

الرياضيات

الصف الحادي عشر - الفرع الأدبي - دليل المعلم

الفصل الدراسي الأول

11

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيساً)

أ.د. محمد صبح صباحه

يوسف سليمان جرادات

هبة ماهر التميمي

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الدليل عن طريق العناوين الآتية:

☎ 06-5376262 / 237 ☎ 06-5376266 ☎ P.O.Box: 2088 Amman 11941

📧 @nccdjr 📧 feedback@nccd.gov.jo 🌐 www.nccd.gov.jo

قررت وزارة التربية والتعليم استخدام هذا الدليل في مدارس المملكة الأردنية الهاشمية جميعها، بناء على قرار المجلس الأعلى للمركز الوطني لتطوير المناهج في جلسته رقم (2023/4)، تاريخ 2023/7/11 م، وقرار مجلس التربية والتعليم رقم (2023/247) تاريخ 2023/8/9 بدءاً من العام الدراسي 2023 / 2024 م.

© HarperCollins Publishers Limited 2023.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 414 - 9

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2023/2/811)

373.19

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج

دليل المعلم: الصف الحادي عشر: الفرع الأدبي: الفصل الدراسي الأول / المركز الوطني لتطوير المناهج - عمان:
المركز، 2023

(131) ص.

ر.إ.: 2023/2/811

الواصفات: / الرياضيات / الأدلة / المعلمون / أساليب التدريس / التعليم الثانوي /

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

المصمم الجرافيكي: راكان محمد السعدي

المحكم التربوي: د. خالد محمد أبو اللوم

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, sorted in retrieval system, or transmitted in any form by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior written permission of the publisher or a license permitting restricted copying in the United Kingdom issued by the Copyright Licensing Agency Ltd, Barnard's Inn, 86 Fetter Lane, London, EC4A 1EN.

British Library Cataloguing -in- Publication Data

A catalogue record for this publication is available from the Library.

المقدمة

يسرُّ المركز الوطني لتطوير المناهج أن يُقدِّم للمُعَلِّمين والمُعَلِّمات هذه الطبعة من دليل المُعَلِّم للصف الحادي عشر للفرع الأدبي، آملاً أن تكون لهم مُرشِداً وداعماً في تدريس الطلبة وتقويمهم، بما يُحقِّق الأهداف المنشودة من تدريس كتب الرياضيات المُطوَّرة.

يحتوي دليل المُعَلِّم على جميع المصادر التي تُلزم المُعَلِّم / المُعَلِّمة، بدءاً بالنسخ المُصَغَّرة من كتابي الطالب والتمارين، وانتهاءً بإجابات ما ورد فيهما من تدريبات ومسائل؛ ما يُغني عن حمل هذين الكتابين إلى الغرفة الصفية. وكذلك يحتوي الدليل على جميع أوراق المصادر المشار إليها في الدروس، ويُمكن للمُعَلِّم / للمُعَلِّمة تصوير نسخ منها للطلبة؛ ما يُوفِّر عليهما جُهد إعداد هذه الأوراق. استُهلَّ الدليل بالصفحات التي تحمل عنوان «أهلاً بك في مناهج الرياضيات المُطوَّرة»، وتعرض العناصر الرئيسة في كلٍّ من كتابي الطالب والتمارين ودليل المُعَلِّم، وتبيِّن النهج المُعتمد في كلٍّ منها بطريقة مُبسَّطة؛ لذا يجدر بالمُعَلِّم / المُعَلِّمة قراءة هذه الصفحات بتروٍّ وتدبُّرٍ قبل البدء باستعمال الدليل.

روعي في إعداد الدليل تقديم خطة واضحة لسير الدرس، بدءاً بمرحلة التمهيد، ومروراً بمراحل الاستكشاف، والتدريس، والتدريب، والإثراء، وانتهاءً بمرحلة الختام، إلى جانب إرشادات تساعد المُعَلِّم / المُعَلِّمة على التخطيط الزمني للمهام في كل مرحلة، وتوظيف مختلف أدوات التدريس والتقويم التي يتضمَّنها المنهاج المُطوَّر، فضلاً عن الأخطاء المفاهيمية الشائعة والإرشادات للمعلمين / للمعلمات حول كيفية معالجتها.

يُقدِّم الدليل أيضاً مقترحات لتنويع التعليم تساعد المُعَلِّم / المُعَلِّمة على التعامل مع الطلبة كافةً، على اختلاف مستوياتهم الدراسية وأنماط تعلُّمهم؛ انسجاماً مع الاتجاهات الحديثة في تعلُّم الرياضيات وتعليمها. ولأنَّ الموضوعات الرياضية بعضها مبني على بعض؛ فقد قدِّم الدليل نتائج التعلُّم السابق ونتائج التعلُّم اللاحق في بداية كل وحدة، فضلاً عن أدوات تشخيص ومعالجة مناسبة، تساعد المُعَلِّم / المُعَلِّمة على معالجة الضعف لدى الطلبة، وتهيئتهم للتعلُّم الحالي. يضاف إلى ذلك أن تعرَّف المُعَلِّم / المُعَلِّمة جميع الموضوعات الرياضية التي سوف يدرسها الطلبة في صفوف لاحقة (التعلُّم اللاحق) يُوفِّر له / لها تصوُّراً كافياً عنها، ويجعل تخطيط الدروس أكثر دقَّةً.

ونحن إذ نُقدِّم هذا الدليل، فإنَّا نُؤمِّل أن ينال إعجاب زملائنا وزميلاتنا من المُعَلِّمين والمُعَلِّمات ويكون خير معين لهم / لهنّ، ويجعل تعليم الرياضيات أكثر متعةً وسهولةً.

قائمة المحتويات

a–h	أهلاً بك في مناهج الرياضيات المطورة
6A	الوحدة 1 البرمجة الخطية
6B	مُخطَّط الوحدة
6	نظرة عامة على الوحدة
8	الدرس 1 حلُّ المتباينة الخطية بمتغيرين بيانياً
15	الدرس 2 حلُّ نظام متباينات خطية بمتغيرين بيانياً
23	معمل برمجة جيوجبرا: تمثيل نظام متباينات خطية بمتغيرين بيانياً
25	الدرس 3 البرمجة الخطية
32	اختبار نهاية الوحدة
33A	كتاب التمارين
33D	ملحق الإجابات
34A	الوحدة 2 مبدأ العدّ والتباديل والتوافيق
34B	مُخطَّط الوحدة
34	نظرة عامة على الوحدة
36	الدرس 1 مبدأ العدّ الأساسي
42	الدرس 2 مضروب العدد
46	الدرس 3 التباديل
52	الدرس 4 التوافيق
57	اختبار نهاية الوحدة
57A	كتاب التمارين
57D	ملحق الإجابات

قائمة المحتويات

58A	الوحدة 3 الاحتمالات
58B	مُخطَّط الوحدة
58	نظرة عامة على الوحدة
60	الدرس 1 الاحتمال بالتباديل والتوافيق
67	الدرس 2 المتغيرات العشوائية
71	الدرس 3 احتمال المتغير العشوائي
78	الدرس 4 توقُّع المتغير العشوائي
84	اختبار نهاية الوحدة
85A	كتاب التمارين
85D	ملحق الإجابات



Departures

Time	Flight	Destination
13:20	SF 2778	AMMAN
12:15	PN 0034	DOHA
12:20	T3 0529	DUBAI
12:30	PN 2415	RIYADH
12:50	GI 1872	SANA'A
12:55	T3 0944	DAMASCUS
13:20	SF 2778	AMMAN
13:45	OD 0061	BAGHDAD
13:20	SF 2778	AMMAN

أهلاً بك

في مناهج الرياضيات المُطوّرة



عزيزي المُعلِّم/ عزيزتي المُعلِّمة، يسرُّنا في هذه المُقدِّمة أن نُبيِّن الأسس العلمية والتربوية التي قامت عليها مناهج الرياضيات المُطوّرة بطريقة مُبسَّطة، وذلك بعرض بعض العناصر من كتاب الطالب، وكتاب التمارين، ودليل المُعلِّم، التي تتجلى فيها تلك الجوانب العلمية والتربوية بوضوح. ونحن إذ نعرض هذه المُقدِّمة فإننا نأمل أن تكون مُعينةً على فهم كيفية استعمال المناهج المُطوّرة، وتوظيفها بصورة صحيحة داخل غرفة الصف، بما يُحقِّق الفائدة المنشودة منها.

تتناول المُقدِّمة الجوانب الآتية:

1. خطة الخطوات الست لتدريس الرياضيات.

2. أنواع التقويم وأدواته.

3. تعزيز لغة الرياضيات وإثراؤها.

4. التعلُّم باستعمال التكنولوجيا.

5. مهارات التفكير العليا.

6. الوصول إلى الطلبة كافةً.

وفي نهاية هذه المقدمة بعض استراتيجيات التدريس الشائعة؛ لتكون مرجعاً، ومُعينةً عند التخطيط لتقديم الدروس.

خطة الخطوات الست لتدريس الرياضيات:

1

يُقدّم هذا الدليل خطة واضحة لسير الدرس، تحوي ست خطوات (مراحل)، هي: التهيئة، والاستكشاف، والتدريس، والتدريب، والإثراء، والختام. وتتضمن كل خطوة من هذه الخطوات مقترحات وإرشادات تساعد على تقديم الدرس بنجاح.

التهيئة

1

تهدف هذه المرحلة إلى تهيئة الطلبة لموضوع الدرس، ولكن دون ذكر لأيٍّ من أفكاره، وتوجد في هذا الدليل مقترحات تعين على تقديم التهيئة بنجاح في بند (التهيئة). قد يحوي هذا البند نشاطاً مبنياً على معرفة الطلبة السابقة؛ لذا يمكن في أثناء هذه المرحلة رصد بعض الأخطاء المفاهيمية وتصحيحها قبل بدء الدرس.



الاستكشاف

2

تهدف هذه المرحلة إلى إثارة فضول الطلبة لموضوع الدرس، ولكن دون تقديم معلومات جاهزة لهم؛ إذ يتعين عليك في هذه المرحلة أداء دور تيسير التعلم، وذلك بتوجيه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم) من كتاب الطالب، ومنحهم وقتاً كافياً لدراستها والتفكير فيها، ثم الطلب إليهم الإجابة عن الأسئلة المقترحة في بند (الاستكشاف) من هذا الدليل. ليس شرطاً أن يتمكن الطلبة من الإجابة عن هذه الأسئلة بصورة صحيحة؛ لذا عليك تقبل الإجابات، ثم النظر فيها لاحقاً بعد انتهاء الدرس، والتأكد من صحتها، علماً بأن تمارين بعض الدروس تُحيل الطلبة إلى المسألة في بند (مسألة اليوم)؛ لحلها في نهاية الدرس.

التدريس

3

من المتوقع أن تؤدي مرحلة (الاستكشاف) إلى حدوث حالة من عدم التوازن في المفاهيم لدى الطلبة، فتبدأ مرحلة (التعلم) في إعادة التوازن لديهم، للتمكن من تكوين خبرات مشتركة مُحَدَّدة تساعد على إدراك المفاهيم، وإتقان العمليات والمهارات. تستغرق هذه المرحلة كثيراً من وقت الدرس؛ فهي تشمل تقديم فقرات الشرح، وأمثلة الدرس جميعها؛ لذا يتعين الاستعانة بالإرشادات الواردة في بند (التدريس) من هذا الدليل؛ للتمكن من تنفيذ هذه المرحلة المهمة بنجاح.

التدريب

في هذه المرحلة يتدرَّب الطلبة على أنواع مختلفة من المسائل المجرّدة والحياتية في بند (أُتدرَّب وأحلُّ المسائل) وبند (مهارات التفكير العليا) داخل غرفة الصف؛ لترسيخ المفاهيم الجديدة، وزيادة الطلاقة الإجرائية لديهم. قد يُكَمِّل الطلبة هذه المرحلة في المنزل. وكذلك التدريبات والمسائل الواردة في الصفحة المقابلة للدرس في كتاب التمارين.

[illegible]

الإثراء

تُعَدُّ توسعة المفاهيم والعمليات والمهارات الهدف الأساس لهذه المرحلة، ويتمثل ذلك في إشراك الطلبة في مهام تتضمن مفاهيم وعمليات أوسع وأكثر عمقاً. تُوفَّر مناهج الرياضيات المُطَوَّرَة مصادر عِدَّة لإثراء ذوي المستوى فوق المُتوسِّط، منها بندا الإثراء في هذا الدليل، الذي يحوي مسألة، أو نشاطاً صفياً، أو نشاطاً حاسوبياً، إضافةً إلى مشروع الوحدة الذي يثري معرفة الطلبة بموضوعات الوحدة.

[illegible]

الختام

هي المرحلة الأخيرة من مراحل تقديم الدرس، وتهدف إلى تجميع الأفكار المختلفة التي تضمّنها الدرس، ثم عرضها بصورة مترابطة، فضلاً عن اشتغالها على مقترحات تساعد على تقديم هذه المرحلة بنجاح.

أنواع التقويم وأدواته:

2

التقويم جزء لا يتجزأ من عملية التعلم؛ فهو يُواكب جميع خطواتها، ويضمن استمرارها وصولاً إلى تحقيق الهدف. يُعرّف التقويم بأنه عملية تُستعمل فيها معلومات من مصادر مُتعددة للوصول إلى حكم عن تحصيل الطلبة الدراسي. وقد أبرزت مناهج الرياضيات المُطوّرة ثلاثة أنواع مختلفة من التقويم، هي: **التقويم القبلي، والتقويم التكويني، والتقويم الختامي.**

أ التقويم القبلي:

يهدف هذا النوع من التقويم إلى تحديد مدى امتلاك الطلبة المعرفة السابقة اللازمة لدراسة الموضوع الجديد؛ ما يساعد على تحديد ما يلزم الطلبة من معالجات تتمثل في مصادر التعلم الإضافية. تحتوي مناهج الرياضيات المُطوّرة على أداة تقويم قبلي في بداية كل وحدة، وهي موجودة في كتاب التمارين بعنوان (أستعد لدراسة الوحدة).

ب التقويم التكويني:

يحدث هذا النوع من التقويم في أثناء عملية التدريس، ويهدف إلى متابعة تعلم الطلبة أولاً بأول، والتأكد أن العملية التعليمية التعليمية تسير في اتجاه تحقيق أهدافها المنشودة، وأنه لا يوجد انحراف عن مسارها؛ ما يساعد على اتخاذ القرارات الصحيحة، مثل: الاستمرار في عملية التدريس، أو التعديل عليها، أو النظر فيها من جديد. من أدوات التقويم التكويني: الأسئلة الشفوية، والملاحظات غير الرسمية، والاختبارات القصيرة.

تحتوي مناهج الرياضيات المُطوّرة على أدوات للتقويم التكويني في كل درس، تتمثل في مسائل بند (أنتحقق من فهمي) التي تلي كل مثال.

أنتحقق من فهمي

أحدّد إذا كان الزوج المُرتّب يُمثّل حلاً للمتبينة: $x + 2y > 1$ في كلٍّ مما يأتي:

a) (2, 3)

b) (1, -2)

c) (1, 0)

الوحدة 1: البرمجة الخطية

أستعد لدراسة الوحدة

أعتبر معلوماتي قبل البدء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأقدي من الإجابة أسئلتين بالنال المعطى.

كتابة متباينة خطية بمتغير واحد تمثل جملة معطاة (الدرس 1)

أكتب المتباينة التي تمثل كل جملة مما يأتي:

- عدد مضاف إلى 7 أكبر من 20
- ثلاثة عدد مضروجا منه 5 لا يزيد على 15
- عدد مضروح منه 9 أكبر من 5
- أربعة أمثال مجموع عدد مع 5 أكبر من 2
- العدد 6 أقل من أو يساوي مجموع عدد و 15
- خمس عدد مضافاً إليه 3 لا يقل عن عشر العدد مضافاً إليه 8
- العدد 8 مضروحاً منه مثلي عدد ما أكبر من 20
- ثلاثة أمثال عمر سلمي بالسنوات مضافاً إليه 12 لا يزيد عن 18

مثال: أكتب المتباينة التي تمثل كل جملة مما يأتي:

(a) عدد مضروح منه 4 أكبر من 120

(b) نصف عدد طلبة صفي مضروحاً منه 10 لا يقل عن 6

المتغير: ليكن n يمثل عدد طلبة صفي.

المتباينة: $4n > 120$

المتباينة: $\frac{1}{2}n - 10 \geq 6$

حلّ المتباينات الخطية بمتغير واحد (الدرس 1)

أحلّ المتباينتين الخطيتين الآتيتين:

- $2x + 3 \leq 7x - 2$
- $9x - 8 > 2(3x + 8)$

مثال: أحمّل المتباينة الخطية: $8x - 5 \leq 4x + 7$

المتباينة الخطية

ب طرح $4x$ من الطرفين

ب جمع العدد 5 للطرفين

بقسمة الطرفين على العدد 4

مجموعة الحل

$8x - 5 \leq 4x + 7$

$4x - 5 \leq 7$

$4x \leq 12$

$x \leq 3$

$(-\infty, 3]$

الوحدة 1

أمور الزوج المُرتّب (7, 3) في المتباينة:

المتباينة الخطية

بالنعوض

النتيجة غير صحيحة

ألاحظ أنه عند تعويض الزوج المُرتّب في المتباينة، فإنّ الناتج لا يكون صحيحاً، إذن، الزوج المُرتّب (7, 3) لا يُمثّل حلاً لها.

أمور الزوج المُرتّب (2, -1) في المتباينة:

المتباينة الخطية

بالنعوض

النتيجة صحيحة

ألاحظ أنه عند تعويض الزوج المُرتّب في المتباينة، فإنّ الناتج يكون صحيحاً، إذن، الزوج المُرتّب (2, -1) يُمثّل حلاً لها.

تحقق من فهمي

أحدّد إذا كان الزوج المُرتّب يُمثّل حلاً للمتبينة: $x + 2y > 1$ في كلٍّ مما يأتي:

a) (2, 3) b) (1, -2) c) (1, 0)

عند تمثيل المتباينة الخطية بيانياً في المستوى الإحداثي، فإنّ النقاط التي تُشكّل جميع حلولها المشكّلة تُسمى **منطقة الحلول الممكنة** (feasible region). لتمثيل المتباينة بيانياً، أبدأ برسم مستقيم المعادلة المرافقة للمتبينة، التي أحصل عليها باستبدال الرمز $>$ بـ $=$ ، ورمز المتباينة (x, y) ، حيث تُشكّل المعادلة الناتجة مستقيماً يُسمى **مستقيم الحدود** (boundary line) وهو مستقيم يُقسم المستوى الإحداثي إلى جزأين، أحدهما منطقة الحلول الممكنة.

ج. التقويم الختامي:

يأتي هذا التقويم في نهاية عملية التدريس، أو في نهاية الوحدة الدراسية. وهو يساعد على تحديد مدى إتقان الطلبة للمفاهيم والمهارات التي تم تقديمها لهم.

تُوفّر المناهج المُطوّرة أداة للتقويم الختامي في كل وحدة، تتمثل في فقرة (اختبار نهاية الوحدة) الذي يحوي مسائل مُتنوّعة تشمل نتائج الوحدة كلها.

3 تعزيز لغة الرياضيات وإثرائها:

تُعَدُّ المصطلحات إحدى ركائز تعلّم الرياضيات؛ فهي الوعاء الذي يحمل المعاني الرياضية، وينقلها بين المسائل والسياقات المختلفة. ولهذا أبرزت مناهج الرياضيات المطورة المصطلحات الرياضية التي يتعرّفها الطلبة أول مرّة، وميّزتها بلون مختلف داخل نصوص الشرح، وأوردت مرادفاتهما من اللغة الإنجليزية بهدف إثراء معرفة الطلبة.

اختبار نهاية الوحدة

تدريب على الاختبارات الدولية

إذا كان $4 > y$ ، فسأني ماذا يأتي يجب وضعه في المربع لتكون $\frac{3y+2}{5}$ صحيحة:

a) $>$ b) $<$
c) $\leq$ d) $\geq$

إذا كان $0 < x < y$ ، فأني ماذا يأتي صحيحة دائماً:

a) $xy^2 < x$ b) $xy < y^2$
c) $xy < x^2$ d) $y - 1 < x$

إذا كان $a < b < c$ ثلاثة أعداد فردية صحيحة متتالية، وكان $x = a + b + 1$ و $y = b + c - 1$ ، فإن:

a) $x > y$ b) $x < y$
c) $x = y$ d) $2x = y$

أني ماذا يأتي صحيح اعتماداً على المثلث المجاور:

a) $x > y$ b) $x < y$
c) $x = y$ d) $2x = y$

إذا كان $0 < n < k$ ، فأني ماذا يأتي ناتجه عدد موجب:

a) $k - n$ b) kn
c) k^2n d) $k^2n + kn^2$

يُنتج مصنع نوعين من القطع المعدنية باستعمال الآتين A و B معاً. ويبيّن الجدول التالي الزمن الذي تستغرقه معالجة القطعة الواحدة في كلّ من الآتين، ومقدار ربح المصنع من بيع القطعة الواحدة من كلّ نوع. إذا كان عدد ساعات العمل اليومي للآلة B لا يزيد على 10 h، وعدد ساعات العمل اليومي للآلة A لا يزيد على 6 h، فكم قطعة من كلّ نوع يجب أن يُنتج المصنع يومياً لتحقيق أكبر ربح ممكن؟

القطعة من النوع الثاني	القطعة من النوع الأول	الزمن المعالجة في الآلة A	الزمن المعالجة في الآلة B	مقدار الربح
1 h	2 h	1 h	1 h	JD 15
1 h	1 h	1 h	1 h	JD 10

أراد خبير تغذية إعداد خليط غذائي باستعمال الطحين العادي وطحين الشوفان، بحيث يحتوي الخليط على 12 وحدة على الأقل من فيتامين A، و 10 وحدات على الأقل من فيتامين B، و 6 وحدات على الأقل من فيتامين C. يُبيّن الجدول الآتي وحسب الفيتامين في نوعي الطحين، وسعر كلّ نوع:

الطحين العادي	الطحين الشوفان	السعر
JD 0.5 / kg	JD 0.8 / kg	4 وحدات لكل كيلوغرام
3 وحدات لكل كيلوغرام	3 وحدات لكل كيلوغرام	5 وحدات لكل كيلوغرام
3 وحدات لكل كيلوغرام	3 وحدات لكل كيلوغرام	3 وحدات لكل كيلوغرام

كم كيلوغراماً من نوعي الطحين يتبنّى على خبير التغذية خلطه بحيث يحوي الخليط الحد الأدنى المطلوب من كلّ فيتامين ويأقل تكلفة؟

الدرس 2

حلّ نظام متباينات خطية بمتغيرين بيانياً
Solving System of Linear Inequalities in Two Variables Graphically

فكرة الدرس حلّ نظام متباينات خطية بمتغيرين بيانياً.

المصطلحات نظام المتباينات الخطية، مجموعة الحلّ.

مسألة اليوم قدّم مخبّل لتبديل زيوت السيارات عرضاً مجانياً لفصل السيارات. إذا كان الحد الأقصى لذلك العرض هو غسل 30 سيارة يومياً، بتكلفة لا تزيد على 75 ديناراً، فكم سيارة كبيرة وصغيرة يُمكن غسلها يومياً بحسب هذا العرض؟

يتكوّن نظام المتباينات الخطية (system of linear inequalities) من متباينتين خطيتين أو أكثر. ويُطلق على مجموعة الأزواج المُرتّبة التي تُحقّق جميع المتباينات اسم **مجموعة الحلّ** (solution set). فمثلاً، يتكوّن النظام الآتي من ثلاث متباينات:

المتباينة الأولى: $x + y < 2$
المتباينة الثانية: $-2x + y > -1$
المتباينة الثالثة: $x - 3y \leq -2$

أتعلّم يوجد عدد لا نهائي من الأزواج المُرتّبة التي تُحقّق هذا النظام، وليس $(-1, 2)$ فقط.

لغة الرياضيات نداء جملة (الزوج المُرتّب يُحقّق متباينة) على أنّ الناتج يكون صحيحاً عند تعويض هذا الزوج في المتباينة.

يُمثّل الزوج المُرتّب $(-1, 2)$ أحد حلول هذا النظام؛ لأنّه يُحقّق المتباينات جميعها.

الزوج المُرتّب $(-1, 2)$ يُحقّق المتباينة الأولى: $-1 + 2 = 1 < 2$ ✓
الزوج المُرتّب $(-1, 2)$ يُحقّق المتباينة الثانية: $-2(-1) + 2 = 4 > -1$ ✓
الزوج المُرتّب $(-1, 2)$ يُحقّق المتباينة الثالثة: $-1 - 3(2) = -7 \leq -2$ ✓

لحلّ نظام متباينات، أمثل كل متباينة في بيانيّ في المستوى الإحداثي نفسه، ثم أظنّل المنطقة المشتركة بين مناطق حلّ المتباينات جميعها التي تُمثّل حلّ النظام.

الحد الأقصى للـ ...
سيارة يومياً، بتكلفة لا تزيد
فكم سيارة كبيرة وصغيرة يُمكن
بحسب هذا العرض؟

نظام المتباينات الخطية (system of linear inequalities) يُطلق على مجموعة الأزواج المُرتّبة التي تُحقّق جميع المتباينات (solution set). فمثلاً، يتكوّن النظام الآتي من ثلاث متباينات:

المتباينة الأولى:

4 التعلّم باستعمال التكنولوجيا:

4

معمل برمجية جيوجبرا

تمثيل نظام متباينات خطية بمتغيرين بيانيًا
Graphing System of Linear Inequalities in Two Variables

يُمكن استعمال برمجية جيوجبرا لتمثيل نظام المتباينات الخطية بيانيًا في المستوى الإحداثي، وإيجاد منطقة الحل.

نشاط

أُمثل بيانيًا نظام المتباينات الخطية الآتي باستعمال برمجية جيوجبرا، ثم أحدد منطقة الحل:

$$3x + 5y \leq 2$$

$$x + 5y > 4$$

الخطوة 1: أُمثل المتباينة الأولى بيانيًا.

أكتب المتباينة الأولى في شريط الإدخال بنقر المفاتيح الآتية:

3 x + 5 y ≤ 2

ألاحظ أنّ برمجية جيوجبرا قد حدّدت منطقة باللون الأزرق. ماذا تعني هذه المنطقة بالنسبة إلى المتباينة؟

تُسهّم التكنولوجيا إسهامًا فاعلاً في تعلّم الرياضيات؛ فهي تُوفّر تمثيلات بصرية للمفاهيم الرياضية بصورة تفاعلية تزيد من رغبة الطلبة في التعلّم، وتساعد على استكشاف المفاهيم الجديدة. إنّ توافر الأدوات التكنولوجية يساعد الطلبة على التأمل والتحليل والتفكير بدلاً من إضاعة أوقاتهم في إجراء الحسابات الرتيبة.

تمنح أدلة المُعلّم في مناهج الرياضيات المُطوّرة فرصة توظيف عدد من البرمجيات التعليمية في تدريس الطلبة؛ سواء أكان ذلك في المدرسة، أم في المنزل.

5 مهارات التفكير العليا:

5

22 أيّ جهتي المستقيم في الشكل المجاور تُمثّل منطقة حلّ المتباينة الآتية، مُبرِّزًا إجابتي؟

$$y \leq x + 2$$

23 أخلّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا

24 أكتشف الخطأ: مثّل سفيان المتباينة: $y \leq 3x - 2$ بيانيًا على النحو الآتي:

أكتشف الخطأ في تمثيل سفيان، ثم أصحّحه.

25 تبرير: عند تمثيل متباينة خطية بمتغيرين بيانيًا، لماذا تُختار فقط نقطة اختبار لا تقع على المستقيم الحدودي؟ أبرّر إجابتي.

26 تحدّ: أكتب متباينة خطية بمتغيرين، بحيث تقع النقطتان $(-2, -5)$ و $(3, 5)$ على المستقيم الحدودي، وتقع النقطتان $(2, 3)$ و $(6, 5)$ في منطقة الحلول المُمكنة، ثم أُمثل المتباينة بيانيًا.

14

تهدف **مهارات التفكير العليا** إلى تحدّي قدرات الطلبة في مجال التفسير، والتحليل، ومعالجة المعلومات؛ لذا، فهي تُنمّي قدراتهم على التأمل، والتفكير، والاستقصاء، واكتشاف العلاقات.

تمنح مناهج الرياضيات المُطوّرة الطلبة فرصة لتطوير مهارات التفكير العليا في كل درس، بطرحها مسائل مرتبطة بنتائج الدرس؛ إذ يحوي بند (مهارات التفكير العليا) عددًا من المسائل ضمن العناوين الآتية:

تبرير: يتطلّب حلّ هذه المسائل تبرير خطوات الحلّ جميعها.

تحدّ: تتضمن هذه المسائل أفكارًا غير مألوفة تُمثّل تحدّيًا للطلبة.

مسألة مفتوحة: يوجد لهذه المسألة عدد من الحلول الصحيحة، وليس حلًا واحدًا فقط.

أكتشف الخطأ: يتعيّن على الطلبة في هذا النوع من المسائل تحديد الخطأ في إجابة معطاة؛ ما يُحتمّ عليهم إدراك مفاهيم الدرس بصورة عميقة.

أيّها مختلف: يتعيّن على الطلبة في هذا النوع من المسائل تحليل عدد من الخيارات المعطاة، ثم تحديد خيار واحد فقط مختلف عن البقية.

ما السؤال: يُعطى الطلبة في هذا النوع من المسائل إجابة لمسألة ما، ثم يُطلّب إليهم كتابة هذه المسألة.

تراعي مناهج الرياضيات المُطَوَّرَة تكافؤ الفرص بين الطلبة، وخصوصية كل منهم (التمايز)، وتساعد على تجاوز العثرات، وتعزيز مناحي التفوق. يُمكن تحقيق التمايز عن طريق أربعة عناصر رئيسية، هي:

إرشادات:

- يُفضَّل استعمال الأقلام المُلوَّنة أثناء شرح المثال 1، في خطوة تعويض إحداثيي الزوج المُرتَّب؛ لِما لذلك من أثر في تحفيز الطلبة على تخيل عملية التعويض، وبخاصة أولئك الذين يتمتعون بذكاء بصري.

المحتوى: يُقصد بذلك ما يحتاج كل من الطلبة إلى تعلُّمه، وكيفية الحصول على المعلومة. من الأمثلة على تحقيق التمايز في المحتوى: تقديم الأفكار باستعمال الوسائل السمعية والبصرية والمحسوسة.

الأنشطة: كل ما يشارك فيه كل من الطلبة من أنشطة؛ للتمكُّن من فهم المحتوى، أو إتقان المهارة. من الأمثلة على تحقيق التمايز في هذا العنصر: استعمال الأنشطة المُتدرِّجة التي يشارك فيها جميع الطلبة، ويكون تقدُّمهم فيها مُتبايناً من حيث المستوى، ومنح الطلبة ذوي المستوى دون المتوسط وقتاً إضافياً لإنجاز المهام.

المنتجات: مشاريع يتعيَّن على الطلبة تنفيذها؛ للتدرُّب على ما تعلَّموه في الوحدة، وتوظيفه في حياتهم، والتوسع فيه. من الأمثلة على تحقيق التمايز في المنتجات: السماح للطلبة بالعمل وحدهم، أو في مجموعات صغيرة لابتكار مُنتجاتهم الخاصة وفق ميولهم.

بيئة التعلُّم: يُقصد بها عناصر البيئة الصفية جميعها. من الأمثلة على تحقيق التمايز في بيئة التعلُّم: التحقق من وجود أماكن في غرفة الصف يُمكن للطلبة العمل فيها بهدوء، ومن دون إلهاء. وكذلك وجود أماكن أخرى تُسهِّل العمل التعاوني بين الطلبة.

إرشادات:

- يُفضَّل استعمال الأقلام المُلوَّنة أثناء شرح المثال 1، في خطوة تعويض إحداثيي الزوج المُرتَّب؛ لِما لذلك من أثر في تحفيز الطلبة على تخيل عملية التعويض، وبخاصة أولئك الذين يتمتعون بذكاء بصري.
- أناقش الطلبة في الأفكار الواردة في الصناديق الهامشية؛ لِما لها من أهمية في تعزيز مفاهيم الدرس.

أخطاء شائعة:

قد يُخطئ بعض الطلبة في تحديد إذا كان الزوج المُرتَّب يُمثِّل حلاً للمثباتة أم لا، وذلك بتعويض الإحداثي x للزوج المُرتَّب مكان المُتغيِّر y في المثباتة، وتعويض الإحداثي y للزوج المُرتَّب مكان المُتغيِّر x في المعادلة؛ لذا أطلب إلى الطلبة كتابة كل مُتغيِّر فوق الإحداثي المناسب له في الزوج المُرتَّب.

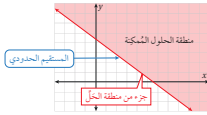
تعزيز اللغة ودعمها:

أكرِّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلٍّ من اللغة العربية، واللغة الإنجليزية، مُحقِّراً الطلبة على استعمالها.

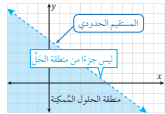
التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (أنحقِّق من فهمي) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم من أخطأ في الإجابة؛ تجنباً لإحراجة.

قد يكون المستقيم الحدودي جزءاً من منطقة الحلول المُمكنة إذا تغطَّت المثباتة الرمز $\geq$ أو الرمز $>$ ، عندئذ يُرسم المستقيم الحدودي متصلًا كما في الشكل الآتي:



وقد لا يكون المستقيم الحدودي جزءاً من منطقة الحلول المُمكنة إذا تغطَّت المثباتة الرمز $<$ أو الرمز $>$ ، عندئذ يُرسم المستقيم الحدودي مُنفصلاً كما في الشكل الآتي:



لتحديد أيّ المنطقتين على جانبي المستقيم الحدودي هي منطقة الحلول المُمكنة، أختار أيّ نقطة (a, b) لا تقع على المستقيم الحدودي، ثم أؤمِّمها في المثباتة الخطية، فإذا كانت مُحقَّقة (أي ينجم عنها نتيجة صحيحة)، أظنُّل الجزء من المستوى الإحداثي الذي تقع فيه تلك النقطة، وإلا أظنُّل الجزء الآخر الذي لا تقع فيه تلك النقطة.

مثال 2:

أُثل المثباتة الخطية: $2x + 3y < 6$ في المستوى الإحداثي.

الخطوة 1: أثل المستقيم الحدودي.

أُثل المستقيم الحدودي: $2x + 3y = 6$ بإثباته، ثم

أبني جدول قيم لإيجاد نقاط تقاطع المستقيم مع

المحورين:

x	0	3
y	2	0

لتبسيط معادلة خطية بتعويض y في المستوى الإحداثي، أجد نقطة تقاطع المستقيم مع المحور y بتعويض $x=0$ في المعادلة، ثم y بتعويض $x=0$ في المعادلة، ثم أصل بين تقاطع التقاطع بمسقيم كما في الشكل الآتي:



استراتيجيات تدريس إضافية

عزيزي المُعلِّم/ عزيزتي المُعلِّمة، تساعد مناهج الرياضيات المُطوَّرة على تطبيق أحدث استراتيجيات التدريس، بما تحويه من عناصر مُنظَّمة في كتاب الطالب، ومقترحات، وإرشادات مناسبة للتدريس في هذا الدليل، علماً بأنَّ مسألة تطبيقها متروكة لك؛ إذ يُمكن لك اختيار طرائق التدريس المناسبة داخل غرفة الصف؛ فأنت أكثر علماً بأحوال غرفة الصف، والوسائل والتجهيزات المتوافرة في المدرسة.

في ما يأتي بعض استراتيجيات التدريس الإضافية التي قد تساعد المُعلِّم/ المُعلِّمة على تقديم الدروس:

التعلُّم المقلوب (Flipped Learning):

يسهم هذا الأسلوب في تعزيز مهارات التعلم الذاتي واستثمار وقت الحصة الصفية استثماراً كبيراً والتركيز على المحتوى والمفاهيم العلمية بشكل مكثف. تتيح هذه الاستراتيجية لك إعداد الدروس وإطلاع الطلبة عليها مسبقاً بالاستعانة بالتقنيات الحديثة وشبكة (الإنترنت)، إذ يمكن إرسال مقاطع مرئية (فيديوهات) أو ملفات صوتية أو غيرها من الوسائط إلى الطلبة، والطلب إليهم الاطلاع عليها في المنازل قبل وقت كافٍ من الوقت المخصص لعرض الدرس، عن طريق الوسائل المتاحة لهم (حاسوب، هاتف ذكي، جهاز لوحي). يتعين عليك تجهيز أنشطة متنوعة لتنفيذها في اللقاء الصفّي تهدف إلى تطبيق المفاهيم التي اكتسبها الطلبة ومناقشة المحتوى العام للدرس، وتشمل أنشطة التعلم النشط والاستقصاء، والتجريب، وحلّ المسائل الرياضية، وبما يعزز مهارات العمل بروح الفريق وتقييم التعلم.

بطاقة الخروج (Exit Ticket):

أسلوب يتضمّن مهمة قصيرة يُنفّذها الطلبة في مرحلة ختام الدرس. وفيه يجيب الطلبة عن أسئلة قصيرة مُحدّدة مكتوبة في بطاقات صغيرة، بعد ذلك عليك جمع البطاقات لقراءة الإجابات، ثم التعليق عليها في الحصة التالية، في ما يُمثّل تغذية راجعة يُستند إليها في الحصة اللاحقة.

رفع اليد (إشارة الصمت) (Hand Up):

أسلوب يُستعمل لإدارة الصف. وفيه عليك رفع يدك، فيستجيب الطلبة برفع أيديهم، وإنهاء مناقشتهم فوراً. تُعدّ هذه الاستراتيجية طريقة فاعلة وسريعة للفت انتباه الطلبة، ويُمكن استخدامها في بداية الحصة، أو للإعلان عن انتهاء النشاط. تجدر الإشارة إلى أنّ رفع يدك يجب أن يُقابل باستجابات ثلاث: رفع جميع الطلبة أيديهم من دون استثناء، والتزامهم الصمت التام، والإصغاء.

الرؤوس المُرقّمة (Numbered Heads):

أسلوب يُستعمل لإدارة الصف، وتوزيع المسؤوليات. وهو يهدف إلى إبقاء الطلبة في وضع استعداد دائم، عن طريق الاختيار العشوائي لمشاركاتهم وإجاباتهم عن الأسئلة. ففي العمل الجماعي يكون لكل فرد في المجموعة رقم خاص، وعند طلبك الحصول على إجابة سؤال بصورة عشوائية، يختار الفرد رقماً من دون أن يعرف زميله/ زميلتها، فيجيب من يقع عليه الاختيار عن السؤال، ويمكن أن يتم ذلك بمساعدة أفراد المجموعة.

أنا أفكر، نحن نُفكر (I Think, We Think):

أسلوب يُستعمل لتطوير تفكير الطلبة ضمن مجموعات. وفيه تُعدّ كل مجموعة ورقة تتضمّن جدولاً من عمودين؛ عنوان الأوّل: (أنا أفكر)، وعنوان الثاني: (نحن نُفكر). ثم يمكنك توجيه سؤال يجيب عنه الطلبة بصورة فردية في العمود الأوّل، ثم يُناقش الطلبة إجاباتهم للاتفاق على إجابة واحدة تُكتَب في العمود الثاني، ويُمكن تغيير الورقة عند الحاجة. يساعد هذا الأسلوب الطلبة على التفكير في الموضوع، وتأمّل التغيّر في تفكيرهم نتيجة التحدّث إلى الآخرين.

الألواح الصغيرة (Small Boards):

أسلوب يُستعمل للتقويم. وفيه يُمسك كل طالب/ طالبة بلوح صغير (يُمكن أن يُصنّع من قطعة كرتون مقوّى، أو قطعة خشب صغيرة يُكتَب عليها بالطباشير، أو قطعة كرتون لاصق شفاف يُكتَب عليها بقلم اللوح الأبيض)، ثم يمكنك توجيه سؤال يجيب عنه الطلبة بالكتابة على اللوح، ثم رفعه إلى أعلى؛ للتمكن من مشاهدة الإجابات بسهولة. يُسهم هذا الأسلوب في زيادة مشاركة الطلبة؛ لأنّهم يجيبون جميعاً في الوقت نفسه من دون إحداث فوضى، ويُسهم أيضاً في التقويم التكويني؛ إذ يمكنك ملاحظة نسبة إجابات الطلبة الصحيحة.



مُخطّط الوحدة



اسم الدرس	النتائج	المصطلحات	الأدوات اللازمة	عدد الحصص
الدرس 1: حل المتباينة الخطية بمُتغيّرين.	• تحديد إذا كان زوج مُرتَّب مُعيّن حلاً للمتباينة. • حل متباينة خطية بمُتغيّرين بيانيًا.	• منطقة الحلول المُمكنة. • المستقيم الحدودي.	• أوراق رسم بياني.	3
الدرس 2: حل نظام متباينات خطية بمُتغيّرين بيانيًا.	• تحديد إذا كان زوج مُرتَّب مُعيّن حلاً لنظام متباينات خطية. • حل نظام متباينات خطية بمُتغيّرين بيانيًا.	• نظام المتباينات الخطية. • مجموعة الحل.	• أوراق رسم بياني.	3
معمل برمجية جيوجبرا: تمثيل نظام متباينات خطية بمُتغيّرين بيانيًا.	• استعمال برمجية جيوجبرا لتمثيل نظام متباينات خطية بيانيًا في المستوى الإحداثي، وإيجاد منطقة الحل.		• جهاز حاسوب.	1
الدرس 3: البرمجة الخطية.	• نمذجة مواقف حياتية بمسائل يُمكن حلها بالبرمجة الخطية. • حل مسائل حياتية عن البرمجة الخطية.	• القيود. • البرمجة الخطية. • منطقة الحلول المُمكنة. • الاقتران الهدف. • الحل الأمثل.	• أوراق رسم بياني.	3
اختبار نهاية الوحدة.				2
مجموع الحصص:				12 حصة

نظرة عامة على الوحدة:

سيتعلم الطلبة في هذه الوحدة كيفية حل متباينة خطية بمُتغيّرين بيانياً، وتحديد إذا كان زوج مُرتّب مُعيّن يُحقّق المتباينة أم لا، وحل نظام من المتباينات الخطية بمُتغيّرين بيانياً، وتحديد منطقة الحلول المُمكنة والمستقيمات الحدودية لهذه المنطقة.

سيتعلم الطلبة أيضاً أحد أهم تطبيقات المتباينات الخطية، عن طريق ما يُسمّى البرمجة الخطية التي يُمكن بها إيجاد الحل الأمثل لاقتران هدف معطى لمسائل عملية من الحياة اليومية.

ما أهمية هذه
الوحدة؟

طُوّرت نظرية البرمجة الخطية في بداية الحرب العالمية الثانية عام 1939م، واستُعملت لتقليل التكلفة وزيادة الإنتاجية في كثير من المجالات، وقد استفادت منها الشركات التجارية في جني مزيد من الأرباح وتقليل الخسائر، وكذلك جدولة رحلات الطيران، وإنشاء خطوط الهاتف. سأتعرّف في هذه الوحدة البرمجة الخطية، وبعض تطبيقاتها الحياتية.



سأتعلّم في هذه الوحدة:

- ◀ حلّ متباينة خطية بمتغيرين بيانياً.
- ◀ حلّ نظام مُكوّن من متباينات خطية بمتغيرين بيانياً.
- ◀ حلّ نظام مُكوّن من متباينات خطية بمتغيرين باستعمال برمجة جبراً.
- ◀ حلّ مسائل حياتية عن البرمجة الخطية.

تعلّمتُ سابقاً:

- ✓ حلّ متباينة خطية بمتغير واحد، وتمثيلها على خط الأعداد.
- ✓ تمثيل متباينة خطية بمتغيرين في المستوى الإحداثي.
- ✓ حلّ نظام مُكوّن من معادلتين خطيتين بمتغيرين.
- ✓ تمثيل نظام مُكوّن من معادلتين خطيتين بمتغيرين بيانياً.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (9 - 6) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

الترابط الرأسي بين الصفوف:

الصف الحادي عشر (الأدبي):

- تحديد إذا كان زوج مُرتّب مُعيّن حلاً للمتباينة.
- حل متباينة خطية بمتغيرين بيانياً.
- تحديد إذا كان زوج مُرتّب مُعيّن حلاً لنظام متباينات خطية.
- حل نظام متباينات خطية بمتغيرين بيانياً.
- حل مسائل حياتية عن البرمجة الخطية.

والصف التاسع:



- تعرّف مفهوم المتباينة، وتمثيلها على خط الأعداد.
- حل متباينات خطية بمتغير واحد جبرياً، وتمثيل حلها على خط الأعداد.
- حل متباينات مُركّبة، وتمثيل حلها على خط الأعداد.
- حل متباينات قيمة مُطلقة.
- تمثيل المعادلة الخطية بيانياً.
- تمثيل متباينة خطية بمتغيرين بيانياً.

حل المتباينة الخطية بمتغيرين بيانياً

Solving Linear Inequality in Two Variables Graphically

حل متباينة خطية بمتغيرين بيانياً.

فكرة الدرس



منطقة الحلول الممكنة، المستقيم الحدودي.

المصطلحات



مسألة اليوم



تصنع نهى أساور وأطواقاً من الخرز، وتستعمل 10 حبات من الخرز لصنع السوار الواحد، و45 حبة لصنع الطوق الواحد. كم بيواراً وطوقاً يُمكنها أن تصنع من 214 حبة خرز؟

تعلّمت سابقاً أن المتباينة الخطية جملة رياضية تحوي الرمز $\geq$ ، أو $\leq$ ، أو $<$ ، أو $>$ ، وأنها قد تحتوي على متغير واحد أو متغيرين. من الأمثلة على المتباينات الخطية بمتغيرين:

$$2x + y \leq 1$$

$$3x + 2y > 2$$

$$x - 4y < -1$$

يكون الزوج المُرتَّب (a, b) حلاً للمتباينة الخطية بمتغيرين إذا كان الناتج صحيحاً عند تعويض إحداثيه في المتباينة.

مثال 1

أحدّد إذا كان الزوج المُرتَّب يُمثّل حلاً للمتباينة: $x - y \leq 3$ في كلٍّ مما يأتي:

1 (1, 2)

أعوّض الزوج المُرتَّب (1, 2) في المتباينة:

$$x - y \leq 3$$

المتباينة الخطية

$$1 - 2 \leq 3$$

بالتعويض

$$-1 \leq 3 \quad \checkmark$$

الناتج صحيح

ألاحظ أنّه عند تعويض الزوج المُرتَّب في المتباينة، فإنّ الناتج يكون صحيحاً. إذن، الزوج المُرتَّب (1, 2) يُمثّل حلاً لها.

أُتذكّر

تكون جميع الأعداد الحقيقية التي تزيد على العدد a حلاً للمتباينة: $x > a$ ، وتكون جميع الأعداد الحقيقية التي تزيد على (أو تساوي) العدد a حلاً للمتباينة: $x \geq a$.

نتائج الدرس



- تحديد إذا كان زوج مُرتَّب مُعيّن حلاً للمتباينة.
- حل متباينة خطية بمتغيرين بيانياً.

نتائج التعلّم القبلي:

- تعرّف مفهوم المتباينة، وتمثيلها على خط الأعداد.
- حل متباينات خطية بمتغير واحد جبرياً، وتمثيل حلها على خط الأعداد.
- تمثيل معادلة خطية بمتغيرين بيانياً.
- تمثيل متباينة خطية بمتغيرين بيانياً.

مراجعة التعلّم القبلي:

- أوّجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبطة بما سيقدّم من موضوعات الدرس في الحصة (إن وُجدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدرّياتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

التهيئة

1

- أصفّ للطلبة عدداً مجهولاً في متباينة، ثم أطلب إليهم كتابة المتباينة التي تُعبّر عن هذا الوصف وحلها.

مثال:

أفكّر في العدد n الذي إذا ضاعفته، وطرحته من الناتج 4، فإنني أحصل على عدد أكبر من أو يساوي 10

- أكرّر النشاط بوصف أعداد أخرى للطلبة.

- أوجه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم)، ثم أسألهم:
- ◀ إلى كم حبة خرز تحتاج نهى لصنع السوار الواحد؟ **10 حبات**.
- ◀ إلى كم حبة خرز تحتاج نهى لصنع الطوق الواحد؟ **45 حبة**.
- ◀ كم حبة خرز توجد مع نهى؟ **214 حبة**.
- ◀ ما عدد المجاهيل في المسألة؟ **مجهولان**.
- ◀ أصف هذين المجهولين. **عدد الأساور، وعدد الأطواق**.
- ◀ كيف يمكن لنهى تحديد عدد الأطواق والأساور التي تريد صنعها من 214 حبة خرز؟ **إجابة مُحتملة: بكتابة متباينة تُعبر عن المسألة، ثم حلها**.
- ◀ كم سوارًا وطوقًا يمكنها أن تصنع من 214 حبة خرز؟
- أخبر الطلبة أنهم سيتعرفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أعزز الإجابات الصحيحة.
- المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ لذا لا يجب أن أقول لأحد الطلبة: "إجابتك خطأ"، بل أقول له: "لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمن يستطيع إعطاء إجابة أخرى؟"، أو أقول له: "هذه إجابة صحيحة لغير هذا السؤال".

- أذكر الطلبة بمفهوم المتباينة الخطية بمتغيرين، ثم أعطي أمثلة عليها.
- أيقن للطلبة أن الزوج المرتب يمثل حلاً للمتباينة إذا كانت المتباينة الناتجة صحيحة عند تعويض إحداثي الزوج المرتب في المتباينة. وخلافًا لذلك، فإنه لا يكون حلاً.
- أذكر الطلبة بكيفية اختبار إذا كانت نقطة معطاة تمثل حلاً لمعادلة خطية بمتغيرين أم لا.
- أناقش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح، مؤكّدًا ضرورة تبرير خطوات الحل.

2 (7, 3)

أعوّض الزوج المرتب (7, 3) في المتباينة:

$$x - y \leq 3$$

المتباينة الخطية

$$7 - 3 \leq 3$$

بالتعويض

$$4 \leq 3 \quad \times$$

الناتج غير صحيح

ألاحظ أنه عند تعويض الزوج المرتب في المتباينة، فإن الناتج لا يكون صحيحًا. إذن، الزوج المرتب (7, 3) لا يمثل حلاً لها.

3 (2, -1)

أعوّض الزوج المرتب (2, -1) في المتباينة:

$$x - y \leq 3$$

المتباينة الخطية

$$2 - (-1) \leq 3$$

بالتعويض

$$3 \leq 3 \quad \checkmark$$

الناتج صحيح

ألاحظ أنه عند تعويض الزوج المرتب في المتباينة، فإن الناتج يكون صحيحًا. إذن، الزوج المرتب (2, -1) يمثل حلاً لها.

تحقق من فهمي

أحدد إذا كان الزوج المرتب يمثل حلاً للمتباينة: $x + 2y > 1$ في كل مما يأتي:

a) (2, 3)

b) (1, -2)

c) (1, 0)

عند تمثيل المتباينة الخطية بيانيًا في المستوى الإحداثي، فإن النقاط التي تمثل جميع حلولها الممكنة تُسمى **منطقة الحلول الممكنة** (feasible region). لتمثيل المتباينة بيانيًا، أبدأ برسم مستقيم المعادلة المرافقة للمتباينة، التي أحصل عليها باستبدال الرمز $(>, <, \geq, \leq)$ بـ $(=)$ ، حيث تمثل المعادلة الناتجة مستقيمًا يُسمى **المستقيم الحدودي** (boundary line)؛ وهو مستقيم يُقسّم المستوى الإحداثي إلى جزأين، أحدهما منطقة الحلول الممكنة.

رموز رياضية

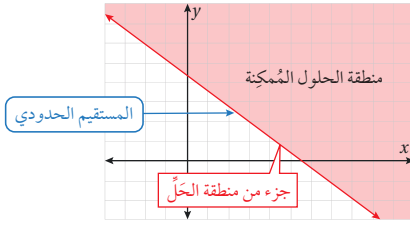
يمكن استعمال رموز عديدة للدلالة على عدم تحقق المتباينة. فمثلًا، للتعبير عن عدم تحقق (أقل) أو (يساوي)، يمكن استعمال أحد الرمزتين الآتيتين: $\nless, \nless$

- a) يُمثل الزوج المرتب حلاً للمتباينة.
- b) لا يُمثل الزوج المرتب حلاً للمتباينة.
- c) لا يُمثل الزوج المرتب حلاً للمتباينة.

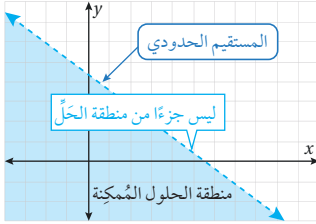
إرشادات:

- يُفضّل استعمال الأقلام الملونة أثناء شرح المثال 1، في خطوة تعويض إحداثي الزوج المرتب؛ لما لذلك من أثر في تحفيز الطلبة على تخيل عملية التعويض، وبخاصة أولئك الذين يتمتعون بذلك بصري.
- أناقش الطلبة في الأفكار الواردة في الصناديق الهامشية؛ لما لها من أهمية في تعزيز مفاهيم الدرس.

قد يكون المستقيم الحدودي جزءاً من منطقة الحلول الممكنة إذا تضمنت المتباينة الرمز $\geq$ أو الرمز $\leq$ ، عندئذ يُرسم المستقيم الحدودي متصلاً كما في الشكل الآتي:



وقد لا يكون المستقيم الحدودي جزءاً من منطقة الحلول الممكنة إذا تضمنت المتباينة الرمز $>$ أو الرمز $<$ ، عندئذ يُرسم المستقيم الحدودي مُتقطعاً كما في الشكل الآتي:



لتحديد أي المنطقتين على جانبي المستقيم الحدودي هي منطقة الحلول الممكنة، أختار أي نقطة (a, b) لا تقع على المستقيم الحدودي، ثم أعوضها في المتباينة الخطية، فإذا كانت تُحقّقها (أي ينجم عنها نتيجة صحيحة)، أظلل الجزء من المستوى الإحداثي الذي تقع فيه تلك النقطة، وإلا أظلل الجزء الآخر الذي لا تقع فيه تلك النقطة.

مثال 2

أمثل المتباينة الخطية: $2x + 3y < 6$ في المستوى الإحداثي.

الخطوة 1: أمثل المستقيم الحدودي.

أمثل المستقيم الحدودي: $2x + 3y = 6$ بيانياً، ثم

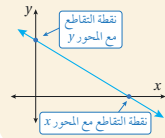
أنشئ جدول قيم لإيجاد نقاط تقاطع المستقيم مع

المحورين:

x	0	3
y	2	0

أنذّر

لتمثيل معادلة خطية بمتغيرين في المستوى الإحداثي، أجد نقطة تقاطع المستقيم مع المحور x بتعويض $y = 0$ في المعادلة، ثم أجد نقطة تقاطعه مع المحور y بتعويض $x = 0$ في المعادلة، ثم أصل بين نقطتي التقاطع بمستقيم كما في الشكل الآتي:



أخطاء شائعة: قد يُخطئ بعض الطلبة في تحديد إذا كان الزوج المرتب يمثل حلاً للمتباينة أم لا، وذلك بتعويض الإحداثي x للزوج المرتب مكان المتغيّر y في المتباينة، وتعويض الإحداثي y للزوج المرتب مكان المتغيّر x في المعادلة؛ لذا أطلب إلى الطلبة كتابة كل متغيّر فوق الإحداثي المناسب له في الزوج المرتب.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية، واللغة الإنجليزية، مُحفّزاً الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (أتحقّق من فهمي) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم من أخطأ في الإجابة؛ تجنباً لإحراجة.

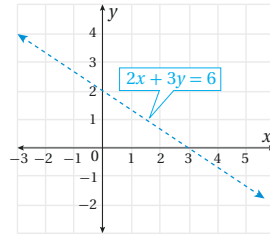
• أخبر الطلبة أن (منطقة الحلول المُمكنة) هي منطقة تقع في المستوى الإحداثي، وتحتوي جميع الحلول المُمكنة للمتباينة، ثم أُبين لهم معنى المستقيم الحدودي (الخط المستقيم الناتج من استبدال رمز المتباينة إلى مساواة)، وأنه يُقسّم المستوى الإحداثي إلى منطقتين؛ إحداهما بالضرورة هي منطقة الحلول المُمكنة.

• أوضح للطلبة أنه لتحديد منطقة الحلول المُمكنة، فإنني أختار أي نقطة في إحدى المنطقتين، ثم أعرضها في المتباينة. فإذا تحققت المتباينة كانت تلك المنطقة هي منطقة الحلول المُمكنة، مؤكداً معنى وجود المساواة أو عدم وجودها في المتباينة، من حيث احتواء منطقة الحلول المُمكنة على المستقيم الحدودي أو لا.

• أناقش الطلبة في حل المثال 2 على اللوح، مُبيّناً لهم أن البداية تكون دائماً بتمثيل المستقيم الحدودي، وذلك بإيجاد نقطتين عليه، ثم تعويض أي نقطة غير واقعة على هذا المستقيم. فإذا تحققت المتباينة كانت المنطقة التي تحوي تلك النقطة هي منطقة الحلول المُمكنة. أمّا المستقيم الحدودي فإنه يكون جزءاً من منطقة الحلول المُمكنة في حال احتوت المتباينة على رمز المساواة.

• إن لزم الأمر، أناقش الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقق من تمكّنهم من مهارة تمثيل المتباينة الخطية بمتغيرين في المستوى الإحداثي.

✓ **إرشاد:** أذكر الطلبة بأنه يُمكن تمثيل المستقيم بنقطتين، وأن أسهل طريقة لتمثيل المعادلة الخطية هي إيجاد نقطتي تقاطع المستقيم مع المحورين الإحداثيين (إن أمكن).



بعد ذلك أُعَيّن النقطتين (3, 0) و (0, 2) في المستوى الإحداثي، ثم أرسّم مستقيماً يمرّ بهما. وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فإنّ المستقيم الحدودي يُرسّم مُتقطّعاً كما في الشكل المجاور.

الخطوة 2: أحدد منطقة الحلول المُمكنة.

أختار نقطة لا تقع على المستقيم الحدودي، مثل (1, -2)، ثم أتحقّق إذا كان الناتج صحيحاً أم لا عند تعويضها في المتباينة:

$$2x + 3y < 6$$

$$2(1) + 3(-2) < 6$$

$$-4 < 6 \quad \checkmark$$

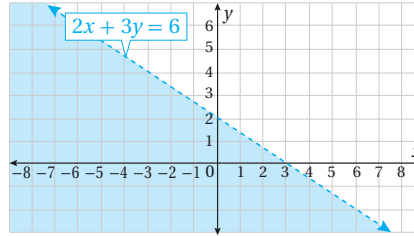
المتباينة الخطية

بالتعويض

الناتج صحيح

الخطوة 3: أظلل منطقة الحلول المُمكنة.

بما أن النقطة (1, -2) أفضت إلى ناتج صحيح للمتباينة، فإنني أظلل الجزء من المستوى الذي تقع فيه هذه النقطة كما في الشكل الآتي:



✍ **أتحقّق من فهمي** أنظر الهامش.

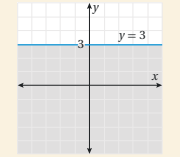
أُمثّل المتباينة الخطية: $4x - 5y \geq 20$ في المستوى الإحداثي.

إرشاد: أستمع أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

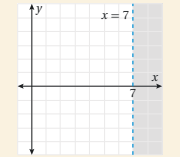
للمتباينات استعمالات كثيرة في المواقف العلمية والحياتية؛ إذ تساعدنا على اتخاذ القرار الأنسب المُتعلّق بتحديد القيم المُمكنة ضمن شروط مُحدّدة.

أندجّر

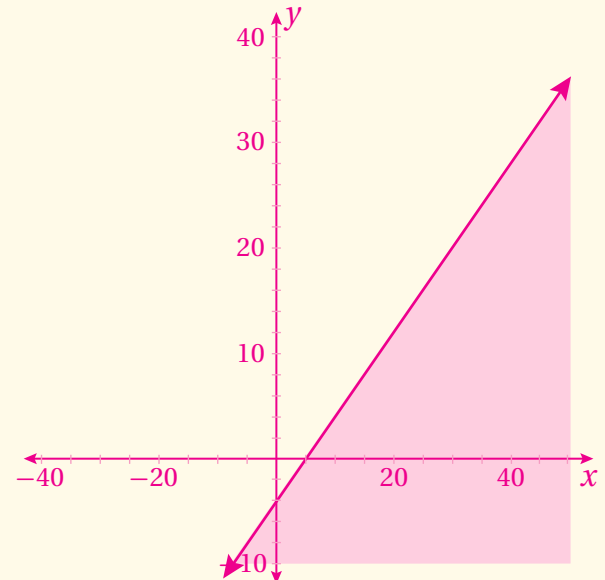
تُمثّل المتباينة الخطية ذات المتغير الواحد، مثل $y \leq 3$ ، كما في الشكل الآتي:



في حين تُمثّل المتباينة الخطية ذات المتغير الواحد، مثل $x > 7$ ، كما في الشكل الآتي:



إجابة الأسئلة في بند (أتحقّق من فهمي 2):



مثال 3: من الحياة



موقف: موقف سيارات مساحته 1400 m^2 ، وهو يتسع لعدد x من السيارات الصغيرة، وعدد y من السيارات الكبيرة. إذا كانت المساحة التي تقف عليها السيارة الصغيرة 14 m^2 ، والمساحة التي تقف عليها السيارة الكبيرة 35 m^2 ، فأجد عدد

السيارات الصغيرة والكبيرة التي يمكن أن يتسع لها هذا الموقف.

الخطوة 1: أعبر عن المسألة جبرياً بمتباينة خطية.

$$14x + 35y \leq 1400$$

الخطوة 2: أمثل المتباينة بيانياً.

أمثل بيانياً المستقيم الحدودي: $14x + 35y = 1400$. وبما أنه توجد مساواة في رمز المتباينة، فإن المستقيم يرسم متصلًا.

أختار أي نقطة، مثل $(20, 30)$ ، ثم أتحقق إذا كان الناتج صحيحاً أم لا عند تعويضها في المتباينة:

$$14x + 35y \leq 1400$$

$$14(20) + 35(30) \stackrel{?}{\leq} 1400$$

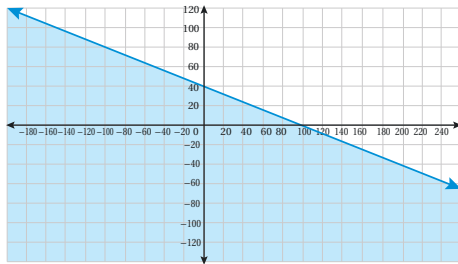
$$1330 \leq 1400 \quad \checkmark$$

المتباينة الخطية

بالتعويض

الناتج صحيح

بما أن النقطة $(20, 30)$ أفضت إلى ناتج صحيح للمتباينة، فإنني أظلل الجزء من المستوى الذي تقع فيه هذه النقطة كما في الشكل الآتي:



معلومة

تعدّ مواقف السيارات الطابقية أحد أهمّ الحلول لمشكلة تزايد عدد السيارات.

- أوضح للطلبة أهمية المتباينات الخطية بمتغيرين في المواقف العملية والحياتية، ثم أذكر بعض الأمثلة على ذلك.

- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة المثال 3، ثم أوضح للطلبة المعطيات والمطلوب، مُفترضاً أن عدد السيارات الصغيرة في هذا المثال هو x ، وأن عدد السيارات الكبيرة هو y .

- أناقش الطلبة في حل هذا المثال على اللوح.

إرشاد: أُبين للطلبة أن بعض المسائل العملية تتطلب حلولاً صحيحة موجبة كما في المثال 3، وأن المساحة التي ستستعمل للمواقف لا يُشترط بالضرورة أن تكون مساوية للمساحة الكلية المتوافرة، إلا أنها يجب أن تكون أقل من تلك المساحة، أو مساوية لها.

تنبيه: ألفت انتباه الطلبة إلى أنه عند محاولة إيجاد عدد السيارات الكبيرة والصغيرة التي سيتسع الموقف لها، فإن التمثيل البياني لن يكون دقيقاً بصورة كافية لتحديد العدد المطلوب؛ لذا يُستعمل الرسم دليلاً لإيجاد الأعداد الصحيحة المطلوبة عن طريق التعويض، والتحقق من صحة الإجابة.

المفاهيم العابرة للمواد:

أؤكد المفاهيم العابرة للمواد حيثما وردت في كتاب الطالب أو كتاب التمارين. ففي المثال 3، أعزز لدى الطلبة الوعي بالقضايا البيئية التي أهمها المشكلات المرورية، ثم أطلب إليهم البحث في شبكة الإنترنت عن السياسات التي تنتهجها الدول لحل المشكلات المرورية، وكتابة فقرة قصيرة عن ذلك.

في المثال 3، قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في التعبير عن المسألة اللفظية جبرياً بمتباينة؛ لذا أُنصحهم بعض الوقت، وأُقدّم لهم أمثلة سهلة عند اللزوم، مُنوّهاً إياهم بضرورة قراءة المسألة بَروية؛ ما يساعدهم على حل المسائل بسهولة.

التدريب



أَتَدَرَّبُ وَأَحُلُّ الْمَسَائِلَ



- أُوَجِّهُ الطَّلِبَةَ إِلَى بِنْدِ (أَتَدَرَّبُ وَأَحُلُّ الْمَسَائِلَ)، ثُمَّ أَطْلُبُ إِلَيْهِمْ حُلَّ الْمَسَائِلِ (1-20) ضَمَّنَ مَجْمُوعَاتٍ ثَنَائِيَّةٍ دَاخِلِ الْغُرْفَةِ الصَّفِيَّةِ؛ فَهَذِهِ الْمَسَائِلُ تَحْدِيدًا تَرْتَبِطُ ارْتِبَاطًا مُبَاشَرًا بِأَمْثَلَةِ الدَّرْسِ، وَهِيَ تُسْتَعْمَلُ خَاصَّةً لِتَدْرِيبِ الطَّلِبَةِ عَلَى الْمَفَاهِيمِ نَفْسَهَا، بِصَرَفِ النَّظَرِ عَمَّا إِذَا كَانَتِ الْأَسْئَلَةُ فَرْدِيَّةً أَمْ زَوْجِيَّةً.
- إِذَا وَاجَهَ الطَّلِبَةُ صُعُوبَةً فِي حُلِّ آيَةِ مَسْأَلَةٍ، فَإِنِّي أَخْتَارُ أَحَدَ الطَّلِبَةِ مِمَّنْ تَمَكَّنَ / تَمَكَّنَتْ مِنْ حُلِّ الْمَسْأَلَةِ؛ لِمُنَاقَشَةِ اسْتِرَاطِيَجِيَّتِهِ / اسْتِرَاطِيَجِيَّتِهَا فِي حُلِّ الْمَسْأَلَةِ عَلَى اللُّوْحِ، مُحَفِّزًا الطَّلِبَةَ عَلَى طَرَحِ أَيِّ تَسْأُولٍ عَنْ خُطُواتِ الْحُلِّ الْمُقَدَّمَةِ مِنَ الزَّمِيلِ / الزَّمِيلَةِ.

تنويع التعليم:

توسعة:

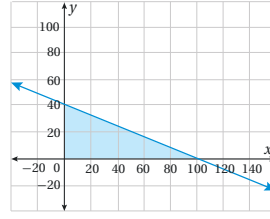
أَطْلُبُ إِلَى الطَّلِبَةِ الْمُتَمَيِّزِينَ كِتَابَةَ مَسْأَلَةٍ حَيَاتِيَّةٍ يُمَكِّنُ التَّعْبِيرَ عَنْهَا بِمُتَبَايِنَةٍ خَطِيَّةٍ بِمُتَغَيِّرَيْنِ.

مهارات التفكير العليا



- أُوَجِّهُ الطَّلِبَةَ إِلَى بِنْدِ (مَهَارَاتِ التَّفَكِيرِ الْعَلِيَا)، ثُمَّ أَطْلُبُ إِلَيْهِمْ حُلَّ الْمَسَائِلِ (24-26).

الخطوة 3: أُحَدِّدُ حَلَّ الْمَسْأَلَةِ.



أَلَا حِظُّ أَنْ يَفْهَمَ x وَ y يَجِبُ أَنْ تَكُونَ صَحِيحَةً وَمُوجِبَةً؛ لِأَنَّهَا تُمَثِّلُ أَعْدَادَ سَيَّارَاتٍ؛ مَا يُقْلَصُ مِنْطَقَةُ الْحُلُولِ الْمُمَكِّنَةِ كَمَا فِي الشَّكْلِ الْمَجَاوِرِ. أَلَا حِظُّ أَيْضًا أَنْ أَيْ نَقْطَةً إِحْدَاثِيَّاهَا عِدَدَانِ صَحِيحَانِ مُوجِبَانِ، وَتَقَعُ عَلَى الْمُسْتَقِيمِ الْحُدُودِيِّ، أَوْ ضَمَّنَ الْمَنْطَقَةِ الْمُظَلَّلَةِ الَّتِي تَظْهَرُ عَلَى شَكْلِ مِثْلٍ، تُعَدُّ حَلًّا. فَمِثْلًا، النِّقْطَةُ $(40, 20)$ تُمَثِّلُ حَلًّا لِلْمُتَبَايِنَةِ؛ لِأَنَّ الْمَسَاحَةَ الَّتِي تُشْغَلُهَا 40 سَيَّارَةً صَغِيرَةً وَ 20 سَيَّارَةً كَبِيرَةً 1260 m^2 ، وَهِيَ أَقَلُّ مِنْ مَسَاحَةِ مَوْقِفِ السَّيَّارَاتِ الْبَالِغَةِ 1400 m^2 .

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي أَنْظُرُ الْهَامِشَ.

مَطَاعِمُ: مَطْعَمٌ مَسَاحَتُهُ 64 m^2 ، وَهِيَ تَتَسَّعُ لِعِدَدِ x مِنَ الطَّاوِلَاتِ الصَّغِيرَةِ، وَعِدَدِ y مِنَ الطَّاوِلَاتِ الْكَبِيرَةِ. تُشْغَلُ الطَّاوِلَةُ الصَّغِيرَةُ مَسَاحَةً 2.5 m^2 ، وَتُشْغَلُ الطَّاوِلَةُ الْكَبِيرَةُ مَسَاحَةً 4 m^2 . أُجِدُ عِدَدَ الطَّاوِلَاتِ الصَّغِيرَةِ وَالْكَبِيرَةِ الَّتِي يُمَكِّنُ وَضْعَهَا فِي صَالَةِ الْمَطْعَمِ. إِرْشَادُ: اسْتَعْمَلْ أَوْرَاقَ الرَّسْمِ الْبَيَّانِيَّ الْمَوْجُودَةَ فِي نِهَآيَةِ كِتَابِ التَّمَارِينِ.

أَتَدَرَّبُ وَأَحُلُّ الْمَسَائِلَ

أُحَدِّدُ إِذَا كَانَ كُلُّ زَوْجٍ مُرْتَّبٍ مِمَّا يَأْتِي يُمَثِّلُ حَلًّا لِلْمُتَبَايِنَةِ: $x - 3y \geq 5$:

1 $(1, -2)$

يُمَثِّلُ الزَّوْجَ حَلًّا لِلْمُتَبَايِنَةِ.

4 $(-3, -4)$

يُمَثِّلُ الزَّوْجَ حَلًّا لِلْمُتَبَايِنَةِ.

7 $(0, 0)$

يُمَثِّلُ الزَّوْجَ حَلًّا لِلْمُتَبَايِنَةِ.

10 $(-2, -1)$

يُمَثِّلُ الزَّوْجَ حَلًّا لِلْمُتَبَايِنَةِ.

13 $8y + 3x < 2$

16 $5y - 8x \geq 1$

2 $(5, 0)$

يُمَثِّلُ الزَّوْجَ حَلًّا لِلْمُتَبَايِنَةِ.

5 $(-4, 0)$

لَا يُمَثِّلُ الزَّوْجَ حَلًّا لِلْمُتَبَايِنَةِ.

8 $(2, 2)$

لَا يُمَثِّلُ الزَّوْجَ حَلًّا لِلْمُتَبَايِنَةِ.

11 $(-2, -8)$

لَا يُمَثِّلُ الزَّوْجَ حَلًّا لِلْمُتَبَايِنَةِ.

14 $4x \leq 8$

17 $-3y < 12$

3 $(-4, 1)$

لَا يُمَثِّلُ الزَّوْجَ حَلًّا لِلْمُتَبَايِنَةِ.

6 $(5, 2)$

لَا يُمَثِّلُ الزَّوْجَ حَلًّا لِلْمُتَبَايِنَةِ.

9 $(4, 1)$

لَا يُمَثِّلُ الزَّوْجَ حَلًّا لِلْمُتَبَايِنَةِ.

12 $(-1, -6)$

لَا يُمَثِّلُ الزَّوْجَ حَلًّا لِلْمُتَبَايِنَةِ.

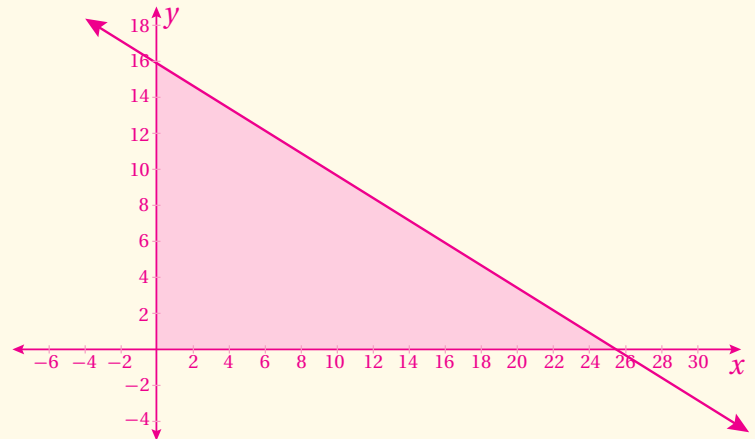
15 $2x - 9y \geq -3$

18 $6x + 3y > -5$

أُمَثِّلُ كُلًّا مِنَ الْمُتَبَايِنَاتِ الْخَطِيَّةِ الْآتِيَةِ فِي الْمُسْتَوَى الْإِحْدَاثِيَّ: (13-18)، أَنْظُرْ مِلْحَقَ الْإِجَابَاتِ.

إِجَابَةُ الْأَسْئَلَةِ فِي بِنْدِ (أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي 3):

$$2.5x + 4y \leq 64$$



أَقْبَلُ جَمِيعَ الْأَزْوَاجِ الْمُرتَّبَةِ (x, y) الَّتِي إِحْدَاثِيَّاتُهَا أَعْدَادُ صَحِيحَةٌ غَيْرُ سَالِبَةٍ وَوَاقِعَةٌ فِي مَنْطَقَةِ الْحُلِّ؛ لِأَنَّهَا تُمَثِّلُ أَعْدَادَ طَاوِلَاتٍ. أَلَا حِظُّ وَجُودَ أَكْثَرِ مِنْ حُلٍّ لِلْمَسْأَلَةِ، مِثْلُ: $(12, 8)$ ، $(0, 12)$ ، $(2, 2)$ ، $(2, 0)$ ، وَغَيْرِهَا كَثِيرٌ.

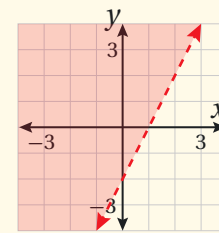
أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأُسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 22, 24 كتاب التمارين: (1-10)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (21-24) كتاب التمارين: 11, 12
فوق المتوسط	كتاب الطالب: 21, (24-26) كتاب التمارين: 13, 14

الإثراء

5

أطلب إلى الطلبة حل السؤال الآتي بوصفه إثراء لهم:



أكتب المتباينة الخطية
بمتغيرين، المعطى
تمثيلها البياني في
الشكل المجاور، مبرراً
إجابتي. $y > 2x - 2$.

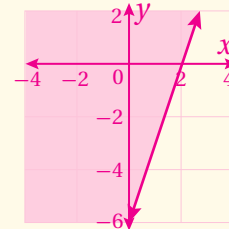
الختام

6

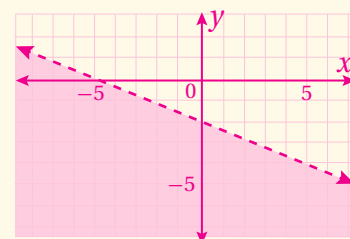
أتحقق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بطرح السؤال الآتي عليهم:

أُمثل كل متباينة خطية ممّا يأتي في المستوى الإحداثي:

1 $3x - y \leq 6$



2 $2x + 5y < -10$

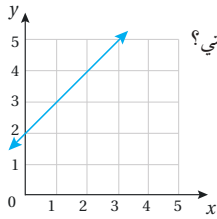


(19-21)، أنظر ملحق الإجابات.

19 اختيارات: تُمثّل المتباينة: $3x + 2y \geq 93$ عدد أسئلة الاختيار من مُتعدّد (x)، وأسئلة ملء الفراغ (y) التي يتعيّن على منى الإجابة عنها بصورة صحيحة لنيل درجة A في اختبار التربية الإسلامية. إذا أجابت منى إجابة صحيحة عن 20 سؤالاً من أسئلة الاختيار من مُتعدّد، وعن 18 سؤالاً من أسئلة ملء الفراغ، فهل ستنال درجة A في الاختبار؟

20 شاحنات: تستطيع شاحنة حمل 4000 kg من صناديق البضائع. إذا وُجد عدد x من الصناديق التي كتلة كلّ منها 50 kg، وعدد y من الصناديق التي كتلة كلّ منها 95 kg، فما عدد الصناديق التي يُمكن للشاحنة حملها من كلا النوعين؟ إرشاد: أستمع لأوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

21 أُمثل بيانياً منطقة حلّ المتباينة: $x + y < c$ حيث c عدد صحيح موجب.



22 أيّ جهتي المستقيم في الشكل المجاور تُمثّل منطقة حلّ المتباينة الآتية، مبرراً إجابتي؟

الجهة الواقعة تحت المستقيم الحدودي؛ لأنّ النقطة (0, 0)

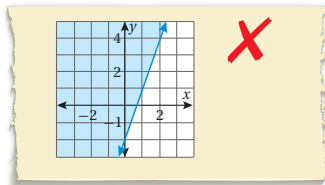
تُحقّق المتباينة، حيث 0 أصغر من أو يساوي $0 + 2$

23 أُلّحل المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

أنظر ملحق الإجابات.

مهارات التفكير العليا

24 أكتشف الخطأ: مثل سفيان المتباينة: $y \leq 3x - 2$ بيانياً على النحو الآتي:



الخطأ في تمثيل سفيان هو
تظليل المنطقة الأخرى التي
لا تُمثّل منطقة الحل.

أكتشف الخطأ في تمثيل سفيان، ثمّ أصحّحه.

25 تبرير: عند تمثيل متباينة خطية بمتغيرين بيانياً، لماذا تُختار فقط نقطة اختبار لا تقع على المستقيم الحدودي؟ أبرّر إجابتي. لأنّ جميع النقاط التي تقع على المستقيم الحدودي تُحقّق دائماً المعادلة المُربّطة بالمتباينة.

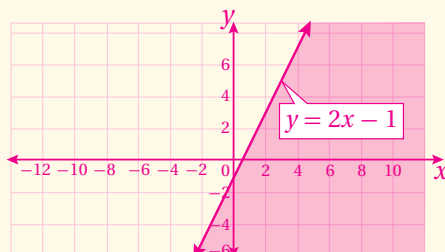
26 تحدّد: أكتب متباينة خطية بمتغيرين، بحيث تقع النقطتان (-2, -5) و (3, 5) على المستقيم الحدودي، وتقع النقطتان (2, 3) و (6, 5) في منطقة الحلول المُمكنة، ثمّ أُمثل المتباينة بيانياً. أنظر الهامش.

14

✓ إرشاد: في السؤال 24 (أكتشف الخطأ)، ألفت انتباه الطلبة إلى التحقق من أنّ المنطقة المُظلّلة تُمثّل منطقة الحلول المُمكنة للمتباينة أم لا.

إجابة الأسئلة في بند (أدرّب وأحل المسائل):

26) $y \leq 2x - 1$



حلّ نظام متباينات خطية بمتغيرين بيانيًا

Solving System of Linear Inequalities in Two Variables Graphically

حلّ نظام مُكوّن من متباينات خطية بمتغيرين بيانيًا.

فكرة الدرس

نظام المتباينات الخطية، مجموعة الحلّ.

المصطلحات

مسألة اليوم



تكلفة غسل السيارة الصغيرة ديناران.



تكلفة غسل السيارة الكبيرة 3 دنانير.

قدّم محلّ لتبديل زيوت السيارات عرضًا مجانيًا لغسل السيارات. إذا كان الحد الأقصى لذلك العرض هو غسل 30 سيارة يوميًا، بتكلفة لا تزيد على 75 دينارًا، فكم سيارة كبيرة وصغيرة يُمكن غسلها يوميًا بحسب هذا العرض؟

يتكوّن **نظام المتباينات الخطية** (system of linear inequalities) من متباينتين خطيتين أو أكثر. ويُطلَق على مجموعة الأزواج المُرتّبة التي تُحقِّق جميع المتباينات اسم **مجموعة الحلّ** (solution set). فمثلاً، يتكوّن النظام الآتي من ثلاث متباينات:

$$x + y < 2$$

المتباينة الأولى

$$-2x + y > -1$$

المتباينة الثانية

$$x - 3y \leq -2$$

المتباينة الثالثة

يُمثّل الزوج المُرتّب $(-1, 2)$ أحد حلول هذا النظام؛ لأنّه يُحقِّق المتباينات جميعها.

$$-1 + 2 = 1 < 2 \quad \checkmark$$

الزوج المُرتّب يُحقِّق المتباينة الأولى

$$-2(-1) + 2 = 4 > -1 \quad \checkmark$$

الزوج المُرتّب يُحقِّق المتباينة الثانية

$$-1 - 3(2) = -7 \leq -2 \quad \checkmark$$

الزوج المُرتّب يُحقِّق المتباينة الثالثة

لحلّ نظام متباينات، أمثّل كل متباينة فيه بيانيًا في المستوى الإحداثي نفسه، ثم أظلل المنطقة المشتركة بين مناطق حلّ المتباينات جميعها التي تُمثّل حلّ النظام.

أتعلّم

يوجد عدد لانهائي من الأزواج المُرتّبة التي تُحقِّق هذا النظام، وليس $(-1, 2)$ فقط.

لغة الرياضيات

تدل جملة (الزوج المُرتّب يُحقِّق متباينة) على أنّ الناتج يكون صحيحًا عند تعويض هذا الزوج في المتباينة.

نتائج الدرس

- تحديد إذا كان زوج مُرتّب مُعيّن حلًّا لنظام متباينات خطية.
- حل نظام متباينات خطية بمتغيرين بيانيًا.

نتائج التعلّم القبلي:

- حل متباينة خطية بمتغيرين.
- حل نظام معادلات خطية.
- تحديد إذا كان مستقيمان في المستوى الإحداثي متوازيين أو متقاطعين، وإيجاد نقطة تقاطعهما.

مراجعة التعلّم القبلي:

- أوّجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبطة بما سيقدّم من موضوعات الدرس في الحصة (إن وُجدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

التهيئة

1

- أكتب على اللوح نظامًا مُكوّنًا من معادلتين خطيتين بسيطتين، ونظامًا آخر مُكوّنًا من متباينتين خطيتين بسيطتين، ثم أسأل الطلبة:
 - ◀ ما الفرق بين النظامين؟ **أحد النظامين يتكوّن من معادلات، والآخر يتكوّن من متباينات.**
 - ◀ ماذا تعني عبارة (حل نظام المعادلات الخطية هندسيًا)؟ **تعني هذه العبارة أنّ الحل يُمثّل نقطة تقاطع الخطّين المستقيمين اللذين يُعبّران عن المعادلتين.**

- أطلب إلى الطلبة حل نظام المعادلات الخطية بيانيًا، ثم أسألهم:
 - ◀ ماذا تعني عبارة (حل نظام المتباينات الخطية هندسيًا)؟
- أخبر الطلبة أنّهم سيتعرّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أعزّز الإجابات الصحيحة.

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم)، ثم أسألهم:
 - ◀ ما تكلفة غسل السيارة الكبيرة؟ 3 دينار.
 - ◀ ما تكلفة غسل السيارة الصغيرة؟ ديناران.
 - ◀ ما الحد الأقصى للسيارات الذي يُمكن للمحل غسلها يومياً؟ 30 سيارة.
 - ◀ ما التكلفة التي حدّدها المحل لغسل السيارات مجّاناً؟ ألا تزيد تكلفة غسل السيارات على 75 ديناراً يومياً.
 - ◀ أكتب متباينتين خطيتين بمتغيّرين تُمثّلان الموقف المعطى. $x + y \leq 30, 3x + 2y \leq 75$.
 - ◀ كم سيارة كبيرة وصغيرة يُمكن غسلها يومياً بحسب هذا العرض؟
- أخبر الطلبة أنّهم سيتعرّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أعزّز الإجابات الصحيحة.

مثال 1

- أقدّم للطلبة مفهوم كلّ من نظام المتباينات الخطية، ومجموعة حل النظام.
- أكتب على اللوح نظام المتباينات الوارد في الفقرة التي تسبق المثال 1، ثم أسأل الطلبة:
 - ◀ من كم متباينة يتكوّن هذا النظام؟ من ثلاث متباينات.
 - ◀ كيف يُمكن التأكد أنّ زوجاً مُرتّباً يُحقّق نظام المتباينات أم لا؟ بتعويض الزوج المُرتّب في المتباينات الثلاث، والتأكد أنّه يُحقّق المتباينات الثلاث جميعها.
- أطلب إلى الطلبة التحقق من أنّ الزوج المُرتّب $(-1, 2)$ يُمثّل حلاً لنظام المتباينات أم لا، وأقدّم لهم التغذية الراجعة أثناء ذلك.
- أطلب إلى الطلبة التحقق من أنّ الزوج المُرتّب $(1, 0)$ يُمثّل حلاً لنظام المتباينات أم لا، وأقدّم لهم التغذية الراجعة أثناء ذلك.
- أسأل الطلبة:
 - ◀ هل الزوج المُرتّب $(-1, 2)$ هو الزوج المُرتّب الوحيد الذي يُحقّق نظام المتباينات؟ لا.
- ألفت انتباه الطلبة إلى وجود عدد لانهائي من الأزواج المُرتّبة التي تُحقّق هذا النظام.
- أوضح للطلبة أنّ حل نظام من المتباينات الخطية يتطلّب تمثيل كل متباينة في النظام بيانياً في المستوى الإحداثي نفسه، ثم تظليل المنطقة المُشتركة بين جميع مناطق حلول المتباينات التي تُكوّن النظام.

- أُنَاقِشُ الطالبة في حل المثال 1 على اللوح، مُؤكِّدًا لهم أنَّ حل نظام من المتباينات الخطية يتطلب تحديد منطقة الحلول المُمكنة لكل متباينة، وذلك بتمثيل المستقيم الحدودي للمتباينة، ثم اختبار نقطة من خارج المستقيم بأنَّها تُحقِّق المتباينة أم لا.

- إنَّ لزم الأمر، أُنَاقِشُ الطالبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقق من إتقانهم مهارة حل نظام متباينات خطية بمتغيَّرين بيانيًا.

إرشادات:

- أَسْتَعْمَلُ لونين مختلفين لتظليل منطقتي الحلول المُمكنة للمتباينتين، مُؤكِّدًا معنى تقاطع المناطق (المنطقة المُظلَّلة باللونين).
- أُنَاقِشُ الطالبة في الأفكار الواردة في الصناديق الهامشية؛ لِمَا لها من أهمية في تعزيز مفاهيم الدرس.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطالبة حل التدريب الوارد في بند (أتحقق من فهمي) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَنْ أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

مثال 1

أمثل منطقة حل نظام المتباينات الآتي، ثم أتحقق من صحة الحل:

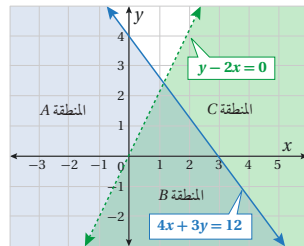
$$4x + 3y \leq 12$$

$$y - 2x < 0$$

الخطوة 1: أمثل المستقيمين الحدوديين.

$$4x + 3y = 12$$

$$y - 2x = 0$$



أمثل بيانيًا المستقيمين الحدوديين في المستوى الإحداثي نفسه، وأستعمل لونين مختلفين لتظليل منطقتي الحل كما في الشكل المجاور.

أنذُر

إذا تضمَّنت المتباينة رمز < أو رمز >، فإنَّ المستقيم الحدودي لا يدخل ضمن منطقة الحل، ويكون تمثيله بخط مُتقطع.

الخطوة 2: أحدد منطقة التقاطع بين حلَي المتباينتين.

ألاحظ أنَّ حلَّ المتباينة: $4x + 3y \leq 12$ هو المنطقتان A وB، وأنَّ حلَّ المتباينة: $y - 2x < 0$ هو المنطقتان B وC. إذن، المنطقة B المشتركة بين منطقتي حلَّ المتباينتين هي منطقة حلَّ نظام المتباينات.

الخطوة 3: أتحقق من صحة الحل.

أتحقق من صحة الحلَّ باختيار زوج مُرتَّب يقع في منطقة حلَّ النظام (المنطقة B)، مثل $(-1, 2)$ ، ثم أ عوضه في متباينات النظام جميعها:

$$4x + 3y \leq 12$$

$$4(-1) + 3(2) \leq 12$$

$$5 \leq 12 \quad \checkmark$$

$$y - 2x < 0$$

$$-1 - 2(2) < 0$$

$$-5 < 0 \quad \checkmark$$

المتباينة الأولى

بالتعويض

الناتج صحيح

المتباينة الثانية

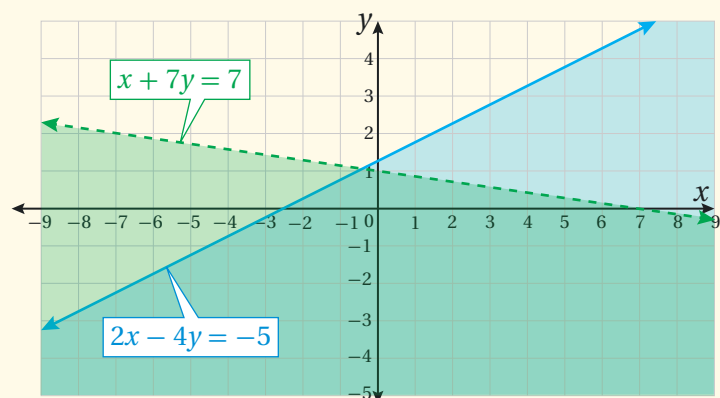
بالتعويض

الناتج صحيح

أنذُر

يجب تعويض الحلَّ في جميع متباينات النظام؛ لكيلا يكون الحلَّ غير صحيح، بحيث يُحقَّق إحدى المتباينات من دون الأخريات.

إجابة الأسئلة في بند (أتحقق من فهمي 1):



أتحقق من فهمي

أمثل منطقة حلّ نظام المتباينات الآتي، ثم أتحقق من صحة الحلّ:

$$2x - 4y \geq -5$$

$$x + 7y < 7$$

إرشاد: أستعمل أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

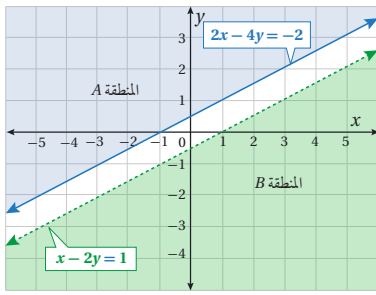
لا يكون لنظام المتباينات حلّ أحياناً؛ لعدم وجود منطقة مشتركة بين مناطق حلّ المتباينات المكوّنة له، عندئذ تكون مجموعة الحلّ هي المجموعة الخالية.

مثال 2

أمثل منطقة حلّ نظام المتباينات الآتي:

$$2x - 4y \leq -2$$

$$x - 2y > 1$$



أمثل بيانياً المستقيمين الحدوديين

الآتيين في المستوى الإحداثي نفسه:

$$2x - 4y = -2$$

$$x - 2y = 1$$

وأستعمل لونين مختلفين لتظليل

منطقتي الحلّ كما في الشكل

المجاور.

ألاحظ أنّ حلّ المتباينة: $2x - 4y \leq -2$ هو المنطقة A، وأنّ حلّ المتباينة: $x - 2y > 1$ هو المنطقة B، وأنّه لا يوجد تقاطع بين منطقتي حلّ المتباينتين. إذن، حلّ النظام هو المجموعة الخالية $\emptyset$.

أتحقق من فهمي

أمثل منطقة حلّ نظام المتباينات الآتي:

$$5x - 2y < 3$$

$$2.5x - y \geq 2$$

إرشاد: أستعمل أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

أندكر

يُرمز إلى المجموعة الخالية بالرمز $\{\}$ ، أو الرمز $\emptyset$ (تقرأ: فاي)، وهي مجموعة لا يوجد فيها عناصر.

أتعلم

ألاحظ في المثال 2 عدم وجود منطقة حلّ مشتركة؛ لأنّ المستقيمين الحدوديين متوازيان.

• أدكر الطلبة بمعنى المستقيمات المتوازية، وكيف يمكن تحديد إذا كان الخطان المعطيان متوازيين أم لا.

• أناقش الطلبة في مثال بسيط على نظام مُكوّن من معادلتين خطيتين، بحيث لا يكون فيه للنظام حل، مثل: $x + y = 1$, $2x + 2y = 3$ ، ثم أذكر للطلبة سبب عدم وجود حل لهذا النظام هندسياً؛ وهو أنّ المستقيمين اللذين يمثّلان النظام متوازيان، ولا يتقاطعان.

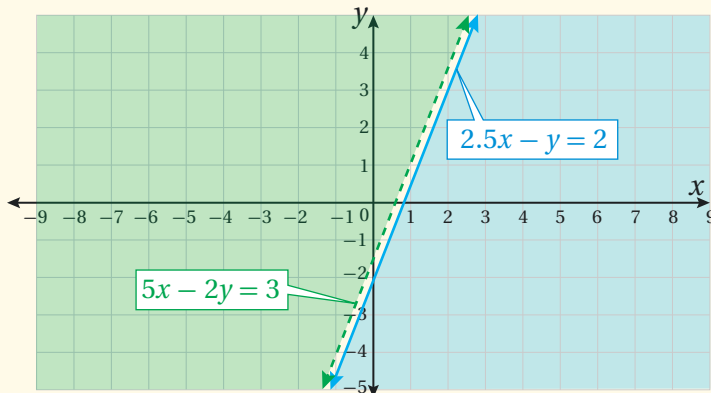
• أوضّح للطلبة أنّه لا يوجد حل لبعض أنظمة المتباينات الخطية؛ إذ لا يوجد تقاطع بين مناطق الحلول المُمكنة لجميع المتباينات.

• أناقش الطلبة في حل المثال 2 على اللوح، بدءاً بسؤالهم عن العلاقة بين المستقيمين الحدوديين للمتباينتين، من حيث إنهما متوازيان أم لا، ثم ألفت انتباههم - بعد تمثيل المتباينتين بيانياً - إلى ملاحظة أنّه لا يوجد تقاطع بين منطقتي حل المتباينتين.

إرشاد: أوضّح للطلبة معنى عدم وجود نقاط مشتركة بين منطقتي الحلول المُمكنة للمتباينتين؛ وهو عدم وجود أيّ نقاط تُحقّق المتباينتين معاً، ومن ثمّ عدم وجود حل للنظام.

إجابة الأسئلة في بند (أتحقق من فهمي 2):

لا يوجد حل للنظام بسبب عدم وجود منطقة مشتركة.



تنبيه: أنبّه الطلبة أنّه إذا كان المستقيمان الحدوديان متوازيين، فإنّ ذلك لا يعني بالضرورة عدم وجود حل لنظام المتباينات؛ إذ يعتمد ذلك على موقع الخطين، وإشارات المتباينات.

مثال 3

- أَوْصَحْ للطلبة أَنَّ ما تَعَلَّمُوهُ في المِثَالين الأوَّلَين يُمَثَّلُ طريقة عامة لحل أيّ نظام من المتباينات الخطية بِمُتَغَيِّرَين، بِصَرفِ النظر عن عدد المتباينات.
- أُنَاقِشْ الطلبة في حل المِثال 3 على اللوح، بِأَنَّ أَطْلُبْ إلى ثلاثة منهم تمثيل المستقيمات الحدودية الثلاثة للمتباينات المعطاة، ثم تحديد كلٍّ منهم منطقة الحل لمتباينة منها.
- أَظْلِلْ المنطقة المُشترَكة (منطقة التقاطع) بين مناطق الحلول الثلاث التي حدَّدها الطلبة أوَّلًا.
- أَطْلُبْ إلى أحد الطلبة إيجاد نقطة في المنطقة المُشترَكة، ثم تعويضها في المتباينات الثلاث؛ للتأكَّد أنَّها حقَّقتها.
- إنْ لَزِمَ الأمر، أُنَاقِشْ الطلبة في مزيد من الأمثلة؛ للتحقُّق من إتقانهم مهارة حل نظام متباينات خطية بِمُتَغَيِّرَين بيانيًا.

إرشاد: أذكِّر الطلبة بأنَّ المستقيم $x = c$ هو دائماً مستقيم عمودي.

مثال إضافي:

أمثل بيانيًا منطقة حل نظام المتباينات الآتي:

$$y > x - 3$$

$$4x + 3y < 24$$

$$x \geq 2$$

منطقة حل هذا النظام هي المنطقة F ؛ لأنَّ حل المتباينة $x \geq 2$ هو المناطق: A, F, G, E ؛ وحل المتباينة $4x + 3y < 24$ هو المناطق: C, D, E, F ؛ وحل المتباينة $y > x - 3$ هو المناطق: A, B, C, F . أمَّا المنطقة المشتركة بين جميع الحلول فهي F .

قد يحوي النظام أكثر من متباينتين، عندئذٍ تكون منطقة الحل هي المنطقة المشتركة بين مناطق حل المتباينات جميعها.

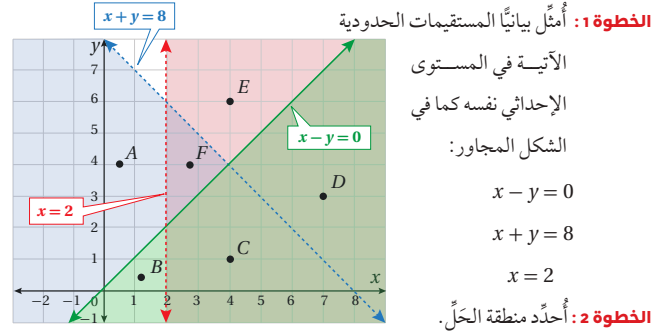
مثال 3

أمثل بيانيًا منطقة حل نظام المتباينات الآتي:

$$x - y \geq 0$$

$$x + y < 8$$

$$x > 2$$



أظلل منطقة حل المتباينة: $x + y < 8$ باللون الأزرق، وهي المناطق: A, B, C, F .

أظلل منطقة حل المتباينة: $x - y \geq 0$ باللون الأخضر، وهي المناطق: B, C, D .

أظلل منطقة حل المتباينة: $x > 2$ باللون الأحمر، وهي المناطق: C, D, E, F .

ألاحظ أنَّ المنطقة C هي المنطقة المشتركة بين مناطق حل المتباينات الثلاث. إذن، هي منطقة حل النظام.

أتحقَّق من فهمي

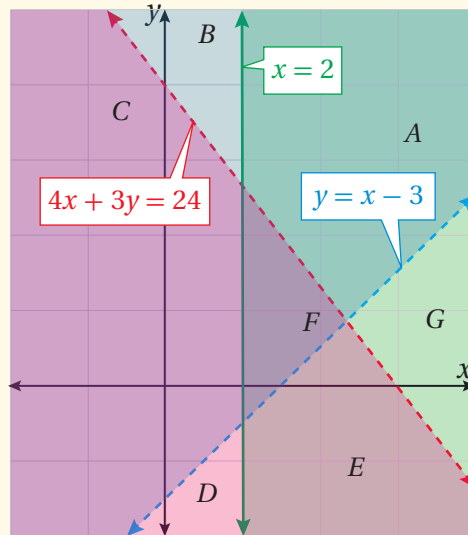
أمثل بيانيًا منطقة حل نظام المتباينات الآتي:

$$-3x + 4y \geq 9$$

$$x - 5y > 6$$

$$2x - 5y < -3$$

إرشاد: أستخدم أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.



تُستعمل أنظمة المتباينات الخطية في عديد من المجالات والتطبيقات الحياتية، ويُمكن بها تحديد القيم المُمكنة للمتغيرات وفق شروط مُحددة.



مثال 4: من الحياة

كرة قدم: في دوري كرة القدم المدرسي، يحصل الفريق الفائز على 3 نقاط، ويحصل الفريق المتعادل على نقطة واحدة، ولا يحصل الفريق الخاسر على أي نقطة.



أقيمت أول بطولة لكأس العالم في كرة القدم بالأوروغواي عام 1930م.

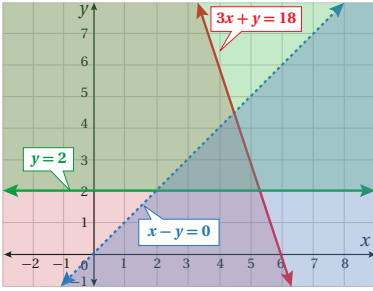
إذا فاز فريق مدرسة سلمان في x من المباريات، وتعادل في y من المباريات، وجمع منها 18 نقطة على الأكثر، وكان عدد مرّات فوزه أكثر من عدد مرّات تعادله، وتعادل مرّتين على الأقل؛ فأجد العدد المُمكن من المباريات التي فاز فيها الفريق، والعدد المُمكن من المباريات التي تعادل فيها الفريق.

الخطوة 1: أُعبر عن المسألة جبرياً بنظام من المتباينات الخطية.

أفترض أن عدد مرّات الفوز هو x ، وأن عدد مرّات التعادل هو y ، ثم أكتب نظام المتباينات الخطية المرتبط بالشروط الواردة في نص المسألة:

$$\begin{aligned} 3x + y &\leq 18 && \text{عدد نقاط الفوز والتعادل 18 على الأكثر} \\ x &> y && \text{عدد مرّات الفوز أكثر من عدد مرّات التعادل} \\ y &\geq 2 && \text{تعادل الفريق مرّتين على الأقل} \end{aligned}$$

الخطوة 2: أمثل نظام المتباينات الخطية بيانياً.



أمثل بيانياً المستقيمات الحدودية الآتية على المستوى الإحداثي نفسه:

$$\begin{aligned} 3x + y &= 18 \\ x - y &= 0 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

ثم أظلل منطقة الحَلّ لكل متباينة كما في الشكل المجاور.

- أوكد للطلبة أهمية المتباينات الخطية في الحياة العملية واليومية، ثم أذكر بعض الأمثلة على ذلك (يُمكن الاستعانة بالمسائل العملية الواردة في بند (أَتدرّب وأحل المسائل) في نهاية الدرس).
- أناقش الطلبة في حل المثال 4 على اللوح، مؤكّداً لهم ضرورة البدء بافتراض مُتغيّرات منطقية، وكتابة المُتغيّرات بوضوح، ثم أطلب إليهم ترجمة كل معطى من المعطيات إلى متباينة خطية.
- أبدأ حل النظام بحسب الخطوات التي تعلّمها الطلبة سابقاً.
- أبحث مع الطلبة عن نقطة إحداثياتها صحيحة داخل منطقة الحل.

إرشادات:

- أوّضح للطلبة المقصود بتركيب (على الأكثر) وتركيب (على الأقل) بلغة المتباينات.
- أوكد للطلبة أن الحل المطلوب هو حل يجب أن تكون فيه قيم المُتغيّرات أعداداً صحيحة موجبة.

تنبيه: ألفت انتباه الطلبة إلى إمكانية إيجاد أكثر من حل للمسائل المُشابهة للمثال 4، وذلك في حال وجود أكثر من نقطة إحداثياتها صحيحة داخل منطقة الحل.

تنويع التعليم:

في المثال 4، قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في التعبير عن المسألة اللفظية جبرياً بنظام من المتباينات الخطية؛ لذا أُنحهم بعض الوقت، وأُقدم لهم أمثلة سهلة عند اللزوم، مُنوّهاً إياهم بضرورة قراءة المسألة بِرَوِيّة؛ ما يساعدهم على حل المسائل بسهولة.

إجابة الأسئلة في بند (أتحقق من فهمي 4):

أفترض أن عدد الغزلان هو x ، وأن عدد الأيائل هو y .

بكتابة نظام المتباينات الذي يُمثّل المسألة:

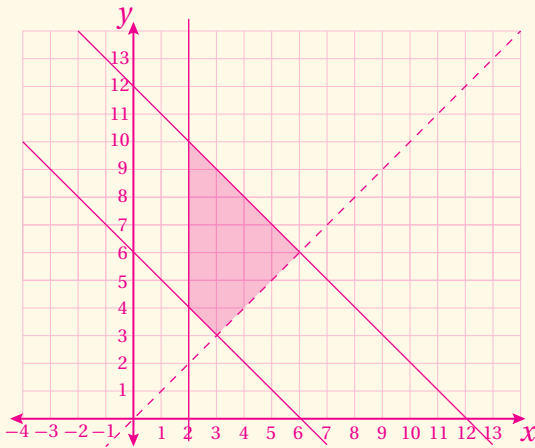
$$x + y \geq 6$$

$$x + y \leq 12$$

$$x < y$$

$$x \geq 2$$

بتمثيل النظام بيانياً:



(a) أقل عدد مُمكن من الأيائل هو أقل قيمة صحيحة للمتغير y ضمن منطقة الحل، بحيث تكون قيمة x المُقابلة صحيحة. وهذا يتحقّق عندما $y = 4$.

(b) أكبر عدد من الغزلان هو 5

ألاحظ أن مناطق الحُلّ تتقاطع في منطقة على شكل مثلث، هي منطقة حُلّ النظام، وأنه يُمكن اختيار نقطة مثل (3, 4) ضمن هذه المنطقة، والتأكد أنها تُحقّق المتباينات جميعها على النحو الآتي:

$$3x + y \leq 18$$

المتباينة الخطية الأولى

$$3(4) + 3 \leq 18$$

بالتعويض

$$15 \leq 18 \quad \checkmark$$

ناتج صحيح

$$x - y > 0$$

المتباينة الخطية الثانية

$$4 - 3 > 0$$

بالتعويض

$$1 > 0 \quad \checkmark$$

ناتج صحيح

$$y \geq 2$$

المتباينة الخطية الثالثة

$$3 \geq 2 \quad \checkmark$$

بتعويض قيمة y ، يكون الناتج صحيحاً

الخطوة 3: أحدد حُلّ المسألة.

أي نقطة تقع في منطقة الحُلّ تُعدّ حلاً لنظام المتباينات الخطية. وفي هذه الحالة، ولأن عدد المباريات يجب أن يكون صحيحاً؛ فإن النقطة (4, 3) تُمثّل أحد الحلول المُمكنة؛ ما يعني أن الفريق فاز بـ 4 مباريات، وتعادل في 3 مباريات، وجمع 15 نقطة.

أتحقق من فهمي

محميات: يوجد في محمية للحوانات مجموعة من الغزلان والأيائل، وقد أفاد الموظف الذي يُشرف على إطعامها والاعتناء بها أن:

- في المحمية 6 حيوانات على الأقل. **أنظر الهامش.**
- عدد الحيوانات في المحمية لا يزيد على 12 حيواناً.
- عدد الغزلان في المحمية أقل من عدد الأيائل.
- في المحمية اثنين من الغزلان على الأقل.

(a) ما أقل عدد مُمكن من الأيائل؟

(b) ما أكثر عدد مُمكن من الغزلان؟

إرشاد: أستخدم أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

لغة الرياضيات

a على الأكثر تُكافئ
 $x \leq a$ و b على الأقل
تُكافئ $x \geq b$.

أفكر

أكتب قائمة تحوي جميع النقاط التي يُمكن أن تكون حلولاً مُمكنة لنظام المتباينات الخطية في المثال 4.



تُعدّ محمية الغزلان في دبين ضمن إحدى أكبر المحميات الطبيعية في الأردن.

أُمَثِّلُ منطقة حَلِّ كُلِّ من أنظمة المتباينات الآتية: (1-9)، أنظر ملحق الإجابات.

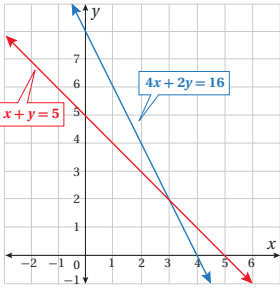
- 1 $x + 3y > 1$
 $5x - y \leq 2$
- 2 $-3x - 12y > -9$
 $x + 4y \geq 5$
- 3 $x - 11y < 6$
 $-2x + 22y > -12$
- 4 $3x + 5y \leq 1$
 $3x + 5y \leq 3$
- 5 $2x - 7y > 2$
 $2x - 7y \leq 2$
- 6 $13x - y < 11$
 $x + y \geq 0$
- 7 $9x - y < 2$
 $x + 3y > -1$
 $x - y > -3$
- 8 $5x - 5y < 2$
 $2x - 2y > 1$
 $x \geq y$
- 9 $x \leq y$
 $x - 5y < 6$
 $10x - y > 3$

إرشاد: أَسْتَعْمِلُ أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.



- 10 **سياحة:** تبلغ تكلفة تذكرة ركوب قارب سياحي دينارين للبالغين، ودينارًا واحدًا للأطفال، ويتسع القارب لـ 10 أشخاص على الأكثر. إذا كانت x تُمثِّل عدد البالغين، و y تُمثِّل عدد الأطفال، فكم شخصًا من البالغين والأطفال قد يوجد على متن القارب، علمًا بأن رُبْعَ بيع التذاكر أقل من 12 دينارًا؟
أنظر ملحق الإجابات.

- 11 **نقل جوي:** سعر تذكرة الدرجة السياحية للسفر بالطائرة بين مدينتي عمّان والعقبة 25 دينارًا، وسعر تذكرة الدرجة الخاصة 50 دينارًا. إذا كان رُبْعَ بيع التذاكر 1600 دينار على الأقل، وبيعت 50 تذكرة على الأكثر، فأجد عدد التذاكر المُمكن لكل درجة.
أنظر ملحق الإجابات.



- 12 أظُلِّلُ منطقة حَلِّ النظام الآتي من المتباينات في الشكل المجاور، ثم أكتب جميع حلول النظام المُمكنة، علمًا بأن x و y عدنان صحيحان موجبان:

$$x + y \geq 5$$

$$4x + 2y \leq 16$$

أنظر الهامش.

- أوجّه الطلبة إلى بند (أَتَدْرَبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1-11) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمدًا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أية مسألة، فإنني أختار أحد الطلبة ممن تمكّن/ تمكّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزًا الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدّمة من الزميل/ الزميلة.

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (أَتَدْرَبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ)، فإنني أضع كلاً منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المُتميّزين؛ ليتشاركوا في حل الأسئلة.

- أوجّه الطلبة إلى بند (مهارات التفكير العليا)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (15-18).

الواجب المنزلي:

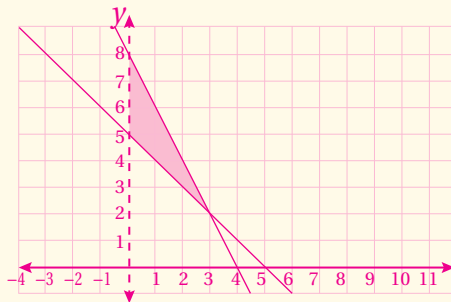
أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 12, 14 كتاب التمارين: (1-8)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (12-15) كتاب التمارين: 9, 10
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (15-18) كتاب التمارين: 11

إجابة الأسئلة في بند (أَتَدْرَبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ):

(12) (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (3,2)

تُمَثِّلُ الحلول الصحيحة الموجبة



- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الآتي بوصفه إثراء لهم:
- ◀ أكتب نظامًا من متباينتين خطيتين يكون حله:

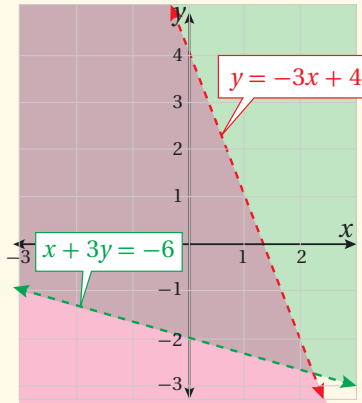
1 خطأً مستقيماً.

2 واقعاً في الربع الثالث.

- أتحقق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بطرح السؤال الآتي عليهم:
- ◀ أمثل منطقة الحل لكل نظام متباينات مما يأتي:

1 $y < -3x + 4$

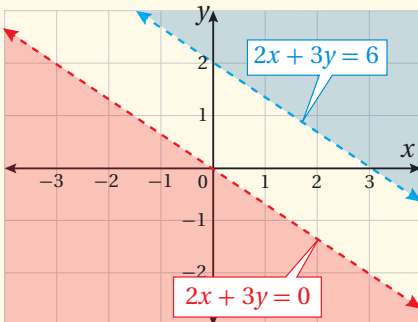
$x + 3y > -6$



منطقة الحل هي المنطقة التي تحوي مزيجاً من اللون الأخضر واللون الأحمر.

2 $2x + 3y \geq 6$

$2x + 3y \leq 0$



لا توجد منطقة حل لهذا النظام.

13 **جامعات:** أرادت سامية الالتحاق بجامعة تشترط عقد امتحاني قبول لذلك؛ أحدهما في مبحث الرياضيات، والآخر في مبحث اللغة الإنجليزية، وإحراز ما بين 900 نقطة و1200 نقطة في الامتحانين معاً؛ شرط ألا يقل المجموع في امتحان الرياضيات عن 600 نقطة، وألا يقل المجموع في امتحان اللغة الإنجليزية عن 200 نقطة. أجد عدد النقاط من مضاعفات المئة، التي يتعين على سامية إحرازها في كل امتحان لتقبل في الجامعة.

14 أخلّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

أنظر ملحق الإجابات.

مهارات التفكير العليا

15 **تبرير:** أصف منطقة حلّ نظام المتباينات الآتي من دون تمثيلها بيانياً:

$$2x + y \leq 7$$

$$2x + y \geq 7$$

الحل هو جميع النقاط الواقعة على المستقيم: $2x + y = 7$

مسألة مفتوحة: أكتب نظامين يتكوّن كلٌّ منهما من متباينتين خطيتين بمتغيرين، بحيث تكون مجموعة الحلّ:

$$x + y \leq 1$$

$$x + y \leq -1$$

16 مجموعة حل إحدى المتباينتين.

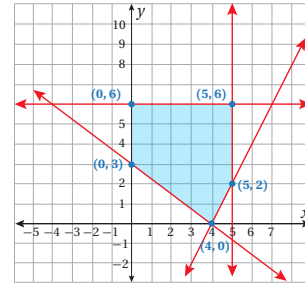
17 المجموعة الخالية.

$$x + y < 0$$

$$x + y > 0$$

18 **تحذّر:** أكتب نظام المتباينات الذي منطقة حلّه هي المنطقة المظللة في التمثيل البياني الآتي:

أنظر الهامش.



إرشادات:

- أوضح للطلبة أنه يوجد للمسألة المفتوحة عدد لانهاضي من الإجابات.
- في السؤال 18 (تحذّر)، أوجّه الطلبة إلى إيجاد معادلة الخط المستقيم المارّ بنقطتين معلومتين.

إجابة الأسئلة في بند (تدرّب وأحل المسائل):

18 معادلات المستقيمات الحدودية لهذه المنطقة هي:

$$x = 0, x = 5, y = 6, y = 2x - 8, y = -\frac{3}{4}x + 3$$

نظام المتباينات الذي منطقة حله هي المنطقة المظللة بالرسم هو:

$$x \geq 0, x \leq 5, y \leq 6, y \geq 2x - 8, y \geq -\frac{3}{4}x + 3$$

لأن النقطة (3, 2) الواقعة في منطقة الحلّ تحقق هذه المتباينات جميعها.

تمثيل نظام متباينات خطية بمتغيرين بيانيًا Graphing System of Linear Inequalities in Two Variables

يُمكن استعمال برمجية جيوجبرا لتمثيل نظام المتباينات الخطية بيانيًا في المستوى الإحداثي، وإيجاد منطقة الحل.

نشاط

أمثل بيانيًا نظام المتباينات الخطية الآتي باستعمال برمجية جيوجبرا، ثم أحدد منطقة الحل:

$$3x + 5y \leq 2$$

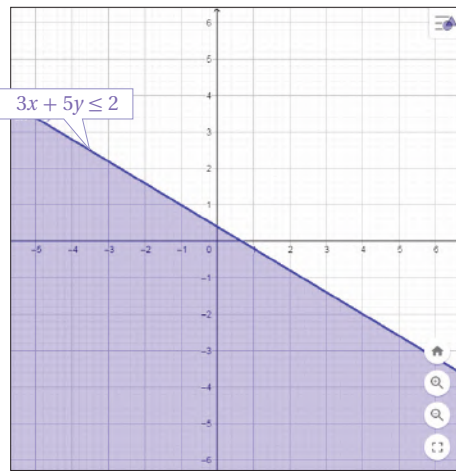
$$x + 5y > 4$$

الخطوة 1: أمثل المتباينة الأولى بيانيًا.

أكتب المتباينة الأولى في شريط الإدخال بنقر المفاتيح الآتية:

3 x + 5 y ≤ 2

ألاحظ أن برمجية جيوجبرا قد حدّدت منطقة باللون الأزرق. ماذا تعني هذه المنطقة بالنسبة إلى المتباينة؟



هدف النشاط:

استعمال برمجية جيوجبرا لتمثيل نظام المتباينات الخطية بيانيًا في المستوى الإحداثي، وإيجاد منطقة الحل.

المصادر والأدوات:

برمجية جيوجبرا.

خطوات العمل:

- أرافق الطلبة إلى مختبر الحاسوب، ثم أجلسهم في مجموعات صغيرة أمام أجهزة الحاسوب.
- أطلب إلى الطلبة فتح برمجية جيوجبرا من شبكة الإنترنت باستعمال الرابط الآتي:

<https://www.geogebra.org/classic?lang=ar>

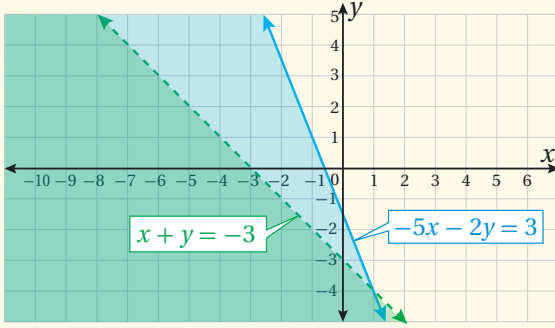
- أراجع الطلبة في أبرز أوامر البرمجية، مثل: تمثيل المعادلات، وتمثيل نظام من المعادلات.
- أطلب إلى الطلبة تنفيذ خطوات النشاط معًا، ثم أتجول بينهم، مُقدِّمًا المساعدة لمن يحتاج إليها.
- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الوارد في بند (أندرب) واجبًا منزليًا، مُؤكِّدًا لهم ضرورة استعمال خاصية طباعة الشاشة لحفظ أعمالهم، ثم عرضها عليّ إلكترونيًا أو مطبوعةً.

إرشاد:

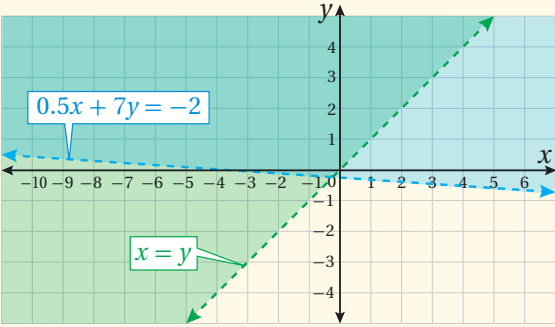
توفيرًا للوقت، يُمكنني تثبيت نسخة من هذه البرمجية المجانية في أجهزة الحاسوب قبل بدء الحصة.

إجابة الأسئلة في بند (أَتَدَرَّب):

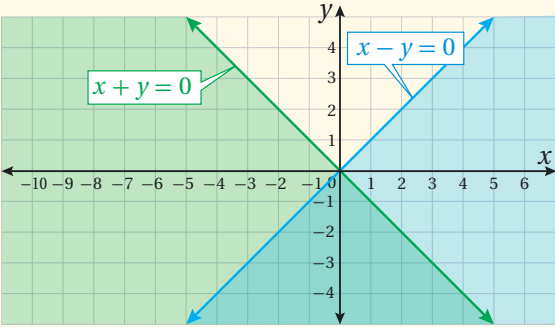
(1)



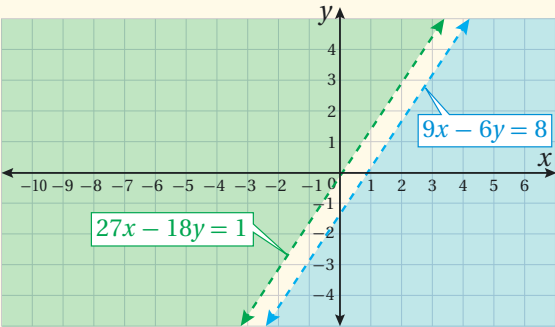
(2)



(3)



(4)



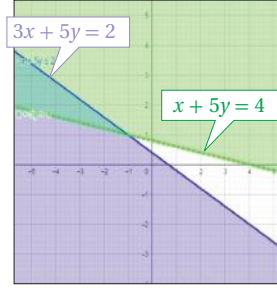
الخطوة 2: أمثل المتباينة الثانية بيانيًا.

أكتب المتباينة الثانية في شريط الإدخال بنقر المفاتيح الآتية:

$x + 5y > 4$

الخطوة 3: أغير اللون.

ألاحظ أن برمجية جيوجبرا قد حدّدت منطقة حلّ كلٍّ من المتباينتين باللون الأزرق؛ لذا يجب تغيير لون منطقة الحلّ لإحدى المتباينتين، لتمييز منطقة حلّ كل متباينة بلون مختلف.



أنقر المتباينة المراد تغيير لونها على يسار الشاشة، ولتكن المتباينة الثانية، ثم أنقر الرمز الذي بجانبها، وأختار (settings) ثم (color) من القائمة التي ظهرت يمين الشاشة، ومنها أختار لونًا آخر مثل الأخضر.

الخطوة 4: أفسر المناطق الظاهرة.

ألاحظ وجود أربع مناطق: الأولى باللون الأزرق، والثانية باللون الأخضر، والثالثة مزيج من اللونين معًا، والرابعة باللون الأبيض. ماذا تعني كل منطقة؟

أَتَدَرَّب

أمثل بيانيًا كلاً من أنظمة المتباينات الخطية الآتية باستعمال برمجية جيوجبرا، ثم أحدّد منطقة الحلّ:

1 $-5x - 2y \geq 3$

(1-4)، أنظر الهامش.

2 $0.5x + 7y > -2$

$x + y < -3$

$x < y$

3 $x - y \geq 0$

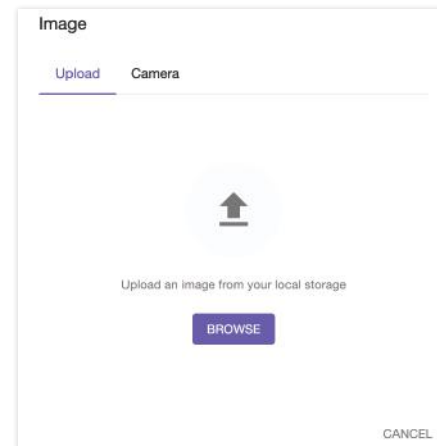
4 $9x - 6y > 8$

$x + y \leq 0$

$27x - 18y < 1$

إرشاد:

يُمكن التقاط الصورة مباشرة من دون تخزينها؛ إذ تظهر الشاشة الآتية عند الضغط على أيقونة Image ، فيختار الطالب/ الطالبة استدعاء صورة محفوظة مسبقًا، أو التقاط صورة مباشرة بالضغط على Camera، ثم التقاط الصورة، ثم الضغط على ok.



البرمجة الخطية
Linear Programming

نمذجة مواقف حياتية بمسألة يُمكن حلّها باستعمال طريقة البرمجة الخطية بيانياً.

القيود، البرمجة الخطية، منطقة الحلول المُمكنة، الاقتران الهدف، الحَلُّ الأمثل.

فكرة الدرس

المصطلحات

مسألة اليوم



نوع شتلة البندورة	A	B
الثمن بالدینار	0.2	0.3
أقل إنتاج مُتَوَقَّع	4 kg	5 kg

دخلت سلمى محلاً لبيع الأشتال، وأرادت شراء نوعين من شتلات البندورة، بما لا يزيد على 4 دنانير ثمناً لـ 15 شتلة على الأكثر. وقد أظهرت اللوحة المجاورة المُعلَّقة داخل المحلّ معلومات عن النوعين. كم شتلة ستشتري سلمى من كل نوع لإنتاج أكبر كمّ مُمكن من البندورة؟

البرمجة الخطية (linear programming) هي طريقة تعتمد التمثيل البياني في المستوى الإحداثي لإيجاد أكبر قيمة مُمكنة (قيمة عظمى)، أو أصغر قيمة مُمكنة (قيمة صغرى) لاقتران يُسمّى **الاقتران الهدف** (objective function)، ضمن مجموعة **قيود** (constraints)، يُمثّل كلّ منها متباينة خطية. فيتمثل المتباينات الخطية (القيود) بتحدّد منطقة حلّ مشتركة لها تُسمّى **منطقة الحلول المُمكنة** (feasible region)، وفيها تتحقّق أكبر قيمة مُمكنة، أو أصغر قيمة مُمكنة للاقتران الهدف عند رؤوس المُضلع الذي يُحدّد منطقة الحلول المُمكنة.

تُعرّف البرمجة الخطية أيضاً بأنّها طريقة البحث عن **الحلّ الأمثل** (optimal solution)، وتتكوّن مسألتها ممّا يأتي:

① **الاقتران الهدف**: يكون في صورة: $P = ax + by$ ، حيث:

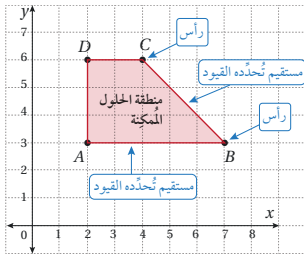
P : اسم الاقتران (مثل الربح).

a, b : عددين حقيقيين x, y : متغيران.

② **القيود**: نظام من المتباينات الخطية، وهي

تُكتب بدلالة المتغيرين x, y ، وتُحدّد

منطقة الحلول المُمكنة كما في الشكل المجاور.



نتائج التعلّم القبلي:

- تمثيل منطقة الحل لنظام المتباينات الخطية.
- إيجاد قيم اقتران معطى عند نقاط مُعيّنة.

مراجعة التعلّم القبلي:

- أوجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدّم من موضوعات الدرس في الحصة (إن وُجدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدرّياتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أنجّول بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجّهم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أكتب اقتراناً تربيعياً بسيطاً على اللوح، مثل: $f(x) = x^2$ ، ثم أسأل الطلبة:
 - ما المقصود بمجال الاقتران؟ **إجابة مُحتملة:** مجموعة مدخلات الاقتران.
 - ما مجال الاقتران المعطى؟ **مجموعة الأعداد الحقيقية.**

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم)، ثم أسألهم:
 - ◀ كم شتلة بندورة ترغب سلمى في شرائها؟ عدد من الشتلات لا يزيد على 15 شتلة.
 - ◀ ما المبلغ الذي حدّته سلمى ثمنًا لشتلات البندورة؟ مبلغ لا يزيد على 4 دنانير.
 - ◀ ما الذي يراود إيجاد أكبر قيمة له في هذه المسألة؟ عدد شتلات البندورة من كل نوع للحصول على أكبر كمّ من البندورة.
 - ◀ كيف يُمكن إيجاد عدد شتلات البندورة التي ستشتريها سلمى من كل نوع لإنتاج أكبر كمّ مُمكن من البندورة؟
- أخبر الطلبة أنّهم سيتعرّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أعزز الإجابات الصحيحة.

التدريس

3

مثال 1

- أعرّف للطلبة البرمجة الخطية بأنّها طريقة منظمة تعتمد على حل نظام من المتباينات الخطية بيانياً، وتُمثّل هذه المتباينات قيوداً معطاةً لمسألة حياتية؛ بُغية إيجاد أكبر قيمة لاقتزان خطي أو أقل قيمة له، في ما يُسمّى اقتران الهدف.
- أوّضح للطلبة معنى كلّ من الاقتران الهدف، والقيود، ومفهوم منطقة الحلول المُمكنة، إضافةً إلى تعريف (الحل الأمثل) لمسألة البرمجة الخطية.
- أناقش الطلبة في القاعدة التي ورد ذكرها في صندوق (مفهوم أساسي)، وبيّنت أنّ النقاط التي تجعل اقتران الهدف أكبر ما يُمكن أو أصغر ما يُمكن، في مسائل البرمجة الخطية، هي بالضرورة نقاط تُمثّل رؤوساً لمنطقة حل نظام المتباينات الخطية التي تُعبّر عن قيود المسألة.
- أوّضح للطلبة أنّه يُمكن حل مسائل البرمجة الخطية باتّباع الخطوات الآتية:
 - 1 صياغة الفرضيات، وكتابة اقتران الهدف الذي يراود إيجاد قيمته العظمى أو قيمته الصغرى، ثم تحديد القيود.
 - 2 تمثيل نظام المتباينات بيانياً، وتظليل منطقة الحلول المُمكنة.
 - 3 تحديد إحداثيات رؤوس منطقة الحلول المُمكنة، وتعويضها في اقتران الهدف.
 - 4 اختيار القيمة العظمى أو القيمة الصغرى تبعاً لما هو مطلوب في المسألة.
- أناقش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح؛ مؤكّداً ضرورة اتباع الخطوات الواردة في المثال أثناء الحل.

إرشادات:

- أخبر الطلبة أنه يسهل استعمال هذه الطريقة البيانية لمسائل البرمجة الخطية بمتغيرين، وأنّ المسائل التي تحوي عدداً أكبر من المتغيرات تتطلب استعمال طرائق أخرى لم يرد ذكرها في الكتاب المدرسي.
- أطلب إلى الطلبة إيجاد نقطة داخل منطقة الحل (من غير الرؤوس)، ثم تعويضها في اقتران الهدف، مبيّناً لهم أنه يتعدّد الحصول على قيمة أكبر من القيمة 7.
- أناقش الطلبة في الأفكار الواردة في الصناديق الهامشية؛ لِمَا لها من أهمية في تعزيز مفاهيم الدرس.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية، واللغة الإنجليزية، مُحفّزاً الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (أتحقّق من فهمي) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم من أخطأ في الإجابة؛ تجنباً لإحراجة.

مفهوم أساسي

إذا وُجدت قيمة عظمى أو قيمة صغرى للاقتران الهدف، فإنّها تكون عند واحد أو أكثر من رؤوس منطقة الحلول الممكنة.

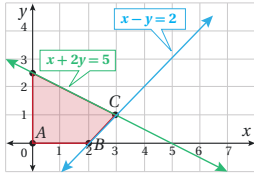
مثال 1

أجد إحداثيي النقطة (x, y) التي تجعل الاقتران: $P = 2x + y$ أكبر ما يُمكن ضمن القيود الآتية:

$$x + 2y \leq 5$$

$$x - y \leq 2$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$



الخطوة 1: أمثل القيود بيانياً.

أمثل نظام المتباينات الخطية (القيود) بيانياً، ثم أجد منطقة الحلول الممكنة كما في الشكل المجاور.

الخطوة 2: أجد رؤوس منطقة الحلول الممكنة.

رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$P = 2x + y$
$A(0, 0)$	$P = 2(0) + 0 = 0$
$B(2, 0)$	$P = 2(2) + 0 = 4$
$C(3, 1)$	$P = 2(3) + 1 = 7$
$D(0, 2.5)$	$P = 2(0) + 2.5 = 2.5$

أعيّن إحداثيي كلّ من نقاط رؤوس منطقة الحلول الممكنة، وهي: A, B, C, D ، ثم أضعها في جدول أحسب فيه قيمة الاقتران الهدف عند كلّ منها.

الخطوة 3: أجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

ألاحظ أنّ أكبر قيمة للاقتران P هي 7، وأنّها تتحقّق عندما $x = 3, y = 1$.

أتحقّق من فهمي

أجد إحداثيي النقطة (x, y) التي تجعل الاقتران: $Q = 50x + 40y$ أكبر ما يُمكن ضمن القيود الآتية:

$$x + y \leq 8$$

$$2x + y \leq 10$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

إرشاد: أستعمل أوراق الرسم البيانيّ الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

أتذكّر

المستقيم $x = 0$ هو المحور y نفسه، والمستقيم $y = 0$ هو المحور x نفسه.

أتعلّم

تُسمّى المتباينتان $x \geq 0, y \geq 0$ (أو شروط) عدم السالبة، وهما توجدان في مسائل البرمجة الخطية الحياتية بصورة ضمنية.

مثال 2: من الحياة

- ألفت انتباه الطلبة إلى أن مسائل البرمجة الخطية تُمثّل مسائل عملية تنتج من تطبيقات يومية، وأن حل هذه المسائل الحياتية يتطلب أولاً تحديد مُتغيّرات مناسبة، واقتراح هدف مناسب، وقيود مناسبة. أمّا العملية التي تُستعمل لترجمة المسألة الحياتية إلى مسألة رياضية فتُسمّى النمذجة الرياضية.
- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة المثال 2.
- أطلب إلى الطلبة اقتراح المُتغيّرات التي تُمثّل المسألة، ثم صياغة الفرضيات، لافتاً انتباههم إلى أن العدد 50 يُمثّل الحد الأعلى لعدد الدونمات المزروعة؛ أي إن عدد الدونمات يجب أن يكون أقل من أو يساوي 50، وهو ما يُمثّل قيداً من قيود المسألة. وكذلك الحال بالنسبة إلى العدد 1800، والعدد 120.
- أناقش الطلبة في حل هذا المثال على اللوح، مقدّماً لهم التغذية الراجعة اللازمة أثناء ذلك.

يُمكن حلّ المسائل الحياتية التي تتضمن إيجاد أكبر ربح مُمكن بطريقة البرمجة الخطية، واتباع خطوات تُشبه الخطوات الواردة في المثال 1. ولكنّ يتعيّن قبل ذلك تحديد متغيرين، مثل x, y ، وكتابة نظام متباينات خطية بدلالة كلّ منهما لتمثيل قيود المسألة، وكتابة اقتران الربح بدلالتهما أيضاً.

مثال 2: من الحياة

القمح	الذرة
JD 30	JD 60
4 أيام	3 أيام
JD 100	JD 180

يملك مزارع 50 دونماً من الأرض، ويريد تهيئة التربة في جزء منها لزراعتها بالذرة، أو بالقمح، أو بكليهما كما في الجدول المجاور.

غير أن المزارع لا يُمكنه إنفاق أكثر من JD 1800 على ذلك، ويتعيّن عليه تهيئة التربة وزراعتها في 120 يوماً على الأكثر قبل بدء موسم الأمطار. كم دونماً سيزرع من كل محصول لتحقيق أكبر ربح مُمكن؟

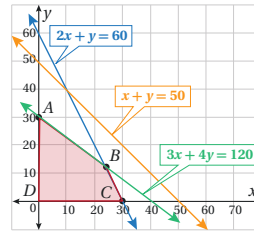
الخطوة 1: أصوغ الفرضيات.

أفترض أن عدد الدونمات التي ستُزرع ذرة هو x ، وأن عدد الدونمات التي ستُزرع قمحاً هو y . إذا افترضت أن المزارع سيبيع كل إنتاجه من المحصولين، فإنّ الربح المُتوقّع هو:

$$P = 180x + 100y$$

يريد المزارع أن يكون الربح أكبر ما يُمكن ضمن القيود الآتية:

$$x + y \leq 50, 60x + 30y \leq 1800, 3x + 4y \leq 120, x \geq 0, y \geq 0$$



الخطوة 2: أمثّل القيود بيانياً.

أمثّل نظام المتباينات الخطية، ثم أطلّل منطقة الحلول المُمكنة كما في الشكل المجاور.

أتذكّر

لإيجاد إحداثيي النقطة B، أُحلّ المعادلتين معاً بطريقة الحذف والتعويض، ويُمكنني أيضاً استعمال برمجة جيو جبرا لإيجاد إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين.

إرشادات:

- أَيْسِّنْ للطلبة أَنَّ كتابة المتباينات في أبسط صورة تُسَهِّلْ عملية تمثيلها بيانيًا.
- أَوْضِّحْ للطلبة أَنَّهُ يُمكن إيجاد إحداثيات النقطة جبريًا بحل المعادلتين المُكوِّنتين للنقطة بالحذف أو التعويض.



يُعَدُّ مناخ الأردن مناسبًا لزراعة القمح، لكنَّ الزحف العمراني نحو الأراضي الزراعية قلَّص مساحات كثير من السهول ذات التربة الخصبة.

الخطوة 3: أوجد رؤوس منطقة الحلول المُمكنة.

أوجد إحداثيي كلٍّ من النقاط: A, B, C, D ، ثم أجد قيمة الربح P عند كلٍّ منها كما في الجدول الآتي:

رؤوس منطقة الحلول المُمكنة	$P = 180x + 100y$
$A(0, 30)$	$P = 180(0) + 100(30) = 3000$
$B(24, 12)$	$P = 180(24) + 100(12) = 5520$
$C(30, 0)$	$P = 180(30) + 100(0) = 5400$
$D(0, 0)$	$P = 180(0) + 100(0) = 0$

الخطوة 4: أوجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

ألاحظ من الجدول أنَّ أكبر ربح مُمكن هو 5520 دينارًا، وأنَّه يتحقَّق عند زراعة 24 دونمًا بالذرة، و12 دونمًا بالقمح.

تحقَّق من فهمي

يُنتِج مشغل للصناعات البدوية معاطف وحقائب جلدية، ويتوافر لديه أسبوعيًا 40 m^2 على الأكثر من الجلد الخام. يتطلَّب صنع المعطف الواحد استعمال 2 m^2 من الجلد الخام، ويستغرق ذلك ساعتي عمل، ويُحقَّق ربحًا مقداره 5 دنانير، ويتطلَّب صنع الحقيبة الواحدة استعمال 1 m^2 من الجلد الخام، ويستغرق ذلك 3 ساعات عمل، ويُحقَّق ربحًا مقداره 4 دنانير. إذا كان عدد ساعات العمل في المشغل لا يزيد على 60 ساعة أسبوعيًا، فما عدد كلٍّ من المعاطف والحقائب التي يتعيَّن صنعها أسبوعيًا لتحقيق أكبر ربح مُمكن؟ (افترض أنَّ المشغل يبيع إنتاجه كاملًا). أنظر الهامش.

إرشاد: أستمع أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

ألاحظ من المثالين السابقين أنَّ منطقة الحلول المُمكنة التي تُحدِّدها القيود كانت مغلقة؛ لأنَّ هذه القيود فرضت ذلك، ولكنَّ بعض المسائل الحياتية تتضمن إيجاد أقل تكلفة مُمكنة، أو أقل كمية مُستهلكة، وغير ذلك، فتكون منطقة الحلول عندئذٍ مفتوحة؛ لأنَّ قيودها تفرض ذلك.

28

إجابة الأسئلة في بند (تحقَّق من فهمي 2):

x : عدد المعاطف، y : عدد الحقائب.

المطلوب: إيجاد أكبر قيمة للاقتران.

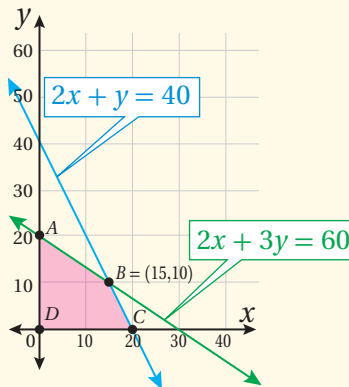
$$P = 5x + 4y$$

تحت القيود:

$$2x + y \leq 40$$

$$2x + 3y \leq 60$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$



رؤوس منطقة الحل	$P = 5x + 4y$
$(0, 0)$	$P = 0$
$(0, 20)$	$P = 5(0) + 4(20) = 80$
$(15, 10)$	$P = 5(15) + 4(10) = 115$
$(20, 0)$	$P = 5(20) + 4(0) = 100$

أكبر ربح مُمكن هو 115 دينارًا، وذلك بإنتاج 15 معطفًا و10 حقائب وبيعها أسبوعيًا.

مثال 3: من الحياة

- أطلب إلى أحد الطلبة قراءة المثال 3.
- أطلب إلى الطلبة اقتراح المُتغيّرات التي تُمثّل المسألة، ثم صياغة الفرضيات.
- أوضّح للطلبة كيف أنّ هذه المنطقة تختلف عن منطقتي الحل في المثالين السابقين؛ إذ إنّ منطقة الحل في هذا المثال غير محدودة.
- أحل هذا المثال بإيجاد رؤوس المضلع، ثم تعويضها في اقتران الهدف، مُؤكّداً للطلبة صحّة المفهوم الأساسي حتى لو كانت المنطقة غير محدودة.

إرشادات:

- أبنّ للطلبة أنّه من غير المنطقي في هذا المثال البحث عن أكبر قيمة لاقتران الهدف؛ ذلك أنّ المطلوب دائماً هو البحث عن أقل تكلفة، وليس من المعقول البحث عن أكبر تكلفة.
- أوضّح للطلبة أنّه يتعدّد إيجاد أكبر قيمة لاقتران الهدف في هذا المثال؛ نظراً إلى تزايد قيم اقتران الهدف بصورة غير محدودة، مثل تعويض النقاط $(0, y)$ لقيم كبيرة للمتغيّر y .

تنويع التعليم:

في المثال 4، قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في التعبير عن المسألة اللفظية جبرياً بنظام من المتباينات الخطية؛ لذا أمنحهم بعض الوقت، وأقدّم لهم أمثلة سهلة عند اللزوم، مُنوّهاً إيّاهم بضرورة قراءة المسألة بَروية؛ ما يساعدهم على حل المسائل بسهولة.

مثال 3: من الحياة



يعتمد تسمين الماشية على تغذيتها بخليط مُعدّ بنسب مُحدّدة من الحبوب (مثل: الذرة الصفراء، والشعير)، والتبن، وقشور الفسول، وملح الطعام، والفيتامينات.

النوع	النوع A	النوع B
تكلفة الكيس الواحد	JD 10	JD 12
عدد وحدات البروتينات	40	30
عدد وحدات المعادن	20	20
عدد وحدات الفيتامينات	10	30

يخلط بعض مُربي الماشية نوعين من العلف للحصول على مزيج ذي تكلفة أقل. ويبيّن الجدول المجاور تكلفة الكيس الواحد من كل نوع، وعدد الوحدات التي يحويها من

البروتينات والمعادن والفيتامينات. إذا احتاجت الماشية يومياً إلى 150 وحدة من البروتينات، و90 وحدة من المعادن، و60 وحدة من الفيتامينات على الأقل، فكم كيساً من النوع A والنوع B معاً يُمكن أن تستهلكه الماشية بأقل تكلفة مُمكنة؟

الخطوة 1: أصوغ الفرضيات.

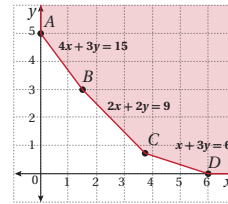
أفترض أنّ عدد الأكياس من النوع A هو x ، وأنّ عدد الأكياس من النوع B هو y .

إذا افترضت أنّ هذه الماشية تستهلك كل ما يُقدّم لها من النوعين يومياً، فإنّ التكلفة C هي:

$$T = 10x + 12y$$

المطلوب أن تكون التكلفة أقل ما يُمكن ضمن القيود الآتية:

$$40x + 30y \geq 150, 20x + 20y \geq 90, 10x + 30y \geq 60, x \geq 0, y \geq 0$$



الخطوة 2: أمثّل القيود بيانياً.

أمثّل نظام المتباينات الخطية، ثم أظنّل منطقة الحلول المُمكنة كما في الشكل المجاور.

الخطوة 3: أجد رؤوس منطقة الحلول المُمكنة.

أحدّد إحداثيي كلّ من النقاط: A, B, C, D ، ثم أجد قيمة التكلفة T عند كلّ منها كما في الجدول الآتي:

رؤوس منطقة الحلول المُمكنة	$T = 10x + 12y$
$A(0, 5)$	$T = 10(0) + 12(5) = 60$
$B(1.5, 3)$	$T = 10(1.5) + 12(3) = 51$
$C(3.75, 0.75)$	$T = 10(3.75) + 12(0.75) = 46.5$
$D(6, 0)$	$T = 10(6) + 12(0) = 60$

إجابة الأسئلة في بند (أتحقّق من فهمي 3):

x : عدد العلب من النوع الأوّل، y : عدد العلب من النوع الثاني.

المطلوب: إيجاد أصغر قيمة للاقتران.

$$C = 0.25x + 0.3y$$

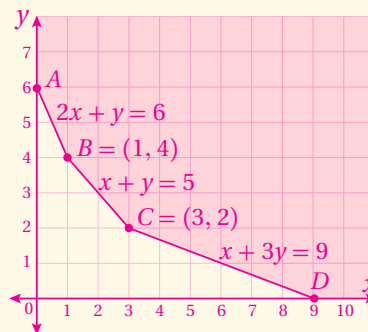
تحت القيود:

$$60x + 60y \geq 300$$

$$12x + 6y \geq 36$$

$$10x + 30y \geq 90$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$



رؤوس منطقة الحل	$C = 0.25x + 0.3y$
$(0, 6)$	$C = 0 + 0.3(6) = 1.8$
$(1, 4)$	$C = 0.25(1) + 0.3(4) = 1.45$
$(3, 2)$	$C = 0.25(3) + 0.3(2) = 1.35$
$(9, 0)$	$C = 0.25(9) + 0.3(0) = 2.25$

أقل تكلفة مُمكنة هي 1.35 من الدينار، وذلك عند استهلاك 3 علب من النوع الأوّل

وعلبتين من النوع الثاني يومياً.

أَتَدْرَبُ وَأُحِلُّ الْمَسَائِلَ



- أوجه الطلبة إلى بند (أَتَدْرَبُ وَأُحِلُّ الْمَسَائِلَ)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1-6) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديداً ترتبط ارتباطاً مباشراً بأمثلة الدرس، وهي تُستعمل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عما إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أية مسألة، فإنني أختار أحد الطلبة ممن تمكن / تمكنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته / استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزاً الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل / الزميلة.

تنبيه: ألفت انتباه الطلبة إلى أنه إذا وُجدت نقطة خارج منطقة الحل تجعل اقتران الهدف أكبر ما يُمكن، فإنه لا يُمكن الأخذ بها؛ إذ إنها لا تُحقِّق قيود المسألة.

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (أَتَدْرَبُ وَأُحِلُّ الْمَسَائِلَ)، فإنني أضع كلاً منهم مع طالب آخر / طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المُتميّزين؛ ليتشاركوا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا



- أوجه الطلبة إلى بند (مهارات التفكير العليا)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (10-12).

✓ **إرشاد:** في السؤال 10 (تبرير)، أُوكِّد للطلبة ما ذُكر آنفاً من أن أكبر قيمة أو أقل قيمة لا اقتران الهدف في مسائل البرمجة الخطية قد تتحقق عند أكثر من نقطة من نقاط الحل.

الخطوة 4: أَدَّدُ القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

ألاحظ من الجدول أن أقل تكلفة مُمكنة هي 46.5 ديناراً، وأن الماشية تستهلك وقتاً 3.75 أكياس من العلف A، و0.75 كيس من العلف B، لتلبية الحد الأدنى الذي يلزمها من البروتينات والمعادن والفيتامينات.

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي



أفادت بعض الدراسات أن جسم الإنسان يحتاج إلى نحو 2000 سعر حراري يومياً، وأن ذلك يختلف من شخص إلى آخر تبعاً لعمر الشخص، وكتلته، ونوع الأنشطة والتمارين التي يمارسها.

حمية غذائية: يشترط نظام للحمية

الغذائية توافر ما لا يقل عن 300 سعرة حرارية، و36 وحدة من فيتامين A، و90 وحدة من فيتامين C، ضمن الجزء السائل من الوجبة

النوع 1	النوع 2	سعر العلبة الواحدة
JD 0.25	JD 0.3	
60	60	عدد السعرات الحرارية
12	6	عدد وحدات فيتامين A
10	30	عدد وحدات فيتامين C

الغذائية. يُبين الجدول أعلاه تكلفة العلبة الواحدة من نوعين مختلفين من الألبان، وعدد السعرات الحرارية، ووحدات فيتامين A وفيتامين C التي تحويها العلبة الواحدة. كم علبة من كل نوع يُمكن أن يستهلكها يومياً شخص يتبع نظام الحمية الغذائية، ويريد تحقيق شروطها بأقل تكلفة مالية مُمكنة؟ **أنظر الهامش.**

إرشاد: أستعمل أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

أَتَدْرَبُ وَأُحِلُّ الْمَسَائِلَ



أجد إحداثي النقطة (x, y) التي تجعل اقتران الهدف أكبر ما يُمكن ضمن القيود المعطاة في كلٍّ مما يأتي:

- 1 $P = 4x + 3y$
 $x + 2y \leq 4$
 $x - y \leq 1$
 $x \geq 0, y \geq 0$
 أكبر قيمة هي $P = 11$ عند النقطة (2, 1).
- 2 $R = 10x + 7y$
 $0 \leq x \leq 60$
 $0 \leq y \leq 60$
 $5x + 6y \leq 420$
 أكبر قيمة هي $R = 740$ عند النقطة (60, 20).
- 3 $Z = 1.5x + y$
 $x + 3y \leq 15$
 $4x + y \leq 16$
 $x \geq 0, y \geq 0$
 أكبر قيمة هي $Z = 8.5$ عند النقطة (3, 4).
- 4 $Q = 4x + 5y$
 $x + y \geq 8$
 $3x + 5y \geq 30$
 $x \geq 0, y \geq 0$
 أصغر قيمة هي $Q = 35$ عند النقطة (5, 3).
- 5 $C = 8x + 4y$
 $x + 2y \geq 4$
 $3x + y \geq 7$
 $2y - x \geq 7$
 $x \geq 0, y \geq 0$
 أصغر قيمة هي $C = 24$ عند النقطة (1, 4).
- 6 $K = 25x + 35y$
 $8x + 9y \leq 7200$
 $8x + 9y \geq 3600$
 $x \geq 0, y \geq 0$
 أصغر قيمة هي $K = 11250$ عند النقطة (450, 0).

إرشاد: أستعمل أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

(5) أصغر قيمة هي $C = 24$ عند النقطة (1, 4).

30

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 7, 9 كتاب التمارين: 1, 2
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (7-9) كتاب التمارين: 3
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (10-12) كتاب التمارين: 4

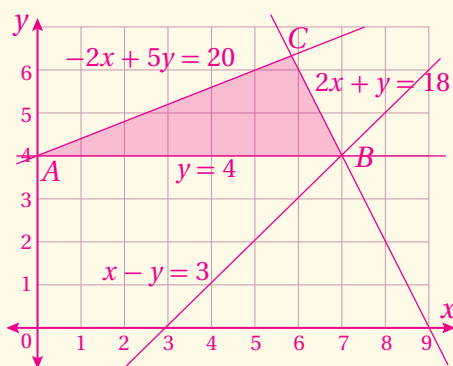
✓ **إرشاد:** قد يختلف تصنيف الطلبة من درس إلى آخر تبعاً لأدائهم. فمثلاً، قد يكون أداء أحد الطلبة دون المتوسط في درس، وفوق المتوسط في درس آخر.

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الآتي بوصفه إثراء لهم:
- ◀ أجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى للاقتان:

$$\begin{aligned} y &\geq 4 \\ -2x + 5y &\leq 20 \\ -7x + 5y &\leq 35 \\ x - y &\leq 3 \\ 2x + y &\leq 18 \end{aligned}$$

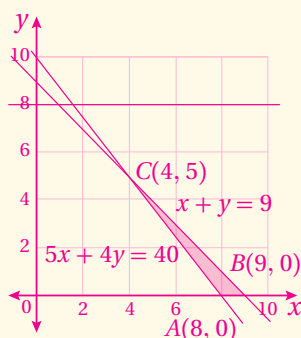
التمثيل البياني للمتباينات مُبين في الشكل التالي.

القيمة العظمى هي 20، والقيمة الصغرى هي -1



- أتَحَقَّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بطرح السؤال الآتي عليهم:
- ◀ تُخَطِّط مدرسة ثانوية أن تأخذ ما لا يقل عن 400 طالب في رحلة إلى مدينة البتراء، وقد استأجرت لذلك حافلات من شركة نقل لديها 10 حافلات كبيرة، سعة الواحدة منها 50 راكبًا، و8 حافلات صغيرة، سعة الواحدة منها 40 راكبًا، علمًا بأن لدى الشركة 9 سائقين فقط. إذا كانت أجرة الحافلة الكبيرة JD 560، وأجرة الحافلة الصغيرة JD 420، فما أقل تكلفة مُمكنة لاستئجار الحافلات لهذه الرحلة؟

- أفترض أن عدد الحافلات الكبيرة المستأجرة لنقل الطلبة هو x ، وعدد الحافلات الصغيرة هو y .
- تكلفة استئجار هذه الحافلات هي: $C = 560x + 420y$
- عدد رُكَّاب هذه الحافلات 400 طالب على الأقل $50x + 40y \geq 400$
- بالقسمة على 10: $5x + 4y \geq 40$
- عدد السائقين 9 $x + y \leq 9$
- عدد الحافلات الكبيرة لدى الشركة 10 $0 \leq x \leq 10$
- عدد الحافلات الصغيرة لدى الشركة 8 $0 \leq y \leq 8$
- يُبين الرسم المجاور التمثيل البياني لنظام المتباينات السابقة. أجد إحداثي C بحل المعادلتين: $x + y = 9$, $5x + 4y = 40$
- إحداثيا C هما: (4, 5).



رؤوس منطقة الحلول المُمكنة	$C = 560x + 420y$
A(8, 0)	$560(8) + 420(0) = 4480$
B(9, 0)	$560(9) + 420(0) = 5040$
C(4, 5)	$560(4) + 420(5) = 4340$

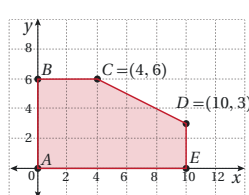
إذن، أقل تكلفة لاستئجار الحافلات لهذه الرحلة هي 4340 دينارًا في حال استئجار 4 حافلات كبيرة، و5 حافلات صغيرة.

- 7 **صناعات:** يُنتج أحد المصانع شوكلاتة مُغطاة بالفستق، ويجنى ربحًا مقداره JD 1.5 عن كل علبه مبيعة، ويُنتج نوعًا آخر منها مُغطى بالبندق، ويجنى ربحًا مقداره JD 2 عن كل علبه مبيعة. وقد بيَّنت دراسة أجراها قسم التسويق في المصنع بهدف زيادة الربح أن إنتاج كلا النوعين من الشوكولاتة يجب ألا يزيد على 1200 علبه شهريًا، وأن الطلب على علب الشوكولاتة المُغطاة بالبندق لا يزيد على نصف الطلب على علب الشوكولاتة المُغطاة بالفستق، وأن عدد علب الشوكولاتة المُغطاة بالفستق يجب أن يكون أقل من (أو يساوي) 600 علبه، مضافًا إليها ثلاثة أمثال عدد علب الشوكولاتة المُغطاة بالبندق شهريًا. كم علبه شوكلاتة من كل نوع يجب أن يُنتج المصنع شهريًا لتحقيق أكبر ربح مُمكن، مُفترضًا بيع الإنتاج كاملاً كل شهر؟ **أنظر ملحق الإجابات.**

- 8 **دعاية:** أراد صلاح طباعة كُتيبات ونشرات دعائية لتسويق مُنتجات مزرعته من العسل الطبيعي، بحيث يحوي الكُتيب الواحد 3 صفحات، وتحوي النشرة الواحدة صفحتين. تبلغ تكلفة طباعة الكُتيب الواحد 0.2 من الدينار، وتكلفة طباعة النشرة الواحدة 0.1 من الدينار. وقد قرَّر صلاح أنه بحاجة إلى طباعة ما لا يزيد على 600 صفحة، مُمثَّلة في 50 كُتيبًا على الأقل، و150 نشرة على الأقل. كم كُتيبًا ونشرة يجب طباعتها بحيث تكون التكلفة أقل ما يُمكن؟ **أقل تكلفة مُمكنة هي 25 دينارًا، وذلك عند طباعة 50 كُتيبًا و 150 نشرة.**

- 9 أخلّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).
- أكبر إنتاج هو 70 kg، وذلك عند شراء 5 شتلات من النوع A و 10 شتلات من النوع B.

مهارات التفكير العليا



- 10 **تبرير:** يتحقَّق أحيانًا أكبر ربح مُمكن عند نقطتين من رؤوس منطقة الحل. وفي هذه الحالة يُمكن إيجاد نقاط أخرى لتحقيق أكبر ربح عندها، بالرغم من أن قيمة الربح وحيدة. أجد أكبر قيمة مُمكنة للربح $P = x + 2y$ ضمن منطقة الحلول المُمكنة المُمثَّلة في الشكل المجاور، مُبرِّرًا إجابتي، ثم أجد نقاطًا أخرى ضمن منطقة الحل يتحقَّق عندها أكبر قيمة مُمكنة للربح.

أنظر ملحق الإجابات.

$$\begin{aligned} x + 2y &\leq 8 \\ x + y &\leq 5 \\ x &\geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

- 11 **تحلُّ:** أجد اقتران هدف صورته: $G = ax + by$ ، حيث a, b عددان حقيقيان، وله أكبر قيمة عند النقطة (2, 3)، وهي 18، ضمن القيود المجاورة:

$$G = \frac{9}{4}x + \frac{9}{2}y$$

- 12 **تحلُّ:** أجد مجموعة قيم n (حيث n عدد صحيح موجب) التي تجعل للاقتان الهدف:

$$D = 3x + ny$$

أكبر قيمة مُمكنة عند النقطة (3, 4)، ضمن القيود المجاورة:

$$1 \leq n \leq 9$$

اختبار نهاية الوحدة

(5-6)، أنظر ملحق الإجابات.

أحلُّ كُلًّا من أنظمة المتباينات الخطية الآتية:

$$\begin{array}{ll} 5 & x - 8y \leq 9 \\ & 4x + 7y > 3 \\ 6 & 12x + 10y > 1 \\ & -5x - 8y < 2 \\ & 3x + y \geq -6 \end{array}$$

تعليم: يعقد مصنع دورة تدريبية لطلبة الهندسة في إحدى الجامعات، بحيث يكون عدد الطالبات المُتدربات x ، وعدد الطلاب المُتدربين y ، ولا يقل العدد الإجمالي للطالبات والطلاب عن 5، ولا يزيد على 15، ولا يقل عدد الطلاب عن نصف عدد الطالبات:

(7-8)، أنظر الهامش.

7 أشرح بالكلمات معنى: $2y \geq x$.

8 إذا كان عدد الطالبات المُتدربات 6، فما العدد المُمكن للطلاب المُتدربين؟

9 أجد جميع الحلول المُمكنة لنظام المتباينات الآتي، حيث m و n عدداً صحيحان موجبان:

$$\begin{array}{l} m + n > 4 \\ 3m + 7n \leq 21 \end{array}$$

أنظر ملحق الإجابات.

10 أجد أكبر قيمة للاقتران: $P = 4x + y$ ، ضمن القيود الآتية:

$$\begin{array}{l} x + y \leq 50 \\ 3x + y \leq 90 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}$$

أكبر قيمة هي $P = 120$ عند النقطة $(30, 0)$.

11 أجد أصغر قيمة للاقتران: $C = 200x + 500y$ ، ضمن القيود الآتية:

$$\begin{array}{l} x + 2y \geq 10 \\ 3x + 4y \leq 24 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array}$$

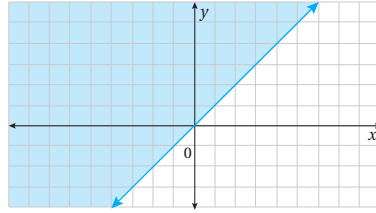
أصغر قيمة هي $C = 2300$ عند النقطة $(4, 3)$.

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلِّ ممَّا يأتي:

1 الزوج الذي يُمثِّل حلاً للمتباينة: $7y - 8x > -10$ هو:

- a) (3, 2) b) (3, 1)
c) (-4, -7) d) (2, 5)

2 المتباينة التي لها التمثيل البياني الآتي هي:



- a) $x - y \leq 0$ b) $x - y \geq 0$

- c) $x + y \leq 0$ d) $x + y \geq 0$

3 المتباينة التي يكون الزوج المُرتَّب (1, 2) حلاً لها هي:

- a) $2x + 7y < 2$ b) $x - 11y \geq -2$

- c) $y - 13x \leq -6$ d) $2y - x > 9$

4 الزوج الذي يُمثِّل حلاً لنظام المتباينات الآتي هو:

$$\begin{array}{l} y + 5x < 7 \\ 2x - y \geq -3 \end{array}$$

- a) (3, 2) b) (0, 0)

- c) (-4, -2) d) (2, 8)

اختبار نهاية الوحدة:

- أطلب إلى الطلبة حل الأسئلة (1-4) فردياً، وأتجوّل بينهم مُساعدًا ومُرشِّدًا ومُوجِّهًا، وأقدِّم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثم أناقشهم جميعاً في حل بعض المسائل على اللوح.
- أوزّع الطلبة إلى مجموعات رباعية، ثم أطلب إليهم حل المسائل (5-13)، وأتجوّل بينهم مُساعدًا ومُرشِّدًا ومُوجِّهًا، وأقدِّم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثم أحدد المسائل التي واجه الطلبة صعوبة في حلها لمناقشتها على اللوح.

إرشادات:

- أذكر الطلبة بمفهوم الزوج المُرتَّب الذي يُمثِّل حلاً لمتباينة، أو يُمثِّل حلاً لنظام من المتباينات، قبل البدء بحل الأسئلة (1-4).
- أذكر الطلبة بأن كتابة المتباينات في أبسط صورة تُسهِّل عملية تمثيلها بيانياً.

إجابة الأسئلة في بند (اختبار نهاية الوحدة):

(7) عدد الطالبات أقل أو يساوي ضعف عدد الطلاب.

(8) أفترض أنَّ عدد الطالبات هو x ، وأنَّ عدد الطلاب هو y .

بكتابة نظام المتباينات الذي

$$x + y \geq 5$$

$$x + y \leq 15$$

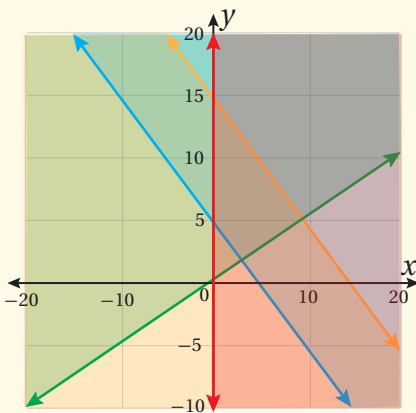
$$y \geq 0.5x, x \geq 0, y \geq 0$$

بتمثيل النظام بيانياً:

ألاحظ من التمثيل البياني أنَّه إذا

كان عدد الطالبات 6، فقد يتراوح

عدد الطلاب بين 3 طلبة و9 طلبة.



تدريب على الاختبارات الدولية

- أطلب إلى الطلبة حل الأسئلة الواردة في بند (تدريب على الاختبارات الدولية) فرديًا، ثم أناقشهم جميعًا في حلها على اللوح، مُبينًا لهم المقصود بالاختبارات الدولية.

اختبار نهاية الوحدة

تدريب على الاختبارات الدولية

14 إذا كان $y > 4$ ، فأَيُّ ممَّا يأتي يجب وضعه في المربع لتكون $y \square \frac{3y+2}{5}$ صحيحة:

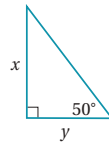
- (a) $>$ (b) $<$
(c) $\leq$ (d) $\geq$

15 إذا كان $0 < x < y$ ، فأَيُّ ممَّا يأتي صحيحة دائمًا:

- (a) $xy^2 < x$ (b) $xy < y^2$
(c) $xy < x^2$ (d) $y - 1 < x$

16 إذا كان $a < b < c$ ثلاثة أعداد فردية صحيحة متتالية، وكان $x = a + b + 1$ ، وكان $y = b + c - 1$ ، فإن:

- (a) $x > y$ (b) $x < y$
(c) $x = y$ (d) $2x = y$



17 أيُّ ممَّا يأتي صحيح اعتمادًا على المثلث المجاور:

- (a) $x > y$ (b) $x < y$
(c) $x = y$ (d) $2x = y$

18 إذا كان $0 < n < k$ ، فأَيُّ ممَّا يأتي ناتجه عدد موجب:

- (a) $k - n$ (b) kn
(c) k^2n (d) $k^2n + kn^2$

12 يُنتج مصنع نوعين من القطع المعدنية باستعمال الآتين A و B معًا. ويبيِّن الجدول التالي الزمن الذي تستغرقه معالجة القطعة الواحدة في كلٍّ من الآتين، ومقدار ربح المصنع من بيع القطعة الواحدة من كل نوع. إذا كان عدد ساعات العمل اليومي للآلة A لا يزيد على 10 h، وعدد ساعات العمل اليومي للآلة B لا يزيد على 6 h، فكم قطعة من كل نوع يجب أن يُنتج المصنع يوميًا لتحقيق أكبر ربح مُمكن؟

القطعة من النوع الأول	القطعة من النوع الثاني	الزمن من المعالجة في الآلة A	الزمن من المعالجة في الآلة B	مقدار الربح
2 h	1 h	1 h	1 h	JD 15
1 h	1 h	1 h	1 h	JD 10

أنظر الهامش.

13 أراد خبير تغذية إعداد خليط غذائي باستعمال الطحين العادي وطحين الشوفان، بحيث يحتوي الخليط على 12 وحدة على الأقل من فيتامين A، و 10 وحدات على الأقل من فيتامين B، و 6 وحدات على الأقل من فيتامين C. يُبيِّن الجدول الآتي وحدات الفيتامين في نوعي الطحين، وسعر كل نوع:

طحين الشوفان	الطحين العادي	السعر
JD 0.8 / kg	JD 0.5 / kg	
4 وحدات لكل كيلوغرام.	3 وحدات لكل كيلوغرام.	فيتامين A
وحدتان لكل كيلوغرام.	5 وحدات لكل كيلوغرام.	فيتامين B
3 وحدات لكل كيلوغرام.	وحدة لكل كيلوغرام.	فيتامين C

كم كيلوغرامًا من نوعي الطحين يتعيَّن على خبير التغذية خلطه بحيث يحوي الخليط الحد الأدنى المطلوب من كل فيتامين وبأقل تكلفة؟ أنظر ملحق الإجابات.

إجابة الأسئلة في بند (اختبار نهاية الوحدة):

12 x : عدد القطع من النوع الأوَّل، y : عدد القطع من النوع الثاني. المطلوب: إيجاد أكبر قيمة للاقتران.

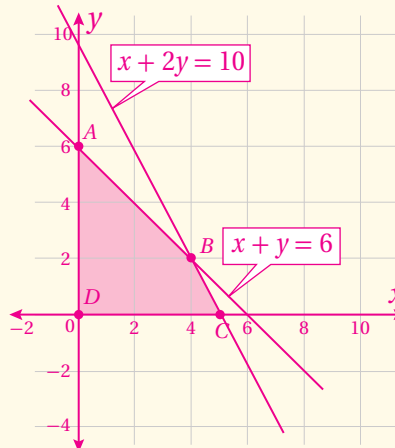
$$P = 10x + 15y$$

تحت القيود:

$$2x + y \leq 10$$

$$x + y \leq 6$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$



رؤوس منطقة الحل	$P = 10x + 15y$
$A(0, 6)$	$P = 0 + 15(6) = 90$
$B(4, 2)$	$P = 10(4) + 15(2) = 70$
$C(5, 0)$	$P = 10(5) + 15(0) = 50$
$D(0, 0)$	$P = 10(0) + 15(0) = 0$

أكبر ربح مُمكن هو 90 دينارًا، وذلك عند إنتاج 0 قطعة من النوع الأوَّل و 6 قطع من النوع الثاني وبيعها يوميًا.

كتاب التمارين

الوحدة 1: البرمجة الخطية
أستعد لدراسة الوحدة

أستعمال المتباينات الخطية بمتغير واحد للتعبير عن موقف حياتي، وحلها (الدرس 1)

11 تسويق: ترغب ريم في الإعلان عن منتجات شركتها على موقع الكتروني مقابل JD 10 شهريًا، إضافة إلى JD 0.05 عن كل من يزور موقع الإعلان. أجد أقل عدد من الزيارات الشهرية لموقع الإعلان ليكون المبلغ الشهري الذي يتقاضاه الموقع الإلكتروني من شركة ريم JD 100 على الأقل. 1800 زيارة.

12 صناعة: يمتلك كرم معملًا لإنتاج الطاولات تكلفته تشغيله الأسبوعية JD 270، إضافة إلى JD 60 لإنتاج الطاولة الواحدة. يبيع كرم الطاولة الواحدة بمبلغ JD 150. أكتب متباينة يمكن استخدامها لتحديد عدد الطاولات التي يجب إنتاجها وبيعها لتحقيق ربح أسبوعي، وأحل المتباينة. $60n + 270 < 150n$ $270 < 90n$ $n > 3$ إذن، يجب إنتاج 4 طاولات أسبوعيًا على الأقل.

مثال: مصاعد: يبلغ الحد الأقصى لحمولة مصعد في البناية التي يسكن فيها هشام 400 kg إذا أراد هشام تحميل مجموعة من الصناديق كتلة الواحد منها 20 kg، فما أكبر عدد من الصناديق يمكن له تحميلها في المصعد بأمان؟ علمًا بأن كتلة هشام 80 kg

بالكلمات

المعبر

المتباينة

كتلة هشام وكتلة الصناديق أقل من أو يساوي 400

ليكن x عدد الصناديق، إذن كتلة الصناديق $20x$

$80 + 20x \leq 400$

المتباينة الأصلية

أطرح 80 من طرفي المتباينة

أقسم طرفي المتباينة على 20

أبسط

$80 + 20x \leq 400$
 $80 - 80 + 20x \leq 400 - 80$
 $\frac{20x}{20} \leq \frac{320}{20}$
 $x \leq 16$

إذن، يمكن لهشام تحميل 16 صندوقًا كحد أقصى في المصعد.

7

الوحدة 1: البرمجة الخطية
أستعد لدراسة الوحدة

أختبر معلوماتي قبل البدء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

كتابة متباينة خطية بمتغير واحد تمثل جملة معطاة (الدرس 1)

أكتب المتباينة التي تمثل كل جملة مما يأتي:

1 عدد مضاف إليه 7 أكبر من 20 $h + 7 > 20$ 2 ثلثا عدد مطروحًا منه 5 لا يزيد على 15 $\frac{2}{3}n - 5 \leq 15$

3 عدد مطروح منه 9 أكبر من $5 - 5 - m > -9$ 4 أربعة أمثال مجموع عدد مع 5 أكبر من 2 $4(x + 5) > 2$

5 العدد 6 أقل من أو يساوي مجموع عدد و15 $6 \leq t + 15$ 6 خمس عدد مضافًا إليه 3 لا يقل عن عشر العدد مضافًا إليه 8 $\frac{1}{5}a + 3 \geq \frac{1}{10}a + 8$

7 العدد 8 مطروحًا منه مثلي عدد ما أكبر من 20 $8 - 2b > 20$ 8 ثلاثة أمثال عمر سلمى بالسنوات مضافًا إليه 12 لا يزيد عن 18 $3y + 12 \leq 18$

مثال: أكتب المتباينة التي تمثل كل جملة مما يأتي:

(a) عدد مطروح منه 4 أكبر من 120 المتغير: ليكن n يمثل العدد. المتباينة: $h - 4 > 120$

(b) نصف عدد طلبة صفي مطروحًا منه 10 لا يقل عن 6 المتغير: ليكن n يمثل عدد طلبة صفي. المتباينة: $\frac{1}{2}n - 10 \geq 6$

حل المتباينات الخطية بمتغير واحد (الدرس 1)

أحل المتباينتين الخطيتين الآتيتين:

مجموعة الحل: $(-\infty, 8)$ $9x - 8 > 2(3x + 8)$ 10 مجموعة الحل: $[1, \infty)$ $2x + 3 \leq 7x - 2$ 9

مثال: أحل المتباينة الخطية: $8x - 5 \leq 4x + 7$

المتباينة الخطية

ب طرح $4x$ من الطرفين

بجمع العدد 5 للطرفين

بقسمة الطرفين على العدد 4

مجموعة الحل

$8x - 5 \leq 4x + 7$
 $4x - 5 \leq 7$
 $4x \leq 12$
 $x \leq 3$
 $(-\infty, 3]$

الوحدة 1: البرمجة الخطية
أستعد لدراسة الوحدة

أستعمال المتباينات الخطية بمتغيرين للتعبير عن موقف حياتي (الدرس 1)

13 تجارة: إذا علمت أن نجارًا يريد شراء نوعين من الخشب، لا يزيد ثمنهما الكلي على JD 72، ووجد أن ثمن المتر الطولي من النوع الأول JD 4، ومن النوع الثاني JD 6، فأكتب متباينة خطية بمتغيرين تمثل كمية الخشب التي يمكن للنجار شراؤها من كل نوع. $4x + 6y \leq 72$

14 تسويق: تريد سامية شراء العنب والتفاح، بحيث لا يزيد المبلغ الذي تدفعه ثمنًا لكلًا النوعين على JD 6 إذا كان ثمن الكيلوغرام الواحد من العنب JD 1.5، و ثمن الكيلوغرام الواحد من التفاح JD 1، فأكتب متباينة خطية بمتغيرين تمثل عدد الكيلوغرامات التي يمكن لسامية أن تشتريها من كل نوع. $1.5x + y \leq 6$

مثال: إذا علمت أنّ لدى عمّار 60 دقيقة على الأكثر لإنهاء الواجب المنزلي لمادتي الرياضيات والمعلوم، فأكتب متباينة خطية بمتغيرين تمثل عدد الدقائق التي يمكن أن يقضيها عمّار في حل كل واجب.

يمكنني اتباع الإجراءات الآتية، لكتابة المتباينة المطلوبة:

بالكلمات: عدد الدقائق اللازمة لإنهاء الواجب المنزلي على الأكثر 60 دقيقة.

أختار متغيرًا: ليكن x ممثلًا لعدد الدقائق اللازمة لإنهاء واجب الرياضيات، و y عدد الدقائق اللازمة لإنهاء واجب العلوم.

أكتب المتباينة: $x + y \leq 60$

تمثيل معادلة خطية بمتغيرين في المستوى الإحداثي (الدرس 1)

أمثل كلاً من المعادلات الآتية في المستوى الإحداثي: (17-15)، انظر ملحق الإجابات.

15 $x - 2y = 10$ 16 $3x + y = 27$ 17 $-7x - 2y = -14$

8

الوحدة 1: البرمجة الخطية

أستعد لدراسة الوحدة

مثال: أمثل المعادلة: $2x + 3y = 6$ في المستوى الإحداثي.

لتمثيل المعادلة الخطية، أجد نقطة تقاطع المستقيم مع المحور x بتعويض $y = 0$ ، ثم أجد نقطة تقاطعه مع

المحور y بتعويض $x = 0$:

$$2x + 3(0) = 6$$

$$x = 3$$

بتعويض $y = 0$ في المعادلة

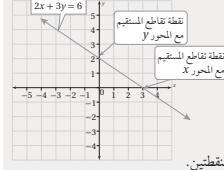
$$2(0) + 3y = 6$$

$$y = 2$$

بتعويض $x = 0$ في المعادلة

إذن، نقطة تقاطع المستقيم مع المحور x هي $(3, 0)$ ، ونقطة تقاطعه مع المحور y هي $(0, 2)$.

لتمثيل المعادلة بيانيًا، أرسم في المستوى الإحداثي مستقيماً يمر بهاتين النقطتين.



حلّ نظام مُكوّن من معادلتين خطيتين بطريقة الحذف (الدرس 3)

أحلّ أنظمة المعادلات الخطية الآتية بطريقة الحذف:

19 $x + y = 5$

$x - y = 1$ (3, 2)

20 $2x + y = 9$

$x - y = 0$ (3, 3)

21 $x - y = 5$

$x + 2y = -1$ (3, -2)

مثال: أحلّ نظام المعادلات الخطية الآتي بطريقة الحذف:

$$2x + y = 4$$

$$x + 3y = 7$$

$$2x + y = 4$$

$$2x + 6y = 14$$

$$-5y = -10$$

$$y = 2$$

$$x + 3(2) = 7$$

$$x = 1$$

$$(1, 2)$$

المعادلة الأولى

بضرب المعادلة الثانية في العدد 2

يطرح المعادلتين

بقسمة طرفي المعادلة على العدد -5

بتعويض قيمة y في المعادلة الثانية

ب طرح العدد 6 من الطرفين

حلّ النظام

الدرس 1

حلّ المتباينة الخطية بمتغيرين بيانيًا Solving Linear Inequality in Two Variables Graphically

أحدّد إذا كان الزوج المرتب يمثل حلًّا للمتباينة: $2x - 8y \geq -6$ في كلِّ ممّا يأتي:

1 $(1, 1)$

النقطة $(1, 1)$ حل للمتباينة.

2 $(0, 3)$

النقطة $(0, 3)$ ليست حلًّا للمتباينة.

3 $(2, -3)$

النقطة $(2, -3)$ حل للمتباينة.

4 أحدّد المتباينة الخطية التي يمثّل الزوج $(2, -1)$ حلًّا لها ممّا يأتي:

$x + y < 1$

$2x + 3y \geq 4$

$5x - y > -2$

أمثّل كلّاً من المتباينات الخطية الآتية في المستوى الإحداثي: $(5, -10)$ ، أنظر ملحق الإجابات.

5 $7x - 2y < 5$

6 $-6x + 4y \geq -2$

7 $5x + 7y \leq 3$

8 $-x - y > -1$

9 $x - 9y \geq -6$

10 $-4x - 7y < 8$

(11-14)، أنظر ملحق الإجابات.

11 طلاء: أراد زياد شراء نوعين من ألوان الطلاء، سعر النوع الأول دينار واحد لكل كيلوغرام، وسعر النوع الثاني 1.25 دينار لكل كيلوغرام. كم كيلوغرامًا من كل نوع سيشتري زياد إذا كان معه 6 دنانير؟

12 مطاعم: يبيع مطعم للوجبات السريعة نوعين من الوجبات، سعر النوع الأول 4 دنانير، وسعر النوع الثاني 3 دنانير. أجد عدد الوجبات التي يجب بيعها من كل نوع يوميًا، بحيث لا يقل سعرها عن مصروفات المطعم اليومية التي تبلغ 750 دينارًا.

13 صناعة: يُنتج مصنع نوعين من أنابيب الماء، سعر النوع الأول ديناران للمتر، وسعر النوع الثاني 1.5 دينار للمتر. أجد عدد الأمتار التي يُمكن إنتاجها من كل نوع، بحيث لا تقل إيرادات المصنع عن 3200 دينار يوميًا.

14 تُستعمل 18 kg من مادة البلاستيك لصنع خزّان مياه صغير، وتُستعمل 40 kg من المادة نفسها لصنع خزّان مياه كبير. أجد عدد الخزّانات الصغيرة والكبيرة التي يُمكن صنعها باستعمال 1000 kg من مادة البلاستيك.

ملاحظات

الدرس 2

حلّ نظام متباينات خطية بمتغيرين بيانيًا Solving System of Linear Inequalities in Two Variables Graphically

أمثل منطقة حلّ كل من أنظمة المتباينات الآتية، ثم أتبع من صحة الحلّ: (1-8)، أنظر ملحق الإجابات.

- 1 $7x - 5y > 1$
 $x + 3y < 1$
- 2 $-8x - 5y \leq -3$
 $2x + 7y < 6$
- 3 $4x - 8y \geq 5$
 $-2y + x < -3$
- 4 $9x + 3y \leq 6$
 $3x + y \geq 2$
- 5 $-x - y \leq 2$
 $7x - 6y \geq 4$
 $2x + 5y > 4$
- 6 $9x + y < 8$
 $4x + 3y \geq 6$
 $-8x + y \geq -5$
- 7 $x - 3y < 1$
 $2x - 6y \geq 5$
 $4x - 12y \geq 9$
- 8 $-6x - 3y \geq -12$
 $3x + \frac{3}{2}y \geq 6$
 $x + \frac{1}{2}y \leq 2$

عمل خيري: مع حاتم 20 دينارًا، أراد أن يشتري بها نوعين من وجبات الإفطار في شهر رمضان للتصدق بها، فوجد أنّ سعر النوع الأول (A) هو 1.5 دينار، وسعر النوع الثاني (B) هو ديناران، وقد قرّر شراء أكثر من 9 وجبات من كلا النوعين:

9 أكتب نظام المتباينات الخطية الذي يمثل عدد الوجبات التي يمكن لحاتم شراؤها من كلا النوعين. أنظر ملحق الإجابات.

10 أمثل نظام المتباينات بيانيًا. أنظر ملحق الإجابات.

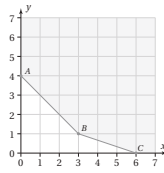
11 أجد ثلاثة حلول ممكنة لنظام المتباينات الآتي:

$$\begin{aligned} x + y &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

(1,1), (2,2), (0,0)

الدرس 3

البرمجة الخطية Linear Programming



1 إذا كان التمثيل البياني للقيود الآتية كما في الشكل المجاور، فأجد إحداثي النقطة (x, y) التي تجعل الاقتران: $Q = 4x + 2y$ أصغر ما يمكن:

$$\begin{aligned} x + y &\geq 4 \\ x + 3y &\geq 6 \\ x &\geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

أصغر قيمة هي $Q = 8$ عند النقطة $(0, 4)$.

2 أجد إحداثي النقطة (x, y) التي تجعل الاقتران: $W = x + 2y$ أكبر ما يمكن ضمن القيود الآتية:

$$\begin{aligned} x + y &\leq 20 \\ 2x + y &\leq 30 \\ x &\geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

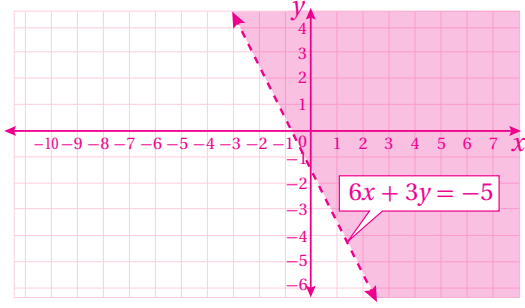
أكبر قيمة هي $W = 40$ عند النقطة $(0, 20)$.

القسم	النوع A	النوع B
التجميع	2 h	2 h
الدهان	4 h	1 h
التغليف	1 h	0.5 h

3 دراجات هوائية: يُنتج مصنع نوعين من الدراجات الهوائية A, B. ويُبين الجدول المجاور عدد الساعات التي يستغرقها إنتاج كل من النوعين في أقسام المصنع الثلاثة. إذا كان عدد ساعات العمل الأسبوعية في كل قسم لا يزيد على 40 h للتجميع، و 48 h للدهان، و 13 h للتغليف، وكان ربح الدراجة الواحدة المباعة 45 دينارًا للنوع A، و 30 دينارًا للنوع B، فكم دراجة من كل نوع يتعين على المصنع إنتاجها أسبوعيًا لتحقيق أكبر ربح ممكن؟ أنظر ملحق الإجابات.

4 صاللة زفاف: أرادت فاطمة دعوة 250 شخصًا إلى حفل زفاف، وتعيّن عليها استئجار طاولات ليجلس حولها المدعوون. عرضت عليها صاللة زفاف تأجيرها نوعين من الطاولات: طاولات مستطيلة الشكل تسع لـ 6 أشخاص، وتبلغ تكلفة استئجارها 28 دينارًا، وطاولات دائرية الشكل تسع لـ 10 أشخاص، وتبلغ تكلفة استئجارها 52 دينارًا. إذا كانت الصاللة تسع 35 طاولة من كلا النوعين على الأكثر، وكان أكبر عدد يمكن توفيره من الطاولات المستطيلة الشكل 15 طاولة، فما عدد الطاولات التي يمكن لفاطمة استئجارها من كلا النوعين بأقل تكلفة ممكنة؟ أنظر ملحق الإجابات.

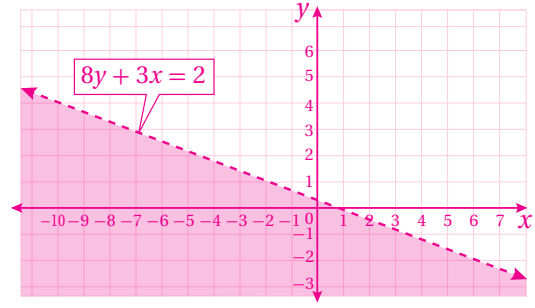
ملاحظات



(18)

الدرس 1 - إجابة الأسئلة في بند (أَتَدَرَّب وَأَحْلُ الْمَسَائِل):

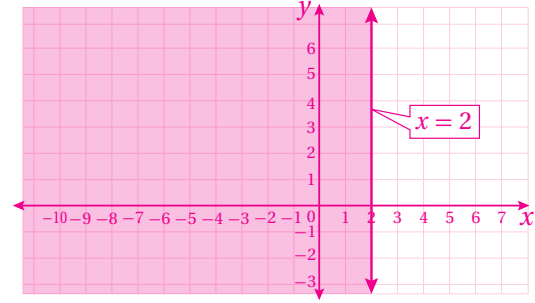
(13)



(19)

بتعويض $x = 20$ و $y = 18$ ينتج $96 \geq 93$ ، وهي عبارة صحيحة.
إذن، تحصل منى على درجة A.

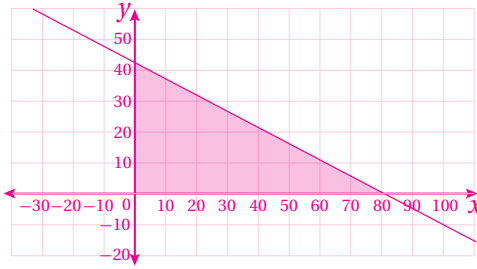
(14)



(20)

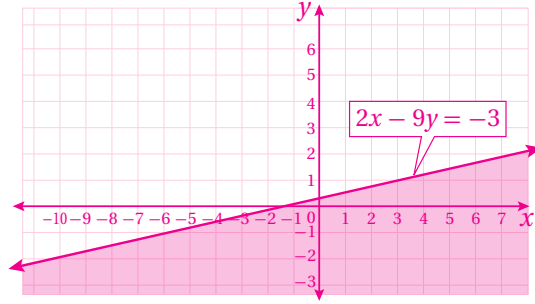
التعبير عن المسألة بالمتباينة: $50x + 95y \leq 4000$

وبتمثيلها بيانياً، أجد منطقة الحل.



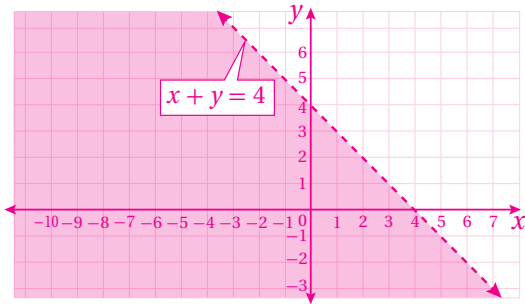
أقبل جميع الأزواج المُرتَّبة (x, y) التي إحداثياتها أعداد صحيحة غير سالبة وواقعة في منطقة الحل.

(15)

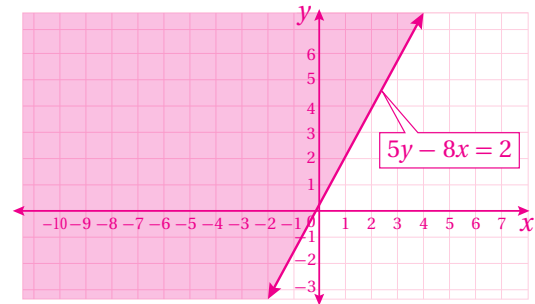


(21)

أقبل جميع الإجابات الصحيحة، مثل التمثيل البياني الآتي:



(16)

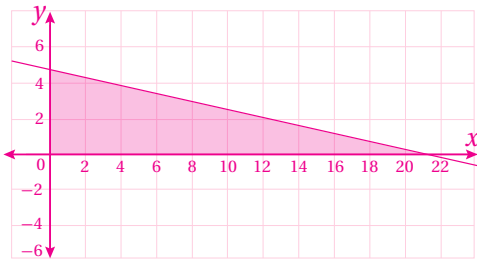


(23)

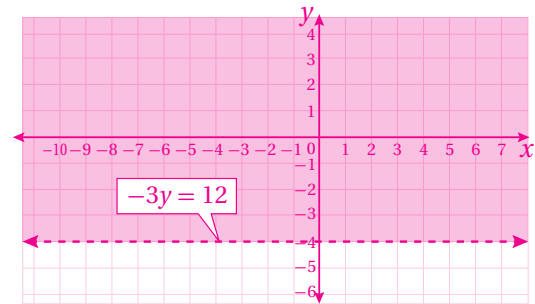
التعبير عن المسألة بالمتباينة: $10x + 45y \leq 214$

حيث x عدد الأساور، و y عدد الأطواق.

وبتمثيلها بيانياً، أجد منطقة الحل.



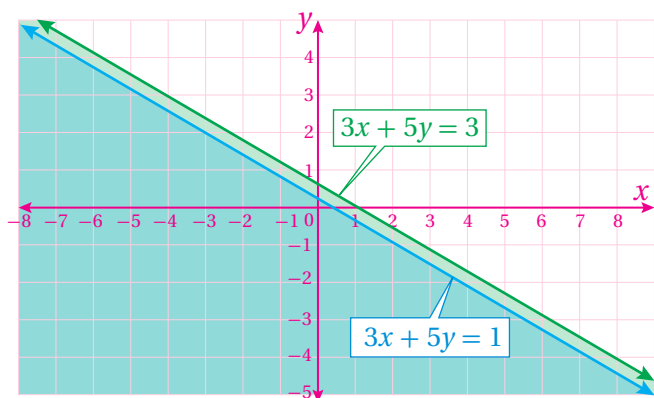
(17)



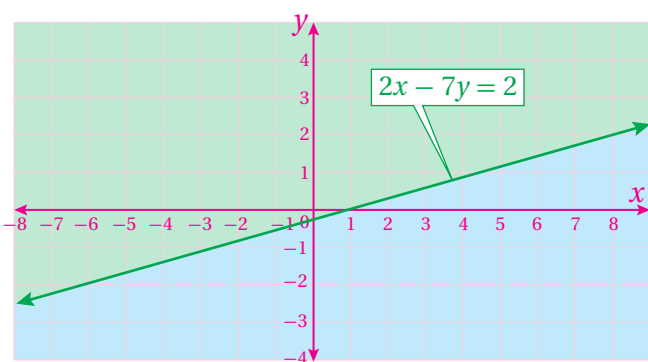
أقبل جميع الأزواج المُرتَّبة (x, y) التي إحداثياتها أعداد صحيحة غير سالبة وواقعة في منطقة الحل.

الدرس 2 - إجابة الأسئلة في بند (أتحقق من فهمي 3):

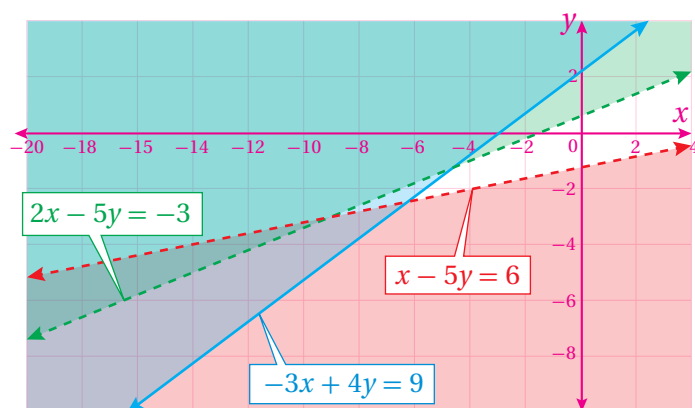
(4)



لا يوجد حل لهذا لنظام، لأن مجموعة حل $2x - 7y \leq 2$ هي المستقيم الحدودي والمنطقة الواقعة فوقه، ومجموعة حل $2x - 7y > 2$ هي المنطقة الواقعة تحت المستقيم الحدودي نفسه، فلا يوجد منطقة مشتركة بين الحلين.

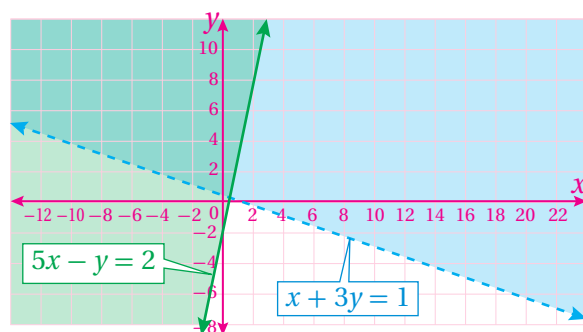


(5)



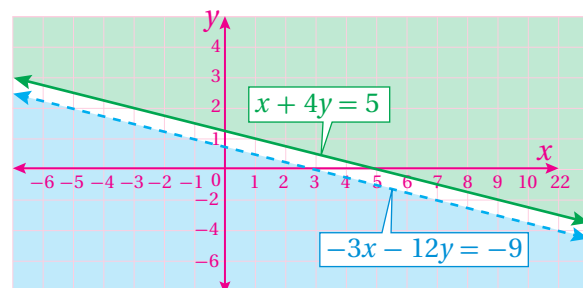
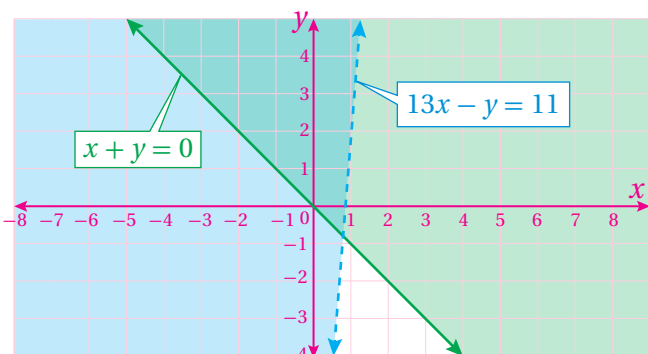
الدرس 2 - إجابة الأسئلة في بند (أندرب وأحل المسائل):

(1)



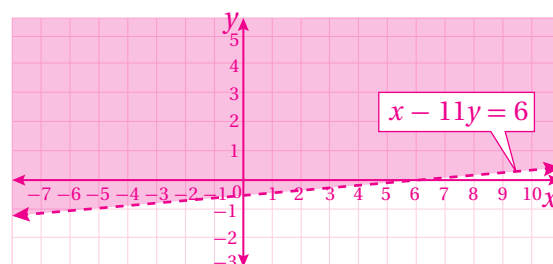
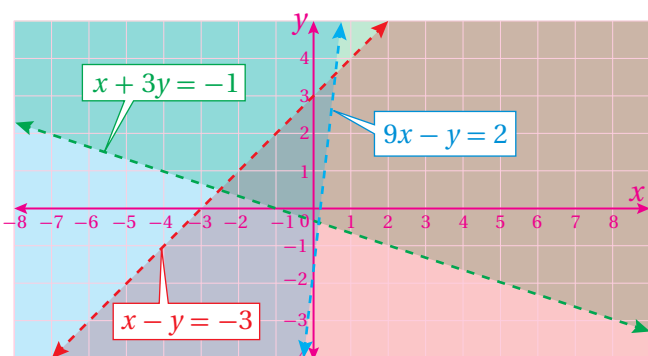
(6)

(2) لا توجد منطقة مشتركة؛ أي لا يوجد حل.



(7)

(3) المتبايتان هما نفس المتباينة.



أفترض أن عدد تذاكر الدرجة السياحية هو x ،
وأن عدد تذاكر الدرجة الخاصة هو y .
بكتابة نظام المتباينات الذي يُمثل المسألة:

$$25x + 50y \geq 1600$$

$$x + y \leq 50$$

بتمثيل النظام بيانيًا:



أقبل جميع الأزواج المُرتَّبة (x, y) التي إحداثياتها أعداد صحيحة غير سالبة وواقعة في منطقة الحل؛ لأنها تُمثل أعداد تذاكر سفر.

أفترض أن عدد النقاط في الرياضيات هو x ، وأن عدد النقاط في اللغة الإنجليزية هو y .

بكتابة نظام المتباينات الذي يُمثل المسألة:

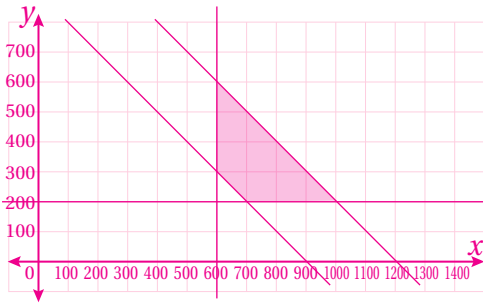
$$x + y \geq 900$$

$$x + y \leq 1200$$

$$x \geq 600$$

$$y \geq 200$$

بتمثيل النظام بيانيًا:

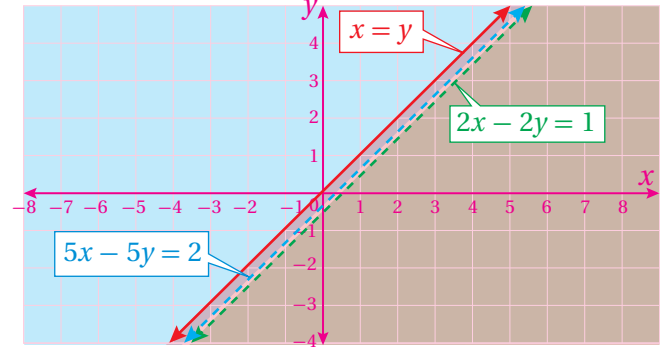


أقبل جميع الأزواج المُرتَّبة (x, y) التي إحداثياتها من مضاعفات المئة، وهي تقع في منطقة الحل مثل:

(1000, 200), (700, 200), (600, 300)، علمًا بأنه يوجد 14 زوجًا تحقق النظام.

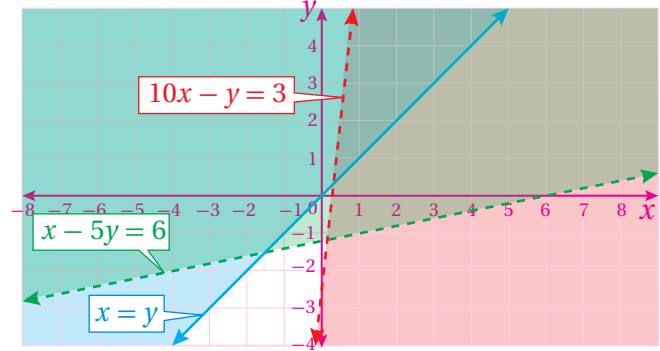
(11)

لا توجد منطقة مشتركة بين حلول المتباينات الثلاث بسبب تناقض المتباينتين الأوليين.



(8)

(9)



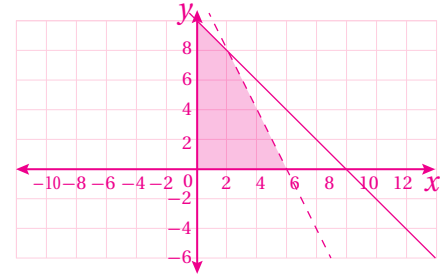
بكتابة نظام المتباينات الذي يُمثل المسألة:

(10)

$$x + y \leq 10$$

$$2x + y < 12$$

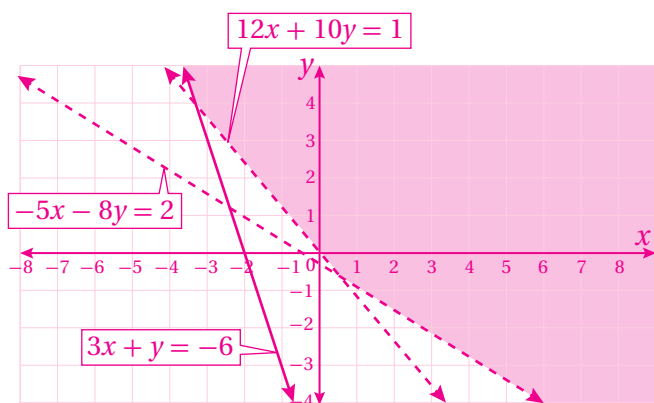
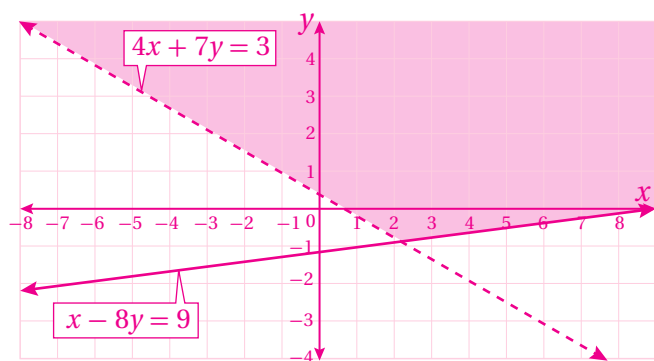
بتمثيل النظام بيانيًا:



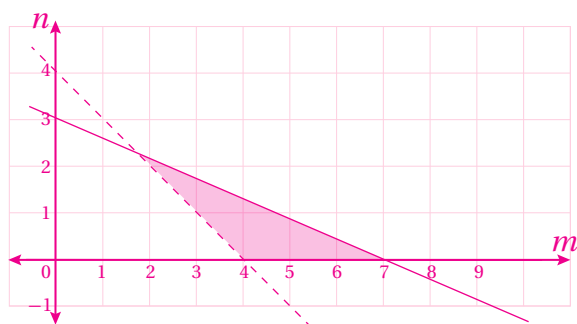
أقبل جميع الأزواج المُرتَّبة (x, y) التي إحداثياتها أعداد صحيحة غير سالبة وواقعة في منطقة الحل؛ لأنها تُمثل أعداد أشخاص.

إجابة الأسئلة في بند (اختبار نهاية الوحدة):

(5)



بتمثيل النظام بيانياً:



الزوج المرتب الوحيد الذي إحداثياته عدداً صحيحاً موجبان
ضمن منطقة الحل هو (4,1).

(14) أفترض أن عدد السيارات الصغيرة هو x ، وأن عدد السيارات الكبيرة هو y .

بكتابة نظام المتباينات الذي يُمثل المسألة:

$$2x + 3y \leq 75$$

$$x + y \leq 30$$

بتمثيل النظام بيانياً:



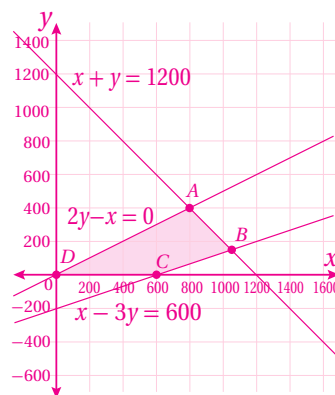
(6)

أقبل جميع الأزواج المرتبة (x, y) التي إحداثياتها أعداد صحيحة غير سالبة وواقعة في منطقة الحل؛ لأنها تُمثل أعداد سيارات.

الدرس 3 - إجابة الأسئلة في بند (أُتدرَّب وأحل المسائل):

(7) x : عدد علب الشوكولاتة المغطاة بالفستق، y : عدد علب الشوكولاتة المغطاة بالبندق.

المطلوب: إيجاد أكبر قيمة للاقتران.



$$P = 1.5x + 2y$$

تحت القيود:

$$x + y \leq 1200$$

$$2y - x \leq 0$$

$$x - 3y \leq 600$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

رؤوس منطقة الحل	$P = 1.5x + 2y$
$D(0, 0)$	$P = 0$
$C(600, 0)$	$P = 1.5(600) + 0 = 900$
$B(1050, 150)$	$P = 1.5(1050) + 2(150) = 1875$
$A(800, 400)$	$P = 1.5(800) + 2(400) = 2000$

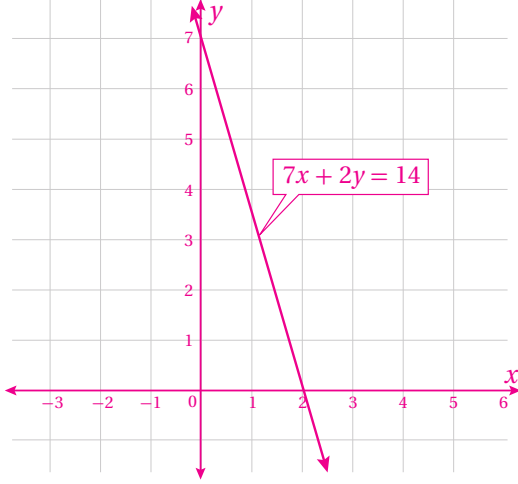
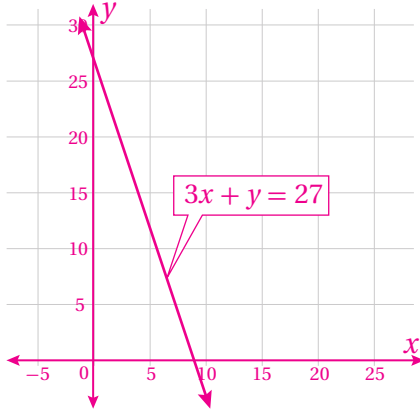
أكبر ربح مُمكن هو 2000 دينار، وذلك عند إنتاج 800 علب شوكولاتة مغطاة بالفستق و 400 علب شوكولاتة مغطاة بالبندق وبيعها شهرياً.

(10) أكبر ربح هو $P = 16$ ، وذلك عند أي من النقاط:

(10, 3), (8, 4), (6, 5), (4, 6)، أو أي نقطة إحداثياتها عدداً

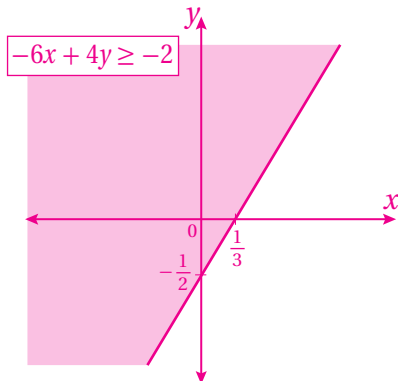
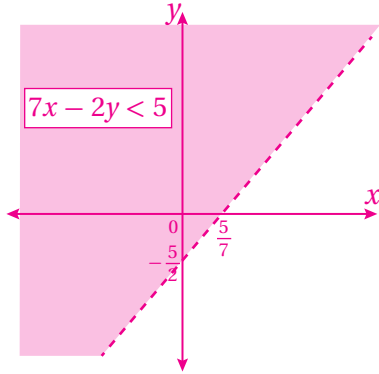
صحيحان، وهي تقع على القطعة المستقيمة التي طرفاها النقطتان

C, D ؛ لأنّ الاقتران الهدف P يوازي هذه القطعة المستقيمة.



كتاب التمارين - إجابة أسئلة الدرس (1):

(5)

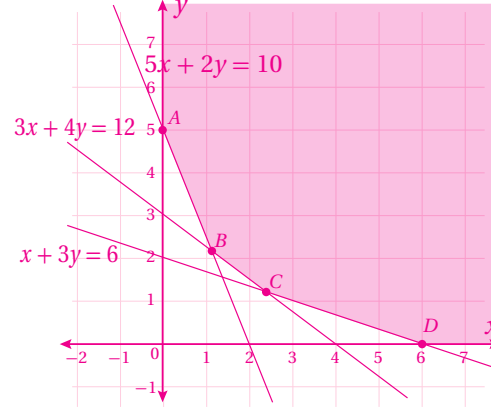


(6)

(16)

(13) x : عدد كيلوغرامات الطحين العادي، y : عدد كيلوغرامات طحين الشوفان.

المطلوب: إيجاد أصغر قيمة للاقتران.



$$C = 0.5x + 0.8y$$

تحت القيود:

$$3x + 4y \geq 12$$

$$5x + 2y \geq 10$$

$$x + 3y \geq 6$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

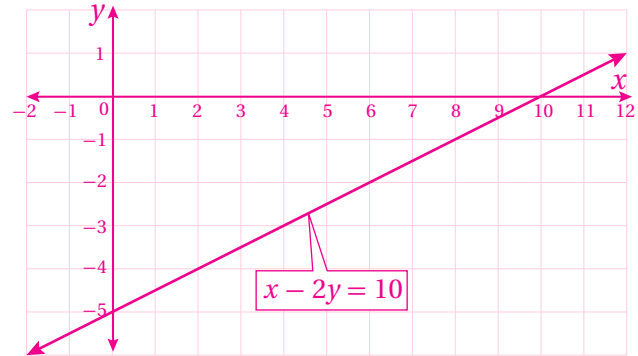
(17)

رؤوس منطقة الحل	$C = 0.5x + 0.8y$
$A(0, 5)$	$C = 0 + 0.8(5) = 4$
$B(\frac{8}{7}, \frac{15}{7})$	$C = 0.5(\frac{8}{7}) + 0.8(\frac{15}{7}) \approx 2.29$
$C(\frac{12}{5}, \frac{6}{5})$	$C = 0.5(\frac{12}{5}) + 0.8(\frac{6}{5}) = 2.16$
$D(6, 0)$	$C = 0.5(6) + 0.8(0) = 3$

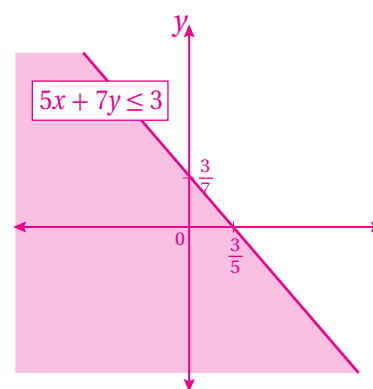
أقل تكلفة مُمكنة هي 2.16 من الدينار، وذلك عند خلط 2.4 kg من الطحين العادي مع 1.2 kg من طحين الشوفان.

كتاب التمارين - إجابة الأسئلة في بند (أستعد لدراسة الوحدة):

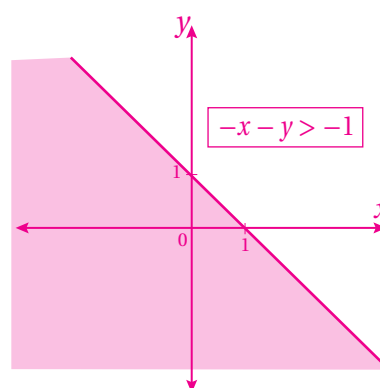
(15)



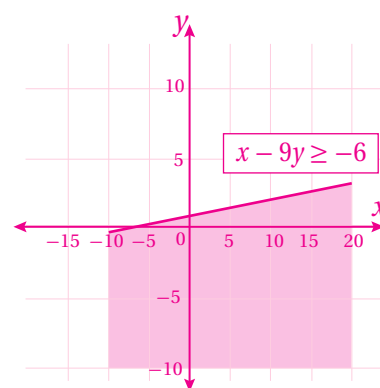
(7)



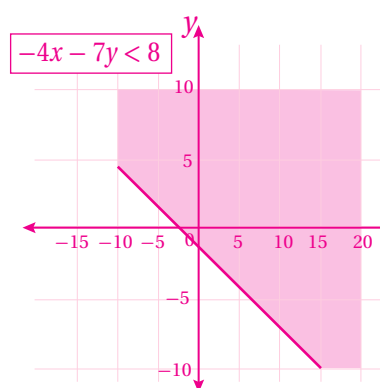
(8)



(9)

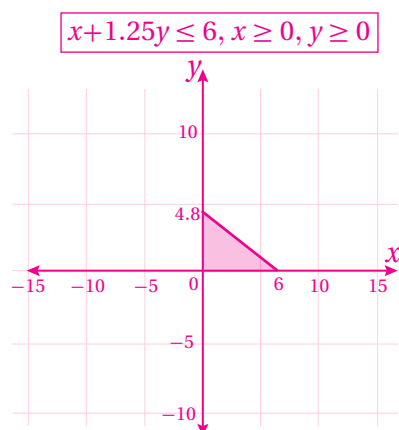


(10)



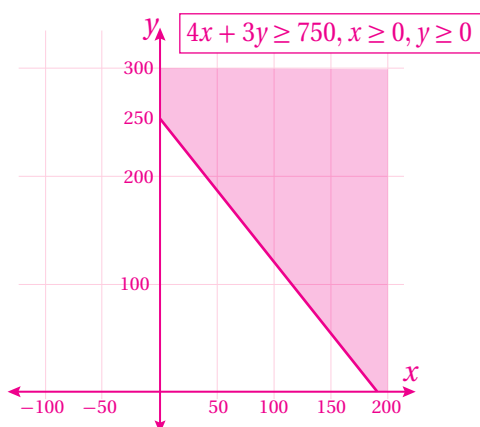
(11)

أختار أي زوج مُرتَّب من منطقة الحل الواقعة في الربع الأول التي تُمثِّل حل المتباينة: $x + 1.25y \leq 6$ ، حيث x عدد الكيلوغرامات من النوع الأول، و y عدد الكيلوغرامات من النوع الثاني، مثل: $(1, 3)$ ، $(4, 0)$ ، $(5, 0)$ ، $(6, 0)$ ، وغيرها كثير.



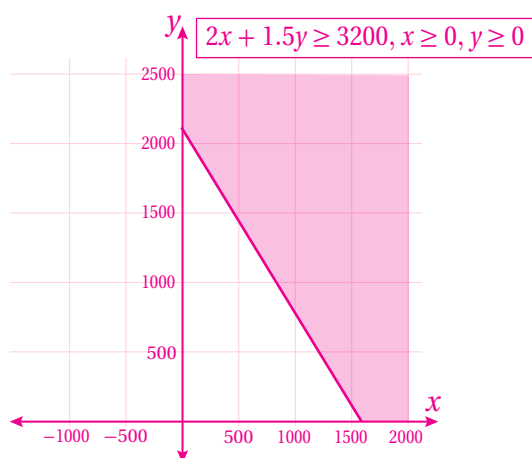
(12)

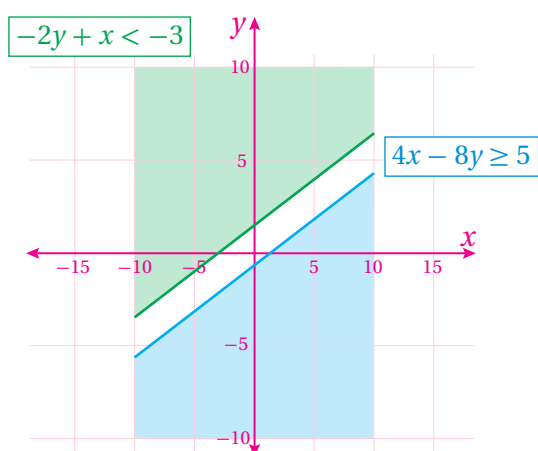
أختار أي حل صحيح من منطقة حل المتباينة: $4x + 3y \geq 750$ ، حيث x عدد وجبات النوع الأول، و y عدد وجبات النوع الثاني.



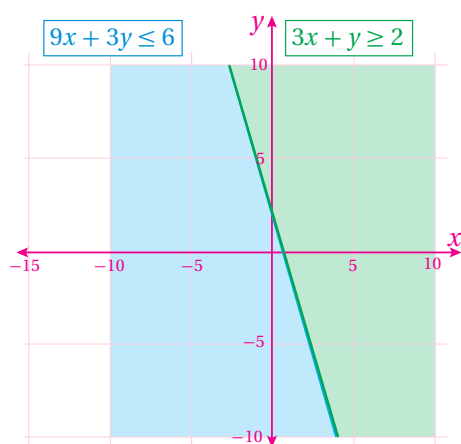
(13)

أختار أي حل من منطقة حل المتباينة: $2x + 1.5y \geq 3200$ ، حيث x عدد أمتار النوع الأول، و y عدد أمتار النوع الثاني.

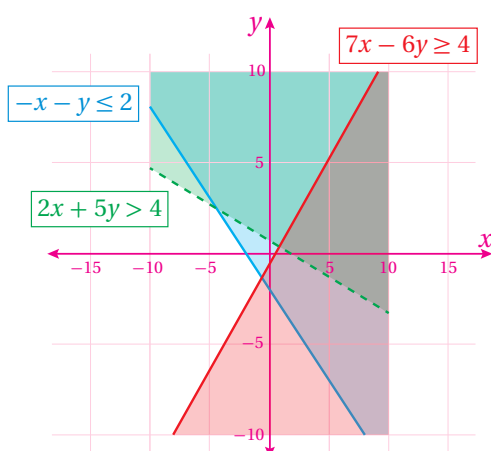




لا توجد منطقة مشتركة؛ لذا لا يوجد حل للنظام.



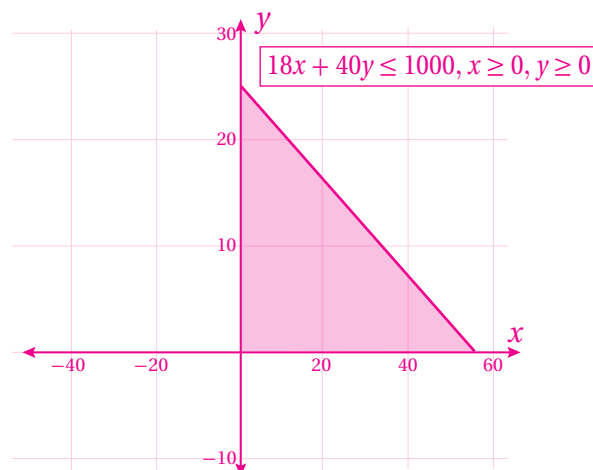
منطقة الحل هي فقط المستقيم: $3x + y = 2$ ، وهو يُمثّل تقاطع المنطقتين.



للتحقّق من صحة الحل، أختار النقطة $(10, 0)$ ، وأعوّضها في المتباينات:

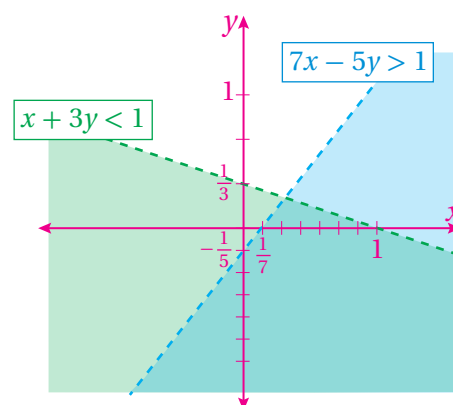
$2(10) + 5(0)$	$=$	20	$>$	4	✓
$7(10) - 6(0)$	$=$	70	$\geq$	4	✓
$-10 - 0$	$=$	-10	$<$	2	✓

- (14) أختار أيّ زوج مُرتّب إحداثياه عدداً صحيحان من منطقة حل المتباينة: $18x + 40y \leq 1000$ ، حيث x عدد الخزانات الصغيرة التي يراد صنعها، و y عدد الخزانات الكبيرة، مثل: $(55, 0)$ ، $(40, 6)$ ، $(15, 20)$ ، $(18, 15)$.



- (4) كتاب التمارين - إجابة أسئلة الدرس (2):

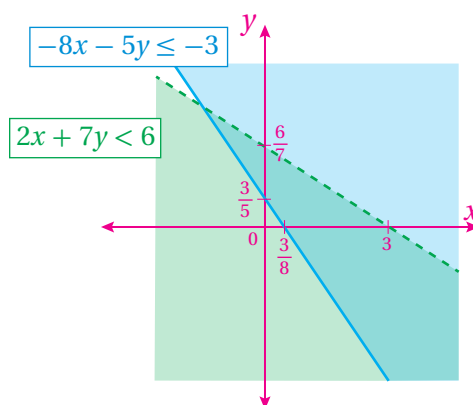
(1)



للتحقّق من صحة الحل، أختار النقطة $(0, -6)$ وأعوّضها في كلتا المتباينتين:

$7(0) - 5(-6)$	$=$	30	$>$	1	✓
$0 + 3(-6)$	$=$	-18	$<$	1	✓

(2)



للتحقّق من صحة الحل، أختار النقطة $(5, -5)$ ، وأعوّضها في كلتا المتباينتين:

$2(5) + 7(-5)$	$=$	-25	$<$	6	✓
$-8(5) - 5(-5)$	$=$	-15	$\leq$	-3	✓

(6)

$$8) \quad -\frac{1}{3}(-6x-3y \geq -12) \Rightarrow 2x + y \leq 4$$

$$\frac{2}{3}(3x + \frac{3}{2}y \geq 6) \Rightarrow 2x + y \geq 4$$

$$2(x + \frac{1}{2}y \leq 2) \Rightarrow 2x + y \leq 4$$

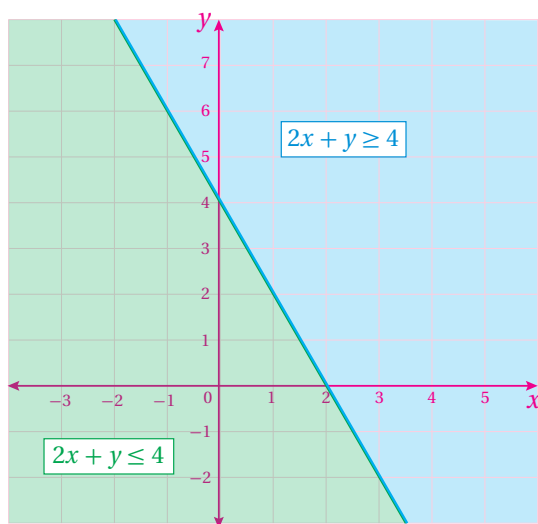
المتباينة الثالثة هي المتباينة الأولى نفسها.

إذن، حل هذا النظام هو حل النظام:

$$2x + y \leq 4$$

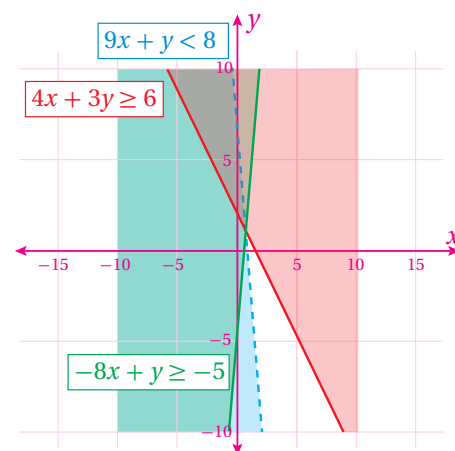
$$2x + y \geq 4$$

وبتمثيله بيانيًا نلاحظ أنَّ المنطقة المشتركة بين الحلين هي نقاط المستقيم الحدودي $2x + y = 4$ فقط.



(9) x عدد وجبات النوع A ، و y عدد وجبات النوع B .

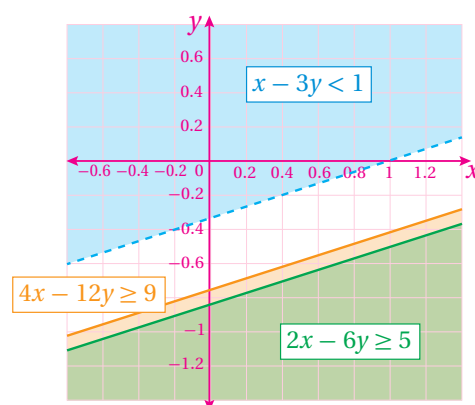
$1.5x + 2y$	$\leq$	20
$x + y$	$\geq$	9
x	$\geq$	0
y	$\geq$	0



للتحقُّق من صحة الحل، أختار النقطة $(0, 6)$ وأعوّضها في المتباينات:

$4(0) + 3(6)$	$=$	18	$\geq$	6	✓
$9(0) + 6$	$=$	6	$<$	8	✓
$-8(0) + 6$	$=$	6	$\geq$	-5	✓

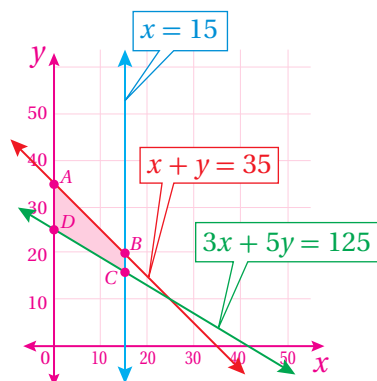
(7)



لا يوجد حل لهذا النظام لعدم وجود منطقة مشتركة بين حلول المتباينات الثلاثة.

(4) x : عدد الطاولات مستطيلة الشكل، و y : عدد الطاولات دائرية الشكل.

المطلوب: إيجاد أصغر قيمة للاقتتران.



$$P = 28x + 52y$$

تحت القيود:

$$6x + 10y \geq 250$$

$$x + y \leq 35$$

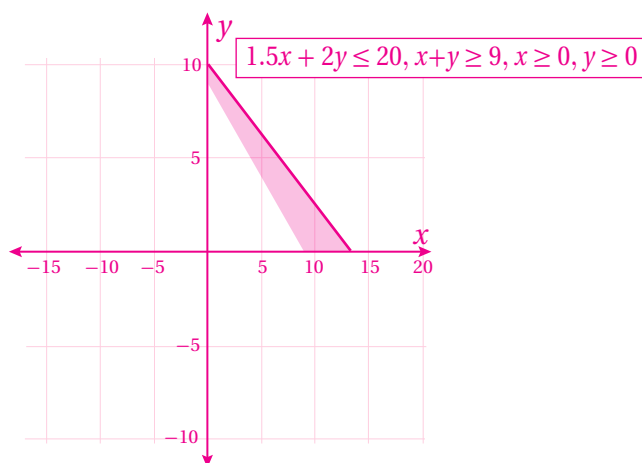
$$x \leq 15$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

رؤوس منطقة الحل	$P = 28x + 52y$
$A(0, 35)$	$P = 28(0) + 52(35) = 1820$
$B(15, 20)$	$P = 28(15) + 52(20) = 1460$
$C(15, 16)$	$P = 28(15) + 52(16) = 1252$
$D(0, 25)$	$P = 28(0) + 52(25) = 1300$

أقل تكلفة مُمكنة هي 1252 دينارًا، وذلك عند استئجار 15 طاولة مستطيلة الشكل و 16 طاولة دائرية الشكل.

(10)



كتاب التمارين - إجابة أسئلة الدرس (3):

(3) x : عدد الدراجات من النوع A، و y : عدد الدراجات من النوع B.

المطلوب: إيجاد أكبر قيمة للاقتتران.

$$P = 45x + 30y$$

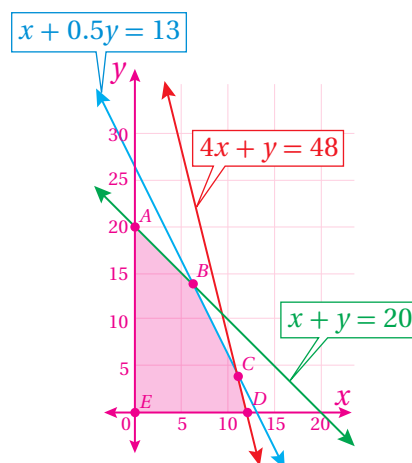
تحت القيود:

$$2x + 2y \leq 40$$

$$4x + y \leq 48$$

$$x + 0.5y \leq 13$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$



رؤوس منطقة الحل	$P = 45x + 30y$
$A(0, 20)$	$P = 45(0) + 30(20) = 600$
$B(6, 14)$	$P = 45(6) + 30(14) = 690$
$C(11, 4)$	$P = 45(11) + 30(4) = 615$
$D(12, 0)$	$P = 45(12) + 30(0) = 540$
$E(0, 0)$	$P = 45(0) + 30(0) = 0$

أكبر ربح هو 690 دينارًا وذلك عند إنتاج 6 دراجات من النوع A و 14 دراجة من النوع B وبيعها.

مبدأ العد والتباديل والتوافيق

Counting Principle, Permutations and Combinations

الوحدة

2



Departures

Time	Flight	Destination	Gate
13:20	SF 2778	AMMAN	20
12:15	PN 0034	DOHA	18
12:20	T3 0529	DUBAI	32
12:30	PN 2415	RIYADH	14
12:50	GI 1872	SANA'A	09
12:55	T3 0944	DAMASCUS	27
13:20	SF 2778	AMMAN	20
13:45	OD 0061	BAGHDAD	31
13:20	SF 2778	AMMAN	20
14:05	OD 3487	ABU DHABI	12
14:30	PN 0194	KUWAIT	03
14:35	SF 0028	BAHRAIN	08

مُخطَّط الوحدة



عدد الحصص	الأدوات اللازمة	المصطلحات	النتائج	اسم الدرس
4	• بطاقات مُرقَّمة، بطاقات حروف، كرات مُلوَّنة.	مبدأ العد الأساسي.	• تعرّف مبدأ العد الأساسي. • توظيف مبدأ العد الأساسي في إيجاد عدد الطرائق الممكنة لإنجاز عمل ما من الواقع.	الدرس 1: مبدأ العد الأساسي.
2	• بطاقات مُرقَّمة، بطاقات حروف، كرات مُلوَّنة، آلة حاسبة.	مضروب العدد.	• تعرّف مضروب العدد الصحيح غير السالب. • توظيف مضروب العدد الصحيح غير السالب في إيجاد عدد الطرائق الممكنة لإنجاز عمل ما من الواقع.	الدرس 2: مضروب العدد.
3	• بطاقات مُرقَّمة، بطاقات حروف، كرات مُلوَّنة، آلة حاسبة.	التباديل.	• تعرّف التباديل. • حساب التباديل يدوياً، وباستعمال الآلة الحاسبة. • توظيف التباديل في حل مسائل حياتية.	الدرس 3: التباديل.
3	• بطاقات مُرقَّمة، بطاقات حروف، كرات مُلوَّنة، آلة حاسبة.	التوافيق.	• تعرّف التوافيق. • حساب التوافيق يدوياً، وباستعمال الآلة الحاسبة. • توظيف التباديل في حل مسائل حياتية.	الدرس 4: التوافيق.
1				اختبار نهاية الوحدة.
13 حصة				مجموع الحصص:

نظرة عامة على الوحدة:

سيتعلم الطلبة في هذه الوحدة مبدأ العد الأساسي بوصفه إحدى الطرائق المهمة لمعرفة عدد الطرائق الممكنة لإجراء تجربة ما. وكذلك سيتعلمون مفهوم مضروب العدد وكيفية استعماله لحل بعض المسائل، بدءاً باستعمال مبدأ العد الأساسي.

سيتعلم الطلبة أيضاً مفهوم التباديل ومفهوم التوافيق وكيفية توظيفهما في إيجاد الطرائق الممكنة لاختيار مجموعة من الأشياء إن كان الترتيب مهماً أو غير مهم.

ما أهمية هذه الوحدة؟

يسهم العدّ بدور رئيس في كثير من العلوم، مثل: الإحصاء، والاحتمال، والحاسوب، ويتطلب أحياناً استعمال طرائق متطورة لإجرائه، ويُعدّ مبدأ العدّ والتباديل والتوافيق إحدى أهم الطرائق التي تُسهّل عملية العدّ عند دراسة الاحتمال. سأتعرّف في هذه الوحدة بعض استعمالات طرائق العدّ في المواقف الحياتية، مثل تنظيم مواعيد إقلاع الطائرات وهبوطها.



Departures

Time	Flight	Destination	Gate
13:20	SF 2778	AMMAN	20
12:15	PN 0034	AMMAN	20
12:20	T3 0529	AMMAN	20
12:30	PN 2415	AMMAN	20
12:50	GI 1872	AMMAN	20
12:55	T3 0944	AMMAN	20
13:20	SF 2778	AMMAN	20
13:45	OD 0061	BAGHDAD	31
13:20	SF 2778	AMMAN	20
14:05	OD 3487	ABU DHABI	12
14:30	PN 0194	KUWAIT	07



سأتعلّم في هذه الوحدة:

- ◀ ماهية مبدأ العدّ الأساسي، واستعماله في حلّ المسائل.
- ◀ ماهية مضروب العدد، واستعماله في حلّ المسائل.
- ◀ ماهية التباديل، واستعمالها في حلّ المسائل.
- ◀ ماهية التوافيق، واستعمالها في حلّ المسائل.

تعلّمتُ سابقاً:

- ✓ استعمال مخطط الشجرة للعدّ.
- ✓ استعمال الجدول للعدّ.
- ✓ استعمال القوائم المنظمة للعدّ.
- ✓ حلّ مسائل حياتية عن طرائق العدّ.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (15 - 13) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

35

الترابط الرأسي بين الصفوف:

الصف الثاني عشر (الأدبي):

- تعرّف التوزيع الاحتمالي الهندسي.
- تعرّف التوزيع الاحتمالي ذي الحدين.
- حساب الاحتمال لكلّ من المُتغيّر العشوائي الهندسي، والمُتغيّر العشوائي ذي الحدين.
- تعرّف التوزيع الطبيعي، وحساب احتمال المُتغيّر العشوائي الطبيعي.

الصف الحادي عشر (الأدبي):

- تعرّف مبدأ العدّ الأساسي، واستعماله لحلّ مسائل حياتية.
- تعرّف مضروب العدد الصحيح غير السالب، واستعماله لحلّ مسائل حياتية.
- تعرّف التباديل، واستعمالها لحلّ مسائل حياتية.
- تعرّف التوافيق، واستعمالها لحلّ مسائل حياتية.

الصف الثامن:

- تحديد عناصر الفضاء العيني باستعمال مخطط الشجرة.
- تحديد عناصر الفضاء العيني باستعمال الجدول.

مبدأ العدّ الأساسي

Fundamental Counting Principle

تعرّف مبدأ العدّ الأساسي، واستعماله في حلّ المسائل.

فكرة الدرس



مبدأ العدّ الأساسي.

المصطلحات



مسألة اليوم



بكم طريقة يُمكن لرولا اختيار قطعة شوكولاتة من بين 3 أنواع، وقطعة بسكويت من بين 6 أنواع؟

يُمكن بسهولة تحديد عدد الطرائق المُمكنة لترتيب عناصر مجموعة صغيرة. فمثلاً، توجد طريقتان فقط لترتيب عناصر المجموعة $\{a, b\}$ ، هما: ab و ba . ولكن إذا كان عدد عناصر المجموعة كبيراً، فإن حصر جميع الطرائق المُمكنة وعدها يصبح أمراً صعباً.

تعلّمت سابقاً بعض طرائق تحديد عناصر الفضاء العيني لتجربة عشوائية، مثل: مخطط الشجرة، والجدول، والقوائم المنظمة؛ لذا يُمكن الاستفادة منها في تحديد عدد الطرائق المُمكنة لإجراء تجربة ما.

مثال 1

أجد باستعمال كل من الطرائق الآتية عدد الطرائق المُمكنة لتكوين رقم سري من منزلتين باستعمال الأرقام: 1, 2, 3، علماً بأنه يجوز تكرار الرقم في المنزلتين:

أتعلّم

تمثّل الأرقام السرية التسعة الناتجة عناصر الفضاء العيني لتجربة تكوين رقم ذي منزلتين من الأرقام: 1, 2, 3.

المرحلة الأولى	المرحلة الثانية	الناتج
1	1	(1, 1)
1	2	(1, 2)
1	3	(1, 3)
2	1	(2, 1)
2	2	(2, 2)
2	3	(2, 3)
3	1	(3, 1)
3	2	(3, 2)
3	3	(3, 3)

مخطط الشجرة:

أرسم شكل شجرة مُكوّنة من مرحلتين؛ الأولى تُمثّل خيارات رقم منزلة العشرات، والثانية تُمثّل خيارات رقم منزلة الآحاد كما في الشكل المجاور. بعد عدّ النواتج، ألاحظ أنه يُمكن تكوين رقم سري من منزلتين بـ 9 طرائق مختلفة.

الاستكشاف

2

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم)، ثم أسألهم:
 - كم نوعاً من الشوكولاتة والبسكويت مع رولا؟ مع رولا 3 أنواع من الشوكولاتة، و6 أنواع من البسكويت.
 - كيف يُمكن تحديد عدد الطرائق التي تُمكن رولا من اختيار قطعة شوكولاتة وقطعة بسكويت؟ ستختلف إجابات الطلبة.
 - أعزّز الإجابات الصحيحة.
 - المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ لذا لا يجب أن أقول لأحد الطلبة: "إجابتك خطأ"، بل أقول له: "لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمن يستطيع إعطاء إجابة أخرى؟"، أو أقول له: "هذه إجابة صحيحة لغير هذا السؤال".

نتائج الدرس



- تعرّف مبدأ العد الأساسي.
- توظيف مبدأ العد الأساسي في إيجاد عدد الطرائق المُمكنة لإنجاز عمل ما.

نتائج التعلّم القبلي:

- تحديد عناصر الفضاء العيني باستعمال مُخطّط الشجرة.
- تحديد عناصر الفضاء العيني باستعمال الجدول.

مراجعة التعلّم القبلي:

- أوجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدّم من موضوعات الدرس في الحصة (إن وُجدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجول بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

التهيئة

1

- أوزّع الطلبة إلى مجموعات رباعية، ثم أعطي كل مجموعة بطاقات، كُتبت عليها الأحرف: A, B, C, D, E, F ، ثم أطلب إلى أفراد كل مجموعة ترتيب الأحرف بأكبر عدد مُمكن من الطرائق المختلفة خلال دقيقة واحدة، وتدوين الترتيب التي توصّلوا إليها في دفاترهم.
- أطلب إلى أفراد المجموعة الذين توصّلوا إلى أكبر عدد من النتائج عرضها على اللوح.
- أطرح على الطلبة السؤالين الآتيين:
 - ما عدد الطرائق التي يُمكن بها ترتيب هذه الأحرف الستة؟ ستختلف إجابات الطلبة.
 - هل يُمكن تحديد عدد هذه الطرائق من دون ترتيبها؟
- أخبر الطلبة أنهم سيتعرّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.

مثال 1

- أذكر الطلبة بما تعلّموه في الصف الثامن من طرائق لتحديد عناصر الفضاء العيني لتجربة عشوائية، وهي: مخطط الشجرة، والجدول، والقائمة المنظمة، مبيّنًا لهم أنّه يُمكن الاستفادة منها في تحديد عدد الطرائق المُمكنة لإجراء تجربة ما.
- أناقش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح، مبيّنًا لهم كيفية تحديد عدد الطرائق المُمكنة لتكوين الرقم السري باستعمال مخطط الشجرة، والجدول، والقائمة المنظمة.

إرشادات:

- أوضح للطلبة أنّه لا يُمكن استعمال طريقة الجدول لإيجاد عدد الطرائق المُمكنة إذا كانت المسألة تحوي أكثر من مرحلتين. أمّا طريقة الشجرة فإنّ استعمالها يزداد صعوبة كلّما زاد عدد المراحل.
- أوضح للطلبة أنّ حل المسألة يصبح مختلفًا إذا تعدّر تكرار الأرقام في المنزلتين، وأنّ ذلك يُؤثّر في عدد الطرائق، ثم أطلب إليهم إعادة حل المثال شرط عدم تكرار الرقم نفسه في المنزلتين.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (أتحقق من فهمي) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم من أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجة.

أفكر

هل يُمكن استعمال الجدول في المسائل التي تحوي أكثر من مرحلتين؟

الجدول:

أعدّ الطرائق المُمكنة لذلك بتنظيم الأرقام السرية التي يُمكن تكوينها باستعمال جدول على النحو الآتي:

	1	2	3
1	1, 1	1, 2	1, 3
2	2, 1	2, 2	2, 3
3	3, 1	3, 2	3, 3

القائمة المنظمة:

أعدّ الطرائق المُمكنة لذلك بكتابة قائمة منظمة، يقترن فيها كل رقم من منزلة العشرات بجميع الأرقام المُمكنة لمنزلة الآحاد في الرقم السري على النحو الآتي:

1, 1	1, 2	1, 3
2, 1	2, 2	2, 3
3, 1	3, 2	3, 3

أتحقق من فهمي

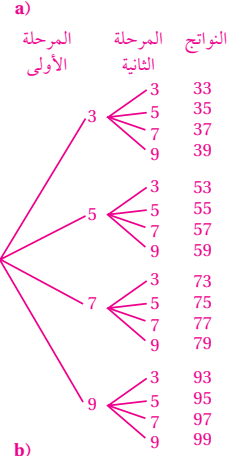
أجد باستعمال كلّ من الطرائق الآتية عدد الطرائق المُمكنة لتكوين رقم سري من منزلتين باستعمال الأرقام: 9, 7, 5, 3، علمًا بأنّه يجوز تكرار الرقم في المنزلتين:

(a) مخطط الشجرة.

(b) الجدول.

(c) القائمة المنظمة.

في كثير من الحالات يكون الاهتمام مُنحصرًا في معرفة عدد الطرائق التي يُمكن بها إجراء تجربة عشوائية مُكوّنة من مراحل عدّة، من دون اهتمام بمعرفة النواتج نفسها، فيُستعمل مبدأ العدّ الأساسي (fundamental counting principle) لإيجاد عدد الطرائق المُمكنة لإجراء التجربة؛ بضرب عدد الطرائق المُمكنة في كل مرحلة من مراحلها بعضها في بعض.



عدد النواتج = 16

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية، واللغة الإنجليزية، مُحفّزًا الطلبة على استعمالها.

تنبيه:

قد يعتقد بعض الطلبة خطأً أنّ ترتيب العناصر في النواتج غير مهمّ؛ لذا يلزم تأكيد أهمية الترتيب. فمثلاً، الناتج (1, 3) مختلف عن الناتج (3, 1).



مثال 2: من الحياة

- أوضح للطلبة أهمية مبدأ العد الأساسي في تحديد عدد الطرائق الممكنة التي يمكن بها إجراء تجربة عشوائية مكونة من مراحل عدة، من دون الاهتمام بمعرفة النواتج نفسها.
- أنقش الطلبة في القاعدة التي ورد ذكرها في صندوق المفهوم الأساسي، وبيّنت كيفية استعمال مبدأ العد لإيجاد العدد الكلي للطرائق التي يمكن بها تنفيذ تجربة عشوائية ما.
- أنقش الطلبة في حل المثال 2 على اللوح، بطرح الأسئلة الآتية عليهم:
 - ◀ ما عدد الطرائق التي يمكن بها اختيار مادة الحصة الأولى؟ 7 طرائق.
 - ◀ ما عدد الطرائق التي يمكن بها اختيار مادة الحصة الثانية؟ 6 طرائق.
 - ◀ ما عدد الطرائق التي يمكن بها اختيار مادة الحصة الثالثة؟ 5 طرائق.
 - ◀ إذن، بكم طريقة يمكن ترتيب المواد الدراسية في الحصة الثلاث الأولى من الجدول؟ باستعمال مبدأ العد الأساسي، فإنه يمكن ترتيب هذه المواد بنحو 210 طرائق.

تنويع التعليم:

...توسعة:

أطلب إلى الطلبة من ذوي المستوى فوق المتوسط كتابة تجربة عشوائية حياتية متعددة المراحل، ثم استعمال مبدأ العد الأساسي لتحديد عدد الطرائق الممكنة لهذه التجربة.

مفهوم أساسي

أتعلم

يُطلق أيضًا على مبدأ العد الأساسي مصطلح قاعدة الضرب.

مبدأ العد الأساسي

للتجربة العشوائية التي يمكن تنفيذها في n مرحلة، إذا كان عدد الطرائق الممكنة في المرحلة الأولى هو K_1 ، وعدد الطرائق الممكنة في المرحلة الثانية هو K_2 ، ...، وعدد الطرائق الممكنة في المرحلة الأخيرة هو K_n ، فإن العدد الكلي للطرائق التي يمكن تنفيذ التجربة بها هو $K_1 \times K_2 \times \dots \times K_n$.

مثال 2: من الحياة

يحتوي جدول الحصص الأسبوعي لمنال على 7 مواد دراسية يوم الثلاثاء. أجد عدد الترتيب الممكنة لأول 3 حصص، علمًا بأنه لا توجد حصص مكررة لأي مادة دراسية في هذا اليوم. يوجد للحصة (المرحلة) الأولى 7 خيارات (مواد دراسية)، في حين يوجد للحصة الثانية 6 خيارات؛ لأن منال لن تعيد دراسة مادة الحصة الأولى، أما الحصة الثالثة فلها 5 خيارات. باستعمال مبدأ العد الأساسي، فإن:

عدد طرائق اختيار مادة الحصة الأولى	×	عدد طرائق اختيار مادة الحصة الثانية	×	عدد طرائق اختيار مادة الحصة الثالثة	=	210
7		6		5		

إذن، توجد 210 طرائق لترتيب المواد الدراسية في الحصة الثلاث الأولى من جدول منال ليوم الثلاثاء، ويصعب كتابة هذه الطرائق لأن عددها كبير.

أتتحقق من فهمي

طعام: بكم طريقة مختلفة يمكن لشخص اختيار وجبة غدائه المكونة من طبق رئيس واحد، وطبق مقبلات واحد، وطبق حساء واحد، من قائمة وجبة اليوم التي يُقدّمها أحد المطاعم؟

$$5 \times 3 \times 4 = 60$$

وجبة اليوم	
المقبلات	الحساء
..... فول	 عدس
..... حمص	 خضار مشكّلة
..... سلطة خضار	 فريكة
..... شوفان	
الطبق الرئيس	
..... منسف	
..... مقلوبة	
..... كبة	
..... كباب	
..... شيش هندي	

- أَوْضَحْ للطلبة أَنَّ العدد الكلي للنواتج المُمكنة لتجربة عشوائية يتأثر بالشروط المفروضة على تنفيذها، ولايجاد عدد النواتج نبدأ بالمرحل المقيدة بشروط.
- أُنَاقِشْ الطلبة في حل المثال 3 على اللوح، ثم أطلب إليهم تبرير سبب نقصان عدد النواتج المُمكنة في الفرعين الثاني والثالث عن عدد النواتج في الفرع الأول، مُؤكِّدًا لهم في الفرع الثالث من المثال أَنَّهُ لَا يُمكن اختيار الحرف الأول (ج) إِلَّا بطريقة واحدة. وبما أَن التكرار غير مسموح به، فَإِنَّ عدد طرائق اختيار الحرف الثاني والحرف الثالث سيتأثر.

...توسعة:

أطلب إلى الطلبة كتابة تجربة عشوائية حياتية مُتعدِّدة المراحل، ومُكوَّنة من فرعين، أحدهما يحتوي شرطًا مُحدَّدًا، ثم تبرير عدد النواتج في كل فرع.

تنويع التعليم:

في المثال 3، قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في إيجاد عدد الطرائق المُمكنة لإجراء تجربة عشوائية في ظل وجود شروط مُحدَّدة على المسألة؛ لذا أُنصَحهم بعض الوقت، وأُقَدِّم لهم أمثلة سهلة عند اللزوم، مُنَوِّها إياهم بضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل؛ ما يساعدهم على حل المسائل بسهولة.

يتأثر العدد الكلي للنواتج المُمكنة للتجربة العشوائية بالشروط المُحدَّدة لكيفية تنفيذ مراحلها، مثل: السماح بتكرار اختيار العناصر أو عدم السماح بذلك، وتثبيت بعض العناصر في مواضع مُعيَّنة.

مثال 3

أجد في كل من الحالات الآتية عدد الطرائق المُمكنة لتكوين كلمة (ليس بالضرورة لها معنى) من 3 أحرف، مُستعملًا الأحرف: أ، ب، ج، د، هـ:

1 إذا سُمِحَ بتكرار الأحرف في الكلمة.

ألاحظ أَنَّهُ يُمكن اختيار أي من الأحرف الخمسة في كل مرحلة.

باستعمال مبدأ العدِّ الأساسي، فَإِنَّ:

عدد طرائق اختيار الحرف الأول	×	عدد طرائق اختيار الحرف الثاني	×	عدد طرائق اختيار الحرف الثالث	=	125
5		5		5		

إذن، يُمكن تكوين 125 كلمة.

2 إذا لم يُسَمَحَ بتكرار الأحرف في الكلمة.

ألاحظ أَن الحرف المُستعمل في الخيار الأول لا يجوز تكراره في الخيار الثاني، وأنَّ الحرفين المُستعملين في الخيارين الأول والثاني لا يجوز استعمالهما في الخيار الثالث.

باستعمال مبدأ العدِّ الأساسي، فَإِنَّ:

عدد طرائق اختيار الحرف الأول	×	عدد طرائق اختيار الحرف الثاني	×	عدد طرائق اختيار الحرف الثالث	=	60
5		4		3		

إذن، يُمكن تكوين 60 كلمة.

أفكر

لماذا نقص عدد الكلمات عند إضافة شرط (عدم السماح بالتكرار)؟

أَتَدْرَبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ



- أُوَجِّهُ الطَّلِبَةَ إِلَى بِنْد (أَتَدْرَبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ)، ثُمَّ أَطْلُبُ إِلَيْهِمْ حُلَّ الْمَسَائِلِ (1-7) ضَمَّنَ مَجْمُوعَاتٍ ثَنَائِيَّةٍ دَاخِلِ الْغُرْفَةِ الصَّفِيَّةِ؛ فَهَذِهِ الْمَسَائِلُ تَحْدِيدًا تَرْتَبِطُ ارْتِبَاطًا مَبَاشِرًا بِأَمَثَلَةِ الدَّرْسِ، وَهِيَ تُسْتَعْمَلُ خَاصَّةً لِتَدْرِيبِ الطَّلِبَةِ عَلَى الْمَفَاهِيمِ نَفْسِهَا، بِصَرَفِ النَّظَرِ عَمَّا إِذَا كَانَتْ الْأَسْئَلَةُ فَرْدِيَّةً أَمْ زَوْجِيَّةً.
- إِذَا وَاجَهَ الطَّلِبَةَ صَعُوبَةً فِي حُلِّ آيَةٍ مَسْأَلَةٍ، فَإِنِّي أَخْتَارُ أَحَدَ الطَّلِبَةِ مِمَّنْ تَمَكَّنَ / تَمَكَّنَتْ مِنْ حُلِّ الْمَسْأَلَةِ؛ لِمُنَاقَشَةِ اسْتِرَاطِيَّيْتِهِ / اسْتِرَاطِيَّيْتِهَا فِي حُلِّ الْمَسْأَلَةِ عَلَى اللُّوْحِ، مُحَفِّزًا الطَّلِبَةَ عَلَى طَرَحِ أَيِّ تَسَاوُلٍ عَنْ خُطُواتِ الْحُلِّ الْمُقَدَّمَةِ مِنَ الزَّمِيلِ / الزَّمِيلَةِ.

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (أَتَدْرَبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ)، فَإِنِّي أَضَعُ كَلًّا مِنْهُمْ مَعَ طَالِبٍ آخَرَ / طَالِبَةٍ أُخْرَى مِنْ ذَوِي الْمَسْتَوَى الْمَتَوَسِّطِ أَوْ مَعَ أَحَدِ الطَّلِبَةِ الْمُتَمَيِّزِينَ؛ لِيَتَشَارَكَوا فِي حُلِّ الْأَسْئَلَةِ.

3 إذا كان الحرف الأول من هذه الكلمات هو (ج)، ولا يُسَمَّحُ بتكرار الأحرف.

أُلاحِظُ أَنَّهُ تَوْجَدُ طَرِيقَةٌ وَاحِدَةٌ لِاخْتِيَارِ الْحُرُوفِ الْأَوَّلِ (ج).

بِاسْتِعْمَالِ مَبْدَأِ الْعَدِّ الْأَسَاسِيِّ، فَإِنَّ:

عدد طرائق اختيار الحرف الأول	عدد طرائق اختيار الحرف الثاني	عدد طرائق اختيار الحرف الثالث	
1	×	4	×
		3	= 12

إِذَنْ، يُمَكِّنُ تَكْوِينَ 12 كَلِمَةً.

أَتَحَقِّقُ مِنْ فَهْمِي

أَجِدُ فِي كُلِّ مِنَ الْحَالَاتِ الْآتِيَةِ عَدَدَ الطَّرَائِقِ الْمُمَكِّنَةِ لِتَكْوِينِ رَقْمٍ مُرَكَّبَةٍ مُكوَّنٍ مِنْ 5 مَنَازِلَ، مُسْتَعْمِلًا الْأَرْقَامَ: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1:

(a) إذا سُوِّحَ بِالتَّكْرَارِ. $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 59049$

(b) إذا لَمْ يُسَمَّحَ بِالتَّكْرَارِ. $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120$

(c) إذا سُوِّحَ بِالتَّكْرَارِ؛ شَرْطُ وَضْعِ الرِّقْمِ 9 فِي أَوَّلِ مَنْزِلَةٍ مِنَ الْيَسَارِ. $1 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 6561$

أَتَدْرَبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ

شراء: تَرُغِبُ حَنِينٌ فِي شُرَاءِ هَاتِفٍ مَحْمُولٍ، فَذَهَبَتْ إِلَى أَحَدِ مَحَالِّ بَيْعِ الْهَوَاتِفِ، وَوَجَدَتْ فِيهِ 4 أَنْوَاعٍ مُخْتَلِفَةٍ مِنَ الْهَوَاتِفِ: H, I, S, N ، لِكُلِّ نَوْعٍ مِنْهَا ثَلَاثَةُ أَلْوَانٍ: أَحْمَرُ: R ، وَأَسْوَدُ: B ، وَأَبْيَضُ: W .

أَجِدُ عَدَدَ الطَّرَائِقِ الْمُمَكِّنَةِ لِشُرَاءِ حَنِينٍ هَاتِفًا مَحْمُولًا بِاسْتِعْمَالِ: (1-3)، أَنْظُرِ الْهَامِشَ.

- 1 مخطط الشجرة.
- 2 الجدول.
- 3 القائمة المنظمة.



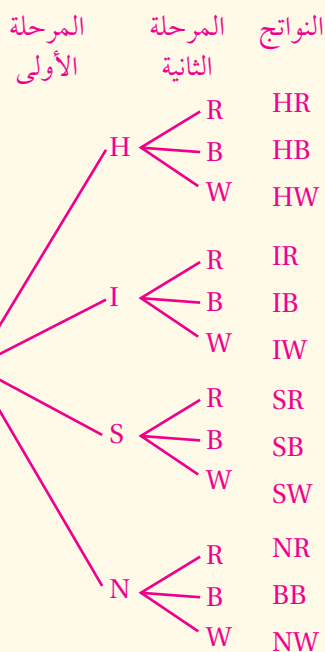
4 طعام: يُعَدُّ مَطْعَمُ الْبَيْتِزَا بِاسْتِعْمَالِ نَوْعَيْنِ مِنَ الْعَجِينِ، وَ8 خَلْطَاتٍ

مُخْتَلِفَةٍ. إِذَا كَانَ لِهَذِهِ الْبَيْتِزَا 3 حُجُومَ، فَكَمْ عَدَدُ الْخِيَارَاتِ الْمُمَكِّنَةِ لِشُرَاءِ

بَيْتِزَا وَاحِدَةٍ مِنْهَا؟ $2 \times 8 \times 3 = 48$

إِجَابَةُ الْأَسْئَلَةِ فِي بِنْد (أَتَدْرَبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ):

1)



2)

	H	I	S	N
R	RH	RI	RS	RN
B	BH	BI	BS	BN
W	WH	WI	WS	WN

3)

RH	RI	RS	RN
BH	BI	BS	BN
WH	WI	WS	WN

- أوجّه الطلبة إلى بند (مهارات التفكير العليا)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (11-13).

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 8, 9 كتاب التمارين: (1 - 7)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (8 - 10) كتاب التمارين: (5 - 10)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (11 - 13) كتاب التمارين: 11

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الآتي بوصفه إثراء لهم:
 - ◀ كم عددًا زوجيًا من 4 منازل يُمكن تكوينه باستعمال الأرقام (0-9)، علمًا بأنه لا يُسمح بالتكرار؟

عدد الأعداد الزوجية التي أحادها 0 إضافةً إلى الأعداد الزوجية التي أحادها 2 أو 4 أو 6 أو 8:

$$(1 \times 9 \times 8 \times 7) + (4 \times 8 \times 8 \times 7) = 2296$$

6 الختام

- أتحقق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بطرح السؤال الآتي عليهم:
 - ◀ تتسوّق هيفاء لشراء مُتطلّبات مدرسية. إذا أرادت أن تشتري واحدًا من كلّ ممّا يأتي: 6 حقائب مدرسية، و8 دفاتر ملاحظات، و3 حافظات أقلام، و3 أنواع من أقلام الحبر، فما عدد البدائل المختلفة المتوافرة لهيفاء؟ $6 \times 8 \times 3 \times 3 = 432$

- 5 يشترط موقع تعليمي في شبكة الإنترنت إنشاء المُستخدم حسابًا محميًا بكلمة مرور تحوي 4 أحرف إنجليزية (من دون اهتمام بحجم الخط) متبوعة بعدد مُكوّن من رقم واحد. ما عدد كلمات المرور المختلفة التي يُمكن إنشاؤها؟
 $26 \times 26 \times 26 \times 26 \times 10 = 4569760$
- كرات: يحتوي صندوق على كرة حمراء، وكرة خضراء، وكرة بيضاء. أجد عدد الطرائق المُمكنة لسحب كرتين على التوالي في الحالتين الآتيتين:

6 إذا سُوح بإعادة الكرة المسحوبة الأولى. $3 \times 3 = 9$

7 إذا لم يُسمح بإعادة الكرة المسحوبة الأولى. $3 \times 2 = 6$

- 8 لدى حاتم ثلاثة قمصان مختلفة الألوان، وبنطالان مختلفا اللون. أجد عدد الطرائق المُمكنة لاختيار حاتم قميصًا وبنطالًا؟

$3 \times 2 = 6$

9 أخلّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم). $3 \times 6 = 18$

مهارات التفكير العليا

- 10 تحدّ: يستطيع بشير استعمال 480 طريقة مختلفة لاختيار وجبة غدائه من بين المقبلات، والطبق الرئيس، والحلويات. إذا كان للمقبلات 6 خيارات، وللطبق الرئيس 10 خيارات، فما عدد الخيارات المُمكنة للحلويات، علمًا بأنه اختار طبقًا واحدًا من كل صنف؟
 $\frac{480}{6 \times 10} = 8$

- 11 تبرير: كم عددًا من 4 منازل يقبل القسمة على 5، ويُمكن تكوينه باستعمال الأرقام: 1, 2, 3, 4, 5، إذا سُوح بالتكرار، مُبرّرًا إجابتي؟
 $5 \times 5 \times 5 \times 1 = 125$

- 12 تحدّ: كم عددًا فرديًا من 3 منازل يُمكن تكوينه باستعمال الأرقام (0-9)، علمًا بأنه لا يُسمح بالتكرار؟
 $5 \times 8 \times 8 = 320$

إرشادات:

- في السؤال 5، ألفت انتباه الطلبة إلى أن الأحرف المختارة لكلمة المرور هي باللغة الإنجليزية. ومن ثمّ، فإنّ عدد الطرائق المُمكنة يتأثّر تبعًا للغة.
- في السؤال 12 (تبرير)، أذكر الطلبة بمفهوم قابلية القسمة عامة، وبمفهوم قابلية القسمة على العدد 5 بوجه خاص، ثم أطرح عليهم مجموعة من الأسئلة تُلَفّت انتباههم إلى أن الشرط في هذه المسألة هو الرقم في منزلة الأحاد.
- في السؤال 13 (تحدّ)، أذكر الطلبة بمفهوم العدد الفردي ومفهوم العدد الزوجي.

مضروب العدد

Factorial

تعرّف مضروب العدد الصحيح غير السالب، واستعماله في حلّ مسائل حياتية.

فكرة الدرس



مضروب العدد.

المصطلحات



مسألة اليوم



شاركت داليا في معرض فني بـ 5 لوحات، خُصّص لعرضها مساحة على الحائط. بكم طريقة مختلفة يُمكنها ترتيب لوحاتها على الحائط في صفٍّ واحد بجانب بعضها؟

يُمكن التعبير عن $1 \times 2 \times 3$ باستعمال الرمز $3!$ الذي يُقرأ: **مضروب** (factorial) العدد ثلاثة.

مضروب العدد

مفهوم أساسي

بالكلمات: مضروب العدد الصحيح الموجب n هو حاصل ضرب الأعداد الصحيحة الموجبة التي هي أصغر من أو تساوي n .

بالرموز: $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$

أتعلّم

بالتعريف، فإن:

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

مثال 1

أجد ناتج كلّ ممّا يأتي:

1 $6!$

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ = 720$$

تعريف المضروب

الناتج

2 $(7-3)!$

$$(7-3)! = 4! \\ = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ = 24$$

بإيجاد ناتج الطرح

تعريف المضروب

الناتج

أفكر

هل العبارة الآتية

صحيحة:

$$?(7-3)! = 7! - 3!$$

نتائج الدرس



- تعرّف مضروب العدد الصحيح غير السالب.
- توظيف مضروب العدد الصحيح غير السالب في إيجاد عدد الطرائق المُمكنة لإنجاز عمل ما.

نتائج التعلّم القبلي:

- توظيف مبدأ العد الأساسي في إيجاد عدد الطرائق المُمكنة لإنجاز عمل ما.

مراجعة التعلّم القبلي:

- أوجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُربّطة بما سيُقدّم من موضوعات الدرس في الحصة (إن وُجدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدرّياتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجّههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

التهيئة

1

- أضع في مُقدّمة الغرفة الصفية ثلاثة مقاعد في صف واحد، ثم أطلب إلى أحد الطلبة اختيار ثلاثة من زملائه، وترتيب جلوسهم على المقاعد الثلاثة بأكبر عدد مُمكن من الطرائق خلال دقيقة.
- أ طرح على الطلبة السؤالين الآتيين:
 - ◀ ما عدد الطرائق التي يُمكن بها ترتيب جلوس الطلبة على المقاعد؟ **6 طرائق.**
 - ◀ هل ترتيب جلوس الطلبة على المقاعد مُهمّ؟ **نعم.**
- أعرّز الإجابات الصحيحة.

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم)، ثم أسألهم:
 - ◀ كم لوحة لداليا في المعرض الفني؟ 5 لوحات.
 - ◀ بكم طريقة يُمكنها اختيار اللوحة التي علّقها في الموقع الأول من اليسار؟ 5 طرائق.
 - ◀ كيف يُمكن تحديد عدد الطرائق التي تستطيع بها داليا ترتيب اللوحات؟ باستعمال مبدأ العد الأساسي.
 - ◀ هل توجد طريقة أخرى لتحديد عدد الطرائق التي تستطيع بها داليا ترتيب اللوحات على الحائط؟
- أخبر الطلبة أنّهم سيتعرّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.
- أعزّز الإجابات الصحيحة.

التدريس

3

مثال 1

- أناقش الطلبة في القاعدة التي ورد ذكرها في صندوق المفهوم الأساسي، وبيّن أنّه يُمكن التعبير عن حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة من 1 إلى n في صورة $n!$.
- أناقش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح، مؤكّداً لهم أهمية تبرير كل خطوة من خطوات الحل.

✓ **إرشاد:** أناقش الطلبة في الأفكار الواردة في الصناديق الهامشية؛ لِمَا لها من أهمية في تعزيز مفاهيم الدرس.

تنبيه:

قد يعتقد بعض الطلبة خطأً أنّ $x! - y! = (x - y)!$ ؛ لذا أوضّح لهم أنّ ذلك غير صحيح عن طريق طرح أمثلة عددية.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية، واللغة الإنجليزية، مُحفّزاً الطلبة على استعمالها.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (أتحقّق من فهمي) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَنْ أخطأ في الإجابة؛ تجنّباً لإحراجهم.

• أَوْضَحْ للطلبة أَنَّهُ يُمكن استعمال مضروب العدد لإيجاد عدد الطرائق اللازمة لإجراء تجربة عشوائية لا تتكرر عناصرها.

• أَناقِشْ الطلبة في حل المثال 2 على اللوح، بطرح الأسئلة الآتية عليهم:

◀ كم زيارة ترغب ماريًا في تنظيمها في عيد الأضحى؟ 3 زيارات.

◀ هل يوجد تكرار في أيٍّ من هذه الزيارات؟ لا.

◀ هل يُمكن استعمال مضروب العدد لإيجاد عدد الطرائق التي يُمكن بها لماريًا ترتيب مواعيد زياراتها؟ لماذا؟ نعم؛ لأنَّ ماريًا تريد تنظيم 3 زيارات، لكلٍّ منها عدد من البدائل من دون تكرار.

المفاهيم العابرة للمواد:

أَوَكِّدْ المفاهيم العابرة للمواد حيثما وردت في كتاب الطالب أو كتاب التمارين. ففي المثال 2، أَعَزَّزْ لدى الطلبة الوعي بالقيم الأخلاقية، بتنظيم حوار معهم عن أهمية صلة الأرحام وزيارة الأقارب.

تنويع التعليم:

...توسعة:

أَطْلُبْ إلى الطلبة من ذوي المستوى فوق المتوسط كتابة تجربة عشوائية حياتية مُتعدِّدة المراحل، ثم استعمال المضروب لتحديد عدد الطرائق المُمكنة لهذه التجربة.

3 $\frac{8!}{5!}$

$$\frac{8!}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!}$$

$$= 8 \times 7 \times 6$$

$$= 336$$

تعريف المضروب

باختصار 5! من البسط والمقام

الناج

أَتَحَقَّقْ من فهمي

أجد ناتج كلِّ ممَّا يأتي:

a) $7!$ 5040 b) $(4+1)!$ 120 c) $4! + 1!$ 25 d) $\frac{12!}{7!}$ 95040

يُمكن استعمال مضروب العدد لحلَّ المسائل بدلًا من استعمال مبدأ العدِّ الأساسي الذي درُسْتُهُ سابقًا.

مثال 2: من الحياة

تُخَطِّطْ ماريًا لزيارة بيت جدِّها، وبيت خالها، وبيت عمِّها أول أيام عيد الأضحى المبارك. بكم طريقة يُمكنها ترتيب مواعيد زياراتها؟

يُمكن تحديد عدد هذه الطرائق باستعمال مضروب العدد 3؛ لأنَّ ماريًا تريد تنظيم 3 زيارات، لكلٍّ منها عدد من البدائل من دون تكرار، فيكون عدد الطرائق مساويًا لمضروب العدد 3:

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

أَتَحَقَّقْ من فهمي

شارك 7 طلبة في سباق، وارتدى كلُّ منهم قميصًا مُرقَّمًا من 1 إلى 7، أجد عدد الطرائق المُمكنة لترتيب وصول الطلبة إلى خط النهاية. $7! = 5040$

يُمكن أيضًا استعمال المضروب لإيجاد عدد طرائق ترتيب عناصر مجموعة؛ سواء أكانت بعض العناصر مُكرَّرة أم لا.

أَتَعَلَّمْ

$$5! = 5 \times 4! = 5 \times 24 = 120$$

بوجه عام، فإنَّ:

$$n! = n(n-1)!$$

أَتَعَلَّمْ

يُمكنني استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد مضروب العدد. فمثلاً، لإيجاد مضروب العدد 6، أضغط على الأزرار الآتية من اليسار إلى اليمين:

$$6 \times 1 =$$

مثال 3

- أَوْصَحْ للطلبة أَنَّهُ يُمكن استعمال مضروب العدد أيضًا لإيجاد عدد الطرائق اللازمة لإجراء تجربة عشوائية تتكرر عناصرها.
- أُنَاقِشْ الطلبة في حل المثال 3 على اللوح، مُؤكِّدًا لَهُم أهمية تبرير كل خطوة من خطوات الحل.
- أَوْصَحْ للطلبة كيفية استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد مضروب العدد، ثم أطلب إليهم التحقق من صحّة الإجابة التي توصل إليها في المثال باستعمال الآلة الحاسبة.

تنبيه:

قد يعتقد بعض الطلبة خطأً أن ترتيب الأحرف المُكرّرة والمُتَشابهة مُهمٌّ؛ فلا يجب استثنائها.

تنويع التعليم:

في المثال 3، قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في إيجاد عدد الطرائق المُمكنة لترتيب حروف الكلمات في حال ورد فيها أحرف مُكرّرة؛ لذا أمنحهم بعض الوقت، وأقدّم لهم أمثلة سهلة عند اللزوم، مثل إيجاد عدد طرائق ترتيب أحرف كلمة SOS، مُنوِّهاً إيّاهم بضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل؛ ما يساعدهم على حل المسائل بسهولة.

التدريب

4

أَتَدَرَّبُ وَأَحِلُّ المسائل

- أُوَجِّهْ الطلبة إلى بند (أَتَدَرَّبُ وَأَحِلُّ المسائل)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1-9) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديداً ترتبط ارتباطاً مباشراً بأمثلة الدرس، وهي تُستعمل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيّة مسألة، فإنني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تمكَّن / تمكَّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته / استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزاً الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل / الزميلة.

مثال 3

أَتَدَرَّبُ

- عدد حروف اللغة العربية 28 حرفاً.
- عدد حروف اللغة الإنجليزية 26 حرفاً.

أجد عدد الطرائق المُمكنة لترتيب حروف كل كلمة ممّا يأتي:

1 JORDAN

ألاحظ أن كلمة (JORDAN) تحوي 6 أحرف مختلفة غير مُكرّرة، وأن عدد الطرائق المُمكنة لترتيب هذه الأحرف يساوي مضروب العدد 6:

$$6! = 720$$

إذن، يوجد 720 كلمة يُمكن تكوينها من ترتيبات مختلفة للأحرف الستة.

2 MOHAMMAD

ألاحظ أن كلمة (MOHAMMAD) تحوي 8 أحرف، وأن الحرف (M) تكرر ثلاث مرّات، وأن الحرف (A) تكرر مرّتين.

لا يُؤثر في الحلّ ترتيب الأحرف المُكرّرة والمُتَشابهة؛ لذا تستثنى طرائق ترتيب الأحرف المُكرّرة عند عدّ الطرائق الكلية المُمكنة لترتيب أحرف الكلمة، وذلك بالقسمة على عدد طرائق ترتيب الأحرف المُكرّرة فيها:

$$8! = 40320$$

عدد طرائق ترتيب 8 أحرف مختلفة

$$3! = 6$$

عدد طرائق ترتيب الحرف المُكرّر M

$$2! = 2$$

عدد طرائق ترتيب الحرف المُكرّر A

$$\frac{8!}{(3!)(2!)} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{(3!)(2!)} = 3360$$

باختصار عدد طرائق ترتيب الحرفين المُكرّرين

إذن، توجد 3360 طريقة لترتيب أحرف كلمة (MOHAMMAD).

أَتَحَقِّقُ من فهمي

أجد عدد الطرائق المُمكنة لترتيب حروف كل كلمة ممّا يأتي:

a) PETRA

$$5! = 120$$

b) AMMAN

$$\frac{5!}{(2!)(2!)} = 30$$



معلومة

البترا (PETRA) مدينة نحتها الأنباط بالصخر منذ أكثر من 2000 عام، ولا يُمكن للزائر دخولها إلا بالسّير في السيق؛ وهو شق بين الجبال الصخرية، طولُه 1200 m تقريباً.

أَتَدْرَبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ

أجد ناتج كلِّ ممَّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

1) $5! = 120$

2) $(18-13)! = 120$

3) $(4+3)! = 5040$

أجد ناتج كلِّ ممَّا يأتي باستعمال الآلة الحاسبة:

4) $\frac{17!}{11!} = 8910720$

5) $\frac{10!}{4! \times 6!} = 210$

6) $\frac{13!}{(6!)(13-6)!} = 1716$

7) **سياحة:** يريد سائح زيارة المعالم الأثرية الآتية:

جرش، أم قيس، البحر الميت، المُدْرَج الروماني، قلعة عجلون. بكم طريقة يُمكنه ترتيب زيارة هذه المواقع الأثرية؟

$5! = 120$

أجد عدد الطرائق المُمكنة لترتيب حروف كل كلمة ممَّا يأتي:

8) PALESTINE $\frac{9!}{2!} = 181440$

9) AJLOUN $6! = 720$

10) **زراعة:** يريد مروان زراعة 4 أشجار لوزيات من أنواع مختلفة في صفٍّ واحد بحديقة منزله. أجد عدد الطرائق

المُمكنة لتنظيم زراعة هذه الأشجار. $4! = 24$

11) **مدرسة:** تريد منال حلَّ الواجبات المدرسية للمواد الآتية:

الرياضيات، اللغة العربية، اللغة الإنجليزية، الثقافة العامة، الجغرافيا.

بكم طريقة يُمكنها ترتيب حلَّ هذه الواجبات؟ $5! = 120$

12) **مطالعة:** تريد داليا قراءة 9 كتب لديها. بكم طريقة يُمكنها ترتيب قراءة هذه الكتب؟ $9! = 362880$

مهارات التفكير العليا

تحدِّ: يوجد في صفٍّ 8 طالبات، يتعيَّن عليهنَّ الجلوس في صفين كما في الشكل المجاور:

13) أجد عدد الطرائق المُمكنة لجلوس هؤلاء الطالبات. $8! = 40320$

14) إذا تعيَّن على نور وشمس الجلوس على مقعد إحدى الزوايا الأربع، فبكم طريقة

يُمكن أن تجلس طالبات الصف؟ $4 \times 3 \times 6! = 8640$

15) إذا قسَّمتِ المعلِّمة طالبات الصف إلى مجموعتين، في كلٍّ منهما 4 طالبات، فبكم طريقة يُمكن أن تجلس طالبات

الصف؛ شرط أن تكون المقاعد الأربعة في الصف الأول للمجموعة الأولى، والمقاعد الأربعة في الصف الثاني

للمجموعة الثانية؟ $4! \times 4! = 576$

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (أَتَدْرَبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ)، فإنَّني أضع كُلاًّ منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المُتميِّزين؛ ليتشاركوا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجِّه الطلبة إلى بند (مهارات التفكير العليا)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (13-15).

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 10, 12 كتاب التمارين: (1-9)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (10-12) كتاب التمارين: (10-12)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (13-15) كتاب التمارين: (10-13)

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الآتي بوصفه إثراءً لهم:
أكتب كُلاًّ ممَّا يأتي باستعمال مضروب العدد:

1) $9 \times 8 \times 7 \times \frac{9!}{6!}$

2) $\frac{16 \times 15}{4 \times 3 \times 2} \times \frac{16!}{14! \times 4!}$

3) $\frac{8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3} \times \frac{8! \times 2!}{5! \times 5!}$

6 الختام

- أتحقِّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بطرح السؤال الآتي عليهم:

أجد عدد الطرائق المُمكنة لترتيب أحرف كل كلمة ممَّا يأتي:

1) TAFILA $\frac{6!}{2!} = 120$

2) MOHANED $7! = 5040$

إرشادات:

- في السؤال 8، أؤكد للطلبة ضرورة الانتباه إلى الأحرف المُكرَّرة.
- في السؤال 14 (تحد)، أوجِّه الطلبة إلى تحديد عدد الطرائق المُمكنة لجلوس كلٍّ من نور وشمس أولاً، مُؤكِّداً ضرورة استعمال مبدأ العد الأساسي في هذه المسألة.
- في السؤال 15 (تحد)، أوضِّح للطلبة كيف يُمكن إيجاد عدد الطرائق المُمكنة لجلوس أفراد المجموعة الأولى وأفراد المجموعة الثانية؛ كلٌّ على حدة، ثم أستمعمل مبدأ العد الأساسي لإيجاد عدد الطرائق المُمكنة لجلوس أفراد المجموعتين.

التباديل Permutations

تعرّف التباديل، واستعمالها في حلّ مسائل حياتية.

المصطلحات

مسألة اليوم



بكم طريقة يمكن لثلاث أخوات من بين خمسين الوقوف بجانب بعضهنّ لتلتقط سميرة صورة لهنّ؟

التباديل (permutations) هي الطرائق الممكنة لاختيار مجموعة من الأشياء، ومراعاة ترتيب اختيار هذه الأشياء.

عدد تباديل الحرف (A): 1	A	توجد طريقة واحدة لترتيب اختيار الحرف (A).
عدد تباديل الحرفين (A, B): 2	AB BA	يمكن اختيار الحرف (B) قبل الحرف (A)، أو بعده.
عدد تباديل الأحرف (A, B, C): 6	ABC ACB CAB BCA CBA	يمكن اختيار الحرف (C) أولاً، أو ثانياً، أو ثالثاً.

قد لا يلزم أحياناً إيجاد عدد طرائق الاختيار لعناصر المجموعة كلها. فمثلاً، إذا أردت تحديد عدد الطرائق الممكنة لاختيار لجنة مكوّنة من 3 أشخاص (رئيس، ومساعد، وعضو)، وترتيبهم من مجموعة تحوي 7 أشخاص، فإنني أستعمل مبدأ العدّ الأساسي كما يأتي:

عدد طرائق اختيار عضو اللجنة	عدد طرائق اختيار مساعد اللجنة	عدد طرائق اختيار رئيس اللجنة	
5	6	7	$5 \times 6 \times 7 = 210$

إذن، يمكنني اختيار 3 أشخاص، وترتيبهم من مجموعة تحوي 7 أشخاص باستعمال 210 طرائق، مُراعياً المُسمّى الوظيفي لكل شخص.

نتائج الدرس

- تعرّف التباديل.
- حساب التباديل يدوياً، وباستعمال الآلة الحاسبة.
- توظيف التباديل في حل مسائل حياتية.

نتائج التعلّم القبلي:

- توظيف مبدأ العدّ الأساسي في إيجاد عدد الطرائق الممكنة لإنجاز عمل ما.
- إيجاد مضروب العدد الصحيح غير السالب.

مراجعة التعلّم القبلي:

- أوجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدّم من موضوعات الدرس في الحصة (إن وُجدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجّهم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

التهيئة

1

- أوزّع الطلبة إلى مجموعات رباعية، ثم أعطي كل مجموعة 7 بطاقات، كُتبت عليها 7 أسماء مختلفة لأشخاص.
- أطلب إلى أفراد كل مجموعة تحديد عدد الطرائق الممكنة لاختيار 3 أشخاص من بين الأشخاص السبعة؛ لتكوين لجنة ثلاثية، يكون فيها أحدهم رئيس اللجنة، والثاني مساعداً، والثالث عضواً في اللجنة.

- أطرح على الطلبة الأسئلة الآتية:

- هل الترتيب مهمّ في اختيار هؤلاء الأشخاص؟ لماذا؟ نعم؛ لأنّ المُسمّى الوظيفي لكلّ منهم مختلف.
- كيف يمكن إيجاد عدد الطرائق التي يمكن بها اختيار الأشخاص الثلاثة لتكوين اللجنة؟ ستختلف إجابات الطلبة.
- ما عدد الطرائق التي يمكن بها اختيار الأشخاص الثلاثة لتكوين اللجنة؟ 210 طرائق.
- أعزّز الإجابات الصحيحة.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية، واللغة الإنجليزية، مُحفّزاً الطلبة على استعمالها.

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم)، ثم أسألهم:

◀ كم عدد الأخوات في المسألة؟ 5 أخوات.

◀ كم أختاً ترغب سميرة في التقاط صورة لها؟ 3 أخوات.

◀ هل ترتيب الأخوات في الصورة مُهم؟ لماذا؟ نعم؛ لأنّه يجب عليهن الوقوف بجانب بعضهن.

- كيف يُحدّد عدد الطرائق التي يُمكن بها لسميرة التقاط صورة للأخوات الثلاث؟ باستعمال مبدأ العد الأساسي.

- هل يُمكن تحديد عدد الطرائق التي يُمكن بها لسميرة التقاط صورة للأخوات الثلاث باستعمال المضروب؟

- أخبر الطلبة أنّهم سيتعرّفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.

- أعزّز الإجابات الصحيحة.

مثال 1

- أناقش الطلبة في مفهوم التباديل، مُبيّنًا لهم أنّ المسألة التي ذُكرت في بداية الحصة، وتناولت اختيار 3 أشخاص (رئيس، ومساعد، وعضو) من بين 7 أشخاص، هي مثال على مفهوم التباديل.

- أوضح للطلبة أنّه يُمكن استعمال المضروب للإجابة عن المسألة، وذلك بقسمة عدد الطرائق المُمكنة لاختيار 7 أشخاص على عدد الطرائق المُمكنة لاختيار الأشخاص الأربعة الباقين؛ أي إيجاد: $\frac{7!}{4!}$.

- أبين للطلبة أنّه يُمكن تعميم النتيجة السابقة في صورة قانون، ثم أقدم لهم القاعدة التي ورد ذكرها في صندوق (المفهوم الأساسي)؛ لإيجاد عدد تباديل n من العناصر، أُخذ منها r عنصرًا كل مرّة.

- أناقش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح، مؤكّدًا لهم أهمية تبرير كل خطوة من خطوات الحل.

إرشادات:

- أُنَاقِش الطلبة في الرموز المُستعمَلة للتعبير عن تباديل n من العناصر التي أُخِذَ منها r عنصرًا كل مرة، وورد ذكرها في صندوق (رموز رياضية)، مُبَيِّنًا لهم أنَّ الرمز ${}_nP_r$ هو الأكثر استعمالًا في الكتاب.
- أُنَاقِش الطلبة في القواعد التي ورد ذكرها في صندوق (أتعلَّم) في الصفحة 48 من كتاب الطالب؛ لِما لها من أهمية في حل الأسئلة الواردة في بند (أتحقَّق من فهمي)، وبند (أندَرِّب وأحل المسائل).

تنبيه:

قد يعتقد بعض الطلبة خطأً أنَّه يُمكن استعمال قانون التباديل لأيِّ أعداد؛ لذا أوكد لهم ضرورة الالتزام بالشروط التي ورد ذكرها في صندوق (المفهوم الأساسي).

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (أتحقَّق من فهمي) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم مَنْ أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

يُمكنني أيضًا استعمال المضروب لإيجاد عدد الطرائق المُمكنة لاختيار الأشخاص الثلاثة، وذلك بإيجاد عدد الطرائق المُمكنة لاختيار الأشخاص السبعة جميعًا وترتيبهم، ثم اختصار عدد الطرائق المُمكنة لاختيار الأشخاص الأربعة الباقين باستعمال القسمة كما يأتي:

$$\frac{\text{طرائق اختيار 7 أشخاص}}{\text{طرائق اختيار 4 أشخاص}} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

يُمكن تعميم هذه النتيجة في صورة قانون.

التباديل

مفهوم أساسي

بالكلمات: عدد تباديل n من العناصر، أُخِذَ منها r عنصرًا كل مرة، هو:

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

حيث: r, n عددان صحيحان موجبان، و $r \leq n$.

فمثلاً، عدد تباديل 5 عناصر، أُخِذَ منها 3 عناصر كل مرة، هو:

$${}_5P_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

رموز رياضية

يُمكن استعمال أيِّ من الرمزَيْن الآتيين للتعبير عن تباديل n من العناصر التي أُخِذَ منها r كل مرة:
 ${}_nP_r, P(n, r)$

مثال 1

أجد قيمة كلِّ ممَّا يأتي:

$$10P_4$$

$$\begin{aligned} 10P_4 &= \frac{10!}{(10-4)!} \\ &= \frac{(10)(9)(8)(7)(\cancel{6!})}{\cancel{6!}} \\ &= 5040 \end{aligned}$$

تعريف التباديل

باختصار! من البسط والمقام

بالضرب

أتعلَّم

ألاحظ أنَّ:

$$10P_4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7$$

أيَّ إنَّ الضرب يبدأ من

10 نزولاً 4 مرَّات.

بوجه عام، فإنَّ:

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$$

2 $\frac{12P_7}{9P_4}$

$$\frac{12P_7}{9P_4} = \frac{12!}{(12-7)!} \times \frac{(9-4)!}{9!}$$

تعريف التباديل

$$= \frac{12!}{5!} \times \frac{5!}{9!}$$

بإيجاد ناتج الطرح

$$= \frac{(12)(11)(10)(9!)}{9!}$$

باختصار 9! من البسط والمقام

$$= 1320$$

الناتج

أتحقق من فهمي

أجد قيمة كل مما يأتي:

a) $5P_5$ 120

b) $\frac{13P_3}{13P_1}$ 132

يُمكن إيجاد عدد طرائق الاختيار باستعمال التباديل في كثير من المواقف الحياتية التي يكون فيها الترتيب مهماً، مثل عدد طرائق ترتيب الجلوس على مقاعد لعدد من الأشخاص، أو عدد طرائق ترتيب مجموعة من الكتب المختلفة على رفٍّ.

يُعدُّ استعمال التباديل طريقة سهلة، مقارنةً بالطرائق التي تعلَّمْتُها سابقاً، مثل: مبدأ العدِّ الأساسي، ومخطط الشجرة، والجدول، والقوائم المنظمة.

مثال 2

أجد عدد الطرائق المُمكنة لاختيار طالبين عشوائياً من الطلاب: محمود، وعلي، وحسن، ومعتز، وتعيين الأول مسؤولاً عن الإذاعة المدرسية، وتعيين الثاني رئيساً لمجلس الطلبة.



أتعلَّم

$$nPn = n!$$

$$nP1 = n$$

$$nP0 = 1$$

• أَوْضَحْ للطلبة أهمية استعمال التباديل في كثير من المواقف الحياتية التي يكون فيها الترتيب مُهمّاً، ثم أطلب إليهم ذكر أمثلة على ذلك.

• أُنَاقِش الطلبة في حل المثال 2 على اللوح، بطرح الأسئلة الآتية عليهم:

◀ هل الترتيب مُهمٌّ في هذه المسألة؟ لماذا؟ نعم؛ لأنَّ لكل شخص وظيفة مُحدَّدة.

◀ هل يُمكن استعمال مبدأ العدِّ الأساسي لإيجاد عدد طرائق الاختيار؟ إذا كان الجواب بالإيجاب، فكيف ذلك؟ نعم، $4 \times 3 = 12$

◀ هل يُمكن استعمال التباديل لإيجاد عدد طرائق الاختيار؟ إذا كان الجواب بالإيجاب، فكيف ذلك؟ نعم، $4P_2$.

• أطلب إلى أحد الطلبة إيجاد ناتج $4P_2$ على اللوح، مُقدِّماً له التغذية الراجعة اللازمة.

• أَوْضَحْ للطلبة كيفية استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد تباديل n من العناصر التي أُخِذَ منها r عنصراً كل مرّة، ثم أطلب إليهم التحقق من صحّة الإجابة التي توصل إليها في المثال باستعمال الآلة الحاسبة.

✓ **إرشاد:** أوكد للطلبة أنَّ الإجابة هي نفسها في حال استعمال الطرائق المختلفة؛ لذا أحثُّهم على حل الأمثلة والأسئلة الواردة في الدرس بأكثر من طريقة إن أمكن.

المفاهيم العابرة للمواد:

أوكد المفاهيم العابرة للمواد حيثما وردت في كتاب الطالب أو كتاب التمارين. ففي المثال 2، أعرِّز لدى الطلبة الوعي الطلبة بأهمية المشاركة في الأنشطة المدرسية، مثل الإذاعة المدرسية؛ لما لها من أثر في بناء الشخصية وصقلها.

تنويع التعليم:

في المثال 2، قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في إيجاد تفسير للمسائل الحياتية، ومعرفة إذا كان حلها باستعمال التباديل أم لا؛ لذا أُنصحهم بعض الوقت، وأُقدم لهم أمثلة سهلة عند اللزوم، مُنوهاً إيّاهم بضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل؛ ما يساعدهم على حل المسائل بسهولة.

مثال 3

- أَوْضَحْ للطلبة أهمية استعمال التباديل في التجارب التي تتطلب عدم تكرار العناصر المختارة عشوائياً من بين مجموعة عناصر؛ لأنّ ذلك يضمن تلقائياً منح كل عنصر أهمية الترتيب.
- أُنَاقِشْ الطلبة في حل المثال 3 على اللوح، مُؤكِّداً لهم أهمية تبرير كل خطوة من خطوات الحل.
- أطلب إلى الطلبة استعمال الآلة الحاسبة للتحقق من صحّة الإجابة التي تُوصّل إليها في المثال.

إرشاد: أطلب إلى الطلبة إعادة حل المثال

باستعمال مبدأ العد الأساسي، ثم مقارنة الإجابتين معاً.

أستعمل الجدول لحصر الخيارات المُمكنة جميعها على النحو الآتي:

رئيس مجلس الطلبة	معتز	حسن	علي	محمود
محمود	(محمود، معتز)	(محمود، حسن)	(محمود، علي)	
علي	(علي، معتز)	(علي، حسن)	(علي، محمود)	
حسن	(حسن، معتز)		(حسن، علي)	(حسن، محمود)
معتز		(معتز، حسن)	(معتز، علي)	(معتز، محمود)

ألاحظ أنّ الترتيب مهم في هذه المسألة؛ فالاختيار (علي، حسن) يعني أنّ عليّاً هو مسؤول الإذاعة، وأنّ حسناً هو رئيس مجلس الطلبة. أمّا الاختيار (حسن، علي) فيعني أنّ حسناً هو مسؤول الإذاعة، وأنّ عليّاً هو رئيس مجلس الطلبة.

بناءً على الجدول، يُمكنني عدّ الخيارات المختلفة لتحديد عدد طرائق الاختيار، وهو 12

يُمكنني أيضاً استعمال مبدأ العدّ الأساسي لإيجاد عدد طرائق الاختيار، حيث:

$$\begin{array}{l} \text{عدد طرائق اختيار} \\ \text{رئيس مجلس الطلبة} \end{array} \quad \times \quad \begin{array}{l} \text{عدد طرائق اختيار} \\ \text{مسؤول الإذاعة المدرسية} \end{array} = 3 \times 4 = 12$$

أو استعمال التباديل لإيجاد عدد طرائق الاختيار.

أريد اختيار عنصرين من بين 4 عناصر، مُراعياً الترتيب:

$${}_4P_2 = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$$

قانون التباديل

النتائج



أتحقق من فهمي

بكم طريقة يُمكن أن تختار سلمى وروان ووزان 3 عيّات عشوائياً من بين 5 عيّات مختلفة متوافرة في مختبر العلوم لفحصها بالمجهر الضوئي؟ ${}_5P_3 = 60$

أتعلّم

يُمكنني استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد التباديل. فمثلاً، لإيجاد ناتج ${}_4P_2$ أضغط على الأزرار الآتية:

4 nPr 2 =

أفكر

هل الترتيب مهم في مسألة (أتحقّق من فهمي) المجاورة؟ لماذا؟

تنبيه:

قد يعتقد بعض الطلبة خطأً أنَّ ترتيب الأحرف غير مهمٍّ؛ لذا أوكد لهم أنَّ الترتيب مهمٌّ؛ لأنَّ تغيير ترتيب الأحرف يُغيّر الكلمة ومعناها.

توسعة:

أطلب إلى الطلبة البحث في شبكة الإنترنت عن رموز رياضية أخرى تُستعمل للتعبير عن التباديل.

مثال إضافي:

كم عددًا مختلفًا من 4 منازل يُمكن تكوينه باستعمال الأرقام (9-1)، علمًا بأنَّه لا يُسمح بالتكرار؟

$${}_9P_4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = 3024$$

التدريب

4

أُتدرب وأحل المسائل



- أوجّه الطلبة إلى بند (أُتدرب وأحل المسائل)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (9-1) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمّا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أية مسألة، فإنني أختار أحد الطلبة ممن تمكّن / تمكّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته / استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفّزًا الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدّمة من الزميل / الزميلة.

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (أُتدرب وأحل المسائل)، فإنني أضع كلاً منهم مع طالب آخر / طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المُتميّزين؛ ليتشاركوا في حل الأسئلة.

يُمكن استعمال التباديل أيضًا في التجارب التي تتطلب عدم تكرار العناصر المختارة عشوائيًا من بين مجموعة عناصر؛ لأنَّ ذلك يمنح كل عنصر أهمية في الترتيب.

مثال 3

أجد عدد الكلمات الثلاثية (ليس بالضرورة لها معنى) التي يُمكن تكوينها من حروف اللغة العربية، بحيث لا تحوي أيّ كلمةً أحرفًا مُكرّرةً.

عدد حروف اللغة العربية 28 حرفًا. ولأنَّ التكرار غير مسموح به؛ فإنَّ ترتيب الحروف مهم.

إذن، يُمكن استعمال التباديل لتحديد عدد طرائق اختيار 3 أحرف من بين 28 حرفًا:

$${}_{28}P_3 = \frac{28!}{(28-3)!} = 19656$$

قانون التباديل

الناتج باستعمال الآلة الحاسبة

أيّ يُمكن تكوين 19656 كلمة تتألف كلّ منها من 3 أحرف.

أتحقق من فهمي

أجد عدد الكلمات الخماسية (ليس بالضرورة لها معنى) التي يُمكن تكوينها من حروف اللغة الإنجليزية، علمًا بأنَّه لا يُسمح بالتكرار. ${}_{26}P_5 = 7893600$

معلومة

معظم مفردات اللغة العربية أصلها ثلاثي، فرباعي، فخماسي.

أُتدرب وأحل المسائل

أجد قيمة كلّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

1 ${}_9P_5$ 15120

2 ${}_7P_0$ 1

3 ${}_{99}P_2$ 9702

أجد قيمة كلّ ممّا يأتي باستعمال الآلة الحاسبة:

4 $\frac{{}_{10}P_3}{{}_8P_2}$ $\frac{90}{7}$

5 $({}_{13}P_9) - ({}_7P_4)$ 259458360

6 $({}_7P_3) \times ({}_4P_3)$ 5040

7 مقاعد: أجد عدد الطرائق المُمكنة لجلوس شخصين على 5 مقاعد موضوعة في صفٍّ واحد. ${}_5P_2 = 20$

- أوجّه الطلبة إلى بند (مهارات التفكير العليا)، ثم أطلب إليهم حل المسألة 15 والمسألة 16.

الواجب المنزلي:

أسّعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (10-12) كتاب التمارين: (1-7)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: 13, 14 كتاب التمارين: (8-11)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (14-16) كتاب التمارين: (11-13)

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الآتي بوصفه إثراء لهم:
 - أجد قيمة n في كل مما يأتي:

1) ${}_nP_3 = 10 \times {}_nP_2$ $n = 12$

2) ${}_nP_2 = 42$ $n = 7$

6 الختام

- أتحرّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بطرح السؤال الآتي عليهم:
 - بكم طريقة يستطيع 6 أشخاص الجلوس على 10 مقاعد مُرتّبة في صف واحد؟ ${}_{10}P_6 = 151200$

- 8 محاضرات: اعتمدت فيحاء جدولها الدراسي للفصل الأول في الجامعة، بحيث اختارت 4 مواد من بين 12 مادة مختلفة. أجد عدد الطرائق المُمكنة لترتيب فيحاء مواد جدولها الدراسي. ${}_{12}P_4 = 11880$



- 9 سياحة: أعلنت شركة سياحية عن وجود رحلات إلى 8 مدن مختلفة. أجد عدد الطرائق المُمكنة لاختيار شخص رحلتين إلى مدينتين مختلفتين، بحيث يسافر إلى الأولى للتجارة، ويسافر إلى الثانية للاستجمام. ${}_8P_2 = 56$



- 10 رياضة: أجد عدد الطرائق المُمكنة لاصطفاف 5 طلبة بجانب بعضهم قبيل انطلاقهم في مسابقة الجري. ${}_5P_5 = 120$

- 11 ترقيم: أجد عدد المنازل التي يُمكن ترقيمها باستعمال رموز تحوي 3 أرقام من 1 إلى 9؛ شرط ألا يحتوي رمز أي منزل على رقم مُكرّر. ${}_9P_3 = 504$

- 12 مقاعد: أجد عدد الطرائق المُمكنة لجلوس 6 طلبة على 6 مقاعد رُتبت في صف واحد. ${}_6P_6 = 720$



- 13 كتب: لدى طلال 4 كتب رياضيات (M)، و3 كتب لغة إنجليزية (E). أجد عدد الطرائق المُمكنة لترتيب الكتب السبعة على الشكل:

$${}_4P_4 \times {}_3P_3 = 144 \quad M E M E M E M$$

- 14 مركبات: تقف سبع سيارات في انتظار دورها للفحص أمام مركز مُتخصّص لصيانة السيارات، بما في ذلك سيّارتنا فؤاد وغيث. أجد عدد الطرائق المُمكنة لاصطفاف سيّارتي فؤاد وغيث في الدور. ${}_7P_2 = 42$

مهارات التفكير العليا

$$\begin{aligned} \frac{10!}{(10-r)!} &= 5040 \\ (10-r)! &= 720 \\ (10-r)! &= 6! \\ 10-r &= 6 \\ r &= 4 \end{aligned}$$

- 15 تحدّ: أجد قيمة r إذا كان ${}_{10}P_r = 5040$.

- 16 تحدّ: أثبت أن ${}_nP_n = n!$.

$${}_nP_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{1} = n!$$

✓ **إرشاد:** في السؤال 15 (تحد)، أوجّه الطلبة إلى استعمال خواص مضروب العدد أثناء الحل؛ للاختصار، وتبسيط الحل؛ لإيجاد قيمة r .

تعرّف التوافيق، واستعمالها في حلّ مسائل حياتية.

التوافيق.



نظّمت الملكية الأردنية 12 رحلة إلى بعض الدول العربية في يوم واحد من مطار الملكة علياء وإليه. بكم طريقة يُمكن اختيار 3 رحلات منها عشوائياً من دون اهتمام بترتيب عملية انطلاقها؟

قد لا يكون مهمّاً ترتيب العناصر المختارة عشوائياً في بعض المواقف. فمثلاً، اختيار شخصين a و b لتشكيل لجنة من مجموعة فيها n من الأشخاص، لا يتطلّب اهتماماً بالترتيب؛ لأنّ الترتيب ab هو نفسه الترتيب ba ضمن اللجنة.

لكي أجد عدد طرائق الاختيار المُمكنة في هذه الحالة؛ أقسم nP_2 على $2!$ ، مُهيملاً التكرار، في ما يُعرّف **بالتوافيق** (combinations).

التوافيق

مفهوم أساسي

بالكلمات: عدد توافيق n من العناصر، أُخذ منها r عنصراً كل مرة، هو:

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

حيث: r, n عدنان صحيحان موجبان، و $r \leq n$.

مثال: عدد توافيق 7 عناصر، أُخذ منها 3 عناصر كل مرة، هو:

$${}_7C_3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35$$

رموز رياضية

يُمكن استعمال أيّ من الرموز الآتية للتعبير عن توافيق n من العناصر التي أُخذ منها r كل مرة:

$${}_nC_r, C(n, r), \binom{n}{r}$$

• أطرح على الطلبة الأسئلة الآتية:

◀ هل الترتيب مهمّ في اختيار الأشخاص الثلاثة؟ لماذا؟ لا؛ لأنّه لا يوجد مُسمّى وظيفي لكلّ منهم، فمثلاً لا يوجد فرق بين اختيار أحمد وعلي وفاطمة، واختيار أحمد وفاطمة وعلي.

◀ هل يُمكن استعمال مبدأ العد الأساسي لإيجاد عدد الطرائق التي يُمكن بها اختيار 3 أشخاص من بين الأشخاص السبعة؛ لتكوين لجنة ثلاثية؟

◀ ما عدد الطرائق التي يُمكن بها اختيار الأشخاص الثلاثة لتكوين اللجنة؟

• أخبر الطلبة أنّهم سيتعرّفون إجابة السؤالين السابقين في هذا الدرس.

• أعزّز الإجابات الصحيحة.

نتائج الدرس

- تعرّف التوافيق.
- حساب التوافيق يدوياً، وباستعمال الآلة الحاسبة.
- توظيف التوافيق في حل مسائل حياتية.

نتائج التعلّم القبلي:

- توظيف مبدأ العد الأساسي في إيجاد عدد الطرائق المُمكنة لإنجاز عمل ما.
- إيجاد مضروب العدد الصحيح غير السالب.
- توظيف التباديل في إيجاد عدد الطرائق المُمكنة لإنجاز عمل ما.

مراجعة التعلّم القبلي:

- أوّجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُربّطة بما سيقدّم من موضوعات الدرس في الحصة (إن وُجدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجوّل بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

1 التهيئة

- أوّزّع الطلبة إلى مجموعات رباعية، ثم أعطي كل مجموعة 7 بطاقات، كُتبت عليها 7 أسماء مختلفة لأشخاص.
- أطلب إلى أفراد كل مجموعة تحديد عدد الطرائق المُمكنة لاختيار 3 أشخاص من بين الأشخاص السبعة؛ لتكوين لجنة ثلاثية.

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم)، ثم أسألهم:

◀ كم رحلة نظّمت الملكية الأردنية في ذلك اليوم؟ 12 رحلة.

◀ هل يُمكن استعمال مبدأ العد الأساسي لإيجاد عدد الطرائق التي يُمكن بها اختيار 3 رحلات

ما من دون اهتمام بترتيب عملية انطلاقها؟ لماذا؟ لا؛ لأنَّ مبدأ العد الأساسي يهتم بالترتيب.

◀ هل يُمكن استعمال مفهوم التباديل لإيجاد عدد الطرائق التي يُمكن بها اختيار 3 رحلات

ما من دون اهتمام بترتيب عملية انطلاقها؟ لماذا؟ لا؛ لأنَّ التباديل هي الطرائق المُمكنة

لاختيار مجموعة من الأشياء، مع مراعاة ترتيبها.

- أعزّز الإجابات الصحيحة.

...توسعة:

أطلب إلى الطلبة البحث في شبكة الإنترنت عن معلومات تتعلّق بالملكية الأردنية، وكتابة فقرة قصيرة عن ذلك.

مثال 1

- أناقش الطلبة في مفهوم التوافق، مُبيّنًا لهم أنَّ المسألة التي ذُكرت في بداية الحصة، وتناولت اختيار 3 أشخاص من بين 7 أشخاص من دون اهتمام بالترتيب، هي مثال على مفهوم التوافق.

- أوضّح للطلبة أنّه يُمكن الإجابة عن المسألة بإيجاد تباديل 7 أشخاص، اختيار منهم 3 أشخاص عشوائيًا، ثم حذف النواتج المُكرّرة؛ لأنَّ الترتيب في التوافق غير مُهمّ.

- أبين للطلبة أنّه يُمكن تعميم النتيجة السابقة في صورة قانون، ثم أقدم لهم القاعدة التي ورد ذكرها في صندوق (المفهوم الأساسي)؛ لإيجاد عدد توافيق n من العناصر، أُخذ منها r عنصرًا كل مرّة.

- أناقش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح، مُوكّدًا لهم أهمية تبرير كل خطوة من خطوات الحل.

- أوضّح للطلبة كيفية استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد توافيق n من العناصر التي أُخذ منها r عنصرًا كل مرّة، ثم أطلب إليهم التحقق من صحّة الإجابة التي تُوصّل إليها في المثال باستعمال الآلة الحاسبة.

إرشادات:

- أناقش الطلبة في الرموز المُستعملة للتعبير عن توافيق n من العناصر التي أُخذ منها r عنصرًا كل مرّة، وورد ذكرها في صندوق (رموز رياضية)، مُبيّنًا لهم أنَّ الرمز C_r هو الأكثر استعمالًا في الكتاب.

- أناقش الطلبة في القواعد التي ورد ذكرها في صندوق (أتعلّم) في الصفحة 53 من كتاب الطالب؛ لما لها من أهمية في حل الأسئلة الواردة في بند (أتحقّق من فهمي)، وبند (أندرب وأحل المسائل).

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية، واللغة الإنجليزية، مُحفّزًا الطلبة على استعمالها.

مثال 1

أجد قيمة كل مما يأتي:

1 $({}_{10}C_7) - ({}_8C_3)$

$$({}_{10}C_7) - ({}_8C_3) = \frac{10!}{7!(10-7)!} - \frac{8!}{3!(8-3)!}$$

$$= 120 - 56$$

$$= 64$$

تعريف التوافيق

بحساب التوافيق

الناتج

2 $({}_9C_6) \times ({}_6C_2)$

$$({}_9C_6) \times ({}_6C_2) = \frac{9!}{6!(9-6)!} \times \frac{6!}{2!(6-2)!}$$

$$= (84)(15)$$

$$= 1260$$

تعريف التوافيق

بحساب التوافيق

الناتج

أتحقق من فهمي

أجد قيمة كل مما يأتي:

a) $({}_{13}C_5) - ({}_8C_8)$ 1286

b) $({}_7C_0) \times ({}_7C_7)$ 1

إذا لم يكن مهمًا ترتيب العناصر المختارة في تجربة عشوائية، فإنه يمكن استعمال التوافيق لإيجاد عدد الطرائق التي تُختار بها تلك العناصر.

مثال 2

أجد عدد الطرائق التي يمكن بها اختيار طالبين من بين 4 طلاب مُترشّحين (علاء، فريد، يونس، ربيع) للعب في فريق كرة القدم الذي يُمثّل المدرسة.

يمكنني استعمال القائمة المنظمة لإيجاد عدد طرائق اختيار الطالبين على النحو الآتي:

(علاء، فريد)، (علاء، يونس)، (علاء، ربيع)، (فريد، يونس)، (فريد، ربيع)، (يونس، ربيع).

إذن، توجد 6 طرائق لاختيار طالبين من بين المُترشّحين الأربعة.

أتعلّم

يمكنني استعمال الآلة الحاسبة لإيجاد التوافيق. فمثلاً، لإيجاد ناتج ${}_{10}C_7$ ، أضغط على الأزرار الآتية:

10 $\frac{nCr}{r}$ 7 =

أتعلّم

$$nC_0 = 1$$

$$nC_1 = n$$

$$nC_n = 1$$

تنبيه: قد يعتقد بعض الطلبة خطأً أنه يمكن استعمال قانون التوافيق لأيّ أعداد؛ لذا أوكد لهم ضرورة الالتزام بالشروط التي ورد ذكرها في صندوق (المفهوم الأساسي).

التقويم التكويني

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (أتحقّق من فهمي) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم من أخطأ في الإجابة؛ تجنباً لإحراجه.

مثال 2

- أوّضح للطلبة أهمية استعمال التوافيق في كثير من المواقف الحياتية التي يكون فيها الترتيب غير مهمّ، ثم أطلب إليهم ذكر أمثلة على ذلك.
- أناقش الطلبة في حل المثال 2 على اللوح، بطرح الأسئلة الآتية عليهم:

◀ كم طالباً مُرشّحاً للعب في فريق كرة القدم؟
4 طلبة.

◀ كم طالباً يراد اختياره للعب في فريق كرة القدم الذي يُمثّل المدرسة؟ اثنان من الطلبة.

◀ هل الترتيب مهمّ في اختيار الطالبين؟ لماذا؟ لا؛
لأنّه لا توجد وظيفة مُحدّدة لأيّ منهما.

◀ أيّ الآتية يمكن استعماله لإيجاد عدد طرائق اختيار الطالبين: مبدأ العد الأساسي، أم التباديل، أم التوافيق؟ أبرّر إجابتي. يمكن استعمال التوافيق لذلك؛ لأنّ الترتيب غير مهمّ في هذه المسألة.

- أطلب إلى أحد الطلبة إيجاد عدد الطرائق التي يمكن بها اختيار اللاعبين على اللوح، مُقدّماً له التغذية الراجعة اللازمة.

إرشاد: أطلب إلى الطلبة استعمال الآلة الحاسبة للتحقّق من صحّة الحل.

تنويع التعليم:

- في المثال 2، قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في إيجاد تفسير للمسائل الحياتية، ومعرفة إذا كان حلها باستعمال التوافيق أم لا؛ لذا أمنحهم بعض الوقت، وأقدم لهم أمثلة سهلة عند اللزوم، مُنوّهاً إيّاهم بضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل؛ ما يساعدهم على حل المسائل بسهولة.

••• توسعة:

- أطلب إلى الطلبة من ذوي المستوى فوق المتوسط كتابة مسألة حياتية يُمكن حلها باستعمال التباديل، ومسألة حياتية أخرى يُمكن حلها باستعمال التوافيق.

مثال 3

- أوضّح للطلبة أن بعض المسائل تتطلب استعمال مبدأ العد الأساسي، والتباديل، والتوافيق، وفقاً للشرط المُحدّد في المسألة.
- أناقش الطلبة في حل سؤال الفرع 1 من المثال 3 على اللوح، مُؤكّداً لهم أهمية تبرير كل خطوة من خطوات الحل، ومُبيّناً لهم أن جملة (إذا سُحبت الكرات دفعة واحدة) تُعدّ شرطاً يدلّ على أن الترتيب غير مُهم؛ لذا يلزم استعمال التوافيق في هذه الحالة.
- أناقش الطلبة في حل سؤال الفرع 2 من المثال 3 على اللوح، ثم أطلب إليهم تقديم تبرير منطقي لعدم إمكانية استعمال التوافيق لحل هذا السؤال، لافتاً انتباههم إلى الخيارات المُمكنة لترتيب ظهور الكرات، وهي: ظهور كرتين حمراوين أولاً، ثم ظهور كرة زرقاء، وظهور كرة زرقاء، ثم ظهور كرتين حمراوين، وظهور كرة حمراء، يليها ظهور كرة زرقاء، فكرة حمراء.
- أنبّه الطلبة أنه يلزم التعبير عن حرف (أو) برمز الجمع عند إيجاد عدد الطرائق المُمكنة في هذا السؤال.
- أطلب إلى الطلبة استعمال الآلة الحاسبة للتحقق من صحّة الإجابة التي توصل إليها في كل فرع من فرعي المثال.

نظراً إلى عدم أهمية الترتيب في هذه المسألة، وعدم وجود فرق في الاختيار بين (علاء، فريد) و(فريد، علاء)؛ استعمل التوافيق لإيجاد عدد طرائق اختيار طالبين من بين المُترشّحين الأربعة على النحو الآتي:

$${}^4C_2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

تعريف التوافيق

النتيجة

أتحقق من فهمي

أجد عدد طرائق اختيار لجنة تُنظّم عملية دخول طالبات مدرسة، وتضم 3 طالبات من بين 10 طالبات تطوَّعن لأداء هذه المهمة. ${}_{10}C_3 = 120$

يُمكن استعمال مبدأ العدّ الأساسي، والتباديل، والتوافيق في المواقف التي تتطلب إيجاد عدد العناصر المُمكنة للفضاء العيني لتجربة عشوائية، أو إيجاد عدد العناصر التي يتكوّن منها حادث مُعيّن في تلك التجربة، حيث يكون عدد العناصر هو عدد طرائق الاختيار ضمن شروط مُحدّدة.

مثال 3

يحتوي صندوق على 5 كرات حمراء مُرقّمة من (1 - 5)، و4 كرات زرقاء مُرقّمة من (1 - 4)، علماً بأن جميع الكرات مُتماثلة:

أجد عدد الطرائق المُمكنة لسحب 3 كرات حمراء عشوائياً من الصندوق إذا سُحبت الكرات دفعة واحدة.

أفترض أن $n(A)$ هو عدد الطرائق التي يُمكن بها سحب 3 كرات حمراء، علماً بأن العدد الكلي للكرات الحمراء في الصندوق 5 كرات، وترتيب سحب الكرات ليس مهماً:

$$n(A) = {}_5C_3$$

عدد طرائق سحب 3 عناصر من بين 5 عناصر

$$= \frac{5!}{3! \times (5-3)!}$$

بالتعويض في قانون التوافيق

$$= \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!}$$

بإيجاد ناتج الطرح

$$= 10$$

النتيجة

أتعلّم

إذا رمزّت إلى الكرة الحمراء بالحرف R ، فإنّ النواتج المُمكنة لتجربة سحب 3 كرات حمراء هي:

$(R1, R2, R3), (R1, R2, R4)$

$(R1, R2, R5), (R1, R3, R4)$

$(R1, R3, R5), (R1, R4, R5)$

$(R2, R3, R4), (R2, R3, R5)$

$(R2, R4, R5), (R3, R4, R5)$

2 أجد عدد الطرائق الممكنة لسحب كرتين حمراوين وكرة واحدة زرقاء عشوائياً من الصندوق إذا كان السحب على التوالي من دون إرجاع.

أفترض أن $n(B)$ هو عدد الطرائق التي يُمكن بها سحب كرتين حمراوين وكرة زرقاء.

ألاحظ أن الترتيب مهم في هذه المسألة. فمثلاً، سحب الكرات (حمراء 1، حمراء 2، زرقاء 3) يختلف عن سحب الكرات (حمراء 1، زرقاء 3، حمراء 2)، (زرقاء 3، حمراء 1، حمراء 2)، (حمراء 2، حمراء 1، زرقاء 3)، (حمراء 2، زرقاء 3، حمراء 1)، (زرقاء 3، حمراء 2، حمراء 1). ألاحظ أيضاً أن العدد الكلي للكرات الحمراء في الصندوق 5 كرات، وأن العدد الكلي للكرات الزرقاء في الصندوق 4 كرات:

$$\begin{aligned} n(B) &= {}_5P_2 \times {}_4P_1 + {}_5P_1 \times {}_4P_1 \times {}_4P_1 + {}_4P_1 \times {}_5P_2 \\ &= \frac{5!}{(5-2)!} \times \frac{4!}{(4-1)!} + \frac{5!}{(5-2)!} \times \frac{4!}{(4-1)!} \\ &\quad \times \frac{4!}{(4-1)!} + \frac{4!}{(4-1)!} \times \frac{4!}{(4-1)!} \times \frac{4!}{(4-1)!} \\ &= 240 \end{aligned}$$

باستعمال مبدأ العد
الأساسي والتباديل

بالتعويض في قانون
التباديل

بالتبسيط

تحقق من فهمي

مُعتمداً المثال 3، أجد ما يأتي:

(a) عدد الطرائق الممكنة لسحب كرتين زرقاوين عشوائياً من الصندوق إذا سُحِبَتَا معاً. ${}_4C_2 = 6$

(b) عدد الطرائق الممكنة لسحب كرتين زرقاوين وكرة واحدة حمراء عشوائياً من الصندوق

إذا كان السحب على التوالي من دون إرجاع. ${}_4P_2 + {}_4P_1 \times {}_5P_1 + {}_5P_1 \times {}_4P_1 + {}_5P_2 = 180$

أَتَدَرَّبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ

أجد ناتج كلٍّ مما يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

1 ${}_{10}C_7$ 120

2 ${}_9C_0$ 1

3 ${}_7C_1 + {}_6C_3$ 27

أجد ناتج كلٍّ مما يأتي باستعمال الآلة الحاسبة:

4 $({}_{12}C_5) \times ({}_5C_3)$ 7920

5 $\frac{{}_{10}C_6}{{}_8C_5}$ $\frac{15}{4}$

6 $\frac{{}_9C_5}{({}_8C_5) \times ({}_3C_2)}$ $\frac{3}{4}$

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (أَتَدَرَّبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ)، فإنني أضع كلاً منهم مع طالب آخر / طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المتميزين؛ ليتشاركوا في حل الأسئلة.

✓ **إرشاد:** أطلب إلى الطلبة إعادة حل سؤال الفرع 2 من المثال 3 بطريقة أخرى، ثم مقارنة الإجابتين معاً.

تنبيه:

قد يعتقد بعض الطلبة خطأً أنه توجد للفرع 2 من المثال 3 حالة واحدة فقط، هي: ظهور كرتين حمراوين، ثم ظهور كرة زرقاء؛ لذا أوضح لهم أن هذه الحالة تمثل أحد الخيارات الممكنة.

توسعة:

أطلب إلى الطلبة البحث في شبكة الإنترنت عن رموز رياضية أخرى تُستعمل للتعبير عن التوافق.

التدريب

أَتَدَرَّبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ

- أوجه الطلبة إلى بند (أَتَدَرَّبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1-8) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديداً ترتبط ارتباطاً مباشراً بأمثلة الدرس، وهي تُستعمل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عما إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أية مسألة، فإنني أختار أحد الطلبة ممن تمكن / تمكنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته / استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحَفِّزاً الطلبة على طرح أيِّ تساؤل عن خطوات الحل المُقَدَّمة من زميل / الزميلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجّه الطلبة إلى بند (مهارات التفكير العليا)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (15 – 13).

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 9, 10, 13 كتاب التمارين: (1-6)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (11-13) كتاب التمارين: (7-10)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (13-15) كتاب التمارين: (9-12)

الإثراء

5

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الآتي بوصفه إثراءً لهم:
 - أجد قيمة n في كلٍّ مما يأتي:

1) ${}_nC_3 = 26n$ $n = 14$

2) ${}_nC_5 = {}_nC_7$ $n = 12$

الختام

6

- أتحقّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بطرح السؤال الآتي عليهم:
 - بكم طريقة يُمكن اختيار فريق كرة سلة يضم 5 لاعبين من بين 8 لاعبين؟ ${}_8C_5 = 56$

- 7 أجد عدد الطرائق المُمكنة لاختيار نوعي فاكهة من 7 أنواع مختلفة متوافرة في محل لبيع الفواكه. ${}_7C_2 = 21$
- 8 لدى قيس 8 كتب مختلفة، أراد إهداء 3 كتب منها إلى مكتبة المدرسة. أجد عدد الطرائق المُمكنة لاختيار الكتب التي يرغب قيس في إهداءها. ${}_8C_3 = 56$

رياضة: يريد معلّم التربية الرياضية اختيار طالبين من بين 15 طالبًا للمشاركة في المباريات المدرسية:

- 9 أجد عدد الطرائق المُمكنة لاختيار هذين الطالبين. ${}_{15}C_2 = 105$
- 10 أجد عدد الطرائق المُمكنة لاختيار هذين الطالبين للمشاركة في المباريات، علمًا بأنّ الأول سيشارك في مباراة كرة القدم، والثاني سيشارك في مباراة كرة السلة. ${}_{15}P_2 = 210$
- 11 هدايا: تريد إيمان شراء باقة ورد لأحدهما من أحد محالّ بيع الورد. بكم طريقة يُمكن لإيمان شراء باقة فيها 5 وردات من بين 9 وردات ألوانها مختلفة؟ ${}_9C_5 = 126$
- 12 أجد عدد الطرائق المُمكنة التي يريد بها سميّر شراء 4 أقلام من بين 10 أقلام مختلفة. ${}_{10}C_4 = 210$

مهارات التفكير العليا

- 13 أكتشف الخطأ: وجد كلّ من سعيد وهمام عدد الطرائق المُمكنة لاختيار 3 طلبة في الصف من بين 11 طالبًا للمشاركة في مشروع تصميم مُخطّط هندسي لمدرستهم. أيُّهما إجابته صحيحة؟

إجابة سعيد هي الصحيحة؛ لأنّ ترتيب الطلبة غير مُهمّ.

همام
 ${}_{11}P_3$

سعيد
 ${}_{11}C_3$

- 14 تبرير: هل يُمكن أن يكون $nCr = nPr$ ، حيث: n, r عدداً صحيحان موجبان، و $r \leq n$ ؟
أبرر إجابتي.

$$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$1 = \frac{1}{r!}$$

$$r = 0, 1$$

- 15 تحدّ: إذا كان ${}_{10}C_7 = {}_{10}C_3$ ، فأجد صيغة عامة لهذه العلاقة. ${}_nC_r = {}_nC_{(n-r)}$

إرشادات:

- في السؤال 13 (أكتشف الخطأ)، أوجّه الطلبة إلى بيان إذا كان الترتيب مُهمًا في المسألة أم لا؛ لتحديد أيُّهما حله صحيح: سعيد أم همام.
- في السؤال 14 (تبرير)، أطلب إلى الطلبة كتابة قانون التباديل وقانون التوافيق في المعادلة المعطاة، ثم حل المعادلة الناتجة من التعويض.

اختبار نهاية الوحدة

8 تمرير: يراد اختيار فريق تمرير يتألف من 3 مُمرّضين من بين 7 مُمرّضين، و 5 مُمرّضات من بين 10 مُمرّضات. أجد عدد الطرائق المُمكنة لاختيار أفراد هذا الفريق. $(C_3)(C_5) = 8820$

تدريب على الاختبارات الدولية

9 رُسمت 8 نقاط على دائرة. عدد المثلثات التي يُمكن تكوينها من النقاط، بحيث تُمثّل كل 3 نقاط رؤوس المثلث، هو:

- a) 40320 b) 336
c) 56 d) 8

10 يراد تكوين رقم سري من 3 منازل باستعمال الأرقام (0 - 9). عدد الأرقام التي يُمكن تكوينها من دون تكرار هو:

- a) 720 b) 120
c) 3628800 d) 648

11 لقوس قزح 7 ألوان. عدد الطرائق التي يُمكن أن يظهر فيها ترتيب ألوان قوس قزح، بافتراض أنه يُمكن إعادة ترتيب الألوان، هو:

- a) 1 b) 7
c) 49 d) 5040

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل ممّا يأتي:

- 1 ناتج $7C_6$ هو: a) 1 b) 6 c) 7 d) 42

- 2 ناتج $9P_1$ هو: a) 1 b) 9 c) 18 d) 27

- 3 ناتج nC_n ، حيث n عدد صحيح موجب، هو: a) 1 b) n c) $2n$ d) n^2

- 4 ناتج nP_1 ، حيث n عدد صحيح موجب، هو: a) 1 b) n c) $2n$ d) n^2

5 زراعة: في محل أشتال 6 ألوان مختلفة من الورد الجوري، و 4 ألوان مختلفة من ورد القرنفل. أجد عدد الطرائق المُمكنة لشراء شتلة واحدة من الورد الجوري، و شتلة واحدة من ورد القرنفل. $6 \times 4 = 24$

6 بناء: في محل 25 نوعاً مختلفاً من بلاط الأرضيات، و 36 نوعاً من بلاط الجدران. بكم طريقة يُمكن لمصطفى اختيار بلاط الأرضيات والجدران لمطبخ منزله؟ $25 \times 36 = 900$

7 مدرسة: يراد اختيار طالبين من بين 5 طلاب من المرحلة الأساسية، و 4 طلاب من بين 6 طلاب من المرحلة الثانوية؛ للمشاركة في نشاط مدرسي. أجد عدد الطرائق المُمكنة لاختيار هؤلاء الطلبة. $(C_2)(C_4) = 150$

اختبار نهاية الوحدة:

- أطلب إلى الطلبة حل الأسئلة (1-4) فردياً، وأنجول بينهم مُساعدًا ومُرشِّدًا ومُوجِّهًا، وأقدم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثم أناقشهم جميعًا في حل بعض المسائل على اللوح.
- أوزع الطلبة إلى مجموعات رباعية، ثم أطلب إليهم حل المسائل (5-8)، وأنجول بينهم مُساعدًا ومُرشِّدًا ومُوجِّهًا، وأقدم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثم أحدد المسائل التي واجه الطلبة صعوبة في حلها لمناقشتها على اللوح.

إرشادات:

- أذكر الطلبة بقوانين التوافيق والتباديل قبل البدء بحل الأسئلة (1-4).
- في السؤال 8، أذكر الطلبة بضرورة الانتباه إلى مسألة الترتيب، وإذا كان الترتيب مُهمًا أم لا؛ لأنّ ذلك يساعد على تحديد طريقة الحل.

تدريب على الاختبارات الدولية

- أطلب إلى الطلبة حل الأسئلة الواردة في بند (تدريب على الاختبارات الدولية) فردياً، ثم أناقشهم جميعًا في حلها على اللوح، مُبيِّنًا لهم المقصود بالاختبارات الدولية.

كتاب التمارين

أستعد لدراسة الوحدة

الوحدة 2: مبدأ العدّ والتباديل والتوافيق

مثال: أجد عدد النواتج المُمكنة في تجربة رمي حجري نرد متمايزين مرّة واحدة، باستعمال الجدول.

الحجر الأول الحجر الثاني	1	2	3	4	5	6
1	1, 1	2, 1	3, 1	4, 1	5, 1	6, 1
2	1, 2	2, 2	3, 2	4, 2	5, 2	6, 2
3	1, 3	2, 3	3, 3	4, 3	5, 3	6, 3
4	1, 4	2, 4	3, 4	4, 4	5, 4	6, 4
5	1, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	6, 5
6	1, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6

إذن، عدد النواتج المُمكنة هو 36 ناتجًا.

استعمال مخطط الاحتمال لعدّ النواتج الممكنة في تجربة عشوائية (الدرس 1)

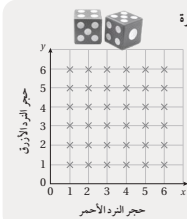


7 قرص دائري مقسّم إلى 3 قطاعات متطابقة كتبت عليها الأحرف A, B, C كما في الشكل المجاور. استعمال مخطط الاحتمال لتحديد الفضاء العيني لتجربة تدوير مؤشر القرص مرتين عشوائيًا.

8 استعمال مخطط الاحتمال لتحديد الفضاء العيني لتجربة رمي قطعة نقد وحجر نرد مرة واحدة عشوائيًا.



9 سُجِّيتَ كرتان عشوائيًا على التوالي دون إرجاع من صندوق يحتوي الكرات الأربع المتماثلة المجاورة. استعمال مخطط الاحتمال لتحديد الفضاء العيني.



مثال: استعمال مخطط الاحتمال لتحديد الفضاء العيني لتجربة رمي حجري مرة واحدة عشوائيًا أحدهما لونه أحمر والآخر لونه أزرق.

أرسم محورين، وأسجل على أحدهما نواتج رمي حجر النرد الأحمر، وعلى المحور الآخر نواتج رمي حجر النرد الأزرق، كما في الشكل المجاور، حيث يمثل تقاطع خطوط مخطط الاحتمال الفضاء العيني للتجربة.

إذن، الفضاء العيني لهذه التجربة فيه 36 عنصرًا.

14

أستعد لدراسة الوحدة

الوحدة 2: مبدأ العدّ والتباديل والتوافيق

أختير معلوماتي قبل البدء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

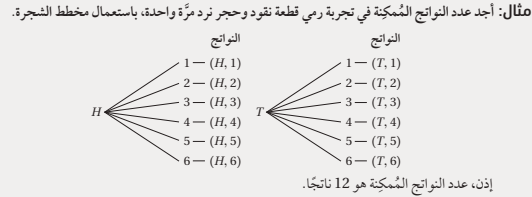
استعمال مخطط الشجرة لعدّ النواتج المُمكنة في تجربة عشوائية (الدرس 1)



1 استعمال مخطط الشجرة لتحديد الفضاء العيني لتجربة تدوير مؤسّر القرص المجاور مرتين عشوائيًا.

(2-1)، أنظر ملحق الإجابات.

2 أجد عدد النواتج المُمكنة في تجربة رمي قطعة نقد وحجر نرد مرّة واحدة، باستعمال مخطط الشجرة.



إذن، عدد النواتج المُمكنة هو 12 ناتجًا.

استعمال الجدول لعدّ النواتج المُمكنة في تجربة عشوائية (الدرس 2)

	R	B	G
R	R, R	R, B	R, G
B			
G			

سُحِّيتَ كرتان عشوائيًا على التوالي مع الإرجاع من كيس يحتوي ثلاث كرات متماثلة ألوانها: أحمر (R)، أزرق (B)، أخضر (G).

3 أكمل الجدول المجاور، ثمّ أصدّد الفضاء العيني للتجربة.

4 أجد عدد عناصر الفضاء العيني.

أنظر ملحق الإجابات.

5 أجد عدد النواتج المُمكنة في تجربة سحب كرتين عشوائيًا، الواحدة تلو الأخرى من دون إرجاع، من صندوق يحوي كرة حمراء، وكرة خضراء، وكرة سوداء، باستعمال الجدول.

6

6 أجد عدد النواتج المُمكنة في تجربة رمي قطعة نقد مرتين، باستعمال الجدول.

4

13

أستعد لدراسة الوحدة

الوحدة 2: مبدأ العدّ والتباديل والتوافيق

حل مسائل حياتية باستعمال مخطط الشجرة أو الجدول أو مخطط الاحتمال (الدرس 1)



وحدة تخزين: يرغب يوسف في شراء مشغّل (مقاطع صوتية)، ولديه 4 سماعات مختلفة بالجيجابايت 2GB, 4GB, 8GB, 16GB. ويمكنه الاختيار من 5 ألوان مختلفة: الفضي، والأخضر، والأزرق، والزهري، والأسود.

10 استعمال الجدول لتحديد جميع البدائل الممكنة ليوسف عند اختيار المشغّل. أنظر ملحق الإجابات.

11 أجد عدد الخيارات الممكنة أمام يوسف.

20



12 يوشار: يرغب مهند في شراء بوشار يُباع في علب بثلاثة أحجام مختلفة: صغير، ووسط، وكبير، وأمامه تكهتان مختلفتان: الملح، والزبدة، كم خيارًا مختلفًا أمام مهند لشراء البوشار؟ أنظر ملحق الإجابات.



مثال: عصير طبيعي: تريد عبيير شراء عصير طبيعي من محل بيع العصير في أكواب بثلاثة أحجام مختلفة: صغير، ووسط، وكبير، ولديه 3 أنواع مختلفة من الفاكهة: فراولة، وموز، وبرتقال. كم خيارًا مختلفًا أمام عبيير لشراء العصير؟



إذن، لدى عبيير 9 بدائل مختلفة للعصير.

15

كتاب التمارين

الدرس
1

مبدأ العدّ الأساسي
Fundamental Counting Principle

الوحدة 2:

أجد عدد الطرائق المُمكنة لظهور شخص بزي مُكوّن من بنطال يتوافر منه 3 ألوان (أسود، وأزرق، وبني)، قميص يتوافر منه 3 ألوان (أبيض، وأخضر، وورمادي)، باستعمال: (3-1)، أنظر ملحق الإجابات.

1

مخطط الشجرة.

2

الجدول.

3

القائمة المنظمة.

4

في محل لبيع القرطاسية 8 أنواع مختلفة من الأقلام، و6 أنواع مختلفة من الدفاتر المدرسية. أجد عدد الطرائق المُمكنة لاختيار قلم واحد ودفتر واحد. $8 \times 6 = 48$

بكم طريقة يُمكن اختيار نوعين من الحلويات من بين 7 أنواع مختلفة، ونوعين من المشروبات الساخنة من بين 5 أنواع مختلفة:

5

إذا سُحِبَ بال تكرار؟ $7 \times 7 \times 5 \times 5 = 1225$

6

إذا لم يُسحَب بال تكرار؟ $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$

7

إذا سُحِبَ بتكرار أنواع الحلويات فقط؟ $7 \times 7 \times 5 \times 4 = 980$

أجد عدد الطرائق المُمكنة لتكوين رمز دخول للبريد الإلكتروني، يتألّف من حرفين من حروف الإنجليزية (عددها 26 حرفاً) من دون الاهتمام بحجم الحرف، ورقمين من الأرقام: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9:

8

إذا سُحِبَ بال تكرار. $26 \times 26 \times 9 \times 9 = 54756$

9

إذا لم يُسحَب بال تكرار. $26 \times 25 \times 9 \times 8 = 46800$

10

إذا كان الحرف الأول B، ولا يُسحَب بال تكرار. $1 \times 25 \times 9 \times 8 = 1800$

11

جامعات: ترغب فاطمة في اختيار تخصّص من بين 7 تخصّصات جامعية، وكذلك اختيار جامعة من بين 4 جامعات قريبة من منزلها. بكم طريقة يُمكنها اختيار التخصّص والجامعة؟ $7 \times 4 = 28$

16

الدرس
2

مضروب العدد
Factorial

الوحدة 2:

أجد ناتج كلّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

1

 $7! = 5040$

2

 $(6-2)! = 24$

3

 $(5!)(3!) = 720$

4

 $\frac{6!}{4!} = 30$

5

 $\frac{2!}{4!} = \frac{1}{12}$

6

 $\frac{9!}{(7!)(2!)} = 36$

7

أجد عدد الطرائق المُمكنة لجلوس 4 طلبة على 4 كراسي موضوعة في صف واحد. 24

أجد عدد الطرائق المُمكنة لترتيب حروف كل كلمة ممّا يأتي:

8

FORMING $7! = 5040$

9

REARRANGE $\frac{9!}{(3!)(2!)(2!)} = 15120$

10

كوّن أعضاء فريق للعروض الرياضية هرماً بشريّاً بوقوف بعضهم على أكتاف بعض كما في الشكل المجاور:

11

أجد عدد الطرائق التي يُمكن بها تكوين الهرم البشري إذا أمكن لأعضاء الفريق الأربعة الواقفين في الصف السفلي فقط تبادل الأماكن في ما بينهم. $4! = 24$

12

أجد عدد الطرائق التي يُمكن بها تكوين الهرم البشري إذا أمكن لأعضاء الفريق الستة الواقفين في الصفوف العلوية الثلاثة فقط تبادل الأماكن في ما بينهم. $6! = 720$

13

أجد عدد الطرائق التي يُمكن بها تكوين الهرم البشري إذا أمكن لأعضاء الفريق الأربعة الواقفين في الصف السفلي تبادل الأماكن في ما بينهم، وأمكن لأعضاء الفريق الستة الواقفين في الصفوف العلوية الثلاثة تبادل الأماكن في ما بينهم. $(4!)(6!) = 17280$

14

سباحة: أجد عدد الطرائق التي يُمكن بها ترتيب زيارة إلى الأماكن الأثرية الآتية: البترا، وادي رم، قلعة العقبة، قلعة الشوبك، قلعة الكرك. $5! = 120$

17

ملاحظات

كتاب التمارين

الدرس 3

التباديل Permutations

أجد قيمة كلِّ ممَّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

1 ${}_{15}P_5 = 360360$

2 $({}_8P_5)({}_7P_3) = 1411200$

3 $\frac{{}_{10}P_8}{{}_{10}P_6} = 58344$

4 $\frac{{}_8P_8}{{}_8P_3}({}_5P_2) = 180$

5 أجد عدد الطرائق المُمكنة لاصطفاف 3 أشخاص في خط مستقيم. ${}_3P_3 = 6$

6 بكم طريقة قد يكون لـ 3 أصدقاء تواريخ ميلاد مختلفة بافتراض أنَّ في السنة 365 يومًا؟ ${}_{365}P_3 = 48228180$

7 بكم طريقة يُمكن لسمير ترتيب 7 كتب مختلفة على رفٍّ في غرفته؟ ${}_7P_7 = 5040$

8 كم عددًا من منزلتين يُمكن تكوينه باستعمال الأرقام: 1, 2, 3, 4, 5 بافتراض عدم السماح بالتكرار؟ ${}_5P_2 = 20$

9 بكم طريقة يُمكن اختيار 3 مسافئين عشوائيًا من بين 10 مسافئين، بحيث يتولَّى الأول قيادة حافلة للطلاب، والثاني قيادة حافلة للطالبات، والثالث قيادة حافلة للموظفين في إحدى الجامعات؟ ${}_{10}P_3 = 720$

10 أجد عدد الطرائق التي يُمكن بها لأسيل ترتيب 6 أنواع مختلفة من العصير بعضها بجانب بعض في الرفِّ الذي في باب التلاجة. ${}_6P_6 = 720$

11 بكم طريقة يُمكن لوشام اختيار 6 لوحات فنية عشوائيًا من بين 10 لوحات مختلفة رسمها، ثم عرض بعضها بجانب بعض في صف واحد على حائط؟ ${}_{10}P_6 = 151200$

12 بكم طريقة يُمكن للمُدَرِّب فريق كرة قدم اختيار 5 لاعبين عشوائيًا من بين 11 لاعبًا لتنفيذ ركلات الترجيح الخمس بعد انتهاء الشوطين الإضافيين من المباراة؟ ${}_{11}P_5 = 55440$

13 أجد عدد الطرائق التي يُمكن بها اختيار طالب لفريق الكشَّافة المدرسي، وآخر للجنة الخدمة الاجتماعية المدرسية من صف يحوي 22 طالبًا. ${}_{22}P_2 = 462$

بدا العدد والابتداء والتعريف

18

الدرس 4

التوافيق Combinations

أجد قيمة كلِّ ممَّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

1 ${}_9C_5 = 126$

2 $({}_{10}C_6) - ({}_9C_7) = 174$

3 $({}_{15}C_2)({}_8C_3) = 5880$

4 $\frac{{}_{12}C_3}{{}_{11}C_3} = \frac{4}{3}$

5 كم لجنة تضم 3 أشخاص يُمكن تكوينها عشوائيًا من بين 8 أشخاص؟ ${}_8C_3 = 56$

6 أجد عدد الطرائق المُمكنة لتكوين لجنة تضم 2 من المُعلِّمين و 4 من الطلبة الذين اختيروا عشوائيًا من بين 7 مُعلِّمين و 9 طلبة. $({}_7C_2)({}_9C_4) = 2646$

7 كم مجموعة جزئية من رقمين يُمكن تكوينها من الأرقام: 1, 2, 3, 4, 5؟ ${}_5C_2 = 10$

8 أجد عدد الطرائق التي يُمكن بها لطبيب اختيار نوعين من الضمادات الطبية من بين 9 أنواع مختلفة متوافرة لديه. ${}_9C_2 = 36$

براد اختيار 4 طلاب عشوائيًا من صف فيه 22 طالبًا للمشاركة في مسابقات تُنظِّمها المدرسة:

9 أجد عدد الطرائق المُمكنة لاختيار هؤلاء الطلاب. ${}_{22}C_4 = 7315$

10 أجد عدد الطرائق المُمكنة لاختيار هؤلاء الطلاب إذا كان الأول سيشارك في مسابقة الشَّعر، والثاني سيشارك في مسابقة الرياضيات، والثالث سيشارك في مسابقة الثقافة العامة، والرابع سيشارك في مسابقة مهارات الحاسوب. ${}_{22}P_4 = 175560$

11 ذهب سعيد إلى محل لبيع الملابس، فوجد فيه 9 ألوان مختلفة من القمصان، و 8 ألوان مختلفة من البناتيل. أجد عدد الطرائق المختلفة التي يُمكن بها لسعيد شراء 3 قمصان و 4 بناتيل من هذا المحل. $({}_9C_3)({}_8C_4) = 5880$

12 أجد عدد الطرائق المختلفة التي يُمكن بها اختيار كتابين من 5 كتب ثقافية و 3 كتب من 5 كتب تاريخية.

$({}_5C_2)({}_3C_2) = 100$

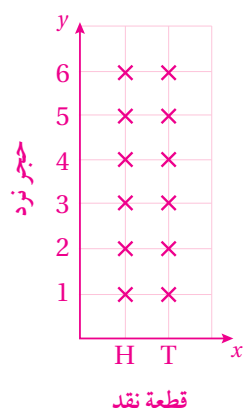
بدا العدد والابتداء والتعريف

19

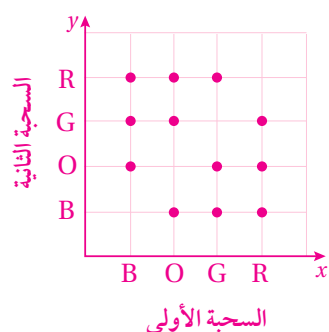
ملاحظات

إجابة الأسئلة في بند (أستعد لدراسة الوحدة):

(8)



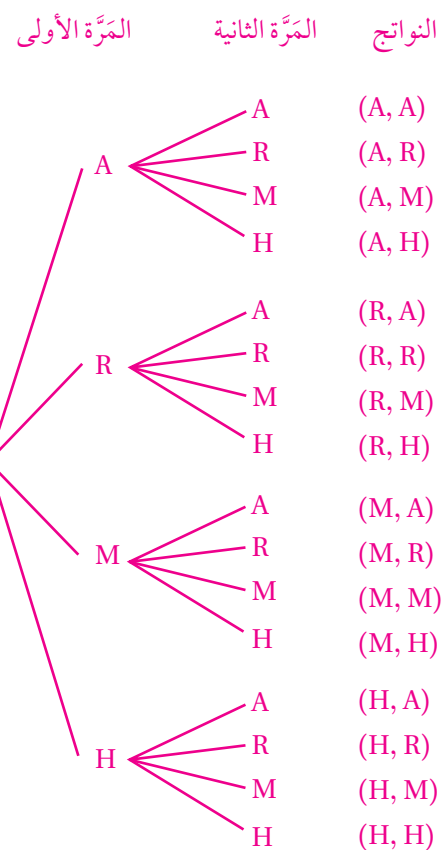
(9)



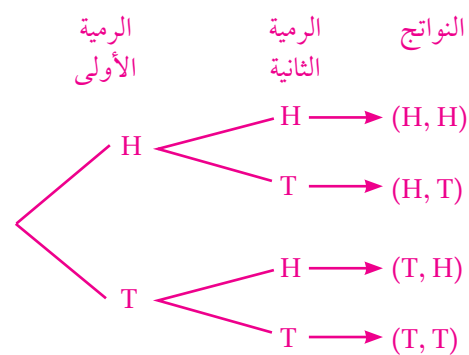
(10)

		لون المشغل				
		أسود	زهري	أزرق	أخضر	فضي
سعة المشغل	2	أسود, 2	زهري, 2	أزرق, 2	أخضر, 2	فضي, 2
	4	أسود, 4	زهري, 4	أزرق, 4	أخضر, 4	فضي, 4
	8	أسود, 8	زهري, 8	أزرق, 8	أخضر, 8	فضي, 8
	16	أسود, 16	زهري, 16	أزرق, 16	أخضر, 16	فضي, 16
	GB					

(1)

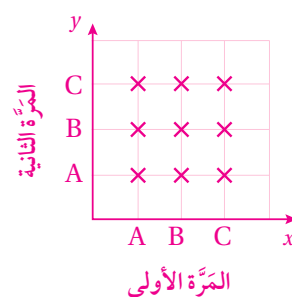


(2) 4 نواتج، هي: (H, H), (H, T), (T, H), (T, T).



$$4) \quad \Omega = \{(R,R), (R,B), (R,G), (B,R), (B,B), (B,G), (G,R), (G,B), (G,G)\}$$

(7)



(2)

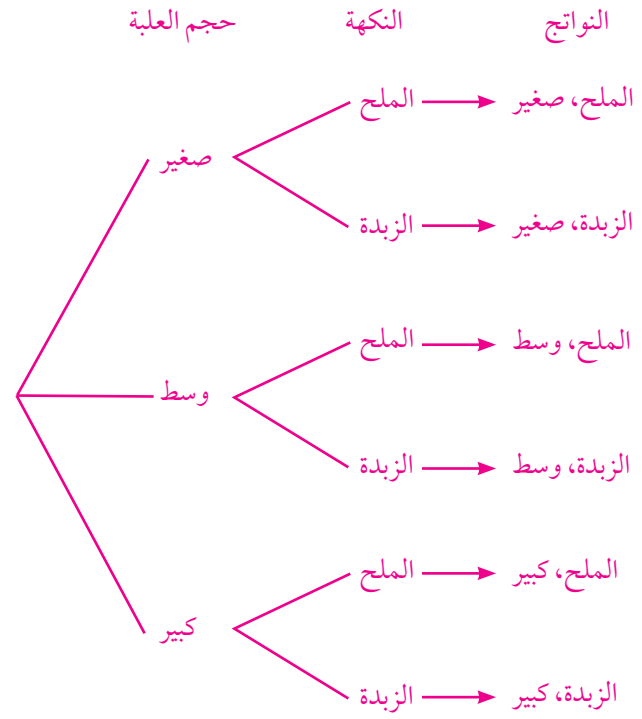
البطلال	القميص			
		أبيض	أخضر	رمادي
	أسود	أبيض، أسود	أخضر، أسود	رمادي، أسود
	أزرق	أبيض، أزرق	أخضر، أزرق	رمادي، أزرق
	بني	أبيض، بني	أخضر، بني	رمادي، بني

(3)

أسود، أبيض أسود، أخضر أسود، رمادي
 أزرق، أبيض أزرق، أخضر أزرق، رمادي
 بني، أبيض بني، أخضر بني، رمادي

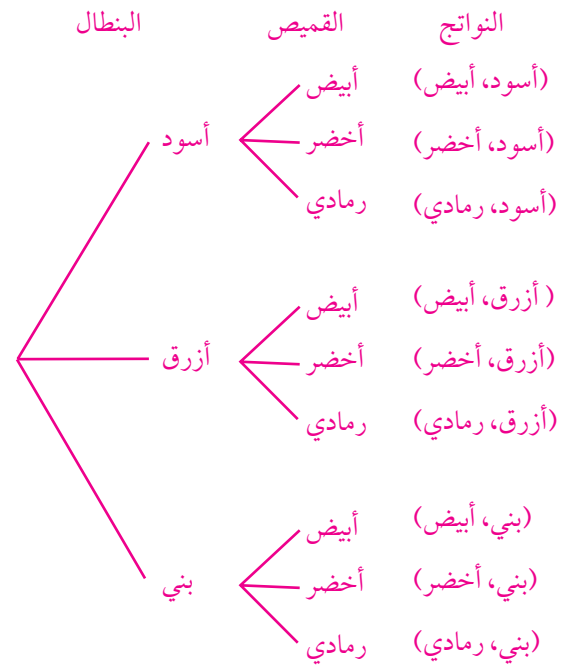
توجد 9 طرائق لظهور الشخص بزيّ مختلف.

(12)



إجابة أسئلة الدرس (1):

(1)





مُخطّط الوحدة



اسم الدرس	النتائج	المصطلحات	الأدوات اللازمة	عدد الحصص
الدرس 1: الاحتمال بالتبادل والتوافق.	- استعمال مبدأ العد والتبادل والتوافق لإيجاد عدد عناصر الفضاء العيني، وعدد عناصر حوادث في تجربة عشوائية. - استعمال مبدأ العد والتبادل والتوافق لإيجاد احتمالات حوادث في تجربة عشوائية.		آلة حاسبة.	4
الدرس 2: المتغيرات العشوائية.	- تعرف المتغير العشوائي. - إيجاد قيم المتغير العشوائي في تجربة عشوائية. - إيجاد العناصر المرتبطة بقيمة محدّدة من قيم متغير عشوائي.	المتغير العشوائي.	- أحجار نرد. - بطاقات مرقّمة. - كرات ملوّنة. - أقراص ذات مؤشر دوّار.	3
الدرس 3: احتمال المتغير العشوائي.	- إيجاد احتمال قيم المتغير العشوائي في تجربة عشوائية. - تعرف التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي، وخصائصه. - كتابة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي، وتمثيله بطرائق مختلفة.	التوزيع الاحتمالي.	- بطاقات حروف. - بطاقات مرقّمة. - كرات ملوّنة. - لوحة رسم بياني.	3
الدرس 4: توقع المتغير العشوائي.	- تعرف توقع المتغير العشوائي. - تعرف تباين المتغير العشوائي. - إيجاد كل من التوقع، والتباين للمتغير العشوائي المنفصل.	توقع المتغير العشوائي. تباين المتغير العشوائي.	آلة حاسبة.	3
اختبار نهاية الوحدة.				2
مجموع الحصص:				15 حصة

نظرة عامة على الوحدة:

تعلّم الطلبة سابقًا التجربة العشوائية، والفضاء العيني، والحادث، ومفهوم الاحتمال، وكتابة عناصر الفضاء العيني باستعمال الجدول، والقائمة المنظمة، ومخطط الشجرة، وإيجاد احتمالات حوادث بسيطة واحتمالات حوادث مُركّبة، بما في ذلك الحوادث المتنافية، والحوادث غير المتنافية، والحوادث المستقلة، والحوادث غير المستقلة. وكذلك إيجاد الاحتمال المشروط، ومبدأ العد الأساسي، والتباديل، والتوافيق، واستعمال التباديل والتوافيق لإيجاد عدد الطرائق المُمكنة لإجراء تجربة عشوائية مُكوّنة من مراحل عديدة. سيتعلّم الطلبة في هذه الوحدة إيجاد الاحتمال باستعمال مبدأ العد الأساسي، والتباديل، والتوافيق، والمتغيّرات العشوائية، وتحديد مداها وتوزيعها الاحتمالي، وإيجاد توقُّع المتغيّر العشوائي وتباينه.

ما أهمية هذه
الوحدة؟

صحيح أنّ الحوادث التي تقع مستقبلًا هي من علم الغيب، ولكنّ علماء الإحصاء والاحتمال وضعوا نظريات يُمكن تطبيقها لتقدير احتمالية وقوع بعض الحوادث ضمن مواقف حياتية. فمثلاً، شركات التأمين تعتمد الاحتمالات المحسوبة من طلبات التعويض عن الأضرار السابقة أساسًا للتنبُّؤ باستحقاقات التعويض المستقبلية.



سأتعلّم في هذه الوحدة:

- استعمال مبدأ العدّ والتباديل والتوافيق لحساب الاحتمالات.
- تعرّف المتغير العشوائي لنواتج تجربة عشوائية، وتحديد قيم هذا المتغير.
- حساب الاحتمال لمتغير عشوائي في تجربة عشوائية.
- إيجاد التوقع والتباين لمتغير عشوائي في تجربة عشوائية.

تعلّمتُ سابقاً:

- استعمال مبدأ العدّ الأساسي لإيجاد عدد الطرائق الممكنة لإجراء تجربة عشوائية من مراحل عدّة.
- استعمال التباديل لإيجاد عدد الطرائق عندما يكون الترتيب مهماً.
- استعمال التوافيق لإيجاد عدد الطرائق عندما لا يكون الترتيب مهماً.
- استعمال مبدأ العدّ والتباديل والتوافيق لنمذجة مواقف حياتية، وحلّ مسائل عملية.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (20-25) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

59

الترباط الرأسي بين الصفوف:

الصف الثاني عشر (الأدبي):



- إيجاد الاحتمال في التوزيع الهندسي، والتوزيع ذي الحدين.
- إيجاد كل من توقّع التوزيع الهندسي، والتوقّع والتباين للتوزيع ذي الحدين.
- تعرّف التوزيع الطبيعي، وخصائص منحناه.
- إيجاد كل من احتمال المتغير العشوائي الطبيعي، وتوقّعه، وتباينه.
- حل مسائل حياتية عن كل من التوزيع الهندسي، والتوزيع ذي الحدين، والتوزيع الطبيعي، والتوزيع الطبيعي المعياري.

الصف الحادي عشر (الأدبي):



- إيجاد الاحتمال باستعمال مبدأ العد، والتباديل، والتوافيق.
- إيجاد قيم المتغير العشوائي، وإيجاد احتمال كل قيمة منها.
- تمثيل التوزيع الاحتمالي بجدول، ورسم بياني، ومجموعة أزواج مرتّبة.
- إيجاد كل من توقّع المتغير العشوائي، وتباينه.

الصف العاشر:



- تمييز الحوادث المتنافية من الحوادث غير المتنافية، وإيجاد احتمالات كل منهما.
- تمييز الحوادث المستقلة من الحوادث غير المستقلة، وإيجاد احتمالات كل منهما.
- إيجاد احتمال اتحاد حادثين، وتقاطعهما، واحتمال التمتمة.
- تمثيل التجارب العشوائية بأشكال فن، والشجرة الاحتمالية، واستعمال كل منهما لإيجاد الاحتمال.
- إيجاد الاحتمال المشروط في مواقف حياتية باستعمال القانون، ومن الجداول ذات الاتجاهين.

الاحتمال بالتباديل والتوافيق

Probability with Permutations and Combinations

استعمال مبدأ العدّ والتباديل والتوافيق لحساب احتمالات الحوادث في تجربة عشوائية.

فكرة الدرس



مسألة اليوم



أراد خالد التقاط صورة لعائلته، فوقف الأب والأم والابن والابنة في صف واحد أمام الكاميرا. ما احتمال وقوف الابن والابنة بين الأبوين؟

تعلّمتُ في الوحدة السابقة كيفية إيجاد عدد الطرائق الممكنة لإجراء تجربة عشوائية باستعمال مبدأ العدّ، ويُمكنني الآن الاستفادة من ذلك في حساب احتمال وقوع حادث مُعَيّن ضمن تلك التجربة العشوائية.

مثال 1

رُتبت البطاقات الآتية عشوائيًا في صف واحد. ما احتمال أن يظهر الرقمان 3 و 4 متجاورين؟

2 4 5 1 3

الخطوة 1: أفترض أن الحادث A يعني ظهور الرقمين 3 و 4 متجاورين.

الخطوة 2: أحسب عدد عناصر Ω ؛ أي عدد طرائق ترتيب 5 عناصر (بطاقات) في صف واحد.

$$n(\Omega) = 5!$$

مبدأ العدّ الأساسي

$$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

تعريف مضروب العدد

$$= 120$$

بالتبسيط

الخطوة 3: أجد عدد عناصر الحادث A .

أظهر الرقمين 3 و 4 متجاورين في إحدى صورتين: 43، أو 34، وأعايل كلّاً منهما كأنّها عنصر واحد، ثم أجد عدد طرائق ترتيب 4 عناصر:

$$n(A) = 2 \times 4!$$

مبدأ العدّ الأساسي

$$= 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

تعريف مضروب العدد

$$= 48$$

بالتبسيط

أتذكّر

الرمز Ω يُقرأ: أوميغا، ويدل على الفضاء العيني للتجربة العشوائية.

نتائج الدرس



• استعمال مبدأ العد والتباديل والتوافيق لإيجاد عدد عناصر الفضاء العيني، وعدد عناصر حوادث في تجربة عشوائية.

• استعمال مبدأ العد والتباديل والتوافيق لإيجاد احتمالات حوادث في تجربة عشوائية.

نتائج التعلّم القبلي:

- إيجاد كلّ من مضروب العدد، وعدد التباديل، وعدد التوافيق لعناصر عددها n ، وقد أخذ منها r عنصرًا كل مرة.
- استعمال مبدأ العد والتباديل والتوافيق لإيجاد عدد الطرائق الممكنة لإجراء تجربة عشوائية مُكوّنة من مراحل عديدة.
- إيجاد احتمالات حوادث بسيطة وأخرى مُركّبة.

مراجعة التعلّم القبلي:

- أوّجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المُرتبطة بما سيقدّم من موضوعات الدرس في الحصة (إن وُجدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدرّياتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أنجول بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجّهم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

التهيئة

1

- أ طرح على الطلبة الأسئلة الآتية:

◀ كم عددًا مؤلّفًا من 3 أرقام يُمكن تكوينه من الأرقام: 1, 2, 3, 4, 5، في حال سُمح بتكرار الرقم في العدد نفسه، وفي حال لم يُسمح بالتكرار؟
في حال سُمح بالتكرار، يُمكن تكوين 5^3 من الأعداد؛ أي 125 عددًا، وفي حال لم يُسمح بالتكرار، فإنّ عدد الأعداد هو: $5 \times 4 \times 3 = 60$

◀ بكم طريقة يُمكن أن يجلس 4 طلبة على 6 مقاعد موضوعة في صف واحد؟

$${}_6P_4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

◀ كم هدية مؤلّفة من 3 كتب يُمكن اختيارها عشوائيًا من بين 5 كتب علمية مختلفة، و 4 كتب أدبية مختلفة؟ ${}_9C_3 = 84$

◀ كم واحدة منها تضمّ كتابين علميين على الأقل؟
 ${}_5C_2 \times {}_4C_1 + {}_5C_3 \times {}_4C_0 = 10 \times 4 + 10 \times 1 = 50$

• أناقش الطلبة في حل الأسئلة السابقة، ثم أطلب إليهم تبرير إجاباتهم، وتوضيح الفرق بين التباديل والتوافيق.

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم)، ثم أسألهم:

◀ ما المقصود بالاحتمال؟ فرصة وقوع الحادث، موضوع السؤال، التي تُحدّد برقم في الفترة $[0, 1]$.

◀ كيف يُمكن إيجاد الاحتمال؟ بقسمة عدد النواتج في الحادث المطلوب على عدد نواتج التجربة جميعها عندما تكون النواتج متساوية الاحتمال.

◀ بكم طريقة يُمكن أن يقف الأب والأمّ مع ولديهما في صف واحد أمام الكاميرا؟ $4! = 24$ طريقة.

◀ بكم طريقة يُمكن أن يقف الأب والأمّ على جانبي الصف؟ بطريقتين.

◀ بكم طريقة يُمكن أن يقف الابن والابنة بين أبيهما؟ بطريقتين.

◀ أيكم يُمكنه رسم شكل يُبين مكان وقوف الابن والابنة بين أبيهما؟ ستختلف الأشكال وتتنوع.

مثال:

الأب	الابن	الابنة	الأمّ
------	-------	--------	-------

- ◀ هل يُمكن رسم أشكال أخرى تُحقّق هذا الشرط؟ نعم.
- ◀ كيف يُمكن معرفة عدد الحالات التي تُحقّق هذا الشرط؟ بضرب عدد طرائق وقوف الأبوين في عدد طرائق وقوف الولدين.

• أعزّز الإجابات الصحيحة.

- المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ لذا لا يجب أن أقول لأحد الطلبة: "إجابتك خطأ"، بل أقول له: "لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمن يستطيع إعطاء إجابة أخرى"، أو أقول له: "هذه إجابة صحيحة لغير هذا السؤال".

مثال 1

- أدّكر الطلبة بالتجربة العشوائية، والحوادث وأنواعها، وكيفية إيجاد احتمال أيّ حادث في تجربة عشوائية، وما يلزم معرفته لإيجاد احتمال الحادث.

- أكتب على اللوح المثال الآتي:

سحب خليل بطاقة واحدة عشوائياً من كيس فيه 10 بطاقات، تحمل كلّ منها عدداً من 1 إلى 10:

- ◀ ما احتمال أن تحمل البطاقة المسحوبة أحد مضاعفات العدد 3؟ 0.3
- ◀ ما احتمال أن تحمل البطاقة المسحوبة عدداً أولياً؟ 0.4
- ◀ ما احتمال أن تحمل البطاقة المسحوبة أحد عوامل العدد 8 أو عدداً أكبر من العدد 6؟ 0.7
- ◀ أصفّ حادثاً احتماله 0.6. ستختلف إجابات الطلبة.

من الإجابات المُحتملة:

- سحب بطاقة تحمل عدداً أكبر من العدد 2، وأصغر من العدد 9.
- سحب بطاقة تحمل عدداً فردياً أو عدداً أولياً.
- سحب بطاقة تحمل أحد عوامل العدد 24.

- أوضّح للطلبة أن هذا الدرس يتضمّن إيجاد الاحتمالات في تجارب عشوائية، واستعمال إحدى طرائق العد (مبدأ العد الأساسي، التباديل، التوافيق)، أو أكثر من طريقة منها؛ لتعرّف عدد عناصر الفضاء العيني، وعدد عناصر الحادث.

- أناقش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح، مُبيّناً لهم كيفية استعمال مبدأ العد الأساسي لإيجاد الاحتمال، وذلك بإيجاد عدد عناصر Ω ، وعدد عناصر الحادث، ثم التعويض في صيغة إيجاد الاحتمال.

✓ **إرشاد:** أناقش الطلبة في الأفكار الواردة في الصناديق الهامشية؛ لما لها من أهمية في تعزيز مفاهيم الدرس.

مثال إضافي:

رُبّت عشوائياً 7 بطاقات مُتماثلة، تحمل كلّ منها أحد أحرف كلمة (مزارعون) في صف واحد. أجد احتمال كلّ ممّا يأتي:

- (a) أن تكون البطاقتان اللتان تحمّلان الحرفين (م)، و(ن) متجاورتين. $\frac{2}{7}$
- (b) أن تكون البطاقة التي تحمل الحرف (ن) في وسط الصف. $\frac{1}{7}$

✓ التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (أتحقّق من فهمي) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم من أخطأ في الإجابة؛ تجنباً لإحراجة.

الخطوة 4: أجد الاحتمال.

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{48}{120} = \frac{2}{5}$$

بالتعويض في صيغة الاحتمال

بالتبسيط

إذن، احتمال ظهور الرقمين 3 و 4 متجاورين هو $\frac{2}{5}$

أتحقق من فهمي

كُتبت أحرف كلمة (تباديل) على 6 بطاقات مُتماثلة، ثم رُتبت البطاقات عشوائيًا في صف واحد. ما احتمال أن يظهر الحرفان (ت) و(ي) متجاورين؟ $\frac{1}{3}$

عندما يكون الترتيب مهمًا في تجربة اختيار مجموعة من العناصر في تجربة عشوائية، فإنه يُمكن استعمال التباديل لحساب احتمالات اختيار تلك العناصر.



مثال 2: من الحياة

يتكوّن مجلس الإدارة في إحدى الشركات من 7 أعضاء، بينهم سارة وحمزة. ما احتمال اختيار سارة رئيسًا لمجلس الإدارة، وحمزة نائبًا للرئيس إذا كانت عملية الاختيار عشوائية؟

الخطوة 1: أفترض أن A يعني اختيار سارة رئيسًا، وحمزة نائبًا للرئيس.

الخطوة 2: أجد عدد عناصر Ω .

الترتيب مهم في هذه الحالة؛ لذا فإن:

$$n(\Omega) = {}_7P_2$$

عدد طرائق اختيار عنصرين (ترتيبيهما مهم) من بين 7 عناصر

$$= \frac{7!}{(7-2)!}$$

بالتعويض في قانون التباديل

$$= \frac{7 \times 6 \times 5!}{5!}$$

مضروب العدد

$$= 42$$

بالتبسيط

أتعلم

يُمكن تسهيل الاختصار

على النحو الآتي:

$$p(A) = \frac{2 \times 4!}{5 \times 4!} = \frac{2}{5}$$

أذكر الطلبة بإمكانية استعمال التباديل في التجارب العشوائية التي يكون فيها ترتيب العناصر المختارة من مجموعة عناصر مهمًا.

أناقش الطلبة في حل المثال 2 على اللوح، الذي يُبين كيف يُمكن استعمال التباديل لإيجاد الاحتمال، وذلك بطرح الأسئلة الآتية عليهم:

ما التجربة العشوائية (العملية) في هذه المسألة؟

اختيار رئيس ونائب رئيس من بين 7 أعضاء.

كيف يُمكن إيجاد عدد نواتجها؟ باستعمال

التباديل، أو مبدأ العد؛ لأنّ ترتيب الاختيار مهم.

ما الحادث الذي يراد إيجاد احتماله؟ اختيار

سارة رئيسًا، واختيار حمزة نائبًا للرئيس.

ما عدد عناصر هذا الحادث؟ واحد.

مثال إضافي:

يتألف عدد من 3 أرقام مختلفة اختيرت عشوائيًا من بين الأرقام: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9. ما احتمال أن يكون هذا العدد 732؟ $\frac{1}{210}$

المفاهيم العابرة للمواد:

أؤكد المفاهيم العابرة للمواد حيثما وردت في كتاب الطالب أو كتاب التمارين. ففي المثال 2، أعزز لدى الطلبة الوعي الوطني بتنظيم حوار عن طريقة الاختيار العشوائي لرئيس المجلس ونائبه، وإيجابياتها وسلبياتها، وكيف يُمكن تحسين طريقة الاختيار، وما يجب أن يتوافر فيمن يتولّى مهمة رئاسة المجلس.

مثال 3: من الحياة

- أذكر الطلبة بإمكانية استعمال التوافق في التجارب العشوائية التي يكون فيها ترتيب العناصر المختارة من مجموعة عناصر غير مهم.
- أناقش الطلبة في حل المثال 3 على اللوح، الذي يُبين كيف يُمكن إيجاد احتمال في موقف حياتي باستعمال التوافق، وإيجاد عدد عناصر الفضاء العيني، ثم أ طرح على الطلبة أسئلة مُشابهة لتلك المطروحة في المثال 2، مُوضِّحاً الفرق بين الحالتين، وهو ما أدّى إلى استعمال التوافق.

تنويع التعليم:

قد يواجه بعض الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في إيجاد تفسير للمسائل الحياتية، ومعرفة إذا كان حلها باستعمال التباديل أم التوافق؛ لذا أُنصحهم بعض الوقت، وأقدم لهم أمثلة سهلة عند اللزوم، مُنوّهاً إيّاهم بضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل؛ ما يساعدهم على حل المسائل بسهولة.

...توسعة:

أطلب إلى الطلبة البحث في شبكة الإنترنت عن مضارّ النباتات المُعالَجة وراثياً، وكتابة فقرة قصيرة عن ذلك.

مثال إضافي:

اختير عددان عشوائياً من بين الأعداد:

2, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13

ما احتمال أن يكون مجموعهما 19؟

$$n(\Omega) = {}_8C_2 = 28$$

العددان اللذان مجموعهما 19 هما:

{6, 13}, {7, 12}, {8, 11}

$$n(B) = 3$$

$$P(B) = \frac{3}{28}$$

الخطوة 3: أجد عدد عناصر الحادث A.

توجد حالة واحدة تكون فيها سارة رئيساً، وحمزة نائباً للرئيس؛ لذا فإن:

$$n(A) = 1$$

الخطوة 4: أجد الاحتمال.

بالتعويض في صيغة الاحتمال

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{42}$$

إذن، احتمال اختيار سارة رئيساً لمجلس الإدارة، وحمزة نائباً للرئيس هو $\frac{1}{42}$

أتحقق من فهمي

فؤاد ومصطفى اثنان من 10 طلبة مشاركين في مسابقة الحساب الذهني. إذا كانت لجنة التحكيم تستدعي عشوائياً الطلبة المشاركين الواحد تلو الآخر لخوض المسابقة، فما احتمال استدعاء فؤاد أولاً ومصطفى ثانياً؟ $\frac{1}{90}$

عندما لا يكون الترتيب مهماً في تجربة اختيار مجموعة من العناصر في تجربة عشوائية، فإنه يُمكن استعمال التوافق لحساب احتمالات اختيار تلك العناصر.

مثال 3: من الحياة

يوجد في قسم التطوير بإحدى الشركات الزراعية 7 مهندسين زراعيين، منهم سعاد وحامد. ما احتمال اختيار سعاد وحامد لحضور ندوة عن المُنتجات المعالجة وراثياً إذا كانت عملية الاختيار عشوائية؟

الخطوة 1: أفترض أن A يعني اختيار سعاد وحامد لحضور الندوة.

الخطوة 2: أجد عدد عناصر Ω .

الترتيب بين سعاد وحامد غير مهم في هذه الحالة؛ لذا أستعمل التوافق:

$$n(\Omega) = {}_7C_2$$

عدد طرائق اختيار عنصرين من بين 7 عناصر

$$= \frac{7!}{2! \times (7-2)!}$$

بالتعويض في قانون التوافق

$$= \frac{7 \times 6 \times 5!}{2 \times 5!}$$

مضروب العدد

$$= 21$$

بالتبسيط

أتعلم

ألاحظ الفرق بين الموقف الذي يكون فيه الترتيب مهماً والموقف الذي لا يكون فيه الترتيب مهماً، بمقارنة المثال 2 بالمثال 3.

أتذكر

$${}_nC_r = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

حيث: n, r عددان صحيحان.
 $0 \leq r \leq n$

الخطوة 3: أجد عدد عناصر الحادث A.

توجد حالة واحدة لاختيار سعاد وحامد لحضور الندوة؛ لذا فإن:

$$n(A) = 1$$

الخطوة 4: أجد الاحتمال.

بالتعويض في صيغة الاحتمال

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{21}$$

إذن، احتمال اختيار سعاد وحامد لحضور الندوة هو $\frac{1}{21}$

أتحقق من فهمي

صندوق فيه 16 كرة مُتماثلة، كلٌّ منها تحمل رقمًا من بين الأعداد 0 إلى 15. إذا اختيرت ثلاث كرات عشوائيًا دفعةً واحدةً، فما احتمال أن تحمل الكرات المختارة أعدادًا زوجية؟ $P(A) = \frac{8C3}{16C3} = \frac{1}{10}$



النباتات المعالجة وراثيًا هي نباتات غُيّرت خصائصها الوراثية عن طريق نقل الجينات من صنف إلى آخر؛ بُغِيَّة زيادة الإنتاج، أو إنتاج محاصيل غريبة، وقد أثبتت كثير من الأبحاث خطورة هذه المحاصيل على صحة الإنسان.



- أوضح للطلبة أنه قد توجد مجموعتان مختلفتان من العناصر في بعض المواقف، ويراد اختيار عدد من العناصر عشوائيًا من هاتين المجموعتين معًا، ثم إيجاد احتمال أن تحوي العناصر المختارة عددًا مُعينًا مثل r_1 من المجموعة الأولى، وعددًا مُعينًا آخر مثل r_2 من المجموعة الثانية. عندئذ يكون عدد عناصر Ω هو عدد طرائق اختيار $(r_1 + r_2)$ من عناصر المجموعتين المُدمجتين، ويكون عدد عناصر الحادث مساويًا لعدد طرائق اختيار r_1 من المجموعة الأولى مضروبًا في عدد طرائق اختيار r_2 من المجموعة الثانية.

- أناقش الطلبة في حل المثال 4 على اللوح، مُؤكدًا لهم أهمية تبرير كل خطوة من خطوات الحل.

إرشاد: أذكر الطلبة بالرموز المُستعملة للتعبير عن التوافيق والتباديل، التي ورد ذكرها في صندوق (رموز رياضية).

مثال إضافي:

في وعاء 6 كرات حمراء، و9 كرات سوداء، و5 كرات بيضاء، وهي جميعًا مُتماثلة. إذا سُحِبَت من الوعاء 4 كرات دفعة واحدة عشوائيًا، فأجد احتمال كلٍّ مما يأتي:

- أن تكون 3 كرات من الكرات المسحوبة حمراء، وكرة واحدة بيضاء. $\frac{{}^6C_3 \times {}^5C_1}{{}^{20}C_4} = \frac{20}{969}$
- أن تكون كرة واحدة من الكرات المسحوبة حمراء، وكرة واحدة سوداء، وكرتان بيضاوين. $\frac{{}^6C_1 \times {}^9C_1 \times {}^5C_2}{{}^{20}C_4} = \frac{36}{323}$
- أن تكون الكرات الأربع من اللون نفسه. $\frac{{}^6C_4 \times {}^9C_4 \times {}^5C_4}{{}^{20}C_4} = \frac{146}{4845}$
- أن تكون كل كرتين من لون واحد يختلف عن لون الكرتين الآخرين.

$$P(R,R,B,B) + P(R,R,W,W) + P(B,B,W,W) = \frac{({}^6C_2 \times {}^9C_2) + ({}^6C_2 \times {}^5C_2) + ({}^9C_2 \times {}^5C_2)}{{}^{20}C_4} = \frac{1050}{4845}$$

مثال 4: من الحياة

شارك 14 طالبًا و16 طالبة من إحدى المدرسيات في مسابقة شعرية، وقد اختير منهم 5 طلبة عشوائيًا لتمثيل لجنة تنظيمية. أجد كلاً مما يأتي:

احتمال اختيار 3 طلاب و3 طالبات.

الخطوة 1: أفترض أن A يعني اختيار لجنة من 3 طلاب و3 طالبات.

الخطوة 2: أجد عدد عناصر Ω .

الترتيب في هذه الحالة غير مهم؛ لذا أستعمل التوافيق لحساب عدد طرائق اختيار 5 طلبة من بين 30 طالبًا وطالبة:

$$n(\Omega) = {}^{30}C_5$$

عدد طرائق اختيار 5 عناصر من بين 30 عنصرًا

$$= 142506$$

باستعمال الآلة الحاسبة

...توسعة:

أطلب إلى الطلبة إيجاد قيمة P_4 ، ثم أسألهم بعد كتابة خطوات الحل: هل يُمكن إيجاد الناتج بطريقة أخرى؟ وذلك لإيصال فكرة أن P_4 يساوي ناتج ضرب 4 عوامل متتالية، أكبرها هو العدد 7، وأنه يُمكن تعميم هذه الفكرة بأن P_r يساوي ناتج ضرب عوامل متتالية، عددها r ، وأكبرها هو n :

$${}_nP_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n+1-r)}_{r \text{ من العوامل}}$$

يُمكن أيضًا إيجاد التوافقى بطريقة مُشابهة، وذلك بقسمة عدد التباديل على مضروب r :

$${}_nC_r = \frac{\underbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n+1-r)}_{r \text{ من العوامل}}}{\underbrace{r(r-1)\dots \times 3 \times 2 \times 1}_{r \text{ من العوامل}}}$$

الخطوة 3: أجد عدد عناصر الحادث A .

أجد عدد طرائق اختيار 3 طلاب من بين 14 طالبًا مضروبًا في عدد طرائق اختيار طالبتين من بين 16 طالبة.

الترتيب غير مهم في كلتا الحالتين. وبحسب مبدأ العد، فإن:

$$n(A) = {}_{14}C_3 \times {}_{16}C_2 = 43680$$

مبدأ العد الأساسي

باستعمال الآلة الحاسبة

الخطوة 4: أجد الاحتمال.

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{43680}{142506} \approx 0.31$$

بالتعويض في صيغة الاحتمال

بالتبسيط

2 احتمال أن يكون رئيس اللجنة ونائبه من الطالبات، والأعضاء الثلاثة الآخرون من الطلاب.

الخطوة 1: أفترض أن B يعني اختيار رئيس اللجنة ونائبه من الطالبات، واختيار الأعضاء الثلاثة الآخرين من الطلاب.

الخطوة 2: أجد عدد عناصر Ω .

الترتيب غير مهم لاختيار لجنة فيها 5 طلبة من بين 30 طالبًا وطالبة؛ لذا فإن:

$$n(\Omega) = {}_{30}C_5 = 142506$$

عدد طرائق اختيار 5 من بين 30

باستعمال الآلة الحاسبة

الخطوة 3: أجد عدد عناصر الحادث B .

أجد عدد طرائق اختيار طالبتين من بين 16 طالبة (الترتيب مهم في هذه الحالة؛ لأن إحدى الطالبتين رئيس، والأخرى نائب للرئيس) مضروبًا في عدد طرائق اختيار 3 طلاب من بين 14 طالبًا (الترتيب غير مهم في هذه الحالة؛ لأن جميع الطلاب أعضاء في اللجنة):

$$n(B) = {}_{16}P_2 \times {}_{14}C_3 = 87360$$

مبدأ العد الأساسي

باستعمال الآلة الحاسبة

رموز رياضية

الرمزان الآتيان مُكافئان:

$$P(n, r) \cong {}_nP_r$$

$$\binom{n}{r} \cong {}_nC_r$$

الخطوة 4: أجد الاحتمال.

$$p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{87360}{142506} \approx 0.61$$

بالتعويض في صيغة الاحتمال

بالتبسيط

أتحقق من فهمي

عائلة تضم 6 أولاد و3 بنات، أرادت الأم اختيار 4 منهم لتحضير وجبة العشاء. أجد احتمال كل ممّا يأتي:

(a) اختيار 2 من الأولاد، و2 من البنات. $P(A) = \frac{{}_6C_2 \times {}_3C_2}{{}_9C_4} = \frac{5}{14}$



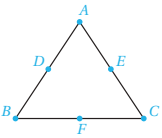
(b) اختيار ولد لإعداد الشاي، وولد لطهي الطعام، وبنين لتجهيز المائدة. $P(B) = \frac{{}_6P_2 \times {}_3C_2}{{}_9C_4} = \frac{5}{7}$

أدرب وأحل المسائل

1 مسرح: أرادت منار وحليمه حضور مسرحية، فاختارت كل منهما مقعدًا في الصف الأمامي الذي يحوي 12 مقعدًا. ما احتمال أن تجلسا على مقعدين متجاورين؟ $\frac{2(11!)}{12!} = \frac{1}{6}$

الأردن 24
JORDAN 4 5 7 7 9

2 لوحة مركبة: تتألف لوحة المركبة في الأردن من رمز خاص بإدارة ترخيص المركبات، مكوّن من رقمين يُكتبان أعلى اللوحة، ويُمثّلان رمزًا مشتركًا لمركبات عدّة، ومن 5 أرقام من بين الأرقام 0 إلى 9 خاصة بكل مركبة. إذا اختيرت مركبة عشوائيًا رمزها المشترك 24، فما احتمال أن يكون رقمها 45779؟ (إرشاد: لا يجوز أن تكون خانات اللوحة كلها أصفارًا). $\frac{1}{10^5 - 1} = \frac{1}{99999}$



3 هندسة: في الشكل المجاور، إذا اختيرت ثلاث نقاط عشوائيًا، فما احتمال أن تكون هذه النقاط على استقامة واحدة؟ $\frac{3}{6C_3} = \frac{3}{20}$

أدرب وأحل المسائل

- أوجّه الطلبة إلى بند (أدرب وأحل المسائل)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1-4) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديدًا ترتبط ارتباطًا مباشرًا بأمثلة الدرس، وهي تُستعمل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عمدًا إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أيّة مسألة، فإنني أختار أحد الطلبة ممن تمكّن/ تمكّنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفّزًا الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدّمة من الزميل/ الزميلة.

✓ **إرشاد:** عند حل السؤال 10، أُبين للطلبة أنّه يُمكنهم حله بالطرائق التي تعلّموها في الصف العاشر لإيجاد احتمال الحوادث المستقلة؛ ذلك أنّ الحوادث تكون مستقلة عند السحب مع الإرجاع.

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (أدرب وأحل المسائل)، فإنني أضع كلاً منهم مع طالب آخر/ طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المتميّزين؛ ليتشاركوا في حل الأسئلة.

مهارات التفكير العليا

- أوجّه الطلبة إلى بند (مهارات التفكير العليا)، ثم أطلب إليهم حل المسألة 11 والمسألة 12.
- أنجول بين أفراد المجموعات مُساعدًا ومُرشِدًا ومُوجِّهًا، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.

أخطاء شائعة:

قد يُخطئ بعض الطلبة عند إيجاد عدد عناصر الفضاء العيني للتجربة العشوائية، وذلك باستعمال التوافق بدلًا من التباديل أو العكس؛ لذا ألِفْتُ انتباه الطلبة إلى استعمال التباديل إذا كان الترتيب مهمًا، واستعمال التوافق إذا كان الترتيب غير مهم، ثم أشرح بعض الأمثلة على ذلك: من الأمثلة على التباديل: تكوين الأعداد، وتكوين الكلمات، واختيار أشخاص ثم تحديد مراكز لهم، مثل: اصطفا ف بعضهم بجانب بعض، أو توزيع هدايا مختلفة عليهم. من الأمثلة على التوافق: اختيار أشخاص من دون تحديد مراكز لهم أو وظائف، وإعطاؤهم الهدية نفسها، أو تكليفهم جميعًا بعمل واحد.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (8 - 6) كتاب التمارين: 8, (4 - 1)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (11 - 9) كتاب التمارين: (9 - 5)
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (12 - 10) كتاب التمارين: (10 - 6)

الإثراء

5

• أطلب إلى الطلبة حل السؤالين الآتيين بوصفهما إثراء لهم:
 ▶ في نادٍ للشطرنج 10 طلبة، منهم 4 من طلبة الصف الحادي عشر، و6 من طلبة الصف الثاني عشر، اثنان منهم شقيقان. أراد مدير المدرسة أن يختار بصورة عشوائية فريقاً من 4 طلبة للمشاركة في مسابقة وطنية. أجد كلاً ممّا يأتي:

1 احتمال أن يكون الشقيقان في الفريق. $\frac{2}{15}$

2 احتمال ألا يكون أيّ من الشقيقين في الفريق. $\frac{1}{3}$

3 احتمال أن يكون في الفريق اثنان على الأقل من طلبة الصف الحادي عشر. $\frac{23}{42}$

▶ رتب حامد البطاقات الآتية بعضها بجانب بعض عشوائياً:

م ر ح و ن ت ع ل ط ب

أجد احتمال أن توجد 6 أحرف بين الحرف (ح) والحرف (ل) في الترتيب الذي وضعه حامد. $\frac{1}{15}$

الختام

6

أطلب إلى كل طالب / طالبة كتابة 3 معلومات أساسية تعلّمها في هذا الدرس على ورقة، ثم أجمع الأوراق، وأعدّ قائمة تحوي المعلومات الأساسية المشتركة التي كتبها الطلبة؛ بغية تقييم تعلّمهم، ومعالجة مواطن الضعف لديهم.

4 علب أقلام فيها 6 أقلام حبر أزرق، و4 أقلام حبر أحمر. إذا اختير من العلبة 4 أقلام الواحد تلو الآخر من دون إرجاع عشوائياً، فما احتمال اختيار قلّمي حبر أزرق وقلّمي حبر أحمر؟ $\frac{{}^6C_2 \times {}^4C_2}{{}^{10}C_4} = \frac{3}{7}$

5 رياضة: يدير أحد الاتحادات الرياضية مجلساً مكوناً من 14 سيدة و10 رجال. قرّر الاتحاد اختيار لجنة مُصغّرة من المجلس تضم 4 أعضاء بصورة عشوائية، ويُنتخب منها رئيس للجنة، وأمين للسّر، وأمينان للصندوق. ما احتمال أن تتألف اللجنة من 3 سيدات، تتولّى إحداهن رئاسة اللجنة، ورجل واحد هو أمين سر اللجنة؟ أنظر ملحق الإجابات.

6 أخلّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم). $\frac{2 \times 2}{4!} = \frac{1}{6}$



ورد: أرادت وفاء تزيين حديقة بيتها، فاختارت عشوائياً 4 شتلات ورد مرة واحدة من بين 10 شتلات ورد جورى، و7 شتلات ورد قرنفل، و13 شتلة ورد قُلّ. ما احتمال أن تكون وفاء قد اختارت:

7 شتلات ورد جورى فقط؟ $\frac{{}^{10}C_4}{{}^{30}C_4} = \frac{2}{261}$

8 شتلات ليس من بينها ورد جورى؟ $\frac{{}^{20}C_4}{{}^{30}C_4} = \frac{323}{1827} \approx 0.1768$

9 شتلة واحدة على الأقل من كل نوع؟ أنظر الهامش.

10 وعاء فيه 4 كرات حمراء، وكرتان خضراوان، جميعها مُتماثلة. إذا سُحبت منه 3 كرات عشوائياً على التوالي مع الإرجاع، فما احتمال سحب كرتين خضراوين، وكرة واحدة حمراء؟ أنظر ملحق الإجابات.

مهارات التفكير العليا

11 مسألة مفتوحة: أكتب سؤالاً للتجربة عشوائية يكون فيه الاحتمال $\frac{1}{5C_2}$ أنظر الهامش.

12 تبرير: بلال وصالح لاعبان في فريق كرة القدم للصف الحادي عشر الذي يضم 14 لاعباً. أراد معلّم التربية الرياضية أن يُوزّع عشوائياً على كل لاعب قميصاً رياضياً من القمصان المرقّمة من 1 إلى 14. ما احتمال حصول صالح على القميص رقم 9، وحصول بلال على القميص رقم 10؟ أبرر إجابتك. أنظر ملحق الإجابات.

إجابة الأسئلة في بند (أندرب وأحل المسائل):

$$9) P(B) = \frac{10 \times 7 \times {}_{13}C_2 + 10 \times {}_7C_2 \times 13 + {}_{10}C_2 \times 13 \times 7}{{}_{30}C_4} = \frac{12285}{27405} \approx 0.4483$$

11 ستختلف إجابات الطلبة. هذا مثال على إجابة مُحتملة:

يوجد في وعاء 3 كرات حمراء، وكرتان سوداوان. سحب سلمي من الوعاء كرتين معاً عشوائياً، ما احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان سوداوين؟

المتغيرات العشوائية
Random Variables

إيجاد قيم متغير عشوائي في تجربة عشوائية.

فكرة الدرس

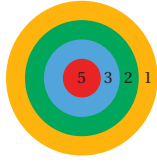


المتغير العشوائي.

المصطلحات



مسألة اليوم



في لعبة رمي السهام، رمى كل من إبراهيم ويوسف سهمين على لوحة السهام المجاورة. كم مجموعاً مختلفاً يمكن أن يسجله إبراهيم أو يوسف؟

يُطلق على المتغير الذي يُتوصل إلى قيمه من نواتج تجربة عشوائية اسم **المتغير العشوائي** (random variable). ففي تجربة سحب كرة عشوائياً من كيس يحوي 3 كرات حمراء، و3 كرات صفراء، إذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد الكرات الحمراء في السحبة، فإن قيمة المتغير العشوائي X قد تكون 0 في حالة سحب كرة صفراء، أو 1 في حالة سحب كرة حمراء.

مثال 1

في تجربة إلقاء قطعتي نقد عشوائياً، إذا دلّ المتغير العشوائي X على عدد مرّات ظهور الصورة، فأجد مجموعة قيم X .

أفترض أن H يعني صورة، وأن T يعني كتابة. وبذلك، فإن:

$$\Omega = \{(T, T), (T, H), (H, T), (H, H)\}$$

عناصر الفضاء العيني للتجربة

$$X = \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 2 \end{matrix}$$

عدد الصور المرتبط بكل عنصر

إذن، مجموعة قيم المتغير العشوائي هي: $X = \{0, 1, 2\}$.

أنتحقق من فهمي

في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة، إذا دلّ المتغير العشوائي X على العدد الظاهر، فأجد مجموعة قيم X . $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

أتعلم

إذا كانت مجموعة قيم المتغير العشوائي معدودة ومنتهية، فإنه يُسمى متغيراً عشوائياً منفصلاً. أمّا إذا كانت مجموعة قيم المتغير العشوائي غير معدودة وغير منتهية، فإنه يُسمى متغيراً عشوائياً متصلاً.

رموز الرياضيات

يُرمز إلى قيم المتغير العشوائي بالرمز x ، ويُرمز إلى المتغير العشوائي نفسه بالرمز X .

نتائج الدرس



- تعرف المتغير العشوائي.
- إيجاد قيم المتغير العشوائي في تجربة عشوائية.
- إيجاد العناصر المرتبطة بقيمة مُحددة من قيم متغير عشوائي.

نتائج التعلم القبلي:

- كتابة عناصر الفضاء العيني لتجربة عشوائية.
- إيجاد عدد عناصر الفضاء العيني لتجربة عشوائية.
- إيجاد احتمالات حوادث بسيطة وأخرى مركبة.

مراجعة التعلم القبلي:

- أوجه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيُقدّم من موضوعات الدرس في الحصة (إن وُجدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- أتجول بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

التهيئة

1

- أراجع الطلبة في مفهوم التجربة العشوائية بطرح الأسئلة الآتية عليهم:
- ما المقصود بالتجربة العشوائية؟ تجربة لها عدّة نواتج معروفة مقدّماً، وفيها يتعدّد الجزم بالنتيجة قبل إجراء التجربة. وعند تكرار التجربة، قد تظهر نواتج مختلفة من دون نظام مُعيّن أو نمط مُحدّد.
- أذكر مثلاً على تجربة عشوائية.
- إلقاء قطعة نقد، ثم ملاحظة الوجه العلوي.
- إلقاء حجر نرد، ثم تسجيل عدد النقاط على الوجه العلوي.
- سحب كرة من وعاء فيه كرات حمراء وسوداء وبيضاء، ثم تسجيل لون كل منها.

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم)، ثم أسألهم:

◀ أين يُمكن أن يستقرّ السهم في الرمية الأولى؟ في المنطقة الحمراء، أو المنطقة الزرقاء، أو المنطقة الخضراء، أو المنطقة الصفراء.

◀ ما عدد النقاط التي يُمكن تسجيلها في الرمية الأولى؟ 1, 2, 3, 5

◀ ما عدد النقاط التي يُمكن تسجيلها في الرمية الثانية؟ 1, 2, 3, 5

◀ ماذا يُمكن أن تكون نتيجة الرميّين معاً؟ أيّ زوج مُرتّب، مثل: (x, y) ، حيث: $x \in \{1, 2, 3, 5\}, y \in \{1, 2, 3, 5\}$

◀ ما عدد نواتج الرميّين؟ 16 زوجاً مُرتّباً.

◀ ما فضاء العيّنة لتجربة رمي السهمين، وتسجيل عدد النقاط في الرميّين؟

$\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,5), (3,1), (3,2), (3,3), (3,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,5)\}$

- أعزّز الإجابات الصحيحة.

مثال 1

- أدكر الطلبة بطرائق كتابة عناصر الفضاء العيني لتجربة عشوائية (مُخطّط الشجرة، الجدول، القائمة المنظمة)، وتحديد عدد عناصر Ω .
- أوضح للطلبة أنّ المُتغيّر العشوائي هو اقتران يربط كل عنصر من عناصر الفضاء العيني بعدد حقيقي وفق قاعدة ما. فمثلاً، يُمكن تعريف مُتغيّر عشوائي، يُرمز إليه بحرف كبير X ، على الفضاء العيني لتجربة تسجيل جنس مولود بحسب تسلسل الولادة للعائلات ذات الطفلين، بأنّه يدلّ على عدد الأولاد الذكور، أو عدد الإناث. وفي كلتا الحالتين، تكون قيم X : 0، أو 1، أو 2.
- أناقش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح، الذي يُبيّن طريقة إيجاد مجموعة القيم التي يأخذها المُتغيّر العشوائي بكتابة عناصر Ω ، ثم ربط كل نتيجة بعدد حقيقي يُمثّل عدد الصور في تلك النتيجة.

- أُبَيّن للطلبة أنّ المُتغيّر العشوائي في هذا المثال يأخذ مجموعة قيم مُنتهية وقابلة للعد (عددتها محدود، ومُتباعدة)، وأنّ هذا المُتغيّر يُسمّى المُتغيّر العشوائي المنفصل.

- أوضح للطلبة أنّه في أيّ تجربة عشوائية، مثل قياس أطوال طلبة الصف الحادي عشر، إذا دلّ المُتغيّر العشوائي على طول الطالب، فإنّ هذا المُتغيّر يأخذ مجموعة من القيم المحصورة في فترة مُحدّدة لا يُمكن معرفة عدد عناصرها، وتحتوي أعداداً صحيحةً، وكسوراً، وأعداداً حقيقيةً أخرى مثل الجذور، وأنّ هذا المُتغيّر يُسمّى المُتغيّر العشوائي المُتصل.

✓ **إرشاد:** ألّفت انتباه الطلبة إلى أنّ جميع المُتغيّرات العشوائية في هذا الدرس هي مُتغيّرات عشوائية منفصلة.

مثال إضافي:

في تجربة سحب كرتين عشوائياً من وعاء فيه 4 كرات مُرقّمة بالأرقام: 1, 2, 2, 4، إذا دلّ المُتغيّر العشوائي X على مجموع الرقمين الظاهرين على الكرتين، فأجد مجموعة قيم X في الحالتين الآتيتين:

(a) السحب مع الإرجاع. $X = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

(b) السحب من دون إرجاع. $X = \{3, 4, 5, 6\}$

✓ **التقويم التكويني:**

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (أتحقّق من فهمي) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم من أخطأ في الإجابة؛ تجنباً لإحراجه.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرّر المصطلحات الرياضية الواردة ذكرها في الدرس بكلّ من اللغة العربية، واللغة الإنجليزية، مُحفّزاً الطلبة على استعمالها.

- أوضح للطلبة أن عدد العناصر يكون كبيراً في بعض التجارب؛ ما يجعل تحديد القيم العددية للمتغير العشوائي صعباً. وفي هذه الحالة، لا توجد حاجة إلى رصد جميع العناصر، وإنما يكفي تحديد أكبر قيمة للمتغير العشوائي وأصغر قيمة له، ثم كتابة بقية قيم المتغير العشوائي التي تقع بين هاتين القيمتين.
- أنقش الطلبة في حل المثال 2 بطرح الأسئلة الآتية عليهم:

- ◀ لماذا كان عدد عناصر الفضاء العيني 2^4 ؟ لأن لكل سحبة نتيجتين مُمكنيتين (زرقاء، أو خضراء)، ولأربع سحبات 16 نتيجة $(2 \times 2 \times 2 \times 2)$.
- ◀ كيف نُكتب جميع النواتج المُمكنة؟ باستعمال مُخطّط الشجرة، أو القائمة المنظمة.
- ◀ ما أصغر قيمة للمتغير العشوائي؟ لماذا؟ 0؛ لأنه عند سحب 4 كرات فقد لا تظهر أي كرة زرقاء.
- ◀ ما أكبر قيمة للمتغير العشوائي؟ لماذا؟ 4؛ لأنه عند سحب 4 كرات فقد تكون جميع هذه الكرات زرقاء، ولا يمكن أن يتجاوز عدد الكرات الزرقاء عدد الكرات المسحوبة.

أتعلّم

عدد عناصر الفضاء العيني عند اختيار n من عناصر نوعين مختلفي اللون من الكرات هو 2^n

أتعلّم

العناصر (G, G, G, B) ، (G, B, G, G) ، (G, G, B, G) جميعها متشابهة، وكلّ منها يرتبط بالعدد 1

عند تحديد القيس العددية للمتغير العشوائي، يُمكن أحياناً تحديد أكبر قيمة وأصغر قيمة للمتغير العشوائي، ثم كتابة بقية قيمه بين هاتين القيمتين.

مثال 2

إذا دلّ المتغير العشوائي X على عدد الكرات الزرقاء في تجربة سحب 4 كرات عشوائياً معاً من كيس فيه 10 كرات زرقاء مُرقّمة من 1 إلى 10، و8 كرات خضراء مُرقّمة من 1 إلى 8، فأجد مجموعة قيم X .

أفترض أن B يعني كرة زرقاء، وأن G يعني كرة خضراء.

ألاحظ أن عدد عناصر Ω هو:

$$2^4 = 16$$

وهذا عدد كبير نسبياً. ونظراً إلى عدم الحاجة إلى رصد جميع العناصر؛ سأكتفي بتحديد بعضها لمعرفة قيم X :

العنصر (4 خضراء)، والعنصر (4 زرقاء) $\Omega = \{(G, G, G, G), \dots, (B, B, B, B)\}$

عدد الكرات الزرقاء المرتبط بالعنصر $X = \begin{matrix} \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \dots & 4 \end{matrix}$

ألاحظ أن قيم المتغير العشوائي X تتراوح بين 0 و4:

$$(B, G, G, G) \rightarrow 1,$$

$$(B, B, G, G) \rightarrow 2,$$

$$(B, B, B, G) \rightarrow 3$$

نماذج من بقية العناصر

إذن، مجموعة قيم المتغير العشوائي هي: $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

أتحقق من فهمي

في تجربة إلقاء 3 قطع نقد متمايضة عشوائياً، إذا دلّ المتغير العشوائي X على عدد مرّات ظهور الكتابة، فأجد مجموعة قيم X . $X = \{0, 1, 2, 3\}$

تنويع التعليم:

أطلب إلى الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط استعمال مُخطّط الشجرة لكتابة الفضاء العيني لتجارب عشوائية، مثل تجربة رمي 3 قطع نقد، أو سحب كرتين من وعاء فيه كرتان حمراوان، وكرة واحدة سوداء إذا كان السحب مع الإرجاع، وكان السحب من دون إرجاع.

بعد ذلك أطلب إلى الطلبة من ذوي المستوى المتوسط وفوق المتوسط استعمال القائمة المنظمة لكتابة الفضاء العيني، وذكر أمثلة على مُتغيّرات عشوائية، وكتابة تعريفها، وكذلك كتابة مجموعة القيم التي تأخذها هذه المُتغيّرات، ثم عرضها أمام طلبة الصف؛ لإبداء آرائهم بخصوص تلك الأمثلة.

✓ **إرشاد:** أنقش الطلبة في الأفكار الواردة في الصناديق الهامشية؛ لِمَا لها من أهمية في تعزيز مفاهيم الدرس.

مثالان إضافيان:

- 1 أجرى طبيب 10 عمليات جراحية في أحد المستشفيات. إذا دلّ المُتغيّر العشوائي X على عدد العمليات الناجحة من بين العمليات العشر، فما مجموعة قيم X ؟ $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
- 2 يحتوي صندوق على 3 كرات حمراء، و3 كرات زرقاء. إذا سُحبت من الصندوق 4 كرات عشوائياً على التوالي من دون إرجاع، ودلّ المُتغيّر العشوائي X على عدد الكرات الزرقاء المسحوبة، فما مجموعة قيم X ؟ $\{1, 2, 3\}$

- أَوْصَحْ للطلبة أَنَّ كل قيمة من قِيَمِ المُتَغَيِّرِ العشوائي X ترتبط بعنصر واحد أو أكثر من عناصر الفضاء العيني.
- أُنَاقِشْ الطلبة في حل المثال 3 على اللوح، ثم أطلب إليهم كتابة جميع عناصر الفضاء العيني، وتحديد قيمة X المُقَابِلَة لكل عنصر، ثم كتابة العناصر المُرتَبَة بكل قيمة.

...توسعة:

أطلب إلى الطلبة إعادة حل المثال بافتراض أن السحب من دون إرجاع.

مثال إضافي:

سُجِّلَ جنس كل طفل بحسب تسلسل الولادة في العائلات التي لديها 4 أطفال. إذا دَلَّ المُتَغَيِّرُ العشوائي X على عدد البنات، فأكتب الحادث الذي ترتبط عناصره بالقيمة $X = 2$ (أستعمل الرمز G للبنات، والرمز B للولد).

$\{(B, B, G, G), (B, G, G, B), (B, G, B, G), (G, B, B, G), (G, G, B, B), (G, B, G, B)\}$

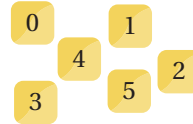
أَتَدَرَّبُ وَأَحِلُّ المسائل

- أَوْجِّهْ الطلبة إلى بند (أَتَدَرَّبُ وَأَحِلُّ المسائل)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1-6) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديداً ترتبط ارتباطاً مباشراً بأمثلة الدرس، وهي تُستعمل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عما إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أية مسألة، فإنني أختار أحد الطلبة مِمَّنْ تَمَكَّنَ / تَمَكَّنَتْ من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته/ استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحَفِّزاً الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المُقَدَّمة من الزميل / الزميلة.

تتطلب بعض المواقف تحديد عناصر حادث مُعَيَّن في الفضاء العيني، مرتبط بقيمة مُحدَّدة من قِيَمِ المتغير العشوائي في التجربة. ففي تجربة إلقاء قطعتي نقد مرةً واحدة، إذا دَلَّ المتغير العشوائي X على عدد مرّات ظهور الصورة، فإنَّ عنصر الحادث $C = \{(H, T)\}$ يرتبط بالقيمة 1، وعنصر الحادث $D = \{(T, T)\}$ يرتبط بالقيمة 0، وعنصر الحادث $E = \{(H, H)\}$ يرتبط بالقيمة 2.

مثال 3

في تجربة سحب بطاقتين عشوائياً على التوالي مع الإرجاع من صندوق يحوي 6 بطاقات مُتمَاثِلَة، كلُّ منها تحمل رقمًا من 0 إلى 5، إذا دَلَّ المتغير العشوائي X على مجموع العددين الظاهرين على البطاقتين المسحوبتين، فأجد الحادث الذي ترتبط جميع عناصره بالقيمة $X = 8$.



أفترض أن الحادث المطلوب هو A ، فتكون عناصره هي الأزواج المُرتَّبة التي مجموع إحداثياتها 8: $3 + 5 = 8, 5 + 3 = 8, 4 + 4 = 8$ **المجاميع المُمكنة للعدد 8 باستعمال البطاقات**
عناصر الحادث $A = \{(3, 5), (5, 3), (4, 4)\}$

أَتَحَقِّقُ من فهمي

في تجربة سحب بطاقتين عشوائياً على التوالي من دون إرجاع من صندوق يحوي 6 بطاقات مُتمَاثِلَة، كلُّ منها تحمل رقمًا من 0 إلى 5، إذا دَلَّ المتغير العشوائي X على مجموع العددين الظاهرين على البطاقتين المسحوبتين، فأجد الحادث الذي ترتبط جميع عناصره بالقيمة $X = 4$. $\{(0, 4), (4, 0), (1, 3), (3, 1)\}$

أَتَعَلَّمُ

ألاحظ أن المجموع $4 + 4$ مُمكن؛ لأنَّ السحب مع الإرجاع.

أَتَذَكَّرُ

السحب من دون إرجاع يعني عدم إمكانية ظهور المسحوب أولاً في السحب التالية.

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (أَتَدَرَّبُ وَأَحِلُّ المسائل)، فإنني أضع كلاً منهم مع طالب آخر / طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المُتمَيِّزِينَ؛ ليتشاركوا في حل الأسئلة.

أخطاء شائعة:

قد يُخطئ بعض الطلبة عند كتابة الحادث الذي ترتبط عناصره بمجموع مُعَيَّن، مثل $X = 5$ ، في تجربة سحب بطاقتين عشوائياً مع الإرجاع من مجموعة بطاقات مُرَقَّمة بالأرقام: 1, 2, 3, 4؛ فقد يكتبون العنصر (2, 3) والعنصر (1, 4) فقط، ولا يذكران العنصر (3, 2) والعنصر (4, 1)؛ لذا أُحَفِّزُ الطلبة على كتابة جميع عناصر Ω باستعمال مُخطَّط الشجرة، أو الجدول، أو القائمة المنظمة، ثم اختيار العناصر المُرتَبَة بمجموع مُعَيَّن؛ لكيلا يغفلوا عن بعض عناصر الحادث.



- أوجّه الطلبة إلى بند (مهارات التفكير العليا)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (9-11).
- أتجول بين أفراد المجموعات مُساعدًا ومُرشِدًا ومُوجِّهًا، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (7 - 9) كتاب التمارين: 1, 3, 5
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (7 - 9) كتاب التمارين: 2, 4, 6
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (8 - 11) كتاب التمارين: (4 - 7)

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤال الآتي بوصفه إثراءً لهم:
 - ◀ يحتوي صندوق على 5 كرات حمراء، و7 كرات زرقاء، و8 كرات صفراء. إذا سُحِبَ منه 3 كرات عشوائيًا على التوالي مع الإرجاع، ودلّ المُتغيّر العشوائي X على عدد الكرات التي لها اللون نفسه في العينة المسحوبة، فما مجموعة قيم X ؟ وما الحادث الذي ترتبط جميع عناصره بالقيمة $X = 2$ ؟

$$X = \{0, 2, 3\},$$

$$A = \{RRB, RRY, YYB, YYR, BBR, BBY\}$$

6 الختام

- أوزّع الطلبة إلى مجموعات ثنائية، ثم أطلب إلى كل ثنائي كتابة مسألة عن تجربة عشوائية ومُتغيّر عشوائي مُعرّف على الفضاء العيني لتلك التجربة، ثم أطلب إلى أفراد المجموعات تبادل المسائل؛ ليجيب كلٌّ منهم عن مسألة الآخر.
- أقدّم التغذية الراجعة لأفراد المجموعات كلها، وأتحقّق من صحّة الإجابات.

أَتَدَرَّبُ وَأَحُلُّ المسائل

1

2

3

في تجربة سحب بطاقتين عشوائيًا من البطاقات الظاهرة في الشكل المجاور، إذا دلّ المتغيّر العشوائي X على حاصل ضرب العددين الظاهرين على البطاقتين المسحوبتين، فأجد مجموعة قيم X في الحالات الآتية:

1 السحب على التوالي مع الإرجاع. $\{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$

2 السحب على التوالي من دون إرجاع. $\{2, 3, 6\}$

3 سحب البطاقتين معًا. $\{2, 3, 6\}$



إذا دُور مُؤشّر القرصين عشوائيًا في الشكل المجاور، وتوقّف كل مُؤشّر عند أحد الأعداد، فأجد مجموعة قيم المتغيّر العشوائي X إذا دلّ على:

4 مجموع العددين. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

5 القيمة المطلقة للفرق بين العددين. $\{0, 1, 2, 3\}$

6 حاصل ضرب العددين. $\{0, 1, 2, 3, 4, 6, 9\}$

7 في تجربة سحب 3 كرات عشوائيًا على التوالي مع الإرجاع من صندوق يحوي 3 كرات حمراء، و3 كرات صفراء، و4 كرات خضراء، جميعها مُتماثلة، إذا دلّ المتغيّر العشوائي X على عدد الكرات الحمراء في السحبة، فأجد الحادث الذي ترتبط جميع عناصره بالقيمة $X = 2$.

8 أخلّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم). $\{(R, R, Y), (Y, R, R), (R, Y, R), (R, R, G), (G, R, R), (R, G, R)\}$

8 مجاميع مختلفة هي: $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$

مهارات التفكير العليا

(9-11)، أنظر الهامش.

9 مسألة مفتوحة: أصف موقفًا تكون فيه قيم المتغيّر العشوائي X : 2، 1، 0.

10 تبرير: في تجربة سحب بطاقتين عشوائيًا على التوالي من صندوق يحوي 3 بطاقات مُتماثلة، كلٌّ منها مُرقّمة بأحد الأرقام: 1، 3، 5، إذا دلّ المتغيّر العشوائي X على مجموع العددين الظاهرين على البطاقتين المسحوبتين، وكانت قيمته: 2، 4، 6، 8، 10، فأحدّد إذا كان السحب مع الإرجاع، أو من دون إرجاع، مُبرّرًا إجابتي.

11 تحدّد: أصف موقفًا حيائيًا تكون فيه بعض قيم المتغيّر العشوائي موجبة، وبعض قيمه الأخرى سالبة.

70

إجابة الأسئلة في بند (أَتَدَرَّبُ وَأَحُلُّ المسائل):

(9) ستختلف إجابات الطلبة.

إجابة مُحتملة: أُلقيت قطعة نقد منتظمة مرّتين متتاليتين، وسُجّل الوجه الظاهر كل مرّة. إذا دلّ المُتغيّر العشوائي X على عدد مرّات ظهور الصورة (H) ، فما مجموعة قيم X ؟

(10) السحب مع الإرجاع؛ لأنّه لا يُمكن للعددين 2، 10 أن يكونا من قيم المُتغيّر العشوائي، إلّا إذا تكرر سحب البطاقة التي تحمل الرقم 1، والبطاقة التي تحمل الرقم 5.

(11) ستختلف إجابات الطلبة.

إجابة مُحتملة: أُلقي حجر نرد مرّتين متتاليتين، وسُجّل الرقم الظاهر على الوجه العلوي كل مرّة. إذا دلّ المُتغيّر العشوائي X على ناتج طرح العدد الظاهر في الرمية الثانية من العدد الظاهر في الرمية الأولى، فما مجموعة قيم X ؟

احتمال المتغير العشوائي

Probability of a Random Variable

إيجاد احتمالات قيم متغير عشوائي في تجربة عشوائية.

فكرة الدرس

التوزيع الاحتمالي.

المصطلحات

مسألة اليوم



عند إلقاء حجر نرد متميزين مرة واحدة، وتسجيل مجموع العددين الظاهرين، ما المجموع الذي احتمال أكبر؟

أتعلم

مجال التوزيع الاحتمالي هو مجموعة قيم المتغير العشوائي، ومداه هو مجموعة قيم الاحتمالات المقابلة.

التوزيع الاحتمالي (probability distribution) للتجربة العشوائية هو اقتران يربط قيم المتغير العشوائي باحتمالات وقوعها في التجربة، ويُرمز إلى اقتران التوزيع الاحتمالي بالرمز $P(X)$ ، وقد يُكتب في صورة $P(X = x)$.

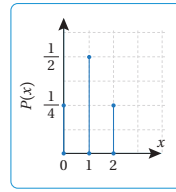
تعلّمت سابقاً أنه عند إلقاء قطعتي نقد متميزتين مرة واحدة، فإن قيم المتغير العشوائي X الذي يدل على عدد مرّات ظهور الصورة قد تكون 0، أو 1، أو 2، حيث إن الفضاء العيني لهذه التجربة هو:

$$\Omega = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$$

وبذلك تكون قيم اقتران التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هي:

$$P(X = 0) = \frac{1}{4}, P(X = 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, P(X = 2) = \frac{1}{4}$$

يمكن أيضاً التعبير عن اقتران التوزيع الاحتمالي بجدول، أو تمثيل بياني.



x	0	1	2
$P(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

توزيع احتمالي

نتائج الدرس

- إيجاد احتمال قيم المتغير العشوائي في تجربة عشوائية.
- تعرّف التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي، وخصائصه.
- كتابة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي، وتمثيله بطرائق مختلفة.

نتائج التعلّم القبلي:

- إيجاد قيم المتغير العشوائي في تجربة عشوائية.
- إيجاد الحادث الذي ترتبط عناصره بقيمة محدّدة للمتغير العشوائي.
- إيجاد احتمالات حوادث بسيطة وأخرى مركّبة.

مراجعة التعلّم القبلي:

- أوجّه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدّم من موضوعات الدرس في الحصة (إن وُجدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- اتّجول بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجّهم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

التهيئة

1

- أراجع الطلبة في مفهوم المتغير العشوائي، والقيم التي يأخذها، بطرح السؤالين الآتيين عليهم:
- ما المتغير العشوائي؟ اقتران يربط فضاء العينة لتجربة عشوائية بمجموعة الأعداد الحقيقية، وتُحدّد قيمه من نواتج تلك التجربة.
- أذكر مثلاً على متغير عشوائي، ثم أكتب مجموعة القيم التي يأخذها. **ستختلف إجابات الطلبة.**

- أذكّر الطلبة بكيفية إيجاد احتمال حوادث بسيطة وأخرى مركّبة، وصيغة احتمال الحادث، وذلك بطرح السؤال الآتي عليهم:

ألقي حجر نرد منتظم مرة واحدة. أجد احتمال كل ممّا يأتي:

- 1 ظهور الرقم 6 $\frac{1}{6}$
- 2 ظهور عدد أولي. $\frac{1}{2}$
- 3 ظهور عدد أكبر من 4 $\frac{1}{3}$
- 4 ظهور عدد أكبر من 6 0
- 5 ظهور عدد أصغر من 6 أو يساوي 6 1

إرشاد: أكتب بعض إجابات الطلبة على اللوح، ثم أناقشها مع بقية الطلبة، وأطلب إليهم تصويبها إن لم تكن صحيحة.

- أوجّه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم)، ثم أسألهم:
 ما عدد عناصر الفضاء العيني لتجربة إلقاء حجر النرد؟ $6^2 = 36$
 ما المُتغيّر العشوائي في هذه المسألة؟ **مجموع العددين الظاهرين على الوجهين العلويين لحجري النرد.**
 ما القيم التي يأخذها هذا المُتغيّر العشوائي؟ $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
 ما الحادث الذي ترتبط عناصره بالمجموع 2؟ ما احتمالته؟ $\frac{1}{36}; \{(1,1)\}$
 ما الحادث الذي ترتبط عناصره بالمجموع 5؟ ما احتمالته؟
 $\frac{1}{9}; \{(1,4), (4,1), (2,3), (3,2)\}$
 أعزّز الإجابات الصحيحة.

مثال 1

- أذكّر الطلبة بكتابة القيم التي يأخذها المُتغيّر العشوائي، وكيفية إيجاد الحادث الذي ترتبط عناصره بإحدى قيم المُتغيّر العشوائي.
 - أوضح للطلبة أنّ التوزيع الاحتمالي للمُتغيّر العشوائي هو اقتران يربط كل قيمة من قيم المُتغيّر العشوائي باحتمال وقوعها (أي أنّه يُحدّد احتمال كل قيمة من قيم المُتغيّر العشوائي)، وأنّ مجاله هو مجموعة قيم المُتغيّر العشوائي، ومداه هو مجموعة احتمالات هذه القيم.
 - أكتب على اللوح المثال الآتي:
- في تجربة سحب كرة واحدة عشوائياً من وعاء فيه 4 كرات مُرقّمة بالرقم 3، و6 كرات مُرقّمة بالرقم 5، إذا دلّ المُتغيّر العشوائي X على الرقم الظاهر على الكرة، فإنّ قيم المُتغيّر العشوائي X هي: $\{3, 5\}$ ، وإنّ احتمال $X = 3$ هو:

$$P(X = 3) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

ويكون احتمال $X = 5$ هو:

$$P(X = 5) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

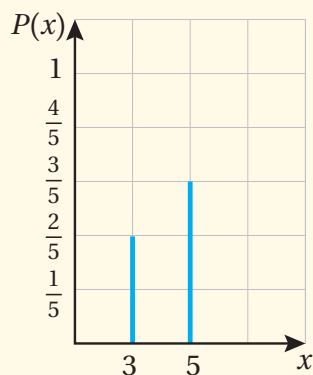
وتكون قيم اقتران التوزيع الاحتمالي للمُتغيّر العشوائي X هي:

$$P(X = 3) = \frac{2}{5}, \quad P(X = 5) = \frac{3}{5}$$

يُمكن التعبير عن اقتران التوزيع الاحتمالي بالجدول الآتي:

x	3	5
$P(X = x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$

وكذلك يُمكن تمثيله بيانياً بالأعمدة، برسم عمود من كل قيمة على المحور x ، ارتفاعه يساوي قيمة الاحتمال كما في الرسم الآتي:



- أسأل الطلبة عن ملاحظاتهم على قيم $P(x)$ ؛ لاستنتاج أن مجموع قيم $P(x)$ يساوي 1 دائماً.
- أناقش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح، الذي يُبين خطوات إيجاد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي، وأشاركهم تنفيذ الخطوات وتبريرها.

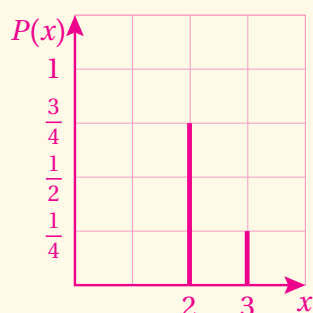
إرشادات:

- أوجه الطلبة إلى ضرورة التحقق من أن مجموع الاحتمالات يساوي 1.
- ألفت انتباه الطلبة إلى ملاحظة أن جميع احتمالات التوزيع الاحتمالي في المثال 1 متساوية؛ ما يعني أنه توزيع منتظم.

مثال إضافي:

أُلقيت 3 قطع نقد متمايزة معاً مرة واحدة. إذا دلّ المتغير العشوائي X على عدد القطع التي يظهر عليها الوجه نفسه، فأجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X في صورة جدول وتمثيل بياني.

x	2	3
$P(X = x)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$



ألاحظ أن مجموع قيم اقتران التوزيع الاحتمالي (الجدول، أو التمثيل البياني) هو 1، حيث:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$$

اقتران التوزيع الاحتمالي

مفهوم أساسي

بالكلمات: إذا كان X متغيراً عشوائياً، فإن مجموع قيم اقتران التوزيع الاحتمالي $P(X)$ هو 1

بالرموز: إذا كان X متغيراً عشوائياً، فإن:

$$\sum P(X) = 1$$

مثال 1

في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة، إذا دلّ المتغير العشوائي X على العدد الظاهر، فأجد كلاً مما يأتي:

1 التوزيع الاحتمالي في صورة جدول.

الخطوة 1: أجد قيم المتغير العشوائي.

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

الخطوة 2: أجد احتمال كل قيمة من قيم المتغير العشوائي.

$$P(1) = \frac{1}{6}, P(2) = \frac{1}{6}, P(3) = \frac{1}{6}$$

$$P(4) = \frac{1}{6}, P(5) = \frac{1}{6}, P(6) = \frac{1}{6}$$

الخطوة 3: أنشئ جدولاً من صفين أنظم فيه قيم المتغير العشوائي، والاحتمال المقابل لكل منها.

x	1	2	3	4	5	6
$P(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

ألاحظ أن مجموع الاحتمالات هو 1:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

أتعلم

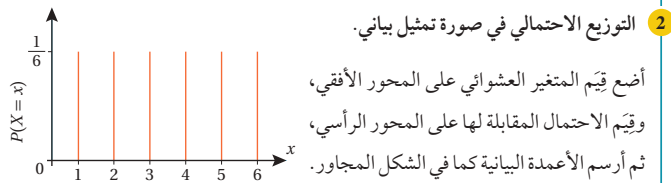
يُطلق على التوزيع الاحتمالي الذي تكون فيه جميع الاحتمالات متساوية اسم التوزيع المنتظم.

التقويم التكويني:

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (أتحقق من فهمي) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم من أخطأ في الإجابة؛ تجنباً لإحراجه.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكل من اللغة العربية، واللغة الإنجليزية، مُحفِّزاً الطلبة على استعمالها، مثل التوزيع الاحتمالي (probability distribution).



أسهم العالم الفرنسي بلز باسكال في اكتشاف المبادئ والنظريات المتعلقة بالتبادل والتوافق في القرن السابع عشر الميلادي؛ ما أدى إلى تطوّر حساب الاحتمالات بصورة كبيرة.

أنتحقق من فهمي

في تجربة سحب بطاقة عشوائياً من مجموعة بطاقات مرقمة بالأرقام: 2, 4, 5, 6, 8، إذا دلّ المتغير العشوائي X على الرقم الظاهر على البطاقة المسحوبة، فأجد كلاً ممّا يأتي:

(a) التوزيع الاحتمالي في صورة جدول. أنظر ملحق الإجابات.

(b) التوزيع الاحتمالي في صورة تمثيل بياني. أنظر ملحق الإجابات.

إنّ معرفة مجموع احتمالات قيم المتغير العشوائي في تجربة عشوائية تساعد على إيجاد احتمالات مجهولة، واحتمالات ضمن شروط مُحدّدة على قيم المتغير العشوائي.

مثال 2

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	0.1	a	0.3	a	0.1

1 أجد قيمة a .

$$\begin{aligned} 0.1 + a + 0.3 + a + 0.1 &= 1 & \text{لأن } \sum P(x) &= 1 \\ 2a + 0.5 &= 1 & \text{بتجميع الحدود المتشابهة} \\ 2a &= 0.5 & \text{بطرح 0.5 من طرفي المعادلة} \\ a &= 0.25 & \text{بقسمة طرفي المعادلة على 2} \end{aligned}$$

- أوضح للطلبة أنّ مجموع احتمالات التوزيع الاحتمالي يساوي 1؛ لذا يُمكن إيجاد أيّ احتمالات مجهولة في جدول التوزيع الاحتمالي، وإيجاد احتمالات قيم مُحدّدة للمتغير العشوائي تُحقّق شروطاً مُعيّنة، كأن تكون واقعة بين قيمتين معلومتين، أو تزيد على قيمة مُعيّنة، أو تقلّ عنها.

- أناقش الطلبة في حل الفرع 1 من المثال 2 على اللوح.
- أناقش الطلبة في حل الفرع 2 من المثال 2 بطرح السؤالين الآتين عليهم:

◀ لماذا جُمع $P(X=1)$ مع $P(X=2)$ في الفرع 2؟ لأنّ هاتين القيمتين هما الوحيدتان اللتان تُحقّقان المتباينة: $1 \leq X < 3$ ، ولأنّ الحادث $X=1$ والحادث $X=2$ متنافيان (منفصلان).

◀ كيف أجد قيمة $P(X \geq 1)$ ؟ بجمع $P(X=1)$ مع $P(X=2)$ ومع $P(X=3)$ ومع $P(X=4)$ ، أو بإيجاد احتمال الحادث المُتمم: $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0)$.

- أستمع لإجابة أحد الطلبة عن السؤال السابق، ثم أسأل زملاءه:

◀ أيّكم يُوافقه الرأي؟

◀ مَنْ لديه إجابة أخرى؟ اذكرها.

مثال إضافي:

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	-1	0	1	4
$P(X=x)$	0.25	a	0.31	$3a$

1 أجد قيمة a . 0.11

2 أجد $P(X \geq 1)$. 0.64

3 أجد $P(X < 4)$. 0.67

4 أجد $P(-1 < X \leq 1)$. 0.42

✓ **إرشاد:** يهدف السؤال المُتعلّق بمعرفة رأي الطلبة في إجابة زميلهم وتقديم إجابات أخرى إلى تعزيز مهارات التواصل لدى الطلبة، والتعبير الحر عن الرأي، واحترام الرأي الآخر.

مثال 3

- أعرض طريقة أخرى لتمثيل التوزيع الاحتمالي في صورة أزواج مرتبة، مساقطها الأولى (الإحداثي x) قيم المتغير العشوائي، ومساقطها الثانية (الإحداثي y) الاحتمالات المناظرة لقيم المتغير العشوائي، مبيّنًا كيف يمكن الانتقال من الجدول إلى الأزواج المرتبة، وإلى التمثيل البياني، والعكس بالعكس.
- أناقش الطلبة في حل المثال 3 على اللوح، مؤكّدًا ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل، والتعبير عن هذا التوزيع الاحتمالي في صورة تمثيل بياني.

مثال إضافي:

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X معرفًا على النحو الآتي:

$$\{(1, 0.15), (2, 0.24), (3, k), (4, 2k), (5, 0.1)\}$$

- 1 أجد قيمة k .
- 2 أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .
- 3 أجد $P(X \geq 2)$.
- 4 أمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X بيانيًا.

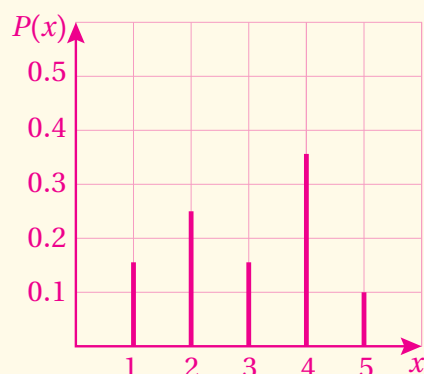
$$1) k = 0.17$$

2)

x	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0.15	0.24	0.17	0.34	0.1

$$3) P(X \geq 2) = 0.85$$

4)



$$2 \text{ أجد } P(1 \leq x < 3)$$

$$P(1 \leq x < 3) = P(x = 1) + P(x = 2)$$

$$= 0.25 + 0.3$$

$$= 0.55$$

بتحديد قيم المتغير العشوائي

ضمن الشرط المحدد

بتعويض قيم الاحتمالات

بالجمع

أتحقق من فهمي

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	1	2	3	4
$P(x)$	0.2	b	0.2	$2b$

$$1 \text{ أجد قيمة } b. b = 0.2$$

$$2 \text{ أجد } P(2 \leq x \leq 4) = 0.8. P(2 \leq X \leq 4) = 0.8$$

يمكن أيضًا تمثيل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X في صورة مجموعة من الأزواج المرتبة التي إحداثيات x لها مجموعة قيم المتغير العشوائي، وإحداثيات y لها مجموعة احتمالات الحوادث المرتبطة بقيم المتغير العشوائي.

مثال 3

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X معرفًا على النحو الآتي:

$$\{(1, 2k), (2, k), (3, k), (4, k)\}$$

$$1 \text{ أجد قيمة } k.$$

$$2k + k + k + k = 1$$

$$5k = 1$$

$$k = 0.2$$

$$\sum P(x) = 1$$

لأن

بتجميع الحدود المتشابهة

بقسمة طرفي المعادلة على 5

2 أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي.

x	1	2	3	4
$P(x)$	0.4	0.2	0.2	0.2

3 أجد $P(x \leq 3)$.

$$\begin{aligned} P(x \leq 3) &= 1 - P(x=4) \\ &= 1 - 0.2 \\ &= 0.8 \end{aligned}$$

أتعلم

$$\begin{aligned} P(x \leq 3) &= P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) \\ &= 0.4 + 0.2 + 0.2 \\ &= 0.8 \end{aligned}$$

أنتحقق من فهمي

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X مُعرَّفًا على النحو الآتي:

$$\{(1, 2k), (2, 2k), (3, 3k), (4, 3k)\}$$

1 أجد قيمة k . $k = 0.1$

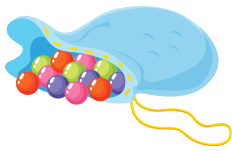
x	1	2	3	4
$P(X=x)$	0.2	0.2	0.3	0.3

2 أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي.

3 أجد $P(x \geq 3)$. $P(x \geq 3) = 0.6$

يُمكن حساب احتمالات قيم المتغير العشوائي باستعمال مبدأ العدّ، والتباديل، والتوافيق.

مثال 4



في تجربة سحب 3 كرات عشوائياً معاً من كيس فيه 3 كرات حمراء، و4 كرات خضراء، جميعها مُتماثلة، إذا دلّ المتغير العشوائي X على عدد الكرات الحمراء في السحبة، فأُنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

الخطوة 1: أجد قيم المتغير العشوائي.

$$X = \{0, 1, 2, 3\}$$

- أوضّح للطلبة أنّ بعض التجارب العشوائية تتطلّب استعمال التباديل والتوافيق لإيجاد احتمالات قيم المتغير العشوائي، ثم إنشاء جدول توزيعه الاحتمالي.
- أناقش الطلبة في حل المثال 4 على اللوح، مؤكّداً ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل.

مثال إضافي:

اختارت زينب رقمين معاً عشوائياً من بين أرقام العدد 113333555. إذا دلّ المتغير العشوائي X على عدد الخمسات التي اختارتها زينب، فأُنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير X .

x	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$

إرشاد:

- أوضّح للطلبة أنّه يُمكن إيجاد الاحتمالات أحياناً باستعمال التوافيق، وقانون احتمال وقوع حادثين أو أكثر معاً، بضرب احتمالات هذه الحوادث بعضها في بعض. فمثلاً، يُمكن إيجاد احتمال سحب 3 كرات حمراء دفعة واحدة (أو على التوالي من دون إرجاع) من وعاء فيه 4 كرات حمراء، و6 كرات بيضاء بالطريقتين الآتيتين:

◀ قسمة عدد طرائق سحب 3 كرات حمراء من بين 4 كرات حمراء على عدد طرائق سحب 3 كرات من بين 10 كرات موجودة في الوعاء؛ أيّ إن: $P(3 \text{ Red}) = \frac{{}_4C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{4}{120}$

◀ ضرب احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء في احتمال أن تكون الكرة الثانية حمراء في احتمال أن تكون الكرة الثالثة حمراء؛ أيّ إن: $P(3 \text{ Red}) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{4}{120}$

أَتَدْرِبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ



• أَوَجِّهُ الطَّلِبَةَ إِلَى بِنْد (أَتَدْرِبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ)، ثُمَّ أَطْلُبُ إِلَيْهِمْ حُلَّ الْمَسَائِلِ (7-1) مِنْ مَجْمُوعَاتٍ ثَنَائِيَّةٍ دَاخِلِ الْغُرْفَةِ الصَّفِيَّةِ؛ فَهَذِهِ الْمَسَائِلُ تُحَدِّدُ تَرْتِيبَ ارْتِبَاطٍ مُبَاشِرًا بِأَمَثَلَةِ الدَّرْسِ، وَهِيَ تُسْتَعْمَلُ خَاصَّةً لِتَدْرِيبِ الطَّلِبَةِ عَلَى الْمَفَاهِيمِ نَفْسِهَا، بِصَرْفِ النَّظَرِ عَمَّا إِذَا كَانَتِ الْأَسْئَلَةُ فَرْدِيَّةً أَمْ زَوْجِيَّةً.

• إِذَا وَاجَهَ الطَّلِبَةَ صُعُوبَةً فِي حُلِّ آيَةِ مَسْأَلَةٍ، فَإِنِّي أَخْتَارُ أَحَدَ الطَّلِبَةِ مِمَّنْ تَمَكَّنَ / تَمَكَّنَتْ مِنْ حُلِّ الْمَسْأَلَةِ؛ لِمُنَاقَشَةِ اسْتِرَاطِيَجِيَّتِهِ / اسْتِرَاطِيَجِيَّتِهَا فِي حُلِّ الْمَسْأَلَةِ عَلَى اللَّوْحِ، مُحَفِّزًا الطَّلِبَةَ عَلَى طَرَحِ أَيِّ تَسْأُولٍ عَنْ خُطُواتِ الْحُلِّ الْمُقَدَّمَةِ مِنَ الزَّمِيلِ / الزَّمِيلَةِ.

تنويع التعليم:

إِذَا وَاجَهَ الطَّلِبَةَ ذَوُو الْمَسْتَوَى دُونَ الْمَتَوَسِّطِ صُعُوبَةً فِي حُلِّ أَسْئَلَةٍ بِنْد (أَتَدْرِبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ)، فَإِنِّي أَضَعُ كَلًّا مِنْهُمْ مَعَ طَالِبٍ آخَرَ / طَالِبَةٍ أُخْرَى مِنْ ذَوِي الْمَسْتَوَى الْمَتَوَسِّطِ أَوْ مَعَ أَحَدِ الطَّلِبَةِ الْمُتَمَيِّزِينَ؛ لِيَتَشَارَكَ فِي حُلِّ الْأَسْئَلَةِ.

مهارات التفكير العليا



• أَوَجِّهُ الطَّلِبَةَ إِلَى بِنْد (مَهَارَاتِ التَّفَكِيرِ الْعَلِيَا)، ثُمَّ أَطْلُبُ إِلَيْهِمْ حُلَّ الْمَسَائِلِ (13-11).

الواجب المنزلي:



أُسْتَعِينُ بِالْجَدُولِ الْآتِي لِتَحْدِيدِ الْوَاجِبِ الْمَنْزَلِيِّ لِلطَّلِبَةِ بِحَسَبِ مَسْتَوِيَاتِهِمْ:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: (8 - 10) كتاب التمارين: (1 - 6)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (9 - 11) كتاب التمارين: 5, 7, 9, 11
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (10 - 13) كتاب التمارين: (9 - 12)

الخطوة 2: أجد احتمالات قيم المتغير العشوائي.

$$P(x=0) = \frac{{}^3C_0 \times {}^4C_3}{{}^7C_3} = \frac{4}{35}$$

0 كرة حمراء، و3 كرات خضراء

$$P(x=1) = \frac{{}^3C_1 \times {}^4C_2}{{}^7C_3} = \frac{18}{35}$$

كرة حمراء واحدة، وكرتان خضراوان

$$P(x=2) = \frac{{}^3C_2 \times {}^4C_1}{{}^7C_3} = \frac{12}{35}$$

كرتان حمراوان، وكرة خضراء واحدة

$$P(x=3) = \frac{{}^3C_3 \times {}^4C_0}{{}^7C_3} = \frac{1}{35}$$

3 كرات حمراء، و0 كرة خضراء

الخطوة 3: أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي.

x	0	1	2	3
P(x)	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي

أَحْلُ الْمَثَالَ 4 إِذَا كَانَ السَّحْبُ عَلَى التَّوَالِي بِدُونِ ارْجَاعٍ. أَنْظِرْ مِلْحَقَ الْإِجَابَاتِ.

أَتَدْرِبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ



فِي تَجَرِبَةِ الْإِقَاءِ 3 قَطْعِ نَقْدٍ مَتَمَايِزَةٍ عَشَوَائِيَّةً، دَلَّ الْمَتَغِيرُ الْعَشَوَائِيُّ X عَلَى عِدَدِ مَرَّاتِ ظُهُورِ الصُّورَةِ:

- 1 أجد التوزيع الاحتمالي في صورة جدول. 2 أجد التوزيع الاحتمالي في صورة تمثيل بياني. أنظر ملحق الإجابات. أنظر ملحق الإجابات.

فِي تَجَرِبَةٍ عَشَوَائِيَّةٍ، كَانَ التَّوْزِيعُ الْإِحْتِمَالِيُّ لِلْمَتَغِيرِ الْعَشَوَائِيِّ X كَمَا فِي الْجَدُولِ الْآتِي:

x	0	1	2	3
P(x)	0.1	a	0.2	a

- 3 أجد قيمة a. a = 0.35 4 أجد $P(1 < x \leq 3)$. 0.55

فِي تَجَرِبَةٍ عَشَوَائِيَّةٍ، كَانَ التَّوْزِيعُ الْإِحْتِمَالِيُّ لِلْمَتَغِيرِ الْعَشَوَائِيِّ X مُعَرَّفًا عَلَى النَّحْوِ الْآتِي:

$$\{(0, 2k), (1, 0.5k), (2, 2k), (3, 0.5k)\}$$

- 5 أجد قيمة k. k = 0.2 6 أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي. أنظر ملحق الإجابات. 7 أجد $P(x \geq 2)$. 0.5

المفاهيم العابرة للمواد:

أَوَكَّدَ الْمَفَاهِيمَ الْعَابِرَةَ لِلْمَوَادِّ حَيْثَمَا وَرَدَتْ فِي كِتَابِ الطَّالِبِ أَوْ كِتَابِ التَّمَارِينِ. فَفِي السُّؤَالِ 10، أُعَزِّزُ لَدَى الطَّلِبَةِ الْوَعْيَ بِالْقَضَايَا الْأَخْلَاقِيَّةِ، بِتَقْدِيرِ الْوَقْتِ، وَاحْتِرَامِ الْمَوَاعِيدِ، وَعَدَمِ إِخْلَافِهَا، وَاحْتِرَامِ أَوْقَاتِ الْآخَرِينَ، وَتَقْدِيرِ الْخِدْمَةِ الَّتِي تُقَدَّمُ لَهُمْ، وَبَذْلِ الْجَهْدِ لِلْقِيَامِ بِالْوَجِبِ الْمَطْلُوبِ. ثُمَّ أَسْأَلُهُمْ:

- ما رأيكم في تأخر بعض الطلبة المُتَوَقَّعِ تَخَرُّجَهُمْ عَنْ مَوْعِدِ لِقَائِهِمْ بِالْمُحَاضِرِ؟
- ما الذي ينبغي لنا فعله لقاء خدمة تطوعية تُقدَّمُ لنا؟

أخطاء شائعة: قد يُخْطِئُ بَعْضُ الطَّلِبَةِ فِي إِيجَادِ احْتِمَالِ قِيَمِ الْمُتَغَيِّرِ الْعَشَوَائِيِّ؛ بِأَنْ يَغْفُلُوا عَنْ بَعْضِ الْعُنَاوِرِ الْمُرتَبِطَةِ بِتِلْكَ الْقِيَمِ؛ لِذَا أُحَفِّزُ الطَّلِبَةَ عَلَى كِتَابَةِ جَمِيعِ الْعُنَاوِرِ الْمُرتَبِطَةِ بِكُلِّ قِيَمَةٍ مِنْ قِيَمِ الْمُتَغَيِّرِ الْعَشَوَائِيِّ لِلتَّأَكُّدِ مِنْ إِيجَادِ الْإِحْتِمَالِ الصَّحِيحِ، وَأُذَكِّرُهُمْ بِأَنْ مَجْمُوعَ احْتِمَالَاتِ جَمِيعِ قِيَمِ الْمُتَغَيِّرِ الْعَشَوَائِيِّ يَسَاوِي دَائِمًا 1.

8 في تجربة سحب كرتين عشوائياً على التوالي من دون إرجاع من صندوق يحوي 3 كرات حمراء، و3 كرات خضراء، جميعها مُتماثلة، إذا دَلَّ المتغير العشوائي X على عدد الكرات الحمراء في السحبة، فأنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X . **أنظر ملحق الإجابات.**

9 أحلّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم). **المجموع 7 هو الأكبر احتمالاً، واحتماله يساوي $\frac{6}{36}$**



10 **مواعيد:** تُنظَّم محاضرة جامعية مواعيد لأربعة من طلبتها المُتَوَقَّع تخرُّجهم، في الساعة المُخصَّصة لعملها المكتبي كل يوم خميس. وبحسب خبرتها، فإنَّ عدد مَنْ يتأخرون عن موعد الساعة المكتبية من هؤلاء الطلبة يُمكن تمثيله بمتغير عشوائي X ، وإنَّ التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي هو كما في الجدول الآتي:

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	0.4	0.25	$4k$	$2k$	k

أجد احتمال تأخر اثنين من هؤلاء الطلبة - على الأقل - عن موعد الساعة المكتبية يوم الخميس.
 $P(X \geq 2) = 7k = 0.35$

مهارات التفكير العليا

11 **تحذّر:** أجد قيمة k إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X مُعرِّفاً على النحو الآتي:
 $0.1 \times 1 + 0.1 \times 2 + 0.1 \times 3 + k = 1$
 $\Rightarrow k = 0.4$
 $\{(1, 0.1x), (2, 0.1x), (3, 0.1x), (4, k)\}$

12 **تحذّر:** أجد المنوال للتوزيع الاحتمالي إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	0.1	a	0.3	a	0.1

$a = 0.25$
 ← المنوال هو 2 (القيمة المُقابلَة لأعلى احتمال)

13 **أكتب:** أيُّ طرائق التعبير عن التوزيع الاحتمالي أفضل؟ أبرّر إجابتي.
 ستختلف إجابات الطلبة. أقبل أيَّ إجابة مع تبرير مناسب لها.

• أطلب إلى الطلبة حل الأسئلة الآتية بوصفها إثراءً لهم:

1 أُلقيت 3 أحجار نرد متمايزة معاً مرّة واحدة. إذا دَلَّ المتغير العشوائي X على عدد الأحجار التي يظهر على وجهها العلوي نفس عدد النقاط، فأنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

x	0	2	3
$P(X = x)$	$\frac{120}{216}$	$\frac{90}{216}$	$\frac{6}{216}$

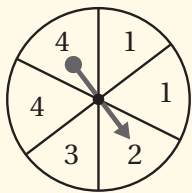
2 يحتوي صندوق على 100 آلة حاسبة، منها 5 آلات غير صالحة. إذا سحب عامل ضبط الجودة آلتين عشوائياً من الصندوق من دون إرجاع، ودَلَّ المتغير العشوائي Y على عدد الآلات غير الصالحة المسحوبة، فأنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي Y .

y	0	1	2
$P(Y = y)$	$\frac{8930}{9900}$	$\frac{950}{9900}$	$\frac{20}{9900}$

3 سحبت ريم 3 بطاقات معاً عشوائياً من وعاء فيه 4 بطاقات كُتِبَ الرقم 3 على كل واحدة منها، و6 بطاقات كُتِبَ الرقم 4 على كل واحدة منها. إذا دَلَّ المتغير العشوائي X على مجموع الأرقام المكتوبة على البطاقات الثلاث التي سحبتها ريم، فأنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

x	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{4}{120}$	$\frac{36}{120}$	$\frac{60}{120}$	$\frac{20}{120}$

• أتحقّق من فهم الطلبة موضوع الدرس، بطرح السؤال الآتي عليهم:



دور مؤشر القرص المجاور مرّتين متتاليتين، واستقرّ على أحد الأرقام في كلّ منهما، ودَلَّ المتغير العشوائي X على مجموع الرقمين اللذين استقرّ عليهما المؤشّر. أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

x	2	3	4	5	6	7	8
$P(X = x)$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$

توقع المتغير العشوائي

Expectation of a Random Variable

إيجاد التوقع والتباين لمتغير عشوائي في تجربة عشوائية.

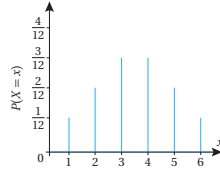
فكرة الدرس

توقع المتغير العشوائي، تباين المتغير العشوائي.

المصطلحات

مثّلت تغريد التوزيع الاحتمالي لتجربة عشوائية كما في الشكل المجاور، ثم أردت إيجاد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذا التوزيع، كيف يُمكنها ذلك؟

مسألة اليوم



تعلمت سابقاً إيجاد الوسط الحسابي ($\bar{x}$) لبيانات مُمثّلة في جداول تكرارية؛ بقسمة مجموع حاصل ضرب القيم في تكراراتها ($\sum x \cdot f$) على مجموع التكرارات ($\sum f$) باستعمال الصيغة الآتية:

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot f}{\sum f}$$

وبالمثل، يُمكن إيجاد الوسط الحسابي لتوزيع احتمالي؛ لأنّ احتمالات قيم المتغير العشوائي X تُمثّل تكرارات لتلك القيم (تكرارات نسبية؛ نظراً إلى قسمة كل تكرار على مجموع التكرارات). ولأنّ مجموع احتمالات قيم المتغير العشوائي (التكرارات) هو 1، فإن الوسط الحسابي هو $\sum x \cdot P(x)$ ، في ما يُعرف باسم **التوقع** (expectation) للمتغير العشوائي X ، ويُرمز إليه بالرمز $E(X)$.

لغة الرياضيات
يُطلق على التوقع للمتغير العشوائي في التوزيع الاحتمالي اسم الوسط الموزون.

التوقع

مفهوم أساسي

بالكلمات: التوقع للمتغير العشوائي X في توزيع احتمالي لتجربة عشوائية يساوي مجموع حواصل ضرب كل قيمة للمتغير X في احتمال تلك القيمة.

بالرموز:

$$E(x) = \sum x \cdot P(x)$$

نتائج الدرس

- تعرّف توقع المتغير العشوائي.
- تعرّف تباين المتغير العشوائي.
- إيجاد كل من التوقع، والتباين للمتغير العشوائي المنفصل.

نتائج التعلم القبلي:

- إيجاد الوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري لبيانات مفردة، أو بيانات منظمة في جدول تكراري، أو جدول ذي فئات.
- إنشاء جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي.

مراجعة التعلم القبلي:

- أوّجه الطلبة في بداية كل حصة إلى الفقرة (الفقرات) المرتبطة بما سيقدّم من موضوعات الدرس في الحصة (إن وُجدت) في صفحات (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين، ثم أطلب إليهم حل تدريباتها داخل الغرفة الصفية بصورة فردية.
- اتّجول بين الطلبة؛ لمتابعتهم أثناء الحل، وتحديد نقاط ضعفهم، وأوجههم إلى مراجعة المثال عندما يواجهون صعوبة في الحل.

التهيئة

1

- أراجع الطلبة في مفهوم الوسط الحسابي، ومفهوم التباين، وطريقة إيجاد كل منهما، بطرح السؤالين الآتيين عليهم:
- إذا كانت أعمار 6 طلبة إلى أقرب سنة هي: 14، 16، 13، 15، 17، 18، فما الوسط الحسابي لها؟ 15.5

- ألقي حجر نرد 20 مرّة، وسُجّلت النتائج في الجدول الآتي:

الرقم الظاهر على الوجه العلوي (x)	1	2	3	4	5	6
عدد المرات (f)	2	2	5	3	5	3

أجد الوسط الحسابي والتباين للأرقام الظاهرة على الوجه العلوي لحجر النرد.

$$\mu = \frac{\sum x \cdot f}{\sum f} = 3.8 \text{ الوسط الحسابي}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2 \cdot f - (\sum f) \mu^2}{\sum f} = 2.36 \text{ التباين}$$

- أوجه الطلبة إلى قراءة المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم)، ثم أسألهم:

ما مجموعة قيم المتغير العشوائي X ؟ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ما قيمة $P(X=3)$ ؟ $\frac{1}{4}$

ما الجدول الذي يمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ؟

x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

كيف يمكن لتغريد إيجاد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذا التوزيع؟

- أخبر الطلبة أنهم سيتعرفون إجابة السؤال السابق في هذا الدرس.

- أعزز الإجابات الصحيحة.

التدريس

3

مثال 1: من الحياة

- أناقش الطلبة في طريقة إيجاد الوسط الحسابي لبيانات منظمة في جدول تكراري، مُبيناً أنه عند تحويل التكرارات إلى تكرارات نسبية بقسمة كل تكرار على مجموع التكرارات، فإن الجدول التكراري يتحول إلى جدول توزيع احتمالي، وأنه يمكن إيجاد الوسط الحسابي للجدول الجديد بالطريقة السابقة نفسها (أي ضرب كل قيمة في التكرار النسبي المقابل، وجمع نواتج الضرب، وقسمة المجموع على مجموع التكرارات النسبية)، ويُسمى الوسط الحسابي الناتج توقع المتغير العشوائي. وبما أن مجموع التكرارات النسبية يساوي 1، فإن توقع المتغير العشوائي يساوي مجموع نواتج ضرب قيم المتغير العشوائي بالتكرار النسبي (الاحتمال).
- أناقش الطلبة في القاعدة التي ورد ذكرها في صندوق (مفهوم أساسي)، وبينت كيفية إيجاد التوقع بالكلمات والرموز.
- أناقش الطلبة في حل المثال 1 على اللوح، الذي يُبين طريقة تحويل جدول تكراري إلى جدول توزيع احتمالي، وإيجاد التوقع، وأشار لهم الحل وتبرير الخطوات.

مثال إضافي:

يُبين الجدول الآتي أعمار 200 طالب وطالبة سجلوا في مساق دراسي في إحدى الجامعات الأردنية:

العمر (x)	18	19	20	21	37
عدد الطلبة (f)	70	60	28	40	2

بافتراض أن المتغير العشوائي X يمثل العمر، أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ، ثم أجد $E(X)$.

x	18	19	20	21	37
$P(x)$	0.35	0.3	0.14	0.2	0.01

$$E(X) = 18(0.35) + 19(0.3) + 20(0.14) + 21(0.2) + 37(0.01) = 19.37$$

التقويم التكويني: ✓

أطلب إلى الطلبة حل التدريب الوارد في بند (أتحقق من فهمي) بعد كل مثال، ثم أختار بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية لمناقشتها على اللوح، ولا أذكر اسم من أخطأ في الإجابة؛ تجنباً لإحراجه.

تعزيز اللغة ودعمها:

أكرر المصطلحات الرياضية الوارد ذكرها في الدرس بكل من اللغة العربية، واللغة الإنجليزية، مُحفِّزاً الطلبة على استعمالها.

مثال 1: من الحياة

في مسح عشوائي شمل 100 سيدة من ربّات البيوت لمعرفة عدد اللواتي لديهن أجهزة حاسوب، كانت نتيجة المسح كما في الجدول الآتي:

عدد الأجهزة (x)	0	1	2	3
عدد ربّات البيوت (التكرار f)	17	42	31	10

بافتراض أن المتغير العشوائي X يُمثّل عدد أجهزة الحاسوب:

1 أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

أقيم كل تكرار على مجموع التكرارات، ثم أنشئ جدولاً للتوزيع الاحتمالي:

x	0	1	2	3
P(x)	0.17	0.42	0.31	0.1

2 أجد التوقع للمتغير العشوائي X .

$$E(x) = \sum x.P(x) \quad \text{صيغة التوقع للمتغير العشوائي } X$$

$$= 0 \times 0.17 + 1 \times 0.42 + 2 \times 0.31 + 3 \times 0.1 \quad \text{مجاميع حاصل الضرب}$$

$$= 1.34 \quad \text{بالتبسيط}$$

أتحقق من فهمي

يُبيّن الجدول الآتي نتائج مسح شمل 200 أسرة لمعرفة عدد حيواناتهم الأليفة:

عدد الحيوانات (x)	0	1	2	3
عدد الأسر (f)	44	96	52	8

بافتراض أن المتغير العشوائي X يُمثّل عدد الحيوانات الأليفة، أجد $E(x)$.

$$E(X) = 0(0.22) + 1(0.48) + 2(0.26) + 3(0.04) = 1.12$$

أتذكر

ينتج الاحتمال النسبي من قسمة كل تكرار على المجموع الكلي للتكرارات.

إذا عُلمت قيمة التوقع $E(x)$ للمتغير العشوائي X ، فإنه يُمكن تحديد قيم احتمالات مجهولة في التوزيع الاحتمالي؛ بتكوين نظام من المعادلات الخطية، ثم حلّه بطريقة الحذف والتعويض.

مثال 2

إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	1	2	3	4	5
$P(x)$	a	0.3	b	0.2	0.15

وكان $E(x)=3$ ، فأجد قيمة كل من: $P(x=3)$ و $P(x=1)$.

$$E(x) = \sum x.P(x) \quad \text{صيغة التوقع للمتغير العشوائي } X$$

$$1 \times a + 2 \times 0.3 + 3 \times b + 4 \times 0.2 + 5 \times 0.15 = 3 \quad \text{لأن التوقع هو 3}$$

$$a + 3b = 0.85 \quad \text{① بالتبسيط}$$

$$a + 0.3 + b + 0.2 + 0.15 = 1 \quad \text{مجموع الاحتمالات هو 1}$$

$$a + b = 0.35 \quad \text{② بالتبسيط}$$

$$2b = 0.50 \quad \text{بطرح المعادلة ② من المعادلة ①}$$

$$b = 0.25 \quad \text{بالقسمة على 2}$$

$$a + 0.25 = 0.35 \quad \text{بالتعويض في المعادلة ②}$$

$$a = 0.10 \quad \text{بطرح 0.25 من طرفي المعادلة}$$

أي إن:

$$P(x=1) = 0.10, P(x=3) = 0.25$$

- أَوْضَحْ للطلبة أَنَّهُ يُمكن إيجاد قيم مجهولة في التوزيع الاحتمالي، إذا عُلِمَ تَوَقُّعُ المُتَغَيِّرِ العشوائي، بتكوين نظام معادلات وحله.

- أُنَاقِشْ الطلبة في حل المثال 2 على اللوح، مُؤكِّدًا ضرورة تبرير كل خطوة من خطوات الحل.

مثال إضافي:

إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	1	2	4	a
$P(X=x)$	0.35	b	0.1	0.25

وكان $E(X) = 3.6$ ، فأجد قيمة كل من a ، و b .

$$a = 9, b = 0.3$$

- أناقش الطلبة في مفهوم التباين، وكيف يُمكن إيجاد بيانات منظمة في جدول تكراري، ثم أناقشهم في الحالة الخاصة لتوزيع احتمالي بوصفه جدول تكراري نسبي. فاستنادًا إلى صيغة التباين لجدول تكراري: $\sigma^2 = \frac{\sum x^2 \cdot f - (\sum f)(\mu)^2}{\sum f}$ ، وافترض أن f هو التكرار النسبي، وأنه الاحتمال، وتعويض كل من $\sum f = 1$ ، و $\mu = E(X)$ ؛ فإن صيغة التباين لأي توزيع احتمالي تصبح:

$$\sigma^2 = \sum x^2 \cdot P(x) - (E(X))^2$$

- أناقش الطلبة في حل المثال 3 على اللوح، الذي يُبين طريقة إيجاد التباين لمُتغير عشوائي، بإيجاد التوقع، ثم ضرب مربع كل قيمة في احتمالها، وإيجاد مجموع نواتج الضرب، ثم التعويض في صيغة التباين.

أخطاء شائعة:

قد يُخطئ بعض الطلبة عند إيجاد التباين لمُتغير عشوائي بعدم طرح مربع التوقع (الوسط الحسابي) من مجموع نواتج ضرب مربعات قيم X في احتمالاتها، فيعتقدون أن التباين $\sigma^2 = E(X^2)$ ؛ لذا أذكّرهم بالصيغة الصحيحة لإيجاد التباين: $\sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2$.

مثال إضافي:

يُبين الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمُتغير العشوائي Y :

y	1	2	3	4	5
$P(Y=y)$	0.2	0.15	0.2	0.35	0.1

1 أجد التوقع $E(Y)$. 3

2 أجد التباين σ^2 . 1.7

أتتحقق من فهمي

إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	0.1	a	b	0.2	0.3

وكان التوقع $E(x) = 2.5$ ، فأجد قيمة كل من: $P(x=1)$ ، و $P(x=2)$.

$$P(X=1) = 0.1, P(X=2) = 0.3$$

التباين (Variance) للمتغير العشوائي X هو مقياس لشتت قيم المتغير عن وسطها الحسابي $E(x)$ ، ويُمكن إيجاده باستعمال الصيغة الآتية:

$$\sigma^2 = (\sum x^2 \cdot P(x)) - (E(x))^2$$

مفهوم أساسي

بالكلمات: التباين للمتغير العشوائي X في توزيع احتمالي لتجربة عشوائية يساوي مجموع حواصل ضرب مربعات قيم المتغير X في احتمال كل قيمة مطروحًا منه مربع التوقع للمتغير X .

بالرموز:

$$\sigma^2 = (\sum x^2 \cdot P(x)) - (E(x))^2$$

أتذكر

الانحراف المعياري σ هو الجذر التربيعي للتباين.

مثال 3

يُبين الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X :

x	1	2	3	4
$P(x)$	0.2	0.35	0.3	0.15

أَتَدْرَبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ



- أوجه الطلبة إلى بند (أَتَدْرَبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ)، ثم أطلب إليهم حل المسائل (1-4) ضمن مجموعات ثنائية داخل الغرفة الصفية؛ فهذه المسائل تحديداً ترتبط ارتباطاً مباشراً بأمثلة الدرس، وهي تُستعمل خاصةً لتدريب الطلبة على المفاهيم نفسها، بصرف النظر عما إذا كانت الأسئلة فردية أم زوجية.
- إذا واجه الطلبة صعوبة في حل أية مسألة، فإنني أختار أحد الطلبة ممن تمكن / تمكنت من حل المسألة؛ لمناقشة استراتيجيته / استراتيجيتها في حل المسألة على اللوح، مُحفِّزاً الطلبة على طرح أيّ تساؤل عن خطوات الحل المُقدَّمة من الزميل / الزميلة.

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة ذوو المستوى دون المتوسط صعوبة في حل أسئلة بند (أَتَدْرَبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ)، فإنني أضع كلاً منهم مع طالب آخر / طالبة أخرى من ذوي المستوى المتوسط أو مع أحد الطلبة المُتميزين؛ ليتشاركوا في حل الأسئلة.

المفاهيم العابرة للمواد:

عند حل الأسئلة (3-5)، أُثير حواراً عن وجوب مشاركة الشباب والشابات في مجالس الطلبة بالجامعات؛ تأكيداً لمبدأ المساواة، وتمكين الفتيات سياسياً، وتنمية الحسّ بالمسؤولية لدى الجميع، والمشاركة في رسم السياسات التي تهتم مستقبل الطلبة، واتخاذ القرارات التي تصبُّ في المصلحة العامة للمجتمع الطلابي خاصة، وللمجتمع والوطن بوجه عام. وإثراء لهذا الحوار، أ طرح على الطلبة عدداً من الأسئلة، مثل:

- ◀ ما فائدة مجالس الطلبة في المدرسة أو الجامعة؟
- ◀ ما آلية اختيار الأعضاء؟
- ◀ مَنْ يريد أن يكون عضواً في مجلس الطلبة؟ لماذا؟
- ◀ ماذا أقترح لتحسين أداء المجلس؟

1 أجد التوقع $E(x)$.

$$E(x) = \sum x \cdot P(x)$$

صيغة التوقع للمتغير العشوائي X

$$= 1 \times 0.2 + 2 \times 0.35 + 3 \times 0.3 + 4 \times 0.15$$

بكتابة مجاميع حاصل الضرب

$$= 2.4$$

بالتبسيط

2 أجد التباين σ^2 .

$$\sigma^2 = (\sum x^2 \cdot P(x)) - (E(x))^2$$

صيغة التباين للمتغير العشوائي X

$$= 1^2 \times 0.2 + 2^2 \times 0.35 + 3^2 \times 0.3 + 4^2 \times 0.15 - (2.4)^2$$

بالتعويض

$$= 0.94$$

بالتبسيط

أتحقق من فهمي

إذا كان للمتغير العشوائي X التوزيع الاحتمالي الآتي:

x	0	1	2	3
$P(x)$	0.1	0.4	0.35	0.15

$$\text{فأجد التوقع } E(x) \text{، والتباين } \sigma^2. \quad E(X) = 1.55; \sigma^2 = 3.15 - (1.55)^2 = 0.7475$$

أَتَدْرَبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ

1 يُبين الجدول الآتي نتائج مسح شمل 50 طالباً من إحدى المدارس لمعرفة عدد ساعات الدراسة في يوم الإجازة:

عدد ساعات الدراسة (x)	1	2	3	4	5
عدد الطلبة (f)	4	12	20	8	6

بافتراض أن المتغير العشوائي X يُمثل عدد الساعات، أجد $E(x)$.

$$E(X) = 1 \times 0.08 + 2 \times 0.24 + 3 \times 0.4 + 4 \times 0.16 + 5 \times 0.12 = 3$$

- أوجه الطلبة إلى بند (مهارات التفكير العليا)، ثم أطلب إليهم حل المسألة 7 والمسألة 8.

الواجب المنزلي:

أستعين بالجدول الآتي لتحديد الواجب المنزلي للطلبة بحسب مستوياتهم:

المستويات	الأسئلة
دون المتوسط	كتاب الطالب: 5, 6, 8 كتاب التمارين: (1-3)
ضمن المتوسط	كتاب الطالب: (5-7) كتاب التمارين: 3, 4
فوق المتوسط	كتاب الطالب: (6-8) كتاب التمارين: (3-5)

5 الإثراء

- أطلب إلى الطلبة حل السؤالين الآتيين بوصفهما إثراء لهم:

1 أُلقي حجرًا نرد منتظمًا ومتمايزًا معًا مرّة واحدة. إذا دلّ المتغير العشوائي X على الفرق المطلق بين الرقمين الظاهرين، فأجد التوقع $E(X)$ ، والتباين σ^2 .
 $E(X) = \frac{35}{18} \approx 1.94, \sigma^2 = \frac{665}{324} \approx 2.05$

2 يُبين الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X . أجد التباين σ^2 .

X	-2	1	5	7
$P(X = x)$	a	a^2	$2a^2$	a

$$a = \frac{1}{3}; E(X) = \frac{26}{9}; \sigma^2 = \frac{1214}{81} \approx 14.99$$

2 إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	-2	-1	0	1	2	3
$P(x)$	0.13	0.27	a	b	0.22	a

وكان التوقع $E(X) = 0.39$ ، فأجد قيمة كل من: $P(x = 1)$ ، و $P(x = 0)$. أنظر ملحق الإجابات.

يتكوّن مجلس الطلبة في إحدى الجامعات من 8 طلاب و12 طالبة، وقد اختاروا عشوائيًا لجنة تضم اثنين منهم للاجتماع مع مُمثّلين عن رئاسة الجامعة. إذا دلّ المتغير العشوائي X على عدد الطالبات في اللجنة المختارة، فأجب عن الأسئلة الآتية:

3 أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي. أنظر ملحق الإجابات.

4 أجد التوقع لعدد الطالبات في اللجنة المختارة. أنظر ملحق الإجابات.

5 أجد التباين للتوزيع الاحتمالي. أنظر ملحق الإجابات.

6 أخلّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم). أنظر ملحق الإجابات.

مهارات التفكير العليا

7 تحدّد: ما قيمة σ^2 للتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X في الجدول الآتي إذا كان $E(X) = 5.95$ ؟

أنظر ملحق الإجابات.

x	2	5	a	8
$P(x)$	0.1	b	0.2	0.35

8 تحدّد: إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X مُعرّفًا على النحو الآتي:

$$\{(1, kx), (2, \frac{1}{8}), (3, \frac{1}{8}), (4, kx), (5, \frac{1}{8}), (6, \frac{1}{8})\}$$

فما قيمة التوقع للمتغير X ؟ أنظر ملحق الإجابات.

6 الختام

أطلب إلى كل طالب أن يكتب على ورقة وصفًا لتجربة عشوائية، ومُتغيّرًا عشوائيًا مُعرّفًا عليها، ويحسب التوقع والتباين لذلك المتغير العشوائي، ثم أجمع الأوراق، وأرصد الأخطاء (إن وُجدت)، وأعمل على معالجتها.

اختبار نهاية الوحدة

يُبين الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X :

x	1	2	3	5
$P(x)$	$2k$	k	k	k

5 قيمة k هي:

- a) 0.1 b) 0.2
c) 0.3 d) 0.4

6 قيمة $E(x)$ هي:

- a) 1.2 b) 1.4
c) 2.4 d) 1

7 قيمة σ^2 هي:

- a) 2.24 b) 2.4
c) 8 d) 5.76

8 قيمة $P(x < 3)$ هي:

- a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{2}{5}$
c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{4}{5}$

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1 رُتبت الأحرف: ر، ط، م عشوائيًا في صف واحد. احتمال الحصول على كلمة (مطر) هو:

- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{6}$
c) $\frac{1}{9}$ d) $\frac{1}{2}$

2 رُتبت الأحرف: R, E, D, E عشوائيًا في صف واحد. احتمال الحصول على كلمة (DEER) هو:

- a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{6}$
c) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{1}{24}$

3 احتمال اختيار 2 من الرجال و3 من النساء عشوائيًا من بين 5 موظفين و5 موظفات في إحدى الشركات لحضور مؤتمر علمي هو:

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{10}$
c) $\frac{50}{63}$ d) $\frac{25}{63}$

4 سحب علي 4 كرات معًا عشوائيًا من صندوق يحوي 3 كرات حمراء، و3 كرات زرقاء، و3 كرات صفراء، و3 كرات خضراء، وكانت جميع الكرات التي في الصندوق متماثلة. احتمال أن تكون 2 من الكرات المسحوبة من لون واحد، وبقيت الكرات من لونين آخرين هو:

- a) $\frac{36}{55}$ b) $\frac{9}{55}$
c) $\frac{4}{55}$ d) $\frac{8}{55}$

اختبار نهاية الوحدة:

• أطلب إلى الطلبة حل الأسئلة (1-8) فرديًا، وأتجول بينهم مُساعدًا ومُرشِدًا ومُوجِّهًا، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثم أناقشهم جميعًا في حل بعض المسائل على اللوح.

• أوزّع الطلبة إلى مجموعات رباعية، ثم أطلب إليهم حل المسائل (9-12)، وأتجول بينهم مُساعدًا ومُرشِدًا ومُوجِّهًا، وأقدّم لهم التغذية الراجعة اللازمة، ثم أحدد المسائل التي واجه الطلبة صعوبة في حلها لمناقشتها على اللوح.

تدريب على الاختبارات الدولية

- أطلب إلى الطلبة حل الأسئلة الواردة في بند (تدريب على الاختبارات الدولية) فرديًا، ثم أناقشهم جميعًا في حلها على اللوح، مُبينًا لهم المقصود بالاختبارات الدولية.
- أحرص الطلبة على الاهتمام بحل هذه الأسئلة ومثيلاتها، والمشاركة في الدراسات وبرامج التقييم الدولية بكل جدية، وأحرص على تضمين اختباراتي المدرسية نماذج مُماثلة لهذه الأسئلة.

اختبار نهاية الوحدة

9 يُبين الجدول الآتي نتائج مسح شمل 60 يومًا متتاليًا، وقد دُوّن قيس في كلٍّ منها عدد رسائل البريد الإلكتروني التي وصلته:

عدد الرسائل (x)	0	1	2	3	4
عدد الأيام (f)	8	12	10	18	12

بافتراض أن المتغير العشوائي X يُمثل عدد الرسائل، أجد $E(X)$.

$$E(X) = 0 \times \frac{8}{60} + 1 \times \frac{12}{60} + 2 \times \frac{10}{60} + 3 \times \frac{18}{60} + 4 \times \frac{12}{60} = \frac{134}{60} \approx 2.23$$

صندوق فيه 3 كرات زرقاء، و6 كرات خضراء، جميعها مُتماثلة. سُحبت من الصندوق 3 كرات على التوالي من دون إرجاع، ودلّ المتغير العشوائي X على عدد الكرات الزرقاء المسحوبة:

10 أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .
أنظر ملحق الإجابات.

11 أجد احتمال سحب كرة زرقاء واحدة على الأقل.
 $\frac{16}{21}$

12 يُبين الجدول التالي التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ، حيث $E(X) = \frac{5}{12}$. أجد قيمة كلٍّ من: a ، و b .

x	-1	0	1	2
$P(x)$	a	$4b$	$2b$	a

أنظر ملحق الإجابات.

تدريب على الاختبارات الدولية

يحتوي كيس على 8 كرات زجاجية حمراء، و4 كرات زجاجية خضراء، جميعها مُتماثلة. إذا سُحِب من الكيس 6 كرات عشوائيًا دفعة واحدة فما احتمال:

13 أن تكون 4 من الكرات الزجاجية المسحوبة حمراء؟

$$\frac{5}{11}$$

14 أن تكون 4 على الأقل من الكرات الزجاجية المسحوبة حمراء؟

$$\frac{8}{11}$$

X متغير عشوائي، وله التوزيع الاحتمالي الآتي:

x	-2	3
$P(x)$	a	$1 - a$

15 أثبت أن $\sigma^2 = 25a(1-a)$.

أنظر ملحق الإجابات.

16 إذا كان $E(X) = 2$ ، فما قيمة σ ؟

$$E(X) = 2 \Rightarrow -2 \times a + 3 \times (1-a) = 2$$

$$-5a = -1 \Rightarrow a = 0.2$$

$$\sigma^2 = 25 \times 0.2 \times 0.8 = 4 \Rightarrow \sigma = 2$$

كتاب التمارين

أستعد لدراسة الوحدة

الوحدة 3: الاحتمالات

افترض أن عدد طرائق اختيار أحمد الذي هو m ، وأن عدد طرائق اختياره البطل هو n_1 ، وأن عدد طرائق اختياره القميص هو n_2 ، وأن عدد طرائق اختياره ربطة العنق هو n_3 .

$$m = n_1 \times n_2 \times n_3$$

$$= 3 \times 5 \times 2 = 30$$

مبدأ العدّ الأساسي
بالتعويض، وإيجاد ناتج الضرب

بكم طريقة يُمكن اختيار رئيس ونائب للرئيس، ثم اختيار عضوين من بين 10 مُعلّمين للجنة مدرسية؟ 2520

مثال: بكم طريقة يُمكن لـ 8 صديقات، يتنهن سُلوى وزبيدة، الجلوس على 8 مقاعد مرتبة في صفين، كما في الشكل المجاور، إذا قُترت سُلوى وزبيدة الجلوس على المقاعد التي عند طرفي الصفين؟

افترض أن العدد الكلي لطرائق جلوس الصديقات هو m :

$$n_1 = 4 \quad \text{عدد طرائق جلوس سُلوى}$$

$$n_2 = 3 \quad \text{عدد طرائق جلوس زبيدة}$$

$$n_3 = 6P_6 = 6! = 720 \quad \text{عدد طرائق جلوس البقية (6 صديقات ترتيبهن مهم)}$$

$$m = n_1 \times n_2 \times n_3$$

$$= 4 \times 3 \times 720 = 8640$$

مبدأ العدّ الأساسي
بالتعويض، وإيجاد ناتج الضرب

بكم طريقة يُمكن اختيار كتابي تاريخ وكتابي علوم من رفّ عليه 6 كتب تاريخ مختلفة و6 كتب علوم مختلفة؟ 225

مثال: بكم طريقة يُمكن تكوين لجنة فيها 3 من الذكور و2 من الإناث من بين 7 موظفين و7 موظفات؟

افترض أن العدد الكلي لطرائق تكوين اللجنة هو m :

$$n_1 = {}_7C_3 = 35 \quad \text{عدد طرائق اختيار 3 من 7 ذكور}$$

$$n_2 = {}_7C_2 = 21 \quad \text{عدد طرائق اختيار 2 من 7 إناث}$$

$$m = n_1 \times n_2$$

$$= 35 \times 21 = 735$$

مبدأ العدّ الأساسي
بالتعويض، وإيجاد ناتج الضرب

21

الوحدة 3: الاحتمالات

أستعد لدراسة الوحدة

أختر معلوماتي قبل البدء بدراسة الوحدة، وفي حال عدم تأكدي من الإجابة أستعين بالمثال المعطى.

حساب مضروب العدد (الدرس 1)

أجد قيمة كل ممّا يأتي في أبسط صورة:

$$1 \quad \frac{5!}{3!} \quad 20 \quad 2 \quad \frac{9!}{3! \times 6!} \quad 84$$

مثال: أجد قيمة $\frac{12!}{4! \times 8!}$ في أبسط صورة.

$$\frac{12!}{4! \times 8!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8!}{4 \times 3 \times 2 \times 8!}$$

$$= 495$$

تعريف مضروب العدد
بالتبسيط

أحلّ المعادلة الآتية: $n = 3(n + 1) = 24$

مثال: حلّ المعادلة الآتية: $(n - 1)! - 20 = 700$

$$(n - 1)! = 720$$

$$(n - 1)! = 6!$$

$$n - 1 = 6$$

$$n = 7$$

بإضافة 20 إلى طرفي المعادلة
بكتابة 720 في صورة مضروب العدد
بحلّ المعادلة
بإضافة 1 إلى طرفي المعادلة

استعمال المبدأ الأساسي للعدّ، والتبديل، والتوافيق (الدرس 1)

بكم طريقة يُمكن تكوين أعداد تحوي كل منها 3 منازل مختلفة باستعمال الأرقام: 1, 2, 3, 4, 5؟ 60

الذي	بنطال	قميص	ربطة عنق
الألوان المتوافقة	أسود، أزرق، رمادي.	أبيض، أزرق، أسود، أخضر، رمادي.	حمر، سوداء.

مثال: بكم طريقة يُمكن لأحمد أن يظهر بزيّ مختلف يتكوّن من بنطال وقميص وربطة عنق إذا كان لديه في الخزانة ملابس ألوانها كما في الجدول المجاور؟

20

أستعد لدراسة الوحدة

الوحدة 3: الاحتمالات

تحديد عناصر الفضاء العيني في تجربة عشوائية لحساب احتمالات الحوادث (الدرس 3)

في تجربة رمي حجرَي متممايزين نرد مرة واحدة عشوائياً وإيجاد ناتج جمع الرقمين الظاهرين، أجد احتمال أن يكون مجموع الرقمين الظاهرين:

$$\frac{1}{12} \quad \text{يساوي 4} \quad \frac{1}{12} \quad \text{يساوي 7} \quad \frac{1}{6} \quad \text{أقل من 4} \quad \frac{1}{12}$$

$$\frac{7}{36} \quad \text{عدداً زوجياً.} \quad \frac{1}{2} \quad \text{من مضاعفات العدد 3} \quad \frac{1}{3} \quad \text{مربعاً كاملاً.} \quad \frac{7}{36}$$

$$\frac{7}{12} \quad \text{أقل من 8} \quad \frac{7}{12} \quad \text{أقل من أو يساوي 8} \quad \frac{13}{18}$$

مثال: سحبت غدير قطعة حلوى عشوائياً من كل كيس من الكيسين المجاورين، استعمل جدولاً لأجد:



الكيس A	الكيس B			
	R	B	Y	
R	R, R	R, B	R, Y	
Y	Y, R	Y, B	Y, Y	
B	B, R	B, B	B, Y	
G	G, R	G, B	G, Y	

(a) احتمال سحب قطعتي حلوى من اللون نفسه.

أمثل الفضاء العيني للتجربة باستعمال جدول. ألاحظ أن عدد عناصر الفضاء العيني 12

افترض أن الحادث A هو سحب قطعتي حلوى لهما اللون نفسه، إذن عدد عناصر هذا الحادث 3؛ لذا فإن احتمال الحادث A يساوي:

$$P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

(b) احتمال سحب قطعتي حلوى ليست أيّ منهما زرقاء أو خضراء.

افترض أن الحادث B يمثل سحب قطعتي حلوى ليست أيّ منهما زرقاء أو خضراء.

ألاحظ من الجدول أنه توجد 4 نواتج لا تحتوي قطعة حلوى زرقاء أو خضراء؛ لذا فإن احتمال الحادث B يساوي:

$$P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

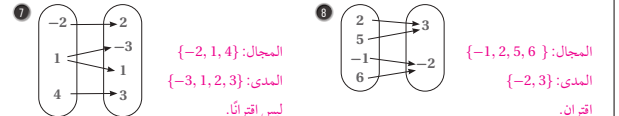
23

الوحدة 3: الاحتمالات

أستعد لدراسة الوحدة

العلاقة والاقتران (الدرس 2)

أحدّد مجال كل علاقة مما يأتي ومداها، ثم أحدّد ما إذا كانت اقتراناً أم لا:



x	4	2	-3	4	-4
y	0	-1	0	-1	0

المجال: $\{-4, -3, 2, 4\}$ ، المدى: $\{-1, 0\}$ ، ليس اقتراناً.

x	-2	-1	0	1	2
y	-3	-3	-3	-3	-3

المجال: $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ، المدى: $\{-3\}$ ، اقتران.

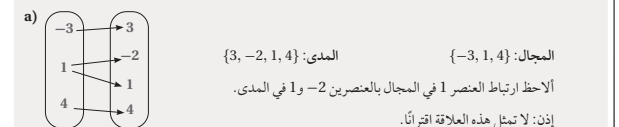
x	-2	5	0	4	1	-9
y	-3	-3	-3	-3	-3	-3

المجال: $\{-2, 5, 0, 4, 1, -9\}$ ، المدى: $\{-3\}$ ، ليس اقتراناً.

x	-2	5	0	4	1	-9
y	-3	-3	-3	-3	-3	-3

المجال: $\{-2, 5, 0, 4, 1, -9\}$ ، المدى: $\{-3\}$ ، ليس اقتراناً.

مثال: أحدّد مجال كل علاقة مما يأتي ومداها، ثم أحدّد ما إذا كانت تمثل اقتراناً أم لا:



x	5	3	2	0	-4	-6
y	1	3	1	3	-2	2

المجال: $\{5, 3, 2, 0, -4, -6\}$ ، المدى: $\{1, 3, -2, 2\}$

ألاحظ ارتباط كل عنصر في المجال بعنصر واحد في المدى، إذن، تمثل هذه العلاقة اقتراناً.

(c) $\{(0, 1), (2, 4), (3, 7), (5, 4)\}$

المجال: $\{0, 2, 3, 5\}$ ، المدى: $\{1, 4, 7\}$

ألاحظ ارتباط كل عنصر في المجال بعنصر واحد في المدى، إذن، تمثل هذه العلاقة اقتراناً.

22

كتاب التمارين

الوحدة 3: الاحتمالات

أستعد لدراسة الوحدة

حساب احتمالات حوادثٍ مستقلة وحوادثٍ غير مستقلة في تجربة عشوائية (الدرس 3)

يحتوي كيس على 6 قطع حلوى حمراء (R)، و8 قطع حلوى خضراء (G)، جميعها متماثلة. اختار طفل من الكيس قطعة حلوى عشوائيًا وأكلها، ثم اختار قطعة أخرى عشوائيًا ليأكلها.

أجد احتمال كل من الحادثين الآتيين باستعمال الشجرة الاحتمالية:

٢١ اختيار الطفل قطعتي حلوى متماثلتي اللون.

٢٢ اختيار الطفل قطعتي حلوى مختلفتي اللون.

أقلام جبر: في عبة قلما جبر أحمر، وثلاثة أقلام جبر أزرق، جميعها متماثلة. اختار سالم منها قلمين عشوائيًا على التوالي من دون إرجاع. أجد احتمال كل من الحوادث الآتية باستعمال الشجرة الاحتمالية:

٢٣ اختيار قلمي جبر أحمر.

٢٤ اختيار قلمي جبر أزرق.

٢٥ اختيار قلم جبر من كل لون.

أرصاد جوية: أفادت مذبةعة النشرة الجوية أن احتمال تساقط الثلوج يوم الإثنين هو 25%، وأنه يرتفع إلى 90% يوم الثلاثاء، أستعمل التمثيل بالشجرة الاحتمالية لإيجاد احتمال:

٢٦ تساقط الثلوج يوم الثلاثاء، وعدم تساقطها يوم الإثنين.

٢٧ عدم تساقط الثلوج في كلا اليومين.

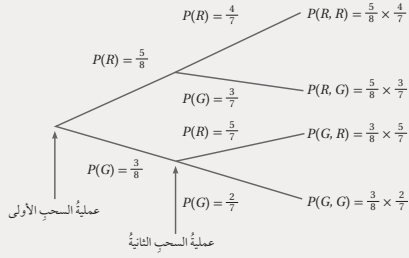


الوحدة 3: الاحتمالات

أستعد لدراسة الوحدة

مثال: يحتوي كيس على 5 كرات حمراء (R)، و3 كرات خضراء (G)، جميعها متماثلة. سُحبت كرة من الكيس عشوائيًا، ثم تُجيب لونها من دون إرجاعها إلى الكيس، ثم سُحبت كرة أخرى عشوائيًا، ثم تُجيب لونها. أجد احتمال كل من الحوادث الآتية باستعمال الشجرة الاحتمالية:

ألاحظ من التمثيل بالشجرة الاحتمالية الآتي كيف تتأثر عملية السحب الثانية بنتيجة عملية السحب الأولى عند عدم إرجاع الكرة المسحوبة:



(a) سحب كرتين خضراوين.

بعد عملية السحب الأولى يقل عدد الكرات في الكيس بمقدار كرة خضراء

$$P(G \cap G) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$$

(b) سحب كرة خضراء في المرة الأولى وكرة حمراء في المرة الثانية.

يمكن الحصول على هذه النتيجة في حالة واحدة فقط من الحالات الأربع التي تظهر في الشجرة الاحتمالية

$$P(G \cap R) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$$

(c) سحب كرتين، إحداهما خضراء، والأخرى حمراء.

يمكن الحصول على هذه النتيجة في حالتين، هما: الكرة الأولى حمراء، والثانية خضراء، أو الكرة الأولى خضراء، والثانية حمراء

$$P(R \cap G) + P(G \cap R) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{28}$$

الدرس

1

الاحتمال بالتباديل والتوافيق Probability with Permutations and Combinations

١ رُتبت 4 بطاقات مُتماثلة عشوائيًا في صف واحد، وحملت كلٌّ منها أحد الأرقام من 1 إلى 4. ما احتمال أن يظهر الرقمان 2 و4 متجاورين؟

$$\frac{2(3!)}{4!} = \frac{1}{2}$$

٢ يتكوّن مجلس الطلبة في إحدى المدارس من 5 أعضاء، بينهم خليل ومجدي. ما احتمال اختيار خليل رئيسًا للمجلس، واختيار مجدي مُقرّرًا له إذا كانت عملية الاختيار عشوائية؟

$$\frac{1}{20}$$

٣ صندوق فيه كرات مُتماثلة، كلٌّ منها تحمل أحد الأرقام من 1 إلى 9، إذا اختيرت عشوائيًا 3 كرات دفعة واحدة، فما احتمال أن تحمل الكرات المختارة أعدادًا فردية؟

$$\frac{{}_3C_3}{{}_9C_3} = \frac{5}{42}$$

يعمل في شركة 6 موظفين و6 موظفات، ويريد مدير الشركة تكوين فريق يضم 4 منهم عشوائيًا؛ لحضور ندوة عن تسويق المُنتجات. أجد احتمال اختيار المدير:

$$\frac{{}_6C_2 \times {}_6C_2}{{}_{12}C_4} = \frac{5}{11}$$

٤ فريقًا يضم 2 من الموظفين و2 من الموظفات.

٥ الموظفة مريم رئيسًا للفريق، والموظفة لبنى نائبًا للرئيس، وبقية الفريق من الذكور.

$$\frac{1 \times 1 \times {}_6C_2}{{}_{12}C_4} = \frac{1}{33}$$

٦ فريقًا ليس فيه إناث.

$$\frac{{}_6C_4}{{}_{12}C_4} = \frac{1}{33}$$

٧ فريقًا يضم 3 موظفات على الأقل.

$$\frac{{}_6C_3 \times {}_6C_1 + {}_6C_2 \times {}_6C_0}{{}_{12}C_4} = \frac{3}{11}$$

في كيس 10 حبات حلوى مُغلّفة بورق أزرق، و10 أخرى مُغلّفة بورق أحمر. اختارت هدى 5 حبات عشوائيًا من الكيس معًا، أجد احتمال كلٍّ مما يأتي:

٨ اختيار هدى حبتين مُغلّقتين بورق أزرق، و3 حبات مُغلّفة بورق أحمر.

$$\frac{{}_{10}C_2 \times {}_{10}C_3}{{}_{20}C_5} = \frac{225}{646}$$

٩ عدم اختيار هدى أيّ حبة حلوى مُغلّفة بورق أحمر.

$$\frac{{}_{10}C_5}{{}_{20}C_5} = \frac{21}{1292}$$

١٠ اختيار هدى 4 حبات على الأقل مُغلّفة بورق أحمر.

$$\frac{{}_{10}C_4 \times {}_{10}C_1 + {}_{10}C_5}{{}_{20}C_5} = \frac{49}{323}$$

كتاب التمارين

الدرس 2

المتغير العشوائي Random Variable

1 في تجربة اختيار عائلة لديها طفلان عشوائياً، وتسجيلهما بحسب الجنس وتسلسل الولادة، إذا دلّ المتغير العشوائي X على عدد الذكور، فأجد مجموعة قيم X .
(إرشاد: استعمل حرف B للذكور، وحرف G للإناث).

2 في تجربة إلقاء 4 قطع نقد معدنية متمايزة عشوائياً، إذا دلّ المتغير العشوائي X على عدد مَرَّات ظهور الكتابة، فأجد مجموعة قيم X . (إرشاد: استعمل حرف H للصورة، وحرف T للكتابة).

$$X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

3 في تجربة سحب بطاقتين عشوائياً على التوالي من دون إرجاع من صندوق يحوي 4 بطاقات مُتماثلة، كلٌّ منها مُرقَّمة برقم من 1 إلى 4، إذا دلّ المتغير العشوائي X على مجموع العددين الظاهرين على البطاقتين المسحوبتين، فأجد الحادث الذي ترتبط جميع عناصره بالقيمة $X = 4$.

$$A = \{(1, 3), (3, 1)\}$$

4 في تجربة سحب بطاقتين عشوائياً على التوالي مع الإرجاع من صندوق يحوي 4 بطاقات مُتماثلة، كلٌّ منها مُرقَّمة برقم من 1 إلى 4، إذا دلّ المتغير العشوائي X على مجموع العددين الظاهرين على البطاقتين المسحوبتين، فأجد الحادث الذي ترتبط جميع عناصره بالقيمة $X = 4$.

$$A = \{(1, 3), (3, 1), (2, 2)\}$$

إذا دُور مؤشر القرصين عشوائياً في الشكل المجاور، وتوقَّف كل مؤشر عند أحد الأعداد، فأجد مجموعة قيم المتغير العشوائي X إذا دلّ على:

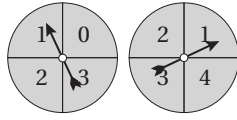
$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12\}$$

الدرس 3

احتمال المتغير العشوائي Probability of a Random Variable



إذا دُور مؤشر القرصين عشوائياً في الشكل المجاور، وتوقَّف كل مؤشر عند أحد الأعداد، ودلّ المتغير العشوائي X على مجموع العددين، فأجد كلاً ممَّا يأتي:

1 التوزيع الاحتمالي في صورة جدول. أنظر ملحق الإجابات.

2 التوزيع الاحتمالي في صورة تمثيل بياني. أنظر ملحق الإجابات.

إذا دُور المؤشران السابقان عشوائياً، ودلّ المتغير العشوائي X على حاصل ضرب العددين، فأجد كلاً ممَّا يأتي:

3 التوزيع الاحتمالي في صورة جدول. أنظر ملحق الإجابات.

4 التوزيع الاحتمالي في صورة تمثيل بياني. أنظر ملحق الإجابات.

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول المجاور:

x	1	2	3	4
$P(x)$	a	0.2	a	0.1

$$a = 0.35$$

$$P(X = 3) = a = 0.35$$

$$P(2 \leq X < 4) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0.55$$

$$P(1 \leq X < 2) = P(X = 1) = 0.35$$

في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X مُعرَّفاً على النحو الآتي:

$$\{(0, k), (1, 2k), (2, 2k)\}$$

$$k = 0.2$$

أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي. أنظر ملحق الإجابات.

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.6$$

12 في تجربة سحب كرتين عشوائياً على التوالي من دون إرجاع من صندوق يحوي 4 كرات حمراء، و5 كرات خضراء، جميعها مُتماثلة، إذا دلّ المتغير العشوائي X على عدد الكرات الحمراء في السحبة، فأنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X . أنظر ملحق الإجابات.

28

27

الدرس 4

توقع المتغير العشوائي Expected Value of a Random Variable

يُبين الجدول الآتي جزءاً من التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ؛ لأنَّ فيه قيمة مفقودة:

x	0	1	2	3
$P(x)$	0.3	?	0.4	0.05

$$1 \text{ أجد القيمة المفقودة في الجدول. } 0.25$$

$$2 \text{ أجد التوقع } E(X). E(X) = 0 \times 0.3 + 1 \times 0.25 + 2 \times 0.4 + 3 \times 0.05 = 1.2$$

3 يُبين الجدول التالي نتائج مسح شمل 100 طالب من طلبة إحدى الجامعات لمعرفة عدد المواد التي سجلها الطلبة في فصل دراسي مُعَيَّن. بافتراض أنَّ المتغير العشوائي X يُمثِّل عدد المواد المُسجَّلة، أجد التوقع $E(X)$.

عدد المواد (x)	2	3	4	5
عدد الطلبة (f)	36	44	15	5

$$E(X) = 2 \times 0.36 + 3 \times 0.44 + 4 \times 0.15 + 5 \times 0.05 = 2.89$$

4 إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول التالي، وكان التوقع $E(X) = 2.2$ ، فأجد قيمة كلٍّ من: $P(x = 1)$, $P(x = 3)$.

$$P(X = 1) = 0.4$$

$$P(X = 3) = 0.1$$

x	1	2	3	4
$P(x)$	a	0.25	b	0.25

5 إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول التالي، فأجد التوقع $E(X)$ ، والتباين σ^2 .

x	3	4	5	6
$P(x)$	0.15	0.45	0.25	0.15

$$E(X) = 3 \times 0.15 + 4 \times 0.45 + 5 \times 0.25 + 6 \times 0.15 = 4.4$$

$$\sigma^2 = 9 \times 0.15 + 16 \times 0.45 + 25 \times 0.25 + 36 \times 0.15 - (4.4)^2 = 0.84$$

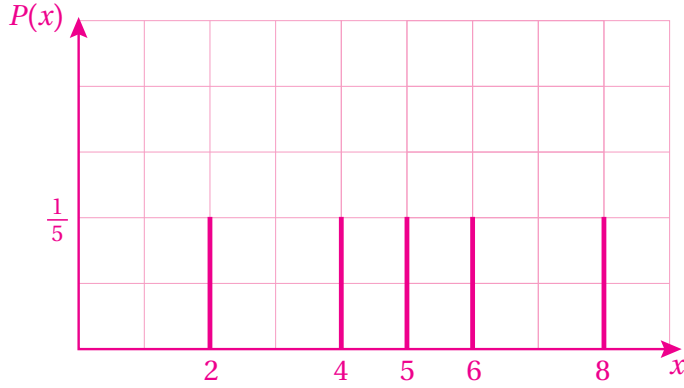
29

الدرس 3 - إجابة الأسئلة في بند (أتحقق من فهمي 1):

x	2	4	5	8	6
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

(a)

(b)



الدرس 3 - إجابة الأسئلة في بند (أتحقق من فهمي 4):

$$X = \{0, 1, 2, 3\}$$

حمراء: R ، خضراء: G

$$P(X=0) = P(GGG) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{35}$$

$$P(X=1) = P(\{RGG, GRG, GGR\}) = 3 \left(\frac{3}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \right) = \frac{18}{35}$$

$$P(X=2) = P(\{RRG, RGR, GRR\}) = 3 \left(\frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} \right) = \frac{12}{35}$$

$$P(X=3) = P(RRR) = \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{35}$$

جدول التوزيع الاحتمالي هو:

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

الدرس 1 - إجابة الأسئلة في بند (أدرب وأحل المسائل):

(5) عدد عناصر فضاء العينة يساوي عدد طرائق اختيار 4 أعضاء مضروبًا في عدد طرائق اختيار الرئيس من بينهم في عدد طرائق اختيار أمين السر في عدد طرائق اختيار أمني الصندوق، أو عدد طرائق اختيار الرئيس وأمين السر من المجموعة كاملة مضروبًا في عدد طرائق اختيار أمني الصندوق من البقية.

$$n(\Omega) = {}_{24}C_4 \times 4 \times 3 \times 1 = 127512$$

$$\text{OR: } n(\Omega) = {}_{24}P_2 \times {}_{22}C_2 = 127512$$

$$n(A) = {}_{14}C_1 \times {}_{13}C_2 \times {}_{10}C_1 = 10920$$

$$P(A) = \frac{10920}{127512} \approx 0.0856$$

(10) عدد طرائق سحب 3 كرات يساوي: 6^3

عدد طرائق سحب كرة حمراء وكرتين خضراوين يساوي: $(4 \times 2 \times 2)$ مضروبًا في عدد طرائق ترتيب الكرات الثلاث، وهو: $3 = \frac{3!}{2!}$ (الأخضر مُكرَّر مرتين).

$$n(\Omega) = 6^3 = 216$$

$$n(A) = 3 \times 16 = 48$$

$$P(A) = \frac{48}{216} = \frac{2}{9}$$

(12) عدد طرائق توزيع 14 قميصًا على 14 لاعبًا هو ${}_{14}P_{14}$ (الترتيب مُهم).

عدد عناصر الحادث (حصول صالح على الرقم 9، وحصول بلال على الرقم 10) يساوي عدد طرائق حصول صالح على الرقم 9 مضروبًا في عدد طرائق حصول بلال على الرقم 10 مضروبًا في عدد طرائق توزيع الـ 12 قميصًا المُتبقية على بقية اللاعبين.

$$n(A) = 1 \times 1 \times {}_{12}P_{12} = {}_{12}P_{12}$$

إذن، احتمال هذا الحادث هو:

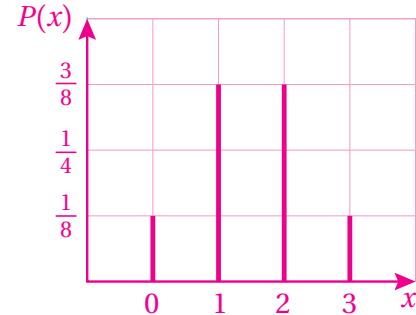
$$P(A) = \frac{{}_{12}P_{12}}{{}_{14}P_{14}} = \frac{12!}{14!} = \frac{1}{182}$$

الدرس 3 - إجابة الأسئلة في بند (أُتدرَّب وأحل المسائل):

(1) جدول التوزيع الاحتمالي هو:

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

(2)



(6) جدول التوزيع الاحتمالي هو:

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	0.4	0.1	0.4	0.1

(8) $X = \{0, 1, 2\}$

الطريقة الأولى: حساب الاحتمالات باستعمال التوافيق:

$$P(X=0) = P(2G) = \frac{{}_3C_2}{{}_6C_2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

$$P(X=1) = P(1G, 1R) = \frac{{}_3C_1 \times {}_3C_1}{{}_6C_2} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$P(X=2) = P(2R) = \frac{{}_3C_2}{{}_6C_2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

الطريقة الثانية: استعمال احتمال وقوع حادثين معًا وقانون ضرب الاحتمالات:

$$P(X=0) = P(G \cap G) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

$$P(X=1) = P(G \cap R) + P(R \cap G) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$

$$P(X=2) = P(R \cap R) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

إذن، جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو:

x	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

الدرس 4 - إجابة الأسئلة في بند (أُتدرَّب وأحل المسائل):

$$2) \sum P(X=x) = 1 \Rightarrow 0.13 + 0.27 + a + b + 0.22 + a = 1$$

$$2a + b = 0.38 \dots\dots\dots (1)$$

$$E(X) = 0.39 \Rightarrow -2 \times 0.13 - 1 \times 0.27 + 0 \times a + b + 2$$

$$\times 0.22 + 3 \times a = 0.39$$

$$3a + b = 0.48 \dots\dots\dots (2)$$

ب طرح المعادلة (1) من المعادلة (2)، أجد أن: $a = 0.1$ وبالتعويض في المعادلة (1)، أجد أن: $b = 0.18$ إذن، $P(X=0) = 0.1$ و $P(X=1) = 0.18$

$$3) X = \{0, 1, 2\}$$

$$P(X=0) = \frac{{}_8C_2}{{}_{20}C_2} = \frac{14}{95}$$

$$P(X=1) = \frac{{}_8C_1 \times {}_{12}C_1}{{}_{20}C_2} = \frac{48}{95}$$

$$P(X=2) = \frac{{}_{12}C_2}{{}_{20}C_2} = \frac{33}{95}$$

إذن، التوزيع الاحتمالي هو:

x	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{14}{95}$	$\frac{48}{95}$	$\frac{33}{95}$

$$4) E(X) = 0 \times \frac{14}{95} + 1 \times \frac{48}{95} + 2 \times \frac{33}{95} = \frac{114}{95} = 1.2$$

$$5) \sigma^2 = 0 \times \frac{14}{95} + 1 \times \frac{48}{95} + 4 \times \frac{33}{95} - (1.2)^2 \approx 0.45$$

(6) يُمكنها أن تُشَيَّ جدول التوزيع الاحتمالي الآتي للمتغير العشوائي X :

x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

ثم تحسب التوقع الذي يُمثِّل الوسط الحسابي، وتحسب التباين الذي هو مربع الانحراف المعياري كما يأتي:

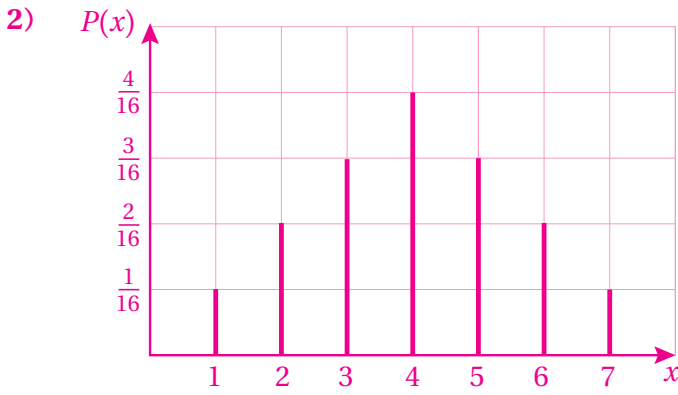
$$E(X) = 1 \times \frac{1}{12} + 2 \times \frac{2}{12} + 3 \times \frac{3}{12} + 4 \times \frac{3}{12} + 5 \times \frac{2}{12} + 6 \times \frac{1}{12}$$

$$= \frac{42}{12} = 3.5$$

$$\sigma^2 = 1 \times \frac{1}{12} + 4 \times \frac{2}{12} + 9 \times \frac{3}{12} + 16 \times \frac{3}{12} + 25 \times \frac{2}{12} + 36 \times \frac{1}{12} - (3.5)^2$$

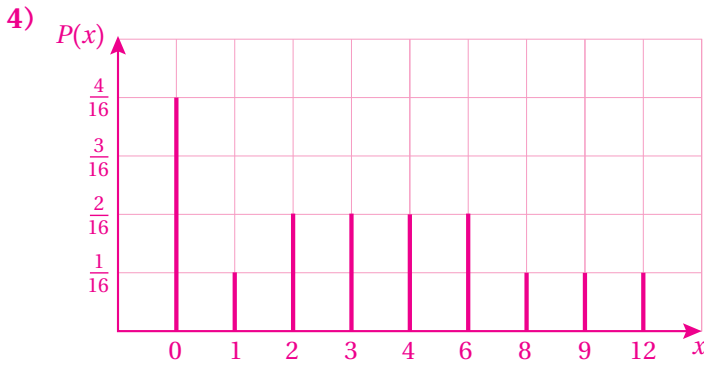
$$\approx 1.92$$

$$\sigma \approx \sqrt{1.92} \approx 1.39$$



3)

x	0	1	2	3	4	6	8	9	12
$P(X=x)$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$



10)

x	0	1	2
$P(X=x)$	0.2	0.4	0.4

12) $X = \{0, 1, 2\}$

$$P(X=0) = P(2G) = \frac{{}_5C_2}{{}_9C_2} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

$$P(X=1) = P(1G, 1R) = \frac{{}_5C_1 \times {}_4C_1}{{}_9C_2} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

$$P(X=2) = P(2R) = \frac{{}_4C_2}{{}_6C_2} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

إذن، التوزيع الاحتمالي هو:

x	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{6}$

7) $\sum P(X=x) = 1 \Rightarrow 0.1 + b + 0.2 + 0.35 = 1 \Rightarrow b = 0.35$

$$E(X) = 5.95 \Rightarrow 2 \times 0.1 + 5 \times 0.35 + a \times 0.2 + 8 \times 0.35 = 5.95$$

$$a = 6$$

$$\sigma^2 = 4 \times 0.1 + 25 \times 0.35 + 36 \times 0.2 + 64 \times 0.35 - (5.95)^2 = 3.3475$$

8) $\sum P(X=x) = 1 \Rightarrow 1 \times k + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + 4 \times k + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1$

$$5k = 0.5 \Rightarrow k = 0.1$$

$$E(X) = 1 \times 0.1 + 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{8} + 4 \times 0.4 + 5 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{8} = 3.7$$

إجابة الأسئلة في بند (اختبار نهاية الوحدة):

10)

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{5}{21}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{84}$

12) $2a + 6b = 1 \dots\dots\dots (1)$

$$E(X) = \frac{5}{12} \Rightarrow -1 \times a + 0 \times 4b + 1 \times 2b + 2 \times a = \frac{5}{12}$$

$$a + 2b = \frac{5}{12} \dots\dots\dots (2)$$

بضرب المعادلة (2) في 2، وطرحها من المعادلة (1)، أجد أن: $2b = \frac{2}{12}$

$$b = \frac{1}{12} \text{ فيتج:}$$

$$a = \frac{1}{4} \text{ وبالتعويض في المعادلة (2)، أجد أن:}$$

15) $E(X) = -2 \times a + 3 \times (1-a) = 3-5a$

$$\sigma^2 = 4 \times a + 9(1-a) - (3-5a)^2$$

$$= 9 - 5a - (9 - 30a + 25a^2)$$

$$= 25a - 25a^2 = 25a(1-a)$$

كتاب التمارين - إجابة أسئلة الدرس (3):

1)

x	1	2	3	4	5	6	7
$P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$