تجميع أسئلة هيكل 12متقدم
أ.عبدالعزيز الشملان

1	Estimate an arc length of a given function.		(7-12)
	تقدير طول القوس على منحنى دالة معطاة		

إلكتروني

في التمارين 7 إلى 12، قدّر طول المنحنى $y = f(x)$ في الفترة المحددة باستخدام (a) $n = 4$ و (b) $n = 8$ قطع مستقيمة. (c) إذا تمكنت من برمجة حاسبة أو حاسب آلي، استخدم n أكبر وخمن الطول الفعلي للمنحنى.

7. $f(x) = \cos x, 0 \le x \le \pi/2$

8. $f(x) = \sin x, 0 \le x \le \pi/2$

9. $f(x) = \sqrt{x+1}, 0 \le x \le 3$

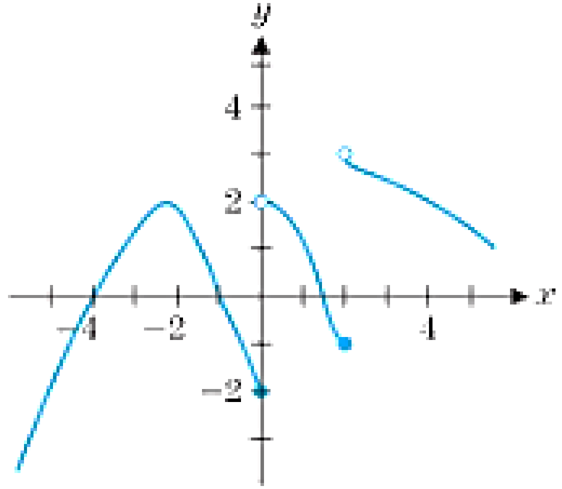
10. $f(x) = 1/x, 1 \le x \le 2$

11. $f(x) = x^2 + 1, -2 \le x \le 2$

12. $f(x) = x^3 + 2, -1 \le x \le 1$

2	Find a limit algebraically or graphically, if it exists.	(7-10)
	إيجاد قيمة نهاية دالة ما جبريا وبيانياء إن وجدت	

في التمرينين 7 و8، حدد كل نهاية أو اذكر عدم وجودها في كلٍ مما يلي:



7. (a) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

(d) $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ (e) $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ (f) $\lim_{x\to -2} f(x)$

(g) $\lim_{x\to -1} f(x)$ (h) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$

8. (a) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 1} f(x)$

(d) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ (e) $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ (f) $\lim_{x\to 2} f(x)$

(g) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ (h) $\lim_{x\to -3} f(x)$

إلكتروني

إلكتروني

9. ارسم التمثيل البياني لـــ

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad x < 2 \\ x^2 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$

وحدد كل نهاية فيما يلي:

(a) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 2} f(x)$

(d) $\lim_{x \to 1} f(x)$ (e) $\lim_{x \to 3} f(x)$

10. ارسم التمثيل البياني لـــ

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & , \quad x < 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ \sqrt{x+1} - 2 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

وحدد كل نهاية فيما يلي:

(a) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 0} f(x)$

(d) $\lim_{x \to -1} f(x)$ (e) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$

3	Find limits of polynomial, rational, and trigonometric functions using theorems. إيجاد نهاية الدوال كثيرة الحدود والنسبية والمثلثية باستخدام نظريات النهايات	(1-28)

في التمارين 28-1، أوجد قيمة النهاية المشار إليها، إذا وُجِدت.
على فرض أنّ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

1. $\lim_{x\to 0}(x^2 - 3x + 1)$

2. $\lim_{x\to 2} \sqrt[3]{2x+1}$

3. $\lim_{x\to 0} \cos^{-1}(x^2)$

4. $\lim_{x\to 2} \frac{x-5}{x^2+4}$

5. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3}$

6. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$

7. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-4}$

8. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2+2x-3}$

9. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\tan x}$

10. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$

11. $\lim_{x\to 0} \frac{xe^{-2x+1}}{x^2+x}$

12. $\lim_{x\to 0} x^2 \csc^2 x$

13. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

14. $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{3-\sqrt{x+9}}$

15. $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

16. $\lim_{x\to 4} \frac{x^3-64}{x-4}$

17. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}\right)$

18. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{|x|}\right)$

19. $\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{2x}}{1-e^x}$

20. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin |x|}{x}$

21. $\lim_{x\to 2} f(x)$, حيث $f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad x < 2 \\ x^2 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$

22. $\lim_{x\to -1} f(x)$, حيث $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & , \quad x < -1 \\ 3x+1 & , \quad x \geq -1 \end{cases}$

23. $\lim_{x\to -1} f(x)$, حيث $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , \quad x < -1 \\ 3 & , \quad -1 < x < 1 \\ 2x+1 & , \quad x > 1 \end{cases}$

24. $\lim_{x\to 1} f(x)$, حيث $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , \quad x < -1 \\ 3 & , \quad -1 < x < 1 \\ 2x+1 & , \quad x > 1 \end{cases}$

25. $\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2-4}{h}$

26. $\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^3-1}{h}$

27. $\lim_{x\to 2} \frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}$

28. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{5x}$

إلكتروني

4	Determine the continuity of a function at a given point.	(15-28)
	البحث في اتصال دالة عند نقطة معطاة	

في التمارين 20-15، وضّح لماذا لا تعد كل دالة متصلة عند قيم x المعطاة بالإشارة إلى أي من الشروط الثلاثة الواردة في التعريف 4.1 لم يتم مراعاته.

15. $f(x) = \frac{x}{x-1}$ عند $x = 1$

16. $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ عند $x = 1$

17. $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ عند $x = 0$

18. $f(x) = \frac{e^{x-1}}{e^x-1}$ عند $x = 0$

19. $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x < 2 \\ 3 & , \quad x = 2 \\ 3x-2 & , \quad x > 2 \end{cases}$ عند $x = 2$

20. $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x < 2 \\ 3x-2 & , \quad x > 2 \end{cases}$ عند $x = 2$

في التمارين 28–21، حدّد الفترات التي تكون عندها f متصلة.

21. $f(x) = \sqrt{x+3}$

22. $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

23. $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$

24. $f(x) = (x-1)^{3/2}$

25. $f(x) = \sin^{-1}(x+2)$

26. $f(x) = \ln(\sin x)$

27. $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}+e^x}{x^2-2}$

28. $f(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{\sqrt{x^2-2x}}$

إلكتروني

5	Find horizontal, vertical, and slant asymptotes using limits.	(23-32)
	إيجاد خطوط التقارب الأفقية والرأسية والمائلة باستخدام النهايات	(51-56)

الكتروني

في التمارين 28—23، حدّد كل خطوط التقارب الأفقية والرأسية. ثم لكل جانب من جوانب خط التقارب الرأسي، حدد إذا كانت $f(x) \to \infty$ أم $f(x) \to -\infty$.

23. (a) $f(x) = \dfrac{x}{4 - x^2}$ (b) $f(x) = \dfrac{x^2}{4 - x^2}$

24. (a) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4 + x^2}}$ (b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$

25. $f(x) = \dfrac{3x^2 + 1}{x^2 - 2x - 3}$

26. $f(x) = \dfrac{1 - x}{x^2 + x - 2}$

27. $f(x) = 4\tan^{-1} x - 1$

28. $f(x) = \ln(1 - \cos x)$

في التمارين 32—29، حدّد كل خطوط التقارب الرأسية والمائلة

29. $y = \dfrac{x^3}{4 - x^2}$

30. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x - 2}$

31. $y = \dfrac{x^3}{x^2 + x - 4}$

32. $y = \dfrac{x^4}{x^3 + 2}$

استخدم أدلة بيانية وعددية لتخمين

قيمة النهاية المشار إليها. ثم، تحقق من التخمين من خلال

إيجاد النهاية بالضبط

51. لنفترض أنّ $f(x)$ دالة نسبية $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ حيث درجة $p(x)$ أكبر من درجة $q(x)$ حدّد ما إذا كان $y=f(x)$ له خط تقارب أفقي.

52. لنفترض أنّ $f(x)$ دالة نسبية $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ حيث درجة (أكبر أس) $p(x)$ أقل من درجة $q(x)$. حدّد خط التقارب الأفقي في $y=f(x)$.

53. لنفترض أنّ $f(x)$ دالة نسبية $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ إذا كان $y=f(x)$ له خط تقارب مائل $y=x+2$ ، فكيف يمكن مقارنة درجة $p(x)$ بدرجة $q(x)$ ؟

54. لنفترض أنّ $f(x)$ دالة نسبية $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ إذا كان $y=f(x)$ له خط تقارب أفقي $y=2$ ، فكيف يمكن مقارنة درجة $p(x)$ بدرجة $q(x)$ ؟

55. أوجد دالة تربيعية $q(x)$ بحيث يكون $f(x)=\dfrac{x^2-4}{q(x)}$ له خط تقارب أفقي واحد $y=-\frac{1}{2}$ وخط تقارب رأسي واحد بالضبط $x=3$.

56. أوجد دالة تربيعية $q(x)$ بحيث يكون $f(x)=\dfrac{x^2-4}{q(x)}$ له خط تقارب أفقي واحد $y=2$ واثنان من خطوط التقارب الرأسية $x=\pm 3$.

إلكتروني

6	Understand the link between the slope of a tangent line and a non-tangent line to a graph geometrically.	(23-29)
	فهم العلاقة بين ميل المماس و غير المماس في التمثيل البياني هندسيا(الربط بين ميل القاطع وميل المماس وتفسيرهما)	30

في التمارين 26-23، استخدم البرهان البياني والعددي لشرح سبب عدم وجود مماس للتمثيل البياني للدالّة $y = f(x)$ عند $x = a$.

إلكتروني

23. $f(x) = |x - 1| \quad a = 1$

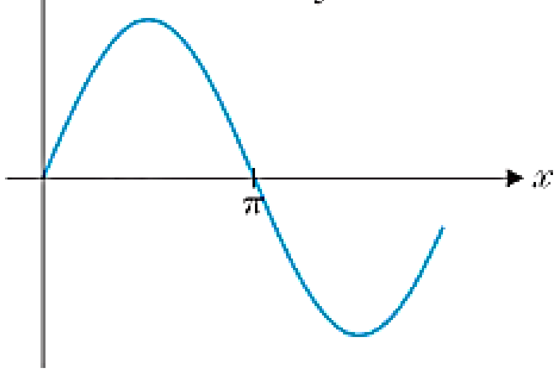
24. $f(x) = \dfrac{4x}{x-1} \quad a = 1$

25. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , \ x < 0 \\ x + 1 & , \ x \geq 0 \end{cases}$ عند $a = 0$

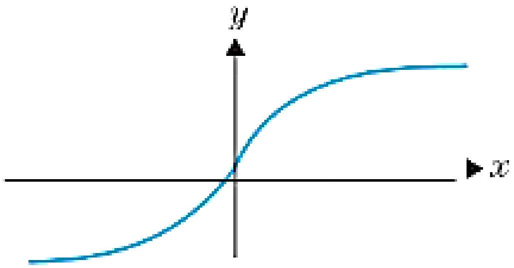
26. $f(x) = \begin{cases} -2x & , \ x < 0 \\ x^2 - 4x & , \ x > 0 \end{cases}$ عند $a = 0$

في التمارين 30-27، ارسم مماسًا مقبولًا عند النقطة المعلومة أو حدد إذا كان غير موجود.

.27 $y = \sin x$ عند $x = \pi$

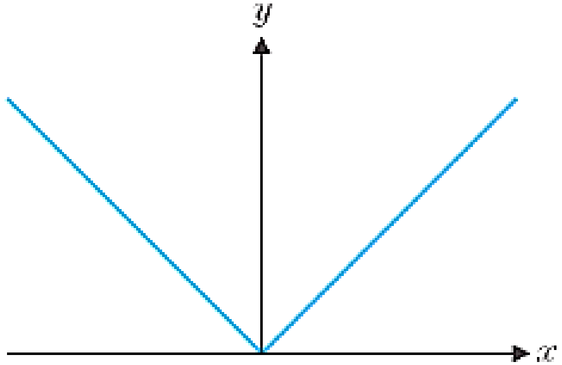


.28 $y = \tan^{-1} x$ عند $x = 0$

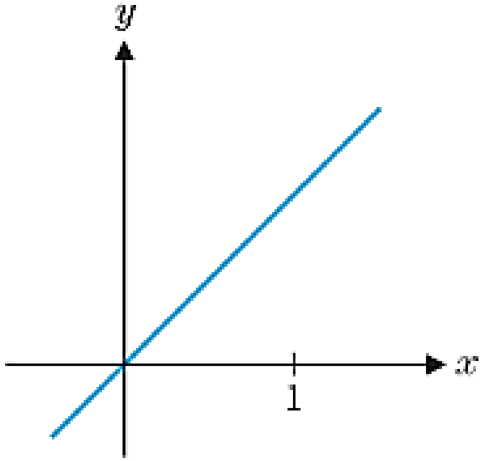


إلكتروني

.29 $y = |x|$ عند $x = 0$



.30 $y = x$ عندما $x = 1$



عند
$x = 1$

7	Find the average velocity and the instantaneous velocity at a given point. إيجاد السرعة المتوسطة والسرعة اللحظية عند نقطة معطاة	(15-22)

إلكتروني

في التمارين 18-15، استخدم دالّة الموقع s (بالأمتار) لإيجاد السرعة المتجهة عند الزمن $t = a$ ثانية.

15. $s(t) = -4.9t^2 + 5$, (a) $a = 1$; (b) $a = 2$

16. $s(t) = 4t - 4.9t^2$, (a) $a = 0$; (b) $a = 1$

17. $s(t) = \sqrt{t + 16}$, (a) $a = 0$; (b) $a = 2$

18. $s(t) = 4/t$, (a) $a = 2$; (b) $a = 4$

في التمارين 22-19، تمثل الدالّة موقع جسم ما بالقدم عند الزمن t ثانية. أوجد السرعة المتجهة المتوسطة بين $t = 2$ و $t = 0$ (a)، $t = 2$ و $t = 1$ (b)، $t = 2$ و $t = 1.9$، $t = 2$ و $t = 1.99$ (d). و (e) قدّر السرعة المتجهة اللحظية عند $t = 2$.

19. $s(t) = 16t^2 + 10$

20. $s(t) = 3t^3 + t$

21. $s(t) = \sqrt{t^2 + 8t}$

22. $s(t) = 3\sin(t - 2)$

8	Understand the relationship between continuity and differentiability.	(19-22)
	فهم العلاقة بين الاتصال والاشتقاق	32

في التمارين 22–19، احسب المشتقة في الطرف الأيمن $D_+f(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ والمشتقة في الطرف الأيسر $D_-f(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h}$. هل $f'(0)$ موجودة؟

19. $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ، \ x<0 \\ 3x+1 & ، \ x\ge 0 \end{cases}$

20. $f(x) = \begin{cases} 0 & ، \ x<0 \\ 2x & ، \ x\ge 0 \end{cases}$

21. $f(x) = \begin{cases} x^2 & ، \ x<0 \\ x^3 & ، \ x\ge 0 \end{cases}$

22. $f(x) = \begin{cases} 2x & ، \ x<0 \\ x^2+2x & ، \ x\ge 0 \end{cases}$

إلكتروني

32. حيث $f(x) = \begin{cases} x^2+2x, & x<0 \\ ax+b, & x\ge 0 \end{cases}$ أوجد جميع الأعداد الحقيقية a و b بحيث يكون $f'(0)$ موجودًا.

9	Find the derivative of a function at a given point using the Power Rule. إيجاد مشتقة دالة ما باستخدام قاعدة القوة عند نقطة معطاة	(33-38)

في التمرينين 33 و 34 (a)، حدّد قيمة (قيم) x التي يكون عندها المماس على منحنى $y=f(x)$ أفقيًا. (b) مثّل الدالّة بيانيًا لكل من تلك النقاط. وحدّد الدلالة البيانية لكل من تلك النقاط. (c) حدّد قيمة (قيم) x التي عندها يقطع المماس على منحنى $y=f(x)$ المحور x عند زاوية قياسها $45°$

33. $f(x)=x^3-3x+1$

34. $f(x)=x^4-4x+2$

في التمرينين 35 و 36، (a) حدّد قيمة (قيم) x التي عندها لا يوجد ميل للمماس على منحنى $y=f(x)$. (b) مثّل الدالّة بيانيًا وحدّد الدّلالة البيانية لكلّ نقطةٍ من تلك النّقاط.

35. (a) $f(x)=x^{2/3}$ (b) $f(x)=|x-5|$
(c) $f(x)=|x^2-3x-4|$

36. (a) $f(x)=x^{1/3}$ (b) $f(x)=|x+2|$
(c) $f(x)=|x^2+5x+4|$

إلكتروني

9	Find the derivative of a function at a given point using the Power Rule. إيجاد مشتقة دالة ما باستخدام قاعدة القوة عند نقطة معطاة	(33-38)

37. أوجد جميع قيم x والتي يشكّل عندها المماس على منحنى $y = x^3 - 3x + 1$ (a) زاوية قياسها $45°$ مع المحور x ؛ (b) زاوية قياسها $30°$ مع المحور x . على فرض أن الزاويتين تقاسان باتجاهٍ معاكسٍ لعقارب الساعة.

إلكتروني

38. أوجد جميع قيم x التي عندها يكون المماسان على $y = x^3 + 2x + 1$ و $y = x^4 + x^3 + 3$ (a) متوازيين.

10	Use differentiation rules and higher derivatives in solving real-life problems. استخدام قواعد الاشتقاق والمشتقات العليا في حل مسائل حياتية	(21-26)

في التمارين 24–21، استخدم دالّة الموقع المعطاة لإيجاد دالتي السرعة المتجهة والتسارع.

21. $s(t) = -16t^2 + 40t + 10$

22. $s(t) = -4.9t^2 + 12t - 3$

23. $s(t) = \sqrt{t} + 2t^2$

24. $s(t) = 10 - \dfrac{10}{t}$

إلكتروني

في التمرينين 25 و 26، تمثل الدالّة المعطاة ارتفاع جسمٍ ما. احسب السرعة المتجهة والتسارع عند الزمن $t = t_0$.
هل يتحرّك الجسم إلى الأعلى أو الأسفل؟

25. $h(t) = -16t^2 + 40t + 5,\ (a)\ t_0 = 1\ (b)\ t_0 = 2$

26. $h(t) = 10t^2 - 24t,\ (a)\ t_0 = 2\ (b)\ t_0 = 1$

11	Apply the Quotient Rule to find derivatives.	(5-12)
	تطبيق قاعدة مشتقة خارج قسمة دالتين	(19,20,22,24)

أوجد المشتقّة لكلّ دالّة.

إلكتروني

5. $g(t) = \dfrac{3t - 2}{5t + 1}$

6. $g(t) = \dfrac{t^2 + 2t + 5}{t^2 - 5t + 1}$

7. $f(x) = \dfrac{3x - 6\sqrt{x}}{5x^2 - 2}$

8. $f(x) = \dfrac{6x - 2/x}{x^2 + \sqrt{x}}$

9. $f(u) = \dfrac{(u + 1)(u - 2)}{u^2 - 5u + 1}$

10. $f(u) = \dfrac{2u}{u^2 + 1}(u + 3)$

11. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 2}{\sqrt{x}}$

12. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 + 5x}$

11	Apply the Quotient Rule to find derivatives.	(5-12)
	تطبيق قاعدة مشتقة خارج قسمة دالتين	(19,20,22,24)

إلكتروني

أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة

19. $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}, a = 0$

20. $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+1}, a = 1$

على فرض أن f و g قابلتان للإشتقاق بحَيث $f(0) = -1$ و $f(1) = -2$ و $f'(0) = -1$ و $f'(1) = 3$ و $g(0) = 3$ و $g(1) = 1$ و $g'(0) = -1$ و $g'(1) = -2$. أوجد معادلة المماس لمنحنى $y = h(x)$ عند $x = a$.

22. $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$; (a) $a = 1$; (b) $a = 0$

24. $h(x) = \dfrac{x^2}{g(x)}$; (a) $a = 1$; (b) $a = 0$

12	Find the derivative of an inverse function using the Chain Rule.	(17-22)
	إيجاد مشتقة معكوس دالة باستخدام قاعدة السلسلة	

في التمارين 22–17. f لها معكوس g. استخدم النظرية 5.2 لإيجاد $g'(a)$.

17. $f(x) = x^3 + 4x - 1, a = -1$

18. $f(x) = x^5 + 4x - 2, a = -2$

19. $f(x) = x^5 + 3x^3 + x, a = 5$

20. $f(x) = x^3 + 2x + 1, a = -2$

21. $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x + 4}, a = 2$

22. $f(x) = \sqrt{x^5 + 4x^3 + 3x + 1}, a = 3$

إلكتروني

13	Find the derivatives of trigonometric functions using differentiation rules.	(1-22)
	إيجاد مشتقات الدوال المثلثية باستخدام قواعد الاشتقاق	

في التمارين 1–18، أوجد مشتقة كل دالّة.

1. $f(x) = 4\sin 3x - x$
2. $f(x) = 4x^2 - 3\tan 2x$
3. $f(t) = \tan^3 2t - \csc^4 3t$
4. $f(t) = t^2 + 2\cos^2 4t$
5. $f(x) = x\cos 5x^2$
6. $f(x) = x^2 \sec 4x$
7. $f(x) = \dfrac{\sin x^2}{x^2}$
8. $f(x) = \dfrac{x^2}{\csc^4 2x}$
9. $f(t) = \sin 3t \sec 3t$
10. $f(t) = \sqrt{\cos 5t \sec 5t}$
11. $f(w) = \dfrac{1}{\sin 4w}$
12. $f(w) = w^2 \sec^2 3w$
13. $f(x) = 2\sin 2x \cos 2x$
14. $f(x) = 4\sin^2 3x + 4\cos^2 3x$
15. $f(x) = \tan\sqrt{x^2+1}$
16. $f(x) = 4x^2 \sin x \sec 3x$
17. $f(x) = \sin^3\left(\cos\sqrt{x^3+2x^2}\right)$
18. $f(x) = \tan^4(\sin^2(x^3+2x))$

في التمارين 19–22، أوجد مشتقة كل دالّة.

19. (a) $f(x) = \sin x^2$
 (b) $f(x) = \sin^2 x$
 (c) $f(x) = \sin 2x$
20. (a) $f(x) = \cos\sqrt{x}$
 (b) $f(x) = \sqrt{\cos x}$
 (c) $f(x) = \cos \frac{1}{2}x$
21. (a) $f(x) = \sin x^2 \tan x$
 (b) $f(x) = \sin^2(\tan x)$
 (c) $f(x) = \sin(\tan^2 x)$
22. (a) $f(x) = \sec x^2 \tan x^2$
 (b) $f(x) = \sec^2(\tan x)$
 (c) $f(x) = \sec(\tan^2 x)$

إلكتروني

14	Find derivatives of natural logarithmic functions.	(7,8,22)
	إيجاد مشتقات الدوال اللوغاريتمية الطبيعية	(26,39-44)

في التمارين 24–1، أوجد مشتقة كل دالّة.

7. $h(x) = (1/3)^{x^2}$

8. $h(x) = 4^{-x^2}$

22. (a) $h(x) = 2^{e^x}$

أوجد كل قيم x التي يكون المماس
لمنحنى $y = f(x)$ أفقيًا.

26. $f(x) = 3^{x^e}$

في التمارين 44–39 استخدم تفاضل اللوغاريتم لإيجاد المشتقة.

39. $f(x) = x^{\sin x}$

40. $f(x) = x^{4-x^2}$

41. $f(x) = (\sin x)^x$

42. $f(x) = (x^2)^{4x}$

43. $f(x) = x^{\ln x}$

44. $f(x) = x^{\sqrt{x}}$

إلكتروني

15	Use implicit differentiation to find derivatives of inverse trigonometric functions. استخدام الاشتقاق الضمني في إيجاد مشتقات الدوال المثلثية العكسية	(29-34)

إلكتروني

في التمرينين 29 و34، أوجد مشتقة كل دالّة.

29. (a) $f(x) = \sin^{-1}(x^3 + 1)$ (b) $f(x) = \sin^{-1}(\sqrt{x})$

30. (a) $f(x) = \cos^{-1}(x^2 + x)$ (b) $f(x) = \cos^{-1}(2/x)$

31. (a) $f(x) = \tan^{-1}(\sqrt{x})$ (b) $f(x) = \tan^{-1}(1/x)$

32. (a) $f(x) = \sqrt{2 + \tan^{-1} x}$ (b) $f(x) = e^{\tan^{-1} x}$

33. (a) $f(x) = 4\sec(x^4)$ (b) $f(x) = 4\sec^{-1}(x^4)$

34. (a) $f(x) = \sin^{-1}(1/x)$ (b) $f(x) = \csc^{-1} x$

20	Understand the Mean Value Theorem and use it in applications.	Example 10.3
	التعرف على نظرية القيمة المتوسطة واستخدامها في التطبيقات	(43-46)
		(83,84)

ورقي

مثال 10.3 توضيح لنظرية القيمة المتوسطة

أوجد قيمة c التي تحقق نتيجة نظرية القيمة المتوسطة للدالة

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$$

في الفترة $[0, 2]$.

الحل لاحظ أن f متصلة في $[0, 2]$ وقابلة للإشتقاق في $(0, 2)$. تنص نظرية القيمة المتوسطة بعد ذلك على وجود عدد c في $(0, 2)$ يكون فيه

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{3 - 1}{2 - 0} = 1$$

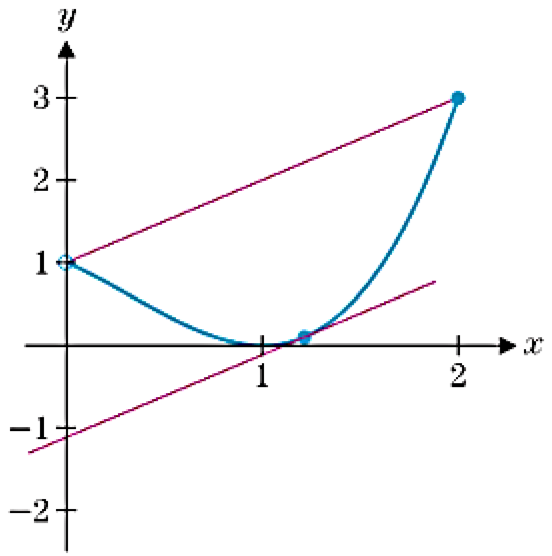
لإيجاد هذا العدد c، نحدّد ما يلي

$$f'(c) = 3c^2 - 2c - 1 = 1$$

أو

$$3c^2 - 2c - 2 = 0$$

باستخدام القانون العام، سنوجد $c = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$. في هذه الحالة، حلًا واحدًا وهو $c = \frac{1 + \sqrt{7}}{3}$ موجود في الفترة $(0, 2)$. في الشكل 3.53. توضّح التمثيلات البيانية لـ $y = f(x)$. والمستقيم القاطع للنقطتين الطرفيتين لجزء من المنحنى في الفترة $[0, 2]$ والمماس عند $x = \frac{1 + \sqrt{7}}{3}$



الشكل 3.53

نظرية القيمة المتوسطة

20	Understand the Mean Value Theorem and use it in applications.	Example 10.3
	التعرف على نظرية القيمة المتوسطة واستخدامها في التطبيقات	(43-46)
		(83,84)

ورقي

في التمارين 46-43، اشرح لمَ لا يصح استخدام نظرية القيمة المتوسطة. إذا كانت الفرضيات غير صحيحة، فإن النظرية لا تفيدك بأي شيء حول صحة الاستنتاج. في ثلاث أو أربع حالات، وضِّح أنه لا توجد قيمة لـ c تجعل نتيجة النظرية صحيحة. في الحالة الرابعة، أوجد قيمة c.

43. $f(x) = \frac{1}{x}, [-1, 1]$

44. $f(x) = \frac{1}{x^2}, [-1, 2]$

45. $f(x) = \tan x, [0, \pi]$

46. $f(x) = x^{1/3}, [-1, 1]$

في التمرينين 83 و84، أوجد قيمة c بالشكل الذي تحققه نظرية القيمة المتوسطة.

.83 $f(x) = x^2 - 2x$ في الفترة $[0, 2]$

.84 $f(x) = x^3 - x$ في الفترة $[0, 2]$

19	Find derivatives implicitly.	Example 8.2
	إيجاد المشتقات للعلاقات الضمنية	(1-16)
		(13,14)

أوجد معادلة المماس.

ورقي

13. $y - x^2y^2 = x - 1$ at $(1, 1)$ **14.** $y^2 + xe^y = 4 - x$ at $(2, 0)$

في التمارين 4–1, احسب ميل المماس عند النقطة المحددة بشكل صريح (أوجد حلًا أولًا لـ y دالّة في x) وضمنيًا.

1. $x^2 + 4y^2 = 8$ at $(2, 1)$
2. $x^3y - 4\sqrt{x} = x^2y$ at $(2, \sqrt{2})$
3. $y - 3x^2y = \cos x$ at $(0, 1)$
4. $y^2 + 2xy + 4 = 0$ at $(-2, 2)$

في التمارين 16–5، أوجد المشتقة $y'(x)$ ضمنيًا.

5. $x^2y^2 + 3y = 4x$
6. $3xy^3 - 4x = 10y^2$
7. $\sqrt{xy} - 4y^2 = 12$
8. $\sin xy = x^2 - 3$
9. $\dfrac{x+3}{y} = 4x + y^2$
10. $3x + y^3 - \dfrac{4y}{x+2} = 10x^2$
11. $e^{x^2y} - e^y = x$
12. $xe^y - 3y\sin x = 1$
13. $y^2\sqrt{x+y} - 4x^2 = y$
14. $x\cos(x+y) - y^2 = 8$
15. $e^{4y} - \ln(y^2 + 3) = 2x$
16. $e^{x^2}y - 3\sqrt{y^2 + 2} = x^2 + 1$

مثال 8.2 إيجاد مماس باستخدام الاشتقاق الضمني

أوجد $y'(x)$ لــ $x^2y^2 - 2x = 4 - 4y$. ثم أوجد معادلة المماس عند النقطة $(2, -2)$.

الحل عند اشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة لــ x، نحصل على

$$\frac{d}{dx}(x^2y^2 - 2x) = \frac{d}{dx}(4 - 4y)$$

وبما أن الحد الأول هو نتاج ضرب x^2 و y^2، فيجب علينا استخدام قاعدة ناتج الضرب. يوجد لدينا

$$2xy^2 + x^2(2y)y'(x) - 2 = 0 - 4y'(x)$$

عند تجميع الحدود التي تشمل $y'(x)$ في أحد الأطراف، نحصل على

$$(2x^2y + 4)y'(x) = 2 - 2xy^2$$

لذا فإن

$$y'(x) = \frac{2 - 2xy^2}{2x^2y + 4}$$

عند تعويض $x = 2$ و $y = -2$، نحصل على ميل المماس.

$$y'(2) = \frac{2 - 16}{-16 + 4} = \frac{7}{6}$$

وفي النهاية يتم تحديد معادلة المماس باستخدام

$$y + 2 = \frac{7}{6}(x - 2)$$

لقد رسمنا المنحنى والمماس عند $(2, -2)$ في الشكل 3.41 باستخدام وضع الرسم الضمني الخاص بالحاسوب.

يمكنك استخدام الاشتقاق الضمني لإيجاد الاشتقاق المطلوب من أي معادلة يمكنك كتابتها فعليًا. سنوضح ذلك في ما بعد لتطبيق معين.

18	Solve real-life problems using derivatives of exponential and logarithmic functions.	Example 7.5
	حل مسائل حياتية باستخدام مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية الطبيعية	(37,38)

ورقي

37. يتم تحديد تركيز مادة كيميائية معينة بعد t ثانية (ثوانٍ) من التفاعل ذاتي التحفيز باستخدام $c(t) = \dfrac{6}{2e^{-8t}+1}$. بيّن أنّ $c'(t) > 0$ واستخدم هذه المعلومات للتأكيد على أنّ تركيز المركّب الكيميائي لا يتخطّى 6 أبدًا.

38. يتم تحديد تركيز مادة كيميائية معينة بعد t ثانية (ثوانٍ) من التفاعل ذاتي التحفيز باستخدام $c(t) = \dfrac{10}{9e^{-10t}+2}$. بيّن أنّ $c'(t) > 0$ واستخدم هذه المعلومات للتأكيد على أنّ تركيز المركّب الكيميائي لا يتخطّى 5.

18	Solve real-life problems using derivatives of exponential and logarithmic functions.	Example 7.5
	حل مسائل حياتية باستخدام مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية الطبيعية	(37,38)

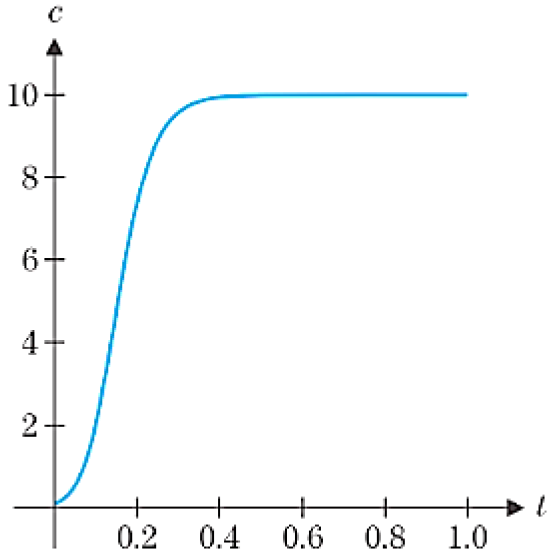
مثال 7.5 تحليل تركيز مادة كيميائية

يتم تحديد التركيز c لمادة كيميائية معينة بعد t ثانية (ثوانٍ) من التفاعل ذاتي التحفيز باستخدام $c(t) = \dfrac{10}{9e^{-20t}+1}$. بيّن أنّ $c'(t) > 0$ واستخدم هذه المعلومات للتأكيد على أنّ تركيز المركّب الكيميائي لا يتخطّى 10.

الحل قبل حساب المشتقة. انظر بعناية إلى الدالّة c. المتغير المستقل هو t والحد الوحيد الذي يشمل t موجود في هذا المقام. لذا فإننا لا نحتاج إلى استخدام قاعدة ناتج القسمة. وبدلًا من ذلك. اكتب أولًا الدالّة بالصيغة $c(t) = 10(9e^{-20t}+1)^{-1}$ واستخدم قاعدة السلسلة يوجد لدينا

$$\begin{aligned} c'(t) &= -10(9e^{-20t}+1)^{-2}\frac{d}{dt}(9e^{-20t}+1) \\ &= -10(9e^{-20t}+1)^{-2}(-180e^{-20t}) \\ &= 1800e^{-20t}(9e^{-20t}+1)^{-2} \\ &= \frac{1800e^{-20t}}{(9e^{-20t}+1)^2} > 0 \end{aligned}$$

ورقي



الشكل 3.38
التركيز الكيميائي

بما أن لكل المماسات ميل موجب، فإن التمثيل البياني لـ $y = c(t)$ يزداد من اليسار إلى اليمين كما هو موضح في الشكل 3.38.

بما أن التركيز يزداد في كل الوقت، فإن التركيز يظل دائمًا أقل من القيمة المحددة $\lim_{t\to\infty} c(t)$ والتي يمكن حسابها بسهولة لتصبح

$$\lim_{t\to\infty} \frac{10}{9e^{-20t}+1} = \frac{10}{0+1} = 10$$

17	a) Find the derivative of a function at a given point.	Example2.2
	a) إيجاد المشتقة لدالة عند نقطة ما	(1-12)
	b) Sketch the graph of a function using the graph of its derivative.	(13-18)
	b) رسم منحنى الدالة اعتمادا على التمثيل البياني لمشتقتها	

ورقي

في التمارين 4–1، احسب $f'(a)$ باستخدام النهايتين (2.1) و (2.2).

1. $f(x) = 3x + 1,\ a = 1$
2. $f(x) = 3x^2 + 1,\ a = 1$
3. $f(x) = \sqrt{3x + 1},\ a = 1$
4. $f(x) = \dfrac{3}{x + 1},\ a = 2$

في التمارين 12–5، احسب الدالّة المشتقة f' باستخدام تعريف المشتقة.

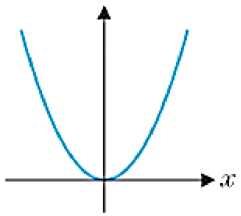
5. $f(x) = 3x^2 + 1$
6. $f(x) = x^2 - 2x + 1$
7. $f(x) = x^3 + 2x - 1$
8. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$
9. $f(x) = \dfrac{3}{x + 1}$
10. $f(x) = \dfrac{2}{2x - 1}$
11. $f(t) = \sqrt{3t + 1}$
12. $f(t) = \sqrt{2t + 4}$

17	a) Find the derivative of a function at a given point.	Example2.2
	a) إيجاد المشتقة لدالة عند نقطة ما	(1-12)
	b) Sketch the graph of a function using the graph of its derivative.	(13-18)
	b) رسم منحنى الدالة اعتمادا على التمثيل البياني لمشتقتها	

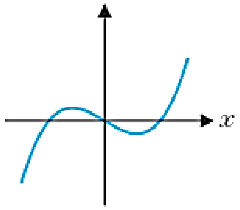
ورقي

في التمرين 13 و 16، استخدم التمثيل البياني الموضح لـ f لرسم التمثيل البياني لمشتقة الدالة.

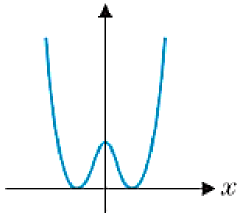
13. (a)



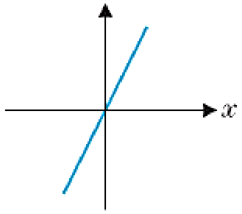
(b)



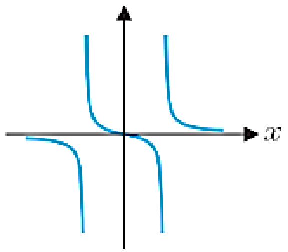
14. (a)



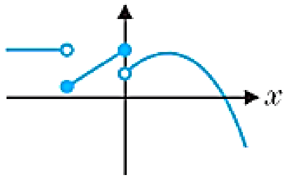
(b)



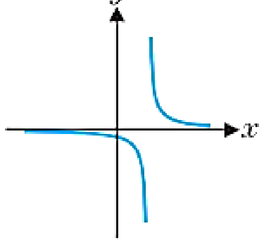
15. (a)



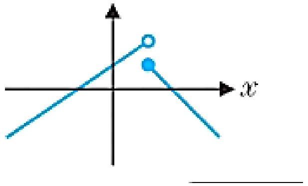
(b)



16. (a)



(b)

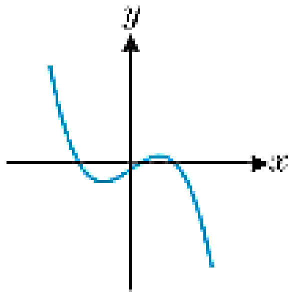


17	a) Find the derivative of a function at a given point.	Example2.2
	a) إيجاد المشتقة لدالة عند نقطة ما	(1-12)
	b) Sketch the graph of a function using the graph of its derivative.	(13-18)
	b) رسم منحنى الدالة اعتمادا على التمثيل البياني لمشتقتها	

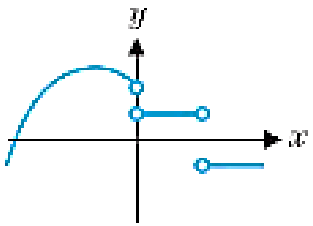
ورقي

في التمرينين 17 و 18، استخدم التمثيل البياني الموضح لـ f' لرسم تمثيل بياني معقول لدالّة متصلة f.

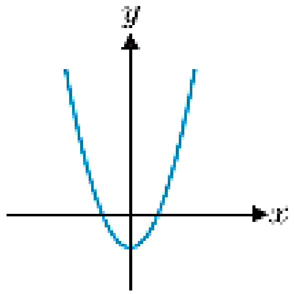
17. (a)



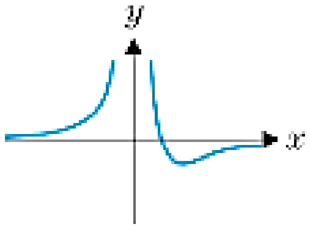
(b)



18. (a)



(b)



17	a) Find the derivative of a function at a given point.	Example2.2
	a) إيجاد المشتقة لدالة عند نقطة ما	(1-12)
	b) Sketch the graph of a function using the graph of its derivative.	(13-18)
	b) رسم منحنى الدالة اعتمادا على التمثيل البياني لمشتقتها	

ورقي

مثال 2.2 إيجاد المشتقة عند نقطة غير محددة

أوجد مشتقة الدالّة $f(x) = 3x^3 + 2x - 1$ عند القيمة غير المحددة لـ x. ثم أوجد قيمة المشتقة عند $x = 1$، $x = 2$ و $x = 3$.

الحل من خلال تعويض a مكان x وفقًا لتعريف المشتقة (2.1)، يكون لدينا

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\left[3(x+h)^3 + 2(x+h) - 1\right] - (3x^3 + 2x - 1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) + (2x + 2h) - 1 - 3x^3 - 2x + 1}{h} && \text{اضرب واختصر} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{9x^2h + 9xh^2 + 3h^3 + 2h}{h} && \text{أخرج } h \text{ كعامل مشترك واختصر} \\ &= \lim_{h\to 0} (9x^2 + 9xh + 3h^2 + 2) \\ &= 9x^2 + 0 + 0 + 2 = 9x^2 + 2. \end{aligned}$$

لاحظ أنه في هذه الحالة، لدينا مشتقة دالّة جديدة، $f'(x) = 9x^2 + 2$. وبمجرد التعويض بـ x سنحصل على $f'(1) = 9 + 2 = 11$ (كما حصلنا في المثال 2.1)، $f'(2) = 9(4) + 2 = 38$ و $f'(3) = 9(9) + 2 = 83$. ■

16	a) Use the Squeeze Theorem to find limits.	(29-32)
	a) استخدام نظرية الشطيرة لإيجاد النهايات	37
	b) Find limits at infinity and limits that are infinite.	(9-22)
	b) إيجاد النهايات التي تؤول إلى اللانهاية والنهايات عند اللانهاية	(39-50)

ورقي

29. استخدم أدلة عددية وبيانية لتخمين قيمة $\lim_{x\to 0} x^2 \sin(1/x)$.
استخدم نظرية الشطيرة لإثبات أنك على صواب: عرّف الدالتين f و h. ووضّح بيانيًا أنّ $f(x) \le x^2 \sin(1/x) \le h(x)$ وعلّل أنّ $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} h(x)$.

30. لماذا لا تستطيع استخدام نظرية الشطيرة كما في المثال 29 لإثبات أنّ $\lim_{x\to 0} x^2 \sec(1/x) = 0$؟ استكشف هذه النهاية بيانيًا.

31. استخدم نظرية الشطيرة لإثبات أنّ $\lim_{x\to 0^+} [\sqrt{x}\cos^2(1/x)] = 0$.
وعرّف الدالتين f و h. ووضّح بيانيًا أن $f(x) \le \sqrt{x}\cos^2(1/x) \le h(x)$ لجميع قيم $x > 0$. وعلل أنّ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to 0^+} h(x) = 0$.

32. افترض أنّ $f(x)$ محدودة: بمعنى أن هناك M ثابتةً بحيث تكون $|f(x)| \le M$ لجميع قيم x. استخدم نظرية الشطيرة لإثبات أنّ $\lim_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$.

16	a) Use the Squeeze Theorem to find limits.	(29-32)
	a) استخدام نظرية الشطيرة لإيجاد النهايات	37
	b) Find limits at infinity and limits that are infinite.	(9-22)
	b) إيجاد النهايات التي تؤول إلى اللانهاية والنهايات عند اللانهاية	(39-50)

ورقي

37. إذا كانت النهاية $\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ ، أوجد قيمة $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$ سريعًا.

حدّد كل نهاية (أجب حسب الاقتضاء،
بعدد أو ∞ أو $-\infty$ أو غير موجودة).

9. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-2}{3x^2+4x-1}$

10. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+1}{4x^2-3x-1}$

11. $\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{\sqrt{4+x^2}}$

12. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{4x^3-5x-1}$

13. $\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x^2+1}{x-3}\right)$

14. $\lim_{x\to 0^+}\ln(x\sin x)$

15. $\lim_{x\to 0^+}e^{-2/x^3}$

16. $\lim_{x\to\infty}e^{-(x+1)/(x^2+2)}$

17. $\lim_{x\to\infty}\cot^{-1}x$

18. $\lim_{x\to\infty}\sec^{-1}\frac{x^2+1}{x+1}$

19. $\lim_{x\to 0}\sin(e^{-1/x^2})$

20. $\lim_{x\to\infty}\sin(\tan^{-1}x)$

21. $\lim_{x\to\pi/2}e^{-\tan x}$

22. $\lim_{x\to 0^+}\tan^{-1}(\ln x)$

16	a) Use the Squeeze Theorem to find limits.	(29-32)
	a) استخدام نظرية الشطيرة لإيجاد النهايات	37
	b) Find limits at infinity and limits that are infinite.	(9-22)
	b) إيجاد النهايات التي تؤول إلى اللانهاية والنهايات عند اللانهاية	(39-50)

ورقي

في التمارين 48–39، استخدم أدلة بيانية وعددية لتخمين قيمة النهاية المشار إليها.

39. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x+2)}{\ln(x^2+3x+3)}$

40. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln(2+e^{2x})}{\ln(1+e^x)}$

41. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2-4x+7}{2x^2+x\cos x}$

42. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3+7x^2+1}{x^3-x\sin x}$

43. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3+4x+5}{e^{x/2}}$

44. $\lim_{x\to\infty} (e^{x/3}-x^4)$

45. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$

46. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln x^2}{x^2}$

47. $\lim_{x\to 0^+} x^{1/\ln x}$

48. $\lim_{x\to 0^+} x^{1/x}$

في التمرينين 49 و 50، استخدم أدلة بيانية وعددية لتخمين قيمة النهاية المشار إليها. ثم، تحقق من التخمين من خلال إيجاد النهاية بالضبط

49. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-2x+1}-2x\right)$ (إرشاد : اضرب واقسم على التعبير المقترن: $\sqrt{4x^2-2x+1}+2x$ وحوّل إلى أبسط صورة).

50. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{5x^2+4x+7}-\sqrt{5x^2+x+3}\right)$ (راجع الإرشاد للتمرين 49).