sqrt{\frac{5k}{4}} - 3 = 0$
25. $\sqrt{\frac{5y}{6}} - 10 = 4$
26. $\sqrt{2a^2 - 121} = a$
27. $\sqrt{5x^2 - 9} = 2x$

28. **التبرير** قانون الارتفاع المائل c للمخروط هو $c = \sqrt{h^2 + r^2}$. حيث h هو ارتفاع المخروط و r هو نصف قطر قاعدته.
جـد ارتفاع المخروط إذا كان الارتفاع المائل يساوي 4 وحدات ونصف القطر يساوي وحدتين. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

29 **التمثيلات المتعددة** تأمل $\sqrt{2x-7} = x-7$.

a. **بيانيًا** امسح القائمة Y=. أدخل الطرف الأيسر من المعادلة كالآتي $Y1 = \sqrt{2x-7}$. وأدخل الطرف الأيمن من المعادلة كالآتي $Y2 = x-7$.
اضغط على GRAPH.

b. **بيانيًا** ارسم ما هو مبين على الشاشة.

c. **تحليليًا** استخدم ميزة التقاطع مع المحور على قائمة CALC لإيجاد نقطة التقاطع.

d. **تحليليًا** حُـلّ المعادلة الجذرية جبريًا. ما وجه المقارنة بين حلك والحل من التمثيل البياني؟

30. **التعبئة** حاوية أسطوانية لمزيج مشروب الشوكولاتة. حجمها $162\ cm^3$. يمكن إيجاد نصف قطر r الحاوية عن طريق استخدام الصيغة $r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$، حيث V هو حجم الحاوية و h هو الارتفاع.

a. إذا كان نصف قطر الحاوية 2.5 cm. فجـد ارتفاعها. قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

b. إذا كان ارتفاع الحاوية 10 cm. فجـد نصف قطرها. قرّب إلى أقرب جزء من مئة.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

31. **التفكير النقدي** حلت أسماء وإيمان $\sqrt{6-b} = \sqrt{b+10}$. فهل أيّ منهما على صواب؟ اشرح.

أسماء

$\sqrt{6-b} = \sqrt{b+10}$

$(\sqrt{6-b})^2 = (\sqrt{b+10})^2$

$6-b = b+10$

$-2b = 4$

$b = -2$

التحقق

$\sqrt{6-(-2)} \stackrel{?}{=} \sqrt{(-2)+10}$

$\sqrt{8} = \sqrt{8}$ ✓

إيمان

$\sqrt{6-b} = \sqrt{b+10}$

$(\sqrt{6-b})^2 = (\sqrt{b+10})^2$

$6-b = b+10$

$2b = 4$

$b = 2$

التحقق

$\sqrt{6-(2)} \stackrel{?}{=} \sqrt{(2)+10}$

$\sqrt{4} \neq \sqrt{12}$ ✗

لا يوجد حل

32. **التبرير** أي معادلة مما يلي حلها هو $\sqrt{4} = \sqrt{x+2}$؟ اشرح.

A. $\sqrt{4} = \sqrt{x} + \sqrt{2}$ B. $4 = x+2$ C. $2 - \sqrt{2} = \sqrt{x}$

33. **التبرير** اشرح وجه الاختلاف بين كيفية حل $\sqrt{x} + 1 = 5$ وحل $\sqrt{x+1} = 5$.

34. **مسألة غير محددة الإجابة** أكتب معادلة جذرية بمتغير واحد في كل طرف. ثم حل المعادلة.

35. **التبرير** هل المعادلة التالية صحيحة *أحيانًا* أم *دائمًا* أم غير صحيحة *على الإطلاق*؟ اشرح.

$$\sqrt{(x-2)^2} = x-2$$

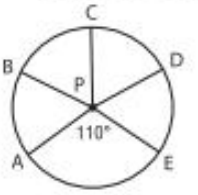
36. **التحدي** حُـلّ المعادلة $\sqrt{x+9} = \sqrt{3} + \sqrt{x}$.

37. **الكتابة في الرياضيات** أكتب بعض القواعد العامة المتعلقة بكيفية حل المعادلات الجذرية. استعرض هذه القواعد عن طريق حل معادلة جذرية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

38. الإجابة القصيرة يحتاج حسن إلى حفر ثقوب عند A، وB وC وD وE على الدائرة P.



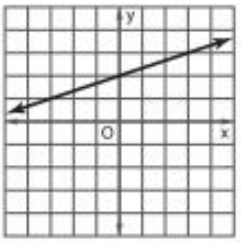
إذا حفر حسن الثقوب بحيث تكون $m\angle APE = 110°$، وكانت الزوايا الأخرى الأربع متطابقة، فما قياس $m\angle CPD$؟

39. أي تعبير مما يلي يكون غير معرف عندما يكون $w = 3$؟

A $\frac{w-3}{w+1}$ **C** $\frac{w+1}{w^2-3w}$

B $\frac{w^2-3w}{3w}$ **D** $\frac{3w}{3w^2}$

40. ما ميل المستقيم الذي يكون موازياً للمستقيم المبين؟



F -3 **H** $\frac{1}{3}$

G $-\frac{1}{3}$ **J** 3

41. ما حل المعادلة $\sqrt{x+3} - 1 = x - 4$؟

A $1, 6$ **C** 1

B $-1, -6$ **D** 6

مراجعة شاملة

42. الكهرباء الجهد الكهربائي V المطلوب لدائرة كهربائية يُعطى بالمعادلة $V = \sqrt{PR}$، حيث P هو القدرة بالواط وR هي المقاومة بالأوم. كم عدد الفولتات الإضافية المطلوبة لإضاءة مصباح كهربائي قدرته 100 واط عن مصباح كهربائي قدرته 75 واط إذا كانت المقاومة لكليهما هي 110 أوم؟

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

43. $\sqrt{6} \cdot \sqrt{8}$ **44.** $\sqrt{3} \quad \sqrt{6}$ **45.** $7\sqrt{3} \quad 2\sqrt{6}$

46. $\sqrt{\frac{27}{a^2}}$ **47.** $\sqrt{\frac{5c^5}{4d^5}}$ **48.** $\frac{\sqrt{9x^5y}}{\sqrt{16x^2y^2}}$

حدد ما إذا كان كل تعبير يمثل دالة أحادية الحد. أكتب نعم أو لا: اشرح.

49. 12 **50.** $4x^3$ **51.** $a - 2b$ **52.** $4n + 5p$ **53.** $\frac{x}{y^2}$ **54.** $\frac{1}{5}$

مراجعة المهارات

بسّط.

55. 9^2 **56.** 10^6 **57.** 4^5

58. $(8v)^2$ **59.** $\left(\frac{w^3}{9}\right)^2$ **60.** $(10y^2)^3$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

6 اختبار منتصف الوحدة

الدروس من 6-1 إلى 6-2

مثّل كل دالة بيانيًا. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى. (الدرس 6-1)

1. $y = 2\sqrt{x}$
2. $y = -4\sqrt{x}$
3. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$
4. $y = \sqrt{x} - 3$
5. $y = \sqrt{x - 1}$
6. $y = 2\sqrt{x - 2}$

7. **اختيار من متعدد** طول ضلع المربع يُعطى بالدالة $s = \sqrt{A}$، حيث A هي مساحة المربع. ما طول ضلع مربع له مساحة $121\ cm^2$؟ (الدرس 6-1)

A 121 cm　　C 44 cm

B 11 cm　　D 10 cm

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدرس 6-2)

8. $2\sqrt{25}$
9. $\sqrt{12}\ \sqrt{8}$
10. $\sqrt{72xy^5z^6}$
11. $\frac{3}{1+\sqrt{5}}$
12. $\frac{1}{5-\sqrt{7}}$

13. **الأقمار الصناعية** أُطلق قمر صناعي في مدار يرتفع عن كوكب الأرض 200 km. وتُعطى السرعة المتجهة للقمر الصناعي بالصيغة $v = \sqrt{\frac{Gm_E}{r}}$ هي v السرعة المتجهة بالأمتار لكل ثانية، و G هو ثابت مُعطى، و m_E هي كتلة الأرض، و r هو نصف قطر مدار القمر الصناعي بالأمتار. (الدرس 6-2)

a. يبلغ نصف قطر الأرض 6,380,000 m. فما نصف قطر مدار القمر الصناعي بالأمتار؟

b. كتلة الأرض هي 5.97×10^{24} kg. والثابت G هو $6.67 \times 10^{-11}\ N\ \frac{m^2}{kg^2}$ حيث N يكون بوحدة نيوتن. استخدم الصيغة لإيجاد السرعة المتجهة المدارية للقمر الصناعي بالأمتار لكل ثانية.

14. **اختيار من متعدد** أي من التعابير التالية يكافئ التعبير $\sqrt{\frac{16}{32}}$؟ (الدرس 6-2)

F $\frac{1}{2}$

G $\frac{\sqrt{2}}{2}$

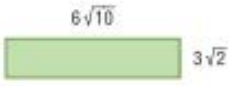
H 2

J 4

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدرس 6-3)

15. $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$
16. $\sqrt{11} - 3\sqrt{11}$
17. $6\sqrt{2} + 4\sqrt{50}$
18. $\sqrt{27} - \sqrt{48}$
19. $4\sqrt{3}(2\sqrt{6})$
20. $3\sqrt{20}(2\sqrt{5})$
21. $(\sqrt{5} + \sqrt{7})(\sqrt{20} + \sqrt{3})$

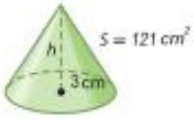
22. **هندسة** جد مساحة المستطيل. (الدرس 6-3)



حلّ كل من المعادلات التالية. تحقق من صحة الحل. (الدرس 6-2)

23. $\sqrt{5x} - 1 = 4$
24. $\sqrt{a - 2} = 6$
25. $\sqrt{15 - x} = 4$
26. $\sqrt{3x^2 - 32} = x$
27. $\sqrt{2x - 1} = 2x - 7$
28. $\sqrt{x + 1} + 2 = 4$

29. **الهندسة** المساحة الجانبية S للمخروط يمكن إيجادها باستخدام القانون $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ حيث r هو نصف قطر القاعدة و h هو ارتفاع المخروط. جد ارتفاع المخروط. (الدرس 6-2)



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

6-3 التغير العكسي

السابق	الحالي	لماذا؟
• قمت بحل مسائل مشتملة على التغير الطردي.	1 تحديد واستخدام التغيرات العكسية. 2 تمثيل التغيرات العكسية بيانيًا.	• الوقت الذي يستغرقه العداء لإنهاء السباق يتناسب عكسيًا مع متوسط وتيرة تقدمه. ويتناقص الوقت الذي يستغرقه العداء كلما ازدادت وتيرة تقدمه. إذًا، تتناسب هاتان الكميتان عكسيًا.

المفردات الجديدة
تغير عكسي inverse variation
قاعدة الضرب product rule

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

1 تحديد التغير العكسي واستخدامه

يمكن تمثيل **التغير العكسي** بالمعادلة $y = \frac{k}{x}$ أو $xy = k$.

المفهوم الأساسي التغير العكسي

y يتغير عكسيًا مع x إذا وُجد ثابت ما غير صفري k بحيث يكون $y = \frac{k}{x}$ أو $xy = k$. حيث $x, y \neq 0$.

في التغير العكسي، يبقى ضرب القيمتين ثابتًا. تذكر أن العلاقة التي تأتي بالصيغة $y = kx$ عبارة عن تغير طردي. الثابت k يُطلق عليه ثابت *التغير* أو ثابت *التناسب*.

مثال 1 تحديد التغير العكسي والتغير الطردي

حدد إذا ما كان كل جدول أو معادلة تمثل *تغيرًا عكسيًا* أم *تغيرًا طرديًا*. اشرح.

a.

x	y
1	16
2	8
4	4

في أي تغير عكسي، xy الثابت يساوي k. جد xy لكل زوج مرتب في الجدول المبين.

$1 \times 16 = 16 \quad 2 \times 8 = 16 \quad 4 \times 4 = 16$

الضرب ثابت. إذًا الجدول يمثل تغيرًا عكسيًا.

b.

x	y
1	3
2	6
3	9

لاحظ أن xy ليس ثابتًا. إذًا، الجدول لا يمثل تغيرًا عكسي.

$3 = k(1) \quad 6 = k(2) \quad 9 = k(3)$
$3 = k \quad 3 = k \quad 3 = k$

جدول القيم يمثل التغير الطردي $y = 3x$.

c. $x = 2y$

يمكن كتابة هذه المعادلة في الصيغة $y = \frac{1}{2}x$. لذا، فإنها تمثل تغيرًا طرديًا.

d. $2xy = 10$

$2xy = 10$ اكتب المعادلة.
$xy = 5$ اقسم كل طرف على 2.

تمثل المعادلة تغيرًا عكسيًا.

تمرين موجه

1A.

x	1	2	5
y	10	5	2

1B. $-2x = y$

McGraw-Hill Education مؤسسة مؤسسة لصالح © محفوظة والتأليف الطبع حقوق

يمكنك استخدام $xy = k$ لكتابة معادلة تغير عكسي تربط بين x و y.

قراءة في الرياضيات

معادلات التغير بالنسبة لمعادلات التغير الطردي، نقول إن y يتغير طرديًا مع x. وبالنسبة لمعادلات التغير العكسي، نقول إن y يتغير عكسيًا مع x.

مثال 2 كتابة التغير العكسي

افترض أن y يتغير عكسيًا مع x. إذا كان $y = 18$ عندما يكون $x = 2$، فاكتب معادلة تغير عكسي تربط بين x و y.

$xy = k$	معادلة تغير عكسي
$2(18) = k$	$y = 18$ و $x = 2$
$36 = k$	بسّط.

ثابت التغير هو 36. إذًا، المعادلة التي تربط بين x و y هي $xy = 36$ أو $y = \frac{36}{x}$.

تمرين موجّه

2. افترض أن y يتغير عكسيًا مع x. إذا كان $y = 5$ عندما يكون $x = -4$، فاكتب معادلة تغير عكسي تربط بين x و y.

إذا كان (x_1, y_1) و (x_2, y_2) حلين لتغير عكسي، فإذًا $x_1y_1 = k$ و $x_2y_2 = k$

$x_1y_1 = k$ و $x_2y_2 = k$	
$x_1y_1 = x_2y_2$	عوّض بـ x_2y_2 عن k.

المعادلة $x_1y_1 = x_2y_2$ تُسمى **قاعدة الضرب** للتغيرات العكسية.

المفهوم الأساسي قاعدة الضرب للتغير العكسي

الشرح إذا كان (x_1, y_1) و (x_2, y_2) حلين لتغير عكسي، فإن، ناتجا الضرب x_1y_1 و x_2y_2 متساويين.

الرموز $x_1y_1 = x_2y_2$ أو $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$

مثال 3 الحل لإيجاد x أو y

افترض أن y يتغير عكسيًا مع x. إذا كان $y = 3$ عندما يكون $x = 12$، فجد x عندما يكون $y = 4$.

$x_1y_1 = x_2y_2$	قاعدة الضرب للتغير العكسي
$12 \times 3 = x_2 \times 4$	$x_1 = 12$, $y_1 = 3$, $y_2 = 4$
$36 = x_2 \times 4$	بسّط.
$\frac{36}{4} = x_2$	اقسم كل طرف على 4.
$9 = x_2$	بسّط.

إذًا، عندما يكون $y = 4$، يكون $x = 9$.

تمرين موجّه

3. إذا كان y يتغير عكسيًا مع x و $y = 4$ عندما يكون $x = -8$. فجد y عندما يكون $x = -4$.

يمكن استخدام قاعدة الضرب للتغير العكسي لكتابة معادلة بغرض حل مسائل من الحياة اليومية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 4 من الحياة اليومية استخدام التغير العكسي

الفيزياء **التسارع** a **لقرص الهوكي يتناسب عكسيًا مع كتلته** m. **افترض أن قرص هوكي كتلته** 164 g **تم ضربه بحيث يتسارع بمعدل** $122\ m/s^2$. **جد تسارع قرص كتلته** 158 g **إذا ضُرب بنفس القدر من القوة.**

أنشئ جدولاً لتنظيم المعلومات.

القرص	الكتلة	التسارع
1	164 g	$122\ m/s^2$
2	158 g	a_2

ليكن $m_1 = 164$، $a_1 = 122$، و $m_2 = 164$.

حل لإيجاد a_2.

استخدم قاعدة الضرب لكتابة معادلة.	$m_1a_1 = m_2a_2$
$m_1 = 164$، $a_1 = 122$، و $m_2 = 158$.	$164 \times 122 = 158a_2$
بسّط.	$20{,}008 = 158a_2$
قسم كل طرف على 158 وبسّط.	$126.6 \approx a_2$

قرص هوكي كتلته 158 g يكون له تسارع بمعدل $126.6\ m/s^2$.

تمرين موجّه

4. السباق إذا كان عبد العزيز يركض بمتوسط 8 km/h. وأنهى السباق في 0.39 h. وأنهى مازن السباق في 0.35 h. فما متوسط وتيرة تقدم مازن؟

الربط بالحياة اليومية

قرص الهوكي الجليدي يكون سُمكه 2.5 cm وقطره 7.6 cm. وتتراوح كتلته بين 156 g و 170 g تقريبًا.

المصدر: كتاب دوري الهوكي الوطني للمواهد

2 تمثيل التغير العكسي بيانيًا

لا يكون التمثيل البياني للتغير العكسي خطًا مستقيمًا مثل التمثيل البياني للتغير الطردي.

مثال 5 تمثيل التغير العكسي بيانيًا

مثّل معادلة تغير عكسي بيانيًا، والتي فيها $y = 8$ **عندما يكون** $x = 3$.

الخطوة 1 اكتب معادلة تغير عكسي.

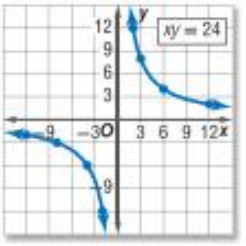
معادلة تغير عكسي	$xy = k$
$x = 3$، $y = 8$	$3(8) = k$
بسّط.	$24 = k$

معادلة التغير العكسي هي $xy = 24$ أو $y = \frac{24}{x}$.

الخطوة 2 اختر قيمة لكل من x و y بحيث يكون ضربهما 24.

الخطوة 3 عيّن كل نقطة وارسم منحنى منتظمًا يصلها ببعض.

x	y
−12	−2
−8	−3
−4	−6
−2	−12
0	غير معرف
2	12
3	8
6	4
12	2



لاحظ أنه بما أن y غير معرف عندما يكون $x = 0$. فإنه لن توجد نقطة على التمثيل البياني عندما يكون $x = 0$. ويُسمى تمثيلها البياني قطعًا زائدًا.

تمرين موجّه

5. مثّل معادلة تغير عكسي بيانيًا، والتي فيها $y = 16$ عندما يكون $x = 4$.

نصيحة في حل المسائل

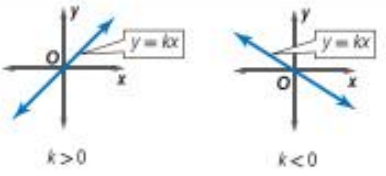
الاستنتاج المنطقي

أحيانًا يلزم تقسيم المسألة إلى أجزاء. وحل كل جزء على حدة. ثم دمج حلول الأجزاء لإيجاد حل المسألة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

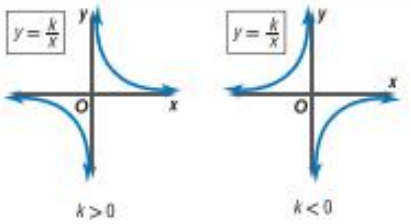
ملخص المفهوم التغير الطردي و التغير العكسي

التغير الطردي



- $y = kx$
- y يتغير طرديًا مع x.
- النسبة $\frac{y}{x}$ عبارة عن ثابت.

التغير العكسي



- $y = \frac{k}{x}$
- y يتغير عكسيًا مع x.
- ضرب xy عبارة عن ثابت.

التحقق من فهمك

مثال 1 **حدد ما إذا كان كل جدول أو معادلة تمثل *تغيرًا عكسيًا* أم *تغيرًا طرديًا*. اشرح.**

1.

x	1	4	8	12
y	2	8	16	24

2.

x	1	2	3	4
y	24	12	8	6

3. $xy = 4$

4. $y = \frac{x}{10}$

المثالان 2 و 5 **افترض أن y يتغير عكسيًا مع x. اكتب معادلة تغير عكسي تربط بين x و y. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.**

5. $y = 8$ عندما يكون $x = 6$

6. $y = 2$ عندما يكون $x = 5$

7. $y = 3$ عندما يكون $x = -10$

8. $y = -1$ عندما يكون $x = -12$

مثال 3 **جـد الحل. افترض أن y يتغير عكسيًا مع x.**

9. إذا كان $y = 8$ عندما يكون $x = 4$. فجـد x عندما يكون $y = 2$.

10. إذا كان $y = 7$ عندما يكون $x = 6$. فجـد y عندما يكون $x = -21$.

11. إذا كان $y = -5$ عندما يكون $x = 9$. فجـد y عندما يكون $x = 6$.

مثال 4

12. **السباق** الوقت المستغرق لإكمال مسار سباق العربات الصغيرة يتناسب عكسيًا مع متوسط سرعة العربة الصغيرة. فإذا كان أحد المتسابقين متوسط سرعته 22.3 m/s وأكمل المسار في 30 s. وأكمل متسابق آخر المسار في 25 s. فما متوسط سرعة المتسابق الثاني؟

13. **البصريات** عندما لا تكون الرؤية واضحة لدى الشخص. فإن طبيب العيون يمكنه أن يصف له عدسات لتصحيح الحالة. قوة العدسة P. بوحدات تُسمى ديوبتر. تساوي 1 مقسومًا على البعد البؤري f. بالأمتار. للعدسة.

a. مثّل التغير العكسي $P = \frac{1}{f}$ بيانيًا.

b. جـد قوى عدسات بعدها البؤري $+0.2$ m إلى -0.4 m.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **حدد ما إذا كان كل جدول أو معادلة تمثل *تغيرًا عكسيًا* أم *تغيرًا طرديًا*. اشرح.**

14.

x	y
1	30
2	15
5	6
6	5

15.

x	y
2	−6
3	−9
4	−12
5	−15

16.

x	y
−4	−2
−2	−1
2	1
4	2

17.

x	y
−5	8
−2	20
4	−10
8	−5

18. $5x - y = 0$ **19.** $xy = \frac{1}{4}$ **20.** $x = 14y$ **21.** $\frac{y}{x} = 9$

المثالان 5 و 2 **افترض أن y يتغير عكسيًا مع x. اكتب معادلة تغير عكسي تربط بين x و y. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.**

22. $y = 2$ عندما يكون $x = 20$ **23.** $y = 18$ عندما يكون $x = 4$ **24.** $y = -6$ عندما يكون $x = -3$

25. $y = -4$ عندما يكون $x = -3$ **26.** $y = -4$ عندما يكون $x = 16$ **27.** $y = 12$ عندما يكون $x = -9$

مثال 3 **جـد الحل. افترض أن y يتغير عكسيًا مع x.**

28. إذا كان $y = 12$ عندما يكون $x = 3$. فجـد x عندما يكون $y = 6$.

29. إذا كان $y = 5$ عندما يكون $x = 6$. فجـد x عندما يكون $y = 2$.

30. إذا كان $y = 4$ عندما يكون $x = 14$. فجـد x عندما يكون $y = -5$.

31. إذا كان $y = 9$ عندما يكون $x = 9$. فجـد y عندما يكون $x = -27$.

32. إذا كان $y = 15$ عندما يكون $x = -2$. فجـد y عندما يكون $x = 3$.

33. إذا كان $y = -8$ عندما يكون $x = -12$. فجـد y عندما يكون $x = 10$.

مثال 4 **34. علوم الأرض** يتغير مستوى الماء في النهر عكسيًا مع درجة حرارة الجو. عندما تكون درجة حرارة الجو 32° مئوية، يكون مستوى الماء 3.35 m. فإذا كانت درجة حرارة الجو 43°، فما مستوى الماء في النهر؟

35. الموسيقى يتغير تردد الوتر المهتز في البيانو عكسيًا مع طول الوتر عند تطبيق ضغط متساوٍ. فإذا كان يوجد وتر طوله 420 mm يهتز بتردد 523 دورة في الثانية، فبأي تردد سيهتز وتر طوله 707 mm؟

حدد إذا ما كانت كل حالة هي مثال *للتغير العكسي* أو *التغير الطردي*. برر استنتاجك.

36. يمكن أن يشتري نادي المسرح 10 قطع بسعر 2 AED لكل قطعة أو 5 قطع بسعر 4 AED لكل قطعة.

37. اشترت عائلة ربيع عصائر ليمون بسعر 1.50 AED للعصير الواحد.

38. تجني آمال 14 AED نظير مجالسة الأطفال لمدة ساعتين، و 21 AED نظير مجالسة الأطفال لمدة 3 ساعات.

39. قطع معدنية للعبة فيديو تم تقسيمها بالتساوي على مجموعة من الأصدقاء.

حدد إذا كان كل جدول أو تمثيل بياني يعبر عن *تغير عكسي* أم *تغير طردي*. اشرح.

40.

x	y
5	1
8	1.6
11	2.2

41.

x	y
−3	−7
−2	−10.5
4	5.25

42.

43.

McGraw-Hill Education مؤسسة مؤلفة لصالح © محفوظة حقوق الطبع والتأليف

44. العلوم الفيزيائية عندما يتوازن شخصان على أرجوحة، تكون المسافتان من مركز الأرجوحة متناسبتين عكسيًا مع وزن الشخصين. فإذا كان شخص وزنه 53.5 kg يجلس على بعد 1.8 m من مركز الأرجوحة، فما المسافة التي يجب على شخص وزنه 56.7 kg أن يجلس عندها بعيدًا عن المركز لموازنة الأرجوحة؟

جـد الحل. افترض أن y يتغير عكسيًا مع x.

45. إذا كان $y = 9.2$ عندما يكون $x = 6$. فجـد x عندما يكون $y = 3$.

46. إذا كان $y = 3.8$ عندما يكون $x = 1.5$. فجـد x عندما يكون $y = 0.3$.

47. إذا كان $y = \frac{1}{5}$ عندما يكون $x = -20$. فجـد y عندما يكون $x = -\frac{8}{5}$.

48. إذا كان $y = -6.3$ عندما يكون $x = \frac{2}{3}$. فجـد y عندما يكون $x = 8$.

49. السباحة اشترى كلّ من بدر وخميس عضوية انتفاع بحمام سباحة. وبالنسبة لكليهما، يتناسب متوسط التكلفة في اليوم عكسيًا مع عدد الأيام التي يذهبان فيها إلى حمام السباحة. فإذا ذهب بدر إلى حمام السباحة 25 يومًا بمتوسط تكلفة AED 5.60 في اليوم. وذهب خميس إلى حمام السباحة 35 يومًا. فما متوسط التكلفة في اليوم بالنسبة لخميس؟

50. العلوم الفيزيائية مقدار القوة المطلوبة للقيام بقدر معين من العمل لتحريك جسم ما يتناسب عكسيًا مع المسافة التي يتم تحريك الجسم فيها. افترض أن 90 N من القوة مطلوبة لتحريك جسم ما 10 m. فجـد القوة المطلوبة لتحريك جسم آخر 15 m إذا كان ينطوي على نفس القدر من العمل.

51. القيادة يجب أن تتمرن بثينة على القيادة 40 ساعة مع أحد والديها أو أولياء أمورها قبل السماح لها بإجراء اختبار للحصول على رخصة القيادة الخاصة بها. وهي تنوي التمرن بنفس عدد الساعات من كل أسبوع.

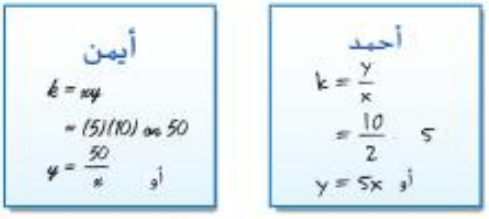
a. ليكن h ممثلاً لعدد الساعات في الأسبوع التي ستتمرن فيها بثينة. أنشئ جدولاً يبين عدد الأسابيع w التي سوف تحتاجها للتمرن بالنسبة للقيم التالية لـ h: 1, 2, 4, 5, 8, 10.

b. اشرح كيف يتغير عدد الأسابيع كلما ازداد عدد الساعات في الأسبوع.

c. اكتب معادلة توضح العلاقة بين h و w ومثلها بيانيًا.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

52. التفكير النقدي وجد أحمد وأيمن معادلة يتغير فيها x و y عكسيًا. ويكون $y = 10$ عندما يكون $x = 5$. فهل أيّ منهما على صواب؟ اشرح.



53. التحدي افترض أن f يتغير عكسيًا مع g، و g يتغير عكسيًا مع h. ما العلاقة بين f و h؟

54. التبرير هل $xy = -k$ تمثل تغيرًا عكسيًا عندما يكون $k \neq 0$؟ اشرح.

55. مسألة غير محددة الإجابة اذكر حالة أو ظاهرة من الحياة اليومية يمكن تمثيلها بمعادلة تغير عكسي. استخدم المصطلحات الصحيحة لشرح مثالك وتفسير لماذا تعد هذه الحالة تغيرًا عكسيًا.

56. الكتابة في الرياضيات قارن وقابل بين التغير الطردي والتغير العكسي. قم بتضمين وصف للعلاقة بين الميل والتمثيلين البيانيين للتغير الطردي والعكسي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

57. باعتبار وجود قوة ثابتة وأن تسارع جسم ما يتغير عكسيًا مع كتلته. افترض أن هذه القوة الثابتة تُطبق على جسم ما كتلته 6 kg ونتج عنها تسارع معدله $10\ m/s^2$. فإذا طُبقت نفس القوة على جسم آخر كتلته 12 kg. فماذا سيكون معدل التسارع الناتج؟

A $4\ m/s^2$
B $5\ m/s^2$
C $6\ m/s^2$
D $7\ m/s^2$

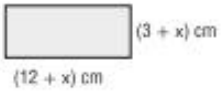
58. إذا حصلت حياة على متوسط 56% في أول سبعة اختبارات لها. فعلام ينبغي أن تحصل في اختبارها الثامن ليكون المتوسط 60% بالنسبة للاختبارات الثمانية؟

F 82%
G 88%
H 98%
J 100%

59. التقط حارب صورة ثعبان طوله 1 m بجانب جدار من الطوب. عندما قام بتحميض الصور. بلغ طول الثعبان ذي المتر طولاً. 2 cm وارتفاع الجدار 4.5 cm. فماذا كان الارتفاع الفعلي للجدار ؟

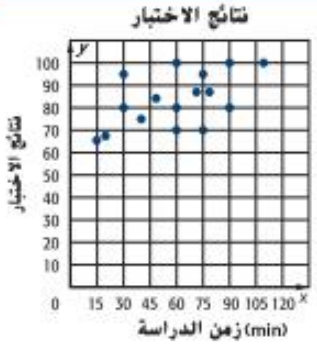
A 2.25 cm
B 22.5 cm
C 225 cm
D 2250 cm

60. الإجابة القصيرة جـد مساحة المستطيل.



مراجعة شاملة

61. اختبارات حدد إذا ما كان التمثيل البياني على اليسار يعبر عن ارتباط موجب. أم سالب. أم لا يعبر عن أي ارتباط. وإذا وُجد ارتباط. فوضح مدلوله.



افترض أن y يتغير طرديًا مع x.

62. إذا كان $y = 2.5$ عندما يكون $x = 0.5$. فجـد y عندما يكون $x = 20$.

63. إذا كان $y = -6.6$ عندما يكون $x = 9.9$. فجـد y عندما يكون $x = 6.6$.

64. إذا كان $y = 2.6$ عندما يكون $x = 0.25$. فجـد y عندما يكون $x = 1.125$.

65. إذا كان $y = 6$ عندما يكون $x = 0.6$. فجـد x عندما يكون $y = 12$.

66. المعرفة المالية بائع يحصل على AED 32,000 في العام زائد 5% من قيمة المبيعات التي يحققها. فما قيمة المبيعات المطلوبة لكي يحصل على دخل سنوي أكبر من AED 45,000؟

مراجعة المهارات

بسّط. افترض أنّ جميع المقامات لا تساوي الصفر.

67. $\frac{7^8}{7^6}$

68. $\frac{x^8y^{12}}{x^2y^7}$

69. $\frac{5pq^7}{10p^6q^3}$

70. $\left(\frac{2c^3d}{7z^2}\right)^3$

71. $\left(\frac{4a^2b}{2c^3}\right)^2$

72. $y^0(y^5)(y^{-9})$

73. $\frac{(4m^{-3}n^3)^0}{mn}$

74. $\frac{(3x^2y^5)^0}{(21x^5y^2)^0}$

McGraw-Hill Education مؤسسة مؤلفة لصالح © محفوظة والتأليف الطبع حقوق

الاستكشاف

6-4 مختبر تقنية التمثيل البياني
مجموعة الدوال النسبية

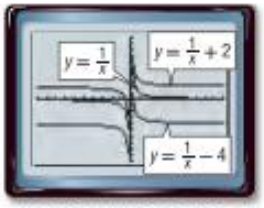
يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لتحليل كيف يؤثر تغيير المعاملين a و b في $y=\frac{a}{x-b}+c$ على التمثيلات البيانية لمجموعة الدوال النسبية.

النشاط تغيير المعاملات

مثّل كل مجموعة من المعادلات بيانيًا على الشاشة نفسها في نافذة العرض القياسية. صف أي أوجه تشابه واختلاف بين التمثيلات البيانية.

a. $y=\frac{1}{x}, y=\frac{1}{x}+2, y=\frac{1}{x}-4$

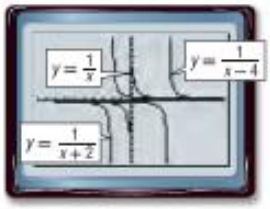
أدخل المعادلات في القائمة $Y=$ ومثّلها بيانيًا في نافذة العرض القياسية.



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

التمثيلان البيانيان لهما الشكل نفسه. كل تمثيل بياني يقترب من المحور y على كلا الجانبين. ولكن يختلف التمثيلان البيانيان في الموضع الرأسي.

b. $y=\frac{1}{x}, y=\frac{1}{x+2}, y=\frac{1}{x-4}$



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

التمثيلات البيانية لها الشكل نفسه. وتقترب جميعًا من المحور x من كلا الجانبين. ولكن تختلف التمثيلات البيانية من حيث الموضع الأفقي.

c. $y=\frac{1}{x}, y=\frac{2}{x}, y=\frac{4}{x}$

[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

تقترب جميع التمثيلات البيانية من المحور x والمحور y من كلا الجانبين. ولكن تختلف التمثيلات البيانية من حيث الشكل.

النموذج والتحليل

1. كيف يؤثر a و b و c على التمثيل البياني لـ $y=\frac{a}{x-b}+c$ ؟ اذكر أمثلة.

تفحص كل زوج من المعادلات وتوقع أوجه التشابه والاختلاف من حيث التمثيل البياني لكل منهما. استخدم الحاسبة البيانية للتحقق من توقعاتك. أكتب جملة واحدة أو جملتين تقارن بهما التمثيلين البيانيين.

2. $y=\frac{1}{x}, y=\frac{1}{x}+2$

3. $y=\frac{1}{x}, y=\frac{1}{x+5}$

4. $y=\frac{1}{x}, y=\frac{3}{x}$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

6-4 الدوال النسبية

السابق
- كتبت معادلات التغير العكسي.

الحالي
1. تحديد القيم المستبعدة من مجال دالة.
2. تحديد خطوط التقارب لتمثيل الدوال النسبية بيانيا.

لماذا؟
- حليمة تقرأ كتابا من 300 صفحة. ومتوسط عدد الصفحات التي تقرؤها كل يوم y يُعطى بالمعادلة $y = \frac{300}{x}$. حيث x هو عدد الأيام التي تقرأ فيها.

المفردات الجديدة
- دالة نسبية rational function
- قيمة مستبعدة excluded value
- خط تقارب asymptote

ممارسات في الرياضيات
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.
محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 تحديد القيم المستبعدة

الدالة $y = \frac{300}{x}$ هي مثال **للدالة النسبية**. وهذه الدالة غير خطية.

المفهوم الأساسي الدوال النسبية

الشرح
هي دالة نسبية يمكن كتابتها في صورة معادلة من الصيغة $y = \frac{p}{q}$. حيث p و q كثيرات الحدود و $q \neq 0$.

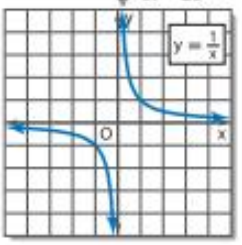
الدالة الأصلية: $f(x) = \frac{1}{x}$

نوع التمثيل البياني: قطع زائد

المجال: $\{x | x \neq 0\}$

المدى: $\{y | y \neq 0\}$

التمثيل البياني



بما أن القسمة على صفر غير معرّفة، فأي قيمة للمتغير ينتج عنها مقام صفري في دالة نسبية. يتم استبعادها من مجال الدالة. وتُسمى هذه القيم **بالقيم المستبعدة** للدالة النسبية.

مثال 1 اكتشاف القيم المستبعدة

اذكر القيمة المستبعدة من كل دالة مما يلي.

a. $y = -\frac{2}{x}$

لا يمكن أن يكون المقام 0. إذًا القيمة المستبعدة هي $x = 0$.

b. $y = \frac{2}{x + 1}$

$x + 1 = 0$ اجعل المقام يساوي 0.

$x = -1$

القيمة المستبعدة هي $x = -1$.

c. $y = \frac{5}{4x - 8}$

$4x - 8 = 0$

$4x = 8$

$x = 2$

القيمة المستبعدة هي $x = 2$.

تمرين موجّه

1A. $y = \frac{5}{2x}$

1B. $y = \frac{x}{x - 7}$

1C. $y = \frac{4}{3x + 9}$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

بالإضافة إلى استبعاد قيم x التي تجعل المقام صفرًا، من مجال الدالة النسبية. قد يتبقى استبعاد قيم إضافية من المجال أيضًا، وذلك حسب كل حالة من حالات الحياة اليومية.

مثال 2 من الحياة اليومية التمثيل البياني لدوال نسبية من الحياة اليومية

المناطيد إذا كان يوجد x أشخاص في سلة منطاد الهواء الساخن، فالدالة $y = \frac{20}{x}$ تمثل عدد الأمتار المربعة y لكل شخص. مثّل هذه الدالة بيانيًا.

بما أن عدد الأشخاص لا يمكن أن يكون صفرًا أو أقل، فمن المنطقي استبعاد القيم السالبة واستخدام قيم x الموجبة فقط.

عدد الأشخاص x	10	5	4	2
أمتار مُربعة لكل شخص y	2	4	5	10

لاحظ أنه كلما ازدادت x، اقتربت y من 0. هذا منطقي بما أنه كلما ازداد عدد الأشخاص، اقتربت المساحة لكل شخص من 0.

تمرين موجّه

2. الهندسة مستطيل تبلغ مساحته $18\ cm^2$. وتوضح الدالة $\ell = \frac{18}{w}$ العلاقة بين الطول والعرض. مثّل الدالة بيانيًا.

الربط بالحياة اليومية

كلما ازدادت درجة حرارة الغاز داخل منطاد الهواء الساخن، انخفضت كثافة الغاز. ويرتفع منطاد الهواء الساخن لأن كثافة الهواء داخله تكون أقل من كثافة الهواء خارجه.

المصدر: مركز غودارد لرحلات الفضاء

2 تحديد خطوط التقارب واستخدامها

في المثال 2، القيمة المستبعدة هي $x = 0$. لاحظ أن التمثيل البياني يقترب من المستقيم الرأسي $x = 0$، ولكن لا يمسه أبدًا.

يقترب التمثيل البياني كذلك من المستقيم الأفقي $y = 0$ ولكن لا يمسه أبدًا. المستقيمان $x = 0$ و $y = 0$ يُطلق عليهما خطين تقاربين. **خط التقارب** هو مستقيم يقترب منه التمثيل البياني للدالة.

نصيحة دراسية

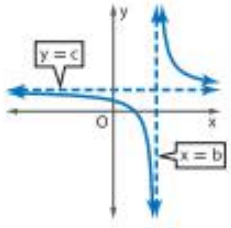
استخدام خطوط التقارب تكون خطوط التقارب مفيدة في رسم منحنيات الدوال النسبية بيانيًا. ومع ذلك، فهي لا تعد جزءًا من المنحنى.

المفهوم الأساسي خطوط التقارب

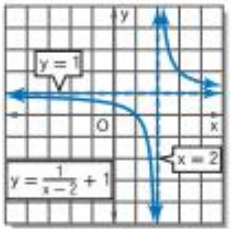
الشرح

الدالة النسبية التي تكون صيغتها $y = \frac{a}{x - b} + c,\ a \neq 0$، يكون لها خط تقارب رأسي عند x التي تجعل المقام يساوي صفرًا، $x = b$. ويكون لها خط تقارب أفقي عند $y = c$.

استخدام النماذج



مثال



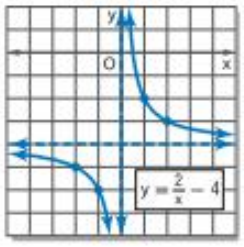
مجال $y = \frac{a}{x - b} + c$ هو كل الأعداد الحقيقية عدا $x = b$. المدى هو كل الأعداد الحقيقية عدا $y = c$. لا يمكن رسم الدوال النسبية دون رفع القلم الرصاص عن الورقة. لذا اختر قيم x على كلا جانبي خط التقارب الرأسي لتمثيل جزأي الدالة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 تحديد خطوط التقارب واستخدامها لتمثيل الدوال النسبية بيانيًا

حدد خطوط التقارب لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.

a. $y = \frac{2}{x} - 4$



الخطوة 1 حدد خطوط التقارب ومثّلها بيانيًا باستخدام الخطوط المتقطعة.

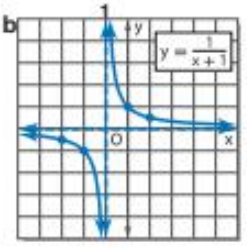
خط تقارب رأسي: $x = 0$

خط تقارب أفقي: $y = -4$

الخطوة 2 أنشئ جدولاً للقيم وعيّن النقاط. ثم صل بينهما.

x	−2	−1	1	2
y	−5	−6	−2	−3

b. $y = \frac{1}{x+1}$



الخطوة 1 لإيجاد خط التقارب الرأسي، اكتشف القيمة المستبعدة.

$x + 1 = 0$ اجعل المقام يساوي 0.

$x = -1$ اطرح 1 من كل طرف.

خط تقارب رأسي: $x = -1$

خط تقارب أفقي: $y = 0$

الخطوة 2

x	−3	−2	0	1
y	−0.5	−1	1	0.5

تمرين موجّه

3A. $y = -\frac{6}{x}$ 3B. $y = \frac{1}{x-3}$ 3C. $y = \frac{2}{x+2} + 1$

الربط بتاريخ الرياضيات

إيفلين بويد غرانفيل (1924–) تخصصت غرانفيل في الرياضيات والفيزياء بكلية سميث في عام 1945. حيث تخرجت بامتياز مع مرتبة الشرف. كما حازت على شهادة الماجستير في الرياضيات والفيزياء ودرجة الدكتوراه في الرياضيات من جامعة ييل. وتركز مشروع الدكتوراه الخاص بها حول التحليل الوظيفي.

فيما يلي أربعة أنواع مختلفة من الدوال غير الخطية.

ملخص المفهوم مجموعات الدوال

تربيعية	أسيّة	جذرية	نسبية
الدالة الأصلية: $y = x^2$ الصيغة العامة: $y = ax^2 + bx + c$	الدالة الأصلية: تختلف الصيغة العامة: $y = ab^x$	الدالة الأصلية: $y = \sqrt{x}$ الصيغة العامة: $y = \sqrt{x - b} + c$	الدالة الأصلية: $y = \frac{1}{x}$ الصيغة العامة: $y = \frac{a}{x - b} + c$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التحقق من فهمك

مثال 1 **اذكر القيمة المستبعدة من كل دالة مما يلي.**

1. $y = \frac{5}{x}$
2. $y = \frac{1}{x + 3}$
3. $y = \frac{x + 2}{x - 1}$
4. $y = \frac{x}{2x - 8}$

مثال 2 5. **التخطيط للحفل** تبلغ تكلفة الزينة من أجل حفل عشاء AED 32. وسيُقسم هذا المبلغ بين مجموعة من الأصدقاء. المبلغ الذي سيدفعه كل شخص y ممثل في $y = \frac{32}{x}$، حيث x هو عدد الأشخاص. مثّل الدالة بيانيًا.

مثال 3 **حدد خطوط التقارب لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.**

6. $y = \frac{2}{x}$
7. $y = \frac{3}{x} - 1$
8. $y = \frac{1}{x - 2}$
9. $y = \frac{-4}{x + 2}$
10. $y = \frac{3}{x - 1} + 2$
11. $y = \frac{1}{x + 2} + 5$

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **اذكر القيمة المستبعدة من كل دالة مما يلي.**

12. $y = \frac{-1}{x}$
13. $y = \frac{8}{x - 8}$
14. $y = \frac{x}{x + 2}$
15. $y = \frac{x + 1}{x - 3}$
16. $y = \frac{2x + 5}{x + 5}$
17. $y = \frac{7}{5x - 10}$

مثال 2 18. **الظباء** تستطيع الظباء من ذوات القرون أن تجري 40 km دون توقف. ويتمثل متوسط السرعة في المعادلة $y = \frac{40}{x}$، حيث x هو الزمن المستغرق لجري هذه المسافة.

a. مثّل $y = \frac{40}{x}$ بيانيًا.

b. اذكر خطوط التقارب.

19. **قيادة الدراجات** قائد دراجة يقطع 10 km كل صباح. متوسط سرعته y يُعطى بالعلاقة $y = \frac{10}{x}$، حيث x هو الزمن الذي يستغرقه لقطع مسافة 10 km بالدراجة. مثّل الدالة بيانيًا.

مثال 3 **حدد خطوط التقارب لكل دالة. ثم مثّل الدالة بيانيًا.**

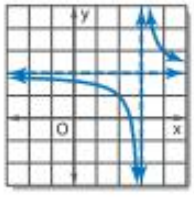
20. $y = \frac{5}{x}$
21. $y = \frac{-3}{x}$
22. $y = \frac{2}{x} + 3$
23. $y = \frac{1}{x} - 2$
24. $y = \frac{1}{x + 3}$
25. $y = \frac{1}{x - 2}$
26. $y = \frac{-2}{x + 1}$
27. $y = \frac{4}{x - 1}$
28. $y = \frac{1}{x - 2} + 1$
29. $y = \frac{3}{x - 1} - 2$
30. $y = \frac{2}{x + 1} - 4$
31. $y = \frac{-1}{x + 4} + 3$

32. **القراءة** راجع التطبيق في بداية الدرس.

a. مثّل الدالة بيانيًا. فسّر الخصائص الأساسية للمنحنى بدلالة الحالة.

b. اختر نقطة على المنحنى. واذكر مدلولها في سياق الحالة.

33. **البنية** يوضح المنحنى المرسوم إزاحة منحنى الدالة $y = \frac{1}{x}$.



a. اذكر خطوط التقارب.

b. أكتب دالة ممكنة للمنحنى المرسوم.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

34. **الطيور** الكركر طويل الذيل هو طائر بحري يمكنه الهجرة لمسافة 5000 km أو أكثر كل عام. ويمكن تمثيل متوسط المعدل بالأميال في الساعة r بواسطة المعادلة $r = \frac{5000}{t}$، حيث t هو الزمن بالساعات. استخدم الدالة لتحديد متوسط معدل الطائر إذا قضى 250 h في الطيران.

35. **رحلة ضَنّية** سيذهب طلاب الصف إلى متحف العلوم. وفي جزء من الرحلة، سيسهم كل شخص أيضًا بمبلغ مالي متساوٍ لتسمية أحد النجوم.

a. أكتب وصفًا لفظيًا لتكلفة الشخص الواحد.

b. أكتب معادلة تمثل إجمالي التكلفة y لكل شخص إذا ذهب p أشخاص إلى المتحف.

c. استخدم حاسبة التمثيل البياني لتمثيل المعادلة بيانيًا. فسّر الخصائص الأساسية للتمثيل البياني بدلالة الحالة.

d. قدّر عدد الأشخاص المطلوبين ليساوي إجمالي تكلفة الرحلة حوالي AED 15.

مثّل كل دالة بيانيًا. حدد خطوط التقارب.

36. $y = \frac{4x + 3}{2x - 4}$

37. $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

38. $y = \frac{x}{x^2 - 9}$

41. **الهندسة** المعادلة $h = \frac{2(64)}{b_1 + 8}$ تمثل الارتفاع h لشبه منحرف له المساحة 64 unit^2. يحتوي شبه المنحرف على ضلعين مقابلين متوازيين والبعد بينهما يساوي h وحدة، ويبلغ طول أحدهما b_1 وحدات والآخر 8 وحدات.

a. اذكر مجالاً ومدى منطقيين للدالة.

b. مثّل الدالة بيانيًا في الربع الأول.

c. استخدم التمثيل البياني لتقدير قيمة h عندما يكون $b_1 = 10$.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

39. **التحدي** مثّل $y = \frac{1}{x^2 - 4}$ بيانيًا. واذكر مجال الدالة ومداها.

40. **التبرير** دون عمل التمثيل البياني، اذكر التحويل الذي يحدث ما بين التمثيل البياني لـ $y = \frac{1}{x}$ والتمثيل البياني لـ $y = \frac{1}{x + 5} - 2$.

41. **مسألة غير محددة الإجابة** أكتب دالة نسبية إذا كان الخطان التقاربيان للتمثيل البياني يقعان عند $x = 3$ و $y = 1$. اشرح كيف حصلت على الدالة.

42. **الفرضيات** هل العبارة التالية صحيحة أم خاطئة؟ وإذا كانت خاطئة، أعط مثالاً مضادًا.

التمثيل البياني للدالة النسبية يكون لها تقاطع واحد على الأقل مع المحور.

43. **أي مما يلي لا ينتمي للمجموعة** حدد الدالة التي لا تنتمي إلى الثلاث دوال الأخرى. اشرح استنتاجك.

$y = \frac{4}{x}$ | $y = \frac{6}{x + 1}$ | $y = \frac{8}{x} + 1$ | $y = \frac{10}{2x}$

44. **الكتابة في الرياضيات** كيف تنعكس خواص الدالة النسبية على تمثيلها البياني؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

45. حوّل $\frac{2a^2d}{3bc} \times \frac{9b^2c}{16ad^2}$ لأبسط صورة.

A $\frac{abd}{c}$

B $\frac{ab}{d}$

C $\frac{6a}{4bd}$

D $\frac{3ab}{8d}$

46. الإجابة القصيرة في أحد الأيام، ركضت سيا 100 m في 15 s، و 200 m في 45 s، و 300 m فوق حواجز منخفضة في دقيقة ونصف. كم عدد الثواني الإضافية التي استغرقتها لركض 300 m فوق الحواجز المنخفضة عن ركضها مسافة 200 m؟

47. بدأ خالد وخلف تجارة طباعة القمصان. وبلغ إجمالي تكاليف بدء العمل AED 450. وتبلغ تكلفة طباعة القميص الواحد AED 5.50. أكتب دالة نسبية $A(x)$ لمتوسط تكلفة إنتاج x قمصان.

F $A(x) = \frac{450 + 5.5x}{x}$

G $A(x) = \frac{450}{x} + 5.5$

H $A(x) = 450x + 5.5$

J $A(x) = 450 + 5.5x$

48. الهندسة أي مما يلي هو عبارة عن شكل رباعي له زوج واحد فقط من الأضلاع المتوازية؟

A متوازي الأضلاع

B المستطيل

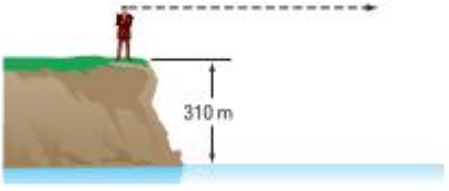
C المربع

D شبه المنحرف

مراجعة شاملة

49. السفر تستطيع أسرة خميس قطع مسافة 352 km إلى الشاطئ بالسيارة في 4 h إذا ساروا بمعدل 88 km/h. وتقول سمية إنه كان يمكن توفير نصف ساعة على الأقل إذا ساروا بمعدل 105 km/h بالسيارة. هل هي على صواب؟ اشرح. (الدرس 4-6)

50. الرؤية الصيغة $d = \sqrt{\frac{3h}{2}}$ تمثل المسافة d بالكيلومتر التي يمكن للشخص رؤيتها من ارتفاع h m. تقف شيماء على منحدر يرتفع 310 m فوق مستوى البحر. ما المسافة التي يمكن أن تراها شيماء من المنحدر؟ أكتب تعبيرًا جذريًا مبسطًا وتقريبًا عشريًا. (الدرس 2-6)



مراجعة المهارات

حلّل كل ثلاثية حدود إلى العوامل.

51. $x^2 + 11x + 24$

52. $w^2 + 13w - 48$

53. $p^2 - 2p - 35$

54. $72 + 27a + a^2$

55. $c^2 + 12c + 35$

56. $d^2 - 7d + 10$

57. $g^2 - 19g + 60$

58. $n^2 + 3n - 54$

59. $5x^2 + 27x + 10$

60. $24b^2 - 14b - 3$

61. $12a^2 - 13a - 35$

62. $6x^2 - 14x - 12$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

6-5 المعادلات النسبية

السابق:
- وجدت حل التناسبات.

الحالي:
1. حل المعادلات النسبية.
2. استخدام المعادلات النسبية لحل المسائل.

لماذا؟
- أنواع الدلافين التي تعيش في المحيطات تستطيع السباحة بمعدل 8 km/h أسرع من الدلافين التي تعيش في السواحل. يستطيع الدلفين المحيطي السباحة لمسافة 4.8 km في الوقت نفسه الذي يستغرقه الدلفين الساحلي للسباحة لمسافة 3.2 km.

الدلافين			
النوع	المسافة	المعدل	الزمن
الساحلي	d km	x km/h	t h
المحيطي	d km	$x + 8$ km/h	t h

بما أن الزمن $= \frac{\text{المسافة}}{\text{المعدل}}$، فإن المعادلة التالية تمثل هذه الحالة.

الزمن الذي يسبح فيه الدلفين الساحلي 3.2 km يساوي الزمن الذي يسبح فيه الدلفين المحيطي 4.8 km

$$\frac{3.2}{x} = \frac{4.8}{x + 8}$$

(المسافة، المعدل)

1 حل المعادلات النسبية

تحتوي **المعادلة النسبية** على تعبير نسبي واحد أو أكثر. عندما تكون المعادلة النسبية عبارة عن تناسب، يمكنك استخدام الضرب التبادلي لحلها.

مثال 1 من الحياة اليومية استخدام الضرب التبادلي لحل المعادلات

الدلافين راجع المعلومات المذكورة أعلاه. حل $\frac{3.2}{x} = \frac{4.8}{x + 8}$ لإيجاد سرعة الدلفين الساحلي. **تحقق من الحل.**

$\frac{4.8}{x + 8} = \frac{3.2}{x}$ — المعادلة الأصلية

$4.8x = 3.2x + 25.6$ — جد ناتج الضرب التبادلي.

$16x = 25.6$ — خاصية التوزيع

$x = 16$ — اطرح $2x$ من كل طرف.

إذًا، يستطيع الدلفين الساحلي السباحة بمعدل 16 km/h.

التحقق

$\frac{4.8}{x + 8} = \frac{3.2}{x}$ — المعادلة الأصلية

$\frac{4.8}{16 + 8} = \frac{3.2}{16}$ — عوّض عن x بـ 16.

$\frac{4.8}{24} = \frac{3.2}{16}$ — بسّط.

$\frac{1}{5} = \frac{1}{5}$ ✓ — بسّط.

تمرين موجّه

حُلّ كل من المعادلات التالية. تحقق من الحل.

1A. $\frac{7}{y - 3} = \frac{3}{y + 1}$

1B. $\frac{13}{10} = \frac{2f + 0.2}{7}$

المفردات الجديدة
- معادلة نسبية (rational equation)
- حل دخيل (extraneous solution)
- مسألة عمل (work problem)
- مسألة معدل (rate problem)

ممارسات في الرياضيات
التفكير بطريقة تجريدية وكمية.
استخدام نماذج الرياضيات.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكن استخدام طريقة أخرى لحل أي معادلة نسبية وهي بإيجاد المقام المشترك الأصغر لجميع الكسور في المعادلة. ثم بضرب طرفي المعادلة في المقام المشترك الأصغر للتخلص من الكسور.

مثال 2 استخدام المضاعف المشترك الأصغر لحل المعادلات النسبية

حُل المعادلة: $\frac{4}{y} + \frac{5y}{y+1} = 5$. تحقق من الحل.

الخطوة 1 جـد المضاعف المشترك الأصغر.

المضاعف المشترك الأصغر لـ $\frac{4}{y}$ و $\frac{5y}{y+1}$ هو $y(y+1)$.

الخطوة 2 اضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر.

$$\frac{4}{y} + \frac{5y}{y+1} = 5$$ المعادلة الأصلية

$$y(y+1)\left(\frac{4}{y} + \frac{5y}{y+1}\right) = y(y+1)(5)$$ اضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر، $y(y+1)$.

$$\left(\frac{y(y+1)}{1} \cdot \frac{4}{y}\right) + \left(\frac{y(y+1)}{1} \cdot \frac{5y}{y+1}\right) = y(y+1)(5)$$ خاصية التوزيع

$$(y+1)4 + y(5y) = y(y+1)(5)$$ بسّط.

$$4y + 4 + 5y^2 = 5y^2 + 5y$$ اضرب.

$$4y + 4 + 5y^2 - 5y^2 = 5y^2 - 5y^2 + 5y$$ اطرح $5y^2$ من كل طرف.

$$4y + 4 = 5y$$ بسّط.

$$4y - 4y + 4 = 5y - 4y$$ اطرح $4y$ من كل طرف.

$$4 = y$$ بسّط.

التحقق

$$\frac{4}{y} + \frac{5y}{y+1} = 5$$ المعادلة الأصلية

$$\frac{4}{4} + \frac{5(4)}{4+1} \stackrel{?}{=} 5$$ عوّض عن y بـ 4.

$$1 + 4 \stackrel{?}{=} 5$$ بسّط.

$5 = 5$ ✓ بسّط.

نصيحة دراسية

التحقق من الضروري التحقق من حلول المعادلات النسبية للتأكد من أنك حققت المعادلة الأصلية.

تمرين موجّه

حُـلّ كل من المعادلات التالية. تحقق من حلولك.

2A. $\frac{2b-5}{b-2} - 2 = \frac{3}{b+2}$

2B. $1 + \frac{1}{c+2} = \frac{28}{c^2+2c}$

2C. $\frac{y+2}{y-2} - \frac{2}{y+2} = -\frac{7}{3}$

2D. $\frac{n}{3n+6} - \frac{n}{5n+10} = \frac{2}{5}$

الربط بالمفردات

دخيل

الاستخدام اليومي

غير ذي صلة أو غير مهم

حل دخيل

الاستخدام الرياضي ناتج لا يعتبر حلاً للمعادلة الأصلية

تذكر أن أي قيمة للمتغير تجعل مقام التعبير النسبي صفرًا يجب استبعادها من المجال.

وبنفس الطريقة، عندما ينتج عن حل المعادلة النسبية صفر في المقام، فإنه ينبغي استبعاد هذا الحل. وتُسمى مثل هذه الحلول **بالحلول الدخيلة**.

$\frac{4+x}{x-5} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x+1}$ 5، و 0، و −1 لا يمكن أن تكون حلولاً.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح McGraw-Hill Education

مثال 3 الحلول الدخيلة

حُـلّ $\frac{2n}{n-5}+\frac{4n-30}{n-5}=5$ واذكر أي حلولٍ دخيلة.

$\frac{2n}{n-5}+\frac{4n-30}{n-5}=5$ المعادلة الأصلية

$(n-5)\left(\frac{2n}{n-5}+\frac{4n-30}{n-5}\right)=(n-5)5$ اضرب كل طرف في المقام المشترك الأصغر، $n-5$.

$\left(\frac{\cancel{n-5}^{1}}{1}\times\frac{2n}{\cancel{n-5}_{1}}\right)+\left(\frac{\cancel{n-5}^{1}}{1}\times\frac{4n-30}{\cancel{n-5}_{1}}\right)=(n-5)5$ خاصية التوزيع

$2n+4n-30=5n-25$ بسّط.

$6n-30=5n-25$ اجمع الحدود المتشابهة.

$6n-5n-30=5n-5n-25$ اطرح $5n$ من كل طرف.

$n-30=-25$ بسّط.

$n-30+30=-25+30$ اجمع 30 إلى كل طرف.

$n=5$ بسّط.

بما أن $n=5$ ينتج عنه صفر في مقام المعادلة الأصلية، فهو حل دخيل. إذًا، المعادلة ليس لها حل.

تمرين موجّه

3. حُل المعادلة: $\frac{n^2-3n}{n^2-4}-\frac{10}{n^2-4}=2$. واذكر أي حلولٍ دخيلة.

نصيحة دراسية

الحلول من الممكن أن تحصل على كلٍ من حل مقبول وحل دخيل عند حل معادلة نسبية.

2 استخدام المعادلات النسبية لحل المسائل

يمكنك استخدام المعادلات النسبية لحل **مسائل العمل**، أو مسائل تشتمل على معدلات العمل.

مثال 4 من الحياة اليومية مسألة عمل

وظائف في هذه الوظيفة ذات الدوام الجزئي في حديقة الحيوان، يستطيع رشيد تنظيف ساحة الطيور في ساعتين. ويستطيع حسام تنظيف الساحة نفسها في ساعة و 15 دقيقة. كم من الوقت سيستغرقان إذا عملا معًا؟

الفهم يستغرق رشيد ساعتين لإكمال العمل ويستغرق حسام $1\frac{1}{4}$ ساعة.

أنت تحتاج إلى إيجاد معدل عمل كل شخص والزمن الإجمالي t المستغرق منهما لإكمال العمل معًا.

التخطيط جِـد الكسر الذي يعبر عن العمل الذي يقوم به كل شخص في ساعة.

معدل رشيد ← $\frac{1}{2}=\frac{1 \text{ عمل}}{2 \text{ ساعة}}$ عمل لكل ساعة

معدل حُسام ← $\frac{1 \text{ عمل}}{1\frac{1}{4} \text{ ساعة}}$ أو $\frac{4}{5}=\frac{1 \text{ عمل}}{\frac{5}{4} \text{ ساعة}}$ عمل لكل ساعة

بما أن المعدل × الزمن = الكسر المعبر عن العمل المنجز. فاضرب كل معدل في الزمن t لتمثيل كمية العمل المنجز لكل شخص.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © محفوظ الطبع والتأليف

الحل

	عملاً واحدًا	يساوي	الكسر المعبر عن عمل حُسام المنجز	زائد	الكسر المعبر عن عمل رشيد المنجز
	1	=	$\frac{4}{5}t$	+	$\frac{1}{2}t$

$10\left(\frac{1}{2}t + \frac{4}{5}t\right) = 10(1)$ اضرب كل طرف في المقام المشترك الأصغر، 10.

$10\left(\frac{1}{2}t\right) + 10\left(\frac{4}{5}t\right) = 10$ خاصية التوزيع

$5t + 8t = 10$ بسّط.

$t = \frac{10}{13}$ اجمع الحدود المتشابهة واقسم كل طرف على 13.

إذًا، سيستغرقان $\frac{10}{13}$ ساعة أو حوالي 46 دقيقة لإنجاز العمل إذا عملا معًا.

التحقق في $\frac{10}{13}$ ساعة، سوف ينجز رشيد $\frac{1}{2} \times \frac{10}{13}$ أو $\frac{5}{13}$ من العمل وسوف ينجز حُسام $\frac{4}{5} \times \frac{10}{13}$ أو $\frac{8}{13}$ من العمل. معًا، سينجزان $\frac{5}{13} + \frac{8}{13}$ أو عملاً واحدًا كاملاً. إذًا، الإجابة صحيحة. ✓

تصيحة دراسية

الاستنتاج عند حل مسائل العمل، تذكر أن المصطلح الذي يمثل جزءًا من العمل المنجز، يجب أن يكون بوحدة زمنية واحدة.

تمرين موجّه

4. كنس ورق الشجر تستطيع علياء كنس ورق الشجر في ساعتين. ويستغرق ذلك من أخيها زياد 3 ساعات. كم من الوقت سيستغرقان في كنس ورق الشجر إذا عملا معًا؟

يمكن استخدام المعادلات النسبية أيضًا لحل **مسائل المعدل**.

مثال 5 من الحياة اليومية مسألة المعدل

الطائرات أقلعت طائرة وكانت تطير بمتوسط 772 km/h. بعد 15 دقيقة، غادرت طائرة أخرى واتجهت نحو المدينة نفسها بسرعة 900 km/h. كم من الزمن ستستغرق الطائرة الثانية لاجتياز الطائرة الأولى؟

دوّن المعلومات التي تعرفها في جدول.

الطائرة	المسافة	السرعة	الزمن
1	d km	772 km/h	t h
2	d km	900 km/h	$t - \frac{1}{4}$ h

أقلعت الطائرة 2 بعد 15 دقيقة، أو $\frac{1}{4}$ ساعة بعد الطائرة 1

بما أن كلتا الطائرتين ستكون سافرتا المسافة نفسها عندما تجتاز الطائرة 2 الطائرة 1، فإنه يمكنك كتابة المعادلة التالية.

مسافة الطائرة 1 = مسافة الطائرة 2

$772 \times t = 900 \times \left(t - \frac{1}{4}\right)$ المسافة = السرعة × الزمن

$772t = (900 \times t) - \left(900 \times \frac{1}{4}\right)$ خاصية التوزيع

$772t = 900t - 225$ بسّط.

$-80t = -225$ اطرح $560t$ من كل طرف.

$t = 1.75$ اقسم كل طرف على -80.

إذًا، ستجتاز الطائرة الثانية الطائرة الأولى بعد 1.75 h.

الربط بالحياة اليومية

تبلغ أطول رحلة جوية تجارية دون توقف 21,600 km من مطار هونج كونج في الصين إلى مطار لندن – هيثرو في المملكة المتحدة. واستغرقت الرحلة 22 ساعة و42 دقيقة.

المصدر: موسوعة غينيس للأرقام القياسية العالمية

تمرين موجّه

5. غادرت هدى المنزل وسارت بمعدل 3 km/h. بعد 10 دقائق، غادرت أمها المنزل وسارت بالدراجة بمعدل 10 km/h. فبعد كم دقيقة ستلحق الأم بابنتها؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

الأمثلة 1-3 **حُـلّ كل من المعادلات التالية. واذكر أي حلولٍ دخيلة.**

1. $\frac{2}{x+1} = \frac{4}{x}$
2. $\frac{t+3}{5} = \frac{2t+3}{9}$
3. $\frac{a+3}{a} - \frac{6}{5a} = \frac{1}{a}$
4. $4 - \frac{p}{p-1} = \frac{2}{p-1}$
5. $\frac{2t}{t+1} + \frac{4}{t-1} = 2$
6. $\frac{x+3}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} = 1$

مثال 4 7. **إزالة الأعشاب الضارة** يستطيع سلطان إزالة الأعشاب الضارة بالحديقة في 45 دقيقة. وتستطيع أخته عبير القيام بذلك في 50 دقيقة. فكم سيستغرقان من الوقت لإزالة الأعشاب الضارة بالحديقة إذا عملا معًا؟

مثال 5 8. **تنسيق الحدائق** يملأ أمير دلوًا سعته 13.2 L لري النباتات من صنبور يتدفق منه الماء بمعدل 6.6 L/min. إذا كان سيضيف خرطومًا يتدفق منه الماء بمعدل 5.4 L/min. فكم عدد الدقائق التي سيستغرقها لملء الدلو؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

التمرين وحل المسائل

الأمثلة 1-3 **حُـلّ كل من المعادلات التالية. واذكر أي حلولٍ دخيلة.**

9. $\frac{8}{n} = \frac{3}{n-5}$
10. $\frac{6}{t+2} = \frac{4}{t}$
11. $\frac{3g+2}{12} = \frac{g}{2}$
12. $\frac{5h}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3h}{8}$
13. $\frac{2}{3w} = \frac{2}{15} + \frac{12}{5w}$
14. $\frac{c-4}{c+1} = \frac{c}{c-1}$
15. $\frac{x-1}{x+1} - \frac{2x}{x-1} = -1$
16. $\frac{y+4}{y-2} + \frac{6}{y-2} = \frac{1}{y+3}$
17. $\frac{a}{a+3} + \frac{a^2}{a+3} = 2$
18. $\frac{12}{a+3} + \frac{6}{a^2-9} = \frac{8}{a+3}$
19. $\frac{3n}{n-1} + \frac{6n-9}{n-1} = 6$
20. $\frac{n^2-n-6}{n^2-n} - \frac{n-5}{n-1} = \frac{n-3}{n^2-n}$

مثال 4 21. **الطلاء** إذا كان سعيد يستغرق 3 ساعات لطلاء جانب واحد من السياج. ويستغرق ذلك من طارق 5 ساعات. فكم من الوقت سيستغرق ذلك منهما إذا عملا معًا؟

22. **غسل الصحون** إذا كان عبيد يعمل غاسلاً للصحون ويستطيع غسل 500 صحن في ساعتين و 15 دقيقة. ويستطيع عبد الرحمن إنهاء 500 صحن في 3 ساعات. فكم سيستغرقان من الوقت لإنهاء كل الصحون إذا عملا معًا؟

مثال 5 23. **الثلج** إذا كان الفندق به جهازان لصنع الثلج في المطبخ. فكم عدد الساعات التي سيستغرقها الجهازان لصنع 60 kg من الثلج؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة.

24. **قيادة الدراجات** إذا اتجه قائدا دراجتين كلٌّ في اتجاه معاكس للآخر في مسار دائري طوله 5.6 كيلومترات. وبدتا في الوقت نفسه. وأكمل قائد الدراجة الأول المسار في 22 دقيقة وقائد الدراجة الثاني في 28 دقيقة. فمتى أي وقت تجاوز كلٌ منهما الآخر؟

حاسبة التمثيل البياني بالنسبة لكل دالة، a) صِف شكل التمثيل البياني، b) استخدم التحليل إلى العوامل لتحويل الدالة لأبسط صورة، c) جِـد أصفار الدالة.

25. $f(x) = \frac{x^2 - x - 30}{x - 6}$
26. $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x + 2}$
27. $f(x) = \frac{x^3 + 6x^2 + 12x}{x}$

28. **التبرير** إذا كان عبد الكريم يستطيع طلاء منزل مساحته قياسية في حوالي 5 أيام. واستأجر مساعدين اثنين لمهمته الأخيرة. فبأي معدل يجب على هذين المساعدين العمل لصالح عبد الكريم للوفاء بالموعد النهائي البالغ يومين؟

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

29. **الطائرات** إذا كانت الرياح المعاكسة تهب في اتجاه الطائرة وتقلل من سرعتها الإجمالية. في حين تدفع الرياح الخلفية الطائرة وتزيد من سرعتها الإجمالية. ليكن w يساوي سرعة الرياح. و r يساوي السرعة التي حددها الطيار. و s يساوي السرعة الإجمالية.

a. أكتب معادلة للسرعة الإجمالية مع الرياح المعاكسة ومعادلة للسرعة الإجمالية مع الرياح الخلفية.

b. استخدم قاعدة المعدل لكتابة معادلة للمسافة التي قطعتها الطائرة مع الرياح المعاكسة ومعادلة أخرى للمسافة التي قطعتها الطائرة مع الرياح الخلفية. ثم حل كل معادلة لإيجاد الزمن بدلاً من المسافة.

30. **كوكتيل العصائر** إذا كان بائع عصائر الفاكهة لديه 3 L من عصير الأناناس و 2 L من عصير البرتقال. وتريد فتحية إضافة المزيد من عصير البرتقال بحيث يكون 60% من كوكتيل عصير الفاكهة من عصير البرتقال. ليكن x يساوي لترات عصير البرتقال التي تريد إضافتها.

a. انسخ الجدول التالي وأكمله.

العصير	لترات عصير البرتقال	إجمالي لترات العصير	النسبة المئوية لعصير البرتقال
الكوكتيل الأصلي		5	
الكوكتيل النهائي	$x + 2$		0.6

b. أكتب معادلة وحلها لإيجاد لترات عصير البرتقال المطلوب إضافتها.

31. **السكن الجماعي** إذا كان عدد الساعات h المستغرقة في تنظيف السكن الجماعي يتغير عكسيًا مع عدد الأشخاص الذين ينظفونه c ويتغير طرديًا مع عدد الأشخاص الذين يعيشون هناك p.

a. فأكتب معادلة توضح الارتباط بين h، و c، و p. (إرشاد: قم بتضمين الثابت k.)

b. إذا كان تنظيف السكن الجماعي يستغرق 8 ساعات من 5 أشخاص عندما يوجد 100 شخص ساكن. فكم سيستغرق تنظيف السكن إذا كان يوجد 10 أشخاص ينظفون ولا زال عدد الأشخاص الذين يعيشون في السكن كما هو؟

حُـلّ كل من المعادلات التالية. واذكر أي حلول دخيلة.

32. $\frac{4b + 2}{b^2 - 3b} + \frac{b + 2}{b} = \frac{b - 1}{b}$ 1

33. $\frac{x^2 - x - 6}{x + 2} + \frac{x^3 + x^2}{x} = 3$

34. $\frac{y^2 + 5y - 6}{y^3 - 2y^2} = \frac{5}{y} - \frac{6}{y^3 - 2y^2}$

35. $\frac{x - \frac{6}{5}}{x} - \frac{x - 10\frac{1}{2}}{x - 5} = \frac{x + 21}{x^2 - 5x}$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

36. **التحدي** حَل المعادلة: $\frac{2x}{x - 2} + \frac{x^2 + 3x}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{2}{(x + 1)(x - 2)}$.

37. **التبرير** ما وجه الارتباط بين القيمة المستبعدة من التعبير النسبي والحل الدخيل للمعادلة النسبية المناظرة؟ اشرح.

38. **الكتابة في الرياضيات** لماذا يجب عليك التحقق من حلولك للمعادلات النسبية؟

39. **الفرضيات** جـد مثالاً مضاداً للعبارة التالية.

حل المعادلة النسبية لا يمكن أبدًا أن يكون صفرًا.

40. **الكتابة في الرياضيات** اشرح خطوات حل معادلة نسبية لا تكون عبارة عن تناسب.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

41. يستغرق علي 4 ساعات في بناء سياج. وإذا استأجر عمر ليساعده، فسوف يمكنهما إنجاز العمل في 3 ساعات. فإذا بنى عمر السياج نفسه بمفرده، فكم من الوقت سيستغرق منه ذلك؟

A $1\frac{5}{7}$ ساعة **C** 8 ساعات

B $3\frac{2}{3}$ ساعات **D** 12 ساعة

42. في سباق 1000 m، أكمل عدنان 35 m قبل منصور و 53 m قبل أيوب. فما المسافة التي سبق منصور بها أيوب؟

F 18 m **G** 35 m **H** 53 m **J** 88 m

43. تم صب 20 L من عصير الليمون في وعائين لهما حجم مختلف. عبّر عن كمية عصير الليمون التي تم صبها في الوعاء الأصغر بدلالة g. وهي الكمية التي تم صبها في الوعاء الأكبر.

A $g + 20$ **C** $g - 20$

B $20 + g$ **D** $20 - g$

44. الإجابة الشبكية صالة ألعاب رياضية بها أقراص ذات وزن 2 kg و 5 kg. ويوجد أربعون قرصًا بشكل إجمالي. فإذا كان الوزن الإجمالي لأقراص 2 kg هو نفسه الوزن الإجمالي لأقراص 5 kg. فكم عدد أقراص 2 kg الموجودة؟

مراجعة شاملة

45. التعداد السكاني يشهد التعداد السكاني في دولة ما تناقصًا سنويًا بمعدل 1.1%. وفي عام 2009، بلغ عدد سكانها 2,261,294. إذا استمر هذا الاتجاه، فتوقع تعداد السكان في عام 2019.

46. الطماطم يوجد أكثر من 10,000 صنف من الطماطم. فإذا كانت إحدى الشركات المصنعة للبذور تنتج عبوات بذور لـ 200 صنف من الطماطم، فكم عدد الأصناف التي لا توفر الشركة بذورًا لها؟

47. القيادة يجب أن يبقى ضغط الإطارات في حدود رطلين للبوصة المربعة (psi) من القيمة الموصى بها من جهة التصنيع. إذا كان الموصى به للإطار هو 30 psi، فما مدى قيم الضغط المقبولة؟

عبّر عن كل عدد بالصيغة العلمية.

48. 12,300 **49.** 0.0000375 **50.** 1,255,000

51. المعرفة المالية إذا كان مع محمد 13 AED لطلب بيتزا. وتبلغ تكلفة البيتزا 7.50 AED زائد 1.25 AED لكل إضافة. وهو يعتزم دفع 15% من التكلفة الإجمالية بقشيشًا. أكتب متباينة وحلها لإيجاد عدد الإضافات التي يمكن أن يطلبها.

حُـلّ كل متباينة. تحقق من صحة الحل.

52. $\frac{b}{10} \leq 5$ **53.** $-7 > -\frac{r}{7}$ **54.** $\frac{5}{8}y \geq -15$

مراجعة المهارات

حدد احتمال وقوع كل حدث إذا قمت باختيار كرة زجاجية من حقيبة تحتوي على 9 كرات حمراء، و 6 كرات زرقاء، و 5 كرات صفراء.

55. P(زرقاء) **56.** P(حمراء) **57.** P(ليست صفراء)

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

6-5 مختبر تقنية التمثيل البياني
حل المعادلات النسبية

ممارسات في الرياضيات
استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

يمكنك استخدام حاسبة التمثيل البياني لحل المعادلات النسبية عن طريق التمثيل البياني. واستخدام الجداول وأحد النظم الجبرية الحاسوبية (CAS).

للحل بالتمثيل البياني، مثّل بيانيًا كلا طرفي المعادلة وحدد موقع نقطة (نقاط) التقاطع.

النشاط 1 حل المعادلة النسبية بالتمثيل البياني

حُـلّ المعادلة: $\frac{3}{x} = \frac{5}{x+2}$ بالتمثيل البياني.

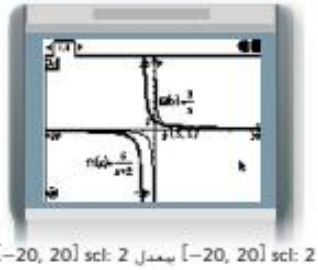
الخطوة 1 أضف صفحة **Graphs** جديدة.

الخطوة 2 استخدام خيار **Window Settings** من قائمة **Window/Zoom** لضبط النافذة إلى 20− إلى 20 بالنسبة لكل من x و y. اضبط المقياسين إلى 2.

الخطوة 3 أدخل $\frac{5}{x+2}$ إلى $f_1(x)$ و $\frac{3}{x}$ إلى $f_2(x)$.

الخطوة 4 غير سَمك التمثيل البياني لـ $f_1(x)$ عن طريق تحديد التمثيل البياني لـ $f_1(x)$ وخيار **ctrl menu** **Attributes**.

الخطوة 5 استخدم أداة **Intersection Point(s)** من قائمة **Points & Lines** لإيجاد نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين. حدد التمثيل البياني لـ **f1(x) enter** ثم التمثيل البياني لـ **f2(x) enter**.



[−20, 20] بمعدل [−20, 20] scl: 2

يتقاطع التمثيلان البيانيان عند النقطة (3, 1). وهذا يعني أن $\frac{5}{x+2}$ و $\frac{3}{x}$ كليهما يساويان 1 عندما يكون $x = 3$. إذًا، حل $\frac{3}{x} = \frac{5}{x+2}$ هو $x = 3$.

تمارين

استخدم حاسبة تمثيل بياني لحل كل معادلة.

1. $\frac{5}{x} + \frac{4}{x} = 10$
2. $\frac{12}{x} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$
3. $\frac{6}{x} + \frac{3}{2x} = 12$
4. $\frac{4}{x} + \frac{3}{4x} = \frac{1}{8}$
5. $\frac{4}{x} + \frac{x-2}{2x} = x$
6. $\frac{3}{3x-2} + \frac{5}{x} = 0$
7. $\frac{2x+1}{2} + \frac{3}{2x} = \frac{2}{x}$
8. $\frac{x}{x+2} + x = \frac{5x+8}{x+2}$
9. $\frac{1}{2x} + \frac{5}{x} = \frac{3}{x-1}$
10. $\frac{4x-3}{x-2} + \frac{2x+5}{x-2} = 6$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لشركة مؤسسة McGraw-Hill Education

النشاط 2 حل المعادلة النسبية باستخدام جدول

حُـلّ المعادلة: $\frac{2x+1}{3} = \frac{x+2}{2}$ باستخدام جدول.

الخطوة 1 أضف صفحة **Lists & Spreadsheet** جديدة.

الخطوة 2 قم بتسمية العمود A بـ x. أدخل القيم من -4 إلى 4 في الخلايا A1 إلى A9.

الخطوة 3 في العمود B في صف الصيغة، أدخل الطرف الأيسر من المعادلة النسبية مع وضع ثنائيات الحدود بين أقواس. في العمود C في صف الصيغة، أدخل الطرف الأيمن من المعادلة النسبية مع وضع ثنائيات الحدود بين أقواس. حدد **Variable Reference** عندما يُطلب منك.

مرّر حتى ترى أين تتساوى القيم في العمودين B و C. يحدث هذا عند $x = 4$.
لذا، حل $\frac{2x+1}{3} = \frac{x+2}{2}$ هو 4.

يمكنك استخدام نظام جبري حاسوبي (CAS) أيضًا لحل المعادلات النسبية.

النشاط 3 حل المعادلة النسبية باستخدام نظام جبري حاسوبي

حُـلّ المعادلة: $\frac{1}{x} = \frac{x-4}{x-2} - \frac{x-3}{x}$ باستخدام نظام جبري حاسوبي (CAS).

الخطوة 1 أضف صفحة **Calculator** جديدة.

الخطوة 2 لحل المعادلة، حدد أداة **Solve** من القائمة **Algebra**. أدخل الطرف الأيسر من المعادلة مع وضع ثنائيات الحدود بين الأقواس.
أدخل = والطرف الأيمن من المعادلة.
ثم أكتب فاصلة وأتبعها بـ x. ثم اضغط **enter**.

سيظهر الحل، 4.

تمارين

حُـلّ كل معادلة مما يلي باستخدام جدول أو نظام جبري حاسوبي.

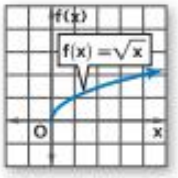
11. $\frac{2}{x} + \frac{2+x}{2} = \frac{x+3}{2}$
12. $\frac{4}{x-2} = -\frac{1}{x+3}$
13. $\frac{3}{x+2} + \frac{4}{x-1} = 0$
14. $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} = 0$
15. $\frac{2}{x+4} + \frac{4}{x-1} = 0$
16. $\frac{1}{x-2} + \frac{x+2}{4} = 2x$
17. $\frac{2x}{x+3} + \frac{x+1}{2} = x$
18. $\frac{2}{x-3} + \frac{3}{x-2} = \frac{4}{x}$
19. $\frac{x^2}{x+1} + \frac{x}{x-1} = x$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

دوال الجذر التربيعي (الدرس 1-6)



- تشتمل دالة الجذر التربيعي على الجذر التربيعي لمتغير.
- الدالة الأصلية لمجموعة دوال الجذر التربيعي تكون $f(x) = \sqrt{x}$.

المعادلات الجذرية (الدرس 2-6)

- يكون التعبير الجذري في أبسط صورة عندما
- لا يوجد مجذور به عوامل المربع الكامل غير 1.
- لا يوجد أي مجذور مشتمل على كسور.
- لا يظهر أي مجذور في مقام كسر.

التغير العكسي (الدرس3-6)

- يمكنك استخدام $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ لحل المسائل المشتملة على تغير عكسي.

الدوال النسبية (الدرس 4-6)

- القيم المستبعدة هي قيم متغير ينتج عنها مقام صفري.
- إذا حدثت خطوط تقارب رأسية، فسوف تقع عند قيم مستبعدة.

المعادلات النسبية (الدرس 5-6)

- استخدم الضرب التبادلي لحل المعادلات النسبية ذات كسر واحد على كل طرف من طرفي إشارة المساواة.

المفردات الأساسية

خط تقارب asymptote	دالة جذرية radical function
مغلقة closed	مجذور radicand
مرافق conjugate	مسألة معدل rate problem
قيمة مستبعدة excluded value	إنطاق المقام rationalize the denominator
حل دخيل extraneous solution	دالة نسبية rational function
تغير عكسي inverse variation	معادلة نسبية rational equation
قاعدة ناتج الضرب product rule	دالة الجذر التربيعي square root function
معادلات جذرية radical equations	مسألة عمل work problem
تعبير جذري radical expression	

مطويات منظّم الدراسة

تأكد من إدراج المفاهيم الأساسية في المطوية.

مراجعة المفردات

حدد ما إذا كانت كل جملة *صحيحة* أم *خاطئة*. وإذا كانت *خاطئة*، فاستبدل الكلمة أو العبارة أو التعبير أو العدد الذي تحته خط لصياغة جملة صحيحة.

1. التعبيران $12\sqrt{4}$ و $\sqrt{288}$ متكافئان. صحيحة
2. التعبيران $\sqrt{5} - 2$ و $\sqrt{5} + 2$ مترافقان. صحيحة
3. في التعبير $-5\sqrt{2}$ ، يكون المجذور هو 2. 2
4. إذا كان ناتج ضرب متغيرين عبارة عن ثابت غير صفري، فإن العلاقة بينهما تكون تغيرًا عكسيًا. صحيحة
5. إذا كان المستقيم $x = a$ خطًا تقاربيًا رأسيًا لدالة نسبية، فإن a تكون قيمة مستبعدة. صحيحة
6. القيم المستبعدة من التعبير $\frac{x}{x^2 + 5x + 6}$ هي -3 و -2 صحيحة
7. المعادلة $\frac{3x}{x-2} = \frac{6}{x-2}$ لها حل دخيل، 2. صحيحة

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة درس بدرس

6-1 دوال الجذر التربيعي

مثّل كل دالة بيانيًا. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.

8. $y = \sqrt{x} - 3$
9. $y = \sqrt{x} + 2$
10. $y = -5\sqrt{x}$
11. $y = \sqrt{x} - 6$
12. $y = \sqrt{x - 1}$
13. $y = \sqrt{x} + 5$

14. **الهندسة** يمكن استخدام الدالة $s = \sqrt{A}$ لإيجاد طول ضلع المربع المُعطى مساحته. استخدم هذه الدالة لاكتشاف طول ضلع مربع مساحته $90\ cm^2$. قرّب إلى أقرب جزء من عشرة، إذا لزم الأمر.

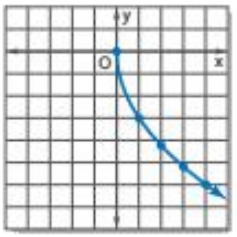
مثال 1

مثّل $y = -3\sqrt{x}$ بيانيًا. وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.

أنشئ جدولاً. اختر قيمًا غير سالبة لـ x.

x	0	1	2	3	4
y	0	−3	≈−4.2	≈−5.2	−6

عيّن النقاط وارسم منحنى منتظمًا.



التمثيل البياني لـ $y = \sqrt{x}$ تمتد رأسيًا وانعكس على المحور x.

المجال هو $\{x | x \geq 0\}$.

المدى هو $\{y | y \leq 0\}$.

6-2 المعادلات الجذرية

حُلّ كل من المعادلات التالية. تحقق من صحة الحل.

34. $10 + 2\sqrt{x} = 0$
35. $\sqrt{5 - 4x} - 6 = 7$
36. $\sqrt{a + 4} = 6$
37. $\sqrt{3x} = 2$
38. $\sqrt{x + 4} = x - 8$
39. $\sqrt{3x - 14} + x = 6$

40. **السقوط الحر** بافتراض عدم وجود مقاومة للهواء، يمكن إيجاد الزمن t بالثواني الذي يستغرقه جسم ما للسقوط من h أمتار، باستخدام المعادلة $t = \sqrt{\frac{2h}{4}}$. إذا قفز لاعب قفز حر من طائرة وكان في سقوط حر لمدة 10 ثوانٍ قبل فتح المظلة، فكم عدد أمتار السقوط الحر؟

مثال 2

حُلّ المعادلة: $\sqrt{7x + 4} - 18 = 5$.

$\sqrt{7x + 4} - 18 = 5$	المعادلة الأصلية
$\sqrt{7x + 4} = 23$	اجمع 18 إلى كل طرف.
$(\sqrt{7x + 4})^2 = 23^2$	قم بتربيع كل طرف.
$7x + 4 = 529$	بسّط.
$7x = 525$	اطرح 4 من كل طرف.
$x = 75$	اقسم كل طرف على 7.

المعادلة الأصلية

$\sqrt{7(75) + 4} - 18 \stackrel{?}{=} 5$	$x = 75$
$\sqrt{525 + 4} - 18 \stackrel{?}{=} 5$	اضرب.
$\sqrt{529} - 18 \stackrel{?}{=} 5$	اجمع.
$23 - 18 \stackrel{?}{=} 5$	بسّط.
$5 = 5$ ✓	صحيح.

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © حقوق الطبع والتأليف

مراجعة درس بدرس

6-3 التغير العكسي

جـد الحل. افترض أن y يتغير عكسيًا مع x.

41. إذا كان $y = 4$ عندما يكون $x = 1$. فجـد x عندما يكون $y = 12$

42. إذا كان $y = -1$ عندما يكون $x = -3$. فجـد y عندما يكون $x = -9$

43. إذا كان $y = 1.5$ عندما يكون $x = 6$. فجـد y عندما يكون $x = -16$

44. الفيزياء إذا كان شخص وزنه 61 kg يجلس على بعد 1.5 m من مركز أرجوحة. فما المسافة التي يجب على شخص وزنه 49 kg أن يجلس عندها بعيدًا عن المركز لموازنة الأرجوحة؟

مثال 3

إذا كان y يتغير عكسيًا مع x و $y = 28$ عندما يكون $x = 42$، فجـد y عندما يكون $x = 56$.

ليكن $x_1 = 42$، و $x_2 = 56$، و $y_1 = 28$. حل لإيجاد y_2.

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$ تناسب للتغير العكسي

$\frac{42}{56} = \frac{y_2}{28}$ التعويض

$1176 = 56y_2$ الضرب التبادلي

$21 = y_2$

لذا. $y = 21$ عندما يكون $x = 56$.

6-4 الدوال النسبية

اذكر القيمة المستبعدة من كل دالة مما يلي.

45. $y = \frac{1}{x - 3}$ **46.** $y = \frac{2}{2x - 5}$

47. $y = \frac{3}{3x - 6}$ **48.** $y = \frac{-1}{2x + 8}$

49. حفل البيتزا طلبت هيام بيتزا ومياهًا غازية للمجموعة الدراسية لديها مقابل AED 38. التكلفة لكل شخص y تُعطى بالمعادلة $y = \frac{38}{x}$، حيث x هو عدد الأشخاص في المجموعة الدراسية. مثّل الدالة بيانيًا واذكر خطوط التقارب.

مثال 4

اذكر القيمة المستبعدة من الدالة $y = \frac{1}{4x + 16}$.

اجعل المقام يساوي الصفر.

$4x + 16 = 0$

$4x + 16 - 16 = 0 - 16$ اطرح 16 من كل طرف.

$4x = -16$ بسّط.

$x = -4$ اقسم كل طرف على 4.

6-5 المعادلات النسبية

حـلّ كل من المعادلات التالية. واذكر أي حلول دخيلة.

50. $\frac{5n}{6} + \frac{1}{n - 2} = \frac{n + 1}{3(n - 2)}$

51. $\frac{4x}{3} + \frac{7}{2} = \frac{7x}{12} - 14$

52. $\frac{11}{2x} + \frac{2}{4x} = \frac{1}{4}$

53. $\frac{1}{x + 4} - \frac{1}{x - 1} = \frac{2}{x^2 + 3x - 4}$

54. $\frac{1}{n - 2} = \frac{n}{8}$

55. الطلاء إذا كانت وفاء تستطيع طلاء غرفة في 6 ساعات. وتستطيع هنا طلاء الغرفة في 4 ساعات. فكم من الزمن ستستغرقان لطلاء الغرفة إذا عملتا معًا؟

مثال 5

حـلّ المعادلة: $\frac{3}{x^2 + 3x} + \frac{x + 2}{x + 3} = \frac{1}{x}$

$\frac{3}{x^2 + 3x} + \frac{x + 2}{x + 3} = \frac{1}{x}$

$x(x + 3)\left(\frac{3}{x(x + 3)}\right) + x(x + 3)\left(\frac{x + 2}{x + 3}\right) = x(x + 3)\left(\frac{1}{x}\right)$

$3 + x(x + 2) = 1(x + 3)$

$3 + x^2 + 2x = x + 3$

$x^2 + x = 0$

$x(x + 1) = 0$

$x = 0$ أو $x = -1$

الحل هو -1. ويوجد حل دخيل يساوي 0.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

6 تدريب على الاختبار

مثّل كل دالة بيانيًا، وقارن بالتمثيل البياني الأصلي. واذكر المجال والمدى.

1. $y = -\sqrt{x}$
2. $y = \frac{1}{4}\sqrt{x}$
3. $y = \sqrt{x} + 5$
4. $y = \sqrt{x + 4}$

5. **اختيار من متعدد** طول ضلع المربع يُعطى بالدالة $s = \sqrt{A}$، حيث A هي مساحة المربع. ما محيط دائرة مساحتها $64\ cm^2$؟

A 64 cm

B 8 cm

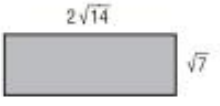
C 32 cm

D 16 cm

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

6. $5\sqrt{36}$
7. $\frac{3}{1 - \sqrt{2}}$
8. $2\sqrt{3} \cdot 7\sqrt{3}$
9. $3\sqrt{6}(5\sqrt{2})$

10. **اختيار من متعدد** جد مساحة المستطيل.



F $7\sqrt{2}$

G 14

H $14\sqrt{2}$

J $98\sqrt{2}$

حُلّ كل من المعادلات التالية. تحقق من حلك.

11. $\sqrt{10x} = 20$

12. $\sqrt{4x - 3} = 6 - x$

13. **التعبئة** حاوية أسطوانية لمزيج مشروب الشوكولاتة يبلغ حجمها حوالي $2564.7\ m^3$. يمكن إيجاد نصف قطر الحاوية باستخدام الصيغة $r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$. حيث r هو نصف القطر و h هو الارتفاع. إذا كان الارتفاع 21 cm. فجد نصف قطر الحاوية.

14. **حدد ما إذا كانت بيانات الجدول تعبر عن تغير عكسي. اشرح.**

x	y
2	10
4	12
8	14

جد الحل. افترض أن y يتغير عكسيًا مع x.

15. إذا كان $y = 3$ عندما يكون $x = 9$. فجد x عندما يكون $y = 1$

16. إذا كان $y = 2$ عندما يكون $x = 0.5$. فجد y عندما يكون $x = 3$.

افترض أن y يتغير عكسيًا مع x. أكتب معادلة تغير عكسي تربط بين x و y.

17. $y = 2$ عندما يكون $n\ x = 8$

18. $y = -3$ عندما يكون $x = 1$

19. **اختيار من متعدد** إذا كان حميد يستطيع إزالة الثلج من الممر في 3 ساعات، ويستطيع حميد القيام بذلك في ساعتين. فكم من الزمن سيستغرقان إذا عملا معًا؟

F 6 ساعات

G 5 ساعات

H $\frac{3}{2}$ ساعة

J $\frac{6}{5}$ ساعة

20. **الطلاء** إذا كان مازن يستطيع طلاء جدار قياسه $60\ ft^2$ في 40 min. وإذا عمل مع صديقه جمال، فإنهما يستطيعان طلاء الجدار في 25 min. فكم من الزمن سيستغرق جمال لإكمال العمل بم فرده؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

ملاحظاتي

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

رسم صورة

في بعض الأحيان يكون من الأسهل تصور كيفية حل المسألة إذا رسمت صورة أولاً. يمكنك رسم الصورة على قصاصة ورقية أو في كراسة الاختبار الخاصة بك (إذا كان مسموحًا بذلك). ولكن انتبه ولا تضع أي علامات على ورقة الإجابة بخلاف إجاباتك.

إستراتيجيات رسم صورة.

الخطوة 1

اقرأ المسألة بعناية.

اسأل نفسك:

- ما المطلوب حله؟
- ما معطيات المسألة؟
- ما الكمية المجهولة التي يتعيّن عليّ الحلّ لإيجادها؟

الخطوة 2

ارسم الصورة وميّزها بالأسماء.

- ارسم الصورة بأكبر قدر ممكن من الوضوح والدقة.
- ميّز الصورة بالأسماء بعناية. احرص على تضمين جميع المعطيات الواردة بالمسألة.

الخطوة 3

حل المسألة.

- استخدم الصورة التي رسمتها لتساعدك في تمثيل حالة المسألة بمعادلة. ثم حل المعادلة.
- تحقق من إجابتك للتأكد من صحتها.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها. أكتب الحل هنا.

سلم طوله 5.5 m يستند على بناء. من أجل الثبات. يجب أن تكون قاعدة السلم بعيدة 100 cm عن الجدار. فما الارتفاع الذي يصل السلم إليه على الجدار؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

اقرأ نص المسألة بعناية. أنت تعرف ارتفاع السلم المستند على المبنى وتعرف أن قاعدة السلم يجب أن تكون بعيدة 100 cm عن الجدار. وأنت تحتاج إلى إيجاد الارتفاع الذي يصل إليه السلم على الجدار.

مثال على إجابة من نقطتين:

حوّل جميع القياسات إلى الأقدام أولاً.

$1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$

استخدم مثلثًا قائم الزاوية لإيجاد مدى الارتفاع الذي يبلغه السلم.
ارسم مثلثًا وقم بتسميته لتمثيل الحالة.

أنت تعرف قياسي إحدى الساقين والوتر. وتحتاج إلى معرفة طول الساق الأخرى.
إذًا، يمكنك استخدام نظرية فيثاغورس.

$$5.5^2 = 1^2 + b^2$$
$$30.25 = 1 + b^2$$
$$29.25 = b^2$$
$$\pm 5.4 = b$$
$$5.4 \approx b$$

$1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$

يصل السلم إلى حوالي 5.4 m.

معايير رصد الدرجات	
المعايير	الدرجة
الدرجة الكاملة: الإجابة صحيحة وتم تقديم شرح كامل يوضح كل خطوة.	2
النقاط الجزئية: • الإجابة صحيحة ولكن التفسير غير كامل. • الإجابة غير صحيحة ولكن التفسير صحيح.	1
ولا درجة: إما أن الإجابة غير مذكورة أو غير منطقية.	0

تمارين

اقرأ كل مسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها. أكتب الحل هنا.

1. بناء يسقط ظلاً طوله 4.6 m. بينما لوحة إعلانات تسقط ظلاً طوله 1.4 m. فإذا كانت لوحة الإعلانات ارتفاعها 7.9 m. فما ارتفاع البناء؟ قرّب إلى أقرب جزء من عشرة. إذا لزم الأمر.

2. مركبة فضائية تم توجيهها نحو القمر ولكنها انحرفت بمعدل 1.2° عن مسارها المقصود. وتبعد المسافة من الأرض إلى القمر حوالي 386,200 km. فإذا لم يعد القائد بالمركبة الفضائية إلى مسارها. فما المسافة التي ستبعدها في انحرافها عن مكان هبوطها المقصود؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري
تراكمي

اختيار من متعدد

اقرأ كُل سؤال. ثم أكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي قدمها المعلم أو ورقة أخرى.

1. في كل عام يتولى نادٍ محلي رعاية دورة التنس. ويبدأ اللعب بـ 256 مشاركًا. وخلال كل جولة، يتم إزالة نصف اللاعبين. فكم عدد اللاعبين الذين سيتبقون بعد 6 جولات؟

A 128

B 64

C 16

D 4

2. جد قيمة $\frac{5^5 - 5^6}{4}$.

F 5^6

G 5^5

H $\frac{5}{4}$

J $\frac{25}{4}$

3. أي من الأعداد التالية أصغر من الصفر؟

A 1.03×10^{-21}

B 7.5×10^2

C 8.21543×10^{10}

D لا شيء مما سبق

4. أكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع بميل $\frac{9}{10}$ والمقطع من المحور y هو 3.

F $y = 3x + \frac{9}{10}$

G $y = \frac{9}{10}x + 3$

H $y = \frac{9}{10}x - 3$

J $y = 3x - \frac{9}{10}$

5. إذا كان بلال يلعب الألعاب في مركز ترفيهي للعائلات. وربح 38 بطاقة جائزة حتى الآن. فكم عدد البطاقات الإضافية التي يحتاج إلى الفوز بها ليضع نفسه في فئة الجائزة الذهبية؟

عدد البطاقات	فئة الجائزة
1-20	برونزية
21-40	فضية
41-60	ذهبية
61-80	بلاتينية

F $2 \le t \le 22$

G $3 \le t \le 22$

H $1 \le t \le 20$

J $3 \le t \le 20$

6. أي مما يلي هي معادلة المستقيم العمودي على $4x - 2y = 6$ والمار بالنقطة $(4, -4)$؟

F $y = -\frac{3}{4}x + 3$

G $y = -\frac{3}{4}x - 1$

H $y = -\frac{1}{2}x - 4$

J $y = -\frac{1}{2}x - 2$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الإجابة القصيرة/الإجابة الشبكية

أكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو ورقة أخرى.

7. **الإجابة الشبكية** اشترى أ. عبد الله إجمالي 9 تذاكر إلى حديقة الحيوان. واشترى تذاكر أطفال بسعر AED 6.50 وتذاكر بالغين بسعر AED 9.25 لكل فرد. فإذا أنفق AED 69.50 إجمالاً. فكم عدد تذاكر البالغين التي اشتراها أ. عبد الله؟

8. ما مجال العلاقة التالية؟
$\{(2, -1), (4, 3), (7, 6)\}$

9. أضاف رشيد 15 نشيدًا إضافيًا إلى مشغل الوسائط الرقمي الخاص به، ليصبح إجمالي الأناشيد أكثر من 84 نشيدًا. ارسم خط أعداد يمثل العدد الأصلي للأناشيد التي كانت على مشغل الوسائط الرقمي الخاص برشيد.

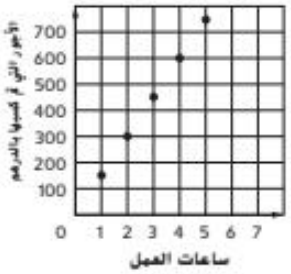
10. اشترى خليفة لوحة نادرة في عام 1995 مقابل AED 14,200. وبحلول 2003، أصبحت قيمة اللوحة AED 17,120. بافتراض وجود علاقة خطية، أكتب دالة في صيغة الميل والمقطع تمثل قيمة اللوحة V بعد t أعوام.

11. أنفق أحمد AED 245.0 على شراء الفول السوداني والجوز من أجل حفل عشاء. واشترى 1.5 kg من الفول السوداني زيادة عن الجوز. فكم عدد كيلوجرامات الفول السوداني والجوز التي اشتراها؟

ناتج الضرب	السعر لكل كيلوجرام
فول سوداني p	AED 38.0
جوز w	AED 56.0

12. **الإجابة الشبكية** اشترت موزة سيارة منذ عدة أعوام مضت بسعر AED 21,459. وتعرضت السيارة للإهلاك بمعدل 15% سنويًا. فكم بلغت قيمة السيارة بعد 5 أعوام؟ قرّب إجابتك إلى أقرب درهم.

13. **الإجابة الشبكية** المبلغ الذي يجنيه ناصر يتغير طرديًا مع عدد الساعات التي يعمل فيها كما هو مبين في التمثيل البياني. فكم المبلغ الذي سيحققه مقابل عمل 40 ساعة الأسبوع المقبل؟ أكتب الإجابة بالدرهم.



الإجابة الموسعة

أكتب إجاباتك على ورقة. أكتب الحل هنا.

14. الأجرة الثابتة لركوب السيارة الأجرة هي AED 3 زائد AED 0.35 لكل كيلومتر. دفعت ميسون AED 10 مقابل توصيلها لمسافة m km.

الجزء A أكتب معادلة يمكن استخدامها لإيجاد m. أكتب الحل هنا.

الجزء B استخدم المعادلة المستمدة من الجزء A لاكتشاف عدد الكيلومترات التي ركبت من أجلها ميسون. أكتب الحل هنا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

كتيب الطالب

الرموز والصيغ والمفاهيم الأساسية

الرموز EM-1

القياسات EM-2

العمليات والعلاقات الحسابية EM-3

الصيغ والمفاهيم الجبرية EM-3

الصيغ والمفاهيم الهندسية EM-5

الدوال والمتطابقات المثلثية EM-6

الدوال الأصلية والعمليات الحسابية على الدوال EM-7

النهايات والتفاضل والتكامل EM-7

الصيغ والمفاهيم الاحصائية EM-8

EM_End Matter/Glossary, from Integrated Math II © 2012 McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education © حقوق الطبع والتأليف

الرموز

الجبر	
$\neq$	لا يساوي
$\approx$	تقريبًا يساوي
$\sim$	يشابه
$>, \geq$	أكبر من، أكبر من أو يساوي
$<, \leq$	أصغر من، أصغر من أو يساوي
$-a$	معكوس a أو المعكوس الجمعي لـ a
$\lvert a \rvert$	القيمة المطلقة لـ a
$\sqrt{a}$	الجذر التربيعي الأساسي لـ a
$a : b$	نسبة a إلى b
(x, y)	زوج مرتّب
(x, y, z)	مجموعة مرتبة ثلاثية العناصر (ثلاثي مُرتّب)
i	الوحدة التخيلية
$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$	الجذر النوني لـ b
$\mathbb{Q}$	الأعداد النسبية
$\mathbb{I}$	الأعداد غير النسبية
$\mathbb{Z}$	الأعداد الصحيحة
$\mathbb{W}$	الأعداد الكاملة
$\mathbb{N}$	الأعداد الطبيعية
∞	ما لا نهاية
$-\infty$	سالب ما لا نهاية
$[\,]$	تتضمن الأطراف
$(\,)$	لا تتضمن الأطراف
$\log_b x$	لوغاريتم x للأساس b
$\log x$	اللوغاريتم العادي لـ x
$\ln x$	اللوغاريتم الطبيعي لـ x
ω	أوميجا، السرعة الزاويّة
α	ألفا، قياس الزاوية
β	بيتا، قياس الزاوية
γ	جاما، قياس الزاوية
θ	ثيتا، قياس الزاوية
λ	لامدا، طول الموجة
ϕ	فاي، قياس الزاوية
$\mathbf{a}$	متجه a
$\lvert \mathbf{a} \rvert$	طول المتجه a
المجموعات والمنطق	
$\in$	ينتمي إلى
$\subset$	مجموعة جزئية من
$\cap$	تقاطع
$\cup$	اتحاد
$\varnothing$	المجموعة الخالية
$\sim p$	نفي p، ليس p
$p \wedge q$	ربط p و q
$p \vee q$	فصل p أو q
$p \longrightarrow q$	العبارة الشرطية، إذا كان p فإن q
$p \longleftrightarrow q$	العبارة ثنائية الشرط، p إذا وفقط إذا q
الهندسة	
$\angle$	زاوية
$\triangle$	مثلث
$^\circ$	درجة
π	باي pi
$\measuredangle$	درجات
$m\angle A$	قياس $\angle A$
$\overleftrightarrow{AB}$	مستقيم يحتوي على النقطتين A و B
$\overline{AB}$	مستقيم نقطتاه الطرفيتان A و B
$\overrightarrow{AB}$	الشعاع من النقطة A الى النقطة B
AB	قياس $\overline{AB}$، المسافة بين A و B
$\parallel$	يوازي
$\nparallel$	لا يوازي
$\perp$	متعامد على
$\triangle$	مثلث
$\square$	متوازي أضلاع
n-gon	مضلع عدد أضلاعه n
$\vec{a}$	متجه a
$\overrightarrow{AB}$	المتجه من A إلى B
$\lvert \overrightarrow{AB} \rvert$	مقدار متجه من A إلى B
A'	صورة الصورة الأصلية A
$\rightarrow$	موضوع على
$\odot A$	دائرة مركزها A
$\overset{\frown}{AB}$	قوس أصغر نقطتاه الطرفيتان A و B
$\overset{\frown}{ABC}$	قوس أكبر نقطتاه الطرفيتان A و C
$m\overset{\frown}{AB}$	قياس درجة القوس AB
حساب المثلثات	
$\sin x$	جيب الزاوية x
$\cos x$	جيب تمام الزاوية x
$\tan x$	ظل الزاوية x
$\sin^{-1} x$	Arcsin x
$\cos^{-1} x$	Arccos x
$\tan^{-1} x$	Arctan x

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الرموز

الدوال

$f(x)$	f لـ x. قيمة f لـ x
$f(x) = \begin{cases} \end{cases}$	دالة متعددة التعريف
$f(x) = \lvert x \rvert$	دالة القيمة المطلقة
$f(x) = [\![x]\!]$	دالة أكبر عدد صحيح ليس أكبر من x
$f(x, y)$	f لـ x و y. دالة متغيراها x وy
$[f \circ g](x)$	f لـ g لـ x. تركيب الدالتين f وg
$f^{-1}(x)$	معكوس $f(x)$

النهايات والتفاضل والتكامل

$\lim_{x \to c}$	النهاية عندما تقترب x من c
m_{sec}	ميل القاطع
$f'(x)$	مشتقة الدالة $f(x)$
Δ	دلتا أو مقدار التغيير
$\int$	تكامل غير محدود
$\int_a^b$	تكامل محدود
$F(x)$	مشتقة عكسية للدالة $f(x)$

الاحصاء والاحتمالات

$P(a)$	احتمال a
$P(n, r)$ أو ${}_nP_r$	تباديل n من العناصر مأخوذ منها r عنصر في كل مرة
$C(n, r)$ أو ${}_nC_r$	توافيق n من العناصر مأخوذ منها r عنصر في كل مرة
$P(A)$	احتمال A
$P(A\|B)$	احتمال A إذا علمت أن B حدث بالفعل
$n!$	مضروب العدد n (حيث n عدد طبيعي)
$\sum$	سيجما. رمز المجموع
μ	متوسط مجتمع إحصائي
σ	الانحراف المعياري لمجتمع إحصائي
σ^2	تباين المجتمع الإحصائي
s	الانحراف المعياري لعينة
s^2	تباين العينة
$\sum_{n=1}^{k}$	مجموع من n = 1 إلى k
$\overline{x}$	متوسط x . متوسط العينة
H_0	فرضية العدم
H_a	الفرضية البديلة

القياسات

متري	عُرفي
الطول	
1 كيلومتر (km) = 1000 متر (m)	1 ميل (mi) = 1760 باردة (yd)
1 متر = 100 سنتيمتر (cm)	1 ميل = 5280 قدمًا (ft)
1 سنتيمتر = 10 ملليمتر (mm)	1 باردة = 3 أقدام
	1 قدم = 12 بوصة (in)
	1 باردة = 36 بوصة
الحجم والسعة	
1 لتر (L) = 1000 ملليلتر (mL)	1 جالون (gal) = 4 أرباع (qt)
1 كيلولتر (kL) = 1000 لتر	1 جالون = 128 أونصة سائلة (fl oz)
	1 كوارت = 2 باينت (pt)
	1 باينت = 2 كوب (c)
	1 كوب = 8 أونصات سائلة
الوزن والكتلة	
1 كيلوجرام (kg) = 1000 جرام (g)	1 طن (T) = 2000 رطل (lb)
1 جرام = 1000 ملليجرام (mg)	1 رطل = 16 أونصة (oz)
1 طن متري (t) = 1000 كيلوجرام	

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

العمليات والعلاقات الحسابية

المحايد	لأي عدد a، يكون $a + 0 = 0 + a = a$ و $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
التعويض (=)	إذا كان $a = b$، يمكن التعويض عن a باستخدام b.
الانعكاس (=)	$a = a$
التماثل (=)	إذا كان $a = b$، فإن $b = a$.
التعدي (=)	إذا كان $a = b$ و $b = c$، فإن $a = c$.
التبديل	لأي عددين a و b، $a + b = b + a$ و $a \cdot b = b \cdot a$.
التجميع	لأي أعداد a و b و c، $(a + b) + c = a + (b + c)$ و $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
التوزيع	لأي أعداد a و b و c، $a(b + c) = ab + ac$ و $a(b - c) = ab - ac$.
المعكوس الجمعي	لأي عدد a، يوجد عدد واحد فقط $-a$ بحيث $a + (-a) = 0$.
المعكوس الضربي	لأي عدد $\frac{a}{b}$، حيث $a \neq 0$ و $b \neq 0$، يوجد عدد واحد فقط $\frac{b}{a}$ بحيث $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.
الضرب (0)	لأي عدد a، يكون $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.
الجمع (=)	لأي أعداد a و b و c، إذا كان $a = b$، فإن $a + c = b + c$.
الطرح (=)	لأي أعداد a و b و c، إذا كان $a = b$، فإن $a - c = b - c$.
الضرب والقسمة (=)	لأي أعداد a و b و c، حيث $c \neq 0$، إذا كان $a = b$، فإن $ac = bc$ و $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.
الجمع (>)*	لأي أعداد a و b و c، إذا كان $a > b$، فإن $a + c > b + c$.
الطرح (>)*	لأي أعداد a و b و c، إذا كان $a > b$، فإن $a - c > b - c$.
الضرب والقسمة (>)*	لأي أعداد a و b و c، 1. إذا كان $a > b$ و $c > 0$، فإن $ac > bc$ و $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. 2. إذا كان $a > b$ و $c < 0$، فإن $ac < bc$ و $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
ناتج الضرب الصفري	لأي عددين حقيقيين a و b، إذا كان $ab = 0$، فإن $a = 0$ أو $b = 0$ أو a و b كلاهما 0.

* تنطبق هذه الخواص كذلك على $<$ و $\geq$ و $\leq$.

الصيغ والمفاهيم الجبرية

المصفوفات

الجمع	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$	**الضرب في كمية عددية**	$k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$
الطرح	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$	**الضرب**	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$

كثيرات الحدود

القانون العام	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a \neq 0$	**مربع فرق**	$(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$ $= a^2 - 2ab + b^2$
مربع مجموع	$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$ $= a^2 + 2ab + b^2$	**ناتج ضرب مجموع وفرق**	$(a + b)(a - b) = (a - b)(a + b)$ $= a^2 - b^2$

اللوغاريتمات

خاصية الضرب	$\log_x ab = \log_x a + \log_x b$	**خاصية الأس الثابت**	$\log_b m^p = p \log_b m$
خاصية القسمة	$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b, b \neq 0$	**تغيير الأساس**	$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الصيغ والمفاهيم الجبرية

الدوال الأسيّة واللوغاريتمية

المرابحة المركبة	$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$	النمو أو الاضمحلال الأسيّ	$N = N_0(1 + r)^t$
النمو المركب المستمر	$A = Pe^{rt}$	النمو أو الاضمحلال الأسيّ المستمر	$N = N_0e^{kt}$
خاصية الضرب	$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$	خاصية القوة	$\log_b x^p = p \log_b x$
خاصية القسمة	$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$	خاصية تغيير الاساس	$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

المتتاليات والمتسلسلات

الحد النوني لمتتالية حسابية	$a_n = a_1 + (n - 1)d$	الحد النوني لمتتالية هندسية	$a_n = a_1r^{n-1}$
مجموع متسلسلة حسابية	$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)$ أو $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$	مجموع متسلسلة هندسية	$S_n = \frac{a_1 - a_1r^n}{1 - r}$ أو $S_n = \frac{a_1 - a_nr}{1 - r}, r \neq 1$
مجموع متسلسلة هندسية لانهائية	$S = \frac{a_1}{1 - r}, \lvert r \rvert < 1$	صيغة أويلر	$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$
متسلسلة القوة	$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$	المتسلسلة الأسيّة	$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$
نظرية ذات الحدين	$(a + b)^n = {}_nC_0\, a^nb^0 + {}_nC_1\, a^{n-1}b^1 + {}_nC_2\, a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_r\, a^{n-r}b^r + \cdots + {}_nC_n\, a^0b^n$		
متسلسلة القوة للجيب وجيب وجيب التمام	$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$ $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$		

المتجهات

الجمع في المستوى	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$	الجمع في الفضاء	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$
الطرح في المستوى	$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$	الطرح في الفضاء	$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$
الضرب القياسي في المستوى	$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$	الضرب القياسي في الفضاء	$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$
الضرب النقطي في المستوى	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$	الضرب النقطي في الفضاء	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
الزاوية بين متجهين	$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert}$	مسقط u على v	$\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\lvert\mathbf{v}\rvert^2}\right)\mathbf{v}$
طول المتجه	$\lvert\mathbf{v}\rvert = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	الضرب القياسي لثلاثة متجهات	$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

معادلة المستقيم في المستوى الإحداثي

صيغة الميل والمقطع	$y = mx + b$
صيغة النقطة والميل	$y - y_1 = m(x - x_1)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الصيغ والمفاهيم الجبرية

القطوع المخروطيّة

قطع مكافئ	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$ أو $(y-k)^2 = 4p(x-h)$	**دائرة**	$x^2 + y^2 = r^2$ أو $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$
قطع ناقص	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$	**قطع زائد**	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
الدوران المحوري للقطوع المخروطيّة	$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$ و $y' = y\cos\theta - x\sin\theta$		

المعادلات الوسيطيّة

الموقع العمودي	$y = tv_0\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$	**المسافة الأفقية**	$x = tv_0\cos\theta$

الأعداد المُركبة

صيغة الضرب	$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$	**صيغة القسمة**	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$
صيغة الجذور المختلفة	$r^{\frac{1}{p}}\left(\cos\frac{\theta+2n\pi}{p} + i\sin\frac{\theta+2n\pi}{p}\right)$	**نظرية ديموافر**	$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n$ أو $r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

الصيغ والمفاهيم الهندسية

الهندسة الإحداثية

الميل	$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, x_2 \neq x_1$	**المسافة على خط الأعداد**	$d = \lvert a-b\rvert$
المسافة بين نقطتين في المستوى	$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$	**طول القوس**	$\ell = \frac{x}{360}\cdot 2\pi r$
نقطة المنتصف في المستوى الاحداثي	$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$	**نقطة المنتصف على خط الأعداد**	$M = \frac{a+b}{2}$
نقطة المنتصف في الفضاء	$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$	**نظرية فيثاغورس**	$a^2 + b^2 = c^2$

المحيط

مربع	$P = 4s$	**مستطيل**	$P = 2\ell + 2w$	**دائرة**	$C = 2\pi r$ أو $C = \pi d$

مساحة السطح الجانبية

منشور	$L = Ph$	**هرم**	$L = \frac{1}{2}P\ell$
إسطوانة	$L = 2\pi rh$	**مخروط**	$L = \pi r\ell$

مساحة السطح الكلية

منشور	$S = Ph + 2B$	**مخروط**	$S = \pi r\ell + \pi r^2$	**إسطوانة**	$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$
هرم	$S = \frac{1}{2}P\ell + B$	**كرة**	$S = 4\pi r^2$	**مكعب**	$S = 6s^2$

الحجم

منشور	$V = Bh$	**مخروط**	$V = \frac{1}{3}\pi r^2h^2$	**إسطوانة**	$V = \pi r^2h$
هرم	$V = \frac{1}{3}Bh$	**كرة**	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	**مكعب**	$V = s^3$
متوازي مستطيلات	$V = \ell wh$				

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدوال والمتطابقات المثلثية

الدوال المثلثية

النسب المثلثية	$\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$ $\sec\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}} = \frac{1}{\cos\theta}$	$\cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$ $\csc\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}} = \frac{1}{\sin\theta}$	$\tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\cot\theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
قانون جيوب التمام	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$
قانون الجيوب	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$	صيغة هيرون	$\text{Area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
السرعة الخطية	$v = \frac{s}{t}$	السرعة الزاوية	$\omega = \frac{\theta}{t}$

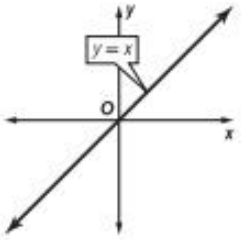
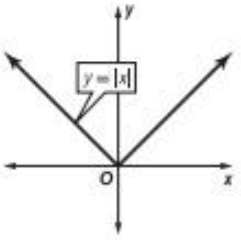
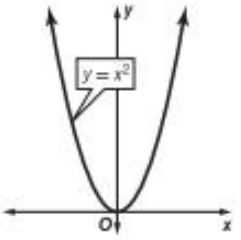
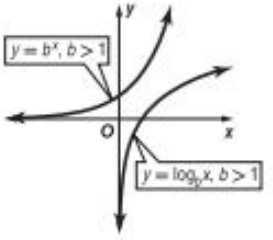
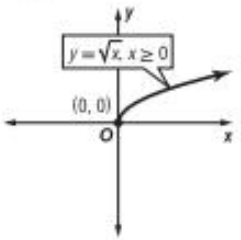
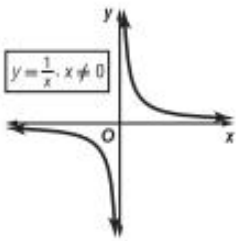
المتطابقات المثلثية

متطابقات المقلوب	$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}$ $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$	$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$
متطابقات فيثاغورس	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$	$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$
متطابقات المتممات	$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\tan\theta = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\cot\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\sec\theta = \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\csc\theta = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
متطابقات الفردي والزوجي	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ $\csc(-\theta) = -\csc\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$ $\sec(-\theta) = \sec\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$ $\cot(-\theta) = -\cot\theta$
متطابقات المجموع والفرق	$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$		$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$
متطابقات ضعف الزاوية	$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$	$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$	$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$
متطابقات تخفيض الأس	$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$	$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$	$\tan^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$
متطابقات نصف الزاوية	$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}}$ $\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}}$	$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}}$ $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}$	$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}$
متطابقات تحويل الضرب إلى مجموع أو فرق	$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$ $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$		$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$ $\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$
متطابقات تحويل المجموع أو الفرق إلى ضرب	$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$		$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

الدوال الأصلية والعمليات الحسابية على الدوال

الدوال الأصلية

الدوال الخطية	دوال القيمة المطلقة	الدوال التربيعية
		
الدوال الأسيّة واللوغاريتمية	**دوال الجذر التربيعي**	**الدوال العكسية والنسبية**
		

العمليات الحسابية على الدوال

الجمع	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	**الضرب**	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
الطرح	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	**القسمة**	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

النهايات والتفاضل والتكامل

النهايات

نهاية مجموع دالتين	$\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$	**نهاية طرح دالتين**	$\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$
نهاية قسمة دالتين	$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$ ، إذا كان $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$	**نهاية دالة مرفوعة لأس**	$\lim_{x\to c}[f(x)^n] = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^n$
السرعة	اللحظية: $v(t) = \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t}{h}$ المتوسطة: $v_{avg} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$	**نهاية الجذر النوني لدالة**	$\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$ ، إذا كان $\lim_{x\to c} f(x) > 0$ و n عدد زوجي

التفاضل

قاعدة القوة	إذا كان $f(x) = x^n$ فإن $f'(x) = nx^{n-1}$	**المجموع أو الفرق**	إذا كان $f(x) = g(x) \pm h(x)$ فإن $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$
قاعدة الضرب	$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	**قاعدة القسمة**	$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

التكامل

التكامل غير المحدود	$\int f(x)\,dx = F(x) + C$	**النظرية الاساسيّة في التفاضل والتكامل**	$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الصيغ والمفاهيم الاحصائية

قيمة z لمتوسط العينة	$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$	قيمة z	$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$
الحد الأقصى لقيمة التوقع	$E = z \cdot \sigma_{\bar{x}}$ or $z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	خاصية ذات الحدين	$P(X) = {}_nC_x\, p^x q^{n-x} = \frac{n!}{(n-x)!\,x!}\, p^x q^{n-x}$
فترة الثقة في توزيع t	$CI = \bar{x} \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$	فترة الثقة، في توزيع طبيعي	$CI = \bar{x} \pm E$ or $\bar{x} \pm z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
معامل الارتباط لاختبار t	$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$ ، درجات الحرية، $n - 2$	معامل الارتباط	$r = \frac{1}{n-1}\sum\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x}\right)\left(\frac{y_i - \bar{y}}{s_y}\right)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

شكر وتقدير

نسخة الطلاب

Photo: ix ImageSource/Age Fotostock; v Jack Hollingsworth/ Photodisc/Getty Images; vii JeremyRichards/Shutterstock.com; viii Ingram Publishing; x (tc)Glow Images; xi Purestock/ SuperStock; xii Jean-Pierre Pieuchot/Photodisc/Getty Images; xiii Cusp/SuperStock; xiv Purestock/SuperStock; xv Hero/Corbis/Glow Images; 200 (tc)Glow Images; 203 (tl) livmatalon/Stockimo/Alamy Stock Photo; 208 (tr)Corbis/ Glow Images; 214 (tl)Ron Brown/ age fotostock; 215 (tl)Rose-Marie Henriksson/age fotostock/ SuperStock; 217 (br)Muzsy/ Shutterstock; 222 (tl)Ken Karp/ McGraw-Hill Education; 224 (tr) DreamPictures/Photodisc/Getty Images; 235 (tr)Papa Annur/ Shutterstock; 241 (cr)Dmitry Kalinovsky/Shutterstock; 243 (tr)Design Pics/Alamy Images; 251 (tl)Loren L. Masseth/ Shutterstock.com; 271 (tl) madelyn mulvaney/Flickr/Getty Images; 273 (br)RubberBall/ Alamy Images; 290 Purestock/ SuperStock; 295 (br)Andrew Bret Wallis/Stockbyte/Getty Images; 304 (tl)Elan Fleisher/Look/age fotostock; 306 (br)Patrick Lane/ Blend Images; 313 (cr)Amyrxa/Shutterstock.com; 318 (tl)Zurijeta/ Shutterstock; 320 (br)Purestock/ SuperStock; 325 (tl)Erica Simone Leeds; 327 (tr)Lars A. Niki; 333 (tl)Robert Daly/Age Fotostock; 334 (br)Design Pics Inc/Alamy; 346 (tl)Mazer Creative Services/ McGraw-Hill Education; 351 (t) Jean-Pierre Pieuchot/Photodisc/ Getty Images; 353 (tl)Jan-Dirk Hansen/Alamy; 355 (tr) Tinnaporn Sathapornnanont/ Shutterstock.com; 360 (tl)Ingram Publishing/age fotostock; 366 (tl)moodboard/SuperStock; 368 (tr)Trevor Lush/UpperCut Images/Getty Images; 374 (tl) ESB Professional/Shutterstock; 375 (tr)Image Source/Getty Images; 380 (tl)Rene Frederic/ age fotostock; 383 (br)David R. Frazier Photolibrary/Alamy; 394 (tl)JUPITERIMAGES/Polka Dot/ Alamy.

دلائـــل رمـــوز الغلاف

لون الحلقة الثالثة

مركز اتصال وزارة التربية والتعليم

اقتراح - استفسار - شكوى

80051115

04-2176855

www.moe.gov.ae

ccc.moe@moe.gov.ae