المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم

المركز الوطني لتطوير المناهج
National Center
for Curriculum Development

أوراق عمل داعمة

الرياضيات

الصف الحادي عشر - الفرع العلمي

11

الفصل الدراسي الثاني

مقدمة

يحتوي هذا الكتيب مجموعة من أوراق العمل تتضمّن تدريبات مراجعة متنوّعة، أُعِدَّت بعناية لمساعدة الطلبة على متابعة تعلّم الوحدة الدّرسيّة الجديدة بسلاسة ويُسر؛ وقد صُنِّفَتْ هذه التدريبات إلى مستويين: «المستوى الأول»، و«المستوى الثاني».

تعالج تدريبات المستوى الأول أساس المفاهيم الرياضيّة المرتبطة بموضوعات الوحدة التي درسها الطلبة في صفوف سابقة بعيدة عن الصف الحالي، في حين تهدف تدريبات المستوى الثاني إلى تعزيز تدريبات «أستعد لدراسة الوحدة» الواردة في كتاب التمارين.

في بداية كل درس يحدّد المعلم/ المعلمة المتطلّب السابق للتعلم الجديد من تدريبات المستوى الثاني أو صفحات «أستعد لدراسة الوحدة» في كتاب التمارين، ثم يطلب إلى الطلبة حلها مسترشدين بالمثال المحلول الذي يلي كلّ تدريب، وإذا وجدت فجوات تعليمية لدى بعض الطلبة تتجاوز المتطلبات السابقة التي يتضمنها المستوى الثاني في أوراق العمل أو صفحات «أستعد لدراسة الوحدة» فيمكن للمعلم/ المعلمة اختيار المعالجة المناسبة من تدريبات المستوى الأول.

قد لا يتمكن بعض الطلبة من إتمام حلّ جميع التدريبات الواردة في هذا الكتيّب أو صفحات «أستعد لدراسة الوحدة» في كتاب التمارين داخل الغرفة الصفية؛ لذا يمكن إكمال حلّها واجبًا منزليًّا، مع الحرص على عرض حلولهم في اليوم التالي على المعلم/ المعلمة؛ للحصول على التغذية الراجعة المفيدة.

المركز الوطني لتطوير المناهج

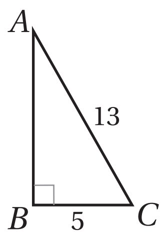
الوحدةُ 5

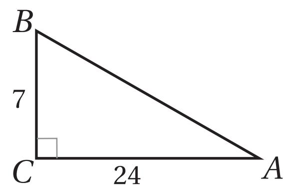
الاقتراناتُ المثلثيةُ

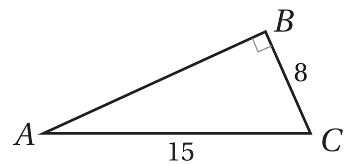
المستوى الأولُ

• إيجادُ النسبِ المثلثيةِ لزوايا في المثلثِ قائمِ الزاويةِ.

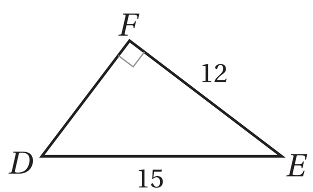
أجدُ قِيَمَ النسبِ المُثلَّثيةِ الثلاثِ للزاويةِ A في كلٍّ ممّا يأتي، تاركًا إجابتي في صورةِ كسرٍ:

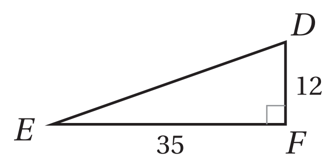
1 

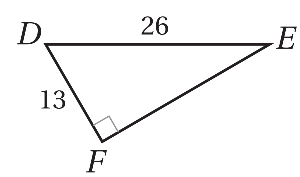
2 

3 

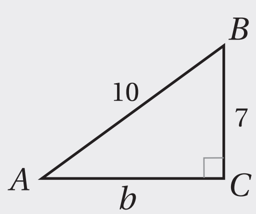
أجدُ قِيَمَ النسبِ المُثلَّثيةِ الثلاثِ للزاويةِ E في كلٍّ ممّا يأتي، تاركًا إجابتي في صورةِ كسرٍ:

4 

5 

6 

مثالٌ: أجدُ قِيَمَ النسبِ المُثلَّثيةِ الثلاثِ للزاويةِ A في المُثلَّثِ المُجاوِرِ.



الْخُطْوَةُ 1 أستعملُ نظريةَ فيثاغورس لإيجادِ b.

نظريةُ فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$
بتعويضِ $a = 7, c = 10$	$7^2 + b^2 = 10^2$
بالتبسيطِ	$49 + b^2 = 100$
بطرحِ 49 منْ طرفي المعادلةِ	$b^2 = 51$
بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ لطرفي المعادلةِ	$b = \pm\sqrt{51}$

بما أنَّ الطولَ لا يُمكِنُ أنْ يكونَ سالبًا، فإنَّ $b = \sqrt{51}$.

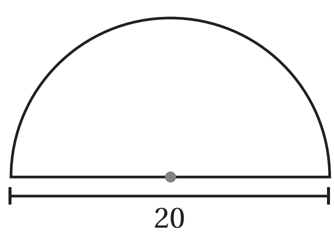
الْخُطْوَةُ 2 أجدُ النسبَ المُثلَّثيةَ الثلاثَ.

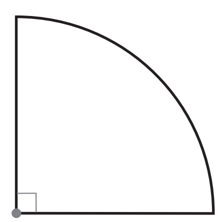
$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{7}{10} \qquad \cos A = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{51}}{10} \qquad \tan A = \frac{a}{b} = \frac{7}{\sqrt{51}}$$

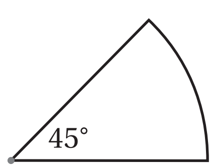
المستوى الثاني

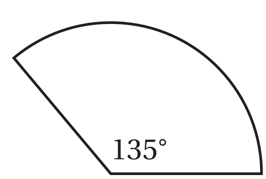
- **إيجادُ طولِ القوسِ ومِساحةِ القطاعِ الدائريِّ.**

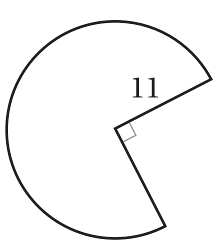
أَجِدُ طولَ القوسِ ومساحةَ القطاعِ في كلٍّ منَ الأشكالِ الآتيةِ (أَكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π):

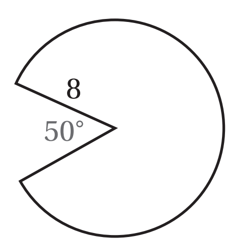
1 

2 

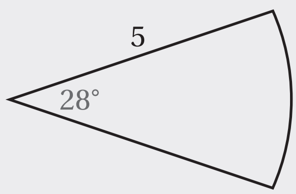
3 

4 

5 

6 

مثالٌ: أَجِدُ طولَ القوسِ ومِساحةَ القطاعِ في الشكلِ المجاورِ.



زاويةُ القطاعِ هيَ °28، وطولُ نصفِ القُطْرِ هوَ 5 وحداتِ طولٍ:

قانونُ طولِ القوسِ $l = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r$

بتعويضِ $\theta = 28^\circ, r = 5$ $l = \frac{28^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 2 \times 5$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ ≈ 2.4

إذنْ، طولُ هذا القوسِ مُقرَّبًا إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ هوَ: 4.2 وحدةِ طولٍ.

قانونُ مِساحةِ القطاعِ $A = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$

بتعويضِ $r = 5, \theta = 28^\circ$ $= \frac{28^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 5^2$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ ≈ 6.1

إذنْ، مِساحةُ هذا القطاعِ مُقرَّبةً إلى أقربِ منزلةٍ عشريةٍ واحدةٍ هيَ: 1.6 وحدةٍ مربعةٍ.

تمثيلُ اقترانَي الجيبِ وجيبِ التمامِ

7 أرسمُ منحنى الاقترانِ $y = \cos x$، ثُمَّ أصفُهُ، علمًا بأنَّ $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

مثالٌ: أرسمُ منحنى الاقترانِ $y = \sin x$، ثُمَّ أصفُهُ، علمًا بأنَّ $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

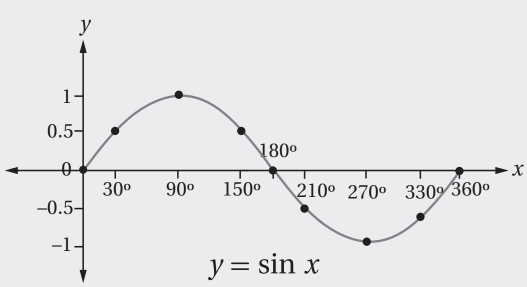
الخُطوَةُ 1 أُكوِّنُ جدولًا أكتبُ فيهِ زوايا شائعةً، نِسبُها المثلثيةُ معروفةٌ، مثلَ: الزوايا الربعيةِ، والزوايا التي زاويتُها المرجعيةُ °30.

الْخُطْوَةُ 2 أَجِدُ قيمةَ $\sin x$ لكلِّ زاويةٍ x، ثمَّ أَكتبُها في الجدولِ:

x	0°	30°	90°	150°	180°	210°	270°	330°	360°
$y = \sin x$	0	0.5	1	0.5	0	– 0.5	–1	– 0.5	0

الْخُطْوَةُ 3 أُعيِّنُ الأزواجَ المُرتَّبةَ: $(0°, 0), (30°, 0.5), (90°, 1), ...(360°, 0)$ في المستوى الإحداثيِّ.

الْخُطْوَةُ 4 أَصِلُ بمنحنًى أملسَ بينَ النقاطِ، فينتجُ رسمٌ كما في الشكلِ المجاورِ.



$y = \sin x$

مِنَ التمثيلِ البيانيِّ لاقترانِ $\sin x$، أُلاحِظُ أنَّ أكبرَ قيمةٍ للاقترانِ $\sin x$ هيَ 1، وأصغرَ قيمةٍ لهُ هيَ –1

المتطابقاتُ المثلثيةُ

المستوى الأولُ

- **تبسيطُ المقاديرِ الجبريةِ النسبيةِ.**

أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1. $\dfrac{6x-18}{x^4-81}$
2. $\dfrac{x^3+8}{x^2+6x+8}$
3. $\dfrac{3x-3x^2}{x^2+4x-5}$
4. $\dfrac{2x}{x^2(2x+5)}+\dfrac{5}{x^2(5+2x)}$
5. $\dfrac{5y}{6b^2a}+\dfrac{3b^2}{8a^2}$
6. $\dfrac{5}{8x+8}+\dfrac{x-4}{12x^2+4x-8}$
7. $\dfrac{x-1}{x^2-x-6}-\dfrac{3}{2x+4}$
8. $\dfrac{3x+1}{x^2-25}-\dfrac{2}{x+5}$
9. $\dfrac{x-4}{x^3-8}+\dfrac{7}{x^2+2x+4}$

مثالٌ: أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

a) $\dfrac{\mathbf{2x-10}}{\mathbf{2x^2-11x+5}}$

$\dfrac{2x-10}{2x^2-11x+5}=\dfrac{2(x-5)}{(2x-1)(x-5)}$ بتحليلِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ إلى العواملِ

$=\dfrac{2\cancel{(x-5)}}{(2x-1)\cancel{(x-5)}}$ بقسمةِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ على $(x-5)$

$=\dfrac{2}{2x-1}$ بالتبسيطِ

b) $\dfrac{\mathbf{x^3-2x^2+9x-18}}{\mathbf{6x^3-24x^2+24x}}$

$\dfrac{x^3-2x^2+9x-18}{6x^3-24x^2+24x}=\dfrac{(x^3-2x^2)+(9x-18)}{6x(x^2-4x+4)}$ بتجميعِ الحدودِ ذاتِ العواملِ المشتركةِ في البسطِ، وإخراجِ العاملِ المشتركِ في المقامِ

$=\dfrac{x^2(x-2)+9(x-2)}{6x(x^2-4x+4)}$ بإخراجِ العاملِ المشتركِ منْ كلِّ تجميعٍ في البسطِ

$=\dfrac{(x^2+9)(x-2)}{6x(x-2)(x-2)}$ بتحليلِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ إلى العواملِ

$=\dfrac{(x^2+9)\cancel{(x-2)}}{6x(x-2)\cancel{(x-2)}}$ بقسمةِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ على $(x-2)$

$=\dfrac{x^2+9}{6x(x-2)}$ بالتبسيطِ

c) $\dfrac{2x}{3y^3} + \dfrac{5b}{6x^2 y}$

بتوحيدِ المقامَينِ باستعمالِ المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ لهُما، وهوَ: $6x^2 y^3$

$$\frac{2x}{3y^3} + \frac{5b}{6x^2 y} = \frac{2x}{3y^3} \times \frac{2x^2}{2x^2} + \frac{5b}{6x^2 y} \times \frac{y^2}{y^2}$$

بالضربِ

$$= \frac{4x^3}{6x^2 y^3} + \frac{5b\,y^2}{6x^2 y^3}$$

بجمعِ البسطَينِ

$$= \frac{4x^3 + 5b\,y^2}{6x^2 y^3}$$

d) $\dfrac{3x-2}{x^2+4x-12} - \dfrac{5}{2x+12}$

بتحليلِ المقامَينِ إلى عواملِهما

$$\frac{3x-2}{x^2+4x-12} - \frac{5}{2x+12} = \frac{3x-2}{(x+6)(x-2)} - \frac{5}{2(x+6)}$$

بتوحيدِ المقاماتِ باستعمالِ المضاعفِ المشتركِ الأصغرِ لها، وهوَ: $2(x+6)(x-2)$

$$= \frac{3x-2}{(x+6)(x-2)} \times \frac{2}{2} - \frac{5}{2(x+6)} \times \frac{x-2}{x-2}$$

بطرحِ البسطَينِ

$$= \frac{6x-4-5x+10}{2(x+6)(x-2)}$$

بالتبسيطِ

$$= \frac{x+6}{2(x+6)(x-2)}$$

بقسمةِ كلٍّ منَ البسطِ والمقامِ على $(x+6)$

$$= \frac{\cancel{x+6}}{2\cancel{(x+6)}(x-2)}$$

بالتبسيطِ

$$= \frac{1}{2(x-2)}$$

- **حلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ.**

أَحُلُّ المعادلاتِ الآتيةَ، علمًا بأنَّ $0° \le x \le 360°$:

10 $\sin x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$	**11** $\tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$	**12** $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
13 $7 + 9\cos x = 1$	**14** $2\sin x + 1 = 0$	**15** $1 - 2\tan x = 5$
16 $2\sin x \tan x + \tan x = 0$	**17** $\cos x + 3\sin x \cos x = 0$	**18** $3(\cos x + 3) = 7 + \cos x$

مثالٌ: أَحُلُّ المعادلتَينِ الآتيتَينِ، علمًا بأنَّ $0° \le x \le 360°$:

a) $2 \sin x = 1$

$\sin x = \frac{1}{2}$ بقسمةِ طرفَيِ المعادلةِ على 2

$x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

ولأنَّ الجيبَ يكونُ أيضًا موجبًا في الربعِ الثاني؛ فإنَّهُ يوجدُ حَلٌّ آخرُ للمعادلةِ هوَ:

$$180° - 30° = 150°$$

إذنْ، لهذهِ المعادلةِ حَلّانِ ضمنَ الفترةِ المعطاةِ في المسألةِ، هما: °30، وَ °150

b) $3 \sin x \cos x - 2 \sin x = 0$

تحــوي هذهِ المعادلةُ نسـبتَينِ مثلثيَّتينِ، ويُلاحَـظُ أنَّ $\sin x$ تكرَّرَ في حَدَّيِ المعادلةِ، ما يعني أنَّها تُشْـبِهُ المعادلةَ $3yz - 2y = 0$؛ لذا يُمكِنُ تحليلُها بإخراجِ عاملٍ مشتركٍ:

$\sin x\,(3 \cos x - 2) = 0$ بإخراجِ العاملِ المشتركِ $\sin x$

$3 \cos x - 2 = 0 \,,\ \sin x = 0$ خاصيةُ الضربِ الصفريِّ

وبذلكَ أَتوصَّلُ إلى معادلتَينِ بسيطتَينِ، ثمَّ أَحُلُّ كلَّ معادلةٍ على حِدَةٍ:

$\sin x = 0$ المعادلةُ الأولى

$x = 0°, x = 180°$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، أوْ جدولِ الزوايا الخاصةِ

$3 \cos x - 2 = 0$ المعادلةُ الثانيةُ

$3 \cos x = 2$ بإضافةِ 2 إلى الطرفَينِ

$\cos x = \frac{2}{3}$ بقسمةِ الطرفَينِ على 3

$x = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ تعريفُ معكوسِ جيبِ التمامِ

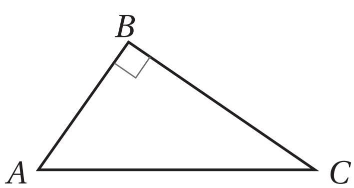
$x = 48.2°$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

ولأنَّ جيبَ التمامِ يكونُ أيضًا موجبًا في الربعِ الرابعِ؛ فإنَّهُ يوجدُ حَلٌّ آخرُ للمعادلةِ هوَ:

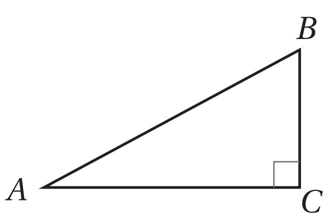
$$x = 360° - 48.2° = 311.8°$$

إذنْ، حلولُ هذهِ المعادلةِ هيَ: $0°, 180°, 48.2°, 311.8°$

متطابقةُ فيثاغورسْ.



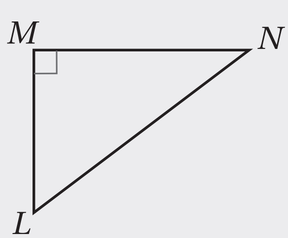
1 في المثلثِ المجاورِ، إذا كانَ $\cos A = \frac{4}{5}$، فأجدُ $\sin A$.



في المثلثِ المجاورِ، إذا كانَ $\sin A = \frac{8}{17}$، فأجدُ:

2 $\cos A$

3 $\tan A$



مثالٌ: **فـي المُثلَّثِ المُجـاوِرِ، إذا كانَ $\sin N = \frac{2}{3}$، فأجدُ $\cos N$.**

مُتطابِقةُ فيثاغورس	$\sin^2 N + \cos^2 N = 1$
بتعويضِ $\sin N = \frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2 N = 1$
بالتربيعِ	$\frac{4}{9} + \cos^2 N = 1$
بطرحِ $\frac{4}{9}$ منْ طرفيِ المعادلةِ	$\cos^2 N = \frac{5}{9}$
بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفَينِ	$\cos N = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$

بما أنَّ جيبَ التمامِ للزاويةِ N في المُثلَّثِ قائمِ الزاويةِ LMN هوَ ناتجُ قسمةِ طولِ الضلعِ المُجاوِرِ على الوترِ، وبما أنَّ الأطوالَ لا يُمكِنُ أنْ تكونَ سالبةً، فإنَّ $\cos N$ قيمةٌ موجبةٌ؛ أيْ إنَّ $\cos N = \frac{\sqrt{5}}{3}$.