KhateebAcademy.co

Alpha
Education Center

الإمـــارات
THE EMIRATES

هيكل

مادة

الرياضيات

الصف الثاني عشر متقدم

الفصل الدراسي الثالث

2023/2022

اسم الطالب : .....

المدرسة : .....

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

إعداد : محمد عمر الخطيب

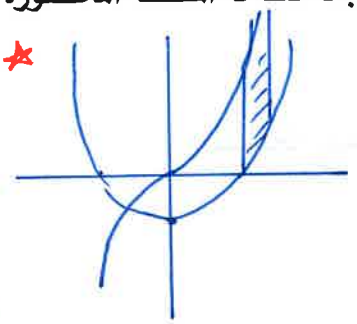
السؤال الأول (يكون من احدى هذه الاسئلة)	تمارين 1 -4
نوع السؤال : ضع دائرة (3 درجات)	صفحة 414 من الكتاب

ملاحظة : ممكن في بعض الاسئلة تكون الدوال لها تمثيل بياني وغير ذلك يفضل رسم تقريبي للدوال

(1) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y=x^2-1$ ، $y=x^3$ على الفترة $1\le x\le 3$

$$A=\int_1^3 x^3-(x^2-1)\,dx$$
$$=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+x\Big]_1^3$$
$$=\frac{46}{3}.$$

★ لا يوجد تقاطع للدالتين في الفترة

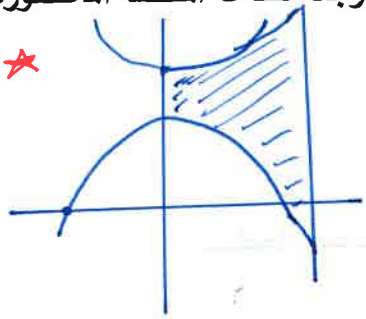


---

(2) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y=x^2+2$ ، $y=\cos x$ على الفترة $0\le x\le 2$

$$A=\int_0^2 x^2+2-\cos x\,dx$$
$$=\frac{x^3}{3}+2x-\sin x\Big]_0^2$$
$$=\frac{20}{3}-\sin 2=5.76.$$

★ لا يوجد تقاطع في الفترة

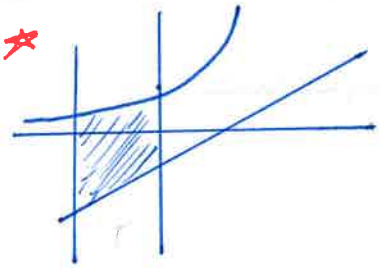


---

(3) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y=x-1$ ، $y=e^x$ على الفترة $-2\le x\le 0$

$$A=\int_{-2}^0 e^x-(x-1)\,dx$$
$$=e^x-\frac{x^2}{2}+2x\Big]_{-2}^0$$
$$=5-e^{-2}=4.86$$

★ لا يوجد تقاطع في الفترة

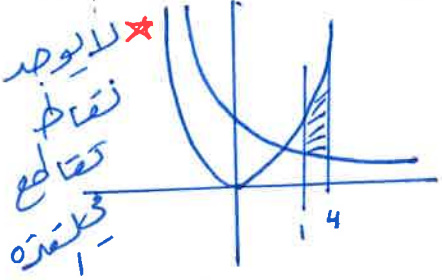


---

(4) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y=x^2$ ، $y=e^{-x}$ على الفترة $1\le x\le 4$

$$A=\int_1^4 x^2-e^{-x}\,dx$$
$$=\frac{x^3}{3}+e^{-x}\Big]_1^4$$
$$=21+e^{-4}-e^{-1}=20.65$$

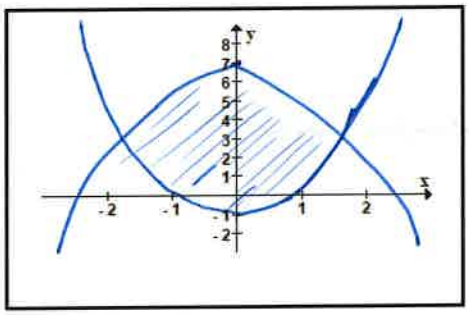
★ لا يوجد تقاطع في الفترة



السؤال الثاني (يكون من احدى هذه الاسئلة) نوع السؤال : ضع دائرة (3 درجات)	تمارين 5 -10 صفحة 414 من الكتاب

ملاحظة : ممكن في بعض الاسئلة تكون الدوال لها تمثيل بياني وغير ذلك يفضل رسم تقريبي للدوال

(5) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = 7 - x^2$ ، $y = x^2 - 1$



$$A = \int_{-2}^{2} 7 - x^2 - (x^2 - 1)\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2} 8 - 2x^2\,dx$$

$$= 8x - \frac{2x^3}{3}\Big]_{-2}^{2}$$

$$= \frac{64}{3}$$

نقاط التقاطع

$x^2 - 1 = 7 - x^2$

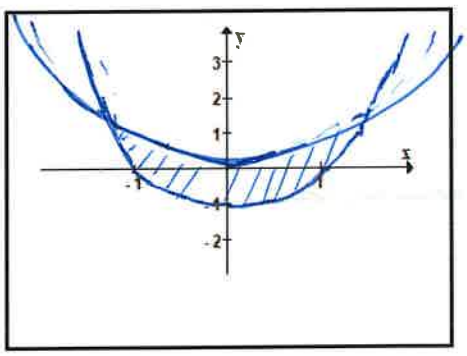
$2x^2 = 8$

$x^2 = 4$

$x = -2, 2$

---

(6) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = \frac{1}{2}x^2$ ، $y = x^2 - 1$



$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{2}x^2 - (x^2 - 1)\,dx$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 1\right) dx$$

$$= -\frac{1}{6}x^3 + x\Big]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$x^2 - 1 = \frac{1}{2}x^2$

$\frac{1}{2}x^2 = 1$

$x^2 = 2$

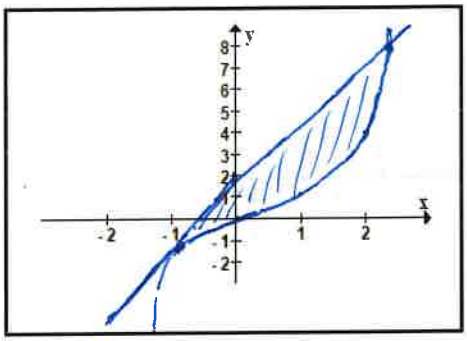
$x = \pm\sqrt{2}$

(7) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^3$ ، $y = 3x + 2$

$$A = \int_{-1}^{2} (3x + 2 - x^3)\, dx$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{x^4}{4}\Big]_{-1}^{2}$$

$$= \frac{27}{4} .$$



$$x^3 = 3x + 2$$

$$x^3 - 3x - 2 = 0$$

$$x = -1 \quad , \quad x = 2$$

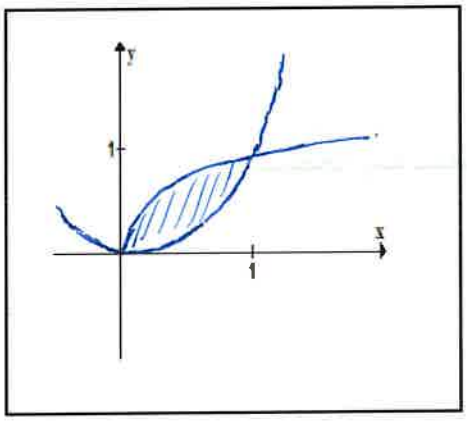
---

(8) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$

$$A = \int_{0}^{1} (\sqrt{x} - x^2)\, dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\Big]_{0}^{1}$$

$$= 1/3 .$$



$$x^2 = \sqrt{x}$$

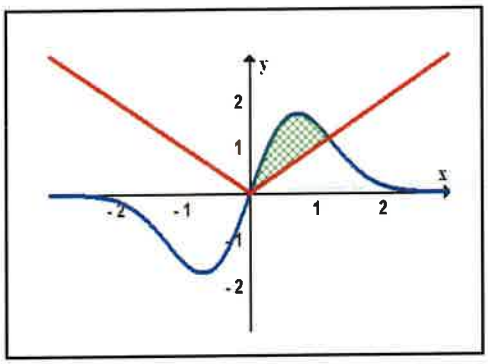
$$x^4 = x$$

$$x^4 - x = 0$$

$$x(x^3 - 1) = 0$$

$$x = 0 \quad , \quad x = 1$$

(9) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y=4xe^{-x^2}$ و $y=|x|$



$$A=\int_0^{\sqrt{\ln 4}}\left(4xe^{-x^2}-|x|\right)dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{\ln 4}}4xe^{-x^2}dx-\int_0^{\sqrt{\ln 4}}x\,dx$$

$$=-2\int_0^{\sqrt{\ln 4}}-2xe^{-x^2}dx-\int_0^{\sqrt{\ln 4}}x\,dx$$

$$=-2e^{-x^2}-\frac{x^2}{2}\Big]_0^{\sqrt{\ln 4}}$$

$$=\frac{3-\ln 4}{2}$$

$4xe^{-x^2}=x \quad , x\geq 0$

$4xe^{-x^2}-x=0$

$x\left(4e^{-x^2}-1\right)=0$

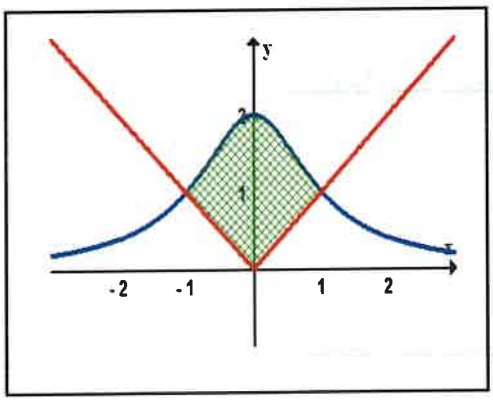
$x=0 \quad , \quad 4e^{-x^2}=1$

$e^{-x^2}=\frac{1}{4}$ | $x^2=\ln 4$

$-x^2=\ln\frac{1}{4}$ | $x=\pm\sqrt{\ln 4}$

---

(10) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y=\frac{2}{x^2+1}$ و $y=|x|$



$$A=\int_{-1}^{1}\left(\frac{2}{x^2+1}-|x|\right)dx$$

من التقاطل ←

$$=2\int_0^1\left(\frac{2}{x^2+1}-x\right)dx$$

$$=2\left[2\tan^{-1}x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$=\pi-1$$

نقاط التقاطع .

$x\geq 0 \Rightarrow |x|=x$

$\frac{2}{x^2+1}=|x|=x$

$2=x^3+x$

$x^3+x-2=0$

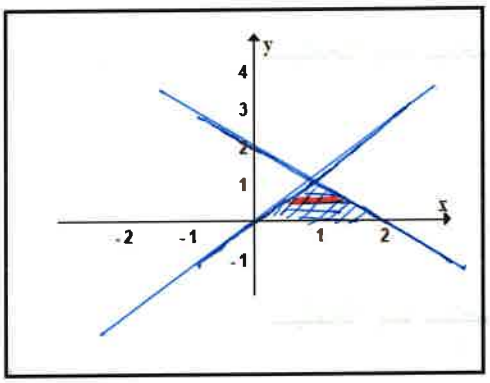
$x=1$

السؤال الثالث (يكون من احدى هذه الاسئلة)	تمارين 19 -25
نوع السؤال : ضع دائرة (5 درجات)	صفحة 414 من الكتاب

ملاحظة : ممكن في بعض الاسئلة تكون الدوال لها تمثيل بياني وغير ذلك يفضل رسم تقريبي للدوال

(19) اكتب تكامل منفرد (تكامل واحد) يعبر عن المساحة المحصورة بين الدوال

$y=x$ ، $y=2-x$ $y=0$ ثم اوجد المساحة



بما انه يوجد مع التكامل dx تجزئة مساحة (ليس تكامل منفرد) لذلك نأخذ التكامل dy .

$$A=\int_0^1 (2-y-y)\,dy$$

$$=\int_0^1 (2-2y)\,dy$$

$$=2y-y^2\Big]_0^1=1$$

$2-y=y$

$2=2y$

$y=1$.

---

(20) اكتب تكامل منفرد يعبر عن المساحة المحصورة بين الدوال

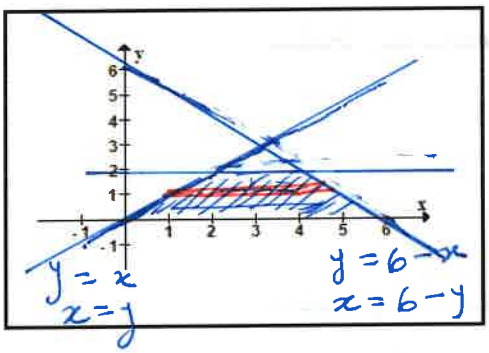
$y=x$ و $y=6-x$ و $y=2$ و $y=0$

$$A=\int_0^2 (6-y-y)\,dy$$

$$=\int_0^2 (6-2y)\,dy$$

$$=6y-y^2\Big]_0^2$$

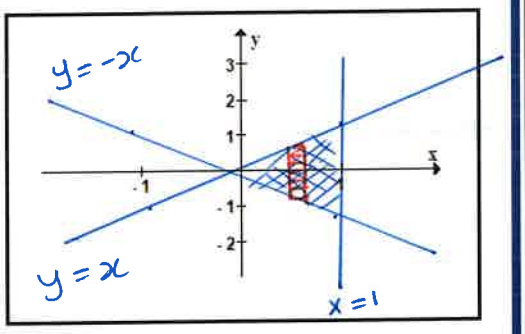
$$=8$$.



التكامل dy لان مع dx يوجد تجزئة مساحة .

(21) اكتب تكامل منفرد يعبر عن المساحة المحصورة بين المنحنيات $x=1$ ، $x=y$ ، $x=-y$

ثم اوجد المساحة



$$A=\int_0^1 x-(-x)\,dx$$

$$=\int_0^1 2x\,dx$$

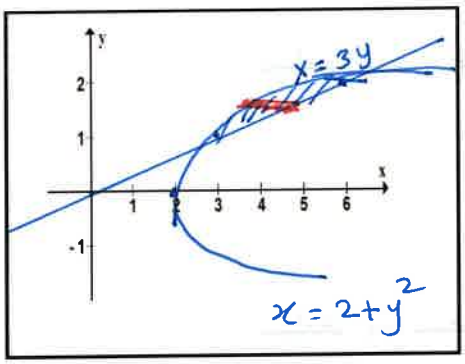
$$=1$$

---

(22) اكتب تكامل منفرد يعبر عن المساحة المحصورة بين المنحنيات $x=3y$ ، $x=2+y^2$

ثم اوجد المساحة

الافضل المكامل dy لان الدوال بدلالة y



$$A=\int_1^2 3y-(2+y^2)\,dy$$

$$=\frac{3y^2}{2}-2y-\frac{y^3}{3}\Big]_1^2$$

$$=1/6$$

$2+y^2=3y$

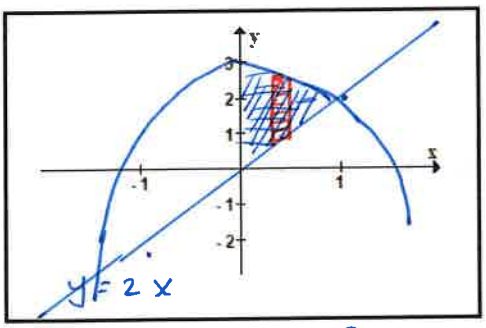
$y^2-3y+2=0$

$y=1$ ، $y=2$

---

(23) اكتب تكامل منفرد يعبر عن المساحة المحصورة بين الدوال

ثم أوجد المساحة $x=0$ ، $y=3-x^2$ ، $y=2x, x>0$



$$A=\int_0^1 (3-x^2-2x)\,dx$$

$$=3x-\frac{x^3}{3}-x^2\Big]_0^1$$

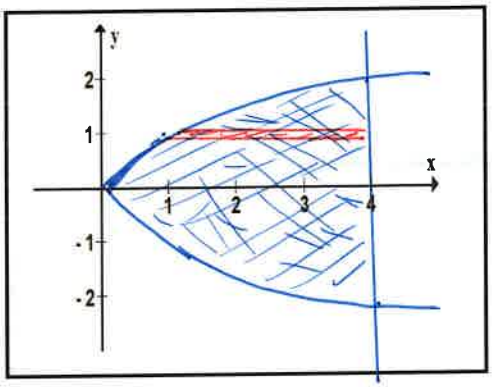
$$=5/3$$

$2x=3-x^2$

$x^2+2x-3=0$

$x=1$ ، $x=-3$ (مرفوض)

(24) اكتب تكامل منفرد يعبر عن المساحة المحصورة بين الدوال $x = y^2$ ، $x = 4$ ثم أوجد المساحة



التكامل dy افضل

$$A = \int_{-2}^{2} (4 - y^2)\, dy$$

$$= 4y - \frac{y^3}{3} \Big]_{-2}^{2}$$

$$= \frac{32}{3}$$

$y^2 = 4$

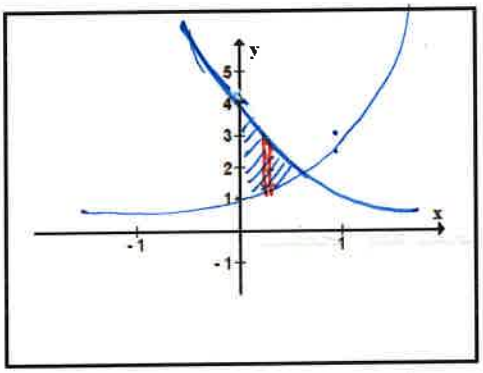
$y = \pm 2$.

او

$$* \quad A = \int_{0}^{4} \sqrt{x} - (-\sqrt{x})\, dx$$

---

(25) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = e^x$ و $y = 4e^{-x}$ و $x = 0$



$$A = \int_{0}^{\ln 2} (4e^{-x} - e^{x})\, dx$$

$$= -4e^{-x} - e^{x} \Big]_{0}^{\ln 2}$$

$$= 1$$

$e^x = 4e^{-x}$

$\frac{e^x}{e^{-x}} = 4$

$e^{2x} = 4$

$\ln e^{2x} = \ln 4$

$2x = \ln 4$

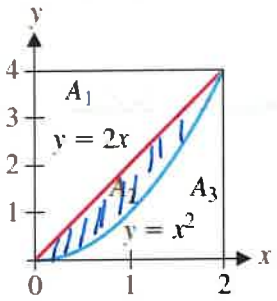
$x = \frac{\ln 4}{2}$

$x = \ln 2$.

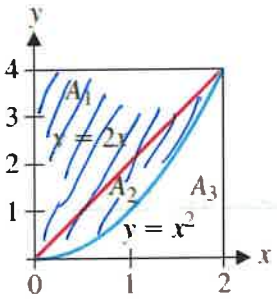
السؤال الرابع (يكون من احدى هذه الاسئلة) نوع السؤال : ضع دائرة (5 درجات)	تمارين 39 -40 صفحة 416 من الكتاب

اعتمد على الشكل المجاور للتعبير عن كل من التكاملات التالية

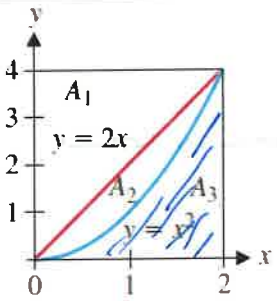
بدلالة A_3, A_2, A_1 في كل مما يلي:



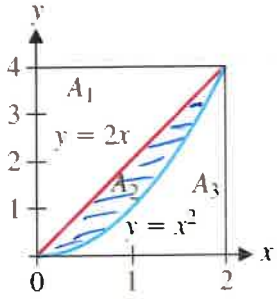
(39a) $\int_0^2 (2x - x^2)\,dx$ = A_2



(39b) $\int_0^2 (4 - x^2)\,dx$ = $A_1 + A_2$



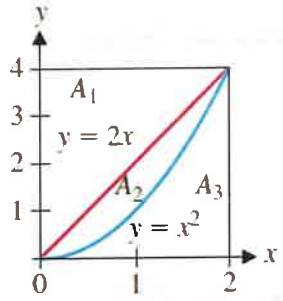
(39c) $\int_0^4 (2 - \sqrt{y})\,dy$ = A_3



(39d) $\int_0^4 (\sqrt{y} - \frac{y}{2})\,dy$ = A_2

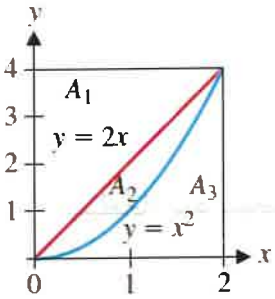
اعتمد على الشكل المجاور للتعبير عن كل مساحة بدلالة التكامل الذي يناسبه في كل مما يلي

ملاحظة: اكتب كل تكامل مرة بدلالة x ومرة بدلالة y



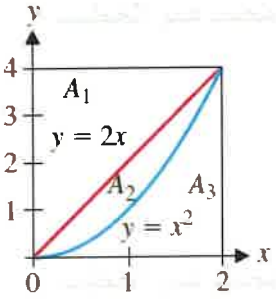
(40a) $A_2 + A_3 = \int_0^2 2x \, dx$

$= \int_0^4 \left(2 - \frac{y}{2}\right) dy$.



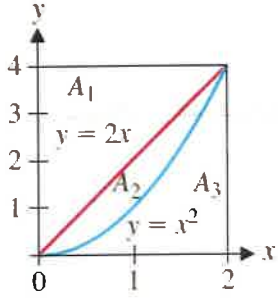
(40b) $A_1 + A_2 = \int_0^2 (4 - x^2) \, dx$

$= \int_0^4 \sqrt{y} \, dy$



(40c) $A_1 = \int_0^2 (4 - 2x) \, dx$

$= \int_0^4 \frac{y}{2} \, dy$



(40d) $A_3 = \int_0^2 x^2 \, dx$

$= \int_0^4 \left(2 - \sqrt{y}\right) dy$.

السؤال الخامس (يكون من احدى هذه الاسئلة) نوع السؤال : ضع دائرة (3 درجات)	تمارين 1 -4 صفحة 429 من الكتاب

(1) اوجد حجم المجسم الذي مقطعة العرضي $A(x)=x+2$ حيث $-1\le x\le 3$

$$V=\int_{-1}^{3} A(x)\,dx$$

$$=\int_{-1}^{3}(x+2)\,dx \quad = \quad \frac{x^2}{2}+2x\Big]_{-1}^{3} = 12$$

---

(2) اوجد حجم المجسم الذي مقطعة العرضي $A(x)=10e^{0.01x}$ حيث $0\le x\le 10$

$$V=\int_{0}^{10} 10\ e^{0.01x}\,dx$$

$$= 10\ \frac{e^{0.01x}}{0.01}\Big]_{0}^{10} = 1000\left(e^{0.1}-1\right).$$

---

(3) اوجد حجم المجسم الذي مقطعة العرضي $A(x)=\pi(4-x)^2$ حيث $0\le x\le 2$

$$V=\int_{0}^{2} \pi\left(4-x\right)^2\,dx$$

$$= \pi\ \frac{(4-x)^3}{3(-1)}\Big]_{0}^{2} = \frac{56\ \pi}{3}$$

---

(4) اوجد حجم المجسم الذي مقطعة العرضي $A(x)=2(x+1)^2$ حيث $1\le x\le 4$

$$V=\int_{1}^{4} 2\left(x+1\right)^2\,dx$$

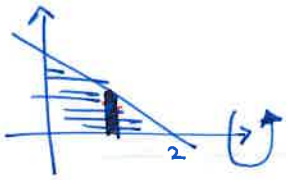
$$= \frac{2(x+1)^2}{3(1)}\Big]_{1}^{4} = 78 .$$

السؤال السادس (يكون من احدى هذه الاسئلة)	تمارين 17 -20
نوع السؤال : كتابي (6 درجات)	صفحة 429 من الكتاب

(17) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالمستقيمات

$$x=0 \ ، \ y=0 \ ، \ y=2-x$$

(أ) حول المحور x



اقراص dx

$r_o = 2-x$

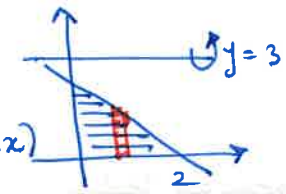
$r_i = 0$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^2 (2-x)^2 \, dx$$

$$= \frac{8\pi}{3}$$

(ب) حول المستقيم $y=3$



dx حلقات

$r_o = 3-0$

$r_i = 3-(2-x)$

$= 1+x$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^2 3^2 - (1+x)^2 \, dx$$

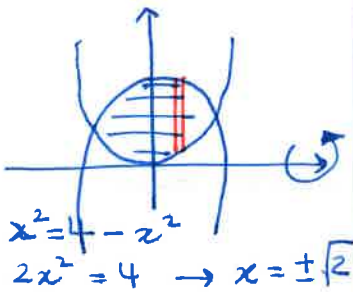
$$= \frac{28\pi}{3}$$

---

(18) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالمنحنيات

$$y=x^2 \ ، \ y=4-x^2$$

(أ) حول المحور x



dx حلقات

$r_o = 4-x^2$

$r_i = x^2$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$$

$$= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4-x^2)^2 - (x^2)^2 \, dx$$

$$= \frac{64\sqrt{2}}{3}\pi$$

(ب) حول المستقيم $y=4$

dx حلقات

$r_o = 4-x^2$

$r_i = x^2$

$$V = \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4-x^2)^2 - (x^2)^2 \, dx$$

$$= \frac{64\sqrt{2}}{3}\pi$$

(19) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالدوال $x=0$ ، $y=2$ ، $y=\sqrt{x}$

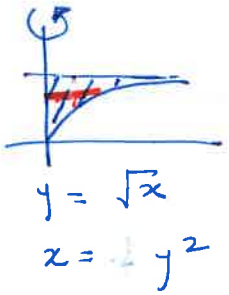
(أ) حول المحور y

$$V=\pi\int r_o^2-r_i^2\ dy$$
$$=\pi\int_0^2 (y^2)^2\ dy$$
$$=\frac{32\pi}{5}$$

dy اقراص

$r_o=y^2$

$r_i=0$



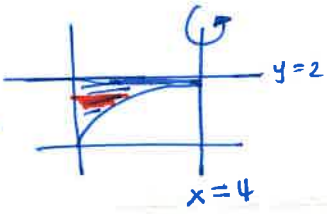
(ب) حول المستقيم $x=4$

$$V=\pi\int r_o^2-r_i^2\ dy$$
$$=\pi\int_0^2 4^2-(4-y^2)\ dy$$
$$=\frac{224}{15}\pi$$

dy حلقات

$r_o=4-0$

$r_i=4-y^2$



---

(20) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالمنحنى $x=y^2$ ، $y=x^2$

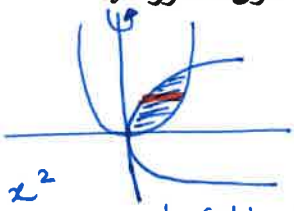
(أ) حول المحور y

$$V=\pi\int r_o^2-r_i^2\ dy$$
$$=\pi\int_0^1 (\sqrt{y})^2-(y^2)^2\ dy$$
$$=\frac{3\pi}{10}$$

dy حلقات

$r_o=\sqrt{y}-0$

$r_i=y^2-0$



نعادل للتقاطع

$y=(y^2)^2$

$y=y^4 \rightarrow y=0, y=1$

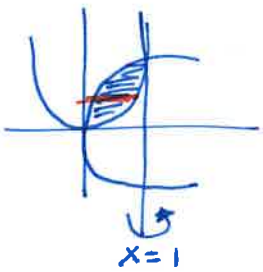
(ب) حول المستقيم $x=1$

$$V=\pi\int r_o^2-r_i^2\ dy$$
$$=\pi\int_0^1 (1-y^2)^2-(1-\sqrt{y})^2\ dy$$
$$=\frac{11\pi}{30}$$

dy حلقات

$r_o=1-y^2$

$r_i=1-\sqrt{y}$



السؤال السابع (يكون من احدى هذه الاسئلة) نوع السؤال : ضع دائرة (3 درجات)	تمارين 15 -22 صفحة 446 من الكتاب

(15) اكتب التكامل الذي يمثل طول منحنى الدالة $y = x^3$ حيث $-1 \le x \le 1$

ثم اوجد قيمة التكامل بطريقة عددية (بالآلة الحاسبة)

$$S = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+(y')^2}\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{1+9x^4}\, dx$$

$$= 3.1$$

$$y' = 3x^2$$

$$(y')^2 = 9x^4$$

---

(16) اكتب التكامل الذي يمثل طول منحنى الدالة $y = x^3$ حيث $-2 \le x \le 2$

ثم اوجد قيمة التكامل بطريقة عددية (بالآلة الحاسبة)

$$S = \int_{-2}^{2} \sqrt{1+(y')^2}\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \sqrt{1+9x^4}\, dx$$

$$= 17.3$$

$$y' = 3x^2$$

$$(y')^2 = 9x^4$$

---

(17) اكتب التكامل الذي يمثل طول منحنى الدالة $y = 2x - x^2$ حيث $0 \le x \le 2$

ثم اوجد قيمة التكامل بطريقة عددية (بالآلة الحاسبة)

$$S = \int_{0}^{2} \sqrt{1+(y')^2}\, dx$$

$$= \int_{0}^{2} \sqrt{1+(2-2x)^2}\, dx$$

$$\simeq 2.96 .$$

$$y' = 2 - 2x$$

$$(y')^2 = (2-2x)^2$$

(18) اكتب التكامل الذي يمثل طول منحنى الدالة $y = \tan x$ حيث $0 \le x \le \pi/4$

ثم اوجد قيمة التكامل بطريقة عددية (بالآلة الحاسبة)

$$S = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

$$y' = \sec^2 x$$

$$(y')^2 = \sec^4 x$$

$$= \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \sec^4 x}\, dx$$

$$\simeq 1.28$$

---

(19) اكتب التكامل الذي يمثل طول منحنى الدالة $y = \cos x$ حيث $0 \le x \le \pi$

ثم اوجد قيمة التكامل بطريقة عددية (بالآلة الحاسبة)

$$S = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \sin^2 x}\, dx$$

$$y' = -\sin x$$

$$(y')^2 = \sin^2 x$$

$$\simeq 3.82$$

---

(20) اكتب التكامل الذي يمثل طول منحنى الدالة $y = \ln x$ حيث $1 \le x \le 3$

ثم اوجد قيمة التكامل بطريقة عددية (بالآلة الحاسبة)

$$S = \int_1^3 \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

$$y' = \frac{1}{x}$$

$$(y')^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

$$= \int_1^3 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{x^2}$$

$$\simeq 2.3$$

(21) اكتب التكامل الذي يمثل طول منحنى الدالة $y=\int_0^x u\ sinu\ du$ حيث $0\le x\le \pi$

ثم اوجد قيمة التكامل بطريقة عددية (بالآلة الحاسبة)

$$S=\int_0^{\pi}\sqrt{1+(y')^2}\ dx \qquad y'=x\sin x$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{1+(x\sin x)^2}\ dx \qquad (y')^2=(x\sin x)^2$$

$$\simeq 4.7$$

---

(22) اكتب التكامل الذي يمثل طول منحنى الدالة $y=\int_0^x e^{-u}\ sinu\ du$ حيث $0\le x\le \pi$

ثم اوجد قيمة التكامل بطريقة عددية (بالآلة الحاسبة)

$$S=\int_0^{\pi}\sqrt{1+(y')^2}\ dx \qquad y'=e^{-x}\sin x$$

$$=\int_0^{\pi}\sqrt{1+(e^{-x}\sin x)^2}\ dx \qquad (y')^2=(e^{-x}\sin x)^2$$

$$\simeq 3.2$$

السؤال الثامن (يكون من احدى هذه الاسئلة)	تمارين 29 -36
نوع السؤال : ضع دائرة (5 درجات)	صفحة 447 من الكتاب

(29) اكتب التكامل الذي يمثل مساحة السطح المتولد عن دوران الدالة $y = x^2$ حول المحور x حيث $0 \le x \le 1$ ثم اوجد قيمة التكامل بطريقة عددية (بالآلة الحاسبة)

$$S = 2\pi \int y \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x^2 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$$

$$\simeq 3.8$$

$y = x^2$

$y' = 2x$

$(y')^2 = 4x^2$

---

(30) اكتب التكامل الذي يمثل مساحة السطح المتولد عن دوران الدالة $y = \sin x$ حول المحور x حيث $0 \le x \le \pi$ ثم اوجد قيمة التكامل بطريقة عددية(بالآلة الحاسبة)

$$S = 2\pi \int_0^{\pi} y \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx$$

$$\simeq 3.82$$

$y = \sin x$

$y' = \cos x$

$y' = \cos^2 x$

(31) اكتب التكامل الذي يمثل مساحة السطح المتولد عن دوران الدالة $y = 2x - x^2$ حول المحور x حيث $0 \le x \le 2$ ثم اوجد قيمة التكامل بطريقة عددية

$$S = 2\pi \int_0^2 y \sqrt{1 + (y')^2}\ dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 (2x - x^2) \sqrt{1 + (2-2x)^2}\ dx$$

$$\simeq 10.97$$

$y = 2x - x^2$

$y' = 2 - 2x$

$(y')^2 = (2-2x)^2$

---

(32) اكتب التكامل الذي يمثل مساحة السطح المتولد عن دوران الدالة $y = x^3 - 4x$ حول المحور x حيث $-2 \le x \le 0$ ثم اوجد قيمة التكامل بطريقة عددية

$$S = 2\pi \int_{-2}^0 y \sqrt{1 + (y')^2}\ dx$$

$$= 2\pi \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) \sqrt{1 + (3x^2-4)^2}\ dx$$

$$\simeq 67.1$$

$y = x^3 - 4x$

$y' = 3x^2 - 4$

$(y')^2 = (3x^2-4)^2$

---

(33) اكتب التكامل الذي يمثل مساحة السطح المتولد عن دوران الدالة $y = e^x$ حول المحور x حيث $0 \le x \le 1$ ثم اوجد قيمة التكامل بطريقة عددية

$$S = 2\pi \int_0^1 y \sqrt{1 + (y')^2}\ dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 e^x \sqrt{1 + (e^x)^2}\ dx$$

$$= 22.94 .$$

$y = e^x$

$y' = e^x$

$(y')^2 = (e^x)^2$

(34) اكتب التكامل الذي يمثل مساحة السطح المتولد عن دوران الدالة $y = lnx$ حول المحور x حيث $1 \le x \le 2$ ثم اوجد قيمة التكامل بطريقة عددية

$$S = 2\pi \int_1^2 y \sqrt{1+(y')^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_1^2 Ln\, x \sqrt{1+(\tfrac{1}{x})^2}\, dx$$

$$= 2.87$$

$y = Ln\, x$

$y' = \frac{1}{x}$

$(y')^2 = (\frac{1}{x})^2$

---

(35) اكتب التكامل الذي يمثل مساحة السطح المتولد عن دوران الدالة $y = cosx$ حول المحور x حيث $0 \le x \le \pi/2$ ثم اوجد قيمة التكامل بطريقة عددية

$$S = 2\pi \int_0^{\pi/2} y \sqrt{1+(y')^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} Cos\, x . \sqrt{1+Sin^2 x}\, dx$$

$$\simeq 7.21$$

$y = Cos\, x$

$y' = -Sin\, x$

$(y')^2 = Sin^2 x$

---

(36) اكتب التكامل الذي يمثل مساحة السطح المتولد عن دوران الدالة $y = \sqrt{x}$ حول المحور x حيث $1 \le x \le 2$ ثم اوجد قيمة التكامل بطريقة عددية

$$S = 2\pi \int_1^2 y \sqrt{1+(y')^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_1^2 \sqrt{x} \sqrt{1+\frac{1}{4x}}\, dx$$

$$\simeq 8.28$$

$y = \sqrt{x}$

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(y')^2 = \frac{1}{4x}$

السؤال التاسع (يكون من احدى هذه الاسئلة) نوع السؤال : ضع دائرة (5 درجات)	تمارين 1 -4 صفحة 455 من الكتاب

(1) اكتب الشروط الإبتدائية $y(0)$ و $y'(0)$ عند سقوط جسم من ارتفاع $80\,ft$

$y(0) = 80$ ، $y'(0) = 0$

بدون سرعة

---

(2) اكتب الشروط الإبتدائية $y(0)$ و $y'(0)$ عند سقوط جسم من ارتفاع $100\,ft$

$y(0) = 100$ ، $y'(0) = 0$

بدون سرعة

---

(3) اكتب الشروط الإبتدائية $y(0)$ و $y'(0)$ عند اطلاق جسم من ارتفاع $60\,ft$ للأعلى (صعوداً) بسرعة متجهة $10\,ft/s$

$y(0) = 60$ ، $y'(0) = 60$

---

(4) اكتب الشروط الإبتدائية $y(0)$ و $y'(0)$ عند اطلاق جسم من ارتفاع $20\,ft$ نزولاً (للاسفل) بسرعة متجهة $4\,ft/s$

$y(0) = 20$ ، $y'(0) = -40$

السالب مهم

السؤال العاشر (يكون من احدى هذه الاسئلة)	تمارين 25 -32
نوع السؤال : ضع دائرة (5 درجات)	صفحة 481 من الكتاب

(25) يقفز غواص من ارتفاع $64\,ft$ اوجد سرعة المتجهة لحظة الاصطدام بالماء

$h''(t) = -32$, $h'(0) = 0$, $h(0) = 64$

$h(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + h_0$

$= -16 t^2 + 64$

$h'(t) = -gt + v_0$

$= -32t$

$h'(2) = -64 \quad ft/s$

زمن الرحلة

$h(t) = 0$

$-16t^2 + 64 = 0$

$t = 2$

(26) يقفز غواص من ارتفاع $64\,ft$ وبسرعة متجهة $4\,ft/s$ اوجد سرعة المتجهة لحظة الاصطدام بالماء

$h''(t) = -32$, $h'(0) = -4$, $h(0) = 64$

$h(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + h_0$

$= -16 t^2 - 4t + 64$

(زمن الاصطدام) زمن الرحلة

$h(t) = 0$

$-16t^2 - 4t + 64 = 0$

$t = \frac{1 + \sqrt{257}}{8}$

$h'(t) = -gt + v_0$

$= -32 - 4$

$h'\left(\frac{1+\sqrt{257}}{8}\right) = -64.125$

(27) يتم اطلاق جسم من الارض بزاوية 20° و بسرعة ابتدائية $48\ ft/s$

اوجد زمن التحليق والمدى الأفقي لجسم

$y''(t) = -32$, $y'(0) = v_0 \sin 20^\circ$ $y(0) = 0$

$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\theta\ t + y_0$

$= -16t^2 + 48 \sin 20^\circ\ t + 0$

$= -16t^2 + 16.42\ t$

زمن التحليق

$y(t) = 0$

$-16t^2 + 16.42\ t = 0$

$t = 1.026$

$x''(0) = 0$, $x'(0) = v_0 \cos\theta$

$x(0) = 0$

$x(t) = v_0 \cos\theta\ t + x_0$

$= 48 \cos 20^\circ\ t + 0$

$= 45.11\ t$

المدى الافقي

$x(1.026) = 45.11(1.026) = 46.3$

---

(28) يتم اطلاق جسم من ارتفاع $6\ ft$ بزاوية 20° و بسرعة ابتدائية $48\ ft/s$

اوجد زمن التحليق والمدى الأفقي لجسم

$y''(t) = -32$, $y'(0) = v_0 \sin 20$, $y(0) = 6$

$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin 20^\circ\ t + y_0$

$= -16t^2 + 48 \sin 20^\circ\ t + 6$

زمن التحليق

$-16t^2 + 48 \sin 20^\circ\ t + 6 = 0$

$t = 1.31$

$x''(t) = 0$, $x'(0) = v_0 \cos\theta$, $x(0) = 0$

$x(t) = v_0 \cos\theta\ t + x_0$

$= 48 \cos 20^\circ\ t$

المدى الافقي

$x(1.31) = 48 \cos 20^\circ (1.31)$

$= 59.1$

(29) يتم اطلاق كرة قدم من ارتفاع $6ft$ و بسرعة ابتدائية $80\ f/s$ وبزاوية 8° يقف شخص اخر الملعب ويبعد $40yd$ في اتجاه الرمي ،هل سيلتقط هذا الشخص الكرة

ملاحظة

$1yd = 3ft$

$y''(t) = -32$, $y'(0) = 80\sin 8^\circ$, $y(0) = 6$

$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin 8^\circ\, t + y_0$

$= -16t^2 + 80\sin 8^\circ\, t + 6$.

$x''(t) = 0$, $x'(0) = 80\cos 8^\circ$, $x(0) = 0$

$x(t) = v_0 \cos 8^\circ\, t + x_0$

$= 80\cos 8^\circ\, t$.

$y(t) = 0 \Rightarrow t = 1.052$

$x(1.052) = 83.35$

يصل الجسم الارض قبل 120 قدم

او

$x(t) = 80\cos 8^\circ\, t = 120$

$t = 1.51$

$y(1.51) = -13.67$

اي ان الجسم يصل الارض قبل وصول اللاعب على بعد 120 قدم .

---

(31) اوجد السرعة الأبتدائية لجسم اطلق من الارض و وصل الى اقصى ارتفاع $128ft$ ثم اوجد السرعة المتجهة للجسم عندما يعود ويصطدم بالارض

$h''(t) = -32$, $h'(0) = v_0 = ??$ $h(0) = 0$

$h'(t) = -gt + v_0$

$= -32t + v_0$

زمن اقصى ارتفاع .

$h'(t) = 0$

$-32t + v_0 = 0$

$t = \frac{v_0}{32}$.

$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0$

$= -16t^2 + v_0 t$.

$h\left(\frac{v_0}{32}\right) = 128$

$-16\left(\frac{v_0}{32}\right)^2 + v_0 \cdot \frac{v_0}{32} = 128$

$-16\frac{v_0^2}{32^2} + \frac{v_0^2}{32} = 128$

$\frac{-16v_0^2 + 32v_0^2}{32^2} = 128$

$16v_0^2 = 128 \times 32^2$

$v_0 = \sqrt{\frac{128 \times 32^2}{16}}$

$= 90.5\ ft/s$

(32) تقوم طائرة على ارتفاع $120\,ft$ ، باسقاط إمدادات إلى موقع معين على الأرض، إذا كانت للطائرة سرعة متجهة أفقية $100\,ft/s$ ، فما المسافة التي يجب أن يبعدها مكان اطلاق الإمدادات من الموقع المستهدف.

$v_0 = 100$, $\theta = 0$ أفقية

$y''(t) = -32$, $y'(0) = v_0 \sin\theta = 0$, $y(0) = 120$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\theta\, t + y_0$$
$$= -16t^2 + 120$$

زمن الرحلة

$y(t) = 0$

$$t = \sqrt{\frac{15}{2}} = 2.738$$

$x''(t) = 0$, $x'(0) = v_0 \cos\theta$, $x(0) = 0$

$$x(t) = v_0 \cos\theta\, t + x_0$$
$$= 100t$$

المدى الأفقي

$$x\left(\sqrt{\frac{15}{2}}\right) = 100\sqrt{\frac{15}{2}}$$
$$= 273.86\ ft$$

أو

$x = 100t \Rightarrow t = \frac{1}{100}x$

$y = -16t^2 + 120$

$= -16\left(\frac{1}{100}x\right)^2 + 120$

$= -\frac{16}{100^2}x^2 + 120$

عندما $y = 0$

$$-\frac{16x^2}{100} + 120 = 0$$
$$\Rightarrow x = 273$$

السؤال 11 (يكون من احدى هذه الاسئلة) نوع السؤال : ضع دائرة (3 درجات)	تمارين 1 -10 صفحة 489 من الكتاب
السؤال 12 (يكون من احدى هذه الاسئلة) نوع السؤال : ضع دائرة (3 درجات)	السؤال 13 (يكون من احدى هذه الاسئلة) نوع السؤال : ضع دائرة (5 درجات)

اوجد كل من التكاملات التالية

(1) $\int e^{ax}\,dx \quad a \neq 0 = \frac{e^{ax}}{a} + c = \frac{1}{a} e^{ax} + c .$

(2) $\int \cos(ax)\,dx \quad a \neq 0 = \frac{1}{a} \sin(ax) + c .$

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx \quad a > 0$

$= \int \frac{1}{a\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}\,dx$

$= \frac{1}{a} \int \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}}\,dx$

$= \frac{1}{a} \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} a \cdot du$

$= \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$

$= \sin^{-1} u + c$

$= \sin^{-1}(\frac{x}{a}) + c .$

$u = \frac{x}{a} = \frac{1}{a} x.$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{a}$

$a\,du = dx$

ملاحظة: هذه صيغة تكامل (الافضل حفظها)

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \sin^{-1}(\frac{x}{a}) + c$$

ملاحظة: هذه صيغة تكامل (الافضل حفظها)

$$\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}sec^{-1}(\frac{x}{a})+c$$

(4) $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-a^2}}\,dx \qquad a>0$

$= \int \frac{1}{|x|\, a\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}}\,dx$

$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{|x|\sqrt{(\frac{x}{a})^2-1}}\,dx$

$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{|x|\sqrt{u^2-1}}\,a\,du$

$= \int \frac{1}{|au|\sqrt{u^2-1}}\,du$

$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\,du$

$= \frac{1}{a}\,Sec^{-1}(u)+c = \frac{1}{a}\,Sec^{-1}(\frac{x}{a})+c.$

$u = \frac{x}{a} = \frac{1}{a}x.$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{a}$

$a\,du = dx$

$x = au.$

---

(5) $\int \sin 6t\ dt = -\frac{\cos 6t}{6}+c = -\frac{1}{6}(\cos 6t)+c.$

---

(6) $\int \sec 2t\ \tan 2t\ dt = \frac{\sec 2t}{2}+c. = \frac{1}{2}\sec 2t+c$

---

(7) $\int (x^2+4)^2\ dx$

$= \int x^4+8x^2+16\ dx$

$= \frac{1}{5}x^5+\frac{8}{3}x^3+16x+c.$

(8) $\int x(x^2+4)^2\ dx$

$u = x^2+4$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$= \int x\ u^2\ \frac{du}{2x}$

$= \frac{1}{2}\int u^2\ du$

$= \frac{1}{6}\ u^3 + c \quad = \frac{1}{6}\left(x^2+4\right)^3 + c$.

---

(9) $\int \frac{3}{16+x^2}\ dx$

ملاحظة: هذه صيغة تكامل (الافضل حفظها)

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\ dx = \frac{1}{a}tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$$

$= \int \frac{3}{16\left(1+\frac{x^2}{16}\right)}\ dx$

$= \frac{3}{16}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{4}\right)^2}\ dx$

$u = \frac{x}{4}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{4}$

$4du = dx$

$= \frac{3}{16}\int \frac{1}{1+u^2}\cdot 4\ du$

$= \frac{3}{4}\int \frac{1}{1+u^2}\ du$

$= \frac{3}{4}\ \tan^{-1} u \quad + c$

$= \frac{3}{4}\ \tan^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) + c$.

---

(10) $\int \frac{2}{4+4x^2}\ dx$

$= \frac{2}{4}\int \frac{1}{1+x^2}\ dx$

$= \frac{1}{2}\ \tan^{-1} x \quad + c$.

السؤال 14 (يكون من احدى هذه الاسئلة)

نوع السؤال : ضع دائرة (3 درجات)

تمارين 37 -38

صفحة 489 من الكتاب

اوجد قيمة كل من التكاملات التالية

(37) $\int_3^4 x\sqrt{x-3}\ dx$

$= \int x\ u^{1/2}\ du$

$= \int_0^1 (u+3)\ u^{1/2}\ du$

$= \int_0^1 u^{3/2} + 3u^{1/2}\ du$

$= \frac{2}{5}u^{5/2} + 3\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\Big]_0^1$

$= \frac{12}{5}$.

$u = x-3$

$\frac{du}{dx} = 1$

$du = dx$

$x = u+3$

$x=3 \rightarrow u=0$

$x=4 \rightarrow u=1$.

(38) $\int_0^1 x(x-3)^2\ dx$

$= \int_0^1 x(x^2-6x+9)\ dx$

$= \int_0^1 x^3 - 6x^2 + 9x\ dx$

$= \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2\Big]_0^1$

$= \frac{11}{4}$

يمكن حل السؤال بالتعويض $u = x-3$.

السؤال 15 (يكون من احدى هذه الاسئلة)	تمارين 13 -26
نوع السؤال : ضع دائرة (5 درجات)	صفحة 496 من الكتاب

اوجد كل من التكاملات التالية

(13) $\int x \sec^2 x \, dx$

$= x \tan x + \text{Ln}\,|\cos x| + c .$

x	$\sec^2 x$	
1	$\tan x = \frac{-\sin x}{\cos x}$	$(+)$
0	$-\text{Ln}\,\lvert\cos x\rvert$	$(-)$

---

(14) $\int (\ln x)^2 \, dx$

$= \int u^2 \, x \, du$

$= \int u^2 e^u \, du$

$= u^2 e^u - 2u e^u + 2e^u + c .$

$= (\text{Ln}\,x)^2 x - 2\,\text{Ln}\,x \cdot x + 2x + c$

$= x(\text{Ln}\,x)^2 - 2x\,\text{Ln}\,x + 2x + c$

$u = \text{Ln}\,x$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$x\,du = dx$

$\therefore x = e^u .$

u^2	e^u	$(+)$
$2u$	e^u	$(-)$
2	e^u	$(+)$
0	e^u	

---

(15) $\int x^3 e^{x^2} \, dx$

$= \int x^3 e^u \cdot \frac{du}{2x}$

$= \frac{1}{2} \int x^2 e^u \, du$

$= \frac{1}{2} \int u e^u \, du$

$= \frac{1}{2}(ue^u - e^u) + c = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + c .$

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$\therefore x^2 = u .$

(16) $\int \frac{x^3}{(4+x^2)^{3/2}}\ dx$

$u = 4 + x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$x^2 = u - 4$

$= \int \frac{x^3}{u^{3/2}} \frac{du}{2x}$

$= \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{u^{3/2}}\ du$

$= \frac{1}{2} \int \frac{u-4}{u^{3/2}}\ du$.

$= \frac{1}{2} \int \frac{u}{u^{3/2}} - \frac{4}{u^{3/2}}\ du$

$= \frac{1}{2} \int u^{-1/2} - 4u^{-3/2}\ du = \frac{1}{2}\left[2u^{1/2} + 8u^{-1/2} + c\right]$

$= \sqrt{4+x^2} + \frac{4}{\sqrt{4+x^2}} + c$.

---

(17) $\int \cos x \ln(\sin x)\ dx$

* حلها على السؤال بالاختزار مباشرة .

$u = \sin x$

$\frac{du}{dx} = \cos x$

$\frac{du}{\cos x} = dx$

$= \int \cos x \ln u \frac{du}{\cos x}$

$= \int \ln u\ du$

$= u \ln u - \int \frac{1}{u} \cdot u\ du$

$= u \ln u - \int 1 \cdot du$

$= u \ln u - u + c$

$= \sin x \ln \sin x - \sin x + c$.

$\ln u \quad 1$

$\frac{1}{u} \quad u$

---

(18) $\int x \sin x^2\ dx$

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$= \int x \sin u \frac{du}{2x}$

$= \frac{1}{2} \int \sin u\ du$.

$= -\frac{1}{2} \cos u + c$.

$= -\frac{1}{2} \cos x^2 + c$.

اوجد قيمة كل من التكاملات التالية

(19) $\int_0^1 x \sin 2x \ dx$

$= -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \Big]_0^1$

$= -\frac{1}{2} \cos 2 + \frac{1}{4} \sin 2$.

x	$\sin 2x$
1	$+ \searrow -\frac{\cos 2x}{2}$
0	$- \searrow -\frac{\sin 2x}{4}$

---

(20) $\int_0^{\pi} 2x \cos x \ dx$

$= 2x \sin x + 2 \cos x \Big]_0^{\pi}$

$= -4$.

$2x$	$\cos x$
2	$+ \searrow \sin x$
0	$- \searrow -\cos x$

---

(21) $\int_0^1 x^2 \cos \pi x \ dx$

$= \frac{1}{\pi} x^2 \sin \pi x + \frac{2}{\pi^2} x \cos \pi x - \frac{2}{\pi^3} \sin \pi x \Big]_0^1$

$= -\frac{2}{\pi^2}$

x^2	$\cos \pi x$
$2x$	$+ \searrow \frac{\sin \pi x}{\pi}$
2	$- \searrow -\frac{\cos \pi x}{\pi^2}$
0	$+ \searrow -\frac{\sin \pi x}{\pi^3}$

(22) $\int_0^1 x^2 e^{3x}\ dx$

$= \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{9}x e^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x}\Big]_0^1$

$= \frac{5e^3 - 2}{27}$

	e^{3x}
x^2	$\frac{e^{3x}}{3}$
$2x$	$\frac{e^{3x}}{9}$
2	$\frac{e^{3x}}{27}$
0	

---

(23) $\int_1^{10} ln2x\ dx$

$= x\,Ln\,2x\Big]_1^{10} - \int_1^{10} \frac{2}{2x}\cdot x\,dx$

$= x\,Ln\,2x\Big]_1^{10} - \int_1^{10} 1\,dx$

$= x\,Ln\,2x\Big]_1^{10} - x\Big]_1^{10}$

$= 10\,Ln\,20 - Ln\,2 - 9$.

	1
$Ln\,2x$	x
$\frac{2}{2x}$	

---

(24) $\int_1^2 x\,lnx\ dx$

$= \frac{1}{2}x^2 Ln\,x\Big]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\,dx$

$= \frac{1}{2}x^2 Ln\,x\Big]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx$

$= \frac{1}{2}x^2 Ln\,x\Big]_1^2 - \frac{x^2}{4}\Big]_1^2 = 2Ln\,2 - \frac{3}{4}$.

	x
$Ln\,x$	$\frac{x^2}{2}$
$\frac{1}{x}$	

(25) $\int e^{ax} x^2 \ dx = \int x^2 \ e^{ax} \ dx \qquad a \neq 0$

$= \frac{1}{a} x^2 e^{ax} - \frac{2}{a^2} x e^{ax} + \frac{2}{a^3} e^{ax} + c.$

x^2	e^{ax}	
		+
$2x$		$\frac{e^{ax}}{a}$
		−
		$\frac{e^{ax}}{a^2}$
2		
		+
		$\frac{e^{ax}}{a^3}$
0		

---

(26) $\int x \sin(ax) \ dx \quad a \neq 0$

$= -\frac{1}{a} x \cos ax + \frac{1}{a^2} \sin ax + c.$

x	$\sin ax$	
		+
1		$-\frac{\cos ax}{a}$
		−
0		$-\frac{\sin ax}{a^2}$

السؤال 16 (يكون من احدى هذه الاسئلة)	تمارين 1 -12
نوع السؤال : ضع دائرة (5 درجات)	صفحة 507 من الكتاب

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \cos x \sin^4 x \, dx$

$= \int \cos x \; u^4 \cdot \frac{du}{\cos x}$

$= \int u^4 \, du$

$= \frac{u^5}{5} + c = \frac{1}{5} \sin^5 x + c .$

$u = \sin x$

$\frac{du}{dx} = \cos x$

$\frac{du}{\cos x} = dx$

---

(2) $\int \cos^3 x \sin^4 x \, dx$

$= \int \cos^3 x \; u^4 \cdot \frac{du}{\cos x}$

$= \int \cos^2 x \; u^4 \, du$

$= \int (1 - u^2) \; u^4 \, du$

$= \int u^4 - u^6 \, du$

$= \frac{1}{5} u^5 - \frac{1}{7} u^7 + c = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x + c .$

$u = \sin x$

$\frac{du}{dx} = \cos x$

$\frac{du}{\cos x} = dx$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$= 1 - u^2$

---

(3) $\int_0^{\pi/4} \cos 2x \sin^3 2x \, dx$

$= \int \cos 2x \; u^3 \; \frac{du}{2\cos 2x}$

$= \frac{1}{2} \int_0^1 u^3 \, du$

$= \frac{1}{8} u^4 \Big]_0^1 = 1/8 .$

$u = \sin 2x$

$\frac{du}{dx} = 2 \cos 2x$

$\frac{du}{2\cos 2x} = dx$

$x = 0 \rightarrow u = 0$

$x = \frac{\pi}{4} \rightarrow u = 1$

(4) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^3 3x \sin^3 3x \, dx$

$= \int \cos^3 3x \; u^3 \; \frac{du}{3\cos 3x}$

$= \frac{1}{3} \int \cos^2 3x \; u^3 \; du$

$= \frac{1}{3} \int_{1/\sqrt{2}}^{0} (1-u^2) u^3 \, du$

$= \frac{1}{3} \int_{1/\sqrt{2}}^{0} u^3 - u^5 \, du$

$= \frac{1}{3} \left[\frac{u^4}{4} - \frac{u^6}{6} \right]_{1/\sqrt{2}}^{0} = -\frac{1}{72}$.

$u = \sin 3x$

$\frac{du}{dx} = 3\cos 3x$

$\frac{du}{3\cos 3x} = dx$

$\cos^2 3x = 1 - \sin^2 3x$

$= 1 - u^2$

$x = \frac{\pi}{4} \rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$x = \frac{\pi}{3} \rightarrow u = 0$

---

(5) $\int_{0}^{\pi/2} \cos^2 x \sin x \, dx$

$= \int u^2 \; \sin x \; \frac{du}{-\sin x}$

$= -\int_{1}^{0} u^2 \, du$

$= \int_{0}^{1} u^2 \, du$

$= \frac{1}{3} u^3 \Big]_0^1 = 1/3$.

$u = \cos x$

$\frac{du}{dx} = -\sin x$

$\frac{du}{-\sin x} = dx$

$x = 0 \rightarrow u = 1$

$x = \frac{\pi}{2} \rightarrow u = 0$

---

(6) $\int_{-\pi/2}^{0} \cos^3 x \sin x \, dx$

$= \int u^3 \; \sin x \; \frac{du}{-\sin x}$

$= -\int_{0}^{1} u^3 \, du$

$= -\frac{1}{4} u^4 \Big]_0^1 = -\frac{1}{4}$.

$u = \cos x$

$\frac{du}{dx} = -\sin x$

$\frac{du}{-\sin x} = dx$

$x = -\frac{\pi}{2} \rightarrow u = 0$

$x = 0 \rightarrow u = 1$

(7) $\int \cos^2(x+1)\ dx$

متطابقة ،

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$.

$= \int \frac{1}{2}(1+\cos 2(x+1))\ dx$

$= \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2(x+1)\ dx$

$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2(x+1) + c$.

---

(8) $\int \sin^4(x-3)\ dx$

$u = x-3$

$\frac{du}{dx} = 1$

$du = dx$

$= \int \sin^4 u\ du$

$= \int (\sin^2 u)^2\ du$

$= \int \left(\frac{1}{2}(1-\cos 2u)\right)^2\ du$

$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2u + \cos^2 2u)\ du$

$= \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2u + \frac{1}{2}(1+\cos 4u)\right) du$

$= \frac{1}{4}\left[u - \sin 2u + \frac{1}{2}\left(u + \frac{\sin 4u}{4}\right) + c\right]$.

$= \frac{1}{4}\left[(x-3) - \sin 2(x-3) + \frac{1}{2}\left((x-3) + \frac{\sin 4(x-3)}{4}\right) + c\right]$.

$= \frac{3}{8}(x-3) - \frac{1}{4}\sin 2(x-3) + \frac{1}{32}\sin 4(x-3) + C$

---

(9) $\int \tan x \sec^3 x\ dx$

$u = \sec x$

$\frac{du}{dx} = \sec x \tan x$

$\frac{du}{\sec x \tan x} = dx$

$= \int \tan x \sec x\ u^2\ \frac{du}{\sec x \tan x}$.

$= \int u^2\ du$

$= \frac{1}{3}u^3 + c$

$= \frac{1}{3}\sec^3 x + c$.

(10) $\int \cot x \csc^4 x \, dx$

$= \int u \csc^4 x \cdot \frac{du}{-\csc^2 x}$

$= -\int u \csc^2 x \, du$

$= -\int u (1+u^2) \, du$

$= -\int (u + u^3) \, du$

$= -\frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4} + c = -\frac{\cot^2 x}{2} - \frac{\cot^4 x}{4} + c.$

$u = \cot x$

$\frac{du}{dx} = -\csc^2 x$

$\frac{du}{-\csc^2 x} = dx$

$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$

$= 1 + u^2$

---

(11) $\int x \tan^3(x^2+1) \sec(x^2+1) \, dx$

$= \int x \tan^3 u \sec u \frac{du}{2x}$

$= \frac{1}{2} \int \tan^3 u \sec u \, du$

$= \frac{1}{2} \int \tan^3 u \, t \frac{dt}{\sec u \tan u}$ (t)

$= \frac{1}{2} \int \tan^2 u \, dt$

$= \frac{1}{2} \int (t^2 - 1) \, dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3} - t + c\right).$

$= \frac{1}{6} \sec^3 u - \frac{1}{2} \sec u + c.$

$= \frac{1}{6} \sec^3(x^2+1) - \frac{1}{2} \sec(x^2+1) + c.$

$u = x^2 + 1$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$t = \sec u$

$\frac{dt}{du} = \sec u \tan u$

$\frac{dt}{\sec u \tan u} = du$

$\tan^2 u = \sec^2 u - 1$

$= t^2 - 1.$

---

(12) $\int \tan(2x+1) \sec^3(2x+1) \, dx$

$= \int \tan u \sec^3 u \cdot \frac{du}{2}$

$= \frac{1}{2} \int \tan u \, t^3 \cdot \frac{dt}{\sec u \tan u}$

$= \frac{1}{2} \int t^2 \, dt$

$= \frac{1}{6} t^3 + c$

$= \frac{1}{6} \sec^3 u + c$

$= \frac{1}{6} \sec^3(2x+1) + c.$

$u = 2x + 1$

$\frac{du}{dx} = 2$

$\frac{du}{2} = dx$

$t = \sec u$

$\frac{dt}{du} = \sec u \tan u$

$\frac{dt}{\sec u \tan u} = du.$

السؤال 17 (يكون من احدى هذه الاسئلة)	تمارين 13 -20
نوع السؤال : ضع دائرة (3 درجات)	صفحة 507 من الكتاب

اوجد التكاملات التالية

(13) $\int \cot^2 x \csc^4 x \; dx$

$= \int u^2 \csc^4 x \; \frac{du}{-\csc^2 x}$.

$= -\int u^2 \csc^2 x \; du$

$= -\int u^2 (1+u^2) \; du$

$= -\int u^2 + u^4 \; du$

$= -\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C$

$= -\frac{\cot^3 x}{3} - \frac{\cot^5 x}{5} + C$

$u = \cot x$

$\frac{du}{dx} = -\csc^2 x$

$\frac{du}{-\csc^2 x} = dx$

$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$

$= 1 + u^2$.

---

(14) $\int \cot^2 x \csc^2 x \; dx$

$= \int u^2 \csc^2 x \; \frac{du}{-\csc^2 x}$.

$= -\int u^2 \; du$

$= -\frac{1}{3} u^3 + C$

$= -\frac{1}{3} \cot^3 x + C$.

$u = \cot x$

$\frac{du}{dx} = -\csc^2 x$

$\frac{du}{-\csc^2 x} = dx$.

(15) $\int_0^{\pi/4} \tan^4 x \sec^4 x \, dx$

$= \int u^4 \sec^4 x \cdot \frac{du}{\sec^2 x}$

$= \int u^4 \sec^2 x \, du$

$= \int_0^1 u^4 (1+u^2) \, du$

$= \int_0^1 u^4 + u^6 \, du$

$= \frac{1}{5}u^5 + \frac{1}{7}u^7 \Big]_0^1$

$= \frac{12}{35}$

$u = \tan x$

$\frac{du}{dt} = \sec^2 x$

$\frac{du}{\sec^2 x} = dt$

$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

$= 1 + u^2$

$x = 0 \rightarrow u = 0$

$x = \frac{\pi}{4} \rightarrow u = 1$

---

(16) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^4 x \sec^2 x \, dx$

$= \int u^4 \sec^2 x \cdot \frac{du}{\sec^2 x}$

$= \int_{-1}^1 u^4 \, du$

$= \frac{1}{5}u^5 \Big]_{-1}^1$

$= \frac{2}{5}$

$u = \tan x$

$\frac{du}{dx} = \sec^2 x$

$\frac{du}{\sec^2 x} = dx$

$x = -\frac{\pi}{4} \rightarrow u = -1$

$x = \frac{\pi}{4} \rightarrow u = 1$

---

(17) $\int \cos^2 x \sin^2 x \, dx$

$= \int \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\frac{1}{2}(1-\cos 2x) \, dx$

$= \frac{1}{4}\int (1 - \cos^2 2x) \, dx$

$= \frac{1}{4}\int 1 - \frac{1}{2}(1+\cos 4x) \, dx$

$= \frac{1}{4}\left[x - \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 4x}{4}\right) + c\right] = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C$

(18) $\int (\cos^2 x + \sin^2 x)\ dx = \int 1\ dx = x + c$

---

(19) $\int_{-\pi/3}^{0} \sqrt{\cos x}\ \sin^3 x\ dx$

$= \int \sqrt{u}\ \sin^3 x\ \frac{du}{-\sin x}$

$= -\int \sqrt{u}\ \sin^2 x\ du$

$= -\int_{1/2}^{1} \sqrt{u}\ (1-u^2)\ du$

$= \int_{1/2}^{1} u^{5/2} - u^{1/2}\ du$

$= \frac{2}{7} u^{7/2} - \frac{2}{3} u^{3/2} \Big]_{1/2}^{1}$

$= \frac{25}{168}\sqrt{2} - \frac{8}{21}$

$u = \cos x$

$\frac{du}{dx} = -\sin x$

$\frac{du}{-\sin x} = dx$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$= 1 - u^2$

$x = -\frac{\pi}{3} \rightarrow u = \frac{1}{2}$

$x = 0 \rightarrow u = 1$

---

(20) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^2 x\ \csc^4 x\ dx$

$= \int u^2\ \csc^4 x\ \frac{du}{-\csc^2 x}$

$= -\int u^2\ \csc^2 x\ du$

$= -\int_{1}^{0} u^2 (1+u^2)\ du$

$= \int_{0}^{1} u^2 + u^4\ du$

$= \frac{1}{3} u^3 + \frac{1}{5} u^5 \Big]_0^1$

$= \frac{8}{15}$

$u = \cot x$

$\frac{du}{dx} = -\csc^2 x$

$\frac{du}{-\csc^2 x} = dx$

$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$

$= 1 + u^2$

$x = \frac{\pi}{4} \rightarrow u = 1$

$x = \frac{\pi}{2} \rightarrow u = 0$

السؤال 18 (يكون من احدى هذه الاسئلة)	تمارين 21 -32
نوع السؤال : ضع دائرة (5 درجات)	صفحة 507 من الكتاب

ملاحظات :

(1) في بعض تمارين هذا السؤال لا داعي لإكمال الحل الى النهاية لانها مسائل طويلة جداً

(2) في بعض التمارين يمكن حلها بالتكامل بالتعويض العادي ويكون اسهل من التعويضات المثلثية

اوجد التكاملات التالية

(21) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}\,dx$

$x = 3\sin\theta$

$dx = 3\cos\theta\,d\theta$

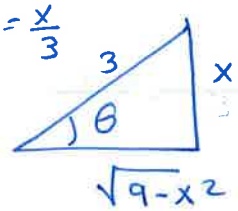
$= \int \frac{1}{9\sin^2\theta\sqrt{9-9\sin^2\theta}} \cdot 3\cos\theta\,d\theta$

$= \int \frac{1}{9\sin^2\theta \cdot 3\cos\theta} \cdot 3\cos\theta\,d\theta$

$= \frac{1}{9}\int \csc^2\theta\,d\theta$

$= -\frac{1}{9}\cot\theta + c = -\frac{1}{9}\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} + c$

$\sin\theta = \frac{x}{3}$



---

(22) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{16-x^2}}\,dx$

$x = 4\sin\theta$

$dx = 4\cos\theta\,d\theta$

$= \int \frac{1}{16\sin^2\theta \cdot 4\cos^2\theta} \cdot 4\cos\theta\,d\theta$

$= \frac{1}{16}\int \csc^2\theta\,d\theta$

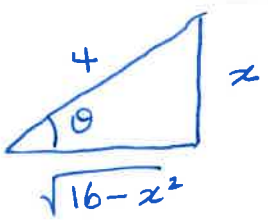
$= -\frac{1}{16}\cot\theta + c$

$= -\frac{1}{16}\cdot\frac{\sqrt{16-x^2}}{x} + c$

$= \frac{-\sqrt{16-x^2}}{16x} + c$

مثلث التحويل

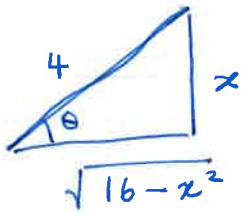
$\sin\theta = \frac{x}{4}$



(23) $\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}\,dx$

$x = 4\sin\theta$

$dx = 4\cos\theta\,d\theta$



$= \int \frac{16\sin^2\theta}{\sqrt{16-16\sin^2\theta}} \cdot 4\cos\theta\,d\theta$

$= \int \frac{16\sin^2\theta}{4\cos\theta} \cdot 4\cos\theta\,d\theta$

$= 16\int \sin^2\theta\,d\theta$

$= 16\int \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\,d\theta$

$= 16\left(\frac{1}{2}\theta - \sin 2\theta\right) + c$

$= 16\left(\frac{1}{2}\theta - \sin\theta\cos\theta\right) + c$

$= 8\theta - 16\sin\theta\cos\theta + c = 8\sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{1}{2}x\sqrt{16-x^2} + c.$

---

(24) $\int \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

$x = 3\sin\theta$

$dx = 3\cos\theta\,d\theta$

$= \int \frac{27\sin^3\theta}{\sqrt{9-9\sin^2\theta}} \cdot 3\cos\theta\,d\theta$

$= 27\int \sin^3\theta\,d\theta$

$= 27\int \sin\theta\sin^2\theta\,d\theta$

$= 27\int \sin\theta(1-\cos^2\theta)\,d\theta$

$= 27\int \sin\theta - \sin\theta\cos^2\theta\,d\theta$

$= 27\left(-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta\right) + c$

$= -27\frac{\sqrt{9-x^2}}{9} + 9\left(\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\right)^3 + c$

$= -3\sqrt{9-x^2} + \frac{1}{3}(9-x^2)^{3/2} + c$

$\int \sin\theta\cos^2\theta\,d\theta$

$= -\int u^2\,du$

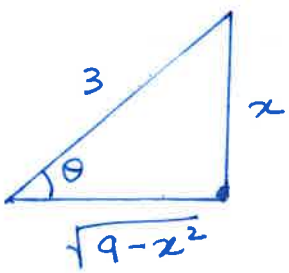
$= -\frac{u^3}{3} + c$

$= -\frac{\cos^3\theta}{3} + c.$

$u = \cos\theta$

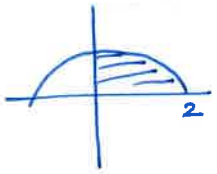
$\frac{du}{d\theta} = -\sin\theta$

$\frac{du}{-\sin\theta} = d\theta$



(25) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$

مساحة ربع دائرة
نصف قطرها 2



$= \frac{1}{4}\pi(2)^2 = \pi$

---

(26) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

$u = 4-x^2$

$\frac{du}{dx} = -2x$

$\frac{du}{-2x} = dx$

$x=0 \rightarrow u=4$

$x=1 \rightarrow u=3$

$= \int \frac{x}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{-2x}$

$= -\frac{1}{2}\int_4^3 u^{-1/2}\,du$

$= -\frac{1}{2}\, u^{1/2}(2)\Big]_4^3 = 2-\sqrt{3}$

---

(27) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}\,dx$

$x = 3\sec\theta$

$dx = 3\sec\theta\tan\theta$

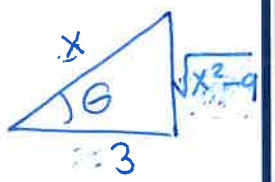
$= \int \frac{9\sec^2\theta}{3\cdot\tan\theta} \cdot 3\sec\theta\tan\theta\,d\theta$

$= \int 9\sec^3\theta\,d\theta$

ملاحظة
$\int \sec^3\theta\,d\theta$
ليس حفظ ولكنا
بالاجزاء الدورة

$= \frac{9}{2}\left(\sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta+\tan\theta|\right)+c$

$\sec\theta = \frac{x}{3}$



$= \frac{9}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{x^2-9}}{3} + \frac{9}{2}\ln\left|\frac{x}{3}+\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}\right|+c$

$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-9} + \frac{9}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-9}}{3}\right|+c$

(28) $\int x^3\sqrt{x^2-1}\ dx$

$= \int x^3\sqrt{u} \cdot \frac{du}{2x}$

$= \frac{1}{2}\int x^2\sqrt{u}\ du$

$= \frac{1}{2}\int (u+1)\sqrt{u}\ du$

$= \frac{1}{2}\int u^{3/2} + u^{1/2}\ du = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2}\right) + C$

$= \frac{1}{5}(x^2-1)^{5/2} + \frac{1}{3}(x^2-1)^{3/2} + C.$

$u = x^2-1$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$x^2 = u+1$

---

(29) $\int \frac{2}{\sqrt{x^2-4}}\ dx$

$= \int \frac{2}{2\tan\theta} \cdot 2\sec\theta\tan\theta$

$= 2\int \sec\theta\ d\theta$

$= 2\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$

$= 2\ln\left|\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right| + C$

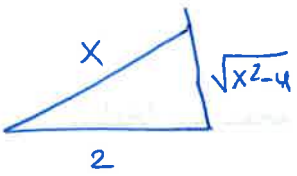
$= 2\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right| + C$

وهاد كتبة بالصور $= 2\ln|x+\sqrt{x-4}| + C$

$x = 2\sec\theta$

$dx = 2\sec\theta\tan\theta\ d\theta$

$\sec\theta = \frac{x}{2}$



---

(30) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\ dx$

$= \int \frac{x}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{2x}$

$= \frac{1}{2}\int u^{-1/2}\ du$

$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot u^{1/2} + C = \sqrt{x^2-4} + C.$

$u = x^2-4$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

السؤال 19 (يكون من احدى هذه الاسئلة)	تمارين 1 -10
نوع السؤال : ضع دائرة (3 درجات)	صفحة 516 من الكتاب

اوجد تفكيك الكسور الجزئية لكل مما يلي ثم اوجد الدالة الاصلية

(1) $\frac{x-5}{x^2-1} = \frac{3}{x+1} + \frac{-2}{x-1}$

$\int \frac{x-5}{x^2-1} dx = \int \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-1} dx$

$= 3\ln|x+1| - 2\ln|x-1| + c$

$\frac{x-5}{x^2-1} = \frac{x-5}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$

$x-5 = A(x-1) + B(x+1)$.

$x=1 \rightarrow -4 = 2B \rightarrow B=-2$

$x=-1 \rightarrow -6 = -2B \rightarrow A=3$.

---

(2) $\frac{5x-2}{x^2-4} = \frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-2}$

$\int \frac{5x-2}{x^2-4} dx = \int \frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-2} dx$

$= 3\ln|x+2| + 2\ln|x-2| + c$

$\frac{5x-2}{x^2-4} = \frac{5x-2}{(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2}$

$5x-2 = A(x-2) + B(x+2)$

$x=2 \rightarrow 8 = 4B \rightarrow B=2$

$x=-2 \rightarrow -12 = -4A \rightarrow A=3$

---

(3) $\frac{6x}{x^2-x-2} = \frac{4}{x-2} + \frac{2}{x+1}$

$\int \frac{6x}{x^2-x-2} dx = \int \frac{4}{x-2} + \frac{2}{x+1} dx$

$= 4\ln|x-2| + 2\ln|x+1| + c$

$\frac{6x}{x^2-x-2} = \frac{6x}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$

$6x = A(x+1) + B(x-2)$.

$x=-1 \rightarrow -6 = -3B \rightarrow B=2$

$x=2 \rightarrow 12 = 3A \rightarrow A=4$.

(4) $\dfrac{3x}{x^2-3x-4} = \dfrac{3/5}{x+1} + \dfrac{12/5}{x-4}$

$\int \dfrac{3x}{x^2-3x-4}\,dx = \int \dfrac{3/5}{x+1} + \dfrac{12/5}{x-4}\,dx$

$= \frac{3}{5}\ln|x+1| + \frac{12}{5}\ln|x-4| + C$

$\dfrac{3x}{x^2-3x-4} = \dfrac{3x}{(x+1)(x-4)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-4}$

$3x = A(x-4) + B(x+1)$.

$x=4 \rightarrow 12 = 5B \rightarrow B = \frac{12}{5}$

$x=-1 \rightarrow -3 = -5A \rightarrow A = \frac{3}{5}$

---

(5) $\dfrac{-x+5}{x^3-x^2-2x} = \dfrac{-5/2}{x} + \dfrac{1/2}{x-2} + \dfrac{2}{x+1}$

$\int \dfrac{-x+5}{x^3-x^2-2x}\,dx = \int \dfrac{-5/2}{x} + \dfrac{1/2}{x-2} + \dfrac{2}{x+1}\,dx$

$= -5/2\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-2| + 2\ln|x+1|$

$\dfrac{-x+5}{x^3-x^2-2x} = \dfrac{-x+5}{x(x-2)(x+1)}$

$= \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{x+1}$

$-x+5 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + C(x)(x-2)$

$x=-1 \rightarrow 6 = 3C \rightarrow C = 2$

$x=0 \rightarrow 5 = -2A \rightarrow A = -\frac{2}{5}$

$x=2 \rightarrow 3 = 6B \rightarrow B = \frac{1}{2}$

---

(6) $\dfrac{3x+8}{x^3+5x^2+6x}$.

$= \dfrac{4/3}{x} + \dfrac{-1}{x+2} + \dfrac{-1/3}{x+3}$

$\int \dfrac{3x+8}{x^3+5x^2+6x}\,dx = \int \dfrac{4/3}{x} + \dfrac{-1}{x+2} + \dfrac{-1/3}{x+3}\,dx$

$= \frac{4}{3}\ln|x| - \ln|x+2| - \frac{1}{3}\ln|x+3| + C$.

$\dfrac{3x+8}{x^3+5x^2+6x} = \dfrac{3x+8}{x(x+2)(x+3)}$

$= \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{C}{x+3}$.

$3x+8 = A(x+2)(x+3) + Bx(x+3) + C(x+2)$

$x=0 \rightarrow 8 = 6A \rightarrow A = 4/3$

$x=-2 \rightarrow 2 = -2B \rightarrow B = -1$

$x=-3 \rightarrow -1 = 3C \rightarrow C = -\frac{1}{3}$

(7) $\dfrac{5x-23}{6x^2-11x-7}$

$= \dfrac{3}{2x+1} + \dfrac{-2}{3x-7}$

$\int \dfrac{5x-23}{6x^2-11x-7}\,dx = \int \dfrac{3}{2x+1} + \dfrac{-2}{3x-7}\,dx$

$= \dfrac{3}{2}\int \dfrac{2}{2x+1}dx - \dfrac{2}{3}\int \dfrac{3}{3x-7}\,dx$

$= \dfrac{3}{2}\ln|2x+1| - \dfrac{2}{3}\ln|3x-7| + c$

$\dfrac{5x-23}{6x^2-11x-7} = \dfrac{5x-23}{(2x+1)(3x-7)}$

$= \dfrac{A}{2x+1} + \dfrac{B}{3x-7}$

$5x-23 = A(3x-7) + B(2x+1).$

$x = -\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{51}{2} = -\frac{17}{2}A \rightarrow A = 3$

$x = \frac{7}{3} \rightarrow -\frac{34}{3} = \frac{17}{3}B \rightarrow B = -2$

---

(8) $\dfrac{3x+5}{5x^2-4x-1}$

$= \dfrac{-11/5}{5x+1} + \dfrac{4/3}{x-1}$

$\int \dfrac{3x+5}{5x^2-4x-1}\,dx$

$= \int \dfrac{-11/3}{5x+1}\,dx + \int \dfrac{4/3}{x-1}dx$

$= \dfrac{-11}{15}\int \dfrac{5}{5x+1}\,dx + \dfrac{4}{3}\int \dfrac{1}{x-1}dx$

$= \dfrac{-11}{15}\ln|5x+1| + \dfrac{4}{3}\ln|x+1| + c$

$\dfrac{3x+5}{5x^2-4x-1} = \dfrac{3x+5}{(5x+1)(x-1)}$

$= \dfrac{A}{5x+1} + \dfrac{B}{x-1}$

$3x+5 = A(x-1) + B(5x+1)$

$x = 1 \Rightarrow 8 = 6B \rightarrow B = 4/3$

$x = -\frac{1}{5} \Rightarrow \frac{22}{5} = \frac{-6}{5}A \rightarrow A = -11/3.$

(9) $\dfrac{x-1}{x^3+4x^2+4x}$

$= \dfrac{-1/4}{x} + \dfrac{1/4}{x+2} + \dfrac{3/2}{(x+2)^2}$.

$\int \dfrac{x-1}{x^3+4x^2+4x}\,dx$

$= \int \dfrac{-1/4}{x} + \dfrac{1/4}{x+2} + \dfrac{3/2}{(x+2)^2}\,dx$

$= -\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{1}{4}\ln|x+2| + \int \frac{3}{2}(x+2)^{-2}\,dx$

$= -\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{1}{4}|x+2| + \frac{3}{2}\dfrac{(x+2)^{-1}}{-1} + C$.

$= -\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{1}{4}\ln|x+2| - \dfrac{3}{2(x+2)} + C$

$\dfrac{x-1}{x^3+4x^2+4x} = \dfrac{x-1}{x(x+2)^2}$

$= \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{C}{(x+2)^2}$

$x-1 = A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx$.

$x=0 \Rightarrow -1 = 4A \rightarrow A = -1/4$

$x=-2 \Rightarrow -3 = -2C \rightarrow C = 3/2$.

$x=1 \Rightarrow 0 = 9A + 3B + C$

$0 = 9(-\frac{1}{4}) + 3B + 3/2$.

$0 = -\frac{3}{4} + 3B \Longrightarrow B = 1/4$.

(10) $\dfrac{4x-5}{x^3-3x^2}$

$= \dfrac{-7/9}{x} + \dfrac{5/3}{x^2} + \dfrac{7/9}{x-3}$

$\int \dfrac{4x-5}{x^3-3x^2}\,dx$

$= \int \dfrac{-7/9}{x} + \dfrac{5}{3}x^{-2} + \dfrac{7/9}{x-3}$

$= -7/9\ln|x| - \dfrac{5}{3}x^{-1} + \dfrac{7}{9}\ln|x-3| + C$

$\dfrac{4x-5}{x^3-3x^2} = \dfrac{4x-5}{x^2(x-3)}$

$= \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x-3}$

$4x-5 = Ax(x-3) + B(x-3) + Cx^2$

$x=0 \Rightarrow -5 = -3B \rightarrow B = 5/3$.

$x=3 \Rightarrow 7 = 9C \rightarrow C = 7/9$

$x=1 \Rightarrow -1 = -2A - 2B + C$

$-1 = -2A - \frac{10}{3} + \frac{7}{9}$

$A = -7/9$

السؤال 20 (يكون من احدى هذه الاسئلة)	تمارين 21 -32
نوع السؤال : كتابي (7 درجات)	صفحة 521 من الكتاب

ملاحظات : في بعض تمارين هذا السؤال لا داعي لإكمال الحل الى النهاية لانها مسائل طويلة جداً

اوجد التكاملات التالية

(21) $\int \frac{x^3+x+2}{x^2+2x-8}\,dx$

$= \int x-2 + \frac{13x-14}{x^2+2x-8}\,dx$

$= \int x-2 + \frac{11}{x+4} + \frac{2}{x-2}\,dx$

$= \frac{x^2}{2} - 2x + 11\ln|x+4| + 2\ln|x-2| + C$

$x^2+2x-8 \overline{)\ x^3+x+2}$, $x-2$

$\ominus x^3 \oplus 2x^2 \ominus 8x$

$-2x^2+9x+2$

$\oplus -2x^2 \ominus 4x \oplus 16$

$13x-14$

$\frac{13x-14}{x^2+2x-8} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-2}$

$13x-14 = A(x-2) + B(x+4)$

$x=2 \rightarrow 12 = 6B \rightarrow B=2$

$x=-4 \rightarrow -66 = -6A \rightarrow A=11$

(22) $\int \frac{x^2+1}{x^2-5x-6}\,dx$

$= \int 1 + \frac{5x+7}{x^2-5x-6}\,dx$

$= \int 1 + \frac{-2/7}{x+1} + \frac{37/7}{x-6}\,dx$

$= x - \frac{2}{7}\ln|x+1| + \frac{37}{7}\ln|x-6| + C$

$x^2-5x-6 \overline{)\ x^2+1}$, 1

$\ominus x^2 \oplus 5x \oplus 6$

$5x+7$

$\frac{5x+7}{x^2-5x-6} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-6}$

$5x+7 = A(x-6) + B(x+1)$

$x=6 \rightarrow 37 = 7B \rightarrow B = \frac{37}{7}$

$x=-1 \rightarrow 2 = -7A \rightarrow A = -\frac{2}{7}$

(23) $\int \frac{x+4}{x^3+3x^2+2x}\,dx$

$= \int \frac{2}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{3}{x+1}\,dx$

$= 2\ln|x| + \ln|x+2| - 3\ln|x+1| + c.$

$\frac{x+4}{x(x+2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+1}$

$x+4 = A(x+2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x+2)$

$x=-2 \rightarrow 2=2B \rightarrow B=1$

$x=-1 \rightarrow 3=-C \rightarrow C=-3$

$x=0 \rightarrow 4=2A \rightarrow A=2$

---

(25) $\int \frac{4x^3-1}{x^4-x}\,dx$

لبسط = مشتقة المقام.

$= \ln|x^4-x| + c$

---

(26) $\int \frac{x}{x^4+1}\,dx = \int \frac{x}{(x^2)^2+1}\,dx$

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$= \int \frac{x}{u^2+1}\,\frac{du}{2x}$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}\,du$

$= \frac{1}{2}\tan^{-1}u + c = \frac{1}{2}\tan^{-1}x^2 + c.$

ملاحظة: حل بعض التمارين من هذا الدرس طويل جداً (صعب ان يكون سؤال بالامتحان) لا داعي لإكمال الحل هذا سؤال مقترح يغني عن الاسئلة التي لم تحل ويفي بالفكرة من الاسئلة المطلوبة بالاضافة الى ما تعلمته من الاسئلة السابقة

$$\int \frac{x+4}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+4)}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+8}{x^2+x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{7}{x^2+x+1}\,dx$$

اكمال المربع

$$x^2+x+1 = x^2+x+\tfrac{1}{4}+1-\tfrac{1}{4} = (x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{7}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\tan^{-1}\frac{(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}/2} + C.$$

* صيغة تكامل.

ملاحظة: هذه ارقام الاسئلة التي لم تحل

(24) $\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$

(27) $\int \frac{4x-2}{16x^4-1}\,dx$

(28) $\int \frac{3x+7}{x^4-16}\,dx$

(29) $\int \frac{x^3+x}{3x^2+2x+1}\,dx$

(30) $\int \frac{x^3-2x}{2x^2-3x+2}\,dx$

(31) $\int \frac{4x^2+3}{x^3+x^2+x}\,dx$

(32) $\int \frac{4x^2+4}{x^4+x^3+2x^2}\,dx$

السؤال 21 (يكون من احدى هذه الاسئلة)	تمارين 9 -14
نوع السؤال : كتابي (7 درجات)	صفحة 534 من الكتاب

(9) مستنبت بكتيري يحتوي في البداية على 400 خلية ويتضاعف تعداده بعد ساعة واحدة إذا كان معدل نمو الخلايا هو نمو أسي

(أ) حدد عدد افراد المجتمع بعد 3 ساعات

* تحديد حل السؤال. مع التقرير

عدد افراد المجتمع يكون 3200 خلية

(ب) أوجد عدد الخلايا (معادلة المجتمع) في أي زمن بالساعات.

$y'(t) = ky$, $y(0) = 400$, $Td = 1$ $(y(1) = 800)$

$\frac{dy}{dt} = ky$

$\frac{dy}{y} = k\,dt$

$\int \frac{1}{y}\,dy = \int k\,dt$

$\ln|y| = kt + c$

$y = e^{kt+c}$

$y = A\,e^{kt}$

$y = A\,e^{t\ln 2}$

$y(0) = 400$

$A = 400$

$y(t) = 400\,e^{t\ln 2}$

$k = \frac{\ln 2}{Td} = \frac{\ln 2}{1}$

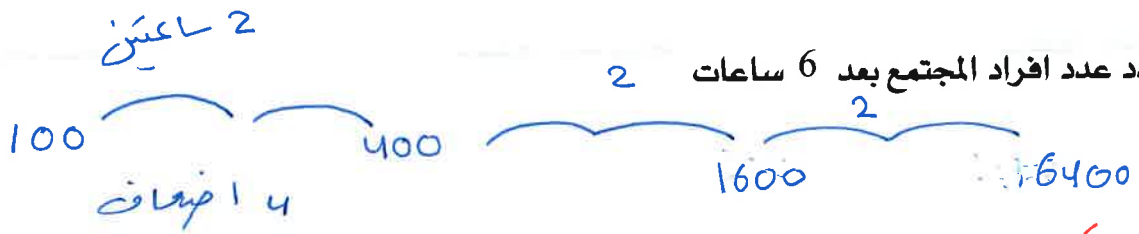
(ج) حدد عدد افراد المجتمع بعد 3.5 ساعات

$y(3.5) = 400\,e^{3.5\ln 2}$

$= 4525$ خلية

(10) مستنبت بكتيري يحتوي في البداية على 100 خلية وبعد ساعتين اصبح عدد الخلايا 400 إذا كان معدل نمو الخلايا هو نمو أسي

(أ) حدد عدد افراد المجتمع بعد 6 ساعات



يمكنه حل السؤال مع الفقرة ج

(ب) أوجد عدد الخلايا (معادلة المجتمع) في أي زمن بالساعات.

$y'(t) = ky$, $y(0) = 100$, $y(2) = 400$.

$\frac{dy}{dt} = ky$

$\frac{dy}{y} = k\,dt$

$\int \frac{1}{y}\,dt = \int k\,dt$

$\ln|y| = kt + c$

$y = e^{kt+c}$

$y = Ae^{kt}$

$y(0) = 100$

$A = 100$

$y = 100\,e^{kt}$

$y(2) = 400$

$100\,e^{2k} = 400$

$e^{2k} = 4 \Rightarrow$

$2k = \ln 4 \Rightarrow k = \ln 2$

$y = 100\,e^{t\ln 2}$

(ج) أوجد عدد الخلايا بعد مرور 7 ساعات.

$y(7) = 100\,e^{7\ln 2}$

$= 128000$ خلية

(11) مستنبت بكتيري يحتوي في البداية على 100 خلية ويتضاعف تعداده كل 4 ساعات ، إذا كان معدل نمو الخلايا هو نمو أسي

(أ) حدد الزمن الذي يصل فيه عدد افراد المجتمع الى 400

بعد 8 ساعات .

(ب) أوجد عدد الخلايا (معادلة المجتمع) في أي زمن بالساعات.

$y'(t) = ky$.

$\frac{dy}{y} = k\,dt$

$\int \frac{1}{y}\,dy = \int k\,dt$.

$\ln|y| = kt + c$

$y = e^{kt+c}$

$y = e^{kt}$.

$y = Ae$

$K = \frac{\ln 2}{Td} = \frac{\ln 2}{4}$.

$y(0) = 100$

$A = 100$

$y(t) = 100\, e^{\frac{\ln 2}{4}t}$.

(ج) حدد الزمن الذي يصل فيه عدد افراد المجتمع الى 6000

$y(t) = 6000$

$100\, e^{\frac{\ln 2}{4}t} = 6000$

$e^{\frac{\ln 2}{4}t} = 60$

$\frac{\ln 2}{4}t = 60$

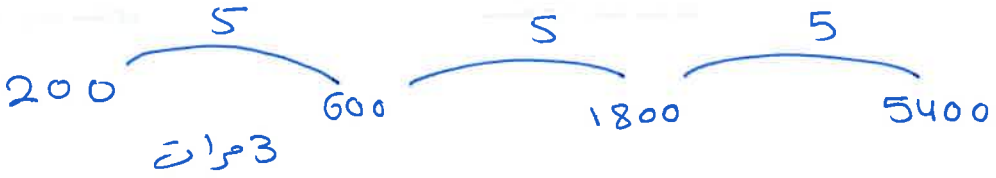
$t = \frac{4 \times 60}{\ln 2}$

$t = 23.628$

ساعة .

(12) مستنبت بكتيري يحتوي في البداية على 200 خلية ويتضاعف تعداده ثلاث مرات كل 5 ساعات ، إذا كان معدل نمو الخلايا هو نمو أسي

(أ) حدد الزمن الذي يصل فيه عدد افراد المجتمع الى 5400



بعد 15 ساعة .

(ب) أوجد عدد الخلايا (معادلة المجتمع) في أي زمن بالساعات.

$y(5) = 600$

$y'(t) = ky$

$\frac{dy}{y} = k\,dt$

$\int \frac{1}{y}\,dy = \int k\,dt$

$\ln|y| = kt + C$

$y = e^{kt+C}$

$y = Ae^{kt}$

$y(0) = 200 \Rightarrow A = 200$

$y(5) = 600$

$200e^{k(5)} = 600$

$e^{5k} = 3$

$5k = \ln 3$

$k = \frac{\ln 3}{5}$

$y = 200e^{\frac{\ln 3}{5}t}$

(ج) حدد الزمن الذي يصل فيه عدد افراد المجتمع الى 20000

$y(t) = 20000$

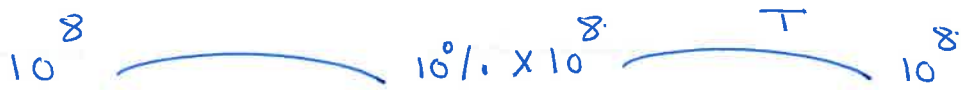
$200e^{\frac{\ln 3}{5}t} = 20000$

$e^{\frac{\ln 3}{5}t} = 100$

$\frac{\ln 3}{5}t = \ln 100$

$t = \frac{5\ln 100}{\ln 3} = 20.95$

(13) بكتريا تصيب الجسم وعددها 10^8 خلية ويتضاعف تعدادها كل 20 دقيقة ،تم اعطاء الشخص المريض علاج (حقنه) لمقاومة هذه البكتريا حيث يقتل العلاج 90% من هذه الخلايا . وبعد مرور الفترة الزمنية T وجد ان عدد الخلايا رجع الى 10^8 ، اوجد T



$y'(t) = ky$, $y(0) = 10\% \times 10^8$, $Td = 20$

$y(t) = Ae^{kt}$

$y(0) = 10\% \times 10^8$

$\Rightarrow A = 0.1 \times 10^8$

$K = \frac{Ln2}{20}$

$y(t) = 0.1 \times 10^8 \, e^{\frac{Ln2}{20}t}$

$y(T) = 10^8$

$0.1 \times 10^8 \, e^{\frac{Ln2}{20}T} = 10^8$

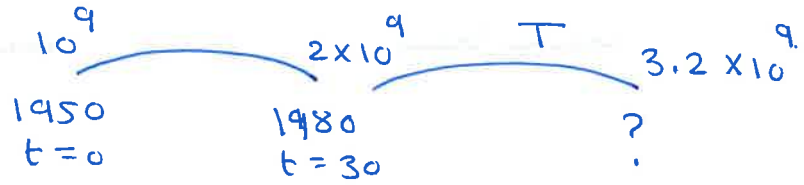
$\frac{Ln2}{e^{20}}T = 10$

$\frac{Ln2\,T}{20} = Ln10$

$T = \frac{20\,Ln10}{Ln2} = 66.44$

---

(14) تشير ابحاث العلماء عام $(t=0)1950$ الى ان مساحة اليابسة التي احتاجها عدد سكان الارض لزراعتها هي 10^9 هكتار وفي عام $(t=30)1980$ احتاجوا الى 2×10^9 هكتار اذا كان مساحة اليابسة الصالحة للزراعة تنمو بنسبة مئوية ثابتة .اوجد في اي سنة يكفي عدد السكان زراعة 3.2×10^9 هكتار



$y'(t) = ky$, $y(0) = 10^9$, $Td = 30$

$y(t) = Ae^{kt}$

$y(0) = 10^9 \Rightarrow A = 10^9$

$K = \frac{Ln2}{Td} = \frac{Ln2}{30}$

$y(t) = 10^9 \, e^{t\frac{Ln2}{30}}$

$y(T) = 3.2 \times 10^9$

$10^9 \, e^{Ln2/30\,T} = 3.2 \times 10^9$

$\Rightarrow T = 50.34$

تقريبا عام 2000

السؤال 22 (يكون من احدى هذه الاسئلة)	تمارين 1 -4
نوع السؤال : ضع دائرة (3 درجات)	صفحة 544 من الكتاب

حدد ما اذا كانت المعادلة التفاضلية قابلة للفصل ام لا

(1a) $y' = (3x+1)\cos y$

$\frac{dy}{dx} = (3x+1)\cos y$

$\frac{dy}{\cos y} = (3x+1)\,dx$

قابلة للفصل

(1b) $y' = (3x+y)\cos y$

$\frac{dy}{dx} = (3x+y)\cos y$

$\frac{dy}{\cos y} = (3x+y)\,dx$

ليست قابلة

(2a) $y' = 2x\cos(y-1)$

$\frac{dy}{dx} = 2x\cos(y-1)$

$\frac{dy}{\cos(y-1)} = 2x\,dx$

قابلة للفصل

(2b) $y' = 2x(y-x)$

$\frac{dy}{dx} = 2x(y-x)$

ليست قابلة

(3a) $y' = x^2 y + y\cos x$

$\frac{dy}{dx} = y(x^2+\cos x)$

$\frac{dy}{y} = (x^2+\cos x)\,dx$

قابلة للفصل

(3b) $y' = x^2 y - x\cos y$

$\frac{dy}{dx} = x(xy-\cos y)$

ليست قابلة

(4a) $y' = 2x\cos y - xy^3$

$\frac{dy}{dx} = x(2\cos y - y^3)$

$\frac{dy}{2\cos y - y^3} = x\,dx$

قابلة للفصل

(4b) $y' = x^3 - 2x + 1$

$\frac{dy}{dx} = x^3 - 2x + 1$

$dy = (x^3 - 2x + 1)\,dx$

قابلة

السؤال 23 (يكون من احدى هذه الاسئلة)	تمارين 9 -16
نوع السؤال : ضع دائرة (5 درجات)	صفحة 545 من الكتاب

اوجد حل كل من المعادلات التفاضلية التالية بصورة صريحة اذا امكن

(9) $y' = \dfrac{6x^2}{y(1+x^3)}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6x^2}{y(1+x^3)}$

$y\,dy = \dfrac{6x^2}{1+x^3}\,dx$

$\int y\,dy = \int \dfrac{6x^2}{1+x^3}\,dx$

$y^2 = 4\,Ln|1+x^3| + c$

$y = \pm\sqrt{4\,Ln|1+x^3| + c}$

(10) $y' = \dfrac{3x}{y+1}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x}{y+1}$

$(y+1)\,dy = 3x\,dx$

$\int (y+1)\,dy = \int 3x\,dx$

$\dfrac{y^2}{2} + y = \dfrac{3}{2}x^2 + c$

$y^2 + 2y = 3x^2 + c$

$y^2 + 2y + 1 = 3x^2 + c + 1$

$(y+1)^2 = 3x^2 + c$

$y+1 = \pm\sqrt{3x^2 + c}$

$y = \pm\sqrt{3x^2 + c} - 1$

(11) $y' = \frac{2x}{y} e^{y-x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y} e^{y} e^{-x}$

$y e^{-y} dy = 2x e^{-x} dx$

$\int y e^{-y} dy = \int 2x e^{-x} dx$

$-y e^{-y} - e^{-y} = 2(-x e^{-x} - e^{-x}) + c$

لا يمكن كتابة المعادلة بصيغة صريحة

y	$+ e^{-y}$
1	$- -e^{-y}$
0	e^{-y}

وتكامل مع x.

---

(12) $y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{x \ln x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{x \ln x}$

$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{x \ln x} dx$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \int \frac{1}{x \ln x} dx$

$\sin^{-1} y = \ln|\ln x| + c$

$y = \sin(\ln|\ln x| + c)$

---

(13) $y' = \frac{\cos x}{\sin y}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin y}$

$\sin y \, dy = \cos x \, dx$

$\int \sin y \, dy = \int \cos x \, dx$

$-\cos y = \sin x + c$

$y = \cos^{-1}(-\sin x + c)$

(14) $y' = x\cos^2 y$

$\frac{dy}{dx} = x\cos^2 y$

$\frac{dy}{\cos^2 y} = x\,dx$

$\int \sec^2 y\,dy = \int x\,dx$

$\tan y = \frac{x^2}{2} + c$

$y = \tan^{-1}\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$

---

(15) $y' = \frac{xy}{1+x^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{1+x^2}$

$\frac{1}{y}dy = \frac{x}{1+x^2}dx$

$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{x}{1+x^2}dx$

$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c$

$y = e^{\frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c}$

$y = A\,e^{\ln|1+x^2|^{1/2}}$

$y = A\sqrt{1+x^2}$

---

(16) $y' = \frac{2}{xy+y}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y(x+1)}$

$y\,dy = \frac{2}{x+1}dx$

$\int y\,dy = \int \frac{2}{x+1}dx$

$\frac{y^2}{2} = 2\ln|x+1| + c$

$y^2 = 4\ln|x+1| + c$

$y = \pm\sqrt{4\ln|x+1| + c}$.

انتهت اسئلة الهيكل مع تمنياتي لكم بالتوفيق

السؤال 24 غير معلن (BONUS)

نوع السؤال : كتابي (5 درجات)

السؤال 25 غير معلن (BOUNS)

نوع السؤال : كتابي (5 درجات)

ملاحظة : هذه الاسئلة من المنهج ولكن ليس من الهيكل وممكن ان تكون من اسئلة البونس

(1) إذا كانت المساحة المحصورة بين الدالة $y=x^2$ والمستقيم $y=mx$ هي $\frac{4}{3}$ وحدة مساحة، فأوجد قيمة الثابت m حيث $0<m$

$$A=\int_0^m mx-x^2\,dx$$

$$\frac{4}{3}=\frac{mx^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Big]_0^m$$

$$\frac{4}{3}=\frac{m^3}{2}-\frac{m^3}{3}$$

$$\frac{4}{3}=\frac{m^3}{6}\Rightarrow m^3=8$$

$$m=2$$

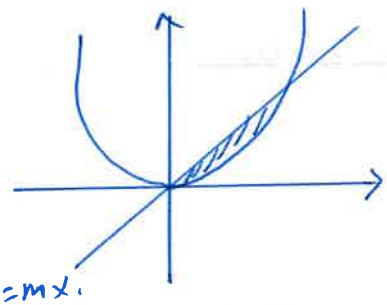
نقاط التقاطع

$$x^2=mx$$

$$x^2-mx=0$$

$$x(x-m)=0$$

$$x=0,\ m \quad y=mx$$



---

(2) إذا كان معدل تغير عدد المواليد في مدينة ما هو $B(t)=2e^{0.04t}$ مليون شخص ومعدل عدد الوفيات في نفس المدينة هو $D(t)=3e^{0.02t}$ مليون شخص حيث t بالسنوات أوجد صافي التغير في عدد سكان المدينة خلال ثلاثين سنة

$$\Delta P=\int_0^{30} 2e^{0.04t}-3e^{0.02t}\,dt$$

$$=\frac{2}{0.04}e^{0.04t}-\frac{3}{0.02}e^{0.02}\Big]_0^{30}=-7.3 \text{ مليون}$$

---

(3) أوجد حجم المجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة بالدالتين $y=e^{-2x}$ ، $y=0$ $0\le x\le \ln 5$ والمقاطع العرضية هي مربعات متعامدة على محور x

$$V=\int_0^{\ln 5} A(x)\,dx$$

$$=\int_0^{\ln 5} s^2\,dx$$

$$=\int_0^{\ln 5}\left(e^{-2x}\right)^2 dx=\frac{156}{625}$$

$y=e^{-2x}$

$y=0$

$s=e^{-2x}$.

(4) اوجد حجم الكرة الناتجة عن تدوير معادلة الدائرة $x^2+y^2=9$ حول المحور x

$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 \, dx$ من 1 الى dx

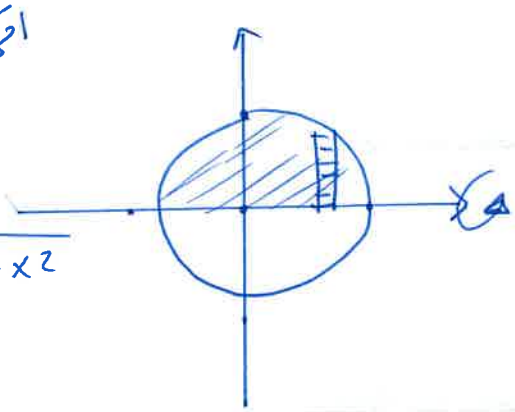
$= \pi \int_{-3}^{3} (9-x^2)\,dx$

$= \pi \left(9x - \frac{x^3}{3} \right) \Big]_{-3}^{3}$

$= 36\pi$

$r_o = \sqrt{9-x^2}$

$r_i = 0$



$y^2 = 9 - x^2$

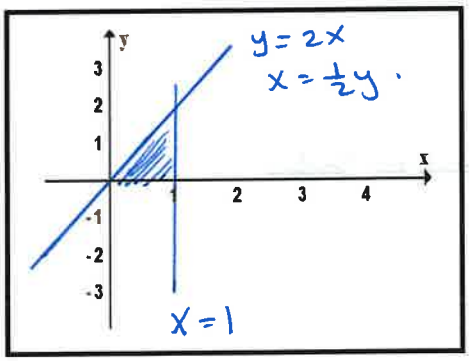
$y = \pm \sqrt{9-x^2}$.

كيف تدوير النصف العلوي

---

(5) يمثل التكامل التالي حجم مجسم بطريقة الحلقات، ارسم المنطقة R التي تمثل الحجم وحدد محور الدوران

$\pi \int_0^2 (1)^2 - (\frac{1}{2}y)^2 \, dy$



الطريقة حلقات ، التكامل يدل يكون عمودي على محور الدوران

∴ محور الدوران y.

$r_o = 1$, $r_i = \frac{1}{2}y$

$x = 1$ $\quad x = \frac{1}{2}y$.

(6) أوجد طول منحنى الدالة $f(x)$ ، حيث $f(x)=\int_{-2}^{x}\sqrt{4t^2-1}\,dt$ على الفترة $[-2,0]$

$$S=\int_{-2}^{0}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx \qquad f'(x)=\sqrt{4x^2-1}$$

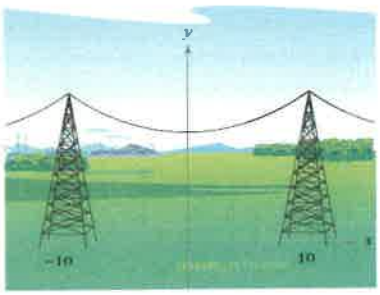
$$=\int_{-2}^{0}\sqrt{1+4x^2-1}\,dx \qquad (f'(x))^2=4x^2-1$$

$$=\int_{-2}^{0}\sqrt{4x^2}\,dx$$

$$=\int_{-2}^{0}|2x|\,dx=\int_{-2}^{0}-2x\,dx=4$$

---

(7) يمثل الشكل المجاور كابل كهربائي يمتد بين عموديين للكهرباء والمسافة بينهم $20\ m$



حيث تمثل المعادلة

$$y=5\left(e^{x/10}+e^{-x/10}\right)$$

ارتفاع الكابل عند أي مسافة x حيث $-10\le x\le 10$

أوجد طول الكابل الكهربائي بين العمودين

$$y'=5\left(e^{x/10}\cdot\frac{1}{10}+e^{-x/10}\left(\frac{-1}{10}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{x/10}-e^{-x/10}\right)$$

$$(y')^2=\frac{1}{4}\left(e^{x/10}-e^{-x/10}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}\left(e^{(x/10)^2}-2e^{x/10}\cdot e^{-x/10}+e^{(-x/10)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(e^{(x/10)^2}-2+e^{(-x/10)^2}\right)$$

$$S=\int_{-10}^{10}\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$=\int_{-10}^{10}\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(e^{(x/10)^2}-2+e^{(-x/10)^2}\right)}$$

$$=\int_{-10}^{10}\sqrt{\frac{4+e^{(x/10)^2}-2+e^{(-x/10)^2}}{4}}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-10}^{10}\sqrt{e^{(x/10)^2}+2+e^{(-x/10)^2}}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-10}^{10}\sqrt{\left(e^{x/2}+e^{-x/2}\right)^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-10}^{10}e^{x/2}+e^{-x/2}\,dx=23.5$$

أوجد التكاملات التالية:

(8) $\int \frac{x^3}{x^8+1}\,dx = \int \frac{x^3}{(x^4)^2+1}\,dx$

$u = x^4$

$\frac{du}{dx} = 4x^3$

$\frac{du}{4x^3} = dx$

$= \int \frac{x^3}{u^2+1}\,\frac{du}{4x^3}$

$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{4}\tan^{-1}u + c = \frac{1}{4}\tan^{-1}(x^4) + c.$

---

(9) $\int \sec x\,dx$ $\times \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$ ، لضرب في 1

$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx$

$= \ln|\sec x + \tan x| + c.$

---

(10) $\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$

أكمال المربع

$3 - 2x - x^2$

$= -[x^2 + 2x - 3]$

$= -[x^2 + 2x + 1 - 3 - 1]$

$= -[(x+1)^2 - 4]$

$= 4 - (x+1)^2.$

$= \int \frac{1}{\sqrt{4-(x+1)^2}}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}}\,dx$

$u = \frac{x+1}{2}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}$

$2\,du = dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,2\,du$

$= \sin^{-1}u + c$

$= \sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c.$

(11) $\int \frac{1}{1-\sin x}\,dx$ مرفق

$\times \frac{1+\sin x}{1+\sin x}$

$= \int \frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x}\,dx$

$= \int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\,dx$

$\times \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}$

$= \sec x \tan x$

$= \int \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$

$= \int \sec^2 x + \sec x \tan x\,dx = \tan x + \sec x + c.$

---

(12) $\int \tan^{-1} x\,dx$

$= x\tan^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$

$= x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$

$= x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c.$

u	dv
$\tan^{-1} x$	1
$\frac{1}{1+x^2}$	x

(+ , −)

---

(13) $\int \sin\sqrt{x}\,dx$

$= \int \sin u \cdot 2\sqrt{x}\,du$

$= \int 2u \sin u\,du$

$= -2u\cos u + 2\sin u + c$

$= -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + c.$

$u = \sqrt{x}$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$2\sqrt{x}\,du = dx$

$2u$	$\sin u$
2	$-\cos u$
0	$-\sin u$

(+ , −)

(14) $\int e^x \sin x\, dx = I$

$I = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx$

$\underbrace{\int e^x \sin x\, dx}_{I}$

e^x		$\sin x$
e^x	+	$-\cos x$
e^x	−	$-\sin x$

$I + I = e^x \sin x - e^x \cos x + c$

$2I = e^x \sin x - e^x \cos x + c$

$I = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + c$

$\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + c.$

---

(15) $\int \sqrt{9-x^2}\, dx$

$x = 3\sin\theta$

$dx = 3\cos\theta\, d\theta$

$= \int \sqrt{9 - 9\sin^2\theta}\, \cos\theta\, d\theta$

$= 3\int \sqrt{1-\sin^2\theta}\, \cos\theta\, d\theta$

$= 3\int \cos\theta \cdot 3\cos\theta\, d\theta$

$= 9\int \cos^2\theta\, d\theta$

$= 9\int \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\, d\theta$

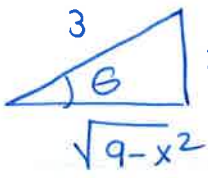
$= \frac{9}{2}\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right) + c$

$= \frac{9}{2}\left(\theta + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{2}\right) + c$

$= \frac{9}{2}\left(\sin^{-1}(x/3) + \frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\right) + c.$

$= \frac{9}{2}\sin^{-1}(x/3) + \frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2} + c.$

* $\sin\theta = x/3$



$\theta = \sin^{-1}(x/3)$

(16) $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx$

لأنها بالطول.

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x^2-1 & x^2+1 \\ & \ominus x^2 \oplus 1 \\ \hline & 2 \end{array}$$

$= \int 1 + \frac{2}{x^2-1}\,dx$

كسور جزئية

$\frac{2}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$

$2 = A(x+1) + B(x-1)$

$x=1 \Rightarrow 2 = 2A \rightarrow A=1$

$x=-1 \Rightarrow 2 = -2B \rightarrow B=-1$

$= \int 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1}\,dx$

$= x + \ln|x-1| - \ln|x+1| + c$

$= x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c.$

---

(17) $\int \frac{1}{x^2+x+2}\,dx$

إكمال مربع.

$x^2 + x + 2$

$= x^2 + x + \frac{1}{4} + 2 - \frac{1}{4}$

$= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}.$

$= \int \frac{1}{(x+1)^2 + \frac{7}{4}}\,dx.$

$u = x+1$

$\frac{du}{dx} = 1$

$du = dx$

$= \int \frac{1}{u^2 + \frac{7}{4}}\,du.$

$a = \frac{\sqrt{7}}{2}.$

$= \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}} \tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{7}/2}\right) + c$

صيغة تكامل.

$= \frac{2}{\sqrt{7}} \tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}u\right) + c.$

$= \frac{2}{\sqrt{7}} \tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + c.$

(18) اذا كان $f(4)=-5\,,f(1)=3$ ، **فاوجد** $\int_1^2 x\,f'(x^2)\,dx$

$$\int_1^2 x\,f'(x^2)\,dx$$

$$= \int x\,f'(u)\,\frac{du}{2x}$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^4 f'(u)\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left[f(4)-f(1)\right] = \frac{1}{2}[-5-3]$$

$$= -4.$$

$u = x^2$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

$x=1 \Rightarrow u=1$

$x=2 \Rightarrow u=4$

---

(19) إذا كان $f(4)=-8\,,f(1)=3$ ، $\int_1^4 f(x)\,dx = 12$

فأوجد $\int_1^4 (2x+3)f'(x)\,dx$

$$\int_1^4 (2x+3)f'(x)\,dx$$

$$= (2x+3)f(x)\Big]_1^4 - 2\int_1^4 f(x)\,dx$$

$$= 11\,f(4) - 5f(1) - 2(12)$$

$$= 11(-8) - 5(3) - 24$$

$$= -127.$$

$2x+3$	$f'(x)$
2	$f(x)$

(20) أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية بصورة صريحة (القيمة الابتدائية)

$y' = 2y \quad , \quad y(0) = -10$

$\frac{dy}{dt} = 2y$

$\frac{dy}{y} = 2dt$

$\int \frac{dy}{y} = \int 2dt$

$Ln|y| = 2t + c$

$y = e^{2t+c}$

$y = Ae^{2t}$

$y(0) = -10 \Rightarrow A = -10$

$y(t) = -10e^{2t}$

---

(21) أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية بصورة صريحة (القيمة الابتدائية)

$y' = y - 50 \quad , \quad y(0) = 70$

$\frac{dy}{dt} = y - 50$

$\frac{dy}{y-50} = dt$

$\int \frac{1}{y-50} dy = \int dt$

$Ln|y-50| = t + c$

$y - 50 = e^{t+c}$

$y - 50 = Ae^{t}$

$y(0) = 70$

$70 - 50 = A$

$\Rightarrow A = 20$

$y - 50 = 20e^{t}$

$y(t) = 20e^{t} + 50$

(22) إذا تبقى من كربون 14 (^{14}C) في أحد الأحافير 20% من الكمية الأصلية، حيث تحلل بمعدل أسي ، إذا كان عمر النصف له 5730 سنة فأوجد عمر الأحفورة

$y'(t) = ky$, $y(0) = A$, $Th = 5730$.

$y(t) = Ae^{kt}$.

$k = \frac{Ln\,1/2}{Th} = \frac{Ln\,1/2}{5730}$.

$y(t) = A\,e^{t\frac{Ln\,1/2}{5730}}$.

$y(T) = 20\%\,A$.

$20\%\,A = A\,e^{T\frac{Ln\,1/2}{5730.0}}$

$0.20 = e^{T\frac{Ln\,1/2}{5730}}$

$Ln\,0.20 = T\frac{Ln\,1/2}{5730}$

$T = \frac{5730\,Ln\,0.2}{Ln\,1/2}$

$= 13304$. a'

---

(23) إذا تم استثمار 100000 درهم في أحد البنوك بفائدة مركبة تساوي 3% ،فأوجد إجمالي المبلغ بعد 5 سنوات اذا كانت الارباح توزع بشكل شهري

$P = 100,000$

$r = 3\% = 0.03$.

$n = 12$

$t = 5$.

$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$.

$= 100900\left(1 + \frac{0.03}{12}\right)^{5(12)}$

$= 116161.67$.

انتهت الاسئلة الاضافية مع تمنياتي لكم