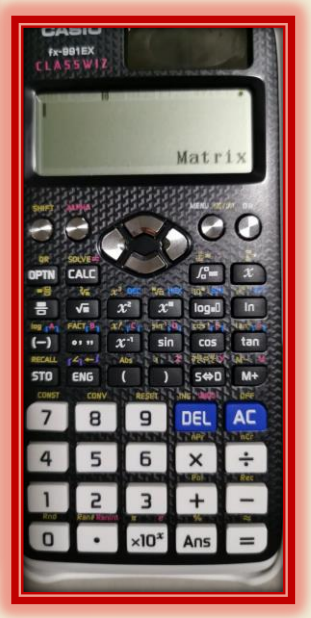
الأشياء الواجب توافر في كل حصة دراسية :



حل أنظمة المعادلات باستخدام قاعدة كرامر

نواتج التعلم :

١) إيجاد قيمة المحددات .

٢) حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كرامر .

قام عالم حيوانات بتمييز نمر مع جهاز تعقب GPS بحيث يمكن تحديد الأراضي المحيطة بالنمر. بعد عدة أيام، قرر عالم الحيوانات أن الأراضي المحيطة بالنمر كانت منطقة مثلثة. وباستخدام إحداثيات رؤوس هذا المثلث، يمكنها استخدام مصفوفات ومحددات لتحديد حجم الأراضي المحيطة بالنمر.

عنوان الدرس :

٨-١ حل أنظمة المتغيرات باستخدام كرامر

نواتج التعلم :

١) إيجاد قيمة المحددات .

٢) حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كرامر

1 المحددات كل مصفوفة مربعة لها **مُحَدِّد**. مُحَدِّد المصفوفة 2 × 2 يسمى **مُحَدِّد الدرجة الثانية**.

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

المفهوم الأساسي محددة الدرجة الثانية

الشرح قيمة المحدد بترتيب ثان هو الفرق بين نواتج ضرب القطرين.

الرموز
$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثال
$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 4(6) - (5)(-3) = 39$$

عنوان الدرس :
٨-١ حل أنظمة المتغيرات باستخدام كرامر

نواتج التعلم :
١) إيجاد قيمة المحددات .

٢) حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كرامر

عنوان الدرس :

١-٨ حل أنظمة المتغيرات باستخدام كرامر

نواتج التعلم :

١) إيجاد قيمة المحددات .

٢) حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كرامر

جد قيمة كل محدد

1B. $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & -4 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & -4 \end{vmatrix} =$ 7 (-4) – 9(5)

= -28 - 45

= -73

1A. $\begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 10 & 8 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} =$ -6 (8) – 10(-7)

= -48 + 70

= 22

عنوان الدرس :

٨-١ حل أنظمة المتغيرات باستخدام كرامر

نواتج التعلم :

١) إيجاد قيمة المحددات .

٢) حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كرامر

جد قيمة كل محدد

3. $\begin{vmatrix} -4 & 12 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} -4 & 12 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} =$ 5 (-4) – 9(12)

= -20 - 108

= -128

1. $\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} =$ 7(8) – 6(5)

= 56 - 30

= 26

مُحددات مصفوفات 3 × 3 تسمى **مُحددات الدرجة الثالثة**. يمكن إيجاد قيمها باستخدام **قاعدة القطر**.

المفهوم الأساسي قاعدة القطر

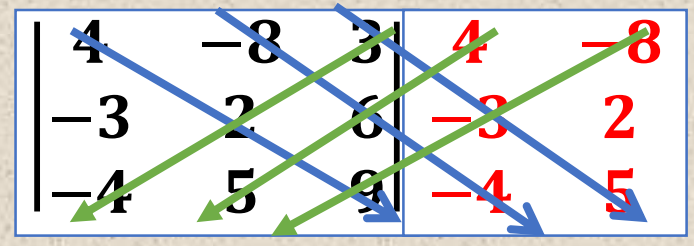
الخطوة 1 أعد كتابة أول عمودين إلى يمين المحدد.

الخطوة 2 ارسم الأقطار. بدءًا من العنصر الأيسر العلوي. اضرب العناصر في كل قطر. كرر العملية. بدءًا من العنصر الأيمن العلوي.

الخطوة 3 جد مجموع نواتج ضرب العناصر في كل مجموعة من الأقطار.

الخطوة 4 اطرح المجموع الثاني من المجموع الأول.

$$\begin{vmatrix} 4 & -8 & 3 \\ -3 & 2 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$



عنوان الدرس :

٨-١ حل أنظمة المتغيرات باستخدام كرامر

نواتج التعلم :

١) إيجاد قيمة المحددات .

٢) حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كرامر

عنوان الدرس :

١-٨ حل أنظمة المتغيرات باستخدام كرامر

نواتج التعلم :

١) إيجاد قيمة المحددات .

٢) حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كرامر

جد قيمة كل محدد مستخدما الأقطار.

2B. $\begin{vmatrix} -8 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & -8 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} -8 & -4 & 4 \\ 0 & -5 & -8 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ $\begin{matrix} -8 & 4 \\ 0 & -5 \\ 3 & 4 \end{matrix}$

مجموع الأقطار بدا من اليسار

= 40 + 96 + 0

= 136

مجموع الأقطار بدا من اليمن

= -60 + 256 + 0

= 196

det = 136 – 196 ⟹ det = -60

2A. $\begin{vmatrix} -5 & 9 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} -5 & 9 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$ $\begin{matrix} -5 & 9 \\ -2 & -1 \\ -4 & 6 \end{matrix}$

مجموع الأقطار بدا من اليسار

=10 + (-180) +(-48)

= -218

مجموع الأقطار بدا من اليمن

= -36 + (-150) + 16

= -170

det = -218 – (-170) ⟹ det = -48

عنوان الدرس :

١-٨ حل أنظمة المتغيرات باستخدام كرامر

نواتج التعلم :

١) إيجاد قيمة المحددات .

٢) حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كرامر

جد قيمة كل محدد مستخدما الأقطار.

6. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -4 & 6 & -2 \\ 4 & -1 & -6 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -4 & 6 & -2 \\ 4 & -1 & -6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \\ 4 & -1 \end{matrix}$$

مجموع الأقطار بدا من اليسار

$= -72 + 24 + 20$

$= -28$

مجموع الأقطار بدا من اليمن

$= -72 + 4 + 120$

$= 52$

$\det = -28 - 52$ ⟹ $\det = -80$

5. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -2 \\ -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{matrix}$$

مجموع الأقطار بدا من اليسار

$= 24 + (-30) + (-8)$

$= -14$

مجموع الأقطار بدا من اليمن

$= 32 + (-15) + (-12)$

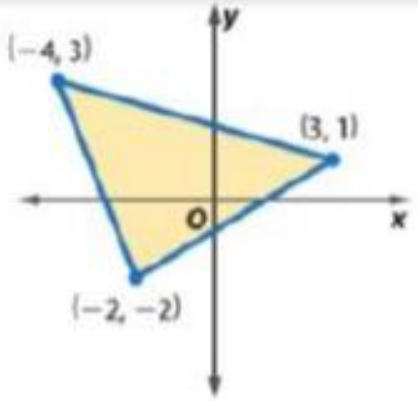
$= 5$

$\det = -14 - 5$ ⟹ $\det = -19$

المفهوم الأساسي مساحة المثلث

الشرح مساحة المثلث الذي رؤوسه هي (a, b) و (c, d) و (e, f) هي $|A|$ حيث

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$



مثال

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

عنوان الدرس :

٨-١ حل أنظمة المتغيرات باستخدام كرامر

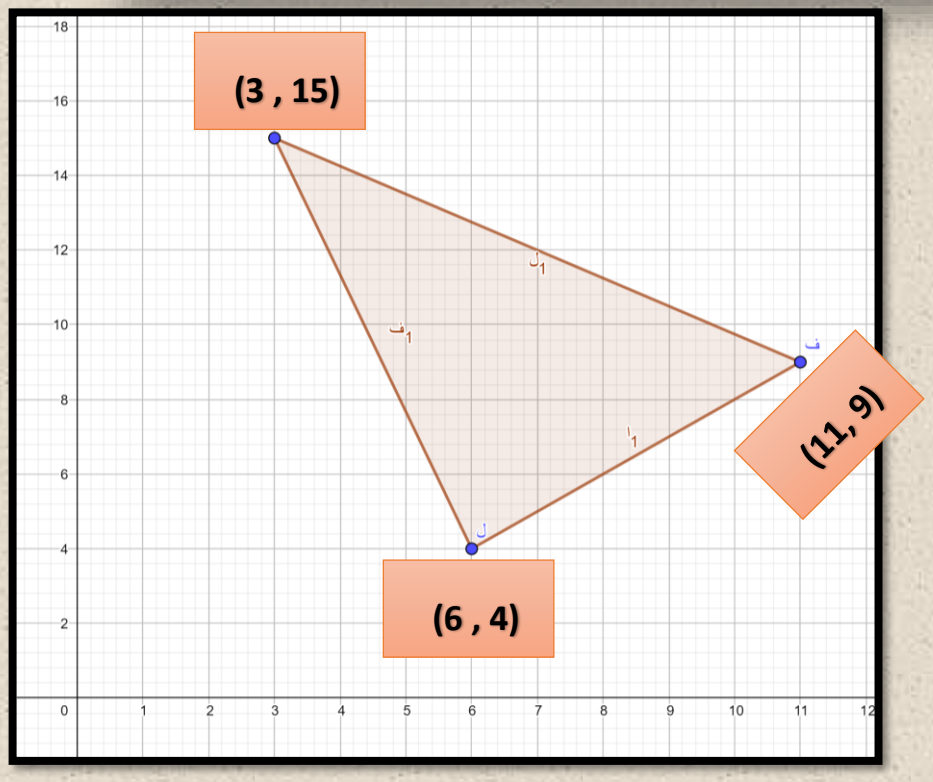
نواتج التعلم :

١) إيجاد قيمة المحددات .

٢) حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كرامر

تمرين موجّه

3. **العروض الترويجية** قامت حليمة وعائشة وفاطمة بالإعلان عن متجرهم الجديد في ثلاث زوايا مختلفة من شارع في أحد الأحياء. على الخريطة، إحداثيات الزوايا هي (3, 15) و (6, 4) و (11, 9). كل وحدة تمثل 0.5 km. ما مساحة الحي الذين يقومون بالإعلان فيه؟



مجموع الأقطار بدا من اليسار = 12 + 165 + 54 = 231

مجموع الأقطار بدا من اليمن = 90 + 27 + 44 = 161

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 15 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \\ 11 & 9 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{2}(70)$$

مساحة منطقة في صورة $A = 35$

طول في صورة $l = \sqrt{35} = 5.9$ وحدة

الحقيقي طول $= 0.5\,(5.9) = 2.95\ km$

مساحة الحقيقية $= 2.95^2 = 8.70\ km^2$

$$\begin{vmatrix} 3 & 15 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \\ 11 & 9 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 15 \\ 6 & 4 \\ 11 & 9 \end{matrix}$$

det = 231 -161

det = 70

عنوان الدرس :

١-٨ حل أنظمة المتغيرات باستخدام كرامر

نواتج التعلم :

١) إيجاد قيمة المحددات .

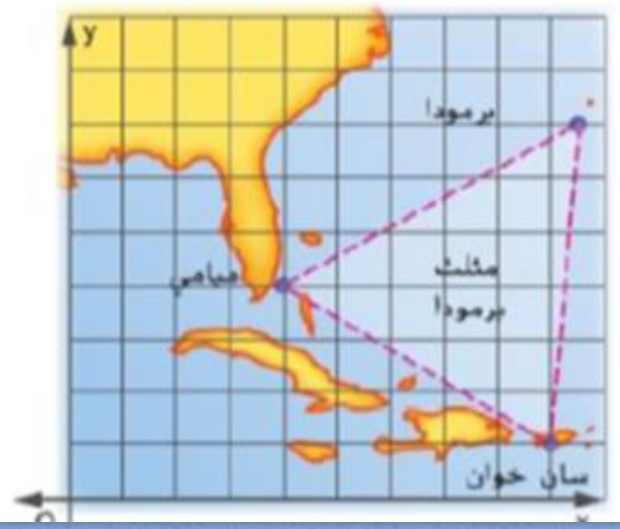
٢) حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كرامر

يمكن أيضاً استخدام المحددات لإيجاد مساحة المثلثات. إن كانت إحداثيات رؤوس المثلث معروفة، فيمكن استخدام القاعدة أدناه لحساب مساحة المثلث. ولأن المساحة لا يمكن أن تكون سالبة القيمة، يتم استخدام القيمة المطلقة للمحدد.

17. **المثابرة** "مثلث برمودا" هو مساحة تقع قبالة ساحل جنوب شرق المحيط الأطلسي للولايات المتحدة، ومشهورة بتقارير لحالات الاختفاء الغامض للسفن والقوارب الصغيرة والطائرات.

a. جد مساحة المثلث على الخريطة.

b. لنفترض أن كل تشكيل بياني يمثل 282 km ما هي مساحة مثلث برمودا؟



عنوان الدرس :

٨-١ حل أنظمة المتغيرات باستخدام كرامر

نواتج التعلم :

١) إيجاد قيمة المحددات .

٢) حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كرامر

عنوان الدرس :

٨-١ حل أنظمة المتغيرات باستخدام كرامر

نواتج التعلم :

١) إيجاد قيمة المحددات .

٢) حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كرامر

2 قاعدة كرامر بإمكانك استخدام المحددات لحل نظم المعادلات. إن كان المحدد لا يساوي صفر، فعندئذ يكون للنظام حل وحيد. إن كان المحدد يساوي صفر، فإن النظام ليس له حل أو له عدد لا نهائي من الحلول. تستخدم طريقة تُسمى **قاعدة كرامر** مصفوفة المعاملات. **مصفوفة المعاملات** هي مصفوفة لا تتضمن سوى معاملات النظام.

مفهوم أساسي قاعدة كرامر

لنفترض أن C هي مصفوفة المعاملات للنظام $\begin{matrix} ax + by = m \\ fx + gy = n \end{matrix} \leftarrow \begin{bmatrix} a & b \\ f & g \end{bmatrix}$.

الحلّ لنظام المعادلات هذا هو $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & m \\ f & n \end{vmatrix}}{|c|}$ و $x = \dfrac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & g \end{vmatrix}}{|c|}$ إن كانت $|C| \neq 0$.

عنوان الدرس :

١-٨ حل أنظمة المتغيرات باستخدام كرامر

نواتج التعلم :

١) إيجاد قيمة المحددات .

٢) حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كرامر

حل نظام المعادلات باستخدام قاعدة كرامر

4A. $7x + 3y = 37$

$-5x - 7y = -41$

المعاملات مصفوفة c

$$c = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -5 & -7 \end{vmatrix}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 37 \\ -5 & -41 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -5 & -7 \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{7(-41) - 37(-5)}{7(-7) - 3\,(-5)}$$

$$y = \frac{-287 + 185}{-49 + 15}$$

$$y = \frac{-102}{-34}$$

$$y = 3$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 37 & 3 \\ -41 & -7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -5 & -7 \end{vmatrix}}$$

$$x = \frac{37(-7) - 3(-41)}{7(-7) - 3\,(-5)}$$

$$x = \frac{-259 + 123}{-49 + 15}$$

$$x = \frac{-136}{-34}$$

$$x = 4$$

عنوان الدرس :

١-٨ حل أنظمة المتغيرات باستخدام كرامر

نواتج التعلم :

١) إيجاد قيمة المحددات .

٢) حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كرامر

حل نظام المعادلات باستخدام قاعدة كرامر

4B. $8x - 5y = 70$

$9x + 7y = 3$

المعاملات مصفوفة c

$$c = \begin{vmatrix} 8 & -5 \\ 9 & 7 \end{vmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 70 & -5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -5 \\ 9 & 7 \end{vmatrix}}$$

$$x = \frac{490 + 15}{56 + 45}$$

$$x = \frac{505}{101}$$

$$x = 5$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 70 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -5 \\ 9 & 7 \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{24 - 630}{56 + 45}$$

$$y = \frac{-606}{101}$$

$$y = -6$$

استخدم قاعدة كرامر لحل كل نظام من المعادلات.

13. $4x - 5y = 39$
$3x + 8y = -6$

14. $5x + 6y = 20$
$-3x - 7y = -29$

عنوان الدرس :

٨-١ حل أنظمة المتغيرات باستخدام كرامر

نواتج التعلم :

١) إيجاد قيمة المحددات .

٢) حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كرامر

عنوان الدرس :

٨-١ حل أنظمة المتغيرات باستخدام كرامر

نواتج التعلم :

١) إيجاد قيمة المحددات .

٢) حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كرامر

المفهوم الأساسي قاعدة كرامر لنظام من ثلاث معادلات

افترض أن C تساوي مصفوفة معاملات النظام

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= m \\ fx + gy + hz &= n \\ jx + ky + \ell z &= p \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ j & k & \ell \end{bmatrix}.$$

حل هذا النظام هو $x = \dfrac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & g & h \\ p & k & \ell \end{vmatrix}}{|C|}$ و $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ f & n & h \\ j & p & \ell \end{vmatrix}}{|C|}$ و $z = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ f & g & n \\ j & k & p \end{vmatrix}}{|C|}$

عنوان الدرس :

٨-١ حل أنظمة المتغيرات باستخدام كرامر

نواتج التعلم :

١) إيجاد قيمة المحددات .

٢) حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كرامر

حل نظام المعادلات باستخدام قاعدة كرامر

$$3x + 5y + 2z = -7$$
$$-4x + 3y - 5z = -19$$
$$5x + 4y - 7z = -15$$

$$c = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & 4 & -7 \end{vmatrix}$$

مصفوفة المعاملات

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 & -7 \\ -4 & 3 & -19 \\ 5 & 4 & -15 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & 4 & -7 \end{vmatrix}}$$

$$z = \frac{-465}{-330}$$

$$z = \frac{31}{22}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -7 & 2 \\ -4 & -19 & -5 \\ 5 & -15 & -7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & 4 & -7 \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{855}{-330}$$

$$y = \frac{-57}{22}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -7 & 5 & 2 \\ -19 & 3 & -5 \\ -15 & 4 & -7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -4 & 3 & -5 \\ 5 & 4 & -7 \end{vmatrix}}$$

$$x = \frac{-345}{-330}$$

$$x = \frac{23}{22}$$

5B. $6x + 5y + 2z = -1$

$-x + 3y + 7z = 12$

$5x - 7y - 3z = -52$

حل نظام المعادلات باستخدام قاعدة كرامر

$x = -4$

$y = 5$

$z = -1$

عنوان الدرس :

٨-١ حل أنظمة المتغيرات باستخدام كرامر

نواتج التعلم :

١) إيجاد قيمة المحددات .

٢) حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كرامر

استخدم قاعدة كرامر لحل كل نظام من المعادلات.

18. $4x - 2y + 7z = 26$
$5x + 3y - 5z = -50$
$-7x - 8y - 3z = 49$

19. $-3x - 5y + 10z = -4$
$-8x + 2y - 3z = -91$
$6x + 8y - 7z = -35$

عنوان الدرس :
٨-١ حل أنظمة المتغيرات باستخدام كرامر

نواتج التعلم :
١) إيجاد قيمة المحددات .

٢) حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كرامر

عنوان الدرس :

٨-١ حل أنظمة المتغيرات باستخدام كرامر

نواتج التعلم :

١) إيجاد قيمة المحددات .

٢) حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام قاعدة كرامر