



الرياضيات

الصف الثاني عشر - الفرع العلمي الفصل الدراسي الثاني

12

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيساً)

هبة ماهر التميمي أ.د. محمد صبح صباحه يوسف سليمان جرادات

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

☎ 06-5376262 / 237 📠 06-5376266 📧 P.O.Box: 2088 Amman 11941

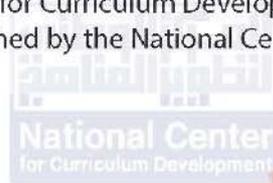
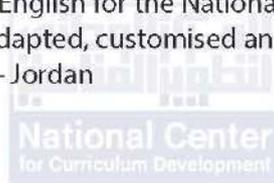
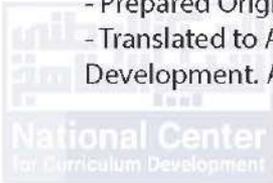
📱 @nccdjr 📧 feedback@nccd.gov.jo 🌐 www.nccd.gov.jo



© HarperCollins Publishers Limited 2021.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan



1443 هـ / 2022 م

الطبعة الأولى (التجريبية)

المقدمة

انطلاقاً من إيمان المملكة الأردنية الهاشمية الراسخ بأهمية تنمية قدرات الإنسان الأردني، وتسليحه بالعلم والمعرفة؛ سعى المركز الوطني لتطوير المناهج، بالتعاون مع وزارة التربية والتعليم، إلى تحديث المناهج الدراسية وتطويرها، لتكون مُعِيناً للطلبة على الارتقاء بمستواهم المعرفي والمهاري، ومجارات الأقران في الدول المتقدمة. ولما كان مبحث الرياضيات من أهم المباحث الدراسية التي تُنمي لدى الطلبة مهارات التفكير وحلّ المشكلات، فقد أولى المركز مناهجه عنايةً كبيرةً، وأعدّها وفق أفضل الطرائق المُتبَّعة عالمياً على أيدي خبراء أردنية؛ لضمان انسجامها مع القِيم الوطنية الراسخة، وتلبيتها لحاجات الطلبة.

روعي في إعداد كتب الرياضيات للمرحلة الثانوية تضمينها أكثر الموضوعات الرياضية أهميةً واستخداماً في التطبيقات العلمية المختلفة؛ بُعِيَة إعداد الطلبة للدراسة الجامعية إعداداً جيّداً يتواءم مع مناهج الدول المتقدمة. وكذلك حُرِص على تقديم هذه الموضوعات بطريقة بنائية مُتدرّجة تتيح للطلبة فرصة لتعلّمها بعمق من دون عناء أو جهد كبيرين.

روعي أيضاً تقديم الموضوعات بطريقة مُنظمة، وجاذبة، ومُدعمة بتمثيلات بيانية، ومزوّدة بإرشادات تُعين الطلبة على مواصلة تعلّمهم بسلاسة من دون تعثر؛ فهي تُدكّرهم بالخبرات التعليمية التي اكتسبوها سابقاً وتساعدهم على ربط الموضوعات الجديدة بعضها ببعض ربطاً وثيقاً، إضافةً إلى صلة كثير من أمثلتها ومسائلها بسياقات حياتية تُحفّز الطلبة على تعلّم الرياضيات بشغف، وتجعله ذا معنى.

ولأنّ كثرة تدرب الطلبة على حلّ المسائل نهجٌ ناجعٌ في ترسيخ المفاهيم الرياضية لديهم وتعزيز طاقاتهم الإجرائية؛ فقد تضمّن كتابا الطالب والتمارين عدداً كافياً من التدريبات؛ بهدف توثيق علاقة الطلبة بالكتاب المدرسي، بوصفه مرجعاً موثوقاً ورسيناً يغنيهم عن البحث عن أيّة مراجع أو مصادر إضافية، ويُحقّق العدالة في التعلّم.

ونحن إذ نُقدّم هذا الكتاب، نُؤمّل أن ينال إعجاب طلبتنا وأعضاء الهيئات التدريسية والتعليمية، ويجعل تعليم الرياضيات وتعلّمها أكثر متعةً وسهولةً، ونَعِدُ بأنّ نستمرّ في تطويره في ضوء ما يصلنا من ملاحظات سديدة.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمة المحتويات

6..... **الوحدة 4 التكامل**

8..... **الدرس 1** تكامل اقترانات خاصة

28..... **الدرس 2** التكامل بالتعويض

47..... **الدرس 3** التكامل بالكسور الجزئية

60..... **الدرس 4** التكامل بالأجزاء

74..... **الدرس 5** المساحات والحجوم

90..... **معمل برمجة جيوجبرا: تطبيقات التكامل: المساحة**

91..... **الدرس 6** المعادلات التفاضلية

105..... **اختبار نهاية الوحدة**

قائمة المحتويات

108

الوحدة 5 المتجهات

110

الدرس 1 المتجهات في الفضاء

126

الدرس 2 المستقيمات في الفضاء

143

الدرس 3 الضرب القياسي

158

اختبار نهاية الوحدة

160

الوحدة 6 الإحصاء والاحتمالات

200

اختبار نهاية الوحدة

202

ملحقات

ما أهمية هذه الوحدة؟

التكامل عملية عكسية للتفاضل؛ لذا يُستعمل في كثير من التطبيقات العلمية والحياتية التي تتضمن قيمًا مُتغيرةً مع الزمن. يُستعمل التكامل أيضًا لحساب المساحات المحصورة بين المنحنيات، والحجوم الناتجة من دوران المناطق المُحددة بمنحنيات، فضلًا عن بعض الحسابات المالية مثل التكلفة الحدية، وبعض الحسابات المُتعلقة بالمجتمعات الحيوية.

سأتعلّم في هذه الوحدة:

- إيجاد تكاملات تتضمن اقترانات أُسّية، ومثلثية، ولو غاريتمية طبيعية ومُشعّبة.
- إيجاد تكاملات باستعمال التعويض، والكسور الجزئية، والأجزاء.
- إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقترانين، وحجم المُجسّم الناتج من دورانها حول المحور x .
- حلّ معادلات تفاضلية.

تعلّمتُ سابقًا:

- ✓ إيجاد التكامل المحدود والتكامل غير المحدود لاقترانات القوّة.
- ✓ إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x .
- ✓ إيجاد الحجم الناتجة من دوران منحنى اقتران حول المحور x .

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (8-6) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

تكامل اقترانات خاصة

Integration of Special Functions

إيجاد تكاملات تتضمن اقترانات أسية، ومثلثية، ولوغاريتمية طبيعية ومُشعَّبة. الإزاحة.

فكرة الدرس

المصطلحات

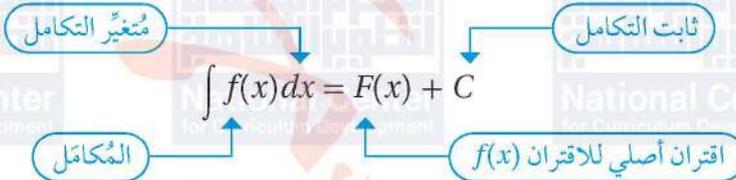
مسألة اليوم

يُمثِّل الاقتران $P(t)$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t يومًا من بدء دراستها في مجتمع بكتيري. إذا كان عدد هذه الخلايا عند بدء الدراسة هو 200000 خلية، فأجد عددها في المجتمع البكتيري بعد 12 يومًا من بدء الدراسة، علمًا بأنَّها تتغيَّر بمعدَّل: $P'(t) = 200e^{0.1t} + 150e^{-0.03t}$.



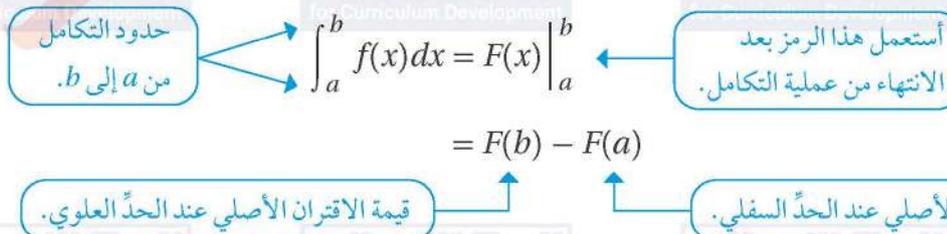
تكامل الاقترانات الأسية

تعلَّمتُ سابقًا أنَّ التكامل هو عملية عكسية للاشتقاق، وأنَّ $\int f(x)dx$ يُسمَّى التكامل غير المحدود للاقتران $f(x)$ ، كما في المخطَّط الآتي الذي يُبيِّن عناصر هذا النوع من التكامل.



أمَّا $\int_a^b f(x)dx$ فيُسمَّى التكامل المحدود للاقتران $f(x)$ ، حيث a الحدُّ السفلي للتكامل، و b الحدُّ العلوي للتكامل.

يُمكن إيجاد قيمة $\int_a^b f(x)dx$ للاقتران المتصل $f(x)$ على النحو الآتي:



أذكَّر

إذا كان $F(x)$ اقترانًا أصليًا للاقتران $f(x)$ ، فإنَّ: $F'(x) = f(x)$ ؛ أيُّ إنه يُمكن التحقق صحة الحلِّ بإيجاد مشتقة نتيجة التكامل. وفي هذه الحالة، يجب أن تكون المشتقة مساوية للمُكامل.

الوحدة 4

بما أن التكامل والاشتقاق عمليتان عكسيتان، فإن ذلك يساعد على إيجاد صيغ مباشرة لتكامل اقترانات ناتجة من اشتقاق اقترانات مشهورة بصورة مباشرة، أو باستعمال قاعدة السلسلة، مثل الاقترانات الأسية.

صيغ تكاملات اقترانات أسية

إذا كانت a, b, k أعدادًا حقيقية، و $a \neq 0$ و $k > 0$ و $k \neq 1$ ، و e العدد النيبيري، فإن:

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$$

$$\int k^x dx = \frac{k^x}{\ln k} + C$$

$$\int k^{ax+b} dx = \frac{k^{ax+b}}{a \ln k} + C$$

مفهوم أساسي

أتذكر

- $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
 - $\frac{d}{dx}(e^{ax+b}) = ae^{ax+b}$
 - $\frac{d}{dx}(k^x) = k^x \times \ln k$
 - $\frac{d}{dx}(k^{ax+b}) = k^{ax+b} \times \ln k \times a$
- حيث $k > 0$ و $k \neq 1$.

مثال 1

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1 $\int 2e^{4x+3} dx$

$$\int 2e^{4x+3} dx = 2 \times \frac{1}{4} e^{4x+3} + C$$

تكامل الاقتران الأسّي الطبيعي المضروب في ثابت

$$= \frac{1}{2} e^{4x+3} + C$$

بالتبسيط

2 $\int_0^2 (6e^{-3x} + x^3) dx$

$$\int_0^2 (6e^{-3x} + x^3) dx = \left(\frac{6}{-3} e^{-3x} + \frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_0^2$$

تكامل الاقتران الأسّي الطبيعي المضروب في ثابت، واقتران القوة

$$= \left(\frac{6}{-3} e^{-3(2)} + \frac{1}{4} (2)^4 \right) - \left(\frac{6}{-3} e^{-3(0)} + \frac{1}{4} (0)^4 \right)$$

بالتعويض

$$= -2e^{-6} + 6$$

3 $\int \sqrt{e^{x+1}} dx$

$$\int \sqrt{e^{x+1}} dx = \int (e^{x+1})^{1/2} dx$$

$$= \int e^{(x+1)/2} dx$$

$$= 2e^{(x+1)/2} + C$$

بكتابة المُكامل في صورة أسّيّة

باستعمال قوانين الأسس

تكامل الاقتران الأسّي الطبيعي

أتذكر

- $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$
- حيث k ثابت.
- $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C,$
- $n \neq -1$

أتذكر

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين متصلين على الفترة $[a, b]$ ، فإن:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

تنطبق هذه القاعدة أيضًا على التكاملات غير المحدودة.

$$4 \int (5^x + 7) dx$$

$$\int (5^x + 7) dx = \frac{5^x}{\ln 5} + 7x + C$$

تكامل الاقتران الأسّي، وتكامل الثابت

أندكر

يحتوي ناتج التكامل غير المحدود على الثابت C ؛ لأنّ مشتقة الثابت صفر. أمّا التكامل المحدود فلا يحتوي على الثابت C ؛ لأنّه يُحذف عند تعويض الحدّ العلوي والحدّ السفلي.

أندقق من فهمي

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$a) \int (5x^2 - 3e^{7x}) dx$$

$$b) \int_0^{\ln 3} 8e^{4x} dx$$

$$c) \int \sqrt{e^{1-x}} dx$$

$$d) \int (3^x + 2\sqrt{x}) dx$$

تكامل الاقترانات المثلثية

تعلمت سابقاً إيجاد مشتقات الاقترانات المثلثية الست، وهذا يعني أنّه يُمكن إيجاد تكاملات الاقترانات المثلثية الناتجة من مشتقات تلك الاقترانات الست بصورة مباشرة.

صيغ تكاملات اقترانات مثلثية (1)

مفهوم أساسي

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

أمّا الاقترانات المثلثية التي تكون زواياها في صورة: $ax + b$ ، حيث: $a \neq 0$ ، فيمكن إيجاد تكاملاتها على النحو الآتي:

أنعلم

إذا كان: $f(x) = \cos x$ فإن: $f'(x) = -\sin x$ وهذا يعني أنّ:

$$\int (-\sin x) dx = \cos x + C$$

ومن ثمّ، فإنّ:

$$\int (\sin x) dx = -\cos x + C$$

علماً بأنّه يُمكن إيجاد بقية صيغ تكاملات الاقترانات المثلثية بالطريقة نفسها.

إذا كان a, b عددين حقيقيين، و $a \neq 0$ ، فإن:

$$\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$$

$$\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$$

$$\int \sec^2(ax + b) dx = \frac{1}{a} \tan(ax + b) + C$$

$$\int \csc^2(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cot(ax + b) + C$$

$$\int \sec(ax + b) \tan(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sec(ax + b) + C$$

$$\int \csc(ax + b) \cot(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \csc(ax + b) + C$$

أُتذَكَّر

جميع الاقترانات المُكاملة في الصندوق المجاور نتجت من اشتقاق الاقترانات الأصلية، باستعمال قواعد اشتقاق الاقترانات المثلثية، وقاعدة السلسلة.

مثال 2

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1 $\int 2 \sin(4x + 3) dx$

$$\begin{aligned} \int 2 \sin(4x + 3) dx &= -2 \times \frac{1}{4} \cos(4x + 3) + C \\ &= -\frac{1}{2} \cos(4x + 3) + C \end{aligned}$$

تكامل $\sin(ax + b)$ المضروب في ثابت بالتبسيط

أُتَعَلَّم

يُمكن التحقق من صحة الحل بإيجاد مشتقة نتيجة التكامل، ومقارنتها بالاقتران المُكامل.

2 $\int (3 \cos x + \sqrt[3]{x}) dx$

$$\begin{aligned} \int (3 \cos x + \sqrt[3]{x}) dx &= \int (3 \cos x + x^{1/3}) dx \\ &= 3 \sin x + \frac{3}{4} x^{4/3} + C \\ &= 3 \sin x + \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + C \end{aligned}$$

بكتابة الجذر في صورة أُسّية تكامل $\cos x$ المضروب في ثابت، وتكامل اقتران القوة بتحويل القوة النسبية إلى جذر

$$3 \int_0^{\pi/12} \sec^2(3x) dx$$

$$\int_0^{\pi/12} \sec^2(3x) dx = \left(\frac{1}{3} \tan 3x \right) \Big|_0^{\pi/12}$$

$$= \left(\frac{1}{3} \tan 3 \left(\frac{\pi}{12} \right) \right) - \left(\frac{1}{3} \tan 3(0) \right)$$

$$= \frac{1}{3}$$

تكامل $\sec^2(ax+b)$

بالتعويض

بالتبسيط

أنتدقق من فهمي

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$a) \int \cos(3x - \pi) dx$$

$$b) \int (\csc^2(5x) + e^{2x}) dx$$

$$c) \int_0^{\pi/3} (\sin 2x - \cos 4x) dx$$

المتطابقات المثلثية والتكامل

تعلّمتُ سابقاً أنه يُمكن إعادة كتابة المقادير المثلثية بصورة مكافئة باستعمال المتطابقات المثلثية، وهذا يساعد على إيجاد تكاملات بعض الاقترانات المثلثية التي لا يُمكن إيجادها مباشرة، مثل: اقترانات الجيب، وجيب التمام، والظل، وظل التمام المرفوعة إلى أس، أو الاقترانات المثلثية التي تكون في صورة حاصل ضرب اقتراني جيب، أو اقتراني جيب تمام، أو اقتران جيب مضروب في اقتران جيب تمام، وغير ذلك من الاقترانات المثلثية.

مثال 3

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$1 \int \tan^2 2x dx$$

$$\int \tan^2 2x dx = \int (\sec^2 2x - 1) dx$$

$$= \frac{1}{2} \tan 2x - x + C$$

تكامل $\sec^2(ax+b)$ ، وتكامل الثابت

متطابقات فيثاغورس

أنتدكر

لا يلزم إضافة ثابت التكامل عند إيجاد ناتج التكامل المحدود.

أنعلم

لا يُمكنني إيجاد تكامل اقتران مثلثي مرفوع إلى أس فردي باستعمال المتطابقات فقط، وإنما أحتاج إلى طرائق أخرى سأتعلمها في الدرس التالي.

الوحدة 4

$$2 \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \, dx$$

متطابقات تقليص القوة

$$= \frac{1}{2} (x - \frac{1}{2} \sin 2x) \Big|_0^{\pi}$$

تكامل $\cos(ax + b)$ ، وتكامل الثابت

$$= \left(\frac{1}{2} (\pi - \frac{1}{2} \sin 2(\pi)) \right) - \left(\frac{1}{2} (0 - \frac{1}{2} \sin 2(0)) \right)$$

بالتعويض

$$= \frac{1}{2} \pi$$

بالتبسيط

أذكّر

بما أنه لا توجد قاعدة لإيجاد تكامل الضرب، فإنه يتعين تبسيط المُكامل إلى حدود جبرية منفصلة باستخدام المتطابقات.

أذكّر

متطابقات الزاوية السالبة:

- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(-x) = \cos x$

أذكّر

تعلّمتُ سابقاً أنه يُمكن إعادة كتابة المقادير المثلثية بصورة لا تحوي كسراً إذا كان مقامها في صورة: $1 \pm u$ ، وذلك باستخدام الضرب في المُرافق. وتُعزى أهمية هذا الإجراء في التكامل إلى عدم وجود قاعدة لإيجاد تكامل القسمة مباشرة.

$$3 \int \sin 4x \cos 5x \, dx$$

$$\int \sin 4x \cos 5x \, dx = \int \frac{1}{2} (\sin(4x-5x) + \sin(4x+5x)) \, dx$$

متطابقات تحويل الضرب إلى جمع

$$= \int \frac{1}{2} (-\sin(x) + \sin(9x)) \, dx$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{2} (\cos(x) - \frac{1}{9} \cos(9x)) + C$$

تكامل $\sin(ax + b)$ المضروب في ثابت

$$4 \int \frac{dx}{1 - \cos x}$$

$$\int \frac{dx}{1 - \cos x} = \int \left(\frac{1}{1 - \cos x} \times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} \right) dx$$

بضرب البسط والمقام في مُرافق $1 - \cos x$ ، وهو $1 + \cos x$

$$= \int \frac{1 + \cos x}{1 - \cos^2 x} \, dx$$

بالتبسيط

$$= \int \frac{1 + \cos x}{\sin^2 x} \, dx$$

متطابقات فيثاغورس

$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{\cos x}{\sin^2 x} \right) dx$$

بتوزيع المقام على البسط

$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x} \right) dx$$

بتوزيع المقام على البسط

$$= \int (\csc^2 x + \csc x \cot x) \, dx$$

متطابقة المقلوب، والمتطابقات النسبية

$$= -\cot x - \csc x + C$$

تكامل $\csc^2 x$ ، وتكامل $\csc x \cot x$

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

a) $\int \cos^4 x \, dx$

b) $\int_0^{\pi/6} \sin 3x \sin x \, dx$

c) $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$

تكاملات ينتج منها اقتران لوغاريتمي طبيعي

تعلّمتُ سابقاً أنّ: $\frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{1}{x}$ ، وهذا يعني أنّ: $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C$ ، وبما أنّ $\ln x$ مُعرّف فقط عندما $x > 0$ ، فإنّ:

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C \quad , \quad x > 0 \quad \dots\dots (1)$$

ولكنّ $\ln(-x)$ مُعرّف عندما $x < 0$ ، وباستعمال قاعدة السلسلة، فإنّ:

$$\frac{d}{dx} (\ln(-x)) = \frac{1}{-x} \times -1 = \frac{1}{x}$$

وهذا يعني أنّ:

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln(-x) + C \quad , \quad x < 0 \quad \dots\dots (2)$$

وبدمج النتيجةين (1) و (2)، فإنّه يُمكن التوصل إلى القاعدة الآتية:

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C \quad , \quad x \neq 0$$

يُمكن استعمال هذه القاعدة لإيجاد تكاملات مجموعة أوسع من الاقترانات، مثل الاقترانات التي تُكتب في صورة: $\frac{1}{ax+b}$ ، أو صورة: $\frac{f'(x)}{f(x)}$ ؛ أي الاقترانات التي يُمكن كتابتها في صورة يكون فيها البسط أحد مضاعفات مشتقة المقام، وذلك بملاحظة أنّ:

$$\frac{d}{dx} (\ln |f(x)|) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

تكاملات ينتج منها اقتران لوغاريتمي طبيعي

مفهوم أساسي

إذا كان a, b عددين حقيقيين، و $a \neq 0$ ، وكان $f(x)$ اقتراناً قابلاً للاشتقاق، فإنّ:

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C \quad , \quad x \neq 0$$

$$\int \frac{1}{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C \quad , \quad x \neq -\frac{b}{a}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + C, f(x) \neq 0$$

معلومة

ابتكر إسحق نيوتن (1642 - 1726م) وجوتفريد لايبنتس (1646 - 1716م) التفاضل والتكامل؛ كلٌّ على حدة، لكنّ الأول برهن نتائجه هندسياً، في حين استعمل الثاني طرائق جبرية ورمزية لبرهنة نتائجه.

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1 $\int (2e^x + \frac{3}{x}) dx$

$$\int (2e^x + \frac{3}{x}) dx = 2e^x + 3 \ln |x| + C$$

تكامل e^x المضروب في ثابت،
وتكامل $\frac{1}{x}$ المضروب في ثابت

2 $\int \frac{1}{4x-1} dx$

$$\int \frac{1}{4x-1} dx = \frac{1}{4} \ln |4x-1| + C$$

تكامل $\frac{1}{ax+b}$

3 $\int \frac{2x^5-4}{x} dx$

$$\int \frac{2x^5-4}{x} dx = \int (\frac{2x^6}{x} - \frac{4}{x}) dx$$

بقسمة كل حد في البسط على المقام

$$= \int (2x^4 - \frac{4}{x}) dx$$

بالتبسيط

$$= \frac{2}{5} x^5 - 4 \ln |x| + C$$

تكامل اقتران القوة المضروب في ثابت،
وتكامل $\frac{1}{x}$ المضروب في ثابت

4 $\int \frac{2x}{x^2-1} dx$

$$\int \frac{2x}{x^2-1} dx = \ln |x^2-1| + C$$

تكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

5 $\int \frac{6x}{x^2+9} dx$

$$\int \frac{6x}{x^2+9} dx = 3 \int \frac{2x}{x^2+9} dx$$

بإعادة كتابة الاقتران في صورة: $k \frac{f'(x)}{f(x)}$

$$= 3 \ln |x^2+9| + C$$

تكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

$$= 3 \ln(x^2+9) + C$$

$$|x^2+9| = x^2+9$$

أتذكر

بما أنه لا توجد قاعدة لتكامل القسمة، فإنه يتعين تبسيط المُكامل إلى حدود جبرية منفصلة.

أتعلم

الأحظ أن البسط $(2x)$ هو مشتقة المقام:
 $\frac{d}{dx}(x^2-1) = 2x$

أتعلم

بما أن البسط $(6x)$ هو أحد مضاعفات مشتقة المقام:
 $(\frac{d}{dx}(x^2+9) = 2x)$
فإنني أعيد كتابة $\frac{6x}{x^2+9}$ في صورة: $k \frac{f'(x)}{f(x)}$

6 $\int \frac{\cos x}{3 + 2 \sin x} dx$

$$\int \frac{\cos x}{3 + 2 \sin x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2 \times \cos x}{3 + 2 \sin x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2 \cos x}{3 + 2 \sin x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln |3 + 2 \sin x| + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln (3 + 2 \sin x) + C$$

بالضرب في 2، والقسمة على 2

بالتبسيط

تكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

$$|3 + 2 \sin x| = 3 + 2 \sin x$$

أفكر

ما مَسَوُوع عملية الضرب

في 2، وعملية القسمة

على 2؟

أفكر

لماذا؟

$$|3 + 2 \sin x| = 3 + 2 \sin x$$

7 $\int \tan x dx$

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$= \frac{1}{-1} \int \frac{-1 \times \sin x}{\cos x} dx$$

$$= -\ln |\cos x| + C$$

المتطابقات النسبية

بالضرب في -1، والقسمة على -1

تكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

8 $\int \sec x dx$

$$\int \sec x dx = \int \sec x \times \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$$

$$= -\ln |\sec x + \tan x| + C$$

بالضرب في $\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$

باستعمال خاصية التوزيع

تكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

أدقق من فهمي أجد كلاً من التكاملات الآتية:

a) $\int \left(\sin x - \frac{5}{x} \right) dx$

b) $\int \frac{5}{3x+2} dx$

c) $\int \frac{x^2 - 7x + 2}{x^2} dx$

d) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x} dx$

e) $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} dx$

f) $\int \cot x dx$

g) $\int \frac{e^x}{e^x+7} dx$

h) $\int \csc x dx$

أندكر

الاقترانات النسبية هي

اقترانات يُمكن كتابتها

في صورة نسبة بين كثيري

حدود: $\frac{f(x)}{g(x)}$ ، حيث:

$$g(x) \neq 0$$

يتطلب إيجاد تكاملات بعض الاقترانات النسبية أحياناً إعادة كتابة المُكامل بصورة أخرى

باستعمال القسمة، في حال كانت درجة البسط أعلى من (أو تساوي) درجة المقام. وقد ينتج

من صورة الاقتران الجديدة تكامل ينتج منه اقتران لوغاريتمي طبيعي.

أجد: $\int \frac{x^3 + x}{x-1} dx$

بما أن المُكامل اقتران نسبي، درجة البسط فيه أعلى من درجة المقام، فإنني سأعيد كتابته بصورة أخرى باستعمال القسمة.

الخطوة 1: أقسم البسط على المقام.

×	x^2	x	2	
x	x^3	x^2	$2x$	2
-1	$-x^2$	$-x$	-2	

الخطوة 2: أعيد كتابة المُكامل باستعمال نتيجة القسمة.

$$\int \frac{x^3 + x}{x-1} dx = \int \left(x^2 + x + 2 + \frac{2}{x-1} \right) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2 \ln |x-1| + C$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

تكامل اقتران القوة، وتكامل $\frac{1}{ax+b}$ المضروب في ثابت

أنتحقق من فهمي

أجد: $\int \frac{x^2 + x + 1}{x+1} dx$

تكاملات الاقترانات المُتشعبة

تعلمت سابقاً بعض قواعد التكامل المحدود، مثل قاعدة تجزئة التكامل. فإذا كان $f(x)$ اقتراناً متصلاً على الفترة $[a, b]$ ، فإن:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

يمكن استعمال هذه القاعدة لإيجاد التكامل المحدود لبعض الاقترانات، التي من أهمها الاقترانات المُتشعبة، في حال احتوت فترة التكامل على قواعد مختلفة للاقتران. ومن ثم، أُجزئ التكامل عند نقاط التشعب، ثم أجد تكامل كل قاعدة على فترتها الجزئية.

أتذكر

إذا كان $\frac{f(x)}{g(x)}$ اقتراناً نسبياً فيه درجة $f(x)$ أكبر من أو تساوي درجة $g(x)$ ، وكان ناتج القسمة $q(x)$ ، وباقي القسمة $r(x)$ ، فإن:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

أتذكر

يمكنني أيضاً استعمال القسمة الطويلة بقسمة البسط على المقام.

أتذكر

عند تطبيق قاعدة تجزئة التكامل، لا يشترط أن يكون $a < c < b$.

مثال 6

$$\int_1^4 f(x) dx \text{ : فأجد قيمة } f(x) = \begin{cases} 12, & x < 2 \\ 3x^2, & x \geq 2 \end{cases} \text{ إذا كان:}$$

$$\begin{aligned} \int_1^4 f(x) dx &= \int_1^2 12 dx + \int_2^4 3x^2 dx \\ &= 12x \Big|_1^2 + x^3 \Big|_2^4 \\ &= 12(2-1) + ((4)^3 - (2)^3) \\ &= 68 \end{aligned}$$

قاعدة تجزئة التكامل

تكامل الثابت، وتكامل اقتران القوة

بالتعويض

بالتبسيط

أنعلم

بما أن العدد 2 هو نقطة تشعب الاقتران، فإنني أجزئ التكامل عند هذه النقطة.

$$\int_{-2}^6 f(x) dx \text{ : فأجد قيمة } f(x) = |x| \text{ إذا كان:}$$

الخطوة 1: أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

الخطوة 2: أجد قيمة التكامل المحدود.

$$\begin{aligned} \int_{-2}^6 f(x) dx &= \int_{-2}^0 -x dx + \int_0^6 x dx \\ &= -\frac{1}{2}x^2 \Big|_{-2}^0 + \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^6 \\ &= -\frac{1}{2}((0)^2 - (-2)^2) + \frac{1}{2}(6^2 - 0^2) \\ &= 20 \end{aligned}$$

قاعدة تجزئة التكامل

تكامل اقتران القوة

بالتعويض

بالتبسيط

أنعلم

يطلق على إعادة كتابة اقتران القيمة المطلقة في صورة اقتران مُشعب إعادة تعريف اقتران القيمة المطلقة، ويكون ذلك بدراسة إشارة المقدار داخل القيمة المطلقة.

$$\int_0^3 f(x) dx \text{ : فأجد قيمة } f(x) = |4 - x^2| \text{ إذا كان:}$$

الخطوة 1: أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة.

$$f(x) = |4 - x^2| = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leq -2 \\ 4 - x^2, & -2 < x < 2 \\ x^2 - 4, & x \geq 2 \end{cases}$$

3

الخطوة 2: أجد قيمة التكامل المحدود.

$$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^2 (4 - x^2) dx + \int_2^3 (x^2 - 4) dx \quad \text{قاعدة تجزئة التكامل}$$

$$= \left(4x - \frac{1}{3}x^3\right) \Big|_0^2 + \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right) \Big|_2^3 \quad \text{تكامل الثابت، وتكامل اقتران القوة}$$

$$= \left(4(2) - \frac{1}{3}(2)^3\right) - \left(4(0) - \frac{1}{3}(0)^3\right) + \left(\frac{1}{3}(3)^3 - 4(3)\right) - \left(\frac{1}{3}(2)^3 - 4(2)\right) \quad \text{بالتعويض}$$

$$= \frac{23}{3} \quad \text{بالتبسيط}$$

أتحقق من فهمي

(a) إذا كان: $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x < 1 \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$ فأجد قيمة: $\int_{-1}^3 f(x) dx$

(b) إذا كان: $f(x) = |1-x|$ فأجد قيمة: $\int_{-2}^2 f(x) dx$

(c) إذا كان: $f(x) = |x^2 - 1|$ فأجد قيمة: $\int_{-4}^0 f(x) dx$

أتعلم

عند إيجاد التكامل المحدود لاقتران مُتَشَعَّب، فإنه لا يُشترط أن يكون الاقتران متصلًا عند نقاط التشعب. والمهم هو أن تكون قاعدة الاقتران متصلة على كل فترة جزئية من التكامل.

تطبيقات التكامل: الشرط الأولي

تعلمت سابقًا أن الشرط الأولي هو نقطة تُحَقَّق الاقتران الأصلي، ويُمكن بتعويضها إيجاد قيمة ثابت التكامل C ، وأنه يُمكن بها إيجاد الاقتران الأصلي الوحيد الذي يُحَقِّق شرط المسألة، علمًا بأن الشرط الأولي يُستعمل كثيرًا لتحديد اقترانات تُنمِّدج مواقف علمية وحياتية.

مثال 7: من الحياة



تلوث: يُعالج التلوث في بحيرة باستعمال مضاد للبكتيريا.

إذا كان عدد الخلايا البكتيرية الضارة في البحيرة يتغير بمعدل: $N'(t) = -\frac{2000t}{1+t^2}$ ، حيث $N(t)$ عدد الخلايا

البكتيرية لكل مئيلتر من الماء، بعد t يومًا من استعمال

المضاد، فأجد $N(t)$ ، علمًا بأن العدد الابتدائي للخلايا هو 5000 خلية لكل مئيلتر.

الخطوة 1: أجد تكامل الاقتران: $N'(t)$.

$$N(t) = \int -\frac{2000t}{1+t^2} dt$$

$$= -1000 \int \frac{2t}{1+t^2} dt$$

$$= -1000 \ln |1+t^2| + C$$

$$= -1000 \ln (1+t^2) + C$$

$$N(t) = \int N'(t) dt$$

بالضرب في 2، والقسمة على 2

$$\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$|1+t^2| = 1+t^2$$

الخطوة 2: أجد ثابت التكامل C .

$$N(t) = -1000 \ln (1+t^2) + C$$

$$5000 = -1000 \ln (1+(0)^2) + C$$

$$5000 = C$$

قاعدة الاقتران

$$t=0, N(0) = 5000$$

بتعويض
بالتبسيط

إذن، اقتران عدد الخلايا البكتيرية لكل مليلتر من الماء بعد t يوماً من استعمال المضاد هو:

$$N(t) = -1000 \ln (1+t^2) + 5000$$

أتحقق من فهمي

تلوث: تسرب نفط من ناقلة بحرية، مكوّنًا بقعة دائرية الشكل على سطح الماء، نصف قطرها $R(t)$ قدمًا بعد t دقيقة من بدء التسرب. إذا كان نصف قطر الدائرة يزداد بمعدل:

$$R'(t) = \frac{21}{0.07t + 5}, \text{ فأجد } R(t), \text{ علمًا بأن } R = 0 \text{ عندما } t = 0.$$

تطبيقات التكامل: الحركة في مسار مستقيم

من التطبيقات المهمة على الشرط الأولي، إيجاد موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم إذا عُلِمَ اقتران السرعة المتجهة، وعُلِمَ شرط أولي عن موقع الجسم.

يُطلق على التغير في موقع الجسم اسم **الإزاحة** (displacement). فإذا كان $s(t)$ موقع جسم عند الزمن t ، فإن الإزاحة على الفترة الزمنية $[t_1, t_2]$ هي: $s(t_2) - s(t_1)$ ، وقد تكون قيمتها موجبة، أو سالبة، أو صفرًا، تبعًا لاتجاه حركة الجسم.



يُستعمل التكامل المحدود لإيجاد إزاحة جسم، عُلِمَت سرعته المتجهة، على النحو الآتي:

الإزاحة

مفهوم أساسي

إذا تحرك جسم في مسار مستقيم وفق اقتران الموقع $s(t)$ ، فإن سرعته المتجهة هي:

$$v(t) = s'(t), \text{ وإزاحته في الفترة الزمنية } [t_1, t_2] \text{ هي:}$$

$$s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

أمّا إذا كان المطلوب إيجاد المسافة الكلية التي قطعها جسم خلال فترة زمنية فيجب تحديد الفترات الزمنية الجزئية التي تكون عندها $v(t) \leq 0$ (يتحرك الجسم إلى اليسار)، وتحديد الفترات الزمنية الجزئية التي تكون عندها $v(t) \geq 0$ (يتحرك الجسم إلى اليمين). وفي كلتا الحالتين، تُحسب المسافة بإيجاد تكامل اقتران السرعة $|v(t)|$ على النحو الآتي:

المسافة الكلية المقطوعة

مفهوم أساسي

إذا تحرك جسم في مسار مستقيم وفق اقتران الموقع $s(t)$ ، فإن سرعته المتجهة هي:

$$v(t) = s'(t), \text{ والمسافة الكلية التي قطعها الجسم في الفترة الزمنية } [t_1, t_2] \text{ هي:}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)| dt$$

أتعلم

المسافة هي طول المسار الذي يقطعه الجسم بصرف النظر عن الاتجاه، وقيمتها أكبر من (أو تساوي) الصفر. أمّا الإزاحة فهي التغير في الموقع.



مثال 8

يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = \sin t$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالتر لكل ثانية:

1 إذا بدأ الجسيم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقع الجسيم بعد $\frac{\pi}{3}$ ثانية من بدء الحركة. بما أن اقتران الموقع هو اقتران أصلي لاقتران السرعة المتجهة، فإنه يُمكن إيجاد موقع الجسيم بعد t ثانية عن طريق التكامل. وبما أن المطلوب هو إيجاد موقع الجسيم بعد $\frac{\pi}{3}$ ثانية من بدء الحركة، فإنه يتعين إيجاد تكامل: $v(t) = \sin t$.

أتذكر

اقتران الموقع هو اقتران أصلي لاقتران السرعة، و اقتران السرعة هو اقتران أصلي لاقتران التسارع.

الخطوة 1: أجد اقتران الموقع .

$$s(t) = \int v(t) dt$$

بإيجاد تكامل اقتران السرعة المتجهة

$$= \int \sin t dt$$

بتعويض $v(t) = \sin t$

$$= -\cos t + C_1$$

تكامل $\sin t$

الخطوة 2: أجد قيمة ثابت التكامل C_1 .

بما أن الموقع الابتدائي للجسيم هو نقطة الأصل، فإن $s(0) = 0$ ، وهذا يُعد شرطاً أولياً لإيجاد

قيمة ثابت التكامل C_1 :

$$s(t) = -\cos t + C_1$$

اقتران الموقع

$$0 = -\cos(0) + C_1$$

بتعويض $t = 0, s(0) = 0$

$$C_1 = 1$$

بحل المعادلة

إذن، اقتران الموقع بعد t ثانية من بدء الحركة هو: $s(t) = -\cos t + 1$.

الخطوة 3: أجد موقع الجسيم بعد $\frac{\pi}{3}$ ثانية من بدء الحركة.

$$s(t) = -\cos t + 1$$

اقتران الموقع

$$s\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1$$

بتعويض $t = \frac{\pi}{3}$

$$= \frac{1}{2}$$

بالتبسيط

إذن، موقع الجسيم بعد $\frac{\pi}{3}$ ثانية من بدء الحركة هو $\frac{1}{2} m$.

2 أجد إزاحة الجسيم في الفترة $[0, 3\pi]$.

$$s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

صيغة الإزاحة

$$s(3\pi) - s(0) = \int_0^{3\pi} \sin t dt$$

بتعويض $v(t) = \sin t, t_1 = 0, t_2 = 3\pi$

$$= -\cos t \Big|_0^{3\pi}$$

تكامل $\sin t$

$$= -(\cos(3\pi) - \cos(0))$$

بتعويض

$$= 2$$

بالتبسيط

إذن، إزاحة الجسيم هي $2 m$.

القيمة الموجبة للإزاحة تعني أن الموقع النهائي للجسيم يقع في الجهة الموجبة بالنسبة إلى الموقع الابتدائي، والقيمة السالبة للإزاحة تعني أن الموقع النهائي للجسيم يقع في الجهة السالبة بالنسبة إلى الموقع الابتدائي. أما الصفر فيعني عدم وجود إزاحة.

3 أجد المسافة الكلية التي قطعها الجسيم في الفترة $[0, 3\pi]$.

الخطوة 1: أدرس إشارة السرعة المتجهة.

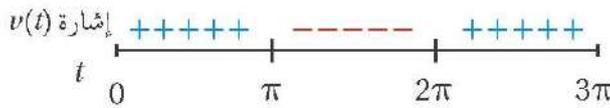
أجد أصفار اقتران السرعة المتجهة بمساواة هذا الاقتران بالصفر:

$$v(t) = \sin t \quad \text{اقتران السرعة المتجهة}$$

$$\sin t = 0 \quad \text{بمساواة اقتران السرعة المتجهة بالصفر}$$

$$t = 0 \quad t = \pi \quad t = 2\pi \quad t = 3\pi \quad \text{بحل المعادلة لـ } t \text{ في الفترة } [0, 3\pi]$$

أدرس إشارة اقتران السرعة المتجهة حول أصفاره في الفترة المعطاة.



الخطوة 2: أكمل اقتران السرعة على الفترة $[0, 3\pi]$.

$$\int_0^{3\pi} |v(t)| dt = \int_0^{\pi} v(t) dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-v(t)) dt + \int_{2\pi}^{3\pi} v(t) dt \quad \text{تكامل اقتران السرعة}$$

$$= \int_0^{\pi} \sin t dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin t) dt + \int_{2\pi}^{3\pi} \sin t dt \quad \text{بتعويض } v(t) = \sin t$$

$$= (-\cos t) \Big|_0^{\pi} + \cos t \Big|_{\pi}^{2\pi} + (-\cos t) \Big|_{2\pi}^{3\pi} \quad \text{تكامل } \sin t$$

$$= 2 + 2 + 2 = 6 \quad \text{بالتبسيط}$$

إذن، المسافة الكلية التي قطعها الجسيم في الفترة $[0, 3\pi]$ هي 6 m.

أتحقق من فهمي

يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = 3 \cos t$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية:

(a) إذا بدأ الجسيم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقع الجسيم بعد $\frac{\pi}{6}$ ثانية من بدء الحركة.

(b) أجد إزاحة الجسيم في الفترة $[0, 2\pi]$.

(c) أجد المسافة الكلية التي قطعها الجسيم في الفترة $[0, 2\pi]$.

أذكر

أعيد تعريف اقتران السرعة وفقاً لإشارة

السرعة المتجهة.



أجدُّ كلاً من التكاملات الآتية:

$$1 \int (e^{2x-3} - \sqrt{x}) dx$$

$$2 \int \left(e^{0.5x} - \frac{3}{e^{0.5x}} \right) dx$$

$$3 \int (4 \sin 5x - 5 \cos 4x) dx$$

$$4 \int \left(3 \sec x \tan x - \frac{2}{5x} \right) dx$$

$$5 \int \left(\sqrt{e^x} - \frac{1}{\sqrt{e^x}} \right)^2 dx$$

$$6 \int (\sin(5-3x) + 2 + 4x^2) dx$$

$$7 \int (e^x + 1)^2 dx$$

$$8 \int (e^{4-x} + \sin(4-x) + \cos(4-x)) dx$$

$$9 \int \frac{x^4 - 6}{2x} dx$$

$$10 \int \left(3 \csc^2(3x+2) + \frac{5}{x} \right) dx$$

$$11 \int \frac{e^x + 1}{e^x} dx$$

$$12 \int \frac{e^x}{e^x + 4} dx$$

$$13 \int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x + 4} dx$$

$$14 \int \frac{dx}{5 - \frac{x}{3}}$$

$$15 \int \frac{1}{1 - \sin x} dx$$

$$16 \int \sec^2 x (1 + e^x \cos^2 x) dx$$

$$17 \int \left(\frac{2}{x} - 2^x \right) dx$$

$$18 \int \sin 3x \cos 2x dx$$

$$19 \int \frac{2x+3}{3x^2+9x-1} dx$$

$$20 \int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} dx$$

$$21 \int \left(\frac{1 + \cos x}{\sin^2 x} + (\sin^2 x \csc x) \right) dx$$

$$22 \int (\sec x + \tan x)^2 dx$$

$$23 \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$$

$$24 \int \frac{x^2}{x^3 - 3} dx$$

$$25 \int (9 \cos^2 x - \sin^2 x - 6 \sin x \cos x) dx$$

$$26 \int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx$$

27 $\int_0^{\pi} 2 \cos \frac{1}{2} x dx$

28 $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx$

29 $\int_{\pi/6}^{\pi/3} 3 \tan^2 x dx$

30 $\int_1^e \frac{8x}{x^2+1} dx$

31 $\int_0^{\pi/6} \sin 3x \cos x dx$

32 $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cot^2 x}{1+\cot^2 x} dx$

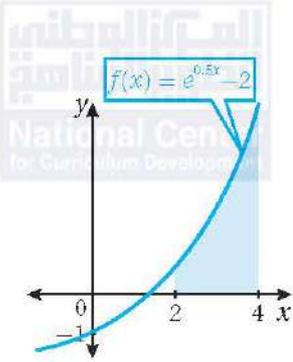
33 $\int_0^3 (x - 5^x) dx$

34 $\int_0^4 |x^2 - 4x + 3| dx$

35 $\int_1^4 (3 - |x - 3|) dx$

36 إذا كان: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & , x < 0 \\ 4 - x & , x \geq 0 \end{cases}$ ، فأجد قيمة: $\int_{-1}^1 f(x) dx$

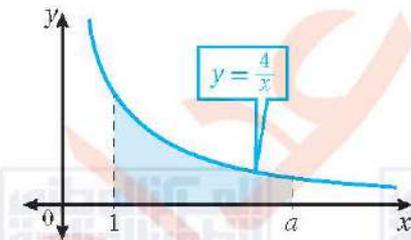
37 أجد مساحة المنطقة المظللة بين المحور x ومنحنى الاقتران: $f(x) = e^{0.5x} - 2$ الممثل في الشكل المجاور.



38 إذا كان: $\int_a^{3a} \frac{2x+1}{x} dx = \ln 12$ ، فأجد قيمة الثابت a ، حيث: $a > 0$.

39 أثبت أن: $\int_0^a \frac{x}{x^2+a^2} dx = \ln \sqrt{2}$ ، حيث: $a \neq 0$.

40 يُبين الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{4}{x}$. إذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ ، والمحور x ، والمستقيمين: $x = a$ ، و $x = 1$ هي 10 وحدات مربعة، فأجد قيمة الثابت a .



41 إذا كان: $f(x) = \int \cos \left(\frac{1}{2} x + \pi \right) dx$ ، وكان: $f(\pi) = 3$ ، فأجد $f(0)$.

42 إذا كان: $y = \int \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) dx$ ، وكان: $y = 1$ عندما $x = \frac{\pi}{4}$ ، فأثبت أنه يُمكن كتابة y في صورة: $y = \frac{1 + \sin 2x}{2}$.

43 يُمثّل الاقتران: $\frac{dy}{dx} = e^{2x} - 2e^{-x}$ ميل المماس لمنحنى الاقتران y . أجد قاعدة الاقتران y إذا علمتُ أنّ منحناه يمرُّ بالنقطة $(0, 1)$.

44 إذا كان: $\int_{\pi/9}^{\pi} (9 + \sin 3x) dx = a\pi + b$ ، فأجد قيمة الثابتين النسبيين: a ، و b .

45 يُمثّل الاقتران: $f'(x) = \cos^2 x$ ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$. أجد قاعدة الاقتران f إذا علمتُ أنّ منحناه يمرُّ بنقطة الأصل.

يتحرّك جُسيّم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = e^{-2t}$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسيّم هو 3 m، فأجد كلاً ممّا يأتي:

46 موقع الجُسيّم بعد t ثانية.

47 موقع الجُسيّم بعد 100 ثانية.

بيئة: في دراسة تناولت أحد أنواع الحيوانات المُهدّدة بالانقراض في غابة، تبين أنّ عدد حيوانات هذا النوع $P(t)$ يتغيّر بمعدّل: $P'(t) = -0.51e^{-0.03t}$ ، حيث t الزمن بالسنوات بعد بدء الدراسة:

48 أجد قاعدة الاقتران $P(t)$ عند أيّ زمن t ، علمًا بأنّ عدد حيوانات هذا النوع عند بدء الدراسة هو 500 حيوان.

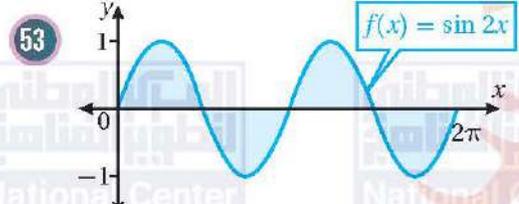
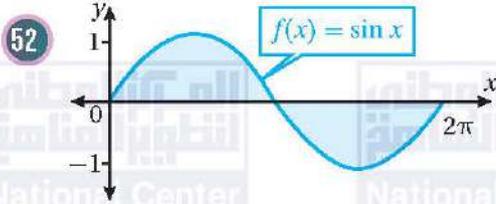
49 أجد عدد الحيوانات بعد 10 سنوات من بدء الدراسة، مُقرّبًا إيجابتي إلى أقرب عدد صحيح.

طب: في تجربة لدواء جديد أُعطي لمريض لديه ورم حميد، حجمه 30 cm^3 ، تبين أنّ حجم الورم بعد t يومًا من بدء التجربة يتغيّر بمعدّل: $P'(t) = 0.15 - 0.9e^{0.006t}$ مقيسًا بوحدة (cm^3/day) :

50 أجد قاعدة حجم الورم بعد t يومًا من بدء التجربة.

51 أجد حجم الورم بعد 10 أيام من بدء التجربة.

تبرير: أجد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلين البيانيين الآتين، مُبرَّرًا إجابتي:



تحذُّر: أجد كلاً من التكاملات الآتية:

54 $\int \frac{\sec x}{\sin x - \cos x} dx$

55 $\int \frac{\cot x}{2 + \sin x} dx$

56 $\int \frac{1}{x \ln x^3} dx$

57 تبرير: إذا كان: $\int_1^a \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x+3} \right) dx = 0.5 \ln 5$ ، فأجد قيمة الثابت a ، حيث: $a > 0$.

58 تبرير: أثبت بطريقتين مختلفتين أن: $\int_0^{\pi/4} \cos x \cos 3x dx - \int_0^{\pi/4} \sin x \sin 3x dx = 0$.

59 تبرير: إذا كان: $\int_{\pi/4k}^{\pi/3k} (1 - \pi \sin kx) dx = \pi(7 - 6\sqrt{2})$ ، فأجد قيمة الثابت k ، مُبرَّرًا إجابتي.

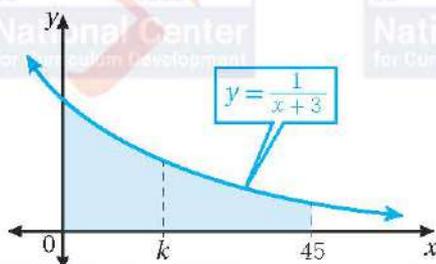
تحذُّر: يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران:

$$v(t) = \begin{cases} 2t + 4 & , 0 \leq t \leq 6 \\ 20 - (t-8)^2 & , 6 < t \leq 10 \end{cases}$$

حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتري لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد كلاً مما يأتي:

60 موقع الجُسَيْم بعد 5 ثوانٍ من بدء الحركة. 61 موقع الجُسَيْم بعد 9 ثوانٍ من بدء الحركة.

إرشاد: بما أن اقتران الموقع هو اقتران متصل دائماً، فإن الموقع النهائي للجُسَيْم في الفترة الأولى هو الموقع الابتدائي للجُسَيْم في الفترة الثانية.



62 تحذُّر: يُبيِّن الشكل المجاور المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران:

$$y = \frac{1}{x+3} \text{، والمحور } x \text{، والمستقيمين: } x = 0, x = 45.$$

أجد قيمة k التي تقسم المنطقة المظللة إلى منطقتين متساويتين في

المساحة.

التكامل بالتعويض

Integration by Substitution

إيجاد تكاملات باستعمال طريقة التعويض .

التكامل بالتعويض .

يُمثّل الاقتران $G(t)$ الكتلة الحيوية لمجتمع أسماك في بحيرة بعد t سنة من بدء دراستها، حيث G مقيسة بالكيلوغرام. إذا كان مُعدّل تغيّر الكتلة الحيوية للأسماك هو $G'(t) = \frac{60000e^{-0.6t}}{(1 + 5e^{-0.6t})^2}$ مقيسًا بوحدة (kg/year)، وكانت الكتلة الحيوية للأسماك عند بدء الدراسة هي 25000 kg، فأجد الكتلة الحيوية المُتوقّعة للأسماك بعد 20 سنة من بدء الدراسة.



فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم



التكامل بالتعويض

تعلمت سابقاً أنّه يُمكن استعمال التكامل لإيجاد اقتران أصلي للاقتران المُكامل، وذلك بالبحث عن اقتران مشتقته تعطي الاقتران المُكامل. ولكن، لا يُمكن إيجاد اقتران أصلي لبعض التكاملات مباشرة، مثل: $\int 2x\sqrt{x^2 + 6} dx$ ؛ لذا نلجأ إلى طرائق أخرى للتكامل، منها طريقة التكامل بالتعويض (integration by substitution)، التي تتضمن استعمال مُتغيّر جديد بدلاً من مُتغيّر التكامل.

أنتذكر

لا توجد قاعدة لتكامل الضرب، أو تكامل القسمة.

يُمكن إيجاد $\int 2x\sqrt{x^2 + 6} dx$ باستعمال مُتغيّر جديد، وليكن u ، بدلاً من المُتغيّر x ، باتباع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: أفترض أنّ u هو المقدار أسفل الجذر التربيعي؛ أي إنّ: $u = x^2 + 6$.

الخطوة 2: أجد مشتقة u ، وهي: $\frac{du}{dx} = 2x$.

الخطوة 3: أحلّ المعادلة لـ dx : $dx = \frac{du}{2x}$.

الخطوة 4: أستعمل المُتغيّر u بدلاً من المُتغيّر x في التكامل.

أتعلم

عند استعمال التعويض لحلّ التكامل، فإنّ التكامل الجديد يجب أن يكون كله بدلالة المُتغيّر الجديد.

$$\int 2x\sqrt{x^2 + 6} dx = \int 2x\sqrt{u} \times \frac{du}{2x} \quad u = x^2 + 6, dx = \frac{du}{2x} \text{ بتعويض}$$

$$= \int \sqrt{u} du \quad \text{بالتبسيط}$$

$$= \int u^{1/2} du \quad \text{الصورة الأسية}$$

$$= \frac{2}{3} u^{3/2} + C \quad \text{تكامل اقترانات القوة}$$

$$= \frac{2}{3} (x^2 + 6)^{3/2} + C \quad u = x^2 + 6 \text{ بتعويض}$$

ألاحظ من التكامل: $\int 2x\sqrt{x^2 + 6} dx$ أن $(2x)$ هو مشتقة $(x^2 + 6)$. وبوجه عام، يُمكن حلُّ أيِّ تكامل بطريقة التعويض إذا أمكن كتابته في صورة: $\int f(g(x)) g'(x) dx$.

التكامل بالتعويض للتكاملات غير المحدودة

مفهوم أساسي

إذا كان: $u = g(x)$ اقتراناً قابلاً للاشتقاق، ومداه الفترة I ، وكان f اقتراناً متصلًا على I ، فإن:

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du$$

يُمكن تلخيص خطوات حلِّ التكامل بالتعويض على النحو الآتي:

خطوات حلِّ التكامل بالتعويض

ملخص المفهوم

الخطوة 1: أحدد التعويض u الذي يُمكن به تبسيط المُكامل.

الخطوة 2: أعبر عن المُكامل بدلالة u و du ، وأحذف مُتغيّر التكامل الأصلي ومشتقته حذفًا كاملاً، ثم أكتب المُكامل الجديد في أبسط صورة.

الخطوة 3: أجد التكامل الجديد.

الخطوة 4: أعبر عن الاقتران الأصلي الذي أوجدته في الخطوة السابقة باستعمال المُتغيّر الأصلي عن طريق التعويض.

أتعلم

يُمكنني التحقق من صحة إجابتي بإيجاد مشتقة الاقتران الأصلي، باستعمال قاعدة السلسلة، ومقارنة الناتج بالاقتران المُكامل:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{3} (x^2 + 6)^{3/2} + C \right) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} (x^2 + 6)^{1/2} \times 2x \\ &= 2x\sqrt{x^2 + 6} \end{aligned}$$

أتعلم

بوجه عام، إذا احتوى المُكامل على اقتران ومشتقته، فإنّه يُمكن حلُّ التكامل بتعويض الاقتران.

مثال 1

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$1 \int 6x^2 (2x^3 - 3)^4 dx$$

أفترض أن: $u = 2x^3 - 3$ ومن ثم، فإن:

$$\frac{du}{dx} = 6x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{6x^2}$$

$$\int 6x^2 (2x^3 - 3)^4 dx = \int 6x^2 (u)^4 \times \frac{du}{6x^2} \quad u = 2x^3 - 3, dx = \frac{du}{6x^2} \text{ بتعويض}$$

$$= \int u^4 du$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{5} u^5 + C$$

تكامل اقتران القوة

$$= \frac{1}{5} (2x^3 - 3)^5 + C$$

بتعويض $u = 2x^3 - 3$

أنعلم

لا أنسى عكس عملية التعويض بعد إجراء التكامل.

$$2 \int \sin x e^{\cos x} dx$$

أفترض أن: $u = \cos x$ ومن ثم، فإن:

$$\frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$\int \sin x e^{\cos x} dx = \int \sin x e^u \times \frac{du}{-\sin x} \quad u = \cos x, dx = \frac{du}{-\sin x} \text{ بتعويض}$$

$$= \int -e^u du$$

بالتبسيط

$$= -e^u + C$$

تكامل الاقتران الأسّي الطبيعي المضروب في ثابت

$$= -e^{\cos x} + C$$

بتعويض $u = \cos x$

أنذكر

يمكنني التحقق من صحة إجابتي بإيجاد مشتقة نتيجة التكامل، ومقارنتها بالاقتران المكامل.

$$3 \int \frac{\ln x}{x} dx$$

أفترض أن: $u = \ln x$ ومن ثم، فإن:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x du$$

الوحدة 4

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \frac{1}{x} \times \ln x dx$$

$$= \int \frac{1}{x} \times u \times x du$$

بتعويض $u = \ln x, dx = x du$

$$= \int u du$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{2} u^2 + C$$

تكامل اقتران القوة

$$= \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C$$

بتعويض $u = \ln x$

أتعلم

كتابة المُكامل بصورة

أخرى تُسهّل عملية

التعويض.

$$4 \int x^3 \cos(x^4 - 5) dx$$

أفترض أن: $u = x^4 - 5$ ومن ثمّ، فإنّ:

$$\frac{du}{dx} = 4x^3 \Rightarrow dx = \frac{du}{4x^3}$$

$$\int x^3 \cos(x^4 - 5) dx = \int x^3 \cos(u) \times \frac{du}{4x^3} \quad u = x^4 - 5, dx = \frac{du}{4x^3} \text{ بتعويض}$$

$$= \int \frac{1}{4} \cos u du$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{4} \sin u + C$$

تكامل $\cos u$ المضروب في ثابت

$$= \frac{1}{4} \sin(x^4 - 5) + C$$

بتعويض $u = x^4 - 5$

$$5 \int \sin^3 2x \cos 2x dx$$

أفترض أن: $u = \sin 2x$ ومن ثمّ، فإنّ:

$$\frac{du}{dx} = 2 \cos 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2 \cos 2x}$$

$$\int \sin^3 2x \cos 2x dx = \int u^3 \cos 2x \times \frac{du}{2 \cos 2x} \quad u = \sin 2x, \text{ بتعويض}$$

$u = \sin 2x$, بتعويض

$$dx = \frac{du}{2 \cos 2x}$$

$$= \int \frac{1}{2} u^3 du$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} u^4 + C$$

تكامل اقتران القوة المضروب في ثابت

$$= \frac{1}{8} \sin^4 2x + C$$

بتعويض $u = \sin 2x$ ، والتبسيط

أتذكر

$$\sin^3 2x = (\sin 2x)^3$$

أفكر

هل يُمكن حلُّ التكامل

في الفرع 5 من المثال

باستعمال التعويض:

$u = \cos 2x$ ؟ أبرر

إجابتي.

6 $\int \frac{5^{1/x}}{x^2} dx$

أفترض أن: $u = \frac{1}{x}$. ومن ثمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow dx = -x^2 du$$

$$\int \frac{5^{1/x}}{x^2} dx = \int \frac{5^u}{x^2} \times -x^2 du$$

بتعويض $u = \frac{1}{x}$, $dx = -x^2 du$

$$= \int -5^u du$$

بالتبسيط

$$= -\frac{5^u}{\ln 5} + C$$

تكامل الاقتران الأسّي المضروب في ثابت

$$= -\frac{5^{1/x}}{\ln 5} + C$$

بتعويض $u = \frac{1}{x}$

أتحقق من فهمي

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

a) $\int 4x^2 \sqrt{x^3 - 5} dx$

b) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx$

c) $\int \frac{(\ln x)^3}{x} dx$

d) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$

e) $\int \cos^4 5x \sin 5x dx$

f) $\int x 2^{x^2} dx$

أنعلم

من الملاحظ أن مشتقة u في الأمثلة السابقة موجودة بصورة مباشرة في المُكامل، إلا أن استعمال التكامل بالتعويض لا يقتصر على هذه الحالة؛ إذ يمكن استعمال التعويض لتبسيط المُكامل وكتابته كاملاً باستعمال المُتغيّر الجديد في بعض الحالات.

لا يقتصر استعمال التكامل بالتعويض على التكاملات التي تحوي اقتراناً ومشتقته.

مثال 2

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1 $\int x \sqrt{2x+5} dx$

أفترض أن: $u = 2x + 5$. ومن ثمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

الوحدة 4

$$u = 2x + 5 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(u-5)$$

بكتابة x بدلالة u

أتعلم

ألاحظ أن مشتقة u هي ثابت (2)، وهذا يعني أن المتغير x لا يمكن حذفه بالتبسيط مباشرة، وإنما يتطلب تنفيذ إجراءات أخرى؛ ما يدل على وجوب كتابة x بدلالة u .

$$\int x\sqrt{2x+5} dx = \int x \times u^{1/2} \times \frac{du}{2}$$

$$u = 2x + 5, dx = \frac{du}{2} \text{ بتعويض}$$

$$= \int \frac{1}{2}(u-5) u^{1/2} \times \frac{du}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}(u-5) \text{ بتعويض}$$

$$= \frac{1}{4} \int (u^{3/2} - 5u^{1/2}) du$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{2}{5} u^{5/2} - \frac{10}{3} u^{3/2} \right) + C$$

تكامل افتران القوة

$$= \frac{1}{10} (2x+5)^{5/2} - \frac{5}{6} (2x+5)^{3/2} + C$$

$$u = 2x + 5 \text{ بتعويض}$$

$$= \frac{1}{10} \sqrt{(2x+5)^5} - \frac{5}{6} \sqrt{(2x+5)^3} + C$$

الصورة الجذرية

أتعلم

ألاحظ أن مشتقة u هي $(2x)$ ، وهذا يعني أن المتغير x لا يمكن حذفه بالتبسيط المباشر، وإنما يتطلب تنفيذ إجراءات أخرى؛ ما يدل على وجوب كتابة x^2 بدلالة u .

$$2 \int x^5 (1+x^2)^3 dx$$

أفترض أن: $u = 1 + x^2$. ومن ثم، فإن:

$$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$u = 1 + x^2 \Rightarrow x^2 = u - 1$$

بكتابة x^2 بدلالة u

$$\int x^5 (1+x^2)^3 dx = \int x^5 \times u^3 \times \frac{du}{2x}$$

$$u = 1 + x^2, dx = \frac{du}{2x} \text{ بتعويض}$$

$$= \frac{1}{2} \int x^4 \times u^3 du$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{2} \int (u-1)^2 \times u^3 du$$

$$x^2 = u - 1 \text{ بتعويض}$$

$$= \frac{1}{2} \int (u^2 - 2u + 1) \times u^3 du$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{2} \int (u^5 - 2u^4 + u^3) du$$

خاصية التوزيع

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} u^6 - \frac{2}{5} u^5 + \frac{1}{4} u^4 \right) + C$$

تكامل افتران القوة

$$= \frac{1}{12} (1+x^2)^6 - \frac{1}{5} (1+x^2)^5 + \frac{1}{8} (1+x^2)^4 + C \text{ بتعويض } u = 1 + x^2 \text{، والتبسيط}$$

أفكر

هل يمكن حل التكامل في الفرع 2 من المثال بطريقة أخرى؟ أبرر إجابتي.

$$3 \int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx$$

أفترض أن: $u = e^x + 1$ ومن ثمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x}$$

$$u = e^x + 1 \Rightarrow e^x = u - 1$$

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx = \int \frac{e^{2x}}{u} \times \frac{du}{e^x}$$

$$= \int \frac{e^x}{u} du$$

$$= \int \frac{u-1}{u} du$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{u}\right) du$$

$$= u - \ln |u| + C$$

$$= (e^x + 1) - \ln |e^x + 1| + C$$

بكتابة e^x بدلالة u

$$u = e^x + 1, dx = \frac{du}{e^x}$$

بالتبسيط

$$e^x = u - 1$$

بتوزيع المقام على كل حدِّ في البسط

تكامل الثابت، وتكامل $\frac{1}{x}$

$$u = e^x + 1$$

أندكر

$$e^{2x} = (e^x)^2$$

أفكر

هل يُمكن حلُّ الفرع 3 من المثال بطريقة أخرى؟
أبرر إجابتي.

أتحقق من فهمي

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$a) \int \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx$$

$$b) \int x^7 (x^4 - 8)^3 dx$$

$$c) \int \frac{e^{3x}}{(1-e^x)^2} dx$$

التكامل بالتعويض لتكاملات تحوي المقدار $\sqrt[n]{ax+b}$

يُمكن استعمال التكامل بالتعويض عند وجود المقدار $\sqrt[n]{ax+b}$ في بعض التكاملات، وذلك بافتراض أن: $u = \sqrt[n]{ax+b}$ ؛ بُعِيَّة التخلُّص من الجذر.

مثال 3

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

$$1 \int \frac{dx}{x - \sqrt{x}}$$

أفترض أن: $u = \sqrt{x}$ ومن ثمَّ، فإنَّ:

$$u = \sqrt{x} \Rightarrow u^2 = x$$

بترتيب طرفي المعادلة

$$2u \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = 2u du$$

أفكر

عند اشتقاق $u^2 = x$ ، فإنَّني أطبَّق قواعد الاشتقاق الضمني.

الوحدة 4

$$\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}} = \int \frac{2u}{u^2-u} du$$

$$u = \sqrt{x}, u^2 = x, dx = 2u du \text{ بتعويض}$$

$$= \int \frac{2}{u-1} du$$

بالتبسيط

$$= 2 \ln |u-1| + C$$

$$= 2 \ln |\sqrt{x}-1| + C$$

$$\frac{1}{ax+b} \text{ تكامل}$$

$$u = \sqrt{x} \text{ بتعويض}$$

أفكر

هل يُمكن حلُّ الفرع 1 من المثال بإخراج \sqrt{x} عاملاً مشتركاً من المقام، ثم التعويض؟ أبرر إجابتي.

$$2 \int x\sqrt[5]{(x+1)^2} dx$$

أفترض أن: $u = \sqrt[5]{x+1}$ ومن ثمَّ، فإن:

$$u = \sqrt[5]{x+1} \Rightarrow u^5 = x+1$$

برفع طرفي المعادلة إلى القوة 5

$$5u^4 \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = 5u^4 du$$

$$\int x\sqrt[5]{(x+1)^2} dx = \int (u^5-1)u^2 \times 5u^4 du$$

$$u = \sqrt[5]{x+1}, \text{ بتعويض}$$

$$x = u^5-1, dx = 5u^4 du$$

$$= 5 \int (u^{11} - u^6) du$$

خاصية التوزيع

$$= 5 \left(\frac{1}{12} u^{12} - \frac{1}{7} u^7 \right) + C$$

تكامل اقتران القوة

$$= \frac{5}{12} \sqrt[5]{(x+1)^{12}} - \frac{5}{7} \sqrt[5]{(x+1)^7} + C$$

بتعويض $u = \sqrt[5]{x+1}$ ، والتبسيط

أتحقق من فهمي

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

$$a) \int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$$

$$b) \int x\sqrt[3]{(1-x)^2} dx$$

أذكر

$$\sqrt[5]{(x+1)^2} = (\sqrt[5]{x+1})^2$$

هل يُمكن حلُّ الفرع 2 من المثال بطريقة أخرى؟ أبرر إجابتي.

تعلّمت سابقاً أن الشرط الأوّلي هو نقطة تُحقّق الاقتران الأصلي، ويُمكن بتعويضها إيجاد قيمة ثابت التكامل C ، وأنّه يُمكن بها إيجاد الاقتران الأصلي الوحيد الذي يُحقّق شرط المسألة.

مثال 4 : من الحياة



زراعة: يُمثّل الاقتران $V(t)$ سعر دونم أرض زراعية بالدينار

بعد t سنة من الآن. إذا كان: $V'(t) = \frac{0.4t^3}{\sqrt{0.2t^4 + 8000}}$

هو مُعدّل تغيّر سعر دونم الأرض، فأجد $V(t)$ ، علمًا بأنّ

سعر دونم الأرض الآن هو JD 5000.

الخطوة 1: أجد تكامل الاقتران: $V'(t)$.

معلومة

تُستعمل تقنية النانو لاستصلاح الأراضي الصحراوية وجعلها صالحة للزراعة، وذلك بزيادة درجة تشبّع التربة ومحتواها من الرطوبة، وزيادة تماسكها.

$$V(t) = \int \frac{0.4t^3}{\sqrt{0.2t^4 + 8000}} dt$$

$$V(t) = \int V'(t) dt$$

أفترض أنّ: $u = 0.2t^4 + 8000$. ومن ثمّ، فإنّ:

$$\frac{du}{dt} = 0.8t^3 \Rightarrow dt = \frac{du}{0.8t^3}$$

$$V(t) = \int \frac{0.4t^3}{\sqrt{0.2t^4 + 8000}} dt = \int \frac{0.4t^3}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{0.8t^3}$$

$$u = 0.2t^4 + 8000, \text{ بتعويض } dt = \frac{du}{0.8t^3}$$

$$= \frac{1}{2} \int u^{-1/2} du$$

بالتبسيط، والصورة الأسية

$$= u^{1/2} + C$$

تكامل اقتران القوة المضروب في ثابت

$$= \sqrt{u} + C$$

الصورة الجذرية

$$= \sqrt{0.2t^4 + 8000} + C$$

$$u = 0.2t^4 + 8000 \text{ بتعويض}$$

الخطوة 2: أجد ثابت التكامل C .

$$V(t) = \sqrt{0.2t^4 + 8000} + C$$

قاعدة الاقتران

$$5000 = \sqrt{0.2(0)^4 + 8000} + C$$

$$t = 0, V(0) = 5000 \text{ بتعويض}$$

$$5000 = 40\sqrt{5} + C$$

بالتبسيط

$$C = 5000 - 40\sqrt{5}$$

بحل المعادلة

إذن، اقتران سعر دونم الأرض بعد t سنة من الآن هو:

$$V(t) = \sqrt{0.2t^4 + 8000} + 5000 - 40\sqrt{5}$$

أفكّر

هل يُمكن حلّ المثال بطريقة أخرى؟ أبحّر إجابتي.

أسعار: يُمثل الاقتران $p(x)$ سعر قطعة (بالدينار) تُستعمل في أجهزة الحاسوب، حيث x عدد القطع المبيعة منها بالمئات. إذا كان: $p'(x) = \frac{-135x}{\sqrt{9+x^2}}$ هو مُعدَّل تغيُّر سعر هذه القطعة، فأجد $p(x)$ ، علمًا بأنَّ سعر القطعة الواحدة هو 30 JD عندما يكون عدد القطع المبيعة منها 400 قطعة.

أتعلم

العدد 400 في المسألة يعني أن $x = 4$.

التكامل بالتعويض لاقتدرات تتضمن اقتراني الجيب وجيب التمام المرفوعين إلى أس فردي

تعلمت في الدرس السابق إيجاد تكامل اقتراني الجيب وجيب التمام المرفوعين إلى أس زوجي باستعمال متطابقات تقليص القوة، وتعلمت أيضًا إيجاد تكامل الاقترانات المثلثية التي تكون في صورة حاصل ضرب اقتراني جيب، أو اقتراني جيب تمام، أو اقتران جيب في اقتران جيب تمام.

أما بالنسبة إلى التكاملات التي تحوي اقتراني جيب وجيب تمام مرفوعين إلى أس فردي فيمكن استعمال التعويض لإيجادها، إضافة إلى استعمال المتطابقة المثلثية الآتية:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

مثال 5

أجد كلاً من التكاملين الآتين:

أتعلم

إنَّ تحليل $\cos^3 x$ واستعمال متطابقة فيثاغورس، يُسهِّلان عملية التعويض، ويظهر التكامل في الصورة الآتية:

$$\int f(g(x)) g'(x) dx$$

1 $\int \cos^3 x dx$

$$\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cos x dx$$

بتحليل $\cos^3 x$ إلى $\cos^2 x \cos x$

$$= \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx$$

متطابقات فيثاغورس

أفترض أن: $u = \sin x$ ومن ثمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\int \cos^3 x \, dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx$$

$$= \int (1 - u^2) \cos x \times \frac{du}{\cos x}$$

$$u = \sin x, \, dx = \frac{du}{\cos x} \text{ بتعويض}$$

$$= \int (1 - u^2) \, du$$

$$= u - \frac{1}{3} u^3 + C$$

$$= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C$$

$$u = \sin x \text{ بتعويض}$$

$$2 \int \cos^4 x \sin^3 x \, dx$$

افترض أن: $u = \cos x$. ومن ثم، فإن:

$$\frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

إذن:

$$\int \cos^4 x \sin^3 x \, dx = \int u^4 \sin^3 x \times \frac{du}{-\sin x}$$

$$u = \cos x, \, dx = \frac{du}{-\sin x} \text{ بتعويض}$$

$$= - \int u^4 \sin^2 x \, du$$

$$= - \int u^4 (1 - \cos^2 x) \, du$$

متطابقات فيثاغورس

$$= - \int u^4 (1 - u^2) \, du$$

بالتعويض

$$= - \int (u^4 - u^6) \, du$$

بالتبسيط

$$= - \left(\frac{1}{5} u^5 - \frac{1}{7} u^7 \right) + C$$

تكامل اقتران القوة

$$= - \frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x + C$$

$$u = \cos x \text{ بتعويض}$$

أنعلم

يُمكن البدء بالتعويض، ثم استعمال متطابقة فيثاغورس.

أفكر

هل يُمكن حلُّ الفرع 2 من المثال بتحويل $\cos^2 x$ إلى $1 - \sin^2 x$ ؟ أبرر إجابتي.

أتحقق من فهمي

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

a) $\int \sin^3 x \, dx$

b) $\int \cos^5 x \sin^2 x \, dx$

أتعلم

- إذا كان أُسُّ كلٍّ من الجيب وجيب التمام زوجيًّا، فأستعمل متطابقات تقليص القوة لحلُّ التكامل.
- إذا كان أحد الاقترانين مرفوعًا لأُسٍّ فردي، فأعوِّض الاقتران الآخر.
- إذا كان كلا الاقترانين مرفوعًا لأُسٍّ فردي، فأعوِّض الاقتران الذي أُسُّه أكبر.

التكامل بالتعويض لاقتارات تتضمن الظل، أو ظل التمام، أو القاطع، أو قاطع التمام

يمكن استعمال التكامل بالتعويض لإيجاد تكاملات تحوي اقتران الظل، أو اقتران ظل التمام، أو القاطع، أو قاطع التمام، وتكون جميعها مرفوعة إلى أُسٍّ صحيح موجب، إضافةً إلى استعمال المتطابقتين المثلثيتين: $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ و $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$.

مثال 6

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1 $\int \tan^3 x \, dx$

$$\int \tan^3 x \, dx = \int \tan^2 x \tan x \, dx$$

بتحليل $\tan^3 x$ إلى $\tan^2 x \tan x$

$$= \int (\sec^2 x - 1) \tan x \, dx$$

متطابقات فيثاغورس

$$= \int (\sec^2 x \tan x - \tan x) \, dx$$

خاصية التوزيع

$$= \int \sec^2 x \tan x \, dx - \int \tan x \, dx$$

تكامل الفرق

للتكامل الأوَّل، أفترض أن: $u = \tan x$. ومن ثمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$

أتعلم

- إنَّ تحليل $\tan^3 x$ واستعمال متطابقة فيثاغورس، يُسهِّلان عملية التعويض، وظهور التكامل في الصورة الآتية:

$$\int f(g(x)) g'(x) \, dx$$

إذن:

$$\int \tan^3 x dx = \int \sec^2 x \tan x dx - \int \tan x dx$$

$$= \int \sec^2 x \times u \times \frac{du}{\sec^2 x} - \int \tan x dx \quad u = \tan x, dx = \frac{du}{\sec^2 x} \text{ بتعويض}$$

$$= \int u du - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \quad \text{بالتبسيط}$$

$$= \frac{1}{2} u^2 + \ln |\cos x| + C \quad \text{تكامل اقتران القوة، وتكامل } \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$= \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\cos x| + C \quad u = \tan x \text{ بتعويض}$$

أُنعلم

لحل: $\int \tan^n x dx$ إذا كانت $n \geq 0$ فردية، أستعمل التعويض $u = \tan x$ دائماً.

أُنعلم

لحل التكامل: $\int \cot^n x dx$ ، إذا كانت $n \geq 4$ حيث n عدد زوجي، أكتب التكامل في الصورة الآتية:

$$\int \cot^n x dx = \int \cot^{n-2} x (\csc^2 x - 1) dx$$

2 $\int \cot^4 x dx$

$$\int \cot^4 x dx = \int \cot^2 x \cot^2 x dx \quad \text{بتحليل } \cot^4 x \text{ إلى } \cot^2 x \cot^2 x$$

$$= \int \cot^2 x (\csc^2 x - 1) dx \quad \text{متطابقات فيثاغورس}$$

$$= \int (\cot^2 x \csc^2 x - \cot^2 x) dx \quad \text{خاصية التوزيع}$$

$$= \int \cot^2 x \csc^2 x dx - \int \cot^2 x dx \quad \text{تكامل الفرق}$$

للتكامل الأول، أفترض أن: $u = \cot x$. ومن ثم، فإن:

$$\frac{du}{dx} = -\csc^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$$

إذن:

$$\int \cot^4 x dx = \int \cot^2 x \csc^2 x dx - \int \cot^2 x dx$$

$$= \int u^2 \times \csc^2 x \times \frac{du}{-\csc^2 x} - \int (\csc^2 x - 1) dx \quad u = \cot x, \text{ بتعويض}$$

$$= - \int u^2 \times du - \int (\csc^2 x - 1) dx \quad dx = \frac{du}{-\csc^2 x} \text{ بالتبسيط}$$

$$= - \frac{1}{3} u^3 + \cot x + x + C \quad \text{تكامل اقتران القوة، وتكامل } \csc^2 x$$

$$= - \frac{1}{3} \cot^3 x + \cot x + x + C \quad u = \cot x \text{ بتعويض}$$

أخطاء شائعة

يُخطئ بعض الطلبة في أثناء الحل، وذلك بعدم توزيع الإشارة السالبة التي تسبق الاقتران:

$$\int (\csc^2 x - 1) dx$$

على كل حد من حدود الاقتران الأصلي الناتج.

الوحدة 4

$$3 \int \sec^4 x \tan^3 x \, dx$$

أفترض أن: $u = \tan x$ ومن ثمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$

إذن:

$$\int \sec^4 x \tan^3 x \, dx = \int \sec^4 x \times u^3 \times \frac{du}{\sec^2 x} \quad u = \tan x, dx = \frac{du}{\sec^2 x} \text{ بتعويض}$$

$$= \int \sec^2 x \times u^3 \, du$$

بالتبسيط

$$= \int (1 + \tan^2 x) u^3 \, du$$

متطابقات فيثاغورس

$$= \int (1 + u^2) u^3 \, du$$

بالتبسيط

$$= \int (u^3 + u^5) \, du$$

خاصية التوزيع

$$= \frac{1}{4} u^4 + \frac{1}{6} u^6 + C$$

تكامل اقتران القوة

$$= \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{1}{6} \tan^6 x + C$$

بتعويض $u = \tan x$

أتحقق من فهمي

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

a) $\int \tan^4 x \, dx$

b) $\int \cot^5 x \, dx$

c) $\int \sec^4 x \tan^6 x \, dx$

التكامل بالتعويض للتكاملات المحدودة

توجد طريقتان لإيجاد قيمة تكامل محدود بالتعويض، هما: إيجاد التكامل أولاً بدلالة المتغير الأصلي، ثم تعويض حدود التكامل، أو تغيير حدود التكامل عند تغيير متغير التكامل، وهذه الطريقة هي أكثر تفضيلاً.

مفهوم أساسي

التكامل بالتعويض للتكاملات المحدودة

إذا كان g' متصلًا على $[a, b]$ ، وكان f متصلًا على مدى $u = g(x)$ ، فإن:

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

مثال 7

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$1 \int_0^{\pi/2} \cos x \sqrt{1 + \sin x} dx$$

• افترض أن: $u = 1 + \sin x$. ومن ثم، فإن:

$$\frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

• أغير حدود التكامل:

الحد السفلي

$$x = 0 \Rightarrow u = 1 + \sin(0) = 1$$

الحد العلوي

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1 + \sin \frac{\pi}{2} = 2$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \sqrt{1 + \sin x} dx = \int_1^2 \cos x \sqrt{u} \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int_1^2 \sqrt{u} du$$

بتعويض $u = 1 + \sin x$,
 $dx = \frac{du}{\cos x}$
بالتبسيط

$$= \int_1^2 u^{1/2} du$$

الصورة الأسية

$$= \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_1^2$$

تكامل اقتران القوة

$$= \frac{2}{3} \sqrt{u^3} \Big|_1^2$$

الصورة الجذرية

$$= \frac{2}{3} (\sqrt{2^3} - \sqrt{1^3})$$

بالتعويض

$$= \frac{2}{3} (\sqrt{8} - 1)$$

بالتبسيط

2 $\int_1^{25} \frac{x}{\sqrt{2x-1}} dx$

• أفترض أن: $u = \sqrt{2x-1}$. ومن ثمّ، فإنّ:

$$u = \sqrt{2x-1} \Rightarrow u^2 = 2x-1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}(u^2 + 1)$$

$$2u \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = u du$$

بتربيع طرفي المعادلة

أفكر

هل يُمكن حلُّ الفرع 2

من المثال بطريقة أخرى؟

أبرر إجابتي.

• أُغيّر حدود التكامل:

الحدُّ السفلي

$$x = 1 \Rightarrow u = \sqrt{2(1) - 1} = 1$$

الحدُّ العلوي

$$x = 25 \Rightarrow u = \sqrt{2(25) - 1} = 7$$

$$\int_1^{25} \frac{x}{\sqrt{2x-1}} dx = \int_1^7 \frac{1}{2} \times \frac{u^2 + 1}{u} \times u du$$

بتعويض $\sqrt{2x-1} = u$,
 $x = \frac{1}{2}(u^2 + 1)$, $dx = u du$

$$= \frac{1}{2} \int_1^7 (u^2 + 1) du$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} u^3 + u \right) \Big|_1^7$$

تكامل اقتران القوّة

$$= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{3} (7)^3 + 7 \right) - \left(\frac{1}{3} (1)^3 + 1 \right) \right)$$

بالتعويض

$$= 60$$

بالتبسيط

أتحقّق من فهمي

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

a) $\int_0^2 x(x+1)^3 dx$

b) $\int_0^{\pi/3} \sec x \tan x \sqrt{\sec x + 2} dx$

أتعلّم

لا يجوز أن تحتوي فترة

حدود التكامل على أي

صفر من أصفار المقام.

أُجِدُ كَلَامًا مِنَ التَّكَامِلَاتِ الْآتِيَةِ:

1 $\int x^2 (2x^3 + 5)^4 dx$

2 $\int x^2 \sqrt{x+3} dx$

3 $\int x(x+2)^3 dx$

4 $\int \frac{x}{\sqrt{x+4}} dx$

5 $\int \sin x \cos 2x dx$

6 $\int \frac{e^{3x}}{e^x + 1} dx$

7 $\int \sec^4 x dx$

8 $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$

9 $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$

10 $\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^2 x} dx$

11 $\int \frac{2e^x - 2e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} dx$

12 $\int \frac{-x}{(x+1)\sqrt{x+1}} dx$

13 $\int x \sqrt[3]{x+10} dx$

14 $\int \left(\sec^2 \frac{x}{2} \tan^7 \frac{x}{2} \right) dx$

15 $\int \frac{\sec^3 x + e^{\sin x}}{\sec x} dx$

16 $\int (1 + \sqrt[3]{\sin x}) \cos^3 x dx$

17 $\int \sin x \sec^5 x dx$

18 $\int \frac{\sin x + \tan x}{\cos^3 x} dx$

أُجِدُ كَلَامًا مِنَ التَّكَامِلَاتِ الْآتِيَةِ:

19 $\int_0^{\pi/4} \sin x \sqrt{1 - \cos^2 2x} dx$

20 $\int_0^{\pi/2} x \sin x^2 dx$

21 $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$

22 $\int_0^{\pi/3} \sec^2 x \tan^5 x dx$

23 $\int_0^2 (x-1)e^{(x-1)^2} dx$

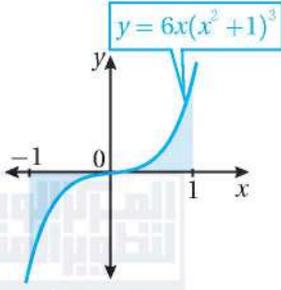
24 $\int_1^4 \frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

25 $\int_0^1 \frac{10\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x^3})^2} dx$

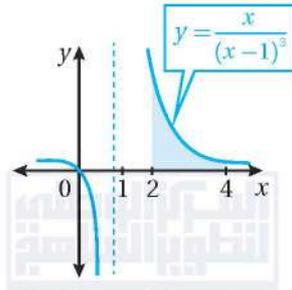
26 $\int_0^{\pi/6} 2^{\cos x} \sin x dx$

27 $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^2 x \cot^5 x dx$

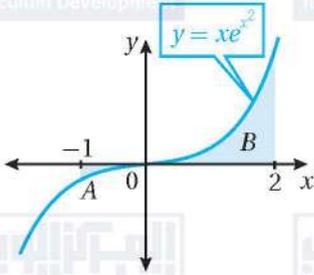
28



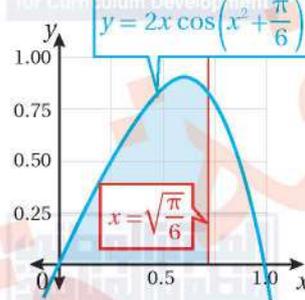
29



30



31



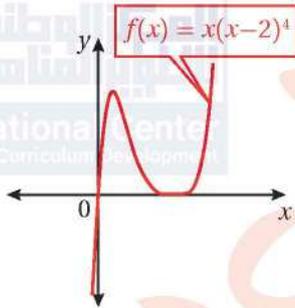
في كلِّ ممَّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستخدم المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

32

$$f'(x) = 2x(4x^2 - 10)^2; (2, 10)$$

33

$$f'(x) = x^2 e^{-0.2x^3}; (0, \frac{3}{2})$$



يبيِّن الشكل المجاور جزءاً من منحنى الاقتران: $f(x) = x(x-2)^4$.

34 أجد إحداثيي نقطة تماس الاقتران مع المحور x .

35 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والمحور x .

36 يتحرَّك جُسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = \sin \omega t \cos^2 \omega t$ ، حيث t الزمن بالثواني،

و v سرعته المتجهة بالتر لكل ثانية، و ω ثابت إذا انطلق الجُسيم من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد t ثانية.

37 طب: يُمثَّل الاقتران $C(t)$ تركيز دواء في الدم بعد t دقيقة من حقنه في جسم

مريض، حيث C مقيسة بالمليغرام لكل سنتيمتر مكعب (mg/cm^3). إذا كان

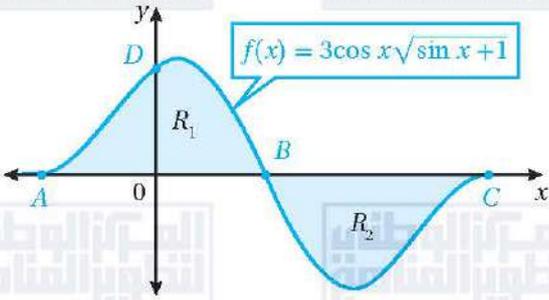
تركيز الدواء لحظة حقنه في جسم المريض $0.5 \text{ mg}/\text{cm}^3$ ، وأخذ يتغيَّر بمعدَّل

$$C'(t) = \frac{-0.01e^{-0.01t}}{(1 + e^{-0.01t})^2}$$



38 أجد قيمة $\int_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{e^{2x}}{e^x - 2} dx$ ، ثم أكتب الإجابة بالصيغة الآتية: $\frac{a}{b} + c \ln d$ ، حيث: a ، b ، c ، و d ثوابت صحيحة.

39 إذا كان: $f'(x) = \tan x$ ، وكان: $f(3) = 5$ ، فأثبت أن: $f(x) = \ln \left| \frac{\cos 3}{\cos x} \right| + 5$



مهارات التفكير العليا

تبرير: إذا كان الشكل المجاور يُمثل منحنى الاقتران: $f(x) = 3 \cos x \sqrt{\sin x + 1}$ ، فأجيب عن الأسئلة الآتية تباعاً:

40 أجد إحداثيي كلٍّ من النقاط: A ، B ، و C ، و D .

41 أجد مساحة المنطقة المُظللة.

42 أبين أن للمنطقة R_1 والمنطقة R_2 المساحة نفسها.

43 تحدّد: أجد قيمة: $\int_1^{16} \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}^3} dx$

44 تبرير: إذا كان f اقتراناً متصلًا، فأثبت أن: $\int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx$

45 تبرير: إذا كان a و b عددين حقيقيين موجبين، فأثبت أن: $\int_0^1 x^a (1-x)^b dx = \int_0^1 x^b (1-x)^a dx$

تحدّد: أجد كلاً من التكمالات الآتية:

46 $\int \frac{dx}{x \ln x (\ln (\ln x))}$

47 $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$

48 $\int \sin 2x (1 + \sin x)^3 dx$

التكامل بالكسور الجزئية

Integration by Partial Fractions

إيجاد تكاملات باستعمال طريقة الكسور الجزئية.

التكامل بالكسور الجزئية.

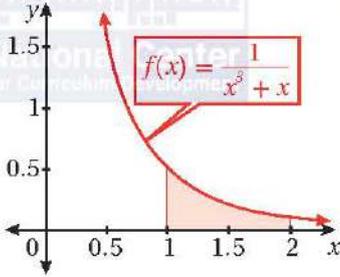
يُبين الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{1}{x^3 + x}$

أجد مساحة المنطقة المُظللة منه.

فكرة الدرس

المصطلحات

مسألة اليوم



التكامل بالكسور الجزئية

تعلمت سابقاً أن الاقترانات النسبية هي اقترانات يُمكن كتابتها في صورة نسبة بين كثيري

حدود، مثل: $\frac{f(x)}{g(x)}$ ، حيث: $g(x) \neq 0$ ، ومن أمثلتها:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-1}, \quad g(x) = \frac{x^5+2x^3-x}{x^2-4x+8}, \quad h(x) = \frac{1}{x^2-3x-4}$$

تعلمت أيضاً تجزئة المقادير النسبية؛ وهي عملية تُفضي إلى كتابة المقدار النسبي في صورة

مجموع مقادير نسبية أبسط، كل منها في صورة: $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ، حيث P و Q كثير الحدود لا توجد

بينهما عوامل مشتركة، ودرجة P أقل من درجة Q ، وكلُّ منهما يُسمى كسراً جزئياً.

كسر جزئي

كسر جزئي

$$\frac{x+14}{(x-4)(x+2)} = \frac{3}{x-4} + \frac{-2}{x+2}$$

تجزئة المقدار النسبي

أتعلم

تقوم طريقة التكامل

بالكسور الجزئية على

تحويل الاقتران النسبي

إلى مجموع اقترانات

نسبية أبسط.

يُمكن استعمال تجزئة المقادير النسبية لإيجاد تكامل اقترانات نسبية بطريقة تُسمى **التكامل**

بالكسور الجزئية (integration by partial fractions).

وبما أن عملية تجزئة المقادير النسبية تعتمد على عوامل المقام، فإنه توجد حالات للتكامل بالكسور الجزئية بناءً على نوع عوامل المقام، مثل الحالات الثلاث الآتية التي سأتعلمها في هذا الدرس:

- عوامل المقام كثيرات حدود خطية مختلفة.
- عوامل المقام كثيرات حدود خطية، أحدها مكرّر.
- عوامل المقام كثيرات حدود، أحدها تربيعي غير قابل للتحليل (مُميّز سالب)، وغير مكرّر.

التكامل بالكسور الجزئية: عوامل المقام كثيرات حدود خطية مختلفة

تعلمت سابقاً أنه إذا كانت جميع عوامل كثير الحدود في مقام المقدار النسبي خطية ومختلفة، وكانت درجة البسط أقل من درجة المقام، ولا توجد بينهما عوامل مشتركة، فإن كلاً منها يُقابل كسراً جزئياً، بسطه ثابت، ومقامه عامل خطي في صورة:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \frac{A_3}{a_3x + b_3} + \dots + \frac{A_n}{a_nx + b_n}$$

ألاحظ أن تكامل كل من الكسور الجزئية الناتجة هو اقتران لوغاريتمي طبيعي.

مثال 1

$$\int \frac{x-5}{x^2-x-2} dx \text{ أجد:}$$

الخطوة 1: أجزئ المقدار النسبي.

$$\frac{x-5}{x^2-x-2} = \frac{x-5}{(x+1)(x-2)}$$

$$\frac{x-5}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$x-5 = A(x-2) + B(x+1)$$

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامي الكسرين الجزئيين

أندكر

تبدأ عملية كتابة الاقتران

النسبي في صورة حاصل

جمع كسور جزئية عندما

تكون درجة البسط أقل

من درجة المقام.

$$(-1) - 5 = A((-1) - 2) + B((-1) + 1) \Rightarrow A = 2$$

بتعويض $x = -1$

$$(2) - 5 = A((2) - 2) + B((2) + 1) \Rightarrow B = -1$$

بتعويض $x = 2$

إذن، يُمكن تجزئة المقدار: $\frac{x-5}{x^2-x-2}$ في الصورة الآتية:

$$\frac{x-5}{x^2-x-2} = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-2}$$

الخطوة 2: أجد التكامل.

$$\begin{aligned} \int \frac{x-5}{x^2-x-2} dx &= \int \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-2} \right) dx \\ &= 2 \ln|x+1| - \ln|x-2| + C \\ &= \ln \left| \frac{(x+1)^2}{x-2} \right| + C \end{aligned}$$

التكامل بالكسور الجزئية

تكامل $\frac{1}{ax+b}$ المضروب في ثابت

بالتبسيط

أتحقق من فهمي

أجد كلاً من التكاملين الآتين:

a) $\int \frac{x-7}{x^2-x-6} dx$

b) $\int \frac{3x-1}{x^2-1} dx$

التكامل بالكسور الجزئية: عوامل المقام كثيرات حدود خطية، أحدها مُكرَّر

تعلَّمتُ سابقاً أنه إذا كان التحليل الكامل لمقام نسبي يحوي عاملاً خطياً مُكرَّراً n من المرات، فإنَّ هذا العامل يُقابل n من الكسور الجزئية التي تكون في صورة:

$$\frac{A_1}{(ax+b)^1} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

ألاحظ أنَّ جميع الكسور الناتجة تُفضي إلى اقتران تكامله اقتران لوغاريتمي طبيعي، أو تكامل: $(ax+b)^{-n}$ ، المضروب في ثابت.

أتذكَّر

يُمكن إيجاد قيمة كلِّ من A و B بتعويض قيم مُحدَّدة للمتغيَّر x ، حيث إنَّ اختيار تعويض $x = -1$ يُوِّدي إلى حذف المتغيَّر B ، وقصُر المعادلة على مجهول واحد، هو A ، واختيار تعويض $x = 2$ يُوِّدي إلى حذف المتغيَّر A ، وقصُر المعادلة على مجهول واحد، هو B ما يجعل إيجاد قيمة كلِّ من A و B أسهل.

أجد: $\int \frac{3x^2 + 2}{x^3 - 2x^2 + x} dx$

الخطوة 1: أجزئ المقدار النسبي.

$$\frac{3x^2 + 2}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{3x^2 + 2}{x(x-1)^2}$$

$$\frac{3x^2 + 2}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

بتحليل المقام

بكتابة الكسور الجزئية

$$3x^2 + 2 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$$

بضرب طرفي المعادلة في (م. م. أ) لمقامات الكسور الجزئية

$$3(0)^2 + 2 = A(0-1)^2 + B(0)(0-1) + C(0) \Rightarrow A = 2$$

بتعويض $x = 0$

$$3(1)^2 + 2 = A(1-1)^2 + B(1)(1-1) + C(1) \Rightarrow C = 5$$

بتعويض $x = 1$

$$3(-1)^2 + 2 = (2)((-1)-1)^2 + B(-1)((-1)-1) + (5)((-1)) \Rightarrow B = 1$$

بتعويض $x = -1$

$A = 2, C = 5$

أندكر

لإيجاد قيمة B ، لا أعوض $x = 0$ ،
أو: $x = 1$ في المعادلة؛ لأن ذلك
سيحذف قيمة B المطلوب إيجادها،
وإنما أعوض أي عدد حقيقي آخر،
مثل: 2، 3، و -1.

إذن، يُمكن تجزئة المقدار: $\frac{3x^2 + 2}{x^3 - 2x^2 + x}$ في الصورة الآتية:

$$\frac{3x^2 + 2}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2}$$

الخطوة 2: أجد التكامل.

$$\int \frac{3x^2 + 2}{x^3 - 2x^2 + x} dx = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2} \right) dx$$

التكامل بالكسور الجزئية

$$= \int \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} + 5(x-1)^{-2} \right) dx$$

تعريف الأس السالب

$$= 2 \ln |x| + \ln |x-1| - 5(x-1)^{-1} + C$$

تكامل $\frac{1}{ax+b}$ المضروب في ثابت، وتكامل $(ax+b)^n$

$$= 2 \ln |x| + \ln |x-1| - \frac{5}{(x-1)} + C$$

تعريف الأس السالب

أندكر

لأي عدد حقيقي:
فإن: $a \neq 0$
 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

أتحقق من فهمي

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

a) $\int \frac{x+4}{(2x-1)(x-1)^2} dx$

b) $\int \frac{x^2-2x-4}{x^3-4x^2+4x} dx$

التكامل بالكسور الجزئية: عوامل المقام كثيرات حدود، أحدها تربيعي غير قابل للتحليل، وغير مُكْرَر

تعلّمتُ سابقاً أنّ تحليل مقام المقدار النسبي قد يحوي عاملاً تربيعياً غير مُكْرَر، ولا يُمكن تحليله (مُميّزه سالب). وفي هذه الحالة، ينتج من العامل التربيعي كسر جزئي، بسطه كثير حدود خطي في صورة: $Ax + B$ ، ومقامه العامل التربيعي نفسه.

مثال 3

أجد: $\int \frac{5x^2-4x+2}{(x-1)(x^2+2)} dx$

الخطوة 1: أجزئ المقدار النسبي.

بكتابة الكسور الجزئية

$$\frac{5x^2-4x+2}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$5x^2-4x+2 = A(x^2+2) + (Bx+C)(x-1)$ بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامات الكسرين الجزئيين

$5(1)^2-4(1)+2 = A((1)^2+2) + (B(1)+C)(1-1) \Rightarrow A = 1$ بتعويض $x = 1$

$5(0)^2-4(0)+2 = (1)((0)^2+2) + (B(0)+C)(0-1) \Rightarrow C = 0$ بتعويض $x = 0, A = 1$

$5(2)^2-4(2)+2 = (1)((2)^2+2) + (B(2)+0)(2-1) \Rightarrow B = 4$ بتعويض $x = 2, A = 1, C = 0$

إذن، يُمكن تجزئة المقدار: $\frac{5x^2-4x+2}{(x-1)(x^2+2)}$ في الصورة الآتية:

$$\frac{5x^2-4x+2}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{1}{x-1} + \frac{4x}{x^2+2}$$

الخطوة 2: أجد التكامل.

$$\int \frac{5x^2 - 4x + 2}{(x-1)(x^2+2)} dx = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{4x}{x^2+2} \right) dx$$

التكامل بالكسور الجزئية

$$= \ln |x-1| + 2 \ln |x^2+2| + C$$

تكامل $\frac{1}{ax+b}$ ، وتكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

أتحقق من فهمي

أجد كلاً من التكاملين الآتين:

a) $\int \frac{3x+4}{(x-3)(x^2+4)} dx$

b) $\int \frac{7x^2-x+1}{x^3+1} dx$

التكامل بالكسور الجزئية: درجة كثير الحدود في البسط مساوية لدرجة كثير الحدود في المقام، أو أكبر منها

تعلمت في الأمثلة السابقة إيجاد تكاملات لاقتربات نسبية مختلفة في صورة: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ، بحيث لا توجد عوامل مشتركة بين $P(x)$ و $Q(x)$ ، ودرجة $P(x)$ أقل من درجة $Q(x)$. ولكن، إذا كانت درجة $P(x)$ مساوية لدرجة $Q(x)$ ، أو أكبر منها، فإنه يلزم تبسيط الاقتران النسبي بقسمة P على Q ، ثم إيجاد التكامل بالكسور الجزئية إذا لزم.

مثال 4

أجد: $\int \frac{3x^4-1}{x^2-1} dx$

الخطوة 1: أقسم البسط على المقام.

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 3 \\ x^2 - 1 \overline{) 3x^4} \quad -1 \\ \underline{(-) 3x^4 - 3x^2} \\ 3x^2 \quad -1 \\ \underline{(-) 3x^2} \quad -3 \\ \quad \quad +2 \end{array}$$

أندكر

إذا كان $\frac{f(x)}{g(x)}$ اقتراناً نسبياً فيه درجة $f(x)$ أكبر من أو تساوي درجة $g(x)$ ، وكان ناتج القسمة $q(x)$ ، وباقي القسمة $r(x)$ ، فإن:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$$

$$\int \frac{3x^4 - 1}{x^2 - 1} dx = \int \left(3x^2 + 3 + \frac{2}{x^2 - 1} \right) dx$$

الخطوة 2: أُجزئ المقدار النسبي.

بكتابة الكسور الجزئية

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ)

لمقامات الكسرين الجزئيين

بتعويض $x = 1$

بتعويض $x = -1$

$$\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1}$$

$$2 = A(x + 1) + B(x - 1)$$

$$2 = A(1 + 1) + B(1 - 1) \Rightarrow A = 1$$

$$2 = A(-1 + 1) + B(-1 - 1) \Rightarrow B = -1$$

إذن، يُمكن تجزئة المقدار: $\frac{2}{x^2 - 1}$ في الصورة الآتية:

$$\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}$$

الخطوة 3: أجد التكامل.

التكامل بالكسور الجزئية

تكامل $\frac{1}{ax + b}$ المضروب في

ثابت، وتكامل اقتران القوة

أنتحَق من فهمي

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

a) $\int \frac{4x^3 - 5}{2x^2 - x - 1} dx$

b) $\int \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x} dx$

التكامل بالكسور الجزئية لتكاملات محدودة

يُمكن إيجاد تكاملات محدودة بالكسور الجزئية، وذلك بإجراء التكامل أولاً، ثم التعويض

في حدود التكامل.

مثال 5

أجد: $\int_0^2 \frac{x-2}{x^2+5x+4} dx$

الخطوة 1: أجزئ المقدار النسبي.

$$\frac{x-2}{x^2+5x+4} = \frac{x-2}{(x+1)(x+4)}$$

$$\frac{x-2}{(x+1)(x+4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+4}$$

$$x-2 = A(x+4) + B(x+1)$$

$$(-1)-2 = A((-1)+4) + B((-1)+1) \Rightarrow A = -1$$

$$(-4)-2 = A((-4)+4) + B((-4)+1) \Rightarrow B = 2$$

إذن، يُمكن تجزئة المقدار: $\frac{x-2}{x^2+5x+4}$ في الصورة الآتية:

$$\frac{x-2}{x^2+5x+4} = \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+4}$$

$$\int_0^2 \frac{x-2}{x^2+5x+4} dx = \int_0^2 \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+4} \right) dx$$

$$= (-\ln|x+1| + 2 \ln|x+4|) \Big|_0^2$$

$$= (-\ln|2+1| + 2 \ln|2+4|) - (-\ln|0+1| + 2 \ln|0+4|)$$

$$= \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

بتحليل المقام

بكتابة كسرين جزئيين
مقاماهما العاملان الخطيان

يضرب طرفي المعادلة في (م.م.)
لمقامي الكسرين الجزئيين

بتعويض $x = -1$

بتعويض $x = -4$

الخطوة 2: أجد التكامل.

التكامل بالكسور الجزئية

تكامل $\frac{1}{ax+b}$ ، المضروب في ثابت

بالتعويض

بالتبسيط

أدقق من فهمي

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

a) $\int_3^4 \frac{2x^3 + x^2 - 2x - 4}{x^2 - 4} dx$

b) $\int_5^6 \frac{3x - 10}{x^2 - 7x + 12} dx$

أندكر

أستعمل قانوني ضرب
اللوغاريتمات وقسمتها
لتبسيط الناتج.

التكامل بالكسور الجزئية، والتكامل بالتعويض

تعلمت في الدرس السابق أنه يُمكن استعمال التعويض لحل تكاملات يصعب حلها في صورتها الأصلية. والآن سأتعلم كيف أن عملية التعويض في بعض التكاملات قد تُفضي إلى اقتران نسبي يُمكن حله باستعمال الكسور الجزئية.

أتعلم

لا يُمكن البدء بالكسور الجزئية لحل التكامل المجاور؛ لأن الاقتران المكامل ليس اقتراناً نسبياً.

مثال 6

أجد كلاً من التكاملين الآتين:

$$1 \int \frac{e^x}{e^{2x} - e^x} dx$$

الخطوة 1: أعوض.

أفترض أن: $u = e^x$. ومن ثم، فإن:

$$\frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x} \Rightarrow dx = \frac{du}{u}$$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} - e^x} dx = \int \frac{u}{u^2 - u} \times \frac{du}{u}$$

بتعويض $u = e^x, dx = \frac{du}{u}$

$$= \int \frac{1}{u^2 - u} du$$

بالتبسيط

الخطوة 2: أجزئ المقدار النسبي.

$$\frac{1}{u^2 - u} = \frac{1}{u(u-1)}$$

بتحليل المقام

$$\frac{1}{u(u-1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-1}$$

بكتابة كسرين جزئيين مقاماهما العاملان الخطيان

$$1 = A(u-1) + Bu$$

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ)

لمقامي الكسرين الجزئيين

$$1 = A(0-1) + B(0) \Rightarrow A = -1$$

بتعويض $u = 0$

$$1 = A(1-1) + B(1) \Rightarrow B = 1$$

بتعويض $u = 1$

إذن، يُمكن تجزئة المقدار: $\frac{1}{u^2 - u}$ في الصورة الآتية:

$$\frac{1}{u^2 - u} = \frac{-1}{u} + \frac{1}{u-1}$$

الخطوة 3: أجد التكامل.

$$\int \frac{1}{u^2 - u} du = \int \left(\frac{-1}{u} + \frac{1}{u-1} \right) du$$

التكامل بالكسور الجزئية

$$= -\ln |u| + \ln |u-1| + C \quad \text{تكامل } \frac{1}{ax+b}, \text{ المضروب في ثابت}$$

$$= -\ln |e^x| + \ln |e^x - 1| + C$$

بتعويض $e^x = u$

$$= -x + \ln |e^x - 1| + C$$

بالتبسيط

$$2 \int \frac{\sqrt{x}}{x-16} dx$$

الخطوة 1: أعوّض.

أفترض أن $u = \sqrt{x}$. ومن ثمّ، فإنّ:

$$u = \sqrt{x} \Rightarrow u^2 = x$$

بتربيع طرفي المعادلة

$$2u \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = 2u du$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x-16} dx = \int \frac{u}{u^2-16} 2u du$$

بتعويض $u = \sqrt{x}$, $dx = 2u du$

$$= 2 \int \frac{u^2}{u^2-16} du$$

بالتبسيط

الخطوة 2: أقسم البسط على المقام.

$$\frac{1}{u^2-16} = \frac{1}{(u^2-16)}$$

$$= \frac{(-1)}{16} \frac{u^2-16}{u^2-16}$$

إذن:

$$2 \int \frac{u^2}{u^2-16} du = 2 \int \left(1 + \frac{16}{u^2-16} \right) du$$

الخطوة 3: أجزئ المقدار النسبي.

$$\frac{16}{u^2-16} = \frac{16}{(u+4)(u-4)}$$

بتحليل المقام

$$\frac{16}{(u+4)(u-4)} = \frac{A}{u+4} + \frac{B}{u-4}$$

بكتابة كسرين جزئيين مقاماهما العاملان الخطيان

أفكر

هل يُمكن حلّ الفرع

1 من المثال 6 بطريقة

أخرى؟ أبرّر إجابتي.

أتذكّر

إذا كانت درجة البسط

مساوية لدرجة المقام أو

أكبر منها، فإنّه يلزم تجهيز

الاقتران النسبي بقسمة

البسط على المقام، ثم

إيجاد التكامل بالكسور

الجزئية إذا لزم.

الوحدة 4

$$16 = A(u - 4) + B(u + 4)$$

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ.)
لمقامي الكسرين الجزئيين

$$16 = A(-4 - 4) + B(-4 + 4) \Rightarrow A = -2$$

بتعويض $u = -4$

$$16 = A(4 - 4) + B(4 + 4) \Rightarrow B = 2$$

بتعويض $u = 4$

إذن، يُمكن تجزئة المقدار: $\frac{16}{u^2 - 16}$ في الصورة الآتية:

$$\frac{16}{u^2 - 16} = \frac{-2}{u + 4} + \frac{2}{u - 4}$$

الخطوة 4: أجد التكامل.

$$2 \int \left(1 + \frac{16}{u^2 - 16}\right) du = 2 \int \left(1 + \frac{-2}{u + 4} + \frac{2}{u - 4}\right) du$$

التكامل بالكسور الجزئية

$$= 2u - 4 \ln |u + 4| + 4 \ln |u - 4| + C$$

تكامل $\frac{1}{ax + b}$ ، المضروب في ثابت

$$= 2\sqrt{x} - 4 \ln |\sqrt{x} + 4| + 4 \ln |\sqrt{x} - 4| + C$$

بتعويض $\sqrt{x} = u$

أتحقق من فهمي

أجد كلاً من التكاملين الآتين:

a) $\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x - 1} dx$

b) $\int \frac{e^x}{(e^x - 1)(e^x + 4)} dx$

أدرب وأحل المسائل

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1 $\int \frac{x - 10}{x(x + 5)} dx$

2 $\int \frac{2}{1 - x^2} dx$

3 $\int \frac{4}{(x - 2)(x - 4)} dx$

4 $\int \frac{3x + 4}{x^2 + x} dx$

5 $\int \frac{x^2}{x^2 - 4} dx$

6 $\int \frac{3x - 6}{x^2 + x - 2} dx$

$$7 \int \frac{4x+10}{4x^2-4x-3} dx$$

$$8 \int \frac{2x^2+9x-11}{x^3+2x^2-5x-6} dx$$

$$9 \int \frac{4x}{x^2-2x-3} dx$$

$$10 \int \frac{8x^2-19x+1}{(2x+1)(x-2)^2} dx$$

$$11 \int \frac{9x^2-3x+2}{9x^2-4} dx$$

$$12 \int \frac{x^3+2x^2+2}{x^2+x} dx$$

$$13 \int \frac{x^2+x+2}{3-2x-x^2} dx$$

$$14 \int \frac{2x-4}{(x^2+4)(x+2)} dx$$

$$15 \int \frac{x^3-4x^2-2}{x^3+x^2} dx$$

$$16 \int \frac{3-x}{2-5x-12x^2} dx$$

$$17 \int \frac{x^3+6x-2}{x^4+6x^2} dx$$

$$18 \int \frac{5x-2}{(x-2)^2} dx$$

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$19 \int_2^4 \frac{6+3x-x^2}{x^3+2x^2} dx$$

$$20 \int_{-1/3}^{1/3} \frac{9x^2+4}{9x^2-4} dx$$

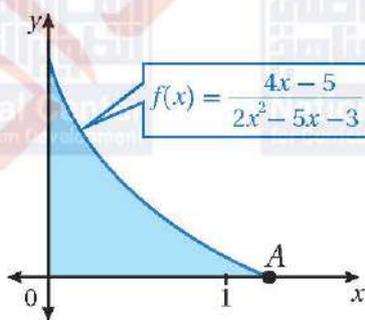
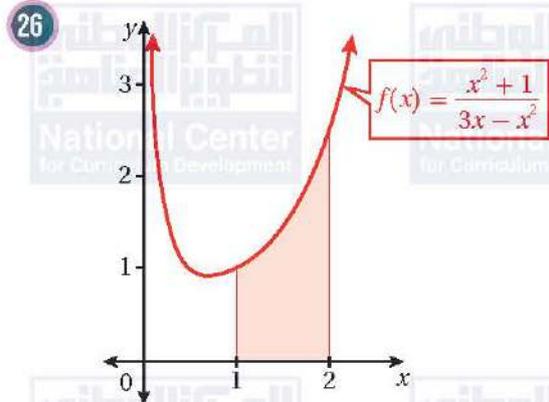
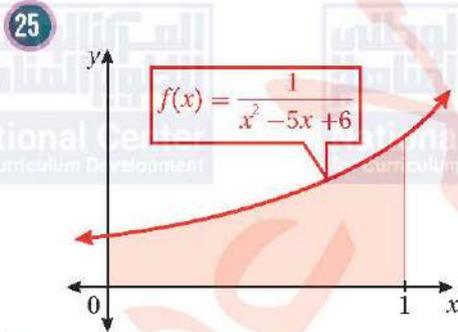
$$21 \int_0^1 \frac{17-5x}{(2x+3)(2-x)^2} dx$$

$$22 \int_1^4 \frac{4}{16x^2+8x-3} dx$$

$$23 \int_3^4 \frac{5x+5}{x^2+x-6} dx$$

$$24 \int_3^4 \frac{4}{x^3-4x^2+4x} dx$$

أجد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلين البيانيين الآتين:



يُبين الشكل المجاور جزءاً من منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{4x-5}{2x^2-5x-3}$

27 أجد إحداثيي النقطة A.

28 أجد مساحة المنطقة المظللة.

الوحدة 4

National Center
for Curriculum Development

$$29 \int \frac{\sin x}{\cos x + \cos^2 x} dx$$

$$31 \int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3e^x + 2} dx$$

National Center
for Curriculum Development

National Center
for Curriculum Development

$$30 \int \frac{1}{x^2 + x\sqrt{x}} dx$$

National Center
for Curriculum Development

$$32 \int \frac{\cos x}{\sin x(\sin^2 x - 4)} dx$$

National Center
for Curriculum Development

National Center
for Curriculum Development

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

National Center
for Curriculum Development

مهارات التفكير العليا

تبرير: أحل السؤالين الآتين تبعاً:

National Center
for Curriculum Development

33 أجد: $\int \frac{dx}{1+e^x}$ بطريقتين مختلفتين، إحداهما الكسور الجزئية، مُبرِّراً إجابتي.

34 أجد: $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+e^x} dx$

National Center
for Curriculum Development

35 تبرير: أثبت أن: $\int_4^9 \frac{5x^2 - 8x + 1}{2x(x-1)^2} dx = \ln\left(\frac{32}{3}\right) - \frac{5}{24}$

36 تبرير: أثبت أن: $\int_9^{16} \frac{2\sqrt{x}}{x-4} dx = 4\left(1 + \ln\left(\frac{5}{3}\right)\right)$

National Center
for Curriculum Development

National Center
for Curriculum Development

$$38 \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x} dx$$

National Center
for Curriculum Development

National Center
for Curriculum Development

$$39 \int \frac{x}{16x^4 - 1} dx$$

National Center
for Curriculum Development

National Center
for Curriculum Development

$$40 \int \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx$$

تحذّر: أجد كلاً من التكاملات الآتية:

إرشاد للسؤال 40: ما المضاعف المشترك الأصغر للدليلي الجذرين؟

National Center
for Curriculum Development

التكامل بالأجزاء

Integration by Parts

إيجاد تكاملات باستعمال طريقة الأجزاء.

التكامل بالأجزاء، طريقة الجدول.

يُمثّل الاقتران: $S'(t) = 350 \ln(t+1)$ مُعدّل تغيّر المبيعات الشهرية لكرة قدم جديدة، حيث t عدد الأشهر منذ طرح الكرة في الأسواق، و $S(t)$ عدد الكرات المبيعة شهرياً. أجد $S(t)$ ، علماً بأن $S(0) = 0$.



فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم



التكامل بالأجزاء

تعلمت سابقاً استعمال طريقتي التكامل بالتعويض، والكسور الجزئية، إلا أنه لا يمكن استعمال أيّ من هاتين الطريقتين لإيجاد التكاملات الآتية:

$$\int x \sin x \, dx, \quad \int e^x \cos x \, dx, \quad \int x^2 \ln x \, dx$$

ألاحظ أنّ المُكامل في التكاملات السابقة هو ناتج ضرب اقترانين مختلفين، يمكن إيجاد تكامل كلّ منهما على حدة، إلا أنه لا توجد قاعدة لإيجاد تكامل ضربهما بصورة مباشرة. يمكن الاستفادة من قاعدة مشتقة الضرب في إيجاد طريقة لتكامل هذا النوع من الاقترانات على النحو الآتي:

إذا كان u و v اقترانين قابلين للاشتقاق بالنسبة إلى x ، فإنّ مشتقة ضربهما هي:

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

وبمُكاملة طرفي المعادلة بالنسبة إلى x ، نتج المعادلة الآتية:

$$uv = \int u \frac{dv}{dx} \, dx + \int v \frac{du}{dx} \, dx$$

$$\int u \frac{dv}{dx} \, dx = uv - \int v \frac{du}{dx} \, dx$$

بمُكاملة طرفي المعادلة

بإعادة ترتيب المعادلة

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

بالتبسيط

أندكر

لا يُمكن توزيع التكامل على الضرب؛ أي لا يُمكن إيجاد تكامل كل اقتران بصورة منفصلة، وضرب النتيجة.

الوحدة 4

يُمكن استعمال الصيغة الآتية: $\int u dv = uv - \int v du$ لإيجاد تكامل حاصل ضرب اقترانين، في ما يُعرّف بطريقة التكامل بالأجزاء (integration by parts).

التكامل بالأجزاء

مفهوم أساسي

إذا كان u و v اقترانين قابلين للاشتقاق، فإن:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

يُمكن تلخيص خطوات إيجاد التكامل بالأجزاء على النحو الآتي:

التكامل بالأجزاء

مفهوم أساسي

لإيجاد التكامل $\int f(x) dx$ بالأجزاء، أتبع الخطوات الأربع الآتية:

الخطوة 1: أختار الاقترانين: u و v ، بحيث $f(x) dx = u dv$ ، مراعيًا عند اختيار u أن تكون du أبسط من u ، وأن يكون سهلاً إيجاد تكامل dv .

الخطوة 2: أنظّم خطوات إيجاد du و v كما يأتي:

$$\begin{array}{cc} u & dv \\ du & v = \int dv \end{array}$$

الخطوة 3: أكمل التكامل بإيجاد $\int v du$

$$\int f(x) dx = \int u dv = uv - \int v du$$

الخطوة 4: أضيف ثابت التكامل C بعد إنهاء التكامل.

أتعلم

بوجه عام، لا توجد قاعدة ثابتة للحالات التي يُستعمل فيها التكامل بالأجزاء، إلا أنني سأتعلم في هذه الأمثلة معظم الحالات التي تُستعمل فيها هذه الطريقة.

مثال 1

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$1 \int x \cos x dx$$

أفترض أن: $u = x$ ، وأن: $dv = \cos x dx$. ومن ثمّ، فإن:

$$u = x \quad dv = \cos x dx$$

$$du = dx \quad v = \int \cos x dx = \sin x$$

أتعلم

تحتوي dv دائماً على dx من التكامل الأصلي.

إذن:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

صيغة التكامل بالأجزاء

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx$$

$$= x \sin x + \cos x + C$$

بالتعويض

تكامل $\sin x$

2 $\int \ln x dx$

أفترض أن: $u = \ln x$ ، وأن: $dv = dx$. ومن ثم، فإن:

$$u = \ln x$$

$$dv = dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx$$

$$v = \int dx = x$$

إذن:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

صيغة التكامل بالأجزاء

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \times \frac{1}{x} dx$$

بالتعويض

$$= x \ln x - \int dx$$

بالتبسيط

$$= x \ln x - x + C$$

تكامل 1

3 $\int x(2x+7)^5 dx$

أفترض أن: $u = x$ ، وأن: $dv = (2x+7)^5 dx$. ومن ثم، فإن:

$$u = x$$

$$dv = (2x+7)^5 dx$$

$$du = dx$$

$$v = \int (2x+7)^5 dx = \frac{1}{12} (2x+7)^6$$

إذن:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

صيغة التكامل بالأجزاء

$$\int x(2x+7)^5 dx = \frac{1}{12} x (2x+7)^6 - \int \frac{1}{12} (2x+7)^6 dx$$

بالتعويض

$$= \frac{1}{12} x (2x+7)^6 - \frac{1}{168} (2x+7)^7 + C$$

تكامل $(ax+b)^n$ ، المضروب

في ثابت، والتبسيط

أفكر

هل اختيار $u = \cos x$ يجعل $dv = x dx$ والتكامل أسهل أم أكثر تعقيداً؟ أبرر إجابتي.

أنعلم

إذا كان ناتج تطبيق صيغة التكامل بالأجزاء يحوي تكاملاً أكثر تعقيداً من التكامل الأصلي، فإثني أبحث عن اختيار آخر لـ u و dv .

أفكر

هل يمكن حلّ الفروع 3 من المسائل بطريقة أخرى؟

الوحدة 4

4 $\int x e^{3-x} dx$

افترض أن: $u = x$ ، وأن: $dv = e^{3-x}$. ومن ثم، فإن:

$$u = x \quad dv = e^{3-x} dx$$

$$du = dx$$

$$v = \int e^{3-x} dx = -e^{3-x}$$

إذن:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

صيغة التكامل بالأجزاء

$$\int x e^{3-x} dx = -x e^{3-x} - \int -e^{3-x} dx$$

بالتعويض

$$= -x e^{3-x} - e^{3-x} + C$$

تكامل الاقتران الأسّي الطبيعي

أتحقق من فهمي

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

a) $\int x \sin x dx$

b) $\int x^2 \ln x dx$

c) $\int 2x\sqrt{7-3x} dx$

d) $\int 3x e^{4x} dx$

تكرار التكامل بالأجزاء

يتطلب إيجاد بعض التكاملات استعمال التكامل بالأجزاء أكثر من مرة كما في المثال الآتي.

مثال 2

أجد: $\int x^2 e^{2x} dx$

افترض أن: $u = x^2$ ، وأن: $dv = e^{2x} dx$. ومن ثم، فإن:

$$u = x^2 \quad dv = e^{2x} dx$$

$$du = 2x dx \quad v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}$$

أتعلم

إذا كان $g(x)$ اقتراناً خطياً، وكان $f(x)$ وكان حدوده، فأستعمل التكامل بالأجزاء في كل من الحالات الآتية:

- $\int f(x) e^{g(x)} dx$
- $\int f(x) \sin(g(x)) dx$
- $\int f(x) \cos(g(x)) dx$

أفكر

ماذا يحدث لو أضفنا ثابت التكامل عند إجراء التكامل $dv = \int v$ ؟ أبرر إجابتي.

إذن:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

صيغة التكامل بالأجزاء

$$\int x^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} \times 2x dx$$

بالتعويض

$$= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \int x e^{2x} dx \dots (1)$$

بالتبسيط

لإيجاد التكامل: $\int x e^{2x} dx$ ، أستخدم التكامل بالأجزاء مرّة أخرى.

أفترض أن: $u = x$ ، وأن: $dv = e^{2x} dx$. ومن ثمّ، فإنّ:

$$u = x$$

$$dv = e^{2x} dx$$

$$du = dx$$

$$v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

صيغة التكامل بالأجزاء

$$\int x e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx$$

بالتعويض

$$= \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C \dots (2)$$

تكامل الاقتران الأسّي الطبيعي

بتعويض المعادلة (2) في المعادلة (1)، يصبح التكامل الأصلي في الصورة الآتية:

$$\int x^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \left(\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} \right) + C$$

بالتعويض

$$= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + C$$

بالتبسيط

أتحقق من فهمي

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

a) $\int x^2 \sin x dx$

b) $\int x^3 e^{4x} dx$

أنعلم

ألاحظ أنّ التكامل: $\int x e^{2x} dx$ هو أبسط من التكامل الأصلي، لكنّه يتطلب استعمال طريقة التكامل بالأجزاء مرّة أخرى.

أنعلم

إنّ تبديل الفرض عند استعمال التكامل بالأجزاء مرّة أخرى يجعل التكامل أكثر تعقيداً؛ لذا من المهمّ اختيار $u = x$ و $dv = e^{2x} dx$ في هذا المثال.

أنعلم

عند استعمال ثابت التكامل، أكتب C للدلالة على أيّ ثابت؛ سواء كان C ، أو $-C$.

إذا نتج من تكرار التكامل بالأجزاء تكاملٌ مُطابقٌ للتكامل الأصلي، فإن التكامل يكون دوريًّا. ويُمكن عندئذٍ إيجاد جبريًّا بطريقةً مُشابهةً لحلَّ المعادلات.

مثال 3

أجد: $\int e^x \cos x \, dx$

أفترض أن: $u = e^x$ ، وأن: $dv = \cos x \, dx$. ومن ثمَّ، فإنَّ:

$$u = e^x \quad dv = \cos x \, dx$$

$$du = e^x \, dx \quad v = \int \cos x \, dx = \sin x$$

إذن:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

صيغة التكامل بالأجزاء

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx \dots \textcircled{1}$$

بالتعويض

لإيجاد التكامل: $\int e^x \sin x$ ، أستعمل التكامل بالأجزاء مرَّةً أُخرى.

أفترض أن: $u = e^x$ ، و $dv = \sin x \, dx$. ومن ثمَّ، فإنَّ:

$$u = e^x \quad dv = \sin x \, dx$$

$$du = e^x \, dx \quad v = \int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

صيغة التكامل بالأجزاء

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x - \int -e^x \cos x \, dx$$

بالتعويض

$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx \dots \textcircled{2}$$

بالتبسيط

أتعلم

يظلُّ e^x و $\cos x$ على حالهما من دون تبسيط بعد عملية الاشتقاق؛ لذا يُمكن اختيار أيٍّ منهما ليكون u .

أفكر

ما تأثير تبديل الفرض عند استعمال التكامل بالأجزاء مرَّةً أُخرى؟

بتعويض المعادلة (2) في المعادلة (1)، يصبح التكامل الأصلي في الصورة الآتية:

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - (-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx) \quad \text{بالتعويض}$$

$$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx \quad \text{بالتبسيط}$$

$$2 \int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x + C \quad \text{بإضافة } \int e^x \cos x dx \text{ إلى طرفي المعادلة}$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x \sin x + \frac{1}{2} e^x \cos x + C \quad \text{بقسمة طرفي المعادلة على 2}$$

أتحقق من فهمي

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

a) $\int \frac{\sin x}{e^x} dx$

b) $\int \sec^3 x dx$

تكرار التكامل بالأجزاء باستخدام طريقة الجدول

تعلمتُ في مثال سابق أنه يُمكن إيجاد تكامل في صورة: $\int f(x)g(x) dx$ ، وذلك بتكرار استعمال التكامل بالأجزاء إذا أمكن اشتقاق f بصورة مُتكررة حتى يصبح 0، ومُكاملة $g(x)$ على نحو مُتكرر بسهولة. ولكن، إذا تطلّب الأمر تكرار التكامل بالأجزاء مرّات عديدة، فإنّ ذلك يجعل إيجاد الناتج عملية مُعقّدة، تتطلّب إجراء كثير من الخطوات. وفي هذه الحالة، يُمكن استعمال طريقة الجدول (tabular integration) لتنظيم خطوات الحلّ.

أنعلم

إن:

$$\int f(x) dx - \int f(x) dx = C$$

وليس صفراً.

أنعلم

يُمكن استعمال طريقة الجدول لإيجاد التكاملات التي صورها:

• $\int f(x) \sin ax dx$

• $\int f(x) \cos ax dx$

• $\int f(x) (ax + b)^n dx$

• $\int f(x) e^{ax} dx$

حيث: $f(x)$ كثير حدود،

و $a \neq 0$ ، و $n \neq -1$.

أجد: $\int x^3 \sin x \, dx$.

أفترض أن: $f(x) = x^3$ ، وأن: $g(x) = \sin x$ ، ثم أتبع الخطوتين الآتيتين:

الخطوة 1: أنشئ جدولاً للمشتقات والتكاملات المتكررة.

اشتقاق $f(x)$ بصورة متكررة	إشارة الضرب	تكامل $g(x)$ بصورة متكررة
x^3	(+)	$\sin x$
$3x^2$	(-)	$-\cos x$
$6x$	(+)	$-\sin x$
6	(-)	$\cos x$
0		$\sin x$

أستمر في الاشتقاق حتى تصبح المشتقة صفراً.

الخطوة 2: أجمع نواتج ضرب الاقترانات المرتبطة بأسهم.

لحل التكامل، أجمع نواتج ضرب الاقترانات المرتبطة بالأسهم، وفقاً لإشارة العملية المحددة فوق كل سهم، كما يأتي:

$$\int x^3 \sin x \, dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C$$

أتحقق من فهمي

أجد كلاً من التكاملين الآتين:

a) $\int x^4 \cos 4x \, dx$

b) $\int x^5 e^x \, dx$

يمكن نمذجة كثير من المواقف الحياتية والعلمية باستعمال اقترانات عديدة. وعند إيجاد التكامل لهذه الاقترانات تنتج قيم أو علاقات مهمة في تلك المواقف الحياتية والعلمية، ولكن إجراء التكامل لبعض هذه الاقترانات يتطلب استعمال التكامل بالأجزاء.

أفكر

لماذا تتغير الإشارة بصورة دورية في طريقة الجدول؟ أقرر إجابتي، مستعيناً بحل المثال 2.

أتعلم

يُنتج الثابت C من التكامل: $\int 0 \, dx$ الذي يظهر من السطر الأخير من الجدول.

مثال 5 : من الحياة



الربح الحدي: يُمثَّل الاقتران: $P'(x) = 1000x^2 e^{-0.2x}$

الربح الحدي (بالدينار) لكل مُكيّف يباع في إحدى

الشركات المُتخصّصة بالتكييف، حيث x عدد المُكيّفات المبيعة، و $P(x)$ مقدار الربح بالدينار

عند بيع x مُكيّفًا. أجد اقتران الربح $P(x)$ ، علمًا بأن $P(0) = -2000$.

الخطوة 1: أجد تكامل الاقتران: $P'(x)$.

$$P(x) = \int 1000x^2 e^{-0.2x} dx$$

$$P(x) = \int P'(x) dx$$

الربح الحدي هو مشتقة
اقتران الربح.

الأحظ أنه يُمكن إيجاد التكامل بالأجزاء باستعمال طريقة الجدول؛ لذا أنشئ جدولًا
للمشتقات والتكاملات المتكررة.

اشتقاق $f(x)$ بصورة مُتكررة	إشارة الضرب	تكامل $g(x)$ بصورة مُتكررة
$1000x^2$	(+)	$e^{-0.2x}$
$2000x$	(-)	$-5e^{-0.2x}$
2000	(+)	$25e^{-0.2x}$
0		$-125e^{-0.2x}$

لحلّ التكامل، أجمع نواتج ضرب الاقترانات المرتبطة بالأسهم، وفقًا لإشارة العملية المُحدّدة
فوق كل سهم، كما يأتي:

$$P(x) = \int 1000x^2 e^{-0.2x} dx = -5000x^2 e^{-0.2x} - 50000x e^{-0.2x} - 250000e^{-0.2x} + C$$

الخطوة 2: أجد ثابت التكامل C .

لإيجاد ثابت التكامل C ، أستعمل الشرط الأولي المعطى في المسألة، وهو: $P(0) = -2000$.

$$P(x) = -5000x^2 e^{-0.2x} - 50000x e^{-0.2x} - 250000e^{-0.2x} + C$$

قاعدة الاقتران

$$-2000 = -5000(0)^2 e^{-0.2(0)} - 50000(0) e^{-0.2(0)} - 250000e^{-0.2(0)} + C$$

بتعويض $x = 0$,

$$P(0) = -2000$$

$$C = 248000$$

بحلّ المعادلة

إذن، اقتران الربح هو:

$$P(x) = -5000x^2 e^{-0.2x} - 50000x e^{-0.2x} - 250000e^{-0.2x} + 248000$$

أتحقق من فهمي

التكلفة الحدية: يُمثل الاقتران: $C'(x) = (0.1x + 1)e^{0.03x}$ التكلفة الحدية لكل قطعة (بالدينار) تُنتج في إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المنتجة، و $C(x)$ تكلفة إنتاج x قطعة بالدينار. أجد اقتران التكلفة $C(x)$ ، علمًا بأن $C(10) = 200$.

أتذكر

تُمثل التكلفة الحدية مشتقة اقتران التكلفة، وترتبط بالتكاليف التي تتغير بتغير مستويات الإنتاج، بخلافًا للتكلفة الثابتة التي لا تتغير بتغير مستويات الإنتاج.

التكامل بالأجزاء لتكاملات محدودة

يُمكن إيجاد تكاملات محدودة باستخدام طريقة الأجزاء، وذلك بإجراء التكامل أولًا، ثم التعويض في حدود التكامل باستعمال الصيغة الآتية:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

مثال 6

أجد: $\int_1^2 x^3 \ln x dx$

أفترض أن: $u = \ln x$ ، وأن: $dv = x^3 dx$ ومن ثم، فإن:

$$u = \ln x \quad dv = x^3 dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx \quad v = \int dx = \frac{1}{4} x^4$$

إذن:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

صيغة التكامل المحدود بالأجزاء

$$\int_1^2 x^3 \ln x dx = \frac{1}{4} x^4 \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{4} x^4 \times \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{1}{4} x^4 \ln x \Big|_1^2 - \frac{1}{4} \int_1^2 x^3 dx$$

$$= \frac{1}{4} x^4 \ln x \Big|_1^2 - \frac{1}{16} x^4 \Big|_1^2$$

$$= (4 \ln 2 - \frac{1}{4} \ln 1) - \frac{1}{16} (2^4 - 1^4)$$

$$= 4 \ln 2 - \frac{15}{16}$$

بالتعويض

بالتبسيط

تكامل اقتران القوة

بالتعويض

بالتبسيط

أفكر

لماذا يجب اشتقاق $\ln x$ بدلًا من مكاملتها؟ أبرر إجابتي.

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

a) $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$

b) $\int_0^1 xe^{-2x} dx$

التكامل بالأجزاء، والتكامل بالتعويض

تعلّمتُ سابقاً استعمال التعويض لحلّ تكاملات يصعب حلّها بصورة مباشرة. والآن سأتعلم كيف أحلّ بعض التكاملات باستعمال طريقة التعويض وطريقة الأجزاء معاً.

مثال 7

أجد الاقتران: $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

الخطوة 1: أعرّض.

أفترض أن: $a = \sqrt{x}$. ومن ثمّ، فإنّ:

$$\frac{da}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 2\sqrt{x} da \Rightarrow dx = 2a da$$

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = \int e^a \times 2a da$$

بتعويض $a = \sqrt{x}$, $dx = 2a da$

$$= \int 2a e^a da$$

بإعادة الترتيب

الخطوة 2: أجد ناتج التكامل بالأجزاء.

أفترض أن: $u = 2a$ ، وأنّ: $dv = e^a da$. ومن ثمّ، فإنّ:

$$u = 2a$$

$$dv = e^a da$$

$$du = 2da$$

$$v = \int e^a da = e^a$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

صيغة التكامل بالأجزاء

$$\int 2a e^a da = 2ae^a - \int 2e^a da$$

بالتعويض

$$= 2ae^a - 2e^a + C$$

تكامل e^a المضروب في ثابت

$$= 2\sqrt{x} e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C$$

بتعويض $\sqrt{x} = a$

أنعلم

استعمل الرمز a للتعويض؛
بُغية التفريق بينه وبين الرمز
 x المُستعمل في صيغة
التكامل بالأجزاء.

أنعلم

بوجه عام، إذا كان أس
الاقتران الأسّي غير خطي
أو زاوية الاقتران المثلثي
غير خطية، فإنّني أبدأ
بتعويضها.

أتحقق من فهمي

أجد كلاً من التكاملين الآتين:

a) $\int (x^3 + x^5) \sin x^2 dx$

b) $\int x^5 e^{x^2} dx$

ألاحظ من الأمثلة السابقة أن إيجاد التكامل بالأجزاء يعتمد على تحديد الاقتران المراد اشتقاقه لتبسيط التكامل. ويبيّن الجدول الآتي تكاملات مختلفة يمكن حلها بطريقة الأجزاء، والاختيار الأفضل لـ u .

التكامل بطريقة الأجزاء، واختيار u

مُلخّص المفهوم

الاقترانان المضروبان	اختيار u	أمثلة
x^n ، حيث n عدد صحيح موجب، مضروباً في اقتران مثلثي.	x^n	$x \cos x$ $x^2 \sin x$
x^n ، حيث n عدد صحيح موجب، مضروباً في اقتران أسّي طبيعي.	x^n	xe^x $x^3 e^{-x}$
x^n ، حيث n عدد حقيقي، مضروباً في اقتران لوغاريتمي طبيعي.	الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي	$x \ln x$ $x^{2/3} \ln x$
اقتران أسّي طبيعي، مضروباً في اقتران مثلثي.	أيٌّ منهما	$e^x \cos x$ $e^{-x} \sin x$

أدرب وأحلّ المسائل

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

1 $\int (x+1) \cos x dx$

2 $\int xe^{x/2} dx$

3 $\int (2x^2 - 1) e^{-x} dx$

4 $\int \ln \sqrt{x} dx$

5 $\int x \sin x \cos x dx$

6 $\int x \sec x \tan x dx$

7 $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$

8 $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$

9 $\int 2x^2 \sec^2 x \tan x dx$

10 $\int (x-2)\sqrt{8-x} dx$

11 $\int x^3 \cos 2x dx$

12 $\int \frac{x}{6^x} dx$

13 $\int e^{-x} \sin 2x dx$

14 $\int \cos x \ln \sin x dx$

15 $\int e^x \ln(1+e^x) dx$

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

16 $\int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx$

17 $\int_1^e \ln x^2 dx$

18 $\int_1^2 \ln(xe^x) dx$

19 $\int_{\pi/12}^{\pi/9} x \sec^2 3x dx$

20 $\int_1^e x^4 \ln x dx$

21 $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx$

22 $\int_0^1 x(e^{-2x} + e^{-x}) dx$

23 $\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx$

24 $\int_0^1 x 3^x dx$

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

25 $\int x^3 e^{x^2} dx$

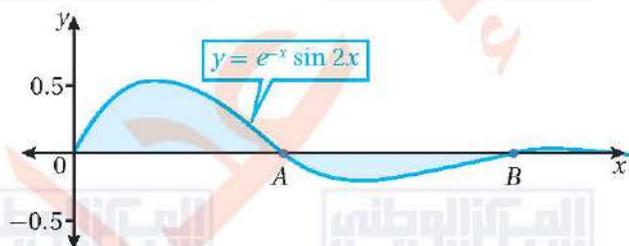
26 $\int \cos(\ln x) dx$

27 $\int x^3 \sin x^2 dx$

28 $\int e^{\cos x} \sin 2x dx$

29 $\int \sin \sqrt{x} dx$

30 $\int \frac{x^3 e^{x^2}}{(x^2+1)^2} dx$



إذا كان الشكل المجاور يُمثل منحنى الاقتران:

$f(x) = e^{-x} \sin 2x$ ، حيث: $x \geq 0$ ، فأجيب عن

الأسئلة الثلاثة الآتية تباعاً:

31 أجد إحداثيي كلٍّ من النقطة A، والنقطة B.

32 أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة.

33 يتحرَّك جُسيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = t e^{-t/2}$ ، حيث t الزمن بالثواني، و

سرعته المتجهة بالمتري لكل ثانية. إذا بدأ الجُسيْم الحركة من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد t ثانية.

الوحدة 4

في كلِّ ممَّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستخدم المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f'(x)$:

34 $f'(x) = (x + 2) \sin x$; $(0, 2)$

35 $f'(x) = 2xe^{-x}$; $(0, 3)$



36 دورة تدريبية: تقدّمت طالبة جامعية لدورة تدريبية مُتقدّمة في الطباعة. إذا كان عدد الكلمات التي تطبعها الطالبة في الدقيقة يزداد بمعدّل: $N'(t) = (t + 6)e^{-0.25t}$ ، حيث $N(t)$ عدد الكلمات التي تطبعها الطالبة في الدقيقة بعد t أسبوعًا من التحاقها بالدورة، فأجد $N(t)$ ، علمًا بأنَّ الطالبة كانت تطبع 40 كلمة في الدقيقة عند بدء الدورة.

مهارات التفكير العليا

37 تبرير: أثبت أن: $\int_{1/2}^3 x^2 \ln 2x \, dx = 9 \ln 6 - \frac{215}{72}$

38 تبرير: أثبت أن: $\int_0^{\pi/4} x \sin 5x \sin 3x \, dx = \frac{\pi-2}{16}$

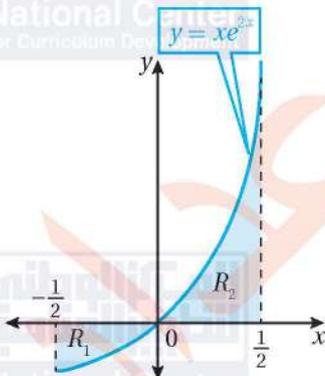
39 تبرير: إذا كان: $\int_0^a xe^{x/2} \, dx = 6$ ، فأثبت أن a يُحقّق المعادلة: $x = 2 + e^{-x/2}$.

40 تبرير: أجد: $\int (\ln x)^2 \, dx$ بطريقتين مختلفتين، مُبرّرًا إجابتي.

تبرير: إذا كان الشكل المجاور يُمثّل منحنى الاقتران: $y = xe^{2x}$ ، حيث: $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعًا:

41 أجد مساحة كلِّ من المنطقة R_1 ، والمنطقة R_2 .

42 أثبت أن مساحة المنطقة R_1 إلى مساحة المنطقة R_2 تساوي $e - 2$.



تحدّد: أستخدم التكامل بالأجزاء لإثبات كلِّ ممَّا يأتي، حيث: n عدد صحيح موجب، و $a \neq 0$:

43 $\int x^n \ln x \, dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} (-1 + (n+1) \ln x) + C$

44 $\int x^n e^{ax} \, dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} \, dx$

المساحات والحجوم

Areas and Volumes

فكرة الدرس



مسألة اليوم

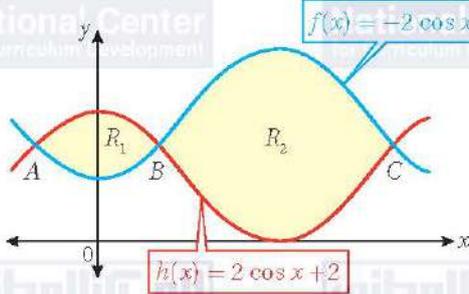


- إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنين اقترانين.
- إيجاد حجم المُجسَّم الدوراني.

مُعتمِدًا الشكل المجاور الذي يُبين منحنين

الاقترانين: $f(x) = -2 \cos x + 4$ ،

و $h(x) = 2 \cos x + 2$

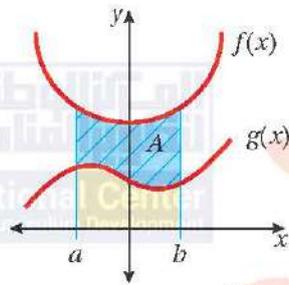


1 أجد إحداثيي كلٍّ من النقاط A ، B ، و C .

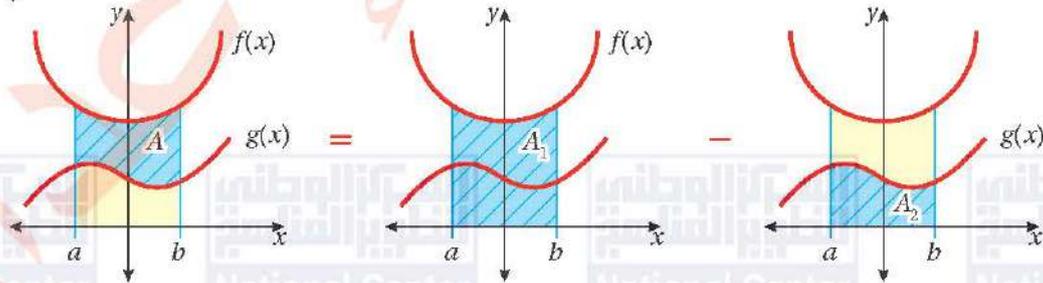
2 أجد مساحة كلٍّ من المنطقة R_1 ، والمنطقة R_2 .

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنين اقترانين

تعلَّمتُ سابقًا إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x . والآن سأتعلمُ إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنين.



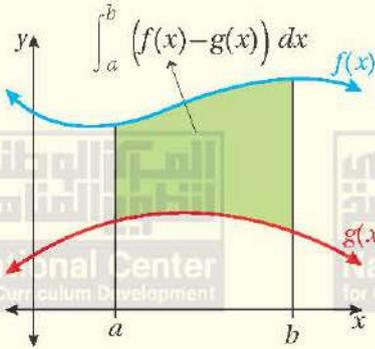
إذا أردتُ إيجاد مساحة المنطقة A المحصورة بين منحنين الاقترانين: $f(x)$ و $g(x)$ والمستقيمين: $x = a$ ، و $x = b$ كما في الشكل المجاور، فإنني أطرح المساحة التي أسفل المنحنى السفلي (A_2) من المساحة التي أسفل المنحنى العلوي (A_1).



بوجه عام، فإن:

$$A = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

$$= \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$



إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين متصلين على الفترة $[a, b]$ ، وكان $f(x) \geq g(x)$ ، فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنين الاقترانين: $f(x)$ و $g(x)$ ، والمستقيمين: $x = a$ و $x = b$ هي:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

أتعلم

يمكن إيجاد مساحة المحصورة بين منحنين اقترانين في فترة ما من دون تحديد العلوي والسفلي منهما في تلك الفترة، باستعمال الصيغة الآتية:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

عند إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنين اقترانين، والمستقيمين: $x = a$ و $x = b$ ، يجب تحديد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنين الاقترانين في الفترة $[a, b]$ (إن وُجدت)، لأن وجود نقاط تقاطع بين منحنين الاقترانين قد يتطلب تجزئة التكامل.

مثال 1

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنين الاقترانين: $f(x) = e^x$ و $g(x) = x$ والمستقيمين: $x = 0$ و $x = 2$.

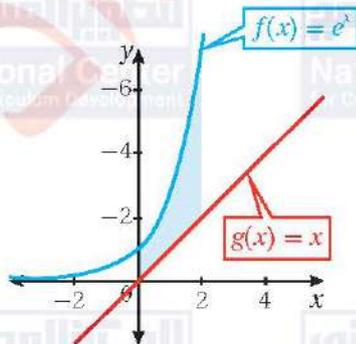
الخطوة 1: أجد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنين الاقترانين في الفترة المعطاة (إن وُجدت). لإيجاد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنين الاقترانين في الفترة $[0, 2]$ ، أساوي أولاً قاعدتي الاقترانين، ثم أحل المعادلة الناتجة:

بمساواة الاقترانين

$$f(x) = g(x)$$

$$e^x = x$$

$$f(x) = e^x, g(x) = x$$



بما أن $e^x \neq x$ ، فإن منحنين الاقترانين لا يتقاطعان كما في الشكل المجاور.

الخطوة 2: أجد المساحة عن طريق التكامل.

بما أن منحنى الاقتران $f(x)$ هو العلوي، ومنحنى الاقتران $g(x)$ هو السفلي كما في الشكل المجاور، فإنه يمكن إيجاد مساحة المنطقة المطلوبة كالآتي:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \quad \text{صيغة المساحة المحصورة بين منحنين اقترانين}$$

$$= \int_0^2 (e^x - x) dx$$

$$= \left(e^x - \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_0^2$$

$$= \left(e^2 - \frac{1}{2} (2)^2 \right) - \left(e^0 - \frac{1}{2} (0)^2 \right)$$

$$= e^2 - 3$$

$$\text{بتعويض } f(x) = e^x, g(x) = x$$

تكامل e^x ، وتكامل اقتران القوة

بالتعويض

بالتبسيط

إذن، المساحة هي: $e^2 - 3$ وحدة مربعة.

2 أجد المساحة المحصورة بين منحنين الاقترانين: $f(x) = \cos x$ و $g(x) = \sin x$ والمستقيمين: $x = 0$ و $x = \frac{\pi}{2}$.

الخطوة 1: أجد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنين الاقترانين في الفترة المعطاة (إن وُجدت).

لإيجاد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنين الاقترانين في الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$ ، أساوي أولاً قاعدتي الاقترانين، ثم أحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = g(x)$$

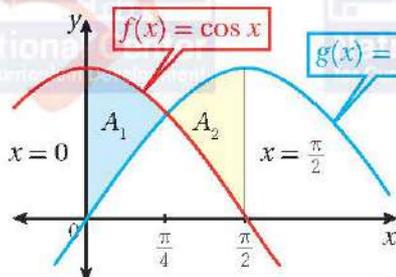
بمساواة الاقترانين

$$\cos x = \sin x$$

$$\text{بتعويض } f(x) = \cos x, g(x) = \sin x$$

$$x = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{بحل المعادلة لـ } x \text{ في الفترة } [0, \frac{\pi}{2}]$$



إذن، الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنين

الاقترانين: $f(x)$ و $g(x)$ في الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$ ،

هو: $x = \frac{\pi}{4}$ ، كما في الشكل المجاور.

أنعلم

يُمكن تحديد الاقتران العلوي والاقتران السفلي في فترة لا يتقاطع فيها المنحنيان دون تمثيلهما بيانياً عن طريق تعويض إحدى قيم المتغير x في تلك الفترة في كلا الاقترانين، ومقارنة صورتيهما.

الخطوة 2: أجد المساحة عن طريق التكامل.

يُبين الشكل المجاور أن منحنى الاقتران $f(x)$ هو العلوي، وأن منحنى الاقتران $g(x)$ هو السفلي في الفترة $[0, \frac{\pi}{4}]$ ، ويُبين أيضًا أن منحنى الاقتران $g(x)$ هو العلوي، وأن منحنى الاقتران $f(x)$ هو السفلي في الفترة $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

ومن ثم، فإن مساحة المنطقة المطلوبة هي مجموع مساحة كل من المنطقة A_1 ، والمنطقة A_2 :

$$A = A_1 + A_2$$

مساحة المنطقة المطلوبة

$$= \int_0^{\pi/4} (f(x) - g(x)) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (g(x) - f(x)) dx$$

صيغة المساحة المحصورة بين منحنين اقترانين

$$= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x) dx$$

بتعويض $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$

$$= (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\pi/4} + (-\cos x - \sin x) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2}$$

تكامل $\cos x$ ، وتكامل $\sin x$

$$= ((\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4}) - (\sin 0 + \cos 0)) + (-\cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2}) - (-\cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4})$$

بالتعويض

$$= 2\sqrt{2} - 2$$

بالتبسيط

إذن، المساحة هي: $2\sqrt{2} - 2$ وحدة مربعة.

أتحقق من فهمي

(a) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنين الاقترانين: $f(x) = \sqrt{x}$ ، و $g(x) = x^2 + 1$ ، والمستقيمين: $x = 0$ ، و $x = 3$.

(b) أجد المساحة المحصورة بين منحنين الاقترانين: $f(x) = \sin x$ ، و $g(x) = 2 - \sin x$ ، والمستقيمين: $x = 0$ ، و $x = \pi$.

ألاحظ أن المنطقة المطلوب إيجاد مساحتها بين المنحنيين في المثال السابق محدودة بمستقيمين معطيين، هما: $x = a$ ، و $x = b$. ولكن، إذا كانت هذه المنطقة محصورة فقط بين منحنين متقاطعين من دون تحديد مسبق للحدود، فإن حدود التكامل ستكون ضمن قيم x التي يتقاطع عندها المنحنيان.

مثال 2

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين: $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ و $g(x) = 4x - x^2$ في الربع الأول من المستوى الإحداثي.

الخطوة 1: أجد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنىي الاقترانين.

لإيجاد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنىي الاقترانين، أساوي أولاً قاعدتي الاقترانين، ثم أحل المعادلة الناتجة:

$$f(x) = g(x)$$

$$\frac{1}{2}x^3 = 4x - x^2$$

$$x^3 = 8x - 2x^2$$

بمساواة الاقترانين

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3, g(x) = 4x - x^2$$

بتعويض x بالضرب في 2

$$x^3 + 2x^2 - 8x = 0$$

$$x(x^2 + 2x - 8) = 0$$

$$x(x - 2)(x + 4) = 0$$

$$x = 0 \text{ or } x - 2 = 0 \text{ or } x + 4 = 0$$

$$x = 0 \quad x = 2 \quad x = -4$$

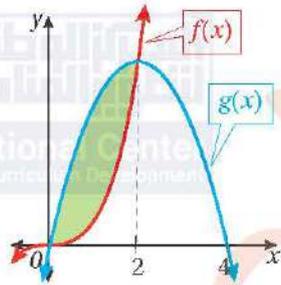
بإعادة ترتيب المعادلة

بإخراج x عاملاً مشتركاً

بالتحليل

خاصية الضرب الصفري

بحل كل معادلة



بما أن المساحة المطلوبة تقع في الربع الأول من المستوى الإحداثي، فإن الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنىي الاقترانين في الربع الأول هو: $x = 0$ و $x = 2$ ، كما في الشكل المجاور.

الخطوة 2: أجد المساحة عن طريق التكامل.

بما أن منحنى الاقتران $f(x)$ هو السفلي، ومنحنى الاقتران $g(x)$ هو العلوي كما في الشكل المجاور، فإنه يمكن إيجاد مساحة المنطقة المطلوبة كالآتي:

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$

$$= \int_0^2 ((4x - x^2) - \frac{1}{2}x^3) dx$$

$$= \left(2x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{8}x^4 \right) \Big|_0^2$$

صيغة المساحة المحصورة بين منحنىي اقترانين

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3, g(x) = 4x - x^2$$

تكامل اقتران القوة المضروب في ثابت

أنعم

ألاحظ أن حدود التكامل لم تُذكر في المسألة؛ لذا يجب إيجاد نقاط التقاطع؛ فهي تُمثل حدود التكامل.

أنذكر

منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ هو تضييق رأسي لمنحنى الاقتران الرئيس: $f(x) = x^3$

$$= (8 - \frac{8}{3} - 2) - 0$$

$$= \frac{10}{3}$$

بالتعويض

بالتبسيط

إذن، المساحة هي: $\frac{10}{3}$ وحدة مربعة.

أتحقق من فهمي

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين: $f(x) = x^2$ و $g(x) = x + 2$.

التكامل، ومنحنى السرعة المتجهة - الزمن

تعلّمت سابقاً أن الإزاحة هي التغيّر في موقع الجسم؛ فإذا كان $s(t)$ موقع جسم عند الزمن t ، فإنّ الإزاحة على الفترة الزمنية $[t_1, t_2]$ هي: $s(t_2) - s(t_1)$.

تعلّمت أيضاً أنّه يُمكن استعمال التكامل المحدود لإيجاد إزاحة جسم علّمت سرعته المتجهة كالآتي:

$$s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

أما المسافة الكلية التي يقطعها الجسم فيمكن إيجادها كما يأتي:

$$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)| dt$$

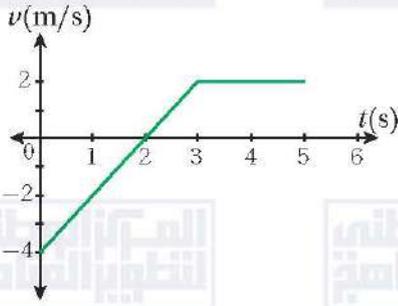
إذا علّم منحنى السرعة المتجهة - الزمن لجسم يتحرّك في مسار مستقيم، فإنّ التكامل يُستعمل لإيجاد إزاحة هذا الجسم؛ ذلك أنّ الإزاحة تساوي تكامل اقتران السرعة المتجهة؛ لذا يلزم الانتباه إلى أنّ المساحة الواقعة أسفل المحور x والمحصورة بين منحنى السرعة المتجهة - الزمن والمحور x تُعبّر عن قيمة سالبة للتكامل، وأنّ المساحة الواقعة فوق المحور x والمحصورة بين منحنى السرعة المتجهة - الزمن والمحور x تُعبّر عن قيمة موجبة للتكامل.

أما المسافة الكلية التي يقطعها الجسم فيمكن إيجادها بإيجاد المساحة المحصورة بين منحنى السرعة المتجهة - الزمن والمحور x ؛ لأنها تكامل القيمة المطلقة لاقتران السرعة المتجهة.

أتذكّر

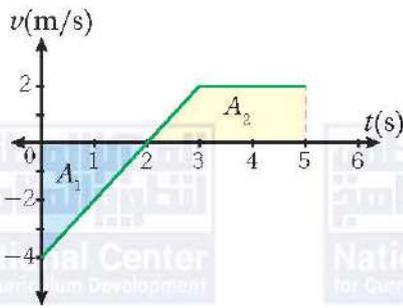
قد تكون قيمة الإزاحة موجبة، أو سالبة، أو صفراً، تبعاً لاتجاه حركة الجسم. أما المسافة فهي طول المسار الذي يقطعه الجسم بصرف النظر عن الاتجاه.

مثال 3



يُبين الشكل المجاور منحنى السرعة المتجهة – الزمن لجسيم يتحرك على المحور x في الفترة الزمنية $[0, 5]$. إذا بدأ الجسيم الحركة من $x = 2$ عندما $t = 0$ ، فأوجد كلاً مما يأتي:

1 إزاحة الجسيم في الفترة الزمنية المعطاة.



الخطوة 1: أجد المساحة بين منحنى السرعة المتجهة – الزمن والمحور x .

لإيجاد المساحة بين منحنى السرعة المتجهة – الزمن والمحور x ، أُقسِّم المساحة الكلية إلى جزأين؛ الأول: مساحة المثلث A_1 ، والثاني: مساحة شبه المُنحرف A_2 .

• مساحة المثلث A_1 :

$$A_1 = \frac{1}{2}bh$$

$$= \frac{1}{2}(2)(4) = 4$$

صيغة مساحة المثلث

بتعويض $b = 2, h = 4$

إذن، مساحة المثلث A_1 هي: 4 m^2

• مساحة شبه المُنحرف A_2 :

$$A_2 = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$$

$$= \frac{1}{2}(3 + 2) \times 2 = 5$$

صيغة مساحة شبه المُنحرف

بتعويض $b_1 = 3, b_2 = 2, h = 2$

إذن، مساحة شبه المُنحرف A_2 هي: 5 m^2

أنعّم

يُمكن تقسيم المنطقة إلى مساحات أصغر.

أفكر

هل يمكن إيجاد الإزاحة بطريقة أخرى؟ أبرّر إجابتي.

الوحدة 4

الخطوة 2: أجد الإزاحة.

$$s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

صيغة الإزاحة

$$s(5) - s(0) = \int_0^5 v(t) dt$$

بتعويض $t_1 = 0, t_2 = 5$

$$s(5) - s(0) = \int_0^2 v(t) dt + \int_2^5 v(t) dt$$

بتجزئة التكامل

$$= -4 + 5 = 1$$

بالتعويض

أتعلم

تشير قيمة التكامل السالبة إلى أن المساحة بين منحنى الاقتران والمحور x تقع أسفل المحور x .

إذن، إزاحة الجسيم في الفترة $[0, 5]$ هي 1 m إلى اليمين.

المسافة التي قطعها الجسيم في الفترة الزمنية المعطاة.

2

$$\int_0^5 |v(t)| dt = A_1 + A_2$$

تكامل اقتران السرعة

$$= 4 + 5 = 9$$

بتعويض $A_1 = 4, A_2 = 5$

إذن، المسافة التي قطعها الجسيم في الفترة $[0, 5]$ هي 9 m.

الموقع النهائي للجسيم.

3

$$s(5) - s(0) = \int_0^5 v(t) dt$$

صيغة الإزاحة

$$s(5) - 2 = 1$$

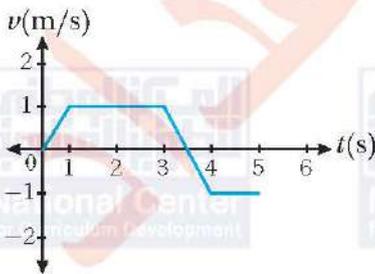
$$s(0) = 2, \int_0^5 v(t) dt = 1$$

بالتعويض

$$s(5) = 3$$

إذن، الموقع النهائي للجسيم هو 3 m.

أتحقق من فهمي



يُبين الشكل المجاور منحنى السرعة المتجهة - الزمن

لجسيم يتحرك على المحور x في الفترة الزمنية $[0, 5]$.

إذا بدأ الجسيم الحركة من $x = 3$ عندما $t = 0$ ، فأجد

كُلًّا مما يأتي:

(a) إزاحة الجسيم في الفترة الزمنية المعطاة.

(b) المسافة التي قطعها الجسيم في الفترة الزمنية المعطاة.

(c) الموقع النهائي للجسيم.

الحجوم الدورانية

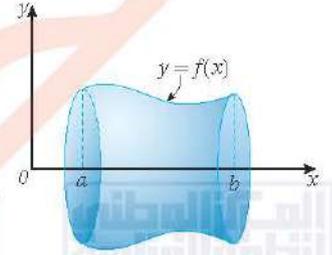
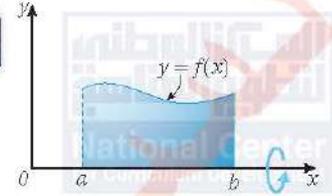
تعلّمتُ سابقًا أنّ الشكل الناتج من دوران منطقة ما دورة كاملة حول المحور x يُسمّى المُجسّم الدوراني، وأنّه يمكن إيجاد حجم هذا المُجسّم عن طريق التكامل.

حجوم المُجسّمات الدورانية

مراجعة المفهوم

حجم المُجسّم الناتج من دوران المنطقة التي تنحصر بين منحنى $y = f(x)$ ، والمحور x ، وتقع بين $x = a$ و $x = b$ ، حيث $a < b$ حول المحور x ، هو:

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx \quad \text{or} \quad V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$$



مثال 6

أجد حجم المُجسّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = e^x$ ، والمحور x ، من $x = -1$ إلى $x = 2$ حول المحور x .

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx \quad \text{صيغة حجم المُجسّم الناتج من الدوران حول المحور } x$$

$$= \int_{-1}^2 \pi (e^x)^2 dx \quad \text{بتعويض } f(x) = e^x, a = -1, b = 2$$

$$= \int_{-1}^2 \pi e^{2x} dx \quad \text{بالتبسيط}$$

$$= \frac{\pi}{2} e^{2x} \Big|_{-1}^2 \quad \text{تكامل الاقتران الأسّي الطبيعي المضروب في ثابت}$$

$$= \frac{\pi}{2} (e^{2(2)} - e^{2(-1)}) \quad \text{بالتعويض}$$

$$= \frac{\pi}{2} (e^4 - e^{-2}) \quad \text{بالتبسيط}$$

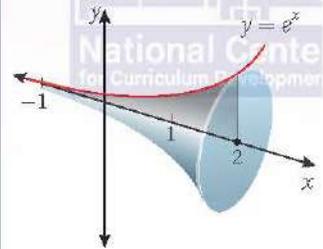
إذن، حجم المُجسّم الناتج من دوران هذه المنطقة هو: $\frac{\pi}{2} (e^4 - e^{-2})$ وحدة مكعبة.

أدقّق من فهمي

أجد حجم المُجسّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{1}{x}$ ، والمحور x ، والمستقيمين: $x = 1$ و $x = 4$ حول المحور x .

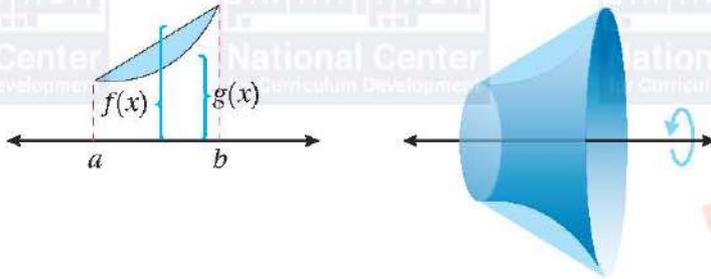
الدعم البياني

يبيّن الشكل أدناه المُجسّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = e^x$ ، والمحور x ، والمستقيمين: $x = -1$ و $x = 2$ حول المحور x .



الوحدة 4

تعلّمتُ في المثال السابق إيجاد حجم المُجسّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران، والمحور x ، والمستقيمين: $x = a$ ، $x = b$ حول المحور x . والآن سأتعلم كيف أجد حجم المُجسّم الناتج من دوران منطقة محصورة بين منحنىي اقترانين، والمستقيمين: $x = a$ ، و $x = b$ حول المحور x ، عن طريق طرح حجم المُجسّم الدوراني الداخلي من حجم المُجسّم الدوراني الخارجي كما في الشكل الآتي:



أتعلّم

الأحظ أنّ المُجسّم الناتج من الدوران مُفرّغ من الداخل.

حجم المُجسّم الدوراني الناتج من دوران منحنىي اقترانين

مفهوم أساسي

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين متصلين على الفترة $[a, b]$ ، وكان منحنى $f(x)$ أبعد من منحنى $g(x)$ عن المحور x ، وكان كلا المنحنيين في الجهة نفسها من المحور x ، فإنّ حجم المُجسّم الناتج من دوران المنطقة التي تنحصر بين منحنىي الاقترانين: $f(x)$ و $g(x)$ ، وتقع بين $x = a$ و $x = b$ ، حيث $a < b$ حول المحور x ، هو:

$$V = \int_a^b \pi \left((f(x))^2 - (g(x))^2 \right) dx$$

مثال 7

أجد حجم المُجسّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين: $f(x) = x$ ، و $g(x) = x^3$ ، في الربع الأوّل من المستوى الإحداثي حول المحور x .

الخطوة 1: أجد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنىي الاقترانين.

لإيجاد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنىي الاقترانين، أساوي أوّلاً قاعدتي الاقترانين، ثم أحلّ المعادلة الناتجة:

$$f(x) = g(x)$$

بمساواة الاقترانين

$$x = x^3$$

$$\text{بتعويض } f(x) = x, g(x) = x^3$$

أتعلّم

يُشترط لتطبيق معادلة المُجسّم الدوراني الناتج من دوران منطقة محصورة بين منحنىي اقترانين أنّ يكون كلا المنحنيين في الجهة نفسها بالنسبة إلى المحور x .
أما إذا كان أحد الاقترانين فوق المحور x والآخر أسفله، فإنّ يلزم لإيجاد الحجم الناتج توافر تفاصيل أخرى لن تُذكر في هذا الكتاب.

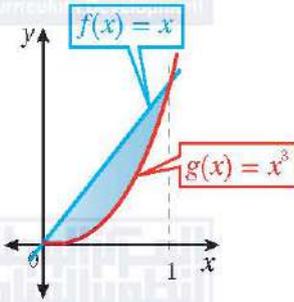
$$x - x^3 = 0$$

$$x(1 - x^2) = 0$$

$$x(1 - x)(1 + x) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{or} \quad 1 - x = 0 \quad \text{or} \quad 1 + x = 0$$

$$x = 0 \quad x = 1 \quad x = -1$$



بما أن المنطقة المطلوبة تقع في الربع الأول من المستوى الإحداثي، فإن الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنىي الاقترانين في الربع الأول، هو: $x = 0$ ، و $x = 1$ ، كما في الشكل المجاور.

الخطوة 2: أجد حجم المُجسَّم الدوراني عن طريق التكامل.

بما أن منحنى الاقتران $f(x)$ هو الأبعد عن المحور x من منحنى الاقتران $g(x)$ كما في الشكل السابق، فإنه يُمكن إيجاد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المطلوبة كالاتي:

$$V = \int_a^b \pi ((f(x))^2 - (g(x))^2) dx$$

$$= \int_0^1 \pi ((x)^2 - (x^3)^2) dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x^2 - x^6) dx$$

$$= \pi \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{7} x^7 \right) \Big|_0^1$$

$$= \pi \left(\left(\frac{1}{3} (1)^3 - \frac{1}{7} (1)^7 \right) - \left(\frac{1}{3} (0)^3 - \frac{1}{7} (0)^7 \right) \right)$$

$$= \frac{4\pi}{21}$$

ب طرح x^3 من طرفي المعادلة

بإخراج x عاملاً مشتركاً

بالتحليل

خاصية الضرب الصفري

يحل كل المعادلة لـ x

أنعلم

ألاحظ من التمثيل البياني أن منحنى $f(x)$ أبعد من منحنى $g(x)$ عن المحور x .

صيغة حجم المُجسَّم الناتج

من الدوران حول المحور x

بتعويض $a = 0$, $b = 1$,

$f(x) = x$, $g(x) = x^3$

بالتبسيط

تكامل اقتران القوة

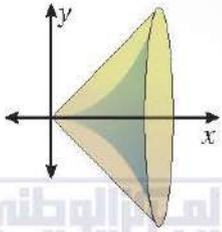
بالتعويض

بالتبسيط

إذن، حجم المُجسَّم الناتج من دوران هذه المنطقة هو: $\frac{4\pi}{21}$ وحدة مكعبة.

الوحدة 4

الدعم البياني



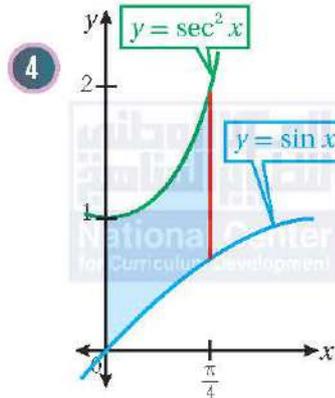
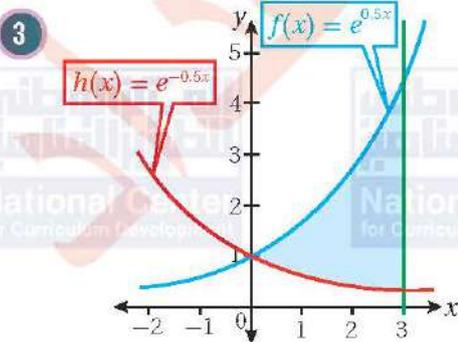
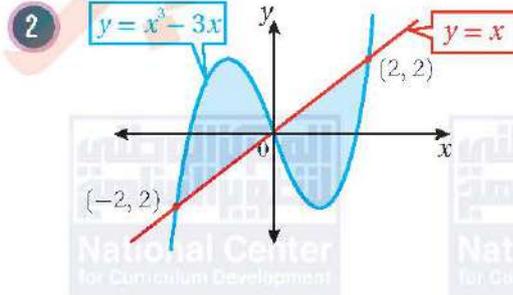
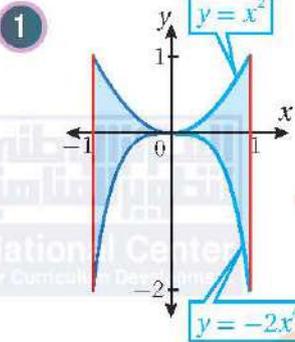
يُبين الشكل المجاور المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x$ و $g(x) = x^3$ ، في الربع الأوَّل من المستوى الإحداثي حول المحور x .

أتحقِّق من فهمي

أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين: $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2$ حول المحور x .

أَتدَرَّب وَأَحْلُ المسائل

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلِّ من التمثيلات البيانية الآتية:



5 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 6$ و $g(x) = 2x^2$.

6 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين: $f(x) = 4^x$ و $g(x) = 3^x$ ، والمستقيم $x = 1$ في الربع الأوّل.

7 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين: $f(x) = e^x$ و $g(x) = \cos x$ ، والمستقيم $x = \frac{\pi}{2}$ في الربع الأوّل.

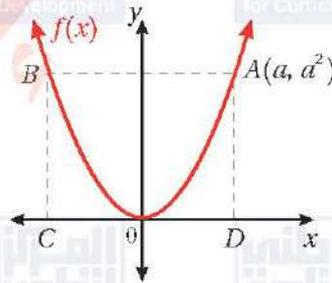
8 أجد المساحة المحصورة بين منحنىي الاقترانين: $f(x) = |x|$ و $g(x) = x^4$.

9 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين: $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ و $g(x) = -x^2 + 2x$.

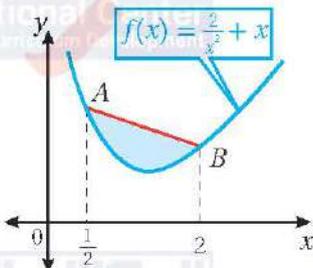
10 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين: $f(x) = e^x$ و $g(x) = x^2$ ، والمستقيمين: $x = 0$ و $x = 1$.

11 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين: $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ و $h(x) = 4\sqrt{x}$.

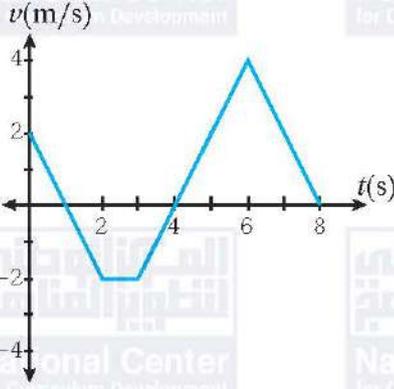
12 يُبين الشكل التالي منحنى الاقتران: $f(x) = x^2$. إذا كان إحداثيا النقطة A هما (a, a^2) ، فأثبت أن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والمستقيم AB تساوي ثلثي مساحة المستطيل $ABCD$.



13 يُبين الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{2}{x^2} + x$. إذا كان الإحداثي x لكل من النقطة A والنقطة B هو $\frac{1}{2}$ و 2 على الترتيب، فأجد مساحة المنطقة المحصورة بين المستقيم AB ومنحنى الاقتران $f(x)$.



الوحدة 4

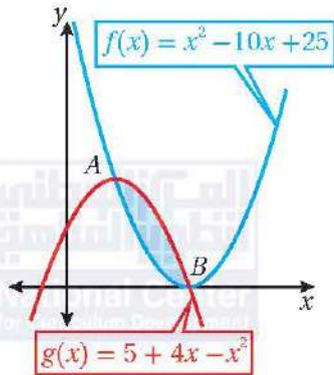


يُبين الشكل المجاور منحني السرعة المتجهة - الزمن لجُسيم يتحرك على المحور x في الفترة الزمنية $[0, 8]$. إذا بدأ الجُسيم الحركة من $x = 5$ عندما $t = 0$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

14 إزاحة الجُسيم في الفترة الزمنية المعطاة.

15 المسافة التي قطعها الجُسيم في الفترة الزمنية المعطاة.

16 الموقع النهائي للجُسيم.



يُبين الشكل المجاور منحنىي الاقترانين: $f(x) = x^2 - 10x + 25$ و $g(x) = 5 + 4x - x^2$. مُتميماً هذا الشكل، أُجيب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

17 أجد إحداثيي كلٍّ من النقطة A ، والنقطة B .

18 أجد حجم المُجسم الناتج من دوران المنطقة المُظللة حول المحور x .

19 أجد حجم المُجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = \sqrt{\sin x}$ في الفترة $[0, \pi]$ ، والمحور x ، حول المحور x .

20 أجد حجم المُجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين: $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^3$ حول المحور x .

21 أجد حجم المُجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = 1 + \sec x$ في الفترة $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ والمستقيم $y = 3$ حول المحور x .

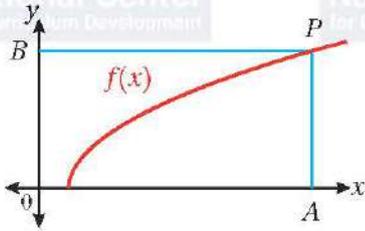
مهارات التفكير العليا

تبرير: أُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تبعاً:

22 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين: $y = x^2$ و $y = x^{1/2}$.

23 أجد المساحة المحصورة بين منحنىي الاقترانين: $y = x^3$ و $y = x^{1/3}$.

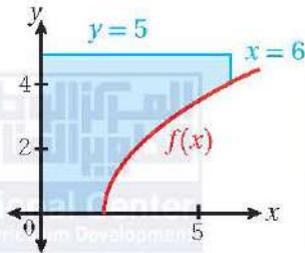
24 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين: $y = x^2$ و $y = x^{1/n}$ ، حيث n عدد صحيح أكبر من أو يساوي 2، مُبرراً إجابتي.



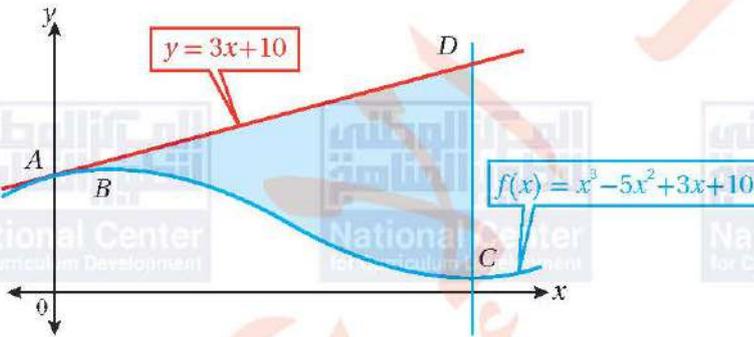
تبرير: يُبين الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{2x-2}$ ، حيث: $x \geq 1$.
إذا كانت النقطة $P(9, 4)$ تقع على منحنى الاقتران $f(x)$ ، حيث \overline{PA} يوازي
المحور y ، و \overline{PB} يوازي المحور x ، فأجد كلاً مما يأتي:

25 مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ ، والمستقيم $y = 4$ ،
والمحورين الإحداثيين.

26 مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ ، والمستقيم $x = 9$ ، والمحور x .



27 تبرير: يُبين الشكل المجاور المنطقة المحصورة بين المحورين الإحداثيين
في الربع الأوّل، ومنحنى الاقتران: $f(x) = 2\sqrt{x-2}$ ، والمستقيمين: $x = 6$ ،
و $y = 5$. أجد حجم المُجسّم الناتج من دوران المنطقة حول المحور x ، مُبرِّراً
إجابتي.



تبرير: يُبين الشكل المجاور منحنى كلٍّ من
الاقتران: $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 10$
والمستقيم: $y = 3x + 10$. إذا مرَّ المستقيم
ومنحنى الاقتران بالنقطة A الواقعة على
المحور y ، وكان للاقتران $f(x)$ قيمة عظمى
محلية عند النقطة B ، وقيمة صغرى محلية عند

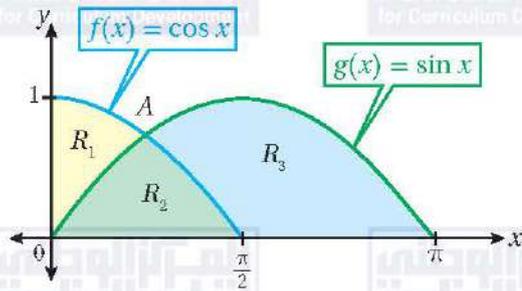
النقطة C ، وقطع الخطّ الموازي للمحور y والمارّ بالنقطة C المستقيم: $y = 3x + 10$ في النقطة D ؛ فأجيب عن الأسئلة
الثلاثة الآتية تباعاً:

28 أجد إحداثيات كلٍّ من النقطة B ، والنقطة C .

29 أثبت أن \overline{AD} مماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة A ، مُبرِّراً إجابتي.

30 أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة، مُبرِّراً إجابتي.

الوحدة 4

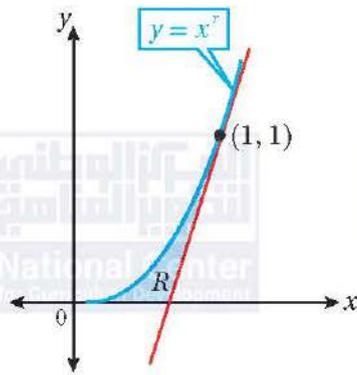


تبرير: يُبين الشكل المجاور منحنىي الاقترانين: $f(x) = \cos x$ و $g(x) = \sin x$. مُعتمداً هذا الشكل، أُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعاً:

31 أجد إحداثيي النقطة A .

32 أجد مساحة كلٍّ من المناطق: R_1, R_2, R_3 .

33 أثبت أن مساحة المنطقة R_1 إلى مساحة المنطقة R_2 تساوي $2 : \sqrt{2}$.



تحّد: يُبين الشكل المجاور المنطقة R المحصورة بين منحنى الاقتران: $y = x^r$ ، حيث: $r \geq 1$ ، والمحور x ، ومماس منحنى الاقتران عند النقطة $(1, 1)$:

34 أثبت أن مماس منحنى الاقتران يقطع المحور x عند النقطة $(\frac{r-1}{r}, 0)$.

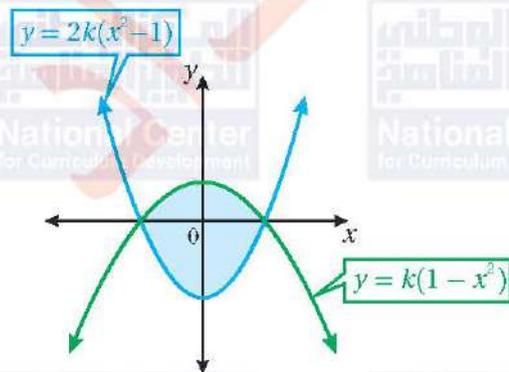
35 استعمل النتيجة من الفرع السابق لإثبات أن مساحة المنطقة R هي وحدة مربعة $\frac{r-1}{2r(r+1)}$.

36 أجد قيمة الثابت r التي تجعل مساحة المنطقة R أكبر ما يُمكن.

تحّد: إذا كان العمودي على المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - 4x + 6$ عند النقطة $(1, 3)$ يقطع منحنى الاقتران مرّةً أخرى عند النقطة P ، فأجد كلاً ممّا يأتي:

37 إحداثيات النقطة P .

38 مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والعمودي على المماس، مُقرباً إيجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية.



39 تبرير: المنطقة المُظلّلة في الشكل المجاور محصورة بين

قطعتين مكافئتين، يقطع كلٌّ منهما المحور x عندما $x = -1$ ،

و $x = 1$. إذا كانت معادلتا القطعتين هما: $y = 2k(x^2 - 1)$ و

$y = k(1 - x^2)$ ، وكانت مساحة المنطقة المُظلّلة هي

8 وحدات مربعة، فأجد قيمة الثابت k .

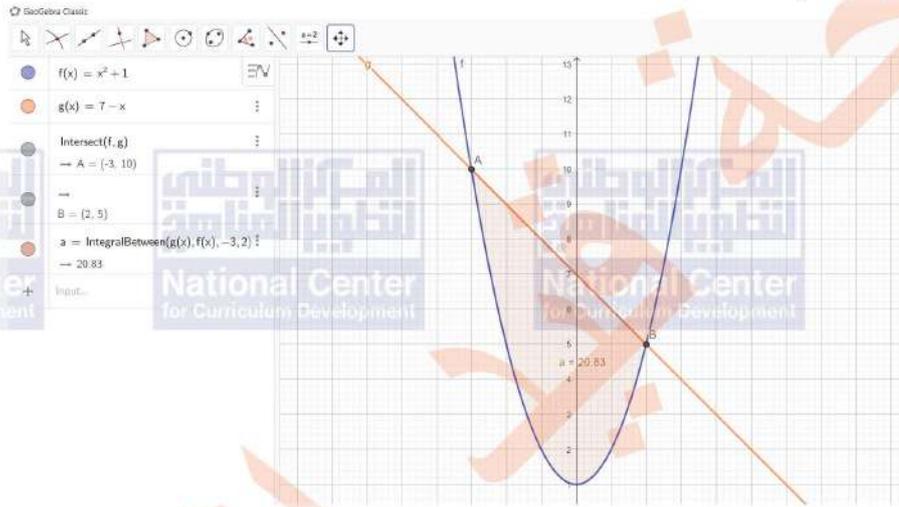
تطبيقات التكامل: المساحة Applications of integration: Area

أستعمل برمجية جيو جبرا لإيجاد المساحة المحصورة بين منحنين اقترانين بوصفه تكامل محدودًا، مراعيًا تحويل إشارة الناتج السالبة إلى موجبة إذا وقعت المنطقة أسفل المحور x .

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنين:

نشاط

أجد مساحة المنطقة بين منحنين الاقترانين: $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = 7 - x$.



- 1 أكتب الاقتران: $f(x) = x^2 + 1$ في شريط الإدخال، ثم أضغط على زر الإدخال Enter، ثم أكتب الاقتران: $g(x) = 7 - x$ ثم أضغط على زر الإدخال Enter.
- 2 أجد نقاط التقاطع بين منحنين الاقترانين، وذلك باختيار أيقونة **Intersect**، ثم نقر منحنين الاقترانين تباعاً، فيظهر إحداثيات نقطتي التقاطع في شريط الإدخال: $(A(-3, 10), B(2, 5))$.
- 3 أكتب في شريط الإدخال الصيغة الآتية: **Integral Between (g(x), f(x), -3, 2)**.
- 4 ألاحظ أن الاقتران العلوي أدخل أولاً، تلاه إدخال الاقتران السفلي، ثم الإحداثي x لكل من نقطتي التقاطع. ألاحظ تظليل المنطقة المطلوبة، وظهور قيمة التكامل على الشكل، ومنه فإن المساحة تساوي 20.83 وحدة مربعة.

أدرب

- 1 أجد مساحة المنطقة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 + 4$ والمحور x ، والمستقيمين: $x = 2$ و $x = -1$.
- 2 أجد مساحة المنطقة بين منحنين الاقترانين: $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{1}{2}x$.

المعادلات التفاضلية

Differential Equations

حلُّ المعادلات التفاضلية.

المعادلة التفاضلية.

تتغير درجة حرارة سائل كيميائي بارد، بعد وضعه في غرفة دافئة، بمعدل يُمكن نمذجته بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dC}{dt} = 2(20 - C)$ ، حيث C درجة حرارة السائل بمقياس سيلسيوس، و t الزمن بالساعات:

(1) أحلَّ المعادلة التفاضلية لإيجاد درجة حرارة السائل بعد t ساعة،

علماً بأن درجة حرارته عند وضعه في الغرفة هي 5°C .

(2) بعد كم ساعة تصبح درجة حرارة السائل 18°C ؟

فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم



المعادلات التفاضلية

المعادلة التفاضلية (differential equation) هي معادلة جبرية تحوي مشتقة أو أكثر

لاقتران ما، وقد تحوي الاقتران نفسه، ومن أمثلتها:

$$\frac{dy}{dx} = 2x^3 + 5, \quad \frac{dP}{dt} = kP, \quad \frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} - 7y = \frac{1}{x}$$

يُعدُّ الاقتران: $y = f(x)$ حلاً للمعادلة التفاضلية إذا تحققت المعادلة عند تعويض $f(x)$ ومشتقاته فيها.

أتعلم

المعادلة التي تُكتب في

صورة: $\frac{dy}{dx} = g(x)$ هي

أبسط أنواع المعادلات

التفاضلية؛ أي إنه يُمكن

التعبير عن مشتقة y

صراحةً بدلالة المُتغير x .

مثال 1

أحدّد إذا كان الاقتران المعطى حلاً للمعادلة التفاضلية: $y' + y = 0$ في كلِّ ممَّا يأتي:

1 $y = e^{-x}$

الخطوة 1: أجد المشتقات اللازمة.

$$y = e^{-x}$$

الاقتران المعطى

$$y' = -e^{-x}$$

مشتقة الاقتران الأسي الطبيعي

الخطوة 2: أعوّض في المعادلة التفاضلية.

$$y' + y = 0$$

المعادلة التفاضلية

$$e^{-x} + -e^{-x} \stackrel{?}{=} 0$$

$$y = e^{-x}, y' = -e^{-x}$$

بالتبسيط

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

إذن، الاقتران: $y = e^{-x}$ هو حل للمعادلة التفاضلية.

2 $y = 2 \cos x$

الخطوة 1: أجد المشتقات اللازمة.

$$y = 2 \cos x$$

الاقتران المعطى

$$y' = -2 \sin x$$

مشتقة اقتران جيب التمام المضروب في ثابت

الخطوة 2: أعوّض في المعادلة التفاضلية.

$$y' + y = 0$$

المعادلة التفاضلية

$$2 \cos x + -2 \sin x \stackrel{?}{=} 0$$

$$y = 2 \cos x, y' = -2 \sin x$$

بالتبسيط

$$2 \cos x - 2 \sin x \neq 0 \quad \times$$

إذن، الاقتران: $y = 2 \cos x$ ليس حلاً للمعادلة التفاضلية.

أتحقق من فهمي

أحدّد إذا كان الاقتران المعطى حلاً للمعادلة التفاضلية: $y'' - 4y' + 3y = 0$ في كلٍّ مما يأتي:

a) $y = 4e^x + 5e^{3x}$

b) $y = \sin x$

أنعلم

$$2 \cos x - 2 \sin x = 0 \text{ إن}$$

لبعض قيم x وليس

لجميع القيم، لذا فإنّ

$$y = 2 \cos x$$

ليس حلاً للمعادلة

التفاضلية.

الحل العام والحل الخاص للمعادلة التفاضلية

يمكن حل المعادلة التفاضلية عن طريق التكامل. فمثلاً، تُحل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = 5x$ على النحو الآتي:

$$\frac{dy}{dx} = 5x$$

$$\int \frac{dy}{dx} dx = \int 5x dx$$

$$\int dy = \int 5x dx$$

$$y = \frac{5}{2}x^2 + C$$

المعادلة التفاضلية

بمكاملة الطرفين بالنسبة إلى المتغير x

بالتبسيط

بإيجاد التكامل

ألاحظ أن حل المعادلة التفاضلية: $y' = 5x$ يتضمن ثابت التكامل C ؛ لذا يُسمى **الحل العام** (general solution) للمعادلة التفاضلية؛ ذلك أن قيمة الثابت C تعطي جميع حلول هذه المعادلة. أما **الحل الخاص** (particular solution) للمعادلة التفاضلية فيُقصد به الحل الذي يحقق شرطاً أولياً معلوماً يمكن عن طريقه تحديد قيمة الثابت C .

مثال 2

أجد الحل العام للمعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = e^x - 6x^2$ ، ثم أجد الحل الخاص لها الذي يحقق النقطة $(1, 0)$.
الخطوة 1: أجد الحل العام للمعادلة التفاضلية.

$$\frac{dy}{dx} = e^x - 6x^2$$

المعادلة التفاضلية المعطاة

$$\int \frac{dy}{dx} dx = \int (e^x - 6x^2) dx$$

بمكاملة الطرفين بالنسبة إلى المتغير x

$$\int dy = \int (e^x - 6x^2) dx$$

بالتبسيط

$$y = e^x - 2x^3 + C$$

بإيجاد التكامل

إذن، الحل العام للمعادلة التفاضلية هو: $y = e^x - 2x^3 + C$.

أتعلم

كل قيمة للثابت C تعطي حلاً خاصاً للمعادلة التفاضلية، وإحدى هذه القيم تعطي الاقتران الذي يحقق الشرط الأولي المعطى.

الخطوة 2: أجد الحَلَّ الخاص للمعادلة التفاضلية الذي يُحقِّق الشرط الأولي.

لإيجاد الحَلَّ الخاص لهذه المعادلة، أعرِّض النقطة $(1, 0)$ في الحَلَّ العام:

$$y = e^x - 2x^3 + C$$

الحَلَّ العام للمعادلة التفاضلية

$$0 = e^1 - 2(1)^3 + C$$

بتعويض $x = 1, y = 0$

$$C = 2 - e$$

بحلَّ المعادلة لـ C

إذن، الحَلَّ الخاص للمعادلة التفاضلية الذي يُحقِّق النقطة $(1, 0)$ هو: $y = e^x - 2x^3 + 2 - e$.

أتحقق من فهمي

أجد الحَلَّ العام للمعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = 5 \sec^2 x - \frac{3}{2} \sqrt{x}$ ، ثم أجد الحَلَّ الخاص لها الذي يُحقِّق النقطة $(0, 7)$.

حلُّ المعادلات التفاضلية بفصل المتغيرات

تعلمت في المثال السابق حلَّ معادلات تفاضلية في صورة: $\frac{dy}{dx} = g(x)$ ، عن طريق إيجاد التكامل لطرفي المعادلة مباشرة. ولكن ذلك لا ينطبق على جميع المعادلات التفاضلية؛ فبعضها يحتوي على المتغيرين x و y معاً في أحد طرفي المعادلة. وفي هذه الحالة، فإنَّ الحَلَّ يتطلب أولاً فصل dx عن dy ، وذلك بكتابة dx في أحد طرفي المعادلة، وكتابة dy في الطرف الآخر، ثم نقل جميع الحدود التي تحوي المتغير x إلى طرف المعادلة الذي يحوي dx ، ونقل جميع الحدود التي تحوي المتغير y إلى طرف المعادلة الذي يحوي dy ، ثم إيجاد التكامل لكل من طرفي المعادلة.

تُعرف الطريقة السابقة لحلَّ المعادلات التفاضلية بطريقة **فصل المتغيرات** (separation of variables)، ويُطلَق على المعادلة التفاضلية التي يمكن فصل متغيراتها اسم **المعادلة القابلة للفصل** (separable equation)، وهي معادلة تُكتب في الصورة الآتية:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

أنعلم

المعادلة التفاضلية القابلة للفصل هي من أبسط المعادلات التفاضلية.

أحلُّ كلاً من المعادلات التفاضلية الآتية:

أتعلم

إذا لم يُحدَّد في السؤال شرط أولي للمعادلة التفاضلية، فهذا يعني أنَّ الحلَّ المطلوب هو الحلُّ العام.

أتعلم

يختلف الإجراء الجبري اللازم لفصل المتغير x عن المتغير y بحسب المعادلة التفاضلية. فمثلاً، يتطلَّب الحلُّ في الفرع 2 من المثال إخراج x عاملاً مشتركاً.

1 $\frac{dy}{dx} = -xy^2$

$$\frac{dy}{dx} = -xy^2$$

$$dy = -xy^2 dx$$

$$-\frac{dy}{y^2} = x dx$$

$$\int -\frac{1}{y^2} dy = \int x dx$$

$$\int -y^{-2} dy = \int x dx$$

$$y^{-1} = \frac{1}{2} x^2 + C$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{2} x^2 + C$$

المعادلة التفاضلية المعطاة

بضرب طرفي المعادلة في dx

بقسمة طرفي المعادلة على y^2

بمكاملة طرفي المعادلة التفاضلية

تعريف الأسس

بإيجاد التكامل

تعريف الأسس السالب

2 $\frac{dy}{dx} = x + xy$

$$\frac{dy}{dx} = x + xy$$

$$dy = (x + xy) dx$$

$$dy = x(1 + y) dx$$

$$\frac{dy}{1+y} = x dx$$

$$\int \frac{dy}{1+y} = \int x dx$$

$$\ln |1 + y| = \frac{1}{2} x^2 + C$$

المعادلة التفاضلية المعطاة

بضرب طرفي المعادلة في dx

بإخراج x عاملاً مشتركاً

بقسمة طرفي المعادلة على $1+y$

بمكاملة طرفي المعادلة التفاضلية

بإيجاد التكامل

$$3 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{8x^3}{4y - \sin y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x^3}{4y - \sin y}$$

المعادلة التفاضلية المعطاة

$$(4y - \sin y) dy = 8x^3 dx$$

بفصل المتغيرات بالضرب التبادلي

$$\int (4y - \sin y) dy = \int 8x^3 dx$$

بمكاملة طرفي المعادلة التفاضلية

$$2y^2 + \cos y = 2x^4 + C$$

بإيجاد التكامل

$$4 \quad (1 + x^3) \frac{dy}{dx} = x^2 \tan y$$

$$(1 + x^3) \frac{dy}{dx} = x^2 \tan y$$

المعادلة التفاضلية المعطاة

$$\frac{1}{\tan y} dy = \frac{x^2}{1 + x^3} dx$$

بفصل المتغيرات

$$\int \frac{1}{\tan y} dy = \int \frac{x^2}{1 + x^3} dx$$

بمكاملة طرفي المعادلة التفاضلية

$$\int \frac{\cos y}{\sin y} dy = \int \frac{x^2}{1 + x^3} dx$$

$$\frac{1}{\tan y} = \cot y = \frac{\cos y}{\sin y}$$

$$\int \frac{\cos y}{\sin y} dy = \frac{1}{3} \int \frac{3 \times x^2}{1 + x^3} dx$$

بالضرب في 3 والقسمة على 3

$$\ln |\sin y| = \frac{1}{3} \ln |1 + x^3| + C$$

بإيجاد التكامل

أتحقق من فهمي

أحلُّ كلاً من المعادلات التفاضلية الآتية:

$$a) \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^4}$$

$$b) \frac{dy}{dx} = 2x - xe^y$$

$$c) \frac{dy}{dx} = \frac{x \sin x}{y}$$

$$d) \sin^2 x \frac{dy}{dx} = y^2 \cos^2 x$$

الوحدة 4

تعلّمتُ في المثال السابق إيجاد الحُلّ العام لمعادلات قابلة للفصل. والآن سأتعلم إيجاد الحُلّ الخاص لهذا النوع من المعادلات.

مثال 4

أجد الحُلّ الخاص الذي يُحقّق الشرط الأوّلي المعطى لكل معادلة تفاضلية ممّا يأتي:

$$1 \quad \frac{dy}{dx} = \sin x \sec y, \quad y(0) = 0$$

الخطوة 1: أجد الحُلّ العام للمعادلة التفاضلية.

$$\frac{dy}{dx} = \sin x \sec y$$

المعادلة التفاضلية المعطاة

$$\frac{1}{\sec y} dy = \sin x dx$$

بفصل المتغيرات

$$\cos y dy = \sin x dx$$

$$\frac{1}{\sec y} = \cos y$$

$$\int \cos y dy = \int \sin x dx$$

بمكاملة طرفي المعادلة التفاضلية

$$\sin y = -\cos x + C$$

بإيجاد التكامل

إذن، الحُلّ العام للمعادلة التفاضلية هو: $\sin y = -\cos x + C$.

الخطوة 2: أجد الحُلّ الخاص للمعادلة التفاضلية الذي يُحقّق الشرط الأوّلي $y(0) = 0$.

لإيجاد الحُلّ الخاص لهذه المعادلة، أعوّض $x = 0$ و $y = 0$ في الحُلّ العام:

$$\sin y = -\cos x + C$$

الحُلّ العام للمعادلة التفاضلية

$$\sin(0) = -\cos(0) + C$$

بتعويض $x = 0, y = 0$

$$C = 1$$

بحلّ المعادلة لـ C

إذن، الحُلّ الخاص للمعادلة التفاضلية الذي يُحقّق الشرط الأوّلي $y(0) = 0$ هو:

$$\sin y = -\cos x + 1$$

أتذكّر

لإيجاد الحُلّ الخاص،

أجد الحُلّ العام الذي

يحتوي C ، ثم أجد

C الذي يُحقّق شرط

المعادلة المعطى.

$$2 \frac{dy}{dx} = e^{x-y}, y(0) = 2$$

الخطوة 1: أجد الحل العام للمعادلة التفاضلية.

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$e^y dy = e^x dx$$

المعادلة التفاضلية المعطاة

قسمة القوي

بفصل المتغيرات

$$\int e^y dy = \int e^x dx$$

بمكاملة طرفي المعادلة التفاضلية

$$e^y = e^x + C$$

بإيجاد التكامل

إذن، الحل العام للمعادلة التفاضلية هو: $e^y = e^x + C$.

الخطوة 2: أجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الذي يُحقق الشرط الأولي $y(0) = 2$.

لايجاد الحل الخاص لهذه المعادلة، أعوض $x = 0$ و $y = 2$ في الحل العام:

$$e^y = e^x + C$$

$$e^2 = e^0 + C$$

$$C = e^2 - 1$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية

بتعويض $x = 0, y = 2$

يحل المعادلة لـ C

إذن، الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الذي يُحقق الشرط الأولي $y(0) = 2$ هو:

$$e^y = e^x + e^2 - 1$$

أنتدقق من فهمي

أجد الحل الخاص الذي يُحقق الشرط الأولي المعطى لكل معادلة تفاضلية مما يأتي:

a) $\frac{dy}{dx} = xy^2 e^{2x}, y(0) = 1$

b) $\frac{dy}{dx} = y \cos x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

تعلمت سابقاً كيف أجد موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم إذا علم اقتران السرعة المتجهة لهذا الجسم. ولكن، في بعض الحالات، تعطى السرعة المتجهة للجسم بمعادلة تفاضلية، عندئذٍ يلزم حل المعادلة التفاضلية لإيجاد موقع الجسم في لحظة معينة.

مثال 5

يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالمعادلة التفاضلية: $\frac{ds}{dt} = -s^2 \ln(t+1)$ ، حيث t الزمن بالثواني، و s موقع الجسيم بالأمتار. أجد موقع الجسيم بعد 3 ثوانٍ من بدء الحركة، علماً بأن $s(0) = 0.5$.

الخطوة 1: أجد الحل العام للمعادلة التفاضلية.

$$\frac{ds}{dt} = -s^2 \ln(t+1)$$

المعادلة التفاضلية المعطاة

$$\frac{-1}{s^2} ds = \ln(t+1) dt$$

بفصل المتغيرات

$$\int \frac{-1}{s^2} ds = \int \ln(t+1) dt$$

بتكامل طرفي المعادلة التفاضلية

$$\int -s^{-2} ds = \int \ln(t+1) dt$$

تعريف الأس السالب

$$\frac{1}{s} = (t+1) \ln(t+1) - t + C$$

بإيجاد التكامل

إذن، الحل العام للمعادلة التفاضلية هو: $\frac{1}{s} = (t+1) \ln(t+1) - t + C$.

الخطوة 2: أجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الذي يُحقق الشرط الأولي $s(0) = 0.5$.

لإيجاد الحل الخاص لهذه المعادلة، أعوّض $t = 0$ و $s = 0.5$ في الحل العام:

$$\frac{1}{s} = (t+1) \ln(t+1) - t + C$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\frac{1}{0.5} = (0+1) \ln(0+1) - 0 + C$$

بتعويض $t = 0, s = 0.5$

$$C = 2$$

بحل المعادلة لـ C

أتذكر

الشرط $s(0) = 0.5$ يعني أن الجسم بدأ حركته على بُعد 0.5 m في الجهة الموجبة من نقطة الأصل.

أتذكر

لإيجاد $\int \ln(t+1) dt$ ، أستعمل التكامل بالأجزاء.

إذن، الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الذي يُحقق الشرط الأولي $s(0) = 0.5$ هو:
 $\frac{1}{s} = (t+1) \ln(t+1) - t + 2$ ، وهو يُمثل اقتران الموقع للجسم المُتحرك.

الخطوة 3: أجد موقع الجسيم المطلوب.

بتعويض $t = 3$ في الحل الخاص للمعادلة $\frac{1}{s} = (3+1) \ln(3+1) - 3 + 2$ باستخدام الآلة الحاسبة

$$s \approx 0.22$$

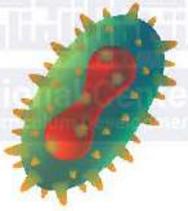
إذن، موقع الجسيم بعد 3 ثوانٍ من بدء الحركة هو: 0.22 m

أتحقق من فهمي

يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالمعادلة التفاضلية: $\frac{ds}{dt} = st\sqrt{t+1}$ حيث t الزمن بالثواني، و s موقع الجسيم بالأمتار. أجد موقع الجسيم بعد 3 ثوانٍ من بدء الحركة، علمًا بأن $s(0) = 1$.

للمعادلات التفاضلية كثير من التطبيقات الحياتية؛ فهي تُستعمل لنمذجة الظواهر التي تحوي قيمًا متغيرة، مثل: تكاثر المجتمعات الحيوية، وانتشار الأمراض، والسلوك الاقتصادي.

مثال 6: من الحياة



أمراض: انتشر مرض الحصبة في إحدى المدارس بمعدل يُمكن نمذجته بالمعادلة التفاضلية: $\frac{ds}{dt} = \frac{s(1050-s)}{5000}$ ، حيث s عدد الطلبة المصابين بعد t يومًا من اكتشاف المرض:

أحل المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الطلبة المصابين بعد t يومًا، علمًا بأن عدد الطلبة المصابين عند اكتشاف المرض هو 50 طالبًا.

الخطوة 1: أجد الحل العام للمعادلة التفاضلية.

$$\frac{ds}{dt} = \frac{s(1050-s)}{5000}$$

المعادلة التفاضلية المعطاة

$$\frac{1}{s(1050-s)} ds = \frac{1}{5000} dt$$

بفصل المتغيرات

معلومة

الأعراض الأولى للإصابة بمرض الحصبة شبيهة بأعراض مرض الإنفلونزا. وبعد بضعة أيام، تظهر بقع حمراء على وجه المريض ويديه وساعديه، ثم تمتد هذه البقع لتصل منطقة الجذع.

الوحدة 4

$$\int \frac{1}{s(1050-s)} ds = \int \frac{1}{5000} dt$$

بمكاملة طرفي المعادلة التفاضلية

$$\int \left(\frac{1}{1050s} + \frac{1}{1050(1050-s)} \right) ds = \int \frac{1}{5000} dt$$

التكامل بالكسور الجزئية

$$\frac{1}{1050} \int \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{1050-s} \right) ds = \int \frac{1}{5000} dt$$

بإخراج $\frac{1}{1050}$ عاملاً مشتركاً

$$\int \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{1050-s} \right) ds = \int \frac{1050}{5000} dt$$

بضرب طرفي المعادلة في 1050

$$\ln |s| - \ln |1050-s| = 0.21t + C$$

بإيجاد التكامل

$$\ln \left| \frac{s}{1050-s} \right| = 0.21t + C$$

قانون القسمة في اللوغاريتمات

$$\ln \left| \frac{s}{1050-s} \right| = 0.21t + C$$

إذن، الحل العام للمعادلة التفاضلية هو: $\ln \left| \frac{s}{1050-s} \right| = 0.21t + C$

الخطوة 2: أجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الذي يُحقق الشرط الأولي.

لإيجاد الحل الخاص لهذه المعادلة، أَعوِّض $t = 0$ ، و $s = 50$ في الحل العام:

$$\ln \left| \frac{s}{1050-s} \right| = 0.21t + C$$

الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$\ln \left| \frac{50}{1050-50} \right| = 0.21(0) + C$$

بتعويض $t = 0, s = 50$

$$C \approx -3$$

بحل المعادلة لـ C

إذن، يُمكن نمذجة عدد الطلبة المصابين بالمرض بعد t يوماً بالعلاقة الآتية:

$$\ln \left| \frac{s}{1050-s} \right| = 0.21t - 3$$

بعد كم يوماً يصبح عدد الطلبة المصابين 350 طالباً؟

$$\ln \left| \frac{s}{1050-s} \right| = 0.21t - 3$$

الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$\ln \left| \frac{350}{1050-350} \right| = 0.21t - 3$$

بتعويض $s = 350$

$$t \approx 11$$

بحل المعادلة لـ t

إذن، يصبح عدد الطلبة المصابين 350 طالباً بعد 11 يوماً تقريباً من اكتشاف المرض.

أتذكّر

أجزئ المقدار النسبي:

$$\frac{1}{s(1050-s)}$$

لإيجاد التكامل.

أتعلم

يساعد ضرب طرفي

المعادلة في 1050 على

تبسيط المعادلة، ويُعدُّ

هذا الإجراء اختياريًا في

الحل.



غزلان: يُمكن نمذجة مُعدَّل تغيُّر عدد الغزلان في إحدى الغابات بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dP}{dt} = \frac{1}{20000} P(1000 - P)$ ، حيث P عدد الغزلان في الغابة بعد t سنة من بدء دراسة عليها:

(a) أحلُّ المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الغزلان في الغابة بعد t سنة من بدء الدراسة، علمًا بأن عددها عند بدء الدراسة هو 2500 غزال.

(b) بعد كم سنة يصبح عدد الغزلان في الغابة 1800 غزال؟

أحدّد إذا كان الاقتران المعطى حلًّا للمعادلة التفاضلية في كلِّ ممّا يأتي:

1 $y = \sqrt{x}; xy' - y = 0$

2 $y = x \ln x - 5x + 7; y'' - \frac{1}{x} = 0$

3 $y = \tan x; y' + y^2 = 1$

4 $y = e^x + 3xe^x; y'' - 2y' + y = 0$

أحلُّ كلاً من المعادلات التفاضلية الآتية:

5 $\frac{dy}{dx} = 3x\sqrt{y}$

6 $\frac{dy}{dx} + \frac{3x}{y^2} = 0$

7 $\frac{dy}{dx} = \cos x \sin y$

8 $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$

9 $\frac{dy}{dx} = xe^{x+y}$

10 $e^{-1/x} \frac{dy}{dx} = x^{-2} y^2$

11 $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x-3}$

12 $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 \sin^2 y}{x^3 + 2}$

13 $\frac{dy}{dx} = y^3 \ln x$

14 $\frac{dy}{dx} = 2x^3 (y^2 - 1)$

15 $y \frac{dy}{dx} = \sin^3 x \cos^2 x$

16 $\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$

17 $\frac{dy}{dx} = y \ln \sqrt{x}$

18 $(2x + 1)(x + 2) \frac{dy}{dx} = -3(y - 2)$

أجد الحلَّ الخاص الذي يُحقِّق الشرط الأوَّلي المعطى لكلِّ من المعادلات التفاضلية الآتية:

19 $\frac{dy}{dx} = y^2 \sqrt{4-x}; y(1) = 2$

20 $\frac{dy}{dx} = \frac{2\sin^2 x}{y}; y(0) = 1$

21 $\frac{dy}{dx} = 2 \cos^2 x \cos^2 y; y(0) = \frac{\pi}{4}$

22 $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x e^{\sin x}}{e^y}; y(\pi) = 0$

23 $\frac{dy}{dx} = \frac{8x-18}{(3x-8)(x-2)}; y(3) = 8$

24 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy}; y(e) = 1$

25 تتحرَّك سيارَة في مسار مستقيم، ويعطى تسارعها بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dv}{dt} = 10 - 0.5v$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعتها المتجهة بالمتري لكل ثانية. أجد السرعة المتجهة للسيارة بعد t ثانية من بدء حركتها، علمًا بأنَّ السيارة تحرَّكت من وضع السكون.

26 ذئاب: يُمكن نمذجة مُعدَّل تغيُّر عدد الذئاب في إحدى الغابات بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dN}{dt} = 260 - 0.4N$ ، حيث N عدد الذئاب في الغابة بعد t سنة من بدء دراسة عليها. أجد عدد الذئاب في الغابة بعد 3 سنوات من بدء الدراسة، علمًا بأنَّ عددها عند بدء الدراسة هو 300 ذئب.



كرة: تنكمش كرة، ويتغيَّر نصف قُطرها بمُعدَّل يُمكن نمذجته بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dr}{dt} = -0.0075r^2$ ، حيث r طول نصف قُطر الكرة بالسنتيمتر، و t الزمن بالثواني بعد بدء انكماش الكرة.

27 أحلُّ المعادلة التفاضلية لإيجاد طول نصف قُطر الكرة بعد t ثانية، علمًا بأنَّ طول نصف الكرة الابتدائي هو 20 cm.

28 بعد كم ثانية يصبح طول نصف قُطر الكرة 10 cm؟

حشرات: يتغيَّر عدد الحشرات في مجتمع للحشرات بمُعدَّل يُمكن نمذجته بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dn}{dt} = 0.2n(0.2 - \cos t)$ ، حيث n عدد الحشرات، و t الزمن بالأسابيع بعد بدء ملاحظة الحشرات.

29 أحلُّ المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الحشرات في هذا المجتمع بعد t أسبوعًا، علمًا بأنَّ عددها الابتدائي هو 400 حشرة.

30 أجد عدد الحشرات في هذا المجتمع بعد 3 أسابيع.

31 تُمثّل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = y \cos x$ ميل المماس لمنحنى علاقة ما. أجد قاعدة هذه العلاقة إذا علمتُ أنّ منحنىها يمرُّ بالنقطة $(0, 1)$.

32 تُمثّل المعادلة التفاضلية: $x(x+1) \frac{dy}{dx} = y$ ميل المماس لمنحنى علاقة ما. أجد قاعدة هذه العلاقة إذا علمتُ أنّ منحنىها يمرُّ بالنقطة $(1, 3)$.

مهارات التفكير العليا

تحذّر: أحلّ كلاً من المعادلات التفاضلية الآتية:

33 $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2} - xy - \frac{1}{y^2} + y$

34 $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y-1} - \frac{2x}{3y-2}$

35 $\frac{dy}{dx} = 1 + \tan^2 x + \tan^2 y + \tan^2 x \tan^2 y$

تبرير: يُمكن نمذجة مُعدّل تحلّل مادة مُشعّة بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dx}{dt} = -\lambda x$ ، حيث x الكتلة المتبقية من المادة المُشعّة بالمليغرام بعد t يوماً، و $\lambda > 0$.

36 أثبت أنّه يُمكن كتابة الحلّ العام للمعادلة التفاضلية في صورة: $x = ae^{-\lambda t}$ ، حيث a ثابت، مُبرّرًا إيجابتي.

37 إذا كان عمر النصف للمادة المُشعّة هو الوقت اللازم لتحلّل نصف هذه المادة، و a كتلة المادة الابتدائية، فأثبت أنّ عمر النصف للمادة المُشعّة هو $\frac{\ln 2}{\lambda}$ ، مُبرّرًا إيجابتي.

تبرير: تُمثّل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{3y}$ ميل المماس لمنحنى علاقة ما:

38 أجد قيمة n التي تجعل العلاقة: $x^2 + ny^2 = a$ حلًّا للمعادلة التفاضلية المعطاة، حيث a ثابت اختياري، مُبرّرًا إيجابتي.

39 أجد إحداثيي نقاط تقاطع منحنى العلاقة مع المحور x إذا علمتُ أنّ منحنىها يمرُّ بالنقطة $(4, 5)$ ، مُبرّرًا إيجابتي.

أوجد كلاً من التكاملات الآتية:

5 $\int \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx$

6 $\int (\tan 2x + e^{3x} - \frac{1}{x}) dx$

7 $\int \csc^2 x (1 + \tan^2 x) dx$

8 $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 5} dx$

9 $\int \frac{2x^2 + 7x - 3}{x - 2} dx$

10 $\int \sec^2 (2x - 1) dx$

11 $\int \cot (5x + 1) dx$

12 $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos x dx$

13 $\int_0^{\pi} \cos^2 0.5x dx$

14 $\int_0^2 |x^3 - 1| dx$

15 $\int_0^{\pi/4} (\sec^2 x + \cos 4x) dx$

16 $\int_0^{\pi/3} (\sin (2x + \frac{\pi}{3}) - 1 + \cos 2x) dx$

17 $\int_0^{\pi/8} \sin 2x \cos 2x dx$

18 $\int \frac{4}{x^2 - 4} dx$

19 $\int \frac{x + 7}{x^2 - x - 6} dx$

20 $\int \frac{x - 1}{x^2 - 2x - 8} dx$

21 $\int \frac{x^2 + 3}{x^3 + x} dx$

22 $\int \frac{1}{x^2(1-x)} dx$

23 $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 3 \cos x} dx$

24 $\int \frac{\sqrt{x}}{x-4} dx$

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلِّ ممَّا يأتي:

1 قيمة $\int_0^2 e^{2x} dx$ هي:

a) $e^4 - 1$ b) $e^4 - 2$

c) $2e^4 - 2$ d) $\frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}$

2 قيمة $\int_{-4}^4 (4 - |x|) dx$ هي:

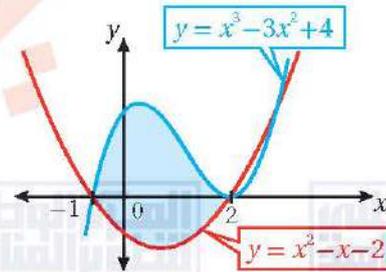
a) 0 b) 4 c) 16 d) 8

3 يُبين الشكل الآتي المنطقة المحصورة بين منحنَيي

الاقترانين: $y = x^3 - 3x^2 + 4$ ، و $y = x^2 - x - 2$ ، في

الفترة $[-1, 2]$. التكامل المحدود الذي يُمكن عن طريقه

إيجاد مساحة المنطقة المُظلَّلة هو:



a) $\int_{-1}^2 (x^3 - 4x^2 + x + 6) dx$

b) $\int_{-1}^2 (-x^3 + 4x^2 - x - 6) dx$

c) $\int_{-1}^2 (x^3 - 4x^2 - x + 2) dx$

d) $\int_{-1}^2 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx$

4 حلُّ المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = 2xy$ الذي تُحقِّقه النقطة

$(0, 1)$ هو:

a) $y = e^{x^2}$ b) $y = x^2 y$

c) $y = x^2 y + 1$ d) $y = \frac{x^2 y^2}{2 + 1}$

41 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين:
 $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2$.

42 أجد المساحة المحصورة بين منحنيي الاقترانين:
 $f(x) = x^3$ و $g(x) = x$.

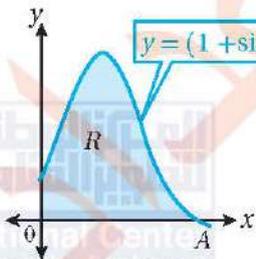
43 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين:
 $f(x) = -x$ و $g(x) = x^2 + 2$ ، والمستقيمين:
 $x = -2$ و $x = 2$.

44 أثبت أن: $\int_2^5 \frac{x^2}{x^2-1} dx = 3 + \frac{1}{2} \ln 2$.

يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = \frac{t}{9} - \frac{1}{\sqrt{t+6}}$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالتر لكل ثانية:

45 أجد إزاحة الجسيم في الفترة $[1, 10]$.

46 أجد المسافة الكلية التي قطعها الجسيم في الفترة $[1, 10]$.



يُمثل الشكل المجاور

منحني الاقتران:

$$y = (1 + \sin 2x)^2$$

حيث: $0 \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$.

47 أجد إحداثيي النقطة A.

48 أجد مساحة المنطقة R.

25 $\int \sec^2 x \tan x \sqrt{1 + \tan x} dx$

26 $\int \frac{x}{\sqrt[3]{4-3x}} dx$

28 $\int (x+1)^2 \sqrt{x-2} dx$

30 $\int (x^2 - 5x) e^x dx$

27 $\int \frac{(\ln x)^6}{x} dx$

29 $\int x \csc^2 x dx$

31 $\int x \sin 2x dx$

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

32 $\int_0^1 t 3^{t^2} dt$

33 $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \cot^3 x dx$

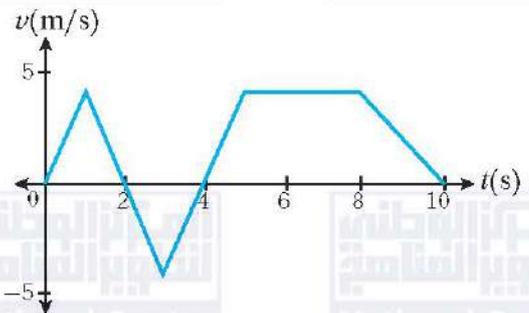
34 $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{4+3 \sin x}} dx$

35 $\int_{-1}^0 \frac{x^2 - x}{x^2 + x - 2} dx$

36 $\int_1^2 \frac{32x^2 + 4}{16x^2 - 1} dx$

37 $\int_{1/2}^{e/2} x \ln 2x dx$

يُبين الشكل الآتي منحني السرعة المتجهة - الزمن لجسيم يتحرك على المحور x في الفترة الزمنية $[0, 10]$. إذا بدأ الجسيم الحركة من $x = 0$ عندما $t = 0$ ، فأجب عن الأسئلة الثلاثة التالية تبعاً:



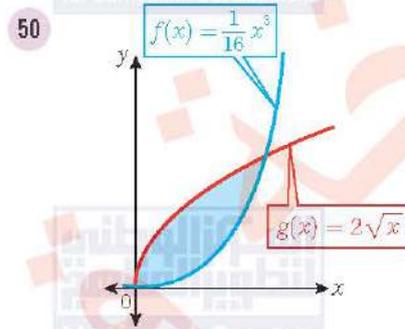
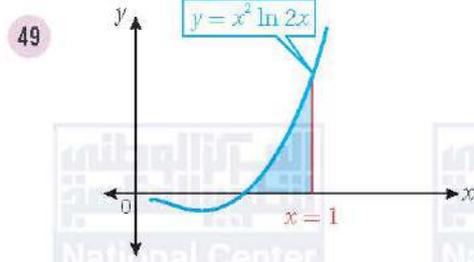
38 أجد إزاحة الجسيم في الفترة الزمنية المعطاة.

39 أجد المسافة التي قطعها الجسيم في الفترة الزمنية المعطاة.

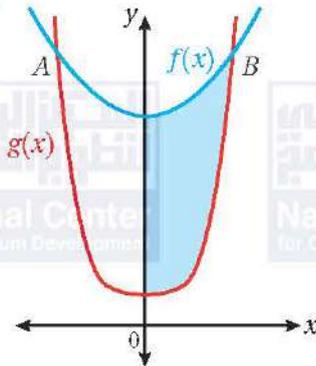
40 أجد الموقع النهائي للجسيم.

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلِّ من التمثيلين البيانيين

الآتيين:



يُبين الشكل الآتي منحنَيي الاقترانين: $f(x) = x^2 + 14$ و $g(x) = x^4 + 2$



51 إذا كان منحنيا الاقترانين يتقاطعان في النقطة A

والنقطة B، فأجد إحداثيي نقطتي التقاطع.

52 أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المُظلَّلة

حول المحور x.

53 أجد حجم المُجسَّم الناتج من دوران المنطقة المحصورة

بين منحنى الاقتران: $f(x) = \sqrt{x} e^{-x}$ ، والمحور x،

والمستقيمين: $x = 1$ ، و $x = 2$ حول المحور x.

أحلُّ كلاً من المعادلات التفاضلية الآتية:

54 $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}}{x}$

55 $\frac{dy}{dx} = x e^x \sec y$

56 $3y^2 \frac{dy}{dx} = 8x$

57 $x \frac{dy}{dx} = 3x\sqrt{y} + 4\sqrt{y}$

أجد الحلَّ الخاص الذي يُحقِّق الشرط الأوَّلي المعطى لكل معادلة تفاضلية ممَّا يأتي:

58 $\frac{dy}{dx} + 4y = 8$; $y(0) = 3$

59 $\frac{dy}{dx} = \frac{5e^y}{(2x+1)(x-2)}$; $y(-3) = 0$

أسماك: يتغيَّر عدد الأسماك في إحدى البحيرات بمعدَّل يُمكن نمذجته بالمعادلة التفاضلية: $\frac{dx}{dt} = 0.2x$ ، حيث x عدد الأسماك، و t الزمن بالسنوات منذ هذه السنة:

60 أحلُّ المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الأسماك في

البحيرة بعد t سنة، علماً بأنَّ عددها هذه السنة هو 300 سمكة.

61 أجد عدد الأسماك في البحيرة بعد 5 سنوات.

62 تجارة: يُمثَّل الاقتران $p(x)$ سعر القطعة الواحدة

(بالدينار) من مُنتَج مُعيَّن، حيث x عدد القطع المبيعة

من المُنتَج بالُمئات. إذا كان: $p'(x) = \frac{-300x}{\sqrt{(9+x^2)^3}}$

هو مُعدَّل التغيُّر في سعر القطعة الواحدة من المُنتَج،

فأجد $p(x)$ ، علماً بأنَّ سعر القطعة الواحدة هو 75 JD

عندما يكون عدد القطع المبيعة منها 400 قطعة.

ما أهمية هذه
الوحدة؟

تُستعمل المتجهات في كثير من مجالات العلوم والهندسة، مثل تمثيل الإزاحة والسرعة والتسارع والقوة، وتُستعمل أيضًا في عديد من الابتكارات الحديثة، مثل السيارات ذاتية القيادة التي تتعرف إلى الأجسام التي حولها على الطريق بحساساتها الدقيقة التي يعتمد عملها على المتجهات.

سأتعلّم في هذه الوحدة:

- ▶ تعيين النقاط والمتجهات في الفضاء.
- ▶ التعبير عن المتجهات جبرياً، وإجراء العمليات عليها في الفضاء.
- ▶ إيجاد معادلة متجهة للمستقيم في الفضاء.
- ▶ الضرب القياسي، وإيجاد قياس الزاوية بين متجهين في الفضاء.

تعلمت سابقاً:

- ✓ المتجهات، وكيفية تمثيلها في المستوى الإحداثي.
- ✓ جمع المتجهات، وطرحها، وضربها القياسي.
- ✓ التفسير الهندسي للمتجهات، وبعض التطبيقات الحياتية والعلمية عليها.
- ✓ الضرب القياسي للمتجهات، وإيجاد قياس الزاوية بين متجهين في المستوى الإحداثي.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (19–21) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

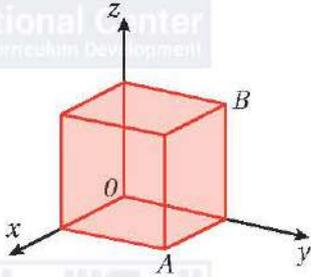
المتجهات في الفضاء

Vectors in Space

تمثيل المتجه في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد، والتعبير عنه بالصورة الإحداثية، أو بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.

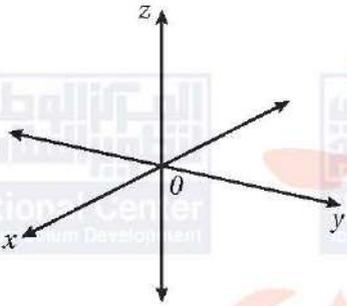
الثُّمن، متجه الموقع، متجه الإزاحة، متجه الوحدة.

يُمثل الشكل المجاور مكعبًا طول ضلعه 5 cm، ما إحداثيات كلٍّ من الرأس A ، والرأس B ؟

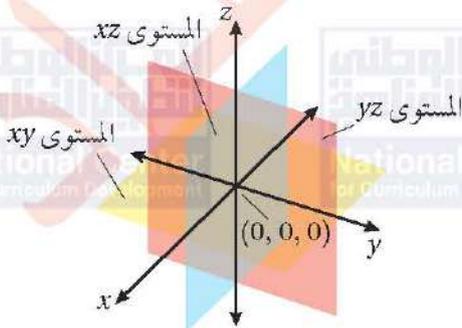


نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد

تعلمتُ سابقًا كيف أُحدِّد موقع نقطة في المستوى الإحداثي باستعمال المحور x والمحور y المتعامدين، وزوجًا من الإحداثيات في صورة (x, y) ، إلا أن المستوى الإحداثي ليس كافيًا لتحديد موقع نقطة ما في الفضاء.



يُمكن تحديد موقع نقطة في الفضاء بإضافة محور ثالث عمودي إلى كلٍّ من المحور x والمحور y ، يُسمَّى المحور z ، عندئذٍ يُحدِّد الثلاثي المُرتَّب (x, y, z) موقع النقطة في الفضاء.



ينتج من إضافة المحور z ثلاثة مستويات، هي: المستوى xy ، والمستوى xz ، والمستوى yz . وتُقسَّم هذه المستويات الفضاء إلى 8 أقسام، يُسمَّى كلٌّ منها الثُّمن (octant).

فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم

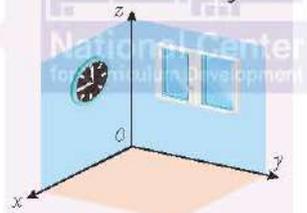


لغة الرياضيات

ينتج من إضافة المحور z ما يُسمَّى نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد.

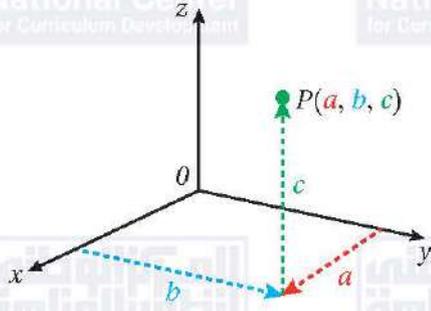
أنعلم

يُشبه الثُّمن الأول جزءًا من غرفة بين حائطين متقاطعين وأرضية الغرفة.



الوحدة 5

National Center
for Curriculum Development



لتحديد موقع النقطة $P(a, b, c)$ في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد، أُعِين النقطة (a, b) في المستوى xy أولاً، ثم أُتَحَرَك إلى الأعلى أو إلى الأسفل بموازية المحور z ، تبعاً لقيمة الإحداثي z وإشارته.

يُستعمل الورق المُنْقَط متساوي القياس لتعيين النقاط في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد بدقة؛ لأن أطوال الوحدات على المحاور الثلاثة تظهر فيه متساوية.

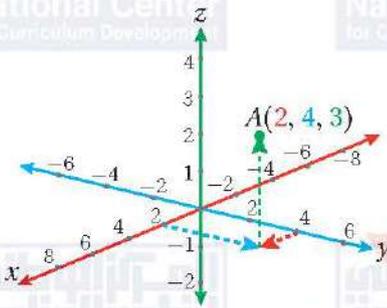
أَتَعَلَّم

يُطلَق على نقطة تقاطع المحاور الإحداثية الثلاثة اسم نقطة الأصل، وهي: $O(0, 0, 0)$.

مثال 1

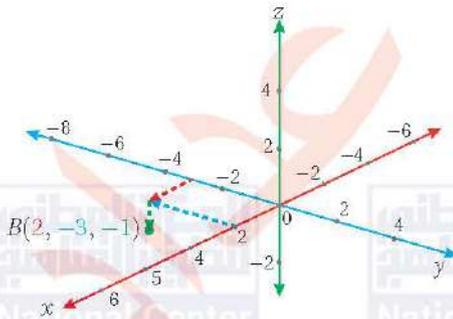
أُعِين كل نقطة مما يأتي في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد:

1 $A(2, 4, 3)$



أُعِين الزوج $(2, 4)$ في المستوى xy ، ثم أُتَحَرَك إلى الأعلى بمقدار 3 وحدات بموازية المحور z ، ثم أُعِين النقطة $A(2, 4, 3)$ كما في الشكل المجاور.

2 $B(2, -3, -1)$



أُعِين الزوج المُرتَّب $(2, -3)$ في المستوى xy ، ثم أُتَحَرَك إلى الأسفل بمقدار وحدة واحدة بموازية المحور z ، ثم أُعِين النقطة $B(2, -3, -1)$ كما في الشكل المجاور.

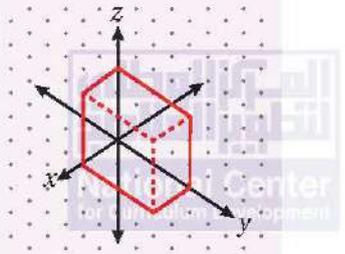
أَتَحَقَّق من فهمي

أُعِين كلاً من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد:

- a) $(-3, 2, 4)$ b) $(1, 0, -4)$ c) $(5, -4, -2)$ d) $(-4, -2, 3)$

أَتَعَلَّم

يُمكن التَحَقُّق من صحة الحلِّ بإكمال رسم متوازي المستطيلات، وملاحظة ارتفاعه على المحور z .



National Center
for Curriculum Development

أستعمل الورق المُنْقَط متساوي القياس الموجود في كتاب التمارين.

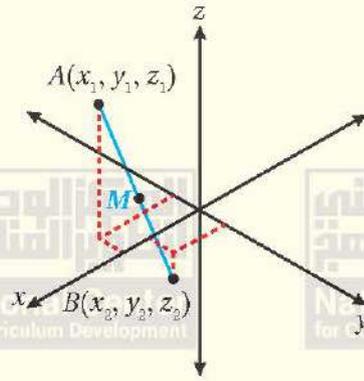
National Center
for Curriculum Development

المسافة بين نقطتين، وإحداثيات نقطة المنتصف في الفضاء

إنَّ عملية حساب المسافة بين نقطتين في الفضاء، وإيجاد إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء، تُشبه حساب المسافة بين نقطتين، وإيجاد إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي.

المسافة بين نقطتين، وإحداثيات نقطة المنتصف في الفضاء

مفهوم أساسي



إذا كانت: $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ ، فإنَّ

المسافة بين النقطتين A و B تعطى بالصيغة:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

وإحداثيات نقطة منتصف AB هي:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

رموز رياضية

يُستعمل الرمز M للدلالة على منتصف القطعة المستقيمة؛ وهو الحرف الأول من الكلمة الإنجليزية (midpoint).

مثال 2

إذا كانت: $A(-4, 7, -2), B(6, 1, -4)$ ، فأجد كلاً ممَّا يأتي:

المسافة بين A و B .

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$= \sqrt{(6 - (-4))^2 + (1 - 7)^2 + (-4 - (-2))^2}$$

$$= 2\sqrt{35}$$

صيغة المسافة بين نقطتين

بالتعويض:

$$(x_1, y_1, z_1) = (-4, 7, -2),$$

$$(x_2, y_2, z_2) = (6, 1, -4)$$

بالتبسيط

إذن، المسافة بين A و B هي: $2\sqrt{35}$ وحدة.

إذا كانت A و B نقطتين في المستوى أو في الفضاء، فإنَّ الرمز AB يدلُّ على المسافة بين هاتين النقطتين، في حين يدلُّ الرمز AB على القطعة المستقيمة الواصلة بين هاتين النقطتين.

2 إحداثيات نقطة منتصف \overline{AB}

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

$$M = \left(\frac{-4 + 6}{2}, \frac{7 + 1}{2}, \frac{-2 + (-4)}{2} \right)$$

$$M = (1, 4, -3)$$

صيغة إحداثيات نقطة المنتصف

بالتعويض:

$$(x_1, y_1, z_1) = (-4, 7, -2),$$

$$(x_2, y_2, z_2) = (6, 1, -4)$$

بالتبسيط

نقطة منتصف \overline{AB} هي: $(1, 4, -3)$.

أتحقق من فهمي

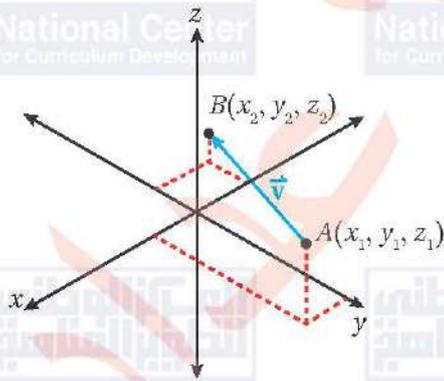
إذا كانت: $M(5, -3, 6)$, $N(2, 1, -6)$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

(a) المسافة بين M و N .

(b) إحداثيات نقطة منتصف \overline{MN} .

المتجهات في الفضاء

إن الكميات المتجهة (مثل: الإزاحة، والسرعة المتجهة) لا تقتصر على المستوى xy ؛ لذا لا بُدَّ من التوسع في مفهوم المتجهات ليشمل الفضاء.



تُمثَّل المتجهات في الفضاء بطريقة مُشابهة لتمثيلها في المستوى الإحداثي. فالمتجه \vec{v} الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1, z_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2, y_2, z_2)$ ، يُمثَّل في الفضاء بسهم، بدايته A ، ونهايته B كما في الشكل المجاور، ويُرمز إليه بالرمز \overrightarrow{AB} ، أو الرمز \vec{v} .

يُمكن كتابة المتجه بالصورة الإحداثية عن طريق طرح إحداثيات نقطة البداية من إحداثيات نقطة النهاية كما يأتي:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

رموز رياضية

يُرمز إلى المتجه بحرفين كبيرين فوقهما سهم، أو بحرف صغير غامق فوقه سهم.

أتعلم

تسمى v_1, v_2, v_3 إحداثيات المتجه \vec{v} ويعبر كل منها عن مقدار الإزاحة بالنسبة إلى المحور x ، أو المحور y ، أو المحور z .

يُمكن حساب مقدار المتجه (طول المتجه) في الفضاء بطريقة مشابهة لحسابه في المستوى الإحداثي.

مقدار المتجه في الفضاء

مفهوم أساسي

إذا كانت: $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ نقطتا بداية المتجه \vec{AB} ونهايته، فإن:

$$|\vec{v}| = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

وإذا كان: $\vec{v} = \vec{AB} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ ، فإن:

$$|\vec{v}| = |\vec{AB}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

أتذكّر

يُرمز إلى مقدار المتجه \vec{AB} بالرمز $|\vec{AB}|$.

مثال 3

إذا كان: $A(-3, 6, 1), B(4, 5, -2)$ ، فأكتب المتجه \vec{AB} بالصورة الإحداثية، ثم أجد مقداره.

$$\vec{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

$$= \langle 4 - (-3), 5 - 6, -2 - 1 \rangle$$

$$= \langle 7, -1, -3 \rangle$$

الصورة الإحداثية للمتجه

بالتعويض: $(x_1, y_1, z_1) = (-3, 6, 1)$

$(x_2, y_2, z_2) = (4, 5, -2)$

بالتبسيط

إذن، $\vec{AB} = \langle 7, -1, -3 \rangle$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

$$= \sqrt{7^2 + (-1)^2 + (-3)^2}$$

$$= \sqrt{59}$$

صيغة مقدار المتجه

بالتعويض: $v_1 = 7, v_2 = -1, v_3 = -3$

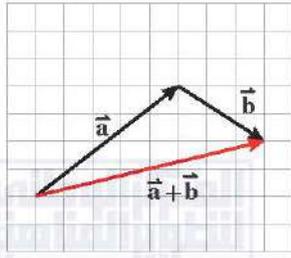
بالتبسيط

إذن، مقدار \vec{AB} هو: $\sqrt{59}$ وحدة.

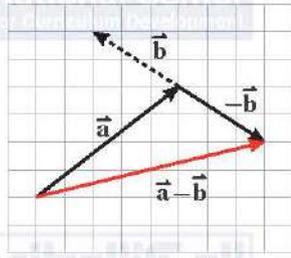
أتدقّق من فهمي

إذا كان: $A(-1, 5, 3), B(-5, 3, -2)$ ، فأكتب المتجه \vec{AB} بالصورة الإحداثية، ثم أجد مقداره.

جمع المتجهات وطرحها وضربها في عدد حقيقي هندسيًا



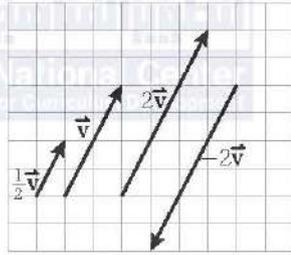
تعلّمت سابقًا أنه لجمع المتجه \vec{a} والمتجه \vec{b} هندسيًا باستعمال قاعدة المثلث، فإنني أرسم أولاً المتجه \vec{a} ، ثم أرسم المتجه \vec{b} بحيث تكون نقطة بدايته هي نقطة نهاية المتجه \vec{a} ، ثم أصِل بين نقطة بداية المتجه \vec{a} ونقطة نهاية المتجه \vec{b} ، فينتج المتجه $\vec{a} + \vec{b}$ والذي يسمى أيضًا المحصلة.



تعلّمت أيضًا أنه لإيجاد $\vec{a} - \vec{b}$ ، فإنني أجمع المتجه \vec{a} مع معكوس المتجه \vec{b} ، أي:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

ومن ثمّ، يُمكن إيجاد ناتج طرح $\vec{a} - \vec{b}$ هندسيًا بطريقة مُشابهة لعملية الجمع كما في الشكل المجاور.



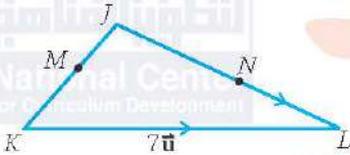
يُمكن تمثيل ضرب المتجه \vec{v} في العدد الحقيقي k برسم متجه مواز لـ \vec{v} ، وطوله $|k|$ مرّة طول \vec{v} ، وله الاتجاه نفسه إذا كان $k > 0$ ، وله عكس اتجاه \vec{v} إذا كان $k < 0$ كما في الشكل المجاور.

أتذكّر

معكوس المتجه \vec{v} هو متجه له نفس مقدار المتجه \vec{v} ، لكنّه يكون في اتجاه مُعاكس له، ويُرمز إليه بالرمز $-\vec{v}$.



مثال 4



في المثلث JKL ، إذا كانت M نقطة منتصف \overline{JK} وكانت: $JN : NL = 3 : 2$ ، وكانت: $\overrightarrow{KL} = 7\vec{u}$ وكانت: $\overrightarrow{NL} = 4\vec{b}$ ، فأكتب \overrightarrow{JM} بدلالة \vec{u} و \vec{b} .

$$\overrightarrow{JN} = \frac{3}{2} \times \overrightarrow{NL}$$

تعريف التناسب

$$\overrightarrow{JN} = \frac{3}{2} \times 4\vec{b} = 6\vec{b}$$

$$\overrightarrow{NL} = 4\vec{b}$$

قاعدة المثلث لجمع المتجهات

$$\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{JL} + (-\overrightarrow{LK})$$

بالتعويض

$$= 6\vec{b} + 4\vec{b} - 7\vec{u}$$

بالتبسيط

$$= 10\vec{b} - 7\vec{u}$$

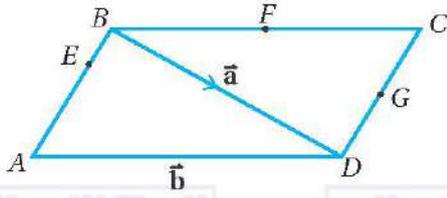
M منتصف \overline{JK}

$$\overrightarrow{JM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{JK}$$

بالتعويض

$$= \frac{1}{2} (10\vec{b} - 7\vec{u})$$

$$\overrightarrow{JM} = 5\vec{b} - 3.5\vec{u}$$



في متوازي الأضلاع $ABCD$ المجاور، إذا كانت F نقطة منتصف BC ، و G نقطة منتصف DC ، وكانت: $\vec{BD} = \vec{a}$ وكانت: $\vec{AD} = \vec{b}$ ، وكانت: $AE = 3EB$ ، فأكتب كلاً مما يأتي بدلالة \vec{a} و \vec{b} .

a) \vec{AB}

b) \vec{EB}

c) \vec{EF}

أَتَعَلَّمُ

لإيجاد حاصل طرح $\vec{a} - \vec{b}$ ، يُرَسَم \vec{a} و \vec{b} بدءاً بالنقطة نفسها، عندئذ يكون $\vec{a} - \vec{b}$ هو المتجه الذي يبدأ بنقطة نهاية \vec{b} ، وينتهي بنقطة نهاية \vec{a} .

جمع المتجهات وطرحها وضربها في عدد حقيقي جبرياً

يُمكن تطبيق عمليات الجمع والطرح والضرب في عدد حقيقي على المتجهات في الفضاء كما هو حال المتجهات في المستوى الإحداثي.

جمع المتجهات وطرحها وضربها في عدد حقيقي

مفهوم أساسي

إذا كان: $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ ، $\vec{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ ، متجهين في الفضاء، وكان c عدداً حقيقياً، فإن:

$$\vec{v} + \vec{w} = \langle (v_1 + w_1), (v_2 + w_2), (v_3 + w_3) \rangle$$

$$\vec{v} - \vec{w} = \langle (v_1 - w_1), (v_2 - w_2), (v_3 - w_3) \rangle$$

$$c\vec{v} = \langle cv_1, cv_2, cv_3 \rangle$$

مثال 5

إذا كان: $\vec{a} = \langle 4, 7, -3 \rangle$ ، $\vec{b} = \langle 9, -2, -5 \rangle$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

1 $2\vec{a} + 3\vec{b}$

$$2\vec{a} + 3\vec{b} = 2\langle 4, 7, -3 \rangle + 3\langle 9, -2, -5 \rangle$$

$$= \langle 8, 14, -6 \rangle + \langle 27, -6, -15 \rangle$$

$$= \langle 35, 8, -21 \rangle$$

بالتعويض

ضرب المتجه في عدد حقيقي

بجمع المتجهين

2 $4\vec{a} - 2\vec{b}$

$$4\vec{a} - 2\vec{b} = 4\langle 4, 7, -3 \rangle - 2\langle 9, -2, -5 \rangle$$

$$= \langle 16, 28, -12 \rangle + \langle -18, 4, 10 \rangle$$

$$= \langle -2, 32, -2 \rangle$$

بالتعويض

ضرب المتجه في عدد حقيقي

بجمع المتجهين

أَتَعَلَّمُ

تُحَقَّقُ عملية جمع المتجهات خاصيتي التبديل والتجميع؛ أي إن:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

أتحقق من فهمي

إذا كان: $\vec{u} = \langle 4, 5, -3 \rangle$, $\vec{v} = \langle 3, 0, -5 \rangle$, $\vec{w} = \langle 9, -2, -5 \rangle$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

a) $3\vec{v} - 4\vec{u}$

b) $3\vec{u} + 5\vec{v} - 2\vec{w}$

تساوي المتجهات

يتساوى متجهان إذا كان لهما الاتجاه والمقدار نفسهما، عندئذ تكون لهما الصورة الإحداثية نفسها؛ أي إن إحداثياتهما المتناظرة تكون متساوية.

المتجهان المتساويان

مفهوم أساسي

إذا كان: $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, $\vec{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ ، فإن: $\vec{w} = \vec{v}$ إذا وفقط إذا كان: $v_1 = w_1, v_2 = w_2, v_3 = w_3$.

مثال 6

إذا كان: $\vec{v} = \langle 4-b, 10, c \rangle$, $\vec{u} = \langle 2, 3a-2, 9 \rangle$ ، وكان: $\vec{v} = \vec{u}$ ، فأجد قيمة كل من: a ، b ، و c .

بما أن المتجهين متساويان، فإن إحداثياتهما المتناظرة متساوية؛ أي إن:

$10 = 3a - 2$

$4 - b = 2$

$c = 9$

بمساواة الإحداثيات المتناظرة

$12 = 3a$

$4 - 2 = b$

بإعادة ترتيب كل معادلة

$4 = a$

$2 = b$

بحل كل معادلة

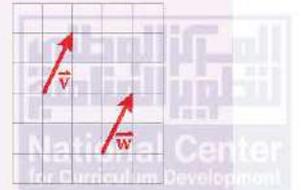
إذن، $a = 4, b = 2, c = 9$.

أتحقق من فهمي

إذا كان: $\vec{v} = \langle 3q+8, 0, 3r \rangle$, $\vec{u} = \langle 20, 2p-5, -12 \rangle$ ، وكان: $\vec{u} = \vec{v}$ ، فأجد قيمة كل من: p ، q ، و r .

أتعلم

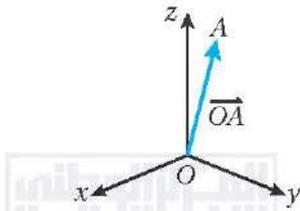
قد يتساوى المتجهان \vec{v} و \vec{w} بالرغم من اختلاف موقعيهما في حال تساوى الاتجاه والمقدار لكل منهما كما في الشكل أدناه.



وفي هذه الحالة، ينطبق المتجهان على بعضهما إذا رُسمَا بدءًا بالنقطة نفسها.

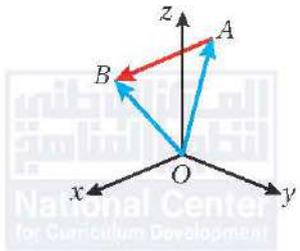
أتعلم

في المثال المجاور، تُعبّر الرموز: a, b, c عن أعداد حقيقية، ولا تُعبّر عن متجهات.



يُطلق على المتجه الذي يبدأ بنقطة الأصل، وينتهي بالنقطة $A(x_1, y_1, z_1)$ اسم **متجه الموقع** (position vector) للنقطة A ، ويُستعمل الرمز \vec{OA} للدلالة على متجه موقع النقطة A .
أما الصورة الإحداثية لهذا المتجه فهي:

$$\begin{aligned}\vec{OA} &= \langle x_1, y_1, z_1 \rangle - \langle 0, 0, 0 \rangle \\ &= \langle x_1, y_1, z_1 \rangle\end{aligned}$$



في الشكل المجاور، يظهر باللون الأزرق متجه الموقع لكل من النقطة A ، والنقطة B ، وهما: \vec{OA} ، و \vec{OB} ، ويظهر باللون الأحمر المتجه \vec{AB} الذي يُمثل **متجه الإزاحة** (displacement vector) من النقطة A إلى النقطة B .

ألاحظ أن \vec{AB} هو ناتج طرح متجه الموقع للنقطة A من متجه الموقع للنقطة B وفق قاعدة المثلث لجمع المتجهات، أي أن:

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

يُمثل مقدار متجه الإزاحة \vec{AB} المسافة بين النقطة A والنقطة B ، وهذه المسافة هي قيمة عددية غير متجهة.

مثال 7

إذا كانت: $A(-11, 2, 21)$ ، $B(3, -5, 7)$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

1 متجه موقع كل من النقطة A ، والنقطة B .

متجه موقع النقطة A هو: $\vec{OA} = \langle -11, 2, 21 \rangle$.

متجه موقع النقطة B هو: $\vec{OB} = \langle 3, -5, 7 \rangle$.

لغة الرياضيات

سُمي متجه الموقع بهذا الاسم لأنه يُحدّد موقع النقطة A بالنسبة إلى نقطة الأصل.

أنعلم

ألاحظ أن كلاً من الموقع والإزاحة هوكية متجهة، وأن المسافة هي قيمة عددية غير متجهة.

أنعلم

يُرمز أيضاً إلى متجه الموقع للنقطة A بالرمز \vec{a} ، إضافةً إلى الرمز \vec{OA} .

2 متجه الإزاحة من النقطة A إلى النقطة B .

يُمكن إيجاد متجه الإزاحة \vec{AB} بطرح متجه الموقع للنقطة A من متجه الموقع للنقطة B :

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \vec{OB} - \vec{OA} \\ &= \langle 3, -5, 7 \rangle - \langle -11, 2, 21 \rangle \\ &= \langle 14, -7, -14 \rangle\end{aligned}$$

3 المسافة بين النقطة A ، والنقطة B .

المسافة بين النقطة A والنقطة B هي مقدار متجه الإزاحة \vec{AB} :

$$\begin{aligned}|\vec{AB}| &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \\ &= \sqrt{(14)^2 + (-7)^2 + (-14)^2} \\ &= \sqrt{441} = 21\end{aligned}$$

صيغة مقدار المتجه

$$\vec{AB} = \langle 14, -7, -14 \rangle$$

بالتبسيط

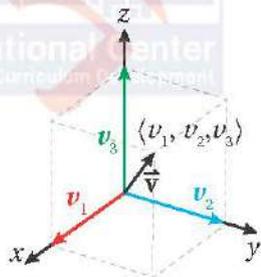
إذن، المسافة بين A و B هي: 21 وحدة طول.

أتحقق من فهمي

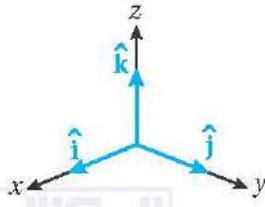
إذا كانت: $A(-2, 8, 13)$, $B(5, -7, -9)$, $C(0, 1, -14)$ نقاطاً في الفضاء، فأجد كلاً مما يأتي:

- متجه موقع كل من النقاط: A ، و B ، و C .
- متجه الإزاحة من النقطة B إلى النقطة C .
- المسافة بين النقطة A والنقطة C .

متجهات الوحدة الأساسية: \hat{i} , \hat{j} , \hat{k}



إذا كانت نقطة بداية المتجه \vec{v} هي نقطة الأصل، ونقطة نهايته هي (v_1, v_2, v_3) كما في الشكل المجاور، فإنه يُمكن التعبير عن ذلك بالصورة الإحداثية: $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.



يُطلق على المتجه الذي مقداره وحدة واحدة اسم **متجه الوحدة** (unit vector). وتُعدُّ متجهات الوحدة

في الاتجاه الموجب للمحاور الإحداثية الثلاثة أهم متجهات الوحدة، وأكثرها استخدامًا؛ لذا تُسمَّى متجهات الوحدة الأساسية، ويشار إلى كلٍّ منها برمز

خاص؛ إذ يُرمز إلى متجه الوحدة في اتجاه محور x الموجب بالرمز \hat{i} ، وصورته الإحداثية هي: $\hat{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$ ، ويُرمز إلى متجه الوحدة في اتجاه محور y الموجب بالرمز \hat{j} ، وصورته الإحداثية هي: $\hat{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$ ، ويُرمز إلى متجه الوحدة في اتجاه محور z الموجب بالرمز \hat{k} ، وصورته الإحداثية هي: $\hat{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$.

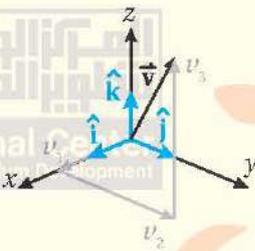
يُمكن كتابة أيِّ متجه بدلالة متجهات الوحدة: \hat{i} ، \hat{j} ، \hat{k} كما هو مبين أدناه.

أنعلّم

يُستعمل الرمز \hat{i} للدلالة على متجه الوحدة في اتجاه x الموجب، ويُقرأ: i hat.

كتابة المتجه بدلالة متجهات الوحدة الأساسية

مفهوم أساسي



يُمكن كتابة المتجه: $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية كما يأتي:

$$\vec{v} = v_1 \hat{i} + v_2 \hat{j} + v_3 \hat{k}$$

أنعلّم

الأحظ في الشكل أن \vec{v} هو مُحصّلة (نتاج جمع) ثلاثة متجهات، هي: $v_1 \hat{i}$ ، $v_2 \hat{j}$ ، $v_3 \hat{k}$.

مثال 8

أكتب المتجه: $\vec{u} = \langle 5, -3, 6 \rangle$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.

$$\vec{u} = 5\hat{i} + (-3)\hat{j} + 6\hat{k}$$

كتابة \vec{u} بدلالة \hat{i} ، \hat{j} ، \hat{k}

$$= 5\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$$

بالتبسيط

2 إذا كان: $\vec{u} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{v} = 4\hat{i} + 7\hat{k}$ فأكتب المتجه: $2\vec{u} + 3\vec{v}$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية.

$$\begin{aligned} 2\vec{u} + 3\vec{v} &= 2(\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) + 3(4\hat{i} + 7\hat{k}) \\ &= 2\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k} + 12\hat{i} + 21\hat{k} \\ &= 14\hat{i} + 4\hat{j} + 15\hat{k} \end{aligned}$$

بتعويض المتجه \vec{u} والمتجه \vec{v}

خاصية التوزيع

بالتبسيط

أتحقق من فهمي

أكتب كلاً من المتجهات الآتية بدلالة متجهات الوحدة الأساسية:

a) $\vec{g} = \langle 9, 0, -4 \rangle$

b) $\vec{AB}: A(2, -1, 4), B(7, 6, -2)$

c) $4\vec{m} - 5\vec{f}: \vec{m} = -2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}, \vec{f} = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 6\hat{k}$

إيجاد متجه وحدة في اتجاه أي متجه

إذا كان c عدداً حقيقياً، فإن: $|c\vec{v}| = |c||\vec{v}|$. ولذا، فإن:

$$\left| \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right| = \frac{1}{|\vec{v}|} \times |\vec{v}| = 1$$

ولذلك يُمكن إيجاد متجه وحدة في اتجاه أي متجه، وذلك بقسمة ذلك المتجه على مقداره، فيصبح مقدار المتجه الناتج وحدة واحدة.

أتعلم

يُمكن كتابة $\frac{1}{|\vec{v}|}$ ، في حين أنه لا يُمكن كتابة $\frac{1}{\vec{v}}$

مثال 9

إذا كان: $A(3, 4, -7), B(-5, 16, 2)$ ، فأجد متجه وحدة في اتجاه \vec{AB} .

الخطوة 1: أكتب \vec{AB} بالصورة الإحداثية.

$$\vec{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

$$= \langle -5 - 3, 16 - 4, 2 - (-7) \rangle$$

$$= \langle -8, 12, 9 \rangle$$

$$(x_1, y_1, z_1) = (3, 4, -7),$$

$$(x_2, y_2, z_2) = (-5, 16, 2)$$

بالتبسيط

الخطوة 2: أجد مقدار \vec{AB} .

$$|\vec{AB}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

صيغة مقدار المتجه

$$= \sqrt{(-8)^2 + (12)^2 + (9)^2}$$

$$\vec{AB} = \langle -8, 12, 9 \rangle$$

$$= \sqrt{289} = 17$$

بالتبسيط

الخطوة 3: أستعمل الصورة الإحداثية ومقدار المتجه لإيجاد متجه الوحدة \vec{u} في اتجاه \vec{AB} .

$$\vec{u} = \frac{1}{17} \langle -8, 12, 9 \rangle = \left\langle \frac{-8}{17}, \frac{12}{17}, \frac{9}{17} \right\rangle$$

أتحقق من فهمي

أجد متجه وحدة في اتجاه كل متجه مما يأتي:

a) $\vec{u} = \langle 4, -3, 5 \rangle$

b) $\vec{v} = 8\hat{i} + 15\hat{j} - 17\hat{k}$

c) $\vec{AB}: A(-1, 4, 6), B(3, 3, 8)$

رموز رياضية

توجد صور مختلفة

للتعبير عن المتجه \vec{a} ,

مثل: $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$,

و $a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$

$$\text{و} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

أدرب وأحل المسائل

أعین کلاً من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد:

1) $(4, 5, 3)$

2) $(-2, 3, -5)$

3) $(4, 0, -3)$

ملحوظة: أستعمل الورق المُنتَظ متساوي القياس الموجود في كتاب التمارين.

أجد الطول وإحداثيات نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة التي أعطي طرفاها في كل مما يأتي:

4) $(3, -2, 8), (5, 4, 2)$

5) $(-2, 7, 0), (2, -5, 3)$

6) $(12, 8, -5), (-3, 6, 7)$

7) $(-5, -8, 4), (3, 2, -6)$

أمثل كلاً من المتجهات الآتية بيانياً في الفضاء:

8 $\vec{v} = \langle -3, -4, 5 \rangle$

9 $\vec{m} = \langle 2, -3, -4 \rangle$

10 $\vec{p} = \langle -3, 5, -2 \rangle$

11 $\vec{e} = -5\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$

12 $\vec{AB}: A(4, 1, 1), B(-3, 6, 3)$

13 $\vec{GH}: G(1, -3, 5), H(0, 4, -2)$

ملحوظة: أستخدم الورق المُثَقَّف متساوي القياس الموجود في كتاب التمارين.

أجد الصورة الإحداثية والمقدار للمتجه \vec{AB} الذي أُعطيَت نقطة بدايته ونقطة نهايته في كلِّ ممَّا يأتي:

14 $A(4, 6, 9), B(-3, 2, 5)$

15 $A(-8, 5, 7), B(6, 3, 2)$

16 $A(12, -5, 4), B(4, 1, -1)$

17 $A(24, -8, 10), B(10, 6, 3)$

18 إذا كان OAB مثلثاً، فيه: $\vec{OA} = \vec{a}$ ، و $\vec{AB} = \vec{b}$ ، والنقطة C هي منتصف \vec{AB} ، فأكتب المتجه \vec{OC} بدلالة \vec{a} و \vec{b} .

إذا كان: $\vec{e} = \langle -3, 9, -4 \rangle$ ، $\vec{f} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + 7\hat{k}$ ، $\vec{g} = \langle -1, 8, -5 \rangle$ ، فأجد كلاً ممَّا يأتي:

19 $3\vec{e} + 4\vec{f}$

20 $\vec{e} + \vec{f} - 3\vec{g}$

21 $4\vec{e} - 2\vec{f} + 3\vec{g}$

22 $2\vec{e} + 7\vec{f} - 2\vec{g}$

إذا كانت: $A(-1, 6, 5)$ ، $B(0, 1, -4)$ ، $C(2, 1, 1)$ نقاطاً في الفضاء، فأجد كلاً ممَّا يأتي:

23 متجهه موقع كلِّ من النقاط: A ، B ، و C .

24 متجهه الإزاحة من النقطة B إلى النقطة A .

25 متجهه الإزاحة من النقطة C إلى النقطة B .

26 المسافة بين النقطة C والنقطة B .

أكتب كلاً من المتجهات الآتية بدلالة متجهات الوحدة الأساسية:

27 $\vec{g} = \langle 5, 7, -1 \rangle$

28 $\vec{ST}: S(1, 0, -5), T(2, -2, 0)$

29 $-\vec{a} + 3\vec{b}: \vec{a} = 1\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}, \vec{b} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

أجد متجه وحدة في اتجاه كل متجه مما يأتي:

30 $-4\hat{i} + 3\hat{j}$

31 $143\hat{i} - 24\hat{j}$

32 $-72\hat{i} + 33\hat{j} + 56\hat{k}$

33 $\begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 8 \end{pmatrix}$

34 $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

35 $\vec{n} = \langle -2, 0, 3 \rangle$

36 إذا كان: $\vec{a} = -3\hat{i} + 4\hat{j} + 12\hat{k}, \vec{b} = 7\hat{i} + 39\hat{j} - 2\hat{k}$ ، وكان: $3\vec{a} + c\vec{b} = -23\hat{i} - 66\hat{j} + 40\hat{k}$ ، فأجد قيمة c .

37 إذا كان: $\vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ v \\ 2 \end{pmatrix}$ ، $\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ w+47 \\ -4 \end{pmatrix}$ ، وكان: $k\vec{s} - 4\vec{t} = \begin{pmatrix} 6 \\ 31 \\ w \end{pmatrix}$ ، فأجد قيمة كل من v ، w ، و k .

38 إذا كان: $5\vec{m} + 2\vec{p} = 4\vec{n}$ ، $\vec{m} = \langle 4, 1, -2 \rangle$ ، $\vec{n} = \langle 6, 2, -3 \rangle$ ، $\vec{p} = \langle 2, a, -1 \rangle$ ، فما قيمة الثابت a ؟

39 إذا كان: $\vec{v} = \langle u-3, u+1, u-2 \rangle$ ، وكان: $|\vec{v}| = 17$ ، فما قيمة u ؟

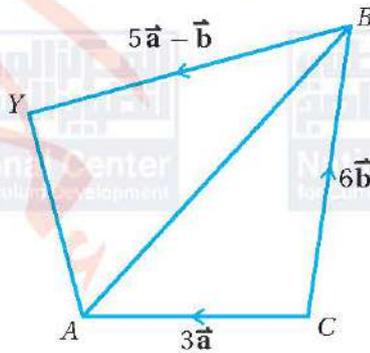
40 إذا كان متجهها الموقع للنقطة G والنقطة H هما: $\vec{g} = \langle -2, c+1, -8 \rangle$ ، و $\vec{h} = \langle c-1, -4, c+2 \rangle$ على الترتيب، فأجد قيمة c ، علمًا بأن: $|\vec{GH}| = 19$ ، وأن: $c > 0$.

41 **اكتشف الخطأ:** قالت حنان: "إذا كانت النقطة $A(7, -3, 3)$ تقع على كرة مركزها نقطة الأصل، فإن النقطة $B(2, -8, -1)$ تقع خارج هذه الكرة". في حين قالت هديل: "النقطة B تقع داخل هذه الكرة". أي القولين صحيح، مبرراً إجابتي؟

42 **تبرير:** إذا وقعت النقطة $J(-4, 6, -1)$ والنقطة $K(-2, 2, 17)$ على طرفي أحد أقطار كرة، فأبين أن النقطة $L(2, 10, 3)$ والنقطة $J(4, -2, 7)$ تقعان على سطح تلك الكرة، مبرراً إجابتي.

43 **تبرير:** تمثل النقاط: $A(2, 3, -1)$, $B(2, 3, 5)$, $C(8, -3, 5)$ ثلاثة من رؤوس مكعب خشبي، كل وجهين من أوجهه يوزيان أحد المستويات: xy , xz , yz .
أكتب إحداثيات الرؤوس الخمسة الأخرى، مبرراً إجابتي.

44 **تحّد:** في الشكل الآتي، إذا كان $\vec{CA} = 3\vec{a}$, $\vec{CB} = 6\vec{b}$, $\vec{BY} = 5\vec{a} - \vec{b}$ ، وكانت X تقع على \vec{AB} ، حيث $AX : XB = 1 : 2$ ، فأثبت أن: $\vec{CX} = \frac{2}{5} \vec{CY}$.



تحّد: إذا كانت متجهات الموقع للنقاط M, L, N هي:

$$\vec{m} = -3\hat{i} - 6\hat{j} + \hat{k}, \vec{l} = 4\hat{i} - 10\hat{j} + 3\hat{k}, \vec{n} = 5\hat{i} + 3\hat{j} - 9\hat{k}$$

45 **أثبت أن المثلث LMN قائم الزاوية.**

46 **أجد مساحة المثلث LMN .**

إرشاد: أستخدم عكس نظرية فيثاغورس التي تعلّمناها في الصف الثامن.

المستقيمات في الفضاء

Lines in Space

فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم



- تعرّف المتجهات المتوازية في الفضاء.
 - كتابة معادلة متجهة للمستقيم في الفضاء.
 - إيجاد إحداثيات نقطة تقاطع مستقيمين في الفضاء.
 - المعادلة المتجهة للمستقيم، المُتغيّر الوسيط، المستقيمان المتخالفان.
- أرسلت إشارة لاسلكية من موقع إحداثياته: $(-1, 4, 5)$ إلى موقع إحداثياته: $(-11, 9, 15)$. وفي الوقت نفسه، أرسلت إشارة من موقع إحداثياته: $(-5, 9, 3)$ إلى موقع إحداثياته: $(2, -5, 17)$. إذا علمت أن الإشارة تسير في خط مستقيم، فهل يتقاطع مسارا الإشارتين؟



توازي المتجهات

المتجهان المتوازيان هما متجهان لهما الاتجاه نفسه، أو عكسه، وليس شرطاً أن يكون لهما المقدار نفسه، وهذا يعني أنه يُمكن كتابة كل منهما في صورة المتجه الآخر مضروباً في عدد حقيقي.

أنتذكر

إذا ضرب المتجه \vec{v} في العدد الحقيقي k ، فإن المتجه $k\vec{v}$ يأخذ اتجاه \vec{v} نفسه إذا كان $k > 0$ ، ويكون عكس اتجاه \vec{v} إذا كان $k < 0$.

مفهوم أساسي

إذا كان: $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ ، $\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ ، فإن: $\vec{u} \parallel \vec{v}$ إذا وفقط إذا وُجد عدد حقيقي k ، حيث: $k \neq 0$ ، بحيث يكون:

$$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = k \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$$

إذا كان: $A(-2, 5, -3), B(1, -3, 2), C(3, -14, 8), D(-3, 2, -2)$ فأحدّد إن كان كل متجهين ممّا يأتي متوازيين أم لا:

1 \vec{AB}, \vec{CD}

أكتب كلاً من \vec{AB} و \vec{CD} بالصورة الإحداثية:

$$\vec{AB} = \langle 1 - (-2), -3 - 5, 2 - (-3) \rangle \quad \text{تعريف الصورة الإحداثية للمتجه}$$

$$= \langle 3, -8, 5 \rangle \quad \text{بالتبسيط}$$

$$\vec{CD} = \langle -3 - 3, 2 - (-14), -2 - 8 \rangle \quad \text{تعريف الصورة الإحداثية للمتجه}$$

$$= \langle -6, 16, -10 \rangle \quad \text{بالتبسيط}$$

ألاحظ أنّ: $\langle -6, 16, -10 \rangle = -2 \langle 3, -8, 5 \rangle$ ؛ ما يعني أنّ: $\vec{CD} \parallel \vec{AB}$.

2 \vec{AC}, \vec{BD}

أكتب كلاً من \vec{AC} و \vec{BD} بالصورة الإحداثية:

$$\vec{AC} = \langle 3 - (-2), -14 - 5, 8 - (-3) \rangle \quad \text{تعريف الصورة الإحداثية للمتجه}$$

$$= \langle 5, -19, 11 \rangle \quad \text{بالتبسيط}$$

$$\vec{BD} = \langle -3 - 1, 2 - (-3), -2 - 2 \rangle \quad \text{تعريف الصورة الإحداثية للمتجه}$$

$$= \langle -4, 5, -4 \rangle \quad \text{بالتبسيط}$$

ألاحظ عدم وجود عدد حقيقي أخرب فيه أحد المتجهين لينتج الآخر؛ أي إنّ: $\vec{AC} \neq k\vec{BD}$. إذن، المتجه \vec{AC} والمتجه \vec{BD} غير متوازيين.

أتحقق من فهمي

إذا كان: $G(7, 5, -11), H(4, 4, -4), K(4, 5, 3), L(7, 7, 3)$ فأحدّد إن كان كل متجهين ممّا يأتي متوازيين أم لا:

a) \vec{GH}, \vec{KL}

b) \vec{GL}, \vec{HK}

أتعلم

ألاحظ أنّه إذا كان:

$$\vec{v} = \frac{1}{k} \vec{u} \quad \text{فإن: } \vec{u} = k\vec{v}$$

حيث: $k \neq 0$.

أتعلم

إذا كان:

$$\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle,$$

$$\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$$

وكان كلٌّ من v_1, v_2, v_3

لا يساوي صفراً، فإنّ

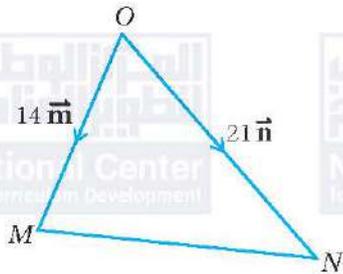
شروط توازي \vec{v} و \vec{u} هو

أن تكون النسب:

$$\frac{u_1}{v_1}, \frac{u_2}{v_2}, \frac{u_3}{v_3}$$

يُمكن استعمال تعريف توازي المتجهات لإثبات بعض علاقات التوازي في الأشكال الهندسية.

مثال 2



في المثلث OMN المجاور، إذا كان: $\vec{OM} = 14\vec{m}$ ، $\vec{ON} = 21\vec{n}$ وكانت النقطة P تقع على \vec{OM} ، حيث: $OP:PM = 2:5$ ، والنقطة Q تقع على \vec{ON} ، حيث: $ON = \frac{7}{2}OQ$ ، فأثبت أن \vec{PQ} يوازي \vec{MN} .

لإثبات توازي القطعتين المستقيمتين PQ و MN ، يكفي إثبات أن أحد المتجهين: \vec{PQ} ، \vec{MN} يمكن كتابته في صورة المتجه الآخر مضروباً في عدد حقيقي.

الخطوة 1: أكتب \vec{MN} بدلالة \vec{m} و \vec{n} ، مُستعملاً قاعدة المثلث لجمع المتجهات.

$$\vec{MN} = \vec{MO} + \vec{ON}$$

$$= -14\vec{m} + 21\vec{n}$$

$$= 7(-2\vec{m} + 3\vec{n})$$

قاعدة المثلث لجمع المتجهات

$$\vec{MO} = -14\vec{m}, \vec{ON} = 21\vec{n} \text{ بتعويض}$$

بإخراج عامل مشترك

الخطوة 2: أكتب \vec{PQ} بدلالة \vec{m} و \vec{n} .

أكتب أولاً \vec{OP} بدلالة \vec{m} ، وأكتب \vec{OQ} بدلالة \vec{n} ، ثم أستعملهما لكتابة \vec{PQ} بدلالة \vec{m} و \vec{n} :

$$\vec{OP} = \frac{2}{7} \vec{OM}$$

$$= \frac{2}{7} \times 14\vec{m}$$

$$= 4\vec{m}$$

$$\vec{OM} = 14\vec{m} \text{ بتعويض}$$

بالتبسيط

$$\vec{ON} = \frac{7}{2} \vec{OQ}$$

$$\vec{OQ} = \frac{2}{7} \times \vec{ON}$$

$$= \frac{2}{7} \times 21\vec{n}$$

$$= 6\vec{n}$$

$$\vec{ON} = 21\vec{n} \text{ بتعويض}$$

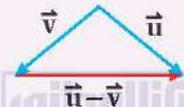
بالتبسيط

إذن، $\vec{OP} = 4\vec{m}$ ، $\vec{OQ} = 6\vec{n}$ ،

أنعلم

الإثبات توازي قطعتين مستقيمتين بوجه عام، يكفي إثبات توازي متجهين يقعان على هاتين القطعتين المستقيمتين.

أتذكر



$$\vec{PQ} = \vec{PO} + \vec{OQ}$$

$$= -4\vec{m} + 6\vec{n}$$

$$= 2(-2\vec{m} + 3\vec{n})$$

$$= \frac{2}{7}\vec{MN}$$

بما أن \vec{PQ} يساوي \vec{MN} مضروباً في عدد حقيقي، فإن \vec{PQ} و \vec{MN} متوازيان.

قاعدة المثلث لجمع المتجهات

$$\vec{OP} = 4\vec{m}, \vec{OQ} = 6\vec{n} \text{ بتعويض}$$

بإخراج عامل مشترك

$$-2\vec{m} + 3\vec{n} = \frac{1}{7}\vec{MN}$$

أتحقق من فهمي

أخطاء شائعة

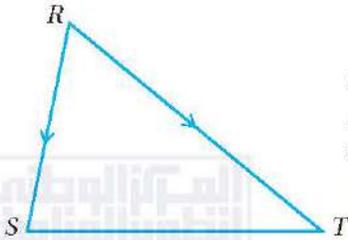
ينتج من المعادلة:

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| |\vec{w}|} \right)$$

أن:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| |\vec{w}| \cos \theta$$

في المثلث RST المجاور، إذا كان: $\vec{RS} = 4\vec{a}$, $\vec{RT} = 6\vec{b}$ ، والنقطة U منتصف \vec{RS} ، والنقطة V منتصف \vec{RT} ، فأثبت أن \vec{UV} يوازي \vec{ST} .



لإثبات أن ثلاث نقاط في الفضاء تقع على استقامة واحدة، يكفي إثبات وجود متجهين متوازيين بينهما نقطة مشتركة، وتكون النقاط الثلاث هي نقاط بداية أو نهاية لهذين المتجهين.

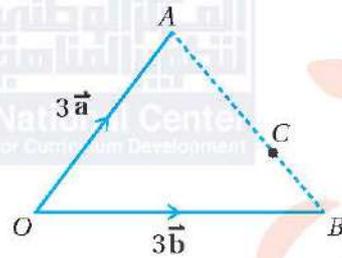
مثال 3

يظهر في الشكل المجاور المثلث OAB ، والنقطتان C ، D .

إذا كان: $\vec{OA} = 3\vec{a}$, $\vec{OB} = 3\vec{b}$ ، وكانت

النقطة C تقع على \vec{AB} ، حيث: $AC = 2CB$ ، وكان

وكان: $\vec{BD} = 2\vec{a} + \vec{b}$ ، فأثبت أن O ، C ، و D تقع على استقامة واحدة.



لإثبات أن O ، C ، و D تقع على استقامة واحدة، يكفي إثبات أن $\vec{OC} \parallel \vec{OD}$ ؛ لأن لهما نقطة البداية نفسها.

الخطوة 1: أكتب كلاً من \vec{AC} و \vec{AB} بدلالة \vec{a} و \vec{b} .

$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB}$$

$$= -3\vec{a} + 3\vec{b}$$

قاعدة المثلث لجمع المتجهات

$$\vec{AO} = -3\vec{a}, \vec{OB} = 3\vec{b} \text{ بتعويض}$$

من الصعب تمثيل النقاط بصورة دقيقة في الفضاء عند استعمال المتجهات لتحديد إذا كانت هذه النقاط تقع على استقامة واحدة أم لا؛ لذا تُستعمل المتجهات بوصفها طريقة جبرية للحل.

$$\vec{AC} = \frac{2}{3} \vec{AB}$$

$$= \frac{2}{3} \times (-3\vec{a} + 3\vec{b})$$

$$= -2\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$\vec{AB} = -3\vec{a} + 3\vec{b} \text{ بتعويض}$$

بالتبسيط

$$\text{إذن، } \vec{AB} = -3\vec{a} + 3\vec{b}, \vec{AC} = -2\vec{a} + 2\vec{b}$$

الخطوة 2: أكتب \vec{OC} و \vec{OD} بدلالة \vec{a} و \vec{b} .

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC}$$

$$= 3\vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{a}$$

$$= \vec{a} + 2\vec{b}$$

$$\vec{OD} = \vec{OB} + \vec{BD}$$

$$= 3\vec{b} + 2\vec{a} + \vec{b}$$

$$= 2\vec{a} + 4\vec{b}$$

$$= 2(\vec{a} + 2\vec{b})$$

$$= 2\vec{OC}$$

قاعدة المثلث لجمع المتجهات

$$\vec{OA} = 3\vec{a}, \vec{AC} = -2\vec{a} + 2\vec{b} \text{ بالتعويض}$$

بالتبسيط

قاعدة المثلث لجمع المتجهات

$$\vec{OB} = 3\vec{b}, \vec{BD} = 2\vec{a} + \vec{b} \text{ بالتعويض}$$

بالتبسيط

بإخراج عامل مشترك

$$\vec{a} + 2\vec{b} = \vec{OC}$$

بما أن \vec{OD} يساوي \vec{OC} مضروباً في عدد حقيقي، فإن \vec{OD} و \vec{OC} متوازيان. ومن ثم، فإن O, C, D تقع على استقامة واحدة.

أتحقق من فهمي

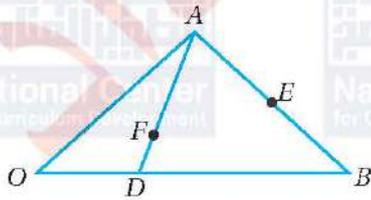
يظهر في الشكل المجاور المثلث OAB .

إذا كان: $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$ ، وكانت النقطة D تقع

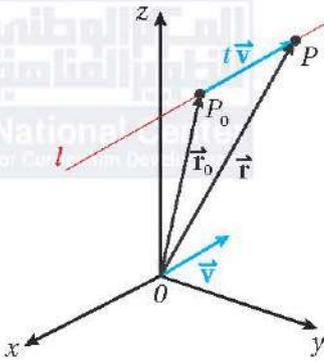
على \vec{OB} ، والنقطة E منتصف \vec{AB} ، والنقطة F تقع على

\vec{AD} ، حيث: $\vec{OF} = \frac{2}{5}(\vec{a} + \vec{b})$ ، فأثبت أن O, F ، و

E تقع على استقامة واحدة.



تعلمت سابقاً استعمال الميل ومقطع المحور y لكتابة معادلة مستقيم في المستوى الإحداثي. والآن سأتعلم كيف أستعمل المتجهات لكتابة معادلة المستقيم في الفضاء.



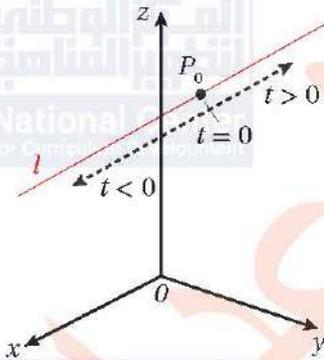
في الشكل المجاور، يمرُّ المستقيم l بالنقطة المعلومة P_0 ، موازياً للمتجه \vec{v} ، ولتكن النقطة P أي نقطة على المستقيم l . ومن ثم، فإنَّ المتجه $\vec{P_0P}$ يوازي المتجه \vec{v} ؛ لذا يُمكن كتابته في صورة: $\vec{P_0P} = t\vec{v}$ ، حيث عدد حقيقي. ووفقاً لقاعدة المثلث لجمع المتجهات، فإنَّ متجه الموقع للنقطة P يساوي مجموع متجه الموقع للنقطة P_0 والمتجه $\vec{P_0P}$ ؛ أي إنَّ:

$$\vec{OP} = \vec{OP_0} + \vec{P_0P}$$

وإذا كان متجه الموقع للنقطة P هو \vec{r} ، ومتجه الموقع للنقطة P_0 هو $\vec{r_0}$ ، فإنَّ:

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v}$$

يُطلق على هذه الصيغة اسم **المعادلة المتجهة للمستقيم** (vector equation of a line).



يُسمى المتغير t في المعادلة السابقة **المتغير الوسيط** (parameter)، وتُحدد كل قيمة من قيم t نقطة وحيدة على المستقيم. فمثلاً، $t = 0$ تُحدد النقطة P_0 ، وقيم t الموجبة تُحدد النقاط الواقعة في اتجاه \vec{v} بدءاً بـ P_0 ، وقيم t السالبة تُحدد النقاط الواقعة عكس اتجاه \vec{v} بدءاً بـ P_0 .

المعادلة المتجهة للمستقيم

مفهوم أساسي

المعادلة المتجهة للمستقيم l الذي يوازي المتجه \vec{v} ، ويمرُّ بنقطة متجه الموقع لها $\vec{r_0}$ ،

هي:

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v}$$

أتعلم

لا يُمكنني استعمال الصيغة: $y = mx + b$ لكتابة معادلة المستقيم في الفضاء.

لغة الرياضيات

يُسمى المتجه \vec{v} اتجاه المستقيم l .

أتعلم

إذا كان \vec{v} اتجاهها للمستقيم l ، فإنَّ $k\vec{v}$ ، حيث $k \neq 0$ ، هو أيضاً اتجاه للمستقيم l .

مثال 4

أجد المعادلة المتجهة للمستقيم l الذي يوازي المتجه: $\vec{v} = \langle -4, 2, 7 \rangle$ ويمرُّ بالنقطة $U(2, -3, 5)$.

متجه موقع النقطة U هو: $\vec{r}_0 = \langle 2, -3, 5 \rangle$.

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$$

صيغة المعادلة المتجهة للمستقيم

$$\vec{r} = \langle 2, -3, 5 \rangle + t\langle -4, 2, 7 \rangle \quad \vec{r}_0 = \langle 2, -3, 5 \rangle, \vec{v} = \langle -4, 2, 7 \rangle \text{ بالتعويض}$$

إذن، المعادلة المتجهة للمستقيم l هي: $\vec{r} = \langle 2, -3, 5 \rangle + t\langle -4, 2, 7 \rangle$.

أنتدقق من فهمي

أجد المعادلة المتجهة للمستقيم الذي يوازي المتجه: $\vec{v} = \langle 1, -4, -5 \rangle$ ويمرُّ بالنقطة $U(0, -6, 9)$.

أنتذكر

متجه الموقع للنقطة

هو: $P(x, y, z)$

$\vec{OP} = \langle x, y, z \rangle$



لغة الرياضيات

يوازي المستقيم l المتجه

\vec{v} إذا كان \vec{v} اتجاهًا

للمستقيم l .

أنتذكر

تُحدَّد أيُّ نقطتين على

المستقيم في المستوى

الإحداثي ميل هذا

المستقيم. أما في

الفضاء فإن أي نقطتين

على المستقيم تحددان

اتجاهه.

يُمكن تحديد متجه موازٍ لمستقيم يمرُّ بنقطتين معلومتين؛ وهو المتجه الذي يقع على المستقيم، وطرفاه هاتان النقطتان.

إذا عُلِّمت نقطتان يمرُّ بهما المستقيم، فيمكن عندئذٍ كتابة معادلته المتجهة باتباع الخطوات الآتيتين:

- إيجاد الصورة الإحداثية للمتجه الموازي، الذي طرفاه النقطتان المعلومتان، بصرف النظر عن النقطة التي يبدأ منها المتجه.

- تعويض متجه الموقع لإحدى النقطتين والمتجه الموازي للمستقيم في صيغة المعادلة المتجهة للمستقيم.

مثال 5

أجد معادلة متجهة للمستقيم l المارَّ بالنقطتين: $P(5, -2, 18)$ و $Q(19, 5, -10)$.

الخطوة 1: أجد اتجاه المستقيم l ، وهو \vec{PQ} .

$$\vec{PQ} = \langle 19-5, 5-(-2), -10-18 \rangle = \langle 14, 7, -28 \rangle$$

يُمكن تبسيط هذا المتجه بقسمة إحداثياته جميعها على 7 (العامل المشترك الأكبر)، فيكون متجه اتجاه l هو $\langle 2, 1, -4 \rangle$.

أنتعلم

يُفضَّل تبسيط الصورة

الإحداثية للمتجه الناتج

بالقسمة على العامل

المشترك الأكبر لإحداثياته؛

لأنَّ المهم هو الاتجاه،

وليس المقدار أو الطول.

الخطوة 2: أعرض متجه موقع النقطة P واتجاه l في صيغة المعادلة المتجهة.

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$$

صيغة المعادلة المتجهة للمستقيم

$$\vec{r} = \langle 5, -2, 18 \rangle + t\langle 2, 1, -4 \rangle \quad \vec{r}_0 = \langle 5, -2, 18 \rangle, \vec{v} = \langle 2, 1, -4 \rangle$$

بالتعويض

أتحقق من فهمي

أجد معادلة متجهة للمستقيم l المارَّ بالنقطتين: $M(3, 7, -9)$ و $N(2, -4, 3)$

يمكن استعمال المعادلة المتجهة للمستقيم في التحقق من وقوع نقطة معلومة عليه أم لا، وإيجاد نقطة وقعت عليه، وعُلم أحد إحداثياتها.

مثال 6

المعادلة المتجهة للمستقيم l هي: $\vec{r} = \langle -2, 9, 1 \rangle + t\langle -3, 1, 2 \rangle$

1 أبين أن النقطة $(19, 2, -13)$ تقع على المستقيم l .

لكي تقع النقطة المعطاة على المستقيم l ؛ لا بُدَّ من وجود قيمة وحيدة للمتغير t تحقق المعادلة:

$$\langle 19, 2, -13 \rangle = \langle -2, 9, 1 \rangle + t\langle -3, 1, 2 \rangle$$

$$\vec{r} = \langle 19, 2, -13 \rangle$$

بتعويض

في معادلة المستقيم l

$$\langle 19, 2, -13 \rangle = \langle -2 - 3t, 9 + t, 1 + 2t \rangle$$

بجمع المتجهين

$$19 = -2 - 3t \quad 2 = 9 + t \quad -13 = 1 + 2t$$

تعريف تساوي متجهين

$$t = -7 \quad t = -7 \quad t = -7$$

بحل المعادلات الثلاث

بما أن للمعادلات الثلاث الحَلَّ نفسه (قيمة t نفسها)، فإن النقطة $(19, 2, -13)$ تقع على المستقيم l ؛ لأنها تنتج من تعويض $t = -7$ في معادلته المتجهة.

2 أجد نقطة على المستقيم، إحداثي z لها هو 25.

يمكن كتابة معادلة المستقيم l في الصورة الآتية:

$$\vec{r} = (-2 - 3t)\hat{i} + (9 + t)\hat{j} + (1 + 2t)\hat{k}$$

المعادلة المتجهة للمستقيم لها عدَّة صور مُتكافئة، تختلف باختلاف النقطة التي يُعَرَّضُ متجه موقعها في المعادلة. ففي المثال المجاور، يمكن تعويض متجه موقع النقطة Q ، أو أي نقطة أخرى على المستقيم، مثل نقطة منتصف القطعة PQ ، بدلاً من النقطة P .

أتذكر

كل قيمة من قيم t تُحدِّد نقطة وحيدة على المستقيم، وكل نقطة على المستقيم تُحدِّد بقيمة مُعيَّنة للمتغير t .

أتعلم

إذا نتجت من حل المعادلات في هذا المثال قيمَّ مختلفة للمتغير t ، فإنَّ النقطة لا تقع على المستقيم l .

بما أن قيمة الإحداثي z للنقطة المطلوبة هي 25، فأجد قيمة t التي تُحدّد هذه النقطة بحلّ المعادلة الآتية:

$$1 + 2t = 25$$

بكتابة المعادلة

$$2t = 24$$

ب طرح 1 من الطرفين

$$t = 12$$

بقسمة طرفي المعادلة على 2

بتعويض $t = 12$ في معادلة المستقيم l ، ينتج:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \langle -2 - 3(12), 9 + 12, 1 + 2(12) \rangle \\ &= \langle -38, 21, 25 \rangle\end{aligned}$$

إذن، النقطة الواقعة على المستقيم l ، والإحداثي z لها هو 25، هي: $(-38, 21, 25)$.

أتحقق من فهمي

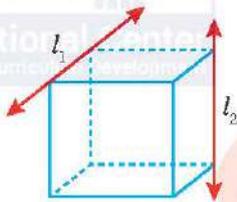
المعادلة المتجهة للمستقيم l هي: $\vec{r} = 11\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k} + t(7\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k})$:

(a) أبين أن النقطة التي متجه الموقع لها هو $(39\hat{i} - 3\hat{j} + 14\hat{k})$ تقع على المستقيم l .

(b) أجد متجه الموقع للنقطة التي تقع على هذا المستقيم، وتُقابل القيمة: $t = -3$.

(c) إذا كانت النقطة $(v, -3v, 5v - 1)$ تقع على المستقيم l ، فما قيمة v ؟

المستقيمات المتوازية والمتقاطعة والمتخالفة



يكون المستقيمان في المستوى الإحداثي متوازيين، أو متقاطعين.

أمّا في الفضاء فتوجد حالة ثالثة، هي أن يكون المستقيمان

متخالفين (skew)؛ أي غير متوازيين، وغير متقاطعين، مثل

المستقيمين: l_1 ، و l_2 في الشكل المجاور.

إذا عُلِمَت معادلتا مستقيمين، فيمكن الجزم بتوازيهما إذا كان اتجاه كل منهما موازياً للآخر؛

أي إن أحدهما ينتج من ضرب الآخر في عدد حقيقي.

المستقيمات المتوازية

مفهوم أساسي

إذا كانت معادلة المستقيم l_1 هي: $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$ ، ومعادلة المستقيم l_2 هي: $\vec{r} = \vec{c} + u\vec{d}$ ،

فإن: $l_1 \parallel l_2$ إذا وفقط إذا كان $\vec{d} \parallel \vec{b}$.

أندكر

يتوازي المتجهان: \vec{u} ،

و \vec{v} إذا كان $\vec{u} = k\vec{v}$ ،

حيث k عدد حقيقي،

و يُرمز إلى هذا التوازي

بالرمز: $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

يُمكن الحكم على تقاطع المستقيمين: $l_1: \vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$ و $l_2: \vec{r} = \vec{c} + u\vec{d}$ ، بمساواة متجهي الموقع \vec{r} في معادليهما، وحل المعادلات الثلاث الناتجة لإيجاد قيمة كل من المتغير t والمتغير u . فإذا تحققت المعادلات الثلاث لقيمتي هذين المتغيرين، كان المستقيمان متقاطعين. وإذا كان المستقيمان غير متوازيين وغير متقاطعين، فإنهما يكونان متخالفين.

مثال 7

إذا كانت المعادلة المتجهة للمستقيم l_1 هي: $\vec{r} = \langle 3, -3, -6 \rangle + t\langle 2, -4, 3 \rangle$ ، والمعادلة المتجهة للمستقيم l_2 هي: $\vec{r} = \langle 4, 7, 0 \rangle + u\langle 1, 2, 3 \rangle$ ، فأحدد إن كان l_1 و l_2 متوازيين، أو متقاطعين، أو متخالفين، ثم أجد إحداثيات نقطة تقاطعهما إذا كانا متقاطعين.

اتجاه المستقيم l_1 هو $\langle 2, -4, 3 \rangle$ ، واتجاه المستقيم l_2 هو $\langle 1, 2, 3 \rangle$. وبما أن هذين المتجهين غير متوازيين، فإن المستقيمين l_1 و l_2 غير متوازيين. إذن، أبحث في تقاطع المستقيمين:

الخطوة 1: أساوي قيمتي \vec{r} في معادلي المستقيمين: l_1 و l_2 .

بمساواة \vec{r} في معادلي المستقيمين $\langle 3, -3, -6 \rangle + t\langle 2, -4, 3 \rangle = \langle 4, 7, 0 \rangle + u\langle 1, 2, 3 \rangle$

بالتبسيط $\langle 3+2t, -3-4t, -6+3t \rangle = \langle 4+u, 7+2u, 3u \rangle$

الخطوة 2: أساوي الإحداثيات الثلاثة للمتجهين على طرفي المساواة، ثم أحل نظام المعادلات الناتج لإيجاد قيمة t وقيمة u :

$3 + 2t = 4 + u \dots\dots(1)$

بمساواة الإحداثي x

$-3 - 4t = 7 + 2u \dots\dots(2)$

بمساواة الإحداثي y

$-6 + 3t = 3u \dots\dots(3)$

بمساواة الإحداثي z

$6 + 4t = 8 + 2u$

بضرب المعادلة (1) في 2

$-3 - 4t = 7 + 2u$

المعادلة (2)

$3 = 15 + 4u$

بجمع المعادلتين

$-12 = 4u$

ب طرح 15 من طرفي المعادلة

$u = -3$

بقسمة طرفي المعادلة على 4

إذا جاء في المسألة أكثر من مستقيم، فاستعمل رموزًا مختلفة للوسيط.

أتعلم

يُمكن النظر إلى المعادلة: $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{d}$ بوصفها حركة جسم في مسار مستقيم، بحيث تُحدد المعادلة موقعه في اللحظة t . ويُمكن النظر إلى أي مستقيمين في الفضاء بوصفهما مساري جسمين، يتحرك كل منهما في مسار مستقيم، وزمن خاص به؛ لذا، فإن تقاطع هذين المستقيمين لا يعني بالضرورة اصطدام الجسمين أحدهما بالآخر.

$$3 + 2t = 4 - 3$$

$$2t = -2$$

$$t = -1$$

بتعويض $u = -3$ في المعادلة (1)

بالتبسيط

بقسمة طرفي المعادلة على 2

بعد ذلك أعوض قيمة t وقيمة u في المعادلة (3)، ثم أتأكد من مساواة الطرفين:

$$-6 + 3(-1) \stackrel{?}{=} 3(-3)$$

$$-9 = -9 \quad \checkmark$$

بالتعويض $t = -1, u = -3$

العبارة صحيحة

بما أن قيمة t وقيمة u حققنا المعادلات الثلاث، فإن المستقيمين متقاطعان.

الخطوة 3: أجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين.

لإيجاد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين، أستعمل معادلة المستقيم l_1 لإيجاد متجه الموقع \vec{r} لنقطة التقاطع:

$$\vec{r} = \langle 3, -3, -6 \rangle + t\langle 2, -4, 3 \rangle$$

معادلة المستقيم l_1

$$= \langle 3, -3, -6 \rangle + (-1)\langle 2, -4, 3 \rangle$$

بتعويض $t = -1$

$$= \langle 1, 1, -9 \rangle$$

بالتبسيط

إذن، متجه موقع نقطة تقاطع المستقيمين هو: $\langle 1, 1, -9 \rangle$ ، ونقطة تقاطع المستقيم l_1 والمستقيم l_2 هي: $(1, 1, -9)$.

أتحقق من فهمي

إذا كانت معادلة المستقيم l_1 هي: $\vec{r} = \langle 3, 7, -9 \rangle + t\langle 1, 11, -12 \rangle$ ، ومعادلة المستقيم l_2 هي: $\vec{r} = \langle -30, -6, 30 \rangle + u\langle 4, -6, 3 \rangle$ ، فأحدد إذا كان المستقيمان l_1 و l_2 متوازيين، أو متقاطعين، أو متخالفين، ثم أجد إحداثيات نقطة تقاطعهما إذا كانا متقاطعين.

تُستعمل المعادلات المتجهة في كثير من المواقف الحياتية والعلمية، كما في خطوط الملاحة الجوية.

أتعلم

بالرغم من أن قيمتي المتغيرين: t ، و u ، الناتجتين في الخطوة السابقة، تُحققان المعادلة الأولى والمعادلة الثانية، فإنه يجب تعويضهما في المعادلة الثالثة للتأكد أنهما تُحققانها أيضًا. وإذا لم تتحقق المعادلة الثالثة، فإن المستقيمين يكونان متخالفين.

أتعلم

يُمكن إيجاد نقطة تقاطع المستقيمين باستعمال معادلة l_2 ، والقيمة $u = -3$.

مثال 7: من الحياة



عرض جوي: أقلعت طائرة من موقع إحداثياته: $(13, 7, 0)$. وفي الوقت نفسه، أقلعت طائرة ثانية من موقع إحداثياته $(-2, 5, 0)$. وبعد التحليق مدة قصيرة في مسارين مستقيمين، أصبحت الطائرة الأولى عند الموقع الذي إحداثياته: $(19, 10, 20)$ ، وأصبحت الطائرة الثانية عند الموقع الذي إحداثياته: $(-11, 15, 20)$. هل خطا سير الطائرتين متوازيان، أم متقاطعان، أم متخالفان؟

الخطوة 1: أجد اتجاه خط سير كل من الطائرتين، ومعادلته المتجهة.

- اتجاه خط سير الطائرة الأولى هو:

$$\langle 19-13, 10-7, 20-0 \rangle = \langle 6, 3, 20 \rangle$$

إذن، المعادلة المتجهة لخط سير الطائرة الأولى هي:

$$\vec{r} = \langle 13, 7, 0 \rangle + t\langle 6, 3, 20 \rangle$$

- اتجاه خط سير الطائرة الثانية هو:

$$\langle -11-(-2), 15-5, 20-0 \rangle = \langle -9, 10, 20 \rangle$$

إذن، المعادلة المتجهة لخط سير الطائرة الثانية هي:

$$\vec{r} = \langle -2, 5, 0 \rangle + u\langle -9, 10, 20 \rangle$$

بما أن اتجاه خط سير الطائرة الأولى لا يوازي اتجاه خط سير الطائرة الثانية، فإن خطي سيرهما غير متوازيين. إذن، أبحث في تقاطع خطي سيرهما.

الخطوة 2: أساوي \vec{r} من معادتي خطي سير الطائرتين:

$$\langle 13, 7, 0 \rangle + t\langle 6, 3, 20 \rangle = \langle -2, 5, 0 \rangle + u\langle -9, 10, 20 \rangle$$

$$\langle 13+6t, 7+3t, 20t \rangle = \langle -2-9u, 5+10u, 20u \rangle$$



معلومة

يقيم سلاح الجو الملكي الأردني في المناسبات الوطنية عروضاً جوية، تُحلّق فيها أسراب الطائرات المقاتلة في مسارات متوازية أو متخالفة.

أتذكّر

لإيجاد اتجاه أيّ مستقيم، أجد المتجه الواصل بين أيّ نقطتين عليه، وذلك بطرح إحداثياتهما المتناظرة.

الخطوة 3: أساوي كل إحداثي من الطرف الأيسر مع نظيره في الطرف الأيمن، ثم أحل نظام

المعادلات الناتج.

$$13 + 6t = -2 - 9u \dots\dots\dots(1)$$

بمساواة الإحداثي x

$$7 + 3t = 5 + 10u \dots\dots\dots(2)$$

بمساواة الإحداثي y

$$20t = 20u \dots\dots\dots(3)$$

بمساواة الإحداثي z

$$t = u$$

بتبسيط المعادلة (3)

$$13 + 6u = -2 - 9u$$

بتعويض $t = u$ في (1)

$$15 = -15u$$

بإعادة ترتيب المعادلة

$$u = -1$$

بقسمة الطرفين على -15

إذن، $u = -1$ تحققان المعادلتين: (1)، و(3).

أعوّض قيمة t وقيمة u في المعادلة (2)، ثم أتحرّق من مساواة الطرفين:

$$7 + 3(-1) = 5 + 10(-1)$$

بتعويض $u = t = -1$ في (2)

$$4 = -5 \quad \times$$

عبارة غير صحيحة

بما أن المعادلات الثلاث لم تتحرّق في آن معاً، فإنّ خطّي سير الطائرتين غير متقاطعين، وهما غير متوازيين؛ لأنّ اتجاهيهما غير متوازيين؛ ما يعني أنّ خطّي سيرهما متخالفتان.

أتحقّق من فهمي

عرض جوي: أقلعت طائرة من موقع إحداثياته: $(0, 7, 0)$. وفي الوقت نفسه، أقلعت طائرة ثانية من موقع إحداثياته: $(-2, 0, 0)$. وبعد التحليق مدّة قصيرة في مسارين مستقيمين، أصبحت الطائرة الأولى عند الموقع الذي إحداثياته: $(8, 15, 16)$ ، وأصبحت الطائرة الثانية عند الموقع الذي إحداثياته: $(22, 24, 48)$. هل خطأ سير الطائرتين متوازيان، أم متقاطعان، أم متخالفتان؟

أذكّر

لكل معادلتين متجهتين لمستقيمين في الفضاء، أستعمل مُتغيّرين مختلفين للتعبير عن الوسيط، مثل: t ، و u ، ويُمثّل كلّ منهما الزمن الذي يُحدّد موقع الجسم المُتحرك على المستقيم.

أذكّر

قيمة t السالبة تعطي نقطة على المستقيم عكس اتجاه \vec{v} بدءاً بالنقطة التي متجه الموقع لها \vec{r}_0 .

أفكر

إذا كانت مسارات الطائرات في عرض جوي مستقيمة ومتقاطعة، فهل يُؤكّد ذلك أنّ الطائرات ستصطدم؟ أبرّر إجابتي.



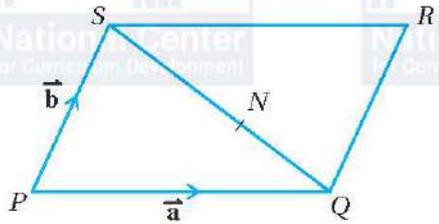
أُحَدِّدُ إذا كان المتجهان متوازيين أم لا في كلِّ ممَّا يأتي:

1 $\langle 8, 12, 24 \rangle, \langle 15, 10, -20 \rangle$

2 $\langle 27, -48, -36 \rangle, \langle 9, -16, -12 \rangle$

3 $\langle -6, -4, 10 \rangle, \langle -3, -1, 13 \rangle$

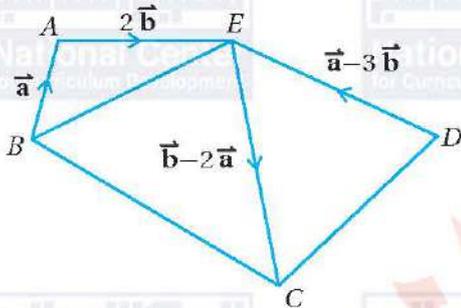
4 $\langle 12, -8, 32 \rangle, \langle 21, -14, 56 \rangle$



يُمثِّل الشكل المجاور متوازي الأضلاع $PQRS$ ، الذي تقع فيه النقطة N على SQ ، حيث: $SN:NQ = 3:2$ ، و $\vec{PQ} = \vec{a}$ ، $\vec{PS} = \vec{b}$

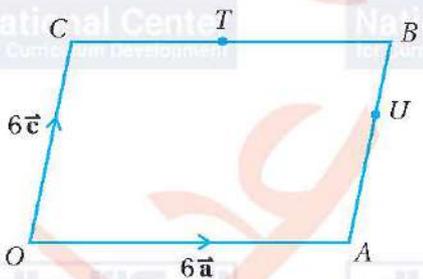
5 أكتب \vec{SQ} بدلالة \vec{a} و \vec{b} .

6 أكتب \vec{NR} بدلالة \vec{a} و \vec{b} .



7 مُعتَمِدًا المعلومات المعطاة في الشكل المجاور، أثبت أن $BEDC$ متوازي أضلاع.

(إرشاد: في متوازي الأضلاع، كل ضلعين متقابلين متوازيان، ولهما الطول نفسه).



8 في متوازي الأضلاع $OABC$ المجاور، $\vec{OA} = 6\vec{a}$ ، $\vec{OC} = 6\vec{c}$ ، والنقطة T هي منتصف الضلع CB ، والنقطة U تقسم AB بنسبة $1:2$. إذا مُدَّ الضلع OA على استقامته إلى النقطة X ، حيث: $OA = AX$ ، فأثبت أن T ، U ، و X تقع على استقامة واحدة.

أجد معادلة متجهة للمستقيم الذي يوازي المتجه \vec{a} ، ويمرُّ بنقطة متجه الموقع لها \vec{b} في كلِّ ممَّا يأتي:

9 $\vec{a} = -7\hat{i} + \hat{j}$ ، $\vec{b} = 5\hat{i} + 3\hat{j}$

10 $\vec{a} = -3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ ، $\vec{b} = -2\hat{i} + 8\hat{k}$

11 $\vec{a} = \langle 4, 3 \rangle$ ، $\vec{b} = \langle 9, -2 \rangle$

12 $\vec{a} = \langle 0, -1, 3 \rangle$ ، $\vec{b} = \langle 10, 3, -6 \rangle$

(إرشاد: تظَّل المعادلة المتجهة للمستقيم صحيحة في المستوى الإحداثي).

أجد معادلة متجهة للمستقيم المارَّ بالنقطتين في كلِّ ممَّا يأتي:

13 $(10, 3, -6), (0, -1, 3)$

14 $(11, -6, 9), (1, 4, 29)$

15 $(-30, -6, 30), (-26, -12, 23)$

16 $(-2, 9, 1), (10, 5, -7)$

17 أجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين:

$$\vec{r} = \langle 4, 4, -7 \rangle + u\langle -1, 3, 1 \rangle, \text{ و } \vec{r} = \langle -2, 2, -1 \rangle + t\langle 1, 2, -1 \rangle$$

يمرُّ المستقيم l_1 بالنقطتين: E, F ، ويمرُّ المستقيم l_2 بالنقطتين: G, H . أجد إذا كان هذان المستقيمان متوازيين، أو متخالفين، أو متقاطعين، ثم أجد إحداثيات نقطة التقاطع إذا كانا متقاطعين في كلِّ ممَّا يأتي:

18 $E(3, -5, -7), F(-11, 9, 14), G(8, -1, -8), H(2, 5, 1)$

19 $E(3, 7, -9), F(2, -4, 3), G(-30, -6, 30), H(-26, -12, 33)$

يمرُّ المستقيم l بالنقطتين: $A(-2, 9, 1)$ و $B(10, 5, -7)$:

20 أكتب معادلة متجهة للمستقيم l .

21 أبين أنَّ النقطة $(19, 2, -13)$ تقع على المستقيم l .

22 أجد قيمة a إذا كانت النقطة $(1, a, -1)$ تقع على المستقيم l .

23 أجد قيمة كلِّ من b, c و إذا كانت النقطة $(-8, b, c)$ تقع على المستقيم l .

24 أجد نقطة تقع على المستقيم l ، وتقع أيضًا في المستوى xz .

25 إذا كان: $\vec{n} = \langle -5, 4, a \rangle, \vec{m} = \langle 1, -2, 3 \rangle$ ، وكان المتجه: $3\vec{n} + b\vec{m}$ يوازي المتجه: $\langle 3, -3, 5 \rangle$ ، فأجد

قيمة كلِّ من a, b .

26 إذا كان: $\vec{v} = a \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ c \end{pmatrix}$ ، فأجد قيمة كلِّ من: a, b, c ، علمًا بأنَّ اتجاه \vec{v} في اتجاه محور y الموجب،

$$|\vec{v}| = 34.$$

متجهات الموقع للنقاط: A ، و B ، و C الواقعة على مستقيم واحد هي:

$$\vec{a} = 2\hat{i} + p\hat{j} + q\hat{k}, \vec{b} = -4\hat{i} + 13\hat{j} - \hat{k}, \vec{c} = 14\hat{i} + \hat{j} + 5\hat{k}$$

28 أجد قيمة q .

27 أجد قيمة p .

29 أجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم المارّ بالنقطتين: A ، و B مع المستوى yz .

30 أجد طول \overline{AC} في صورة: $a\sqrt{14}$ ، حيث a عدد صحيح.

31 $A(1, 2)$ و $B(2, 3)$ نقطتان في المستوى الإحداثي. أجد معادلة المستقيم المارّ بهاتين النقطتين، ثم أجد معادلة

متجهة لهذا المستقيم، مُقارِنًا بين المعادلتين.

إذا كان المستقيم l_1 يمرُّ بالنقطة $A(-3, -1, 12)$ ، والنقطة $B(-2, 0, 11)$ ، وكان المستقيم l_2 يوازي المستقيم l_1 ، ويمرُّ بالنقطة $C(11, 9, 12)$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تبعًا:

33 أجد معادلة l_2 .

32 أجد معادلة l_1 .

إذا كانت: $A(-1, -2, 1)$ و $B(-3, 4, -5)$ و $C(0, -2, 4)$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تبعًا:

34 أجد إحداثيات النقطة M التي هي نقطة منتصف \overline{AB} .

35 إذا وقعت النقطة N على المستقيم BC ، وكان: $|\overline{NC}| = 2|\overline{BN}|$ ، فأجد معادلة متجهة للمستقيم المارّ بالنقطتين M و N .

36 يمرُّ المستقيم l_1 بالنقطتين: $Q(-2, 3, -3)$ ، و $P(-5, 2, 4)$ ، ويمرُّ المستقيم l_2 بالنقطتين: $R(0, -8, -1)$ ، و

$S(12, -23, a)$. إذا كان المستقيم l_1 والمستقيم l_2 متقاطعين، فما قيمة a ؟ وما إحداثيات نقطة تقاطعهما؟

37 أقمار صناعية: مَرَّ القمر الصناعي S_1 بموقعين، هما:

$A(30, -75, 90)$ ، و $B(100, 65, 220)$ ، ومَرَّ القمر الصناعي

S_2 بموقعين، هما: $C(-20, 45, 200)$ ، و $D(120, 85, 160)$.

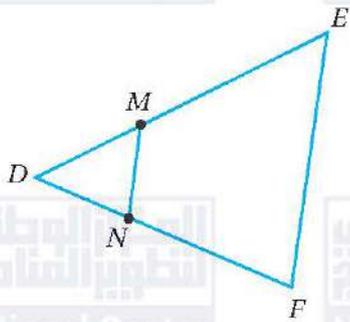
أحدّد العلاقة بين المستقيم AB والمستقيم CD من معادلتيهما.

38 أحلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.





39 تحدّد: يمرّ المستقيم l_1 بالنقطة Q التي متجه الموقع لها هو $\vec{q} = \langle -6, 14, -19 \rangle$ ، ويمرّ أيضًا بالنقطة S التي متجه الموقع لها هو $\vec{s} = \langle -4, 6, -3 \rangle$ ، ويمرّ المستقيم l_2 بالنقطة $T(1, 9, 9)$ ، ويوازي المستقيم: $\vec{r} = \langle 0, -6, 1 \rangle + t\langle 4, 7, 4 \rangle$. إذا تقاطع المستقيم l_1 والمستقيم l_2 في النقطة U ، فأثبت أنّ المثلث STU متطابق الضلعين.



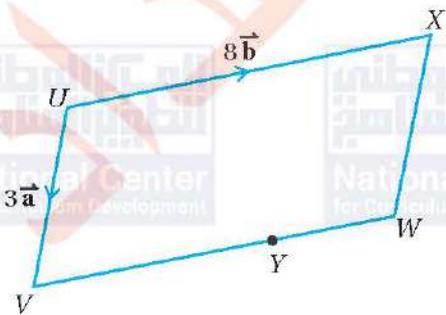
تبرير: في الشكل المجاور، $DE = 12\vec{a}$ ، و $DF = 8\vec{b}$ ، والنقطة M تقسم DE بنسبة $1:2$ ، والنقطة N تقسم DF بنسبة $1:2$.

40 أثبت أنّ: $FEMN$ شبه منحرف.

41 إذا كانت مساحة المثلث DEF تساوي 72 وحدة مربعة، فأجد مساحة $FEMN$.

42 تبرير: تقع النقطة C على المستقيم الذي يحوي النقطتين: $A(13, -10, 15)$ و $B(22, -22, 9)$. إذا كان بُعد C عن B مثلي بُعد C عن A ، فأجد جميع إحداثيات النقطة C الممكنة، مبرّرًا إجابتي.

43 تحدّد: أجد جميع النقاط على المستقيم: $\vec{r} = \langle 3, -2, -6 \rangle + t\langle 1, 2, 3 \rangle$ التي تبعد عن نقطة الأصل 29 وحدة.



44 تحدّد: يمثّل الشكل المجاور متوازي الأضلاع $UVWX$. إذا كان:

$\vec{UV} = 3\vec{a}$ ، و $\vec{UX} = 8\vec{b}$ ، وكانت النقطة Y تقع بين V و W ،

حيث: $VY = 3YW$ ، و Z هي نقطة، حيث: $\vec{XZ} = \frac{4}{3}\vec{XW}$ ، فأثبت

أنّ U ، Y ، و Z تقع على استقامة واحدة.

الضرب القياسي

Scalar Product

فكرة الدرس



مسألة اليوم



• إيجاد الضرب القياسي لمتجهين.

• إيجاد قياس الزاوية بين متجهين أو مستقيمين.

أطلق صاروخ من النقطة $(1, 2, 1)$ ، ثم وصل بعد ثانيتين إلى النقطة $(9, 13, 21)$. وفي الوقت نفسه، أطلق صاروخ آخر من النقطة $(4, -3, 2)$ ، ووصل بعد ثانيتين إلى النقطة $(14, 1, 18)$. ما قياس الزاوية بين مساري الصاروخين؟

الضرب القياسي للمتجهات في الفضاء

درست في الصف العاشر موضوع الضرب القياسي للمتجهات في المستوى الإحداثي؛ وهو عملية جبرية بين متجهين، تنتج منها كمية قياسية، ويرمز إليها بالرمز: $\vec{v} \cdot \vec{w}$ ، وتقرأ:

$$\vec{v} \text{ dot } \vec{w}$$

إذا كان: $\vec{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ ، وكان: $\vec{w} = \langle w_1, w_2 \rangle$ ، فإن:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2$$

يمكن أيضًا إيجاد الضرب القياسي لمتجهين في الفضاء بطريقة مشابهة لطريقة إيجاده لمتجهين في المستوى.

مفهوم أساسي

إذا كان: $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ ، $\vec{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ ، فإن:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

أتعلم

لأي ثلاثة متجهات:

$\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}$ ، وأي عدد

حقيقي c ، فإن:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) =$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$c(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (c\vec{u}) \cdot \vec{v}$$

أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كلِّ ممَّا يأتي:

1 $\vec{v} = 5\hat{i} + 4\hat{j} + 8\hat{k}, \vec{w} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{w} &= v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 \\ &= 5(4) + 4(3) + 8(-4) \\ &= 20 + 12 - 32 = 0 \end{aligned}$$

صيغة الضرب القياسي
بالتعويض
بالتبسيط

2 $\vec{a} = \langle 4, -6, 5 \rangle, \vec{b} = \langle 3, 7, 2 \rangle$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ &= 4(3) + (-6)(7) + 5(2) \\ &= 12 - 42 + 10 = -20 \end{aligned}$$

صيغة الضرب القياسي
بالتعويض
بالتبسيط

أدقق من فهمي

أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كلِّ ممَّا يأتي:

a) $\vec{v} = \langle 4, 8, -3 \rangle, \vec{w} = \langle -3, 7, 2 \rangle$

b) $\vec{m} = -3\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k}, \vec{n} = -12\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k}$

الزاوية بين متجهين في الفضاء



لإيجاد قياس الزاوية بين متجهين، فإنَّها تُرَسَم بحيث يكون للمتجهين نقطة البداية نفسها كما في الشكل المجاور.

وكما هو الحال بالنسبة إلى المتجهات في المستوى الإحداثي، فإنَّه يُمكن عن طريق الضرب القياسي إيجاد قياس الزاوية θ بين المتجهين

غير الصفرين: \vec{v} ، و \vec{w} في الفضاء، وذلك باستعمال العلاقة: $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| |\vec{w}| \cos \theta$ التي

يُمكن إعادة كتابتها باستعمال تعريف معكوس جيب تمام الزاوية على النحو الآتي:

أتعلَّم

الزاوية بين متجهين هي الزاوية الصغرى المحصورة بينهما عند رسمهما بدءًا بالنقطة نفسها؛ أي إنَّ: $0 \leq \theta \leq \pi$

إذا كان \vec{v} و \vec{w} متجهين غير صفرين، فإنه يُمكن إيجاد قياس الزاوية بينهما θ باستعمال الصيغة الآتية:

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| |\vec{w}|} \right)$$

مثال 2

إذا كان: $\vec{v} = \langle 5, -2, 1 \rangle$ و كان: $\vec{w} = \langle -3, 1, 4 \rangle$ ، فأجد قياس الزاوية θ بين المتجه \vec{v} والمتجه \vec{w} إلى أقرب عُشر درجة.

الخطوة 1: أجد مقدار كل من المتجه \vec{v} ، والمتجه \vec{w} .

$$|\vec{v}| = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{30}$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{26}$$

الخطوة 2: أجد قيمة: $\vec{v} \cdot \vec{w}$.

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

$$= 5(-3) + (-2)(1) + 1(4)$$

$$= -13$$

صيغة الضرب القياسي

بالتعويض

بالتبسيط

الخطوة 3: أعوض القيم الناتجة من الخطوتين السابقتين في صيغة قياس الزاوية بين المتجهين.

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| |\vec{w}|} \right)$$

$$= \cos^{-1} \left(\frac{-13}{\sqrt{30} \times \sqrt{26}} \right)$$

$$= \cos^{-1} \left(\frac{-13}{\sqrt{780}} \right)$$

$$\approx 117.7^\circ$$

صيغة قياس الزاوية بين المتجهين

بالتعويض

بالتبسيط

باستعمال الآلة الحاسبة

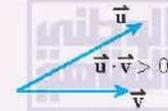
إذن، قياس الزاوية بين المتجهين هو: 117.7° تقريبًا.

أستنتج ما يأتي من العلاقة المجاورة:

- إذا كان: $\vec{v} \cdot \vec{w} < 0$ ، فإن الزاوية بين المتجه \vec{v} والمتجه \vec{w} مُفترجة.



- إذا كان: $\vec{v} \cdot \vec{w} > 0$ ، فإن الزاوية بين المتجه \vec{v} والمتجه \vec{w} حادة.



- إذا كان: $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ ، فإن الزاوية بين المتجه \vec{v} والمتجه \vec{w} قائمة؛ أي إن هذين المتجهين مُتعامدان.



أجد قياس الزاوية θ بين المتجه \vec{u} والمتجه \vec{w} في كل مما يأتي مقرباً الناتج إلى أقرب عُشر درجة:

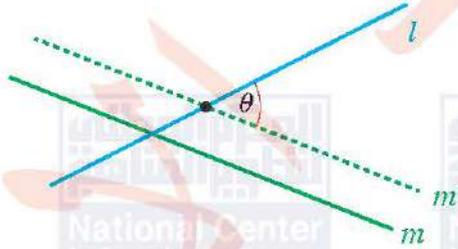
a) $\vec{u} = -3\hat{i} + 5\hat{j} - 4\hat{k}$, $\vec{w} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$

b) $\vec{u} = \langle 2, -10, 6 \rangle$, $\vec{w} = \langle -3, 15, -9 \rangle$

الزاوية بين مستقيمين في الفضاء

تعلّمت في الدرس السابق أن اتجاه المستقيم يُحدّده أيُّ متجه يوازيه؛ لذا يُمكن إيجاد قياس الزاوية بين مستقيمين عن طريق إيجاد الزاوية بين اتجاهيهما باستعمال الضرب القياسي للمتجهات.

وكذلك يُمكن إيجاد الزاوية بين المستقيمين في الفضاء حتى لو كانا متخالفين. فالمستقيم l والمستقيم m في الشكل الآتي متخالفان، ولكن يُمكن إيجاد الزاوية بينهما عن طريق إيجاد الزاوية بين اتجاه المستقيم l واتجاه المستقيم m' الذي يُعدُّ إزاحة للمستقيم m .



مثال 3

إذا كانت معادلة l_1 هي: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ، ومعادلة l_2 هي: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}$

فأجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيم l_1 والمستقيم l_2 إلى أقرب عُشر درجة.

الخطوة 1: أحمّد اتجاه كلٍّ من المستقيم l_1 والمستقيم l_2 .

اتجاه المستقيم l_1 هو: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ، واتجاه المستقيم l_2 هو: $\vec{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}$

الخطوة 2: أجد قيمة $\vec{v} \cdot \vec{w}$.

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 8(-4) + 2(9) + (-3)(-1) = -11$$

أنعلّم

إذا تقاطع مستقيمان غير مُتعامدين، فإنّه ينتج من تقاطعهما زاويتان حادّتان ومُتقابلتان بالرأس، وزاويتان مُتفرجتان ومُتقابلتان بالرأس. ويُمكن إيجاد قياس الزاوية الحادة بينهما بطرح الزاوية المُتفرجة من 180° .

أندكر

بما أن $\vec{v} \cdot \vec{w} < 0$ ، فإنّ الزاوية بين المتجه \vec{v} والمتجه \vec{w} مُتفرجة.

الخطوة 3: أجد مقدار كل من المتجه \vec{v} والمتجه \vec{w} .

$$|\vec{v}| = \sqrt{8^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{77}$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{(-4)^2 + 9^2 + (-1)^2} = \sqrt{98}$$

الخطوة 4: أجد قياس الزاوية بين اتجاهي المستقيمين.

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| |\vec{w}|} \right)$$

$$= \cos^{-1} \left(\frac{-11}{\sqrt{77} \times \sqrt{98}} \right)$$

$$= \cos^{-1} \left(\frac{-11}{\sqrt{7546}} \right)$$

$$\approx 97.3^\circ$$

صيغة قياس الزاوية بين متجهين

بالتعويض

بالتبسيط

باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، قياس الزاوية المُنفرجة بين المستقيمين l_1 والمستقيم l_2 هو: 97.3° تقريبًا، وقياس الزاوية

الحادة بينهما هو: $180^\circ - 97.3^\circ \approx 82.7^\circ$

أتحقق من فهمي

إذا كانت معادلة l_1 هي: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ ، ومعادلة l_2 هي: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

فأجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين l_1 والمستقيم l_2 إلى أقرب درجة.

إيجاد مساحة المثلث باستخدام المتجهات

إذا علمتُ إحداثيات رؤوس مثلث في الفضاء، فيمكنني استعمال الضرب القياسي للمتجهات في إيجاد مساحته.

أحدّد أولًا متجهين يمثّلان ضلعين في المثلث، لهما نقطة البداية نفسها، ثم أجد طولَي هذين الضلعين باستعمال صيغة مقدار المتجه، ثم أجد قياس الزاوية بينهما، عندئذٍ يمكنني إيجاد مساحة المثلث الذي عُلِم فيه طولَا ضلعين، وقياس الزاوية المحصورة بينهما باستعمال قانون الجيب كما تعلّمتُ في الصف العاشر.

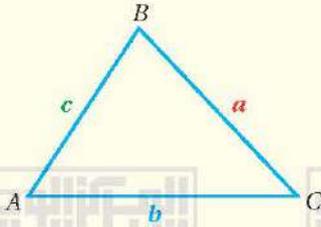
أعلم

ينتج من المعادلة:

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| |\vec{w}|} \right)$$

أن:

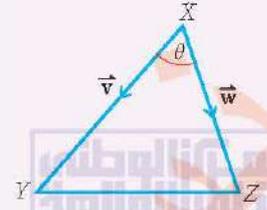
$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| |\vec{w}| \cos \theta$$



مساحة المثلث ABC تساوي نصف ناتج ضرب طولي أيّ ضلعين فيه مضروباً في جيب الزاوية المحصورة بينهما:

$$\text{Area} = \frac{1}{2} bc \sin A, \text{Area} = \frac{1}{2} ac \sin B, \text{Area} = \frac{1}{2} ab \sin C$$

أنعم



مساحة المثلث XYZ هي:

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \frac{1}{2} |\vec{XY}| |\vec{XZ}| \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} |\vec{v}| |\vec{w}| \sin \theta \end{aligned}$$

مثال 4

أجد مساحة المثلث ABC الذي إحداثيات رؤوسه هي:

$$A(5, 6, -2), B(2, -2, 1), C(2, -3, 6)$$

الخطوة 1: أجد متجهين لهما نقطة البداية نفسها.

يُمثل المتجه \vec{AB} والمتجه \vec{AC} ضلعين في المثلث ABC كما في الشكل المجاور، ويوجد لكلا المتجهين نقطة البداية نفسها. أكتب هذين المتجهين بالصورة الإحداثية على النحو الآتي:

$$\vec{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle \quad \text{الصورة الإحداثية للمتجه}$$

$$= \langle 2 - 5, -2 - 6, 1 - (-2) \rangle \quad \text{بالتعويض: } A(5, 6, -2), B(2, -2, 1)$$

$$= \langle -3, -8, 3 \rangle \quad \text{بالتبسيط}$$

$$\vec{AC} = \langle 2 - 5, -3 - 6, 6 - (-2) \rangle \quad \text{بالتعويض: } A(5, 6, -2), C(2, -3, 6)$$

$$= \langle -3, -9, 8 \rangle \quad \text{بالتبسيط}$$

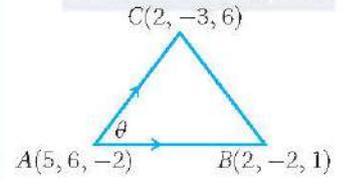
الخطوة 2: أجد مقدار كل من المتجه \vec{AB} ، والمتجه \vec{AC} .

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + (-8)^2 + 3^2} = \sqrt{82}$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + (-9)^2 + 8^2} = \sqrt{154}$$

الخطوة 3: أجد قيمة $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -3(-3) + (-8)(-9) + 3(8) = 105$$



الخطوة 4: أجد قيمة θ التي تُمثل قياس الزاوية المحصورة بين المتجه \vec{AC} والمتجه \vec{AB} .

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} \right)$$

صيغة قياس الزاوية بين متجهين

$$= \cos^{-1} \left(\frac{105}{\sqrt{82} \times \sqrt{154}} \right)$$

بالتعويض

$$\approx 20.9^\circ$$

باستعمال الآلة الحاسبة

الخطوة 5: أجد مساحة المثلث.

$$\text{Area} = \frac{1}{2} |\vec{AB}| \times |\vec{AC}| \sin \theta$$

قانون مساحة المثلث

$$= \frac{1}{2} \sqrt{82} \times \sqrt{154} \sin (20.9^\circ)$$

بالتعويض

$$\approx 20.0$$

باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، مساحة المثلث ABC تساوي 20 وحدة مربعة تقريبًا.

أفكر

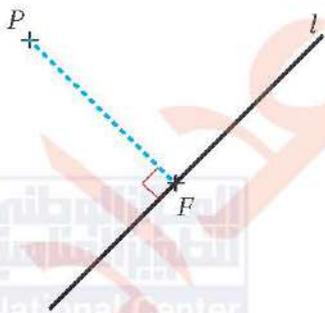
هل يُمكن حساب مساحة هذا المثلث بطريقة أخرى؟

أتحقق من فهمي

أجد مساحة المثلث EFG الذي إحداثيات رؤوسه هي:

$$E(2, 1, -1), F(5, 1, 7), G(6, -3, 1)$$

مسقط العمود على مستقيم من نقطة خارجه



يُبين الشكل المجاور المستقيم l ، ونقطة لا تقع عليه هي P .

عند رسم مستقيم عمودي على l ، يمرُّ بالنقطة P ، فإنَّ

نقطة تقاطع هذا المستقيم مع l تُسمى **مسقط العمود**

(foot of the perpendicular) من النقطة P على

المستقيم l ، وهي النقطة F في الشكل المجاور.

يُمثل طول العمود \overline{PF} البُعد بين النقطة P والمستقيم l . ويُمكن استعمال حقيقة أن ناتج

الضرب القياسي للمتجهين المتعامدين يساوي صفرًا؛ لتحديد مسقط العمود من النقطة P

على المستقيم l (إحداثيات النقطة F).

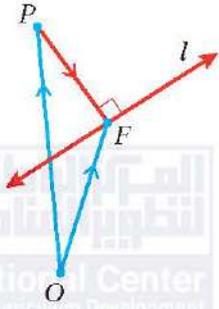
أتذكر

البُعد بين مستقيمين ونقطة لا تقع عليه هو طول القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من تلك النقطة، والتي تُمثل أقصر مسافة بين النقطة والمستقيم.

يُمكن استعمال فكرة مسقط العمود لإيجاد أقصر مسافة في الفضاء بين أيّ مستقيم عُلمت معادلته المتجهة ونقطة لا تقع عليه عُلمت إحداثياتها.

مثال 5

إذا كانت معادلة المستقيم l هي: $\vec{r} = 28\hat{i} - 10\hat{j} - 4\hat{k} + t(8\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k})$ ، والنقطة $P(3, -4, 2)$ غير واقعة على المستقيم l ، فأجب عن السؤالين الآتيين:
أحدّد مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l .



أفترض أنّ النقطة F هي مسقط العمود. وبما أنّ F تقع على l ، فإنّ متجه موقع النقطة F تُحدّده إحدى قيم المتغيّر الوسيط t في معادلة المستقيم l ، ويُمكن التعبير عن ذلك بما يأتي:

$$\begin{aligned}\vec{OF} &= 28\hat{i} - 10\hat{j} - 4\hat{k} + t(8\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}) \\ &= (28 + 8t)\hat{i} + (-10 + 3t)\hat{j} + (-4 - 6t)\hat{k}\end{aligned}$$

أستعمل قاعدة المثلث لجمع المتجهات لكتابة إحداثيات المتجه \vec{PF} بدلالة t على النحو الآتي:

$$\begin{aligned}\vec{PF} &= \vec{OF} - \vec{OP} \\ &= (28 + 8t)\hat{i} + (-10 + 3t)\hat{j} + (-4 - 6t)\hat{k} - (3\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}) \\ &= (25 + 8t)\hat{i} + (-6 + 3t)\hat{j} + (-6 - 6t)\hat{k}\end{aligned}$$

بما أنّ: $\vec{PF} \perp l$ ، فإنّ \vec{PF} عمودي على اتجاه l ؛ أي إنّ: $\vec{PF} \perp (8\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k})$.

$$\vec{PF} \cdot (8\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}) = 0 \quad \text{شرط تعامد متجهين}$$

$$[(25 + 8t)\hat{i} + (-6 + 3t)\hat{j} + (-6 - 6t)\hat{k}] \cdot (8\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}) = 0 \quad \text{بتعويض المتجه } \vec{PF}$$

$$(25 + 8t)(8) + (-6 + 3t)(3) + (-6 - 6t)(-6) = 0 \quad \text{تعريف ضرب القياسي}$$

$$200 + 64t - 18 + 9t + 36 + 36t = 0 \quad \text{خاصية التوزيع}$$

$$218 + 109t = 0 \quad \text{بجمع الحدود المتشابهة}$$

$$t = -2 \quad \text{بحل المعادلة لـ } t$$

أنعم

لإيجاد المسافة بين النقطة P والمستقيم l الذي لا يمرُّ بها، أتبع الخطوتين الآتيتين:

الخطوة 1: أجد النقطة F التي تُمثّل مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l .

الخطوة 2: أجد طول \vec{PF} .

والآن يُمكن تعويض قيمة t الناتجة من حل المعادلة السابقة في معادلة المستقيم l لتحديد متجه موقع النقطة F التي تقع على المستقيم l :

$$\begin{aligned}\vec{OF} &= (28+8t)\hat{i} + (-10+3t)\hat{j} + (-4-6t)\hat{k} && \text{متجه موقع النقطة } F \\ &= (28+8(-2))\hat{i} + (-10+3(-2))\hat{j} + (-4-6(-2))\hat{k} && \text{بتعويض } t = -2 \\ &= 12\hat{i} - 16\hat{j} + 8\hat{k} && \text{بالتبسيط}\end{aligned}$$

إذن، مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l هو: $F(12, -16, 8)$.

2 أجد البُعد بين النقطة P والمستقيم l .

البُعد بين النقطة P والمستقيم l هو طول القطعة المستقيمة من النقطة P إلى النقطة F ، وهذا يساوي مقدار المتجه \vec{PF} .

الخطوة 1: أكتب المتجه \vec{PF} بالصورة الإحداثية.

$$\begin{aligned}\vec{PF} &= (25+8t)\hat{i} + (-6+3t)\hat{j} + (-6-6t)\hat{k} && \text{المتجه } \vec{PF} \text{ بدلالة } t \\ &= (25+8(-2))\hat{i} + (-6+3(-2))\hat{j} + (-6-6(-2))\hat{k} && \text{بتعويض } t = -2 \\ &= 9\hat{i} - 12\hat{j} + 6\hat{k} && \text{بالتبسيط}\end{aligned}$$

الخطوة 2: أجد مقدار المتجه \vec{PF} .

$$\begin{aligned}|\vec{PF}| &= \sqrt{9^2 + (-12)^2 + 6^2} && \text{صيغة مقدار المتجه} \\ &= \sqrt{261} && \text{بالتبسيط}\end{aligned}$$

إذن، البُعد بين النقطة P والمستقيم l هو: $\sqrt{261}$ وحدة.

أنتقق من فهمي

إذا كانت معادلة المستقيم l هي: $\vec{r} = 16\hat{i} + 11\hat{j} - 3\hat{k} + t(5\hat{i} + 7\hat{j} - 3\hat{k})$ ، والنقطة $P(2, 0, \frac{10}{3})$ غير واقعة على المستقيم l ، فأجيب عن السؤالين الآتيين:

(a) أجد مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l .

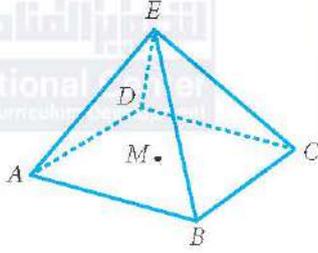
(b) أجد البُعد بين النقطة P والمستقيم l .

أفكر

إذا وقعت النقطة P على المستقيم l ، فما مسقط العمود من P على l ؟ وما المسافة بين P و l ؟

استعمال المتجهات لتحديد قياسات في أشكال ثلاثية الأبعاد

يُمكن استعمال المتجهات لتحديد قياسات بعض الزوايا والأطوال لأضلاع تقع في مستويات مائلة ضمن أشكال ثلاثية البُعد، عُلِّمت إحداثيات رؤوسها.



يظهر في الشكل المجاور الهرم $ABCDE$ الذي قاعدته المربع $ABCD$ ، وإحداثيات رؤوسه هي:

$$A(1, 1, -1), B(9, -1, -3), C(9, -7, 3), D(1, -5, 5), E(8, 3, 7)$$

ومركزه النقطة M .

أجد $m\angle AEC$ إلى أقرب عُشر درجة.

الخطوة 1: أحدّد متجهين لهما نقطة البداية نفسها، والزاوية AEC محصورة بينهما.

للمتجه \vec{EA} والمتجه \vec{EC} نقطة البداية نفسها، والزاوية AEC محصورة بينهما. أكتب هذين المتجهين بالصورة الإحداثية كما يأتي:

$$\vec{EA} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

$$= \langle 1 - 8, 1 - 3, -1 - 7 \rangle$$

$$= \langle -7, -2, -8 \rangle$$

$$\vec{EC} = \langle 9 - 8, -7 - 3, 3 - 7 \rangle$$

$$= \langle 1, -10, -4 \rangle$$

الصورة الإحداثية للمتجه

$$\text{بالتعويض } E(8, 3, 7), A(1, 1, -1)$$

بالتبسيط

$$\text{بالتعويض } E(8, 3, 7), C(9, -7, 3)$$

بالتبسيط

الخطوة 2: أستعمل الضرب القياسي لإيجاد قياس $\angle AEC$.

$$\bullet \text{ أجد } \vec{EA} \cdot \vec{EC} :$$

$$\vec{EA} \cdot \vec{EC} = \langle -7, -2, -8 \rangle \cdot \langle 1, -10, -4 \rangle$$

$$= (-7)(1) - 2(-10) - 8(-4)$$

$$= -7 + 20 + 32 = 45$$

• أجد مقدار كل من المتجه \vec{EA} ، والمتجه \vec{EC} :

$$|\vec{EA}| = \sqrt{(-7)^2 + (-2)^2 + (-8)^2} = \sqrt{117}$$

مقدار المتجه \vec{EA}

$$|\vec{EC}| = \sqrt{1^2 + (-10)^2 + (-4)^2} = \sqrt{117}$$

مقدار المتجه \vec{EC}

أندكر

يشير الرمز $m\angle AEC$

إلى قياس الزاوية

AEC ، والحرف m هو

اختصار للكلمة الإنجليزية

(measure) التي تعني

القياس.

• أجد قياس الزاوية بين المتجه \vec{EA} والمتجه \vec{EC} :

$$m\angle AEC = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{EA} \cdot \vec{EC}}{|\vec{EA}| |\vec{EC}|} \right) \quad \text{صيغة قياس الزاوية بين متجهين}$$

$$= \cos^{-1} \left(\frac{45}{\sqrt{117} \times \sqrt{117}} \right) \quad \text{بتعويض الضرب القياسي، ومقدار كل متجه}$$

$$\approx 67.4^\circ$$

باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، $m\angle AEC \approx 67.4^\circ$

أتعلم

يُمكن إيجاد النقطة M

بوصفها نقطة منتصف

القُطر BD أيضًا.

2 **أبين أن:** $m\angle AME = 90^\circ$

الخطوة 1: أجد إحداثيات M .

النقطة M هي مركز المربع؛ لذا فهي نقطة منتصف القُطر AC :

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right) \quad \text{إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة}$$

$$= \left(\frac{1+9}{2}, \frac{1+(-7)}{2}, \frac{-1+3}{2} \right) \quad \text{بتعويض إحداثيات } A, C$$

$$= (5, -3, 1) \quad \text{بالتبسيط}$$

الخطوة 2: أحدد متجهين لهما نقطة البداية نفسها، والزاوية AME محصورة بينهما.

للمتجه \vec{MA} والمتجه \vec{ME} نقطة البداية نفسها، والزاوية AME محصورة بينهما. أكتب هذين المتجهين بالصورة الإحداثية كما يأتي:

$$\vec{MA} = \langle 1-5, 1-(-3), -1-1 \rangle = \langle -4, 4, -2 \rangle$$

$$\vec{ME} = \langle 8-5, 3-(-3), 7-1 \rangle = \langle 3, 6, 6 \rangle$$

الخطوة 3: أجد $\vec{MA} \cdot \vec{ME}$

$$\vec{MA} \cdot \vec{ME} = \langle -4, 4, -2 \rangle \cdot \langle 3, 6, 6 \rangle$$

$$= -4(3) + 4(6) - 2(6)$$

$$= -12 + 24 - 12 = 0$$

بما أن: $\vec{MA} \cdot \vec{ME} = 0$ ، فإن \vec{MA} و \vec{ME} مُتعامدان؛ لذا فإن: $m\angle AME = 90^\circ$

أتحقق من فهمي

أندكر

(a) أجد قياس $\angle EDB$ في الهرم المبيّن في المثال السابق.

(b) أجد حجم الهرم.

حجم الهرم يساوي
ثلث مساحة قاعدته في
ارتفاعه.

أدرب وأطّل المسائل

أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كلِّ ممّا يأتي:

1 $\vec{u} = 5\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}, \vec{v} = 7\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$

2 $\vec{u} = 4\hat{i} - 8\hat{j} - 3\hat{k}, \vec{v} = 12\hat{i} + 9\hat{j} - 8\hat{k}$

3 $\vec{u} = \langle -5, 9, 17 \rangle, \vec{v} = \langle 4, 6, -2 \rangle$

4 $\vec{u} = \langle 1, -4, 12 \rangle, \vec{v} = \langle 3, 10, -5 \rangle$

أجد قياس الزاوية θ بين المتجهين إلى أقرب عُشر درجة في كلِّ ممّا يأتي:

5 $\vec{m} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}, \vec{n} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$

6 $\vec{v} = \langle 3, -2, 9 \rangle, \vec{w} = \langle 5, 3, -4 \rangle$

7 إذا كانت $A(3, 5, -4)$ و $B(7, 4, -3)$ ، و O نقطة الأصل، فأجد $\angle OAB$ إلى أقرب درجة.

8 يمرُّ المستقيم l_1 بالنقطتين: $(-3, 5, 7)$ ، و $(2, -1, 4)$ ، ويمرُّ المستقيم l_2 بالنقطتين: $(1, 2, -1)$ ، و $(6, -5, 3)$.

أجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيم l_1 والمستقيم l_2 إلى أقرب عُشر درجة.

9 إذا كان المستقيم الذي معادلته: $\vec{r} = \langle 1, 4, -5 \rangle + \lambda \langle -6, q + 5, 3 \rangle$ ، والمستقيم الذي معادلته:

$\vec{r} = \langle 1, 4, -5 \rangle + \mu \langle 5, q - 6, -4 \rangle$ متعاودين، فما القيمة الممكنة للثابت q ؟

إذا كانت معادلة المستقيم l هي: $\vec{r} = 2\hat{j} - 3\hat{k} + t(-\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k})$ ، والنقطة $P(-2, 22, 5)$ غير واقعة على

المستقيم l ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

11 أجد البعد بين النقطة P والمستقيم l .

10 أجد مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l .

12 أجد مساحة المثلث ABC ، حيث: $\vec{AB} = \langle 4, 9, 1 \rangle$ و $\vec{AC} = \langle 9, 1, 4 \rangle$.

13 أجد مساحة المثلث ABC الذي إحداثيات رؤوسه هي: $A(1, 3, 1), B(2, 7, -3), C(4, -5, 2)$.



14 حزام ناقل: يُمثل المتجه $\vec{F} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ القوة التي يُولِّدها حزام ناقل

لتحريك حقيبة في مسار مستقيم، من النقطة $(1, 1, 1)$ إلى النقطة $(9, 4, 7)$.

أجد مقدار الشغل الذي تبذله القوة F ، علمًا بأن القوة بالنيوتن N ، والمسافة

بالمتر m ، ومقدار الشغل (W) المبذول بوحدة جول (J) يساوي ناتج

الضرب القياسي لمتجه القوة في متجه الإزاحة؛ أي: $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$.

15 إذا كانت النقطة $R(27, -17, -1)$ ، والنقطة $S(11, -9, 11)$ تقعان على المستقيم l ، وكانت النقطة Q تقع على

المستقيم l ، حيث \overline{OQ} عمودي على l ، فأجد متجه الموقع للنقطة Q .

إذا كانت متجهات مواقع النقاط: A ، و B ، و D هي: $\begin{pmatrix} -4 \\ 13 \\ 22 \end{pmatrix}$ ، و $\begin{pmatrix} 4 \\ 17 \\ 14 \end{pmatrix}$ ، و $\begin{pmatrix} 2 \\ -29 \\ 7 \end{pmatrix}$ على الترتيب، فأجيب عن الأسئلة الأربعة الآتية تباعًا:

16 أثبت أن: $\overline{AB} \perp \overline{AD}$.

17 أجد متجه موقع النقطة C إذا كان $ABCD$ مستطيلًا.

18 أجد مساحة المستطيل $ABCD$.

19 أجد متجه موقع مركز المستطيل $ABCD$.

معادلة المستقيم l_1 هي: $\vec{r} = \langle -5, 7, 1 \rangle + t\langle 3, 1, 4 \rangle$ ، ومعادلة المستقيم l_2 هي:

$\vec{r} = \langle 2, 8, -1 \rangle + u\langle 2, 0, -3 \rangle$ ، ومعادلة المستقيم l_3 هي: $\vec{r} = \langle 3, 19, 10 \rangle + v\langle -1, 3, 1 \rangle$.

إذا تقاطع المستقيم l_2 والمستقيم l_1 في النقطة T ، وكانت النقطة F تقع على المستقيم l_3 ، حيث: $\overline{TF} \perp l_3$ ، فأجيب عن

السؤالين الآتين تباعًا:

20 أجد إحداثيات النقطة F .

21 أجد البعد بين النقطة T والمستقيم l_3 .

إذا كانت معادلة المستقيم l هي: $\vec{r} = \langle 5, 3, 0 \rangle + \lambda \langle -1, 3, 1 \rangle$ وكانت $A(3, -2, 1)$ و $B(5, 3, 0)$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

22 أجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيم \vec{AB} والمستقيم l .

23 تقع النقطة C على المستقيم \vec{AB} ، حيث: $AB = AC$. أجد إحداثيات النقطة C .

تقع النقطة $A(-7, -4, 9)$ والنقطة $B(8, 5, 3)$ على المستقيم l_1 ، وتقع النقطة $C(6, 11, 7)$ على المستقيم l_2 الذي معادلته: $\vec{r} = \langle 6, 11, 7 \rangle + t \langle -1, 3, 2 \rangle$

24 أبين أن النقطة B تقع على المستقيم l_2 .
25 أبين أن المستقيم l_1 والمستقيم l_2 متعامدان.

26 أجد $m\angle ABC$.
27 أجد مساحة المثلث ABC .

$ABCD$ هرم ثلاثي. إذا كانت إحداثيات رؤوسه هي: $A(4, 3, -1)$, $B(-4, 5, 2)$, $C(6, -1, 0)$, $D(10, 11, 19)$ فأجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تبعاً:

28 أجد مساحة المثلث ABC على الصورة: $a\sqrt{6}$.

29 أثبت أن: $m\angle AED = 90^\circ$ ، حيث $E(1, 2, 1)$.

30 إذا علمت أن النقطة E تقع في المستوى نفسه الذي يقع فيه المثلث ABC ، فأجد حجم الهرم $ABCD$.

إذا كانت $A(3, 1, -6)$ و $B(5, -2, 0)$ و $C(8, -4, -6)$ ، فأجيب عن الأسئلة الخمسة الآتية تبعاً:

31 أبين أن: $\vec{AC} = n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، حيث n عدد صحيح.

32 أبين أن قياس الزاوية ACB هو $\cos^{-1} \frac{5\sqrt{2}}{14}$.

33 أكتب معادلة متجهة للمستقيم \vec{AC} .

34 إذا كانت $D(6, -1, p)$ ، وعلم أن \vec{AC} و \vec{BD} متقاطعان، فما قيمة p ؟

35 أبين أن الشكل $ABCD$ معين، ثم أجد طول كل ضلع من أضلاعه.

مهارات التفكير العليا

37 تبرير: إذا كانت $A(3, -2, 4)$ و $B(1, -5, 9)$ و $C(-4, 5, -1)$ ، وكانت النقطة D تقع على المستقيم المارّ بالنقطة A والنقطة B ، وكانت الزاوية CDA قائمة، فما إحداثيات النقطة D ؟ أبرّر إجابتني.

تحذّر: إذا كانت معادلة المستقيم l_1 هي: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ ومعادلة المستقيم l_2 هي: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -10 \\ 31 \\ -26 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$ ، وتقاطع

هذان المستقيمان في النقطة P ، وكانت النقطة Q تقع على المستقيم l_1 ، حيث: $t = 3$ ، والنقطة R تقع على المستقيم l_2 ،

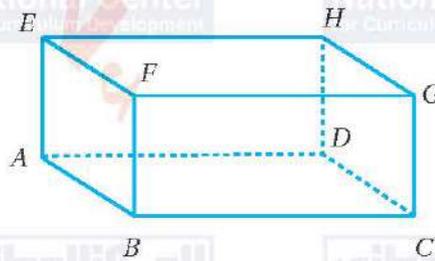
حيث: $u > 3$ ، و $PQ = PR$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

38 إذا كان $m\angle ABC = \theta$ ، فأبين أن: $\cos \theta = -\frac{3}{94}$.

39 أبين أن مساحة المثلث PQR هي $2\sqrt{8827}$ وحدة مربعة.

تحذّر: رُسم متوازي المستطيلات الآتي باستعمال برمجة حاسوبية تعتمد في قياساتها على المتجهات، فكانت كالاتي:

$$\vec{AB} = (2\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}), \vec{AD} = (-10\hat{i} + 10\hat{j} - 5\hat{k}), \vec{AE} = (-6\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k})$$



40 إذا كانت $B(8, 3, -2)$ ، فأجد إحداثيات النقطة H .

41 أجد قياس الزاوية GAC مُقَرَّبًا إلى أقرب عُشر درجة.

42 إذا كان X نقطة منتصف الضلع EF ، فأجد جيب تمام الزاوية DXC .

اختبار نهاية الوحدة

5 إذا كان: $\vec{v} = \langle 2, -2, 5 \rangle$ ، وكان: $\vec{w} = \langle -3, 4, 6 \rangle$ ، فإن $3\vec{v} - 2\vec{w}$ يساوي:

- a) $\langle 0, 2, 3 \rangle$ b) $\langle 12, -14, 3 \rangle$
c) $\langle 13, -16, -8 \rangle$ d) $\langle -13, 16, 8 \rangle$

6 إذا كان قياس الزاوية بين \vec{a} و \vec{b} هو 60° ، وكان: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 30$ ، وكان: $|\vec{a}| = 10$ ، فإن مقدار \vec{b} هو:

- a) 3 b) 5
c) 6 d) 24

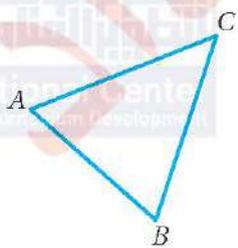
7 إذا كان: $\vec{u} = \langle -4, 2, a \rangle$ وكان: $\vec{v} = \langle 2, b, 5 \rangle$ ، وكان: $\vec{u} \parallel \vec{v}$ ، فإن قيمة a هي:

- a) -10 b) -5
c) -1 d) 5

8 إذا كان المتجه: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ والمتجه: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ q \end{pmatrix}$ متعامدين، فإن قيمة q هي:

- a) 0 b) 8 c) 10 d) 18

9 في المثلث المجاور، إذا كان: $\vec{AB} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ، وكان: $\vec{BC} = -2\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$ فأجد قياس الزاوية ABC إلى أقرب عُشر درجة.



أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

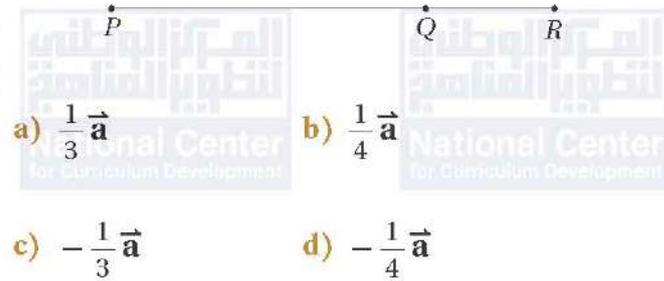
1 إذا كانت $A(-3, 4, 9)$ ، $B(5, -2, 3)$ ، فإن الصورة الإحداثية للمتجه \vec{AB} هي:

- a) $\langle -2, 2, 12 \rangle$ b) $\langle 8, -6, -6 \rangle$
c) $\langle -1, 1, 6 \rangle$ d) $\langle -8, 6, -6 \rangle$

2 إذا كان: $\vec{v} = \langle 2, c, -5 \rangle$ ، وكان: $|\vec{v}| = 3\sqrt{5}$ ، فإن c تساوي:

- a) 4 b) -3, 5
c) 15 d) -4, 4

3 إذا كان PQR مستقيماً، حيث: $PQ : QR = 3 : 1$ ، و $\vec{PQ} = \vec{a}$ ، فإن التعبير عن المتجه \vec{RQ} بدلالة \vec{a} هو:



4 النقطة الواقعة على المستقيم الذي معادلته: $\vec{r} = \langle 4, -2, 5 \rangle + t\langle -2, 1, 3 \rangle$ والإحداثي y لها 10 هي:

- a) $(18, 10, 28)$ b) $(28, 10, 35)$
c) $(-8, 10, 20)$ d) $(-20, 10, 41)$

18 إذا كانت معادلة المستقيم l هي:

$$\vec{r} = \langle 3, -25, 13 \rangle + t\langle 4, 5, -1 \rangle$$

النقطة V تقع على المستقيم l ، حيث: $l \perp \overline{OV}$ ، فما

إحداثيات النقطة V ؟

يمرّ المستقيم l_1 بالنقطتين: E ، F ، ويمرّ المستقيم l_2 بالنقطتين: G ، H . أحدّد إذا كان هذان المستقيمان متوازيين، أو متخالفين، أو متقاطعين، ثم أجد إحداثيات نقطة التقاطع إن كانا متقاطعين في كل ممّا يأتي:

19 $E(7, 6, 34), F(5, 9, 16),$

$G(1, 21, -2), H(-13, -14, 19)$

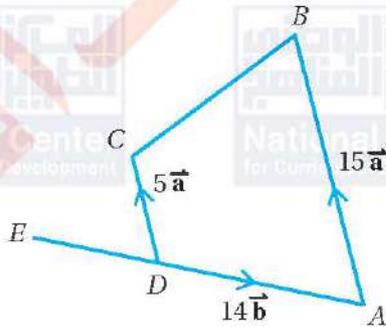
20 $E(-3, -5, 16), F(12, 0, 1),$

$G(7, 2, 11), H(1, -22, 23)$

21 في الشكل الرباعي $ABCD$ الآتي، مُدّد AD على

استقامته ليصل إلى النقطة E ، حيث: $AD = 2DE$.
إذا كان: $\vec{DA} = 14\vec{b}$ ، وكان: $\vec{DC} = 5\vec{a}$ ، وكان:

$\vec{AB} = 15\vec{a}$ ، فأثبت أن B ، C ، و E تقع على استقامة واحدة.



10 إذا وقعت النقاط: $E(2, 0, 4), F(h, 5, 1), G(3, 10, k)$

على مستقيم واحد، فما قيمة كل من h ، و k ؟

11 إذا كانت: $A(3, -2, 4), B(1, -5, 6), C(-4, 5, -1)$

وكانت النقطة D تقع على المستقيم المارّ بالنقطة

A والنقطة B ، وكانت الزاوية القائمة، فأجد

إحداثيات النقطة D .

إذا كانت معادلة المستقيم l_1 هي:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

ومعادلة المستقيم l_2 هي:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ -17 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

فأجيب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

12 أجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين: l_1, l_2 .

13 أجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين: l_1, l_2 .

إذا كانت: $A(1, 4, -5), B(3, 0, 2), C(-4, 1, 3)$

فأجيب عن الأسئلة الأربعة الآتية تبعاً:

14 أكتب معادلة متجهة للمستقيم \vec{AB} .

15 أكتب معادلة متجهة للمستقيم \vec{AC} .

16 إذا كان قياس $\angle BAC = \theta$ ، فأثبت أن:

$$\cos \theta = \frac{58}{7\sqrt{138}}$$

17 أجد مساحة المثلث ABC .

ما أهمية هذه الوحدة؟

ازدادت أهمية الإحصاء والاحتمالات كثيرًا في عصرنا الحاضر بسبب قدرة الحواسيب على تخزين بيانات ضخمة في عديد من المجالات الحياتية والعلمية، مثل: بيانات مواقع التواصل الاجتماعي، والطب، والتجارة؛ ما يتطلب تحليل هذه البيانات، والتوصل إلى استنتاجات دقيقة بخصوصها. وكذلك تُعدُّ الطرائق الإحصائية والاحتمالية أساسًا لكثير من المجالات العلمية الحديثة، مثل: الذكاء الاصطناعي، وصناعة الروبوتات؛ لما تحويه هذه المجالات من بيانات ضخمة يتعيَّن تحليلها بصورة مستمرة.

سأتعلم في هذه الوحدة:

- التوزيع الهندسي، وتوزيع ذي الحدين.
- التوقع لكل من التوزيع الهندسي، وتوزيع ذي الحدين.
- خصائص منحني التوزيع الطبيعي.
- إيجاد احتمال المُتغيّر العشوائي الطبيعي.

تعلمت سابقاً:

- حساب التوافق والتباديل.
- إيجاد احتمال حادث ما في تجربة عشوائية.
- المُتغيّر العشوائي، وتوزيعه الاحتمالي.
- إيجاد التوقع والتباين للمُتغيّر العشوائي.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (33-30) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

التوزيع الهندسي وتوزيع ذي الحدّين

Geometric and Binomial Distributions

- تعرّف التوزيع الاحتمالي والتوقع للمتغير العشوائي الهندسي.
- تعرّف التوزيع الاحتمالي والتوقع والتباين للمتغير العشوائي ذي الحدّين.
- تجربة بيرنولي، التجربة الاحتمالية الهندسية، التجربة الاحتمالية ذات الحدّين.

فكرة الدرس

المصطلحات

مسألة اليوم



يتدرّب عمر على لعبة الشطرنج للفوز ببطولتها في مواجهة برنامج حاسوبي مُعدّ لهذا الغرض. إذا كان احتمال فوز عمر في كل لعبة هو 0.25، فأجد احتمال أن تكون اللعبة الثالثة هي أوّل لعبة يفوز بها منذ بدئه التدريب.

تجربة بيرنولي

تجربة بيرنولي (Bernoulli trial) هي تجربة عشوائية لها أحد ناتجين فقط، بحيث يُعبّر عن أحدهما بالنجاح، ويُعبّر عن الآخر بالفشل. فمثلاً، تجربة إلقاء قطعة النقد مرّة واحدة وملاحظة الوجه الظاهر تُمثل تجربة بيرنولي؛ لأنّها لها أحد ناتجين: صورة، أو كتابة. وفي هذه التجربة، تُعدّ الصورة هي النجاح، والكتابة هي الفشل، أو العكس.

بوجه عام، يُمكن النظر إلى أيّ تجربة عشوائية بوصفها تجربة بيرنولي، بافتراض أن حدثاً مُعيّناً من الفضاء العيني للتجربة هو النجاح، بصرف النظر عن العدد الفعلي لعناصر ذلك الحدث. فمثلاً، عند إلقاء حجر نرد أوجهه مُرقّمة بالأرقام: {1, 2, 3, 4, 5, 6}، يُمكن عدّ هذه التجربة تجربة بيرنولي على أساس أن ظهور عدد أقل من 4 هو النجاح، وأنّ أيّ عدد (ناتج) آخر هو الفشل.

أتعلّم

جاكوب بيرنولي
(1654 - 1705م):
عالم سويسري برع في
الإحصاء والاحتمالات،
وسُمّي باسمه بعض
النظريات الإحصائية،
وكان أحد مؤسسي علم
التفاضل والتكامل.

التجربة الاحتمالية الهندسية

يُطلق على تكرار تجربة بيرنولي عدداً من المرات المستقلة حتى التوصل إلى أوّل نجاح اسم التجربة الاحتمالية الهندسية (geometric probability experiment).

إذا توافرت الشروط الأربعة الآتية في تجربة عشوائية ما، فإنها تُعدُّ تجربة احتمالية هندسية:

- 1 اشتمال التجربة على محاولات مستقلة ومُتكرِّرة.
- 2 فرز النتائج المُمكنة في كل محاولة إلى نجاح أو فشل.
- 3 ثبات احتمال النجاح في كل محاولة.
- 4 التوقُّف عند أوَّل نجاح.

أتعلَّم

بوجه عام، إذا كانت المحاولات مستقلة، فهذا لا يعني بالضرورة ثبات احتمال النجاح في كل محاولة.

مثال 1

أُبين إذا كانت التجربة العشوائية تُمثل تجربة احتمالية هندسية في كلِّ ممَّا يأتي:

1 إلقاء رِيان حجر نرد منتظمًا بشكل مُتكرَّر، ثم التوقُّف عند ظهور العدد 2.

أبحث في تحقُّق الشروط الأربعة الآتية للتجربة الاحتمالية الهندسية:

1 اشتمال التجربة على محاولات مُتكرِّرة (إلقاء حجر نرد منتظم بشكل مُتكرَّر حتى يظهر العدد 2). وبما أنَّ نتيجة إلقاء حجر النرد في كل مرَّة لا تُؤثِّر في نتيجة إلقائه في المَرَّات الأخرى، فإنَّ هذه المحاولات مستقلة.

2 فرز النتائج المُمكنة في كل محاولة إلى ناتجين فقط، هما: النجاح (ظهور العدد 2)، أو الفشل (ظهور أيِّ عدد آخر).

3 ثبات احتمال النجاح في كل محاولة، وهو $\frac{1}{6}$.

4 التوقُّف عند أوَّل نجاح.

إذن، تُمثل هذه التجربة العشوائية تجربة احتمالية هندسية.

2 سحب هديل 4 كرات على التوالي من دون إرجاع، من صندوق فيه 5 كرات حمراء،

و6 كرات خضراء، ثم كتابة عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

أبحث في تحقُّق الشروط الأربعة للتجربة الاحتمالية الهندسية.

تتضمَّن هذه التجربة محاولات مُتكرِّرة (سحب 4 كرات). وبما أنَّ سحب نتيجة كل كرة تتأثِّر بنتائج سحب الكرات السابقة بسبب عدم إرجاع الكرات المسحوبة إلى الصندوق، فإنَّ هذه المحاولات غير مستقلة.

إذن، لا تُمثل هذه التجربة العشوائية تجربة احتمالية هندسية.

أتعلَّم

لأيِّ تجربة عشوائية، يكون الحادث (A) والحادث (B) مستقلين إذا كان وقوع أحدهما (أو عدم وقوعه) لا يُؤثِّر في احتمال وقوع (أو عدم وقوع) الآخر.

أفكر

في الفرع 2 من المثال، إذا سُحِبَت الكرات الأربع على التوالي مع الإرجاع، فهل يُمثل ذلك تجربة احتمالية هندسية؟ أعيِد الحلَّ في هذه الحالة.

أبين إذا كانت التجربة العشوائية تُمثل تجربة احتمالية هندسية في كلِّ ممَّا يأتي:

(a) إلقاء عبد العزيز قطعة نقد منتظمة 6 مرَّات، ثم كتابة عدد مرَّات ظهور الصورة.

(b) إطلاق سامية أسهماً بشكل مُتكرَّر نحو هدف، ثم التوقُّف عند إصابته أوَّل مرَّة، علماً بأنَّ احتمال إصابتها الهدف في كل مرَّة هو 0.6

المُتغيِّر العشوائي الهندسي، وتوزيعه الاحتمالي

تعلمتُ سابقاً أنَّ المُتغيِّر العشوائي هو مُتغيِّر تعتمد قيمه على نواتج تجربة عشوائية، وأنَّ التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي هو اقتران يربط كل قيمة للمُتغيِّر العشوائي باحتمال وقوعها.

في التجربة الاحتمالية الهندسية، إذا دلَّ المُتغيِّر العشوائي X على عدد المحاولات وصولاً إلى أوَّل نجاح، فإنَّ X يسمَّى المُتغيِّر العشوائي الهندسي، ويُمكن التعبير عنه بالرموز على النحو الآتي:

$$X \sim Geo(p)$$

حيث p احتمال النجاح الثابت في كل محاولة.

ومن ثمَّ، فإنَّ المُتغيِّر X يأخذ القيم الآتية: $1, 2, 3, \dots$ ؛ أي إنَّ:

$$x \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

إذن، إذا كان X مُتغيِّراً عشوائياً هندسياً، فإنَّه يُمكن إيجاد احتمال أن يأخذ X قيمة بعينها ضمن مجموعة قيمه المُمكنة باستعمال الصيغة الآتية:

أندكر

يُرمز إلى قيم المُتغيِّر العشوائي بالرمز x ، ويُرمز إلى المُتغيِّر العشوائي نفسه بالرمز X .

التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي الهندسي

مفهوم أساسي

إذا كان: $X \sim Geo(p)$ ، فإنَّ: $x \in \{1, 2, 3, \dots\}$ ، ويعطى التوزيع الاحتمالي للمُتغيِّر العشوائي X بالقاعدة الآتية:

$$P(X=x) = p(1-p)^{x-1}$$

حيث:

x : عدد المحاولات وصولاً إلى أوَّل نجاح.

p : احتمال النجاح في كل محاولة.

أندكر

إذا كان الحادثان A, B مستقلين، فإنَّ احتمال حدوثهما معاً هو حاصل ضرب احتمالي وقوعهما؛ أي إنَّ:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$



اتفقت ليلي وزميلاتها على ألا تُشارك أيّ منهن في لعبة حتى ترمي حجر نرد منتظم بشكل مُتكرّر، ويظهر العدد 6. إذا أرادت ليلي المشاركة في اللعبة، وكان X يُمثّل عدد مرّات رميها حجر النرد حتى ظهور العدد 6، فأجد كلاً ممّا يأتي:

1 $P(X = 4)$

المُتغيّر X هو مُتغيّر عشوائي هندسي؛ لأنه يُحقّق الشروط الآتية:

- 1 اشتمال التجربة على محاولات مُتكرّرة (إلقاء حجر نرد منتظم بشكل مُتكرّر حتى يظهر العدد 6). وبما أن نتيجة إلقاء حجر النرد في كل مرّة لا تُؤثّر في نتيجة إلقائه في المرّات الأخرى، فإنّ هذه المحاولات مستقلة.
- 2 فرز النتائج المُمكنة في كل محاولة إلى ناتجين فقط، هما: النجاح (ظهور العدد 6)، أو الفشل (ظهور أيّ عدد آخر).
- 3 ثبات احتمال النجاح في كل محاولة، وهو $\frac{1}{6}$.
- 4 توقّف التجربة عند ظهور العدد 6.

$$P(X = x) = p(1-p)^{x-1}$$

صيغة التوزيع الاحتمالي للمُتغيّر العشوائي الهندسي

$$P(X = 4) = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{6}\right)^3$$

بتعويض $x = 4, p = \frac{1}{6}$

$$= \frac{125}{1296}$$

بالتبسيط

2 $P(X \leq 3)$

$$P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

احتمال الحوادث المتنافية

$$= \left(\frac{1}{6}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right)^0 + \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^1 + \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^2$$

صيغة التوزيع الاحتمالي للمُتغيّر العشوائي الهندسي

$$= \frac{91}{216}$$

بالتبسيط

أفكّر

لماذا لا يأخذ المُتغيّر العشوائي الهندسي القيمة $x = 0$ ؟

أتعلّم

ألاحظ أنّ المُتغيّر العشوائي الهندسي يأخذ قيمًا معدودة؛ لذا، فإنّه يُسمّى مُتغيّرًا عشوائيًا منفصلاً.

أذكر

إذا كان A و B حادثين متنافيين في تجربة عشوائية، فإنّ احتمال وقوع أحدهما على الأقل يساوي مجموع احتمالي وقوعهما.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

3 احتمال أن ترمي ليلي حجر النرد أكثر من 4 مَرَّات لتشارك في اللعبة.

المطلوب هو إيجاد $P(X > 4)$ ، وهذا يعني أن:

$$P(X > 4) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + \dots$$

بما أن إيجاد $P(X > 4)$ يتطلب إيجاد مجموع عدد غير منتهٍ من الاحتمالات، فإنه يلزم البحث عن طريقة أخرى لإيجاد الاحتمال، وذلك باستعمال مُتَمِّمة الحادث:

$$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4)$$

$$= 1 - (P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4))$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6} \right)^3 \right)$$

$$\approx 0.482$$

احتمال المُتَمِّمة

احتمال الحوادث المتنافية

صيغة التوزيع الاحتمالي
للمتغير العشوائي الهندسي

باستعمال الآلة الحاسبة

أتحقق من فهمي

أندكر

احتمال وقوع مُتَمِّمة

الحادث A هو $1 - P(A)$

احتمال وقوع الحادث A .

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$



يُمثل الشكل المجاور قرصًا مُقسَّمًا إلى 4 قطاعات متطابقة. إذا دُلَّ المُتَغَيِّر العشوائي X على عدد مَرَّات تدوير مُؤَشِّر القرص حتى يقف عند اللون الأخضر أول مرَّة، فأجد كلاً ممَّا يأتي:

a) $P(X = 3)$

b) $P(X \leq 4)$

c) احتمال تدوير مُؤَشِّر القرص ثلاث مَرَّات على الأقل حتى يقف عند اللون الأخضر أول مرَّة.

التوقُّع للمُتَغَيِّر العشوائي الهندسي

تعلمتُ سابقًا أن التوقُّع $E(X)$ للمُتَغَيِّر العشوائي X هو الوسط الحسابي لقيمه الناتجة من تكرار التجربة نفسها عددًا كبيرًا من المَرَّات (عند اقتراب العدد من ∞)، وأنه يساوي مجموع حاصل ضرب كل قيمة للمُتَغَيِّر X في احتمال وقوعها.

يُمكن التعبير عن ذلك بالرموز على النحو الآتي:

$$E(X) = \sum x \cdot P(x)$$

رموز رياضية

يُستعمل كل من الرمز

$E(X)$ والرمز μ للدلالة

على توقُّع المُتَغَيِّر

العشوائي X .

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا هندسيًا، فإنه يُمكن إيجاد توقُّعه باستعمال الصيغة الآتية:

التوقُّع للمتغير العشوائي الهندسي

مفهوم أساسي

إذا كان: $X \sim Geo(p)$ ، فإن: $x \in \{1, 2, 3, \dots\}$ ، ويعطى التوقُّع للمتغير العشوائي X بالقاعدة الآتية:

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

حيث p احتمال النجاح في كل محاولة.

أتعلم

تشير القاعدة المجاورة إلى أن التوقُّع للمتغير العشوائي الهندسي يساوي مقلوب الاحتمال الثابت لجميع المحاولات؛ أي أنه إذا كان احتمال ظهور الصورة عند إلقاء قطعة نقد منتظمة هو $\frac{1}{2}$ ، فإنه من المتوقَّع ظهور الصورة أوَّل مرَّة بعد إلقاء قطعة النقد مرَّتين.

مثال 3 : من الحياة

صحافة: يريد مراسل صحفي إجراء مقابلات مع عدد من زوّار مركز تجاري، وسؤالهم عن مشاهدة آخر مباراة لكرة القدم، ثم التوقُّف عن ذلك عند مقابلته أوَّل شخص شاهد المباراة. إذا كان لديه إحصائية تشير إلى أن ما نسبته 5% من سكّان المدينة قد شاهدوا المباراة، فكم زائرًا يتوقَّع أن يسأله المراسل قبل مقابلته شخصًا شاهد المباراة؟

بما أن مقابلة الزوّار في المركز التجاري ستستمر حتى الالتقاء بأوَّل شخص شاهد المباراة، فإنه يُمكن استعمال توقُّع المتغير العشوائي الهندسي $X \sim Geo(0.05)$ لتعرّف عدد من سألهم المراسل عن المباراة:

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{p} \\ &= \frac{1}{0.05} \\ &= 20 \end{aligned}$$

صيغة التوقُّع للمتغير العشوائي الهندسي

بتعويض $p = 0.05$

بالتبسيط

إذن، يتوقَّع أن يسأل المراسل 19 زائرًا قبل التقائه بأوَّل شخص شاهد المباراة.

أفكر

إذا افترضت أن المراسل الصحفي قد سأل 35 زائرًا، وأن أيًا منهم لم يشاهد المباراة، فهل يعني ذلك أن نسبة 5% غير صحيحة أو أنها فقط مصادفة؟ أبرر إجابتك.

تسويق: أعلنت إحدى شركات تصنيع حبوب القطور للأطفال عن وجود لعبة مجانية في بعض علب الحبوب الجديدة التي تُنتجها الشركة. إذا احتوت علبة من كل 4 علب على لعبة، ودلَّ المُتغير العشوائي X على عدد العلب التي سيفتحها الطفل حتى يجد لعبة، فكم علبة يُتوقع أن يفتحها الطفل حتى يجد أول لعبة؟

التجربة الاحتمالية ذات الحدين

يُطلق على تكرار تجربة بيرنولي عددًا مُحددًا من المرات المستقلة اسم التجربة الاحتمالية ذات الحدين (binomial probability experiment).

التجربة الاحتمالية ذات الحدين

مفهوم أساسي

إذا توافرت الشروط الأربعة الآتية في تجربة عشوائية ما، فإنها تُعدُّ تجربة احتمالية ذات حدين:

- 1 اشتمال التجربة على محاولات مستقلة ومُتكررة.
- 2 فرز النتائج المُمكنة في كل محاولة إلى نجاح أو فشل.
- 3 ثبات احتمال النجاح في كل محاولة.
- 4 وجود عدد مُحدد من المحاولات في التجربة.

أنعلم

ألاحظ في التجربة الاحتمالية ذات الحدين وجود عدد مُحدد من المحاولات بشكل مُسبق، بخلاف التجربة الاحتمالية الهندسية.

مثال 4

أبين إذا كانت التجربة العشوائية تُمثل تجربة احتمالية ذات حدين في كلِّ ممَّا يأتي:

1 إلقاء 5 قطع نقدية منتظمة ومتمايزة، ثم كتابة عدد الصور التي ظهرت.

أبحث في تحقُّق الشروط الأربعة الآتية للتجربة الاحتمالية ذات الحدين:

- 1 اشتمال التجربة على محاولات مُتكررة (إلقاء 5 قطع نقدية). وبما أن نتيجة إلقاء أيِّ من القطع النقدية لا تُؤثر في نتيجة إلقاء القطع النقدية الأخرى، فإن هذه المحاولات مستقلة.

2 فرز النتائج المُمكنة في كل محاولة إلى ناتجين فقط، هما: النجاح (ظهور الصورة)، أو الفشل (ظهور الكتابة).

3 ثبات احتمال النجاح في كل محاولة، وهو $\frac{1}{2}$.

4 وجود عدد مُحدّد من المحاولات في التجربة، هو 5. إذن، تُمثّل هذه التجربة العشوائية تجربة احتمالية ذات حدّين.

2 إلقاء قطعتي نقد منتزمتين ومتميزتين حتى ظهور صورتين.

لا تحوي هذه التجربة عددًا مُحدّدًا من المحاولات؛ لأنها ستستمر حتى ظهور صورتين.

إذن، لا تُمثّل هذه التجربة العشوائية تجربة احتمالية ذات حدّين.

أتحقق من فهمي

أبيّن إذا كانت التجربة العشوائية تُمثّل تجربة احتمالية ذات حدّين في كلٍّ ممّا يأتي:

(a) إلقاء حجر نرد منتظم 20 مرّة، ثم كتابة عدد المرّات التي ظهر فيها العدد 1 على الوجه العلوي لحجر النرد.

(b) اختيار 7 طلبة عشوائياً من صف روضة فيه 15 ولداً و 10 بنات، وذلك لتشكيل فريق لإحدى الألعاب، ثم كتابة عدد البنات اللاتي وقع عليهن الاختيار.

المتغير العشوائي ذو الحدّين، وتوزيعه الاحتمالي

في التجربة الاحتمالية ذات الحدّين، إذا دلّ المتغير العشوائي X على عدد مرّات النجاح في جميع محاولات التجربة التي عددها n ، وكان احتمال النجاح في كل محاولة هو p ، فإن X يُسمّى المتغير العشوائي ذا الحدّين، ويمكن التعبير عنه بالرموز على النحو الآتي:

$$X \sim B(n, p)$$

حيث n و p معاملا المتغير العشوائي.

ومن ثمّ، فإنّ المتغير X يأخذ القيم الآتية: $0, 1, 2, \dots, n$ ؛ أي إن:

$$x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

أفكر

هل تُعدّ التجربة في

الفرع 2 من المثال

هندسية؟ أبرّر إجابتي.

أتعلّم

في المتغير العشوائي ذي

الحدّين، من المُمكن أن

تكون $x = 0$ وهذا يدلّ

على عدم إحراز أيّ نجاح

عند تكرار المحاولة n

مرّة.

إذا كان X مُتغيِّراً عشوائياً ذا حدِّين، فإنه يُمكن إيجاد احتمال أن يأخذ X قيمة بعينها ضمن مجموعة قيمه المُمكنة باستعمال الصيغة الآتية:

التوزيع الاحتمالي للمتغيِّر العشوائي ذي الحدِّين

مفهوم أساسي

إذا كان: $X \sim B(n, p)$ ، فإن: $x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ، ويعطى التوزيع الاحتمالي للمتغيِّر العشوائي X بالقاعدة الآتية:

$$P(X = r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$$

حيث:

n : عدد المحاولات في التجربة.

p : احتمال النجاح في كل محاولة.

r : عدد المحاولات الناجحة من بين n من المحاولات.

أتعلَّم

تُستعمل التوافق $\binom{n}{r}$ لإيجاد عدد المرات التي يُمكن بها اختيار r شيئاً من بين n شيئاً. وقد استُعملت التوافق في معادلة احتمال توزيع ذي الحدِّين لإيجاد عدد الطرائق المُمكنة لاختيار الأماكن التي حدث فيها النجاح.

مثال 5

1 في تجربة إلقاء قطعة نقد منتظمة 15 مرّة، أجد احتمال ظهور الصورة 5 مرّات.

يُمكن النظر إلى عملية إلقاء قطعة النقد 15 مرّة بوصفها تجربة احتمالية ذات حدِّين؛ لأنها تحوي محاولات مستقلة ومُتكرّرة، هي إلقاء قطعة النقد، ولأن عدد هذه المحاولات مُحدّد، وهو 15، ولأنه يُمكن فرز النتائج المُمكنة لكل محاولة إلى ناتجين فقط، هما: النجاح (ظهور الصورة)، أو الفشل (ظهور الكتابة). وبما أن احتمال ظهور الصورة في كل محاولة هو $\frac{1}{2}$ ، فإن احتمال النجاح في كل محاولة ثابت، وهو $\frac{1}{2}$.

إذا دلّ المتغيِّر العشوائي X على عدد مرّات ظهور الصورة، فإن:

$$X \sim B(15, \frac{1}{2})$$

ومن كمّ، فإن احتمال أن تظهر الصورة 5 مرّات هو $P(X = 5)$:

$$P(X = r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} \quad \text{صيغة التوزيع الاحتمالي للمتغيِّر العشوائي ذي الحدِّين}$$

$$P(X = 5) = \binom{15}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{15-5} \quad \text{بتعويض } n = 15, r = 5, p = \frac{1}{2}$$

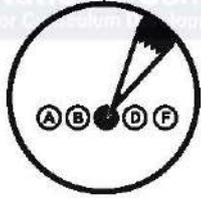
$$\approx 0.0916$$

باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، احتمال ظهور الصورة 5 مرّات عند إلقاء قطعة نقد منتظمة 15 مرّة هو 0.0916 تقريباً.

أتعلَّم

ألاحظ أن المتغيِّر العشوائي ذا الحدِّين يأخذ قيمةً معلوّدة؛ لذا، فإنه يُستوى مُتغيِّراً عشوائياً منفصلاً.



2 يتألف اختبار فيزياء من 10 أسئلة، جميعها من نوع الاختيار من مُتعدّد، ولكلّ منها 5 بدائل، واحدة منها فقط صحيحة. إذا أُجيب عن هذه الأسئلة جميعها بصورة عشوائية، فما احتمال أن تكون إجابات 7 أسئلة فقط منها صحيحة؟

يُمكن النظر إلى عملية اختيار الإجابة عن الأسئلة العشرة بوصفها تجربة احتمالية ذات حدّين؛ لأنّ عملية اختيار الإجابة عن كل سؤال تُعدّ محاولة مُتكرّرة ومستقلة، ولأنّ عدد هذه المحاولات مُحدّد، وهو 10، ولأنّه يُمكن فرز النتائج المُمكنة لكل محاولة إلى ناتجين فقط، هما: النجاح (إجابة صحيحة)، أو الفشل (إجابة غير صحيحة). وبما أن لكل سؤال 5 بدائل، فإنّ احتمال النجاح في كل محاولة ثابت، وهو $\frac{1}{5}$.

إذا دلّ المُتغيّر العشوائي X على عدد الأسئلة التي أُجيب عنها إجابة صحيحة من الأسئلة العشرة، فإنّ:

$$X \sim B(10, \frac{1}{5})$$

ومن ثمّ، فإنّ احتمال أن تكون إجابات 7 أسئلة فقط صحيحة هو $P(X=7)$:

$$P(X=r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} \quad \text{صيغة التوزيع الاحتمالي للمُتغيّر العشوائي ذي الحدّين}$$

$$P(X=7) = \binom{10}{7} \left(\frac{1}{5}\right)^7 \left(\frac{4}{5}\right)^{10-7} \quad \text{بتعويض } n=10, r=7, p=\frac{1}{5}$$

$$\approx 0.000786$$

باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، احتمال أن تكون إجابات 7 أسئلة فقط صحيحة هو 0.000786 تقريباً.

3 إذا كان احتمال فوز أمل في لعبة إلكترونية هو 0.75، ولعبت بهذه اللعبة 10 مرّات، فما

احتمال أن تفوز فيها 8 مرّات على الأكثر؟

يُمكن النظر إلى هذه اللعبة بوصفها تجربة احتمالية ذات حدّين؛ لأنّ كل مرّة تلعب فيها أمل تُعدّ محاولة مستقلة، ولأنّ عدد هذه المحاولات مُحدّد، وهو 10، ولأنّه يُمكن فرز النتائج المُمكنة لكل محاولة إلى ناتجين فقط، هما: النجاح (الفوز)، أو الفشل (الخسارة). وبما أن احتمال فوز أمل في كل محاولة هو 0.75، فإنّ احتمال النجاح في كل محاولة ثابت، وهو 0.75.

إذا دلّ المُتغيّر العشوائي X على عدد المرّات التي فازت فيها أمل من المحاولات العشر، فإنّ:

$$X \sim B(10, 0.75)$$

أتعلم

القيمة: 0.000786 تُعبّر

عن احتمال إجابة 7 أسئلة

بصورة صحيحة عند

الإجابة عشوائياً، وهي

قيمة صغيرة جداً؛ أي إنّ

الحظ لا يُحالف الطالب

الذي يجيب عشوائياً.

ومن ثمّ، فإنّ احتمال أن تفوز أمل 8 مرّات على الأكثر هو $P(X \leq 8)$:

$$P(X \leq 8) = 1 - P(X > 8)$$

احتمال المُتممّة

$$= 1 - (P(X = 9) + P(X = 10))$$

صيغة الجُمع للحوادث المتنافية

$$= 1 - \left(\binom{10}{9} (0.75)^9 (0.25)^1 + \binom{10}{10} (0.75)^{10} (0.25)^0 \right)$$

صيغة التوزيع الاحتمالي

للمتغيّر ذي الحدين

$$\approx 0.76$$

باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، احتمال فوز أمل في اللعبة 8 مرّات على الأكثر هو 0.76 تقريباً.

أدقّق من فهمي

(a) ألقت عائشة حجر نرد منتظم 10 مرّات. ما احتمال ظهور الرقم 1 على الوجه العلوي 3 مرّات فقط.

(b) تحتوي آلة حاسبة على 16 زرّاً للأعداد من 0 إلى 9، إضافةً إلى العمليات الأساسية، والمساواة، والفاصلة العشرية. إذا أغمض أحمد عينيه، ثم ضغط على أزرار هذه الآلة 20 مرّة بصورة عشوائية، فما احتمال أن يضغط على أزرار العمليات الحسابية الأساسية 3 مرّات فقط؟

(c) إذا كان احتمال نجاح عملية جراحية هو 0.8، وأجرى طبيب هذه العملية 10 مرّات خلال عام واحد، فما احتمال نجاح 7 عمليات منها على الأقل؟



التوقُّع والتباين للمتغيّر العشوائي ذي الحدين

إذا كان X متغيّراً عشوائياً ذا حدين، فإنّه يُمكن إيجاد توقُّعه باستعمال الصيغة الآتية:

التوقُّع للمتغيّر العشوائي ذي الحدين

مفهوم أساسي

إذا كان: $X \sim B(n, p)$ ، فإنّ: $x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ، ويعطى التوقُّع للمتغيّر العشوائي X

$$E(X) = np$$

بالقاعدة الآتية:

حيث:

n : عدد المحاولات في التجربة.

p : احتمال النجاح في كل محاولة.

مثال 6: من الحياة

طب: أُجريت دراسة على الآثار الجانبية الظاهرة على الأطفال بعد تناولهم دواءً جديداً. وقد خلُصت الدراسة إلى أن 10% من الأطفال الذين تناولوا هذا الدواء تظهر عليهم أعراض جانبية. إذا أعطى طبيب هذا الدواء لـ 50 طفلاً، فكم طفلاً يُتوقع أن تظهر عليه هذه الأعراض؟ إذا كان X يُمثل عدد الأطفال الذين تظهر عليهم الأعراض الجانبية من بين الخمسين طفلاً الذين تناولوا الدواء، فإن: $X \sim B(50, 0.1)$. ومن ثم، فإنه يُمكن إيجاد العدد المُتوقع من الأطفال الذين ستظهر عليهم أعراض الدواء الجانبية على النحو الآتي:

$$E(X) = np$$

$$= 50 \times 0.1$$

$$= 5$$

صيغة التوقع للمتغير العشوائي ذي الحدين

$$n = 50, p = 0.1$$

بتعويض
بالتبسيط

إذن، يُتوقع أن تظهر الأعراض الجانبية للدواء الجديد على 5 أطفال.

أتحقق من فهمي

سيّارات: بعد إجراء مسح للسيّارات التي صنعتها شركة ما، تبين أن 5% منها عطّلاً ميكانيكياً. إذا استورد وكيل للشركة في إحدى الدول 1000 سيّارة، فأجد عدد السيّارات التي يُتوقع أن يظهر فيها هذا العطل.

تعلّمت سابقاً أن تباين المتغير العشوائي X هو مقياس لتشكّل قيم X عن وسطها الحسابي $E(X)$ ، وأنه يُرمز إليه بالرمز $\text{Var}(X)$ ، أو الرمز σ^2 .

ومن ثم، إذا كان X متغيراً عشوائياً ذا حدين، فإنه يُمكن إيجاد تباينه باستعمال الصيغة الآتية:

التباين للمتغير العشوائي ذي الحدين

مفهوم أساسي

إذا كان: $X \sim B(n, p)$ ، وكانت: $x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ، فإن التباين للمتغير العشوائي X

يعطى بالقاعدة الآتية:

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = np(1-p)$$

حيث:

n : عدد المحاولات في التجربة.

p : احتمال النجاح في كل محاولة.

أذكر

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \sum (x^2 \cdot P(x)) - (E(X))^2$$

أتعلّم

ألاحظ أنه إذا كان

$X \sim B(n, p)$ ، فإن:

$$\text{Var}(X) = (1-p)E(X)$$

ألقي خالد قطعة نقد غير منتظمة 200 مرّة، فكان عدد مرّات ظهور الكتابة هو 140 مرّة. إذا ألقي خالد قطعة النقد 20 مرّة أخرى، فأجد كلاً ممّا يأتي:

1 العدد المتوقّع لمرّات ظهور الكتابة عند إلقاء خالد قطعة النقد 20 مرّة.

الخطوة 1: أجد احتمال ظهور الكتابة.

بما أنّ عدد مرّات ظهور الكتابة هو 140 مرّة من 200 مرّة، فإنّ احتمال ظهور الكتابة عند إلقاء قطعة النقد هو:

$$p = \frac{140}{200} = 0.7$$

الخطوة 2: أجد التوقّع.

إذا دلّ X على عدد مرّات ظهور الكتابة، فهذا يعني أنّه متغيّر عشوائي ذو حدّين؛ لأنّه ناتج من محاولات مستقلة ومُكرّرة عددها 20، ولأنّ احتمال النجاح في كلّ منها ثابت، وهو 0.7:

$$E(X) = np$$

صيغة التوقّع للمتغيّر العشوائي ذي الحدّين

$$= 20 \times 0.7$$

$$\text{بتعويض } n = 20, p = 0.7$$

$$= 14$$

بالتبسيط

إذن، يُتوقّع ظهور الكتابة 14 مرّة تقريباً عند إلقاء خالد قطعة النقد 20 مرّة.

2 تباين عدد مرّات ظهور الكتابة عند إلقاء خالد قطعة النقد 20 مرّة.

$$\text{Var}(X) = np(1-p)$$

صيغة التباين للمتغيّر العشوائي ذي الحدّين

$$= 20(0.7)(0.3)$$

$$\text{بتعويض } n = 20, p = 0.7$$

$$= 4.2$$

بالتبسيط

إذن، تباين عدد مرّات ظهور الكتابة عند إلقاء خالد قطعة النقد 20 مرّة هو 4.2

أنذُر

يُسمّى الاحتمال في هذا المثال الاحتمال التجريبي؛ لأنّه احتمال يعتمد على عدد مرّات تكرار التجربة.

أنعلم

لا يشترط الحصول على قيمة صحيحة للتوقّع؛ لأنّ التوقّع ووسط حسابي، ولأنّ الوسط الحسابي قد يكون عدداً غير صحيح حتى لو كانت القيم الأصلية صحيحة.

أنتحق من فهمي

فحص مُراقب الجودة في أحد المصانع 500 عينة عشوائياً من الخلطات الخرسانية، فوجد أن 10 منها لا تُطابق المواصفات. إذا فحص مُراقب الجودة 200 عينة أخرى، فأجد كلاً مما يأتي:

- (a) العدد المُتوقَّع من العينات التي لا تُطابق المواصفات من العينات العشرين التي فحصها مُراقب الجودة.
- (b) تبين عدد العينات التي لا تُطابق المواصفات من العينات العشرين التي فحصها مُراقب الجودة.

معلومة

توجد اختبارات عدّة للخرسانة المُتصلِّبة، منها: اختبار مقاومة الضغط، واختبار مقاومة الشد، واختبار النفاذية.

أندرب وأحل المسائل

إذا كان: $X \sim Geo(0.2)$ ، فأجد كلاً مما يأتي، مُقرَّباً إجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية:

- 1 $P(X = 2)$ 2 $P(X = 10)$ 3 $P(X \geq 3)$ 4 $P(2 < X \leq 5)$
- 5 $P(X < 2)$ 6 $P(X \leq 4)$ 7 $P(1 \leq X < 2)$ 8 $P(3 \leq X \leq 6)$

9 ألقى حجر نرد منتظم ذو ثمانية أوجه مُرقَّمة بالأرقام من 1 إلى 8 بشكل مُتكرَّر حتى ظهور العدد 7. أجد احتمال إلقاء حجر النرد 6 مرّات.



10 أطلق عماد رصاصة نحو هدف بصورة مُتكرِّرة، ثم توقَّف بعد إصابته الهدف. إذا كان احتمال إصابته الهدف في كل مرّة هو 0.7، فما احتمال أن يصيبه أوّل مرّة في المحاولة العاشرة؟



11 أحياء: في دراسة لعالمية أحياء على خنافس في إحدى الحدائق، توصّلت العالمة إلى أنّ واحدة من كل 12 خنفساء لديها جسم برتقالي. إذا بدأت العالمة جمع الخنافس عشوائياً على أنّ تتوقَّف عند إيجاد أوّل خنفساء جسمها برتقالي، فأجد احتمال أن تتوقَّف عن جمع الخنافس عند جمعها 20 خنفساء.

12 إصلاح سيّارات: أصلح عبد الله مُحرِّك إحدى السيّارات، لكنّه لم يستطع تجربة تشغيله إلا مرّة واحدة كل 20 دقيقة نتيجة خلل كهربائي. إذا كان احتمال أن يعمل المُحرِّك عند محاولة تشغيله هو 0.4، فما احتمال عمل المُحرِّك أوّل مرّة بعد مُضي أكثر من ساعة على محاولة إصلاحه؟



إذا كان احتمال إصابة شخص ما بأعراض جانبية بعد تناوله دواءً مُعيّنًا هو 0.25، وقرّر طبيب إعطاء مرضاه هذا الدواء إلى حين ظهور أوّل إصابة بأعراضه الجانبية، فأجد كلاً ممّا يأتي:

13 احتمال أن يتوقّف الطبيب عن إعطاء المرضى الدواء عند تناول 10 مرضى هذا الدواء.

14 احتمال أن يزيد عدد المرضى الذين سيتناولون الدواء على 3 مرضى.

15 العدد المُتوقّع للمرضى الذين سيتناولون الدواء إلى حين ظهور أوّل إصابة بأعراض الدواء الجانبية.

إذا كان: $X \sim B(10, 0.3)$ ، فأجد كلاً ممّا يأتي، مُقرّبًا إجابتي إلى أقرب 3 منازل عشرية:

16 $P(X = 2)$

17 $P(X \geq 9)$

18 $P(X \leq 8)$

19 $P(1 < X \leq 4)$

20 $P(X > 1)$

21 $P(X < 4)$

22 $P(0 \leq X < 3)$

23 $P(3 \leq X \leq 6)$

أجد التوقّع لكلّ من المُتغيّرين العشوائيين الآتيين:

24 $X \sim Geo(0.3)$

25 $X \sim Geo\left(\frac{3}{7}\right)$

أجد التوقّع والتباين لكلّ من المُتغيّرين العشوائيين الآتيين:

26 $X \sim B(5, 0.1)$

27 $X \sim B\left(20, \frac{3}{8}\right)$

28 في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم 9 مرّات، أجد احتمال ظهور عدد زوجي 5 مرّات.



طيران: يواجه الطيّارون صعوبة في الرؤيا باحتمال 0.25 عند الهبوط بالطائرات في أحد المطارات خلال فصل الشتاء بسبب سوء الأحوال الجوية. إذا هبط طيّار 20 مرّة في هذا المطار شتاءً، فأجد كلاً ممّا يأتي:

29 احتمال أن يواجه الطيّار صعوبة في الرؤيا خلال الهبوط في ثلاث مرّات فقط.

30 احتمال أن يواجه الطيّار صعوبة في الرؤيا خلال الهبوط في ثلاث مرّات على الأقل.

31 احتمال أن يواجه الطيّار صعوبة في الرؤيا خلال الهبوط في المرّات جميعها.

32 العدد المُتوقّع من المرّات التي سيواجه فيها الطيّار صعوبة في الرؤيا خلال عملية الهبوط.

33 إذا كان X مُغيِّراً عشوائياً ذا حدِّين، وكان: $E(X) = 1.4$, $\text{Var}(X) = 1.12$ ، فأجد $P(X \geq 6)$.

34 إذا كان: $X \sim \text{Geo}(p)$ ، وكان: $E(X) = \frac{4}{3}$ ، فأجد قيمة p .

35 إذا كان: $X \sim B(21, p)$ ، وكان: $P(X = 10) = P(X = 9)$ ، فأجد قيمة p .

في دراسة لمندوب مبيعات، تبين أن احتمال شراء شخص مُنتجاً ما بعد التواصل معه هو 0.1. إذا تواصل مندوب المبيعات مع 10 أشخاص، وكان ثمن المُنتج JD 10، فأجد كلاً ممَّا يأتي:

36 احتمال أن يشتري جميع الأشخاص المُنتج.

37 احتمال أن يكون عائد المبيعات أكثر من JD 80.

مهارات التفكير العليا

38 أكتشف الخطأ: أرادت لانا حلَّ السؤال الآتي:

”عند إلقاء قطعة نقد غير منتظمة، كان احتمال ظهور الصورة هو $\frac{5}{11}$. إذا أُلقيت قطعة النقد بصورة مُتكرِّرة حتى تظهر الصورة أوَّل مرَّة، فما احتمال ظهور الصورة أوَّل مرَّة عند إلقاء قطعة النقد في المرَّة الثالثة؟“. وكان حلُّها على النحو الآتي:

$$P(X = 3) = \frac{5}{11} \left(1 - \frac{5}{11}\right)^2 = \frac{1080}{14641}$$

أكتشف الخطأ في حلِّ لانا، ثمَّ أصحَّحه، مُبرِّراً إجابتي.

39 تحدُّ: تُرسل إحدى الشركات استبانة إلكترونية إلى زبائنها بعد بيعهم مُنتجاً ما؛ لتعرِّف التغذية الراجعة حيال المُنتج.

ولضمان ذلك، فإنَّ الشركة تُكرِّر إرسال كل استبانة إلى حين ردِّ الزبون. إذا كان احتمال ردِّ الزبون على الاستبانة في المرَّة الأولى أكبر من 0.5، واحتمال ردِّه على الاستبانة في المرَّة الثانية هو 0.21، وبافتراض أنَّ هذه المحاولات مستقلة، فأجد توقُّع عدد الاستبانات التي سترسلها الشركة إلى حين ردِّ الزبون، علماً بأنَّ احتمال ردِّ الزبون على أيِّ استبانة لا يتأثَّر بعدد مرَّات إرسالها.

تبرير: إذا كان عدد الطلبة في أحد الصفوف 25 طالباً، فأجد كلاً ممَّا يأتي:

40 احتمال أن يكون طالب واحد فقط من مواليد شهر آذار.

41 احتمال أن يكون 3 طلبة فقط من مواليد شهر آذار.

42 احتمال أن يكون اثنان من الطلبة فقط من مواليد فصل الشتاء.

43 تحدُّ: إذا كان: $X \sim B(30, 0.1)$ ، فأجد $P(\mu \leq X < \mu + \sigma)$.

التوزيع الطبيعي

Normal Distribution

- تعرف منحني التوزيع الطبيعي، وخصائصه.
- إيجاد احتمالات المُتغيّر العشوائي الطبيعي.

المنحني الطبيعي، القاعدة التجريبية، المُتغيّر العشوائي المتصل، المُتغيّر العشوائي المنفصل، التوزيع الطبيعي، التوزيع الطبيعي المعياري.

فكرة الدرس

المصطلحات

مسألة اليوم

إذا كان الزمن الذي تستغرقه الكهراء في بطارية هاتف محمول قبل أن تنفذ تمامًا يتبع توزيعًا طبيعيًا، وسطه الحسابي 36 ساعة، وانحرافه المعياري 5 ساعة، فما احتمال أن تعمل البطارية مدّة 27 ساعة على الأقل؟



المنحنى الطبيعي

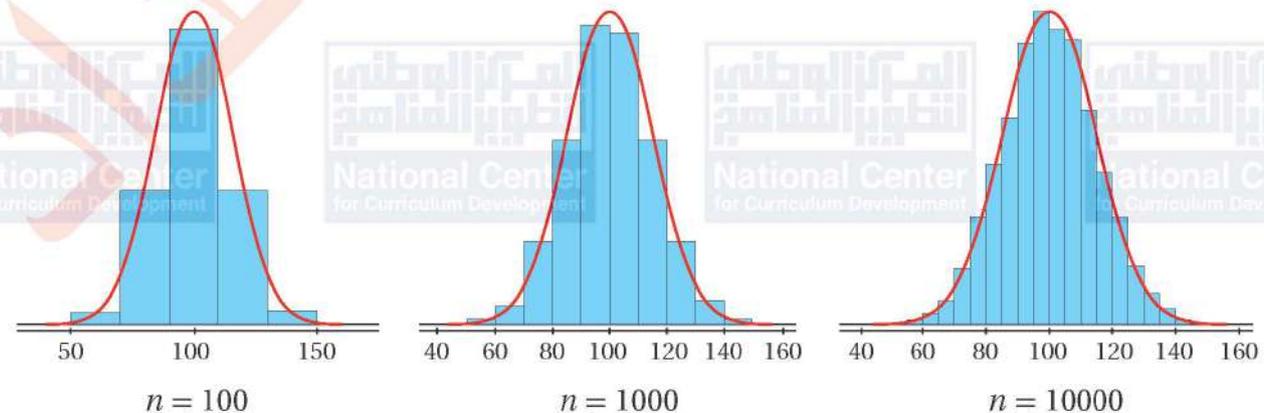
أذكر

تعلّمتُ سابقًا أن البيانات العددية هي بيانات يُمكن رصدها في صورة أرقام، ويُمكن أيضًا قياسها، وإجراء العمليات الحسابية عليها، وترتيبها تصاعديًا وتنازليًا.

تُصنّف البيانات العددية إلى نوعين، هما: البيانات المنفصلة، والبيانات المتصلة. ويُمكن استعمال المُخطّطات التكرارية لتمثيل البيانات العددية المتصلة بيانيًا.

تبيّن المُخطّطات التكرارية الآتية كتل مجموعة من الأشخاص الذين اختيروا عشوائيًا من مدينة ما:

البيانات العددية المنفصلة هي بيانات تأخذ قيمًا قابلة للعدّ، مثل: عدد الإخوة، وعدد الكتب. أما البيانات العددية المتصلة فهي بيانات قيمها المُمكنة غير قابلة للعدّ، لكنّها قابلة للقياس، مثل: الطول، والكتلة.



ألاحظ أن زيادة حجم العينة n ، وتقليص أطوال الفئات، يجعلان المخطط التكراري أكثر تناسقًا وقرابةً من المنحنى المرسوم باللون الأحمر، الذي يُسمى **المنحنى الطبيعي** (normal curve). يُستعمل المنحنى الطبيعي لنمذجة البيانات العددية المتصلة التي تُختار عشوائيًا في كثير من المواقف الحياتية.

بوجه عام، فإن للمنحنى الطبيعي خصائص تُميّزه عن غيره من المنحنيات الأخرى؛ ما يُفسّر سبب استعماله كثيرًا في التطبيقات الحياتية والعلمية المختلفة.

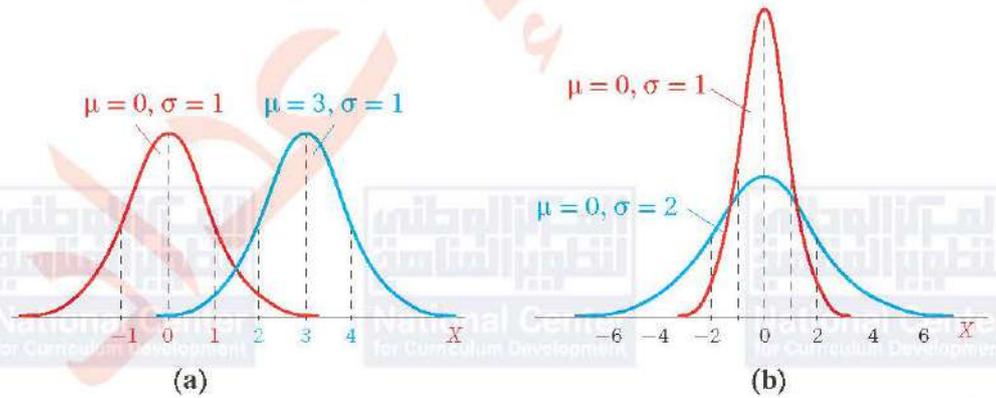
خصائص المنحنى الطبيعي

مفهوم أساسي

يمتاز المنحنى الطبيعي بالخصائص الآتية:

- منحنى متصل له شكل الجرس.
- تطابق الوسط الحسابي والوسيط والمنوال، وتوسط كل منها البيانات.
- تماثل البيانات حول الوسط الحسابي.
- اقتراب المنحنى عند طرفيه من المحور x من دون أن يمسه.
- المساحة الكلية أسفل المنحنى هي 1.

يعتمد شكل المنحنى الطبيعي وموقعه على الوسط الحسابي μ ، والانحراف المعياري σ . فمثلًا، في الشكل (a) التالي، يُمكن ملاحظة أن التغيّر في الوسط الحسابي يؤدي إلى انسحاب أفقي للمنحنى الطبيعي. أمّا في الشكل (b) فيلاحظ أن زيادة الانحراف المعياري تجعل المنحنى الطبيعي أكثر انتشارًا وتوسّعًا.



تُمثّل المساحة التي تقع بين قيمتين من البيانات أسفل المنحنى الطبيعي النسبة المئوية للبيانات الواقعة بين هاتين القيمتين. يُمكن استعمال القاعدة التجريبية (empirical rule) الآتية لتحديد المساحة التي تقع بين بعض القيم من البيانات أسفل المنحنى الطبيعي:

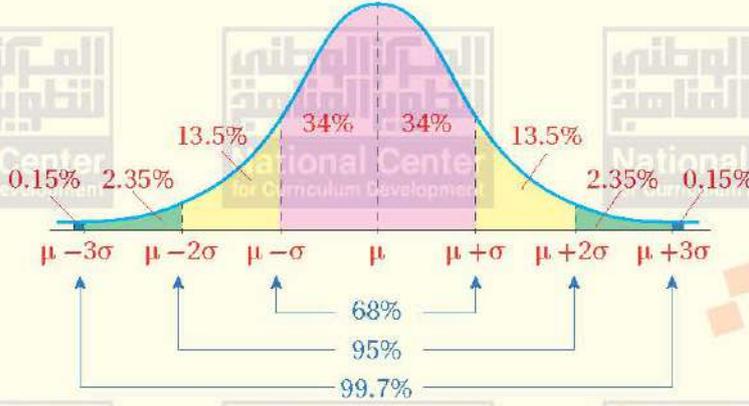
أتعلم

يجب أن يكون عدد البيانات كبيرًا جدًا لكي يتخذ تمثيلها البياني شكل المنحنى الطبيعي.

أتعلم

ألاحظ من الشكل (a) أن زيادة الوسط الحسابي من 0 إلى 3 تسببت في انسحاب المنحنى إلى اليمين 3 وحدات، علمًا بأن σ متساوية، في حين أن زيادة الانحراف المعياري من 1 إلى 2 في الشكل (b) أدت إلى توسّع المنحنى أفقيًا، من دون أن يؤثر ذلك في مركز البيانات.

إذا اتخذت مجموعة من البيانات شكل المنحنى الطبيعي، وكان وسطها الحسابي μ ، وانحرافها المعياري σ ، فإن:



معلومة

المنحنى الطبيعي هو منحنى الاقتران:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

حيث:

μ : الوسط الحسابي.

σ : الانحراف المعياري.

- 68% من المشاهدات تقريباً تقع بين $\mu - \sigma$ و $\mu + \sigma$ ؛ أي إن 68% من البيانات لا يزيد البُعد بينها وبين الوسط الحسابي على قيمة الانحراف المعياري.
- 95% من المشاهدات تقريباً تقع بين $\mu - 2\sigma$ و $\mu + 2\sigma$ ؛ أي إن 95% من البيانات لا يزيد البُعد بينها وبين الوسط الحسابي على مثلي قيمة الانحراف المعياري.
- 99.7% من المشاهدات تقريباً تقع بين $\mu - 3\sigma$ و $\mu + 3\sigma$ ؛ أي إن 99.7% من

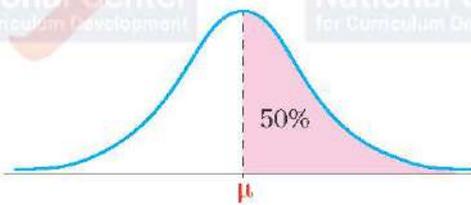
البيانات لا يزيد البُعد بينها وبين الوسط الحسابي على ثلاثة أمثال قيمة الانحراف المعياري.

مثال 1

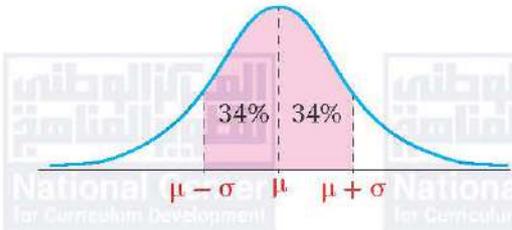
إذا اتخذت علامات بعض الطلبة شكل المنحنى الطبيعي في أحد الاختبارات، فأجد كلاً ممّا يأتي:

1 النسبة المئوية للعلامات التي تقع فوق الوسط الحسابي.

بما أن المنحنى الطبيعي مُتماثل حول الوسط الحسابي، فإن 50% من العلامات تقع فوق الوسط الحسابي كما في الشكل المجاور.

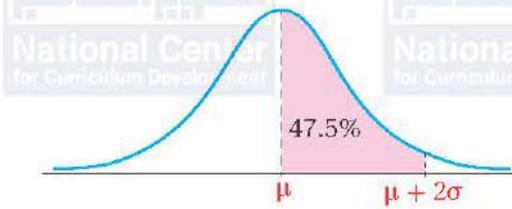


2 النسبة المئوية للعلامات التي لا يزيد البعد بينها وبين الوسط الحسابي على انحراف معياري واحد.



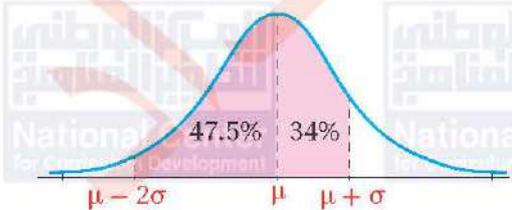
68% هي النسبة المئوية للعلامات التي لا يزيد البعد بينها وبين الوسط الحسابي على انحراف معياري واحد كما في الشكل المجاور.

3 النسبة المئوية للعلامات التي تزيد على الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.



بما أن 95% من المشاهدات في المنحنى الطبيعي تقع بين $\mu - 2\sigma$ و $\mu + 2\sigma$ ، وأن المنحنى الطبيعي مُتماثل حول الوسط الحسابي، فإن 47.5% من العلامات تزيد على الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين كما في الشكل المجاور.

4 النسبة المئوية للعلامات التي تزيد على الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحراف معياري واحد، أو تقل عنه بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.



بما أن 47.5% من العلامات تقل عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين، وأن 34% من العلامات تزيد على الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحراف معياري واحد، فإن 81.5% من العلامات تقع بين $\mu - 2\sigma$ و $\mu + \sigma$ كما في الشكل المجاور.

إذا اتخذ التمثيل البياني لأطوال مجموعة من طلبة الصف السابع شكل المنحنى الطبيعي، فأجد كلاً مما يأتي:

- (a) النسبة المئوية للطلبة الذين تقع أطوالهم فوق الوسط الحسابي.
- (b) النسبة المئوية للطلبة الذين لا يزيد البعد بين أطوالهم والوسط الحسابي على انحراف معياري واحد.
- (c) النسبة المئوية للطلبة الذين تقل أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.
- (d) النسبة المئوية للطلبة الذين تقل أطوالهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على ثلاثة انحرافات معيارية، أو تزيد عليه بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين.

المتغير العشوائي الطبيعي، والتوزيع الطبيعي

تعلمت سابقاً أن المتغير العشوائي هو متغير تعتمد قيمه على نتائج تجربة عشوائية.

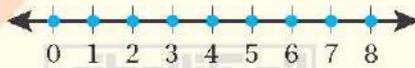
يوجد نوعان من المتغيرات العشوائية، هما: المتغير العشوائي المنفصل (discrete random variable)، والمتغير العشوائي المتصل (continuous random variable).

المتغيرات العشوائية المتصلة والمنفصلة

مفهوم أساسي

• المتغير العشوائي المنفصل هو متغير عشوائي يأخذ قيماً معدودة.

مثال: عدد السيارات التي ستمر أمام إحدى المدارس خلال الساعة القادمة.



• المتغير العشوائي المتصل هو متغير عشوائي يأخذ قيماً متصلة ضمن فترة معينة من الأعداد الحقيقية.

مثال: سرعة أول سيارة ستمر أمام إحدى المدارس خلال الساعة القادمة.



أتعلم

يعد كل من المتغير العشوائي الهندسي والمتغير العشوائي ذي الحدين متغيراً عشوائياً منفصلاً؛ لأن كلاً منهما يأخذ قيماً معدودة، مثل: عدد مرات إصابة الهدف، وعدد السيارات.

إذا ارتبط المتغير العشوائي المتصل X بتجربة عشوائية اتخذ تمثيل بياناتها البياني شكل

المنحنى الطبيعي، فإنه يُسمّى مُتغيّرًا عشوائيًا طبيعيًا، ويُسمّى توزيعه الاحتمالي **التوزيع الطبيعي** (normal distribution)، ويمكن التعبير عنه بالرموز على النحو الآتي:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

حيث:

μ : الوسط الحسابي.

σ : الانحراف المعياري.

تعلمت في المثال السابق أن المساحة الواقعة بين قيمتين من البيانات أسفل المنحنى الطبيعي تُمثّل النسبة المئوية للبيانات الواقعة بين هاتين القيمتين. وبما أن المساحة أسفل المنحنى الطبيعي هي 1، فإنه يمكن إيجاد احتمال بعض قيم المتغير العشوائي الطبيعي باستعمال القاعدة التجريبية، بافتراض أن المساحة أسفل المنحنى كاملة هي احتمال الحادث الأكيد.

أتعلم

يُرمز إلى التوزيع الطبيعي بالحرف N ؛ وهو الحرف الأوّل من الكلمة الإنجليزية (Normal) التي تعني الطبيعي.

أتذكر

لأيّ حادث A في الفضاء العيني لتجربة عشوائية، فإن: $0 \leq P(A) \leq 1$.

مثال 2: من الحياة

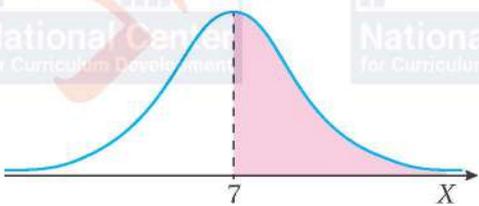
صناعة: إذا دلّ المتغير العشوائي X على طول فُطر برغي

(بالمليمتر) تُنتجه آلة في مصنع، حيث: $X \sim N(7, 0.1^2)$

فأجد كلاً ممّا يأتي:



1 $P(X > 7)$



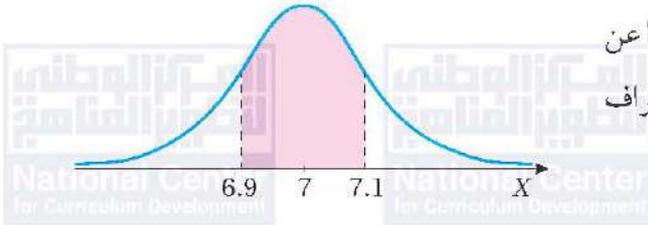
بما أن الوسط الحسابي هو 7، والمنحنى الطبيعي مُتماثل حول الوسط الحسابي،

$$P(X > 7) = P(X > \mu) = 0.5$$

كما في الشكل المجاور.

2 $P(6.9 < X < 7.1)$

تبعد كلٌّ من القيمة 6.9 والقيمة 7.1 انحرافًا معياريًا واحدًا عن الوسط الحسابي.



وبما أن 68% من البيانات لا يزيد بُعدها عن الوسط الحسابي بمقدار قيمة الانحراف المعياري، فإن:

$$P(6.9 < X < 7.1) = P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.68$$

أتحقق من فهمي

صناعة: إذا دلَّ المتغير العشوائي X على طول قُطر رأس مثبت (بالمليمتر) تُنتجه آلة في مصنع، حيث: $X \sim N(30, 0.4^2)$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

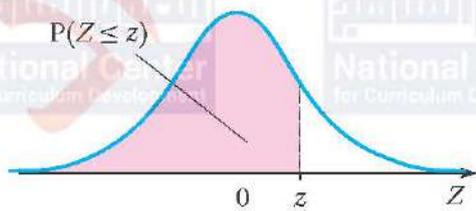
- a) $P(X > 30)$ b) $P(29.6 < X < 30.4)$
 c) $P(29.2 < X < 30)$ d) $P(29.2 < X < 30.4)$

التوزيع الطبيعي المعياري

يُطلق على التوزيع الطبيعي الذي وسطه الحسابي 0، وانحرافه المعياري 1 اسم **التوزيع الطبيعي المعياري** (standard normal distribution)، ويمكن التعبير عن المتغير

العشوائي الطبيعي المعياري بالرموز على النحو الآتي:

$$Z \sim N(0, 1)$$



يُبين الشكل المجاور منحني التوزيع الطبيعي المعياري المتمائل حول الوسط الحسابي 0.

تمثل مساحة المنطقة المُظللة احتمال قيم المتغير العشوائي الطبيعي المعياري Z التي

تقل عن (أو تساوي) القيمة المعيارية z ، أو $P(Z \leq z)$.

يُستعمل الحرف X عادة للدلالة على المتغير العشوائي الطبيعي، ويُستعمل الحرف Z للدلالة على المتغير العشوائي الطبيعي المعياري.

أنعلم

إذن، $P(Z < z)$ تساوي المساحة التي تقع يسار القيمة المعيارية z ، وهي المساحة التي يُمكن إيجادها باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

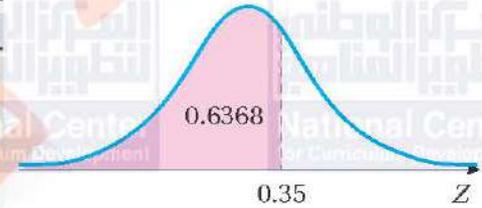
يُبين الشكل التالي جزءاً من جدول التوزيع الطبيعي المعياري، الذي يحتوي فيه العمود الأول على منزلة أجزاء العشرة في قيمة z المعيارية، ويحتوي فيه الصف الأول على منزلة أجزاء المئة في قيمة z المعيارية، وتُمثل القيمة المُقابلَة لكل من هاتين القيمتين في الجدول المساحة أسفل المنحنى الطبيعي المعياري التي تقع يسار قيمة z المعيارية، أو $P(Z < z)$. فمثلاً، لإيجاد المساحة أسفل المنحنى الطبيعي المعياري التي تقع يسار $z = 0.35$ ، أجد القيمة المُقابلَة لكل من 0.3 في العمود الأول، و 0.05 في الصف الأول، وهذه القيمة تساوي $P(Z < 0.35)$.

أتعلّم

عند استعمال المُتغيّر العشوائي المتصل X ، فإن إشارة المساواة لا تُؤثر في قيمة الاحتمال؛ لأنّ المساحة (الاحتمال) أسفل نقطة واحدة على المنحنى هي صفر. فمثلاً:

$$P(X \leq x) = P(X < x)$$

جدول التوزيع الطبيعي المعياري						
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088
>	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7421	0.7453



ملحوظة: توجد نسخة كاملة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري في الملحق المُرفق بنهاية الكتاب.

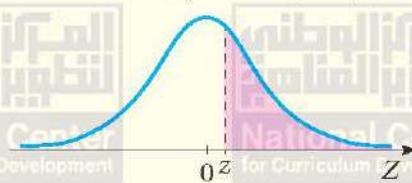
بالرغم من أنّ الجدول السابق يُبين احتمال القيم التي تقل عن (أو تساوي) القيمة المعيارية z ، فإنّه يُمكن استعمال الخصائص الأساسية للتوزيع الطبيعي، إضافةً إلى الجدول، لإيجاد قيم الاحتمال لحالات مختلفة كما يأتي:

إيجاد احتمال المُتغيّر العشوائي الطبيعي المعياري

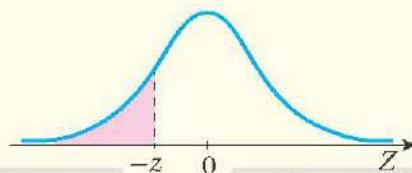
مفهوم أساسي

إذا كان: $Z \sim N(0, 1)$ ، فإنّ:

1 $P(Z > z) = 1 - P(Z < z)$

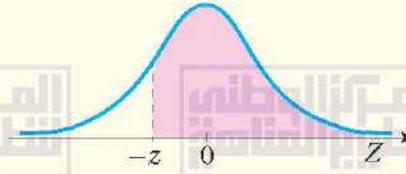


2 $P(Z < -z) = 1 - P(Z < z)$

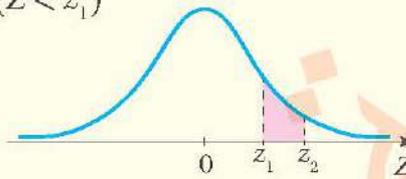


إذا كان: $Z \sim N(0, 1)$ ، فإن:

$$3 \quad P(Z > -z) = P(Z < z)$$



$$4 \quad P(z_1 < Z < z_2) = P(Z < z_2) - P(Z < z_1)$$



أنعلم

ألاحظ أن جدول التوزيع الطبيعي المعياري يحوي احتمالات تُقابل قيم z الموجبة فقط؛ لذا يجب أن أُحوّل أيّ قيمة سالبة للمتغير z إلى قيمة موجبة حتى أتمكن من استعمال الجدول.

مثال 3

أجد كلاً ممّا يأتي، مُستعملًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

$$1 \quad P(Z < 2.13)$$

$$P(Z < 2.13) = 0.9834$$

باستعمال الجدول

$$2 \quad P(Z > 0.25)$$

$$P(Z > 0.25) = 1 - P(Z < 0.25)$$

باستعمال الخصائص

$$= 1 - 0.5987$$

باستعمال الجدول

$$= 0.4013$$

بالتبسيط

$$3 \quad P(Z < -1.75)$$

$$P(Z < -1.75) = 1 - P(Z < 1.75)$$

باستعمال الخصائص

$$= 1 - 0.9599$$

باستعمال الجدول

$$= 0.0401$$

بالتبسيط

أنعلم

يحتوي جدول التوزيع الطبيعي على احتمالات تُقابل قيم z الموجبة فقط؛ لذا، يجب أن أُحوّل جميع قيم z السالبة إلى ما يُقابلها من قيم موجبة.

4 $P(Z > -2.01)$

$$P(Z > -2.01) = P(Z < 2.01)$$

$$= 0.9778$$

باستعمال الخصائص

باستعمال الجدول

5 $P(-1.1 < Z < 2.34)$

$$P(-1.1 < Z < 2.34) = P(Z < 2.34) - P(Z < -1.1)$$

$$= P(Z < 2.34) - (1 - P(Z < 1.1))$$

$$= 0.9904 - (1 - 0.8643)$$

$$= 0.8546$$

باستعمال الخصائص

باستعمال الخصائص

باستعمال الجدول

بالتبسيط

أنتحقق من فهمي

أجد كلاً مما يأتي، مُستعملاً جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

a) $P(Z < 1.5)$

b) $P(Z > 0.61)$

c) $P(Z < -0.43)$

d) $P(Z > -3.23)$

e) $P(-1.4 < Z < 2.07)$

إيجاد احتمال المُتغير العشوائي الطبيعي (غير المعياري)

تعلّمتُ في المثال 2 إيجاد احتمالات مُتغيرات عشوائية طبيعية غير معيارية لقيم مُحدّدة، مثل $P(X < \mu - \sigma)$ ، باستعمال القاعدة التجريبية، وتعلّمتُ في المثال 3 إيجاد احتمالات المُتغير العشوائي الطبيعي المعياري باستعمال الجدول. والآن سأتعلم إيجاد احتمال أي مُتغير عشوائي طبيعي غير معياري $(X \sim N(\mu, \sigma^2))$ لأي قيمة، وذلك بتحويله إلى مُتغير عشوائي طبيعي معياري.

إنّ طرح الوسط الحسابي من جميع قيم المُتغير العشوائي الطبيعي يجعل قيمة الوسط الحسابي 0 بدلاً من μ ، وإنّ قسمتها جميعاً على الانحراف المعياري تجعل قيمة الانحراف المعياري 1 بدلاً من σ ، وبذلك يصبح منحنى التوزيع الطبيعي معيارياً.

يُمكن استعمال الصيغة الآتية لتحويل قيم التوزيع الطبيعي X إلى قيم معيارية Z :

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

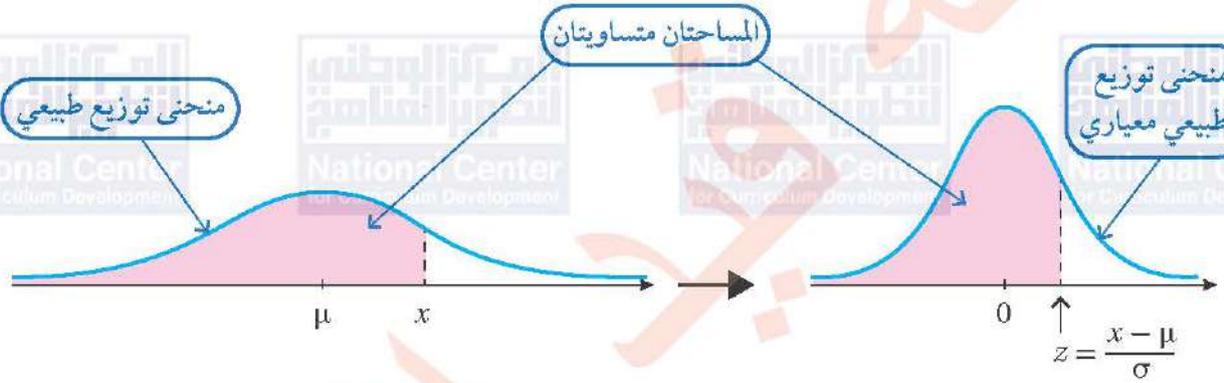
ب طرح الوسط الحسابي من قيمة x ، ثم
القسمة على الانحراف المعياري.

يؤدي التغير في الوسط
الحسابي إلى انسحاب
أقصى لمنحنى التوزيع
الطبيعي. أما التغير في
الانحراف المعياري
فيؤثر في انتشار المنحنى
الطبيعي وتوسعه.

وبذلك يتحول المتغير العشوائي $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ إلى $Z \sim N(0, 1)$ ، عندئذ يُمكن استعمال
الجدول لإيجاد احتمال أي من قيمه.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$Z \sim N(0, 1)$$



مثال 4

إذا كان: $X \sim N(15, 4^2)$ ، فأجد كل احتمال مما يأتي، مُستعملًا جدول التوزيع الطبيعي
المعياري:

1 $P(X < 25)$

$$\begin{aligned} P(X < 25) &= P\left(Z < \frac{25 - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z < \frac{25 - 15}{4}\right) \end{aligned}$$

$$= P(Z < 2.5)$$

$$= 0.9938$$

صيغة قيم Z

بتعويض $\mu = 15, \sigma = 4$

بالتبسيط

باستعمال الجدول

أنعلم

القيمة المعيارية Z التي
تُقابل $x = 25$ هي 2.5

الوحدة 6

2 $P(X > 9)$

$$P(X > 9) = P\left(Z > \frac{9 - \mu}{\sigma}\right)$$

صيغة قيم Z

$$= P\left(Z > \frac{9 - 15}{4}\right)$$

بتعويض $\mu = 15, \sigma = 4$

$$= P(Z > -1.5)$$

بالتبسيط

$$= P(Z < 1.5)$$

باستعمال الخصائص

$$= 0.9332$$

باستعمال الجدول

أتعلم

عند إيجاد $\frac{x - \mu}{\sigma}$ ، أقرب

الإجابة إلى أقرب منزلتين

عشريتين؛ لأتمكّن من

استعمال جدول التوزيع

الطبيعي المعياري.

أتحقق من فهمي

إذا كان: $X \sim N(7, 3^2)$ ، فأجد كل احتمال مما يأتي، مُستعملًا جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

a) $P(X < -2)$

b) $P(X > 10)$

c) $P(4 < X \leq 13)$

مثال 5: من الحياة

أطوال: توصلت دراسة إلى أن أطوال الرجال في سنّ العشرين تتبع توزيعًا طبيعيًا، وسطه الحسابي 177 cm، وانحرافه المعياري 7 cm. إذا اختير رجل عشوائيًا، فأجد كلاً مما يأتي:

1 احتمال أن يكون طول الرجل أقل من 170 cm

افترض أن المتغير العشوائي X يدل على طول الرجل:

$$P(X < 170) = P\left(Z < \frac{170 - \mu}{\sigma}\right)$$

صيغة قيم Z

$$= P\left(Z < \frac{170 - 177}{7}\right)$$

بتعويض $\mu = 177, \sigma = 7$

$$= P(Z < -1)$$

بالتبسيط

$$= 1 - P(Z < 1)$$

باستعمال الخصائص

$$= 1 - 0.8413$$

باستعمال الجدول

$$= 0.1587$$

بالتبسيط

2 احتمال أن يكون طول الرجل أكثر من 191 cm

$$P(X > 191) = P\left(Z > \frac{191 - \mu}{\sigma}\right)$$

صيغة قيم Z

$$= P\left(Z > \frac{191 - 177}{7}\right)$$

بتعويض $\mu = 177, \sigma = 7$

$$= P(Z > 2)$$

$$= 1 - P(Z < 2)$$

$$= 1 - 0.9772$$

$$= 0.0228$$

بالتبسيط

باستعمال الخصائص

باستعمال الجدول

بالتبسيط

أتحقق من فهمي

أطوال: توصلت دراسة إلى أن أطوال النساء في إحدى المدن تتبع توزيعاً طبيعياً، وسطه الحسابي 165 cm، وانحرافه المعياري 3 cm. إذا اختيرت امرأة عشوائياً، فأجد كلاً ممّا يأتي:

(a) احتمال أن يكون طول المرأة أقل من 162 cm

(b) احتمال أن يكون طول المرأة أكثر من 171 cm

(c) احتمال أن يكون طول المرأة بين 162 cm و 171 cm

معلومة

يبلغ متوسط أطوال النساء في الأردن 158.8 cm

إيجاد قيمة المتغير العشوائي إذا علم الاحتمال

تعلمت في المثال السابق إيجاد احتمال متغير عشوائي طبيعي (غير معياري)، ولكن الاحتمال قد يكون معلوماً في بعض الأحيان، وتكون قيم المتغير العشوائي X هي المجهولة. وفي هذه الحالة، يمكن استعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري بطريقة عكسية، وذلك بإيجاد قيمة Z التي تحقق الاحتمال، ثم استعمال الصيغة: $Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ لتحديد قيمة x التي تقابل القيمة المعيارية Z .

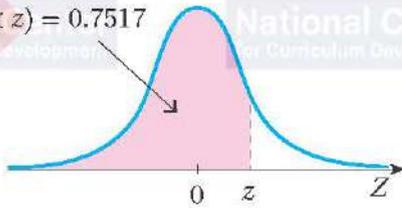
مثال 6

إذا كان: $X \sim N(5, 3^2)$ ، فأجد قيمة x التي تحقق الاحتمال المعطى في كل ممّا يأتي:

1 $P(X < x) = 0.7517$

ألاحظ أن الاحتمال المعطى يُمثل المساحة التي تقع يسار القيمة x أسفل منحني التوزيع الطبيعي. وبما أن قيمة الاحتمال أكثر من 0.5، فإن القيمة المعيارية المرتبطة بقيمة x هي قيمة موجبة، ولتكن Z .

$$P(Z < z) = 0.7517$$



يُمثل الاحتمال المساحة التي تقع يسار القيمة Z أسفل منحني التوزيع الطبيعي المعياري كما في الشكل المجاور.

ومن ثم، يُمكن إيجاد قيمة x باتباع الخطوتين الآتيتين:

الخطوة 1: أجد قيمة z التي تُحقق الاحتمال.

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي المعياري، أجد أن قيمة z التي تُقابل الاحتمال 0.7517 هي 0.68:

جدول التوزيع الطبيعي المعياري									
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823
...	0.7939	0.7969	0.9106

الخطوة 2: أجد قيمة x التي تُقابل القيمة المعيارية.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

صيغة قيم z

$$0.68 = \frac{x - 5}{3}$$

بتعويض $\mu = 5, \sigma = 3, z = 0.68$

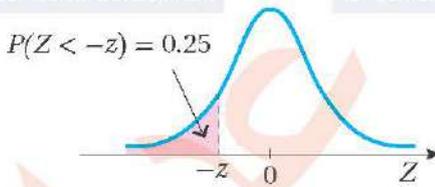
$$x = 7.04$$

بحل المعادلة لـ x

إذن، قيمة x التي تُحقق $P(X < x) = 0.7517$ هي 7.04

2 $P(X < x) = 0.25$

ألاحظ أن الاحتمال المعطى يُمثل المساحة التي تقع يسار القيمة x على منحنى التوزيع الطبيعي. وبما أن قيمة الاحتمال أقل من 0.5، فإن القيمة المعيارية المرتبطة بقيمة x هي قيمة سالبة، ولتكن $-z$.



يُمثل الاحتمال المساحة التي تقع يسار القيمة $(-z)$ أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري كما في الشكل المجاور.

ومن ثم، يُمكن إيجاد x ، مُتبعًا الخطوتين الآتيتين:

الخطوة 1: أجد قيمة z التي تُحقق الاحتمال.

باستعمال الخصائص

$$P(Z < -z) = 1 - P(Z < z)$$

$$P(Z < -z) = 0.25 \text{ بتعويض}$$

$$0.25 = 1 - P(Z < z)$$

$$P(Z < z) = 0.75 \text{ بحل المعادلة لـ } P(Z < z)$$

$$P(Z < z) = 0.75$$

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي المعياري، أجد أن القيمة الدقيقة لاحتمال 0.7500 غير موجودة؛ لذا أختار أقرب قيمة أقل منها، وهي 0.7486

ومن ثم، فإن قيمة z التي تُقابل الاحتمال هي 0.67 كما في الجدول الآتي:

جدول التوزيع الطبيعي المعياري									
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823
...	0.7939	0.7967	0.7994	0.8016

الخطوة 2: أجد قيمة x التي تُقابل القيمة المعيارية.

بما أن قيمة z المرتبطة بقيمة x سالبة، فإنني أعوض $z = -0.67$:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$-0.67 = \frac{x - 5}{3}$$

$$x = 2.99$$

صيغة قيم z

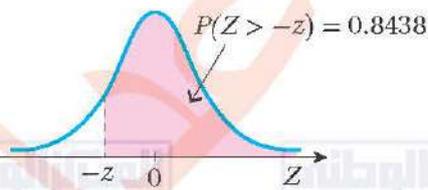
بتعويض $\mu = 5, \sigma = 3$

بحل المعادلة لـ x

إذن، قيمة x التي تُحقق $P(X < x) = 0.25$ هي 2.99

3 $P(X > x) = 0.8438$

ألاحظ أن الاحتمال المعطى يُمثل المساحة التي تقع يمين القيمة x أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. وبما أن قيمة الاحتمال أكثر من 0.5، فإن القيمة المعيارية المرتبطة بقيمة x هي قيمة سالبة، ولتكن $-z$.



يُمثل الاحتمال المساحة التي تقع يمين القيمة $(-z)$ أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري كما في الشكل المجاور.

ومن ثم، يُمكن إيجاد قيمة x ، مُتبعًا الخطوتين الآتيتين:

الخطوة 1: أجد قيمة z التي تُحقق الاحتمال.

باستعمال الخصائص

$$P(Z > -z) = P(Z < z)$$

$$0.8438 = P(Z < z)$$

$$P(Z > -z) = 0.8438 \text{ بتعويض}$$

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي المعياري، أجد أن قيمة z التي تُقابل الاحتمال 0.8438 هي 1.01:

جدول التوزيع الطبيعي المعياري									
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810

الخطوة 2: أجد قيمة x التي تُقابل القيمة المعيارية z .

بما أن قيمة z المرتبطة بقيمة x سالبة، فإنني أعوض $z = -1.01$:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$-1.01 = \frac{x - 5}{3}$$

$$x = 1.97$$

صيغة قيم z

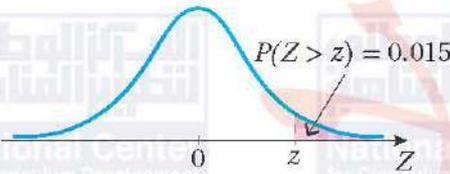
$$\mu = 5, \sigma = 3$$

بحل المعادلة لـ x

إذن، قيمة x التي تُحقق $P(X > x) = 0.8438$ هي 1.97

4 $P(X > x) = 0.015$

ألاحظ أن الاحتمال المعطى يُمثل المساحة التي تقع يمين القيمة x أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. وبما أن قيمة الاحتمال أقل من 0.5، فإن القيمة المعيارية المرتبطة بقيمة x هي قيمة موجبة، ولتكن z .



يُمثل الاحتمال المساحة التي تقع يمين القيمة z أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري كما في الشكل المجاور.

ومن ثم، يُمكن إيجاد قيمة z ، مُتبعًا الخطوتين الآتيتين:

الخطوة 1: أجد قيمة z التي تُحقق الاحتمال.

$$P(Z > z) = 1 - P(Z < z)$$

$$0.015 = 1 - P(Z < z)$$

$$P(Z < z) = 0.985$$

باستعمال الخصائص

$$P(Z > z) = 0.015$$

بحل المعادلة لـ $P(Z < z)$

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي المعياري، أجد أن قيمة z التي تُقابل الاحتمال 0.9850 هي 2.17:

جدول التوزيع الطبيعي المعياري									
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854

الخطوة 2: أجد قيمة x التي تُقابل القيمة المعيارية.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

صيغة قيم z

$$2.17 = \frac{x - 5}{3}$$

بتعويض $\mu = 5, \sigma = 3, z = 2.17$

$$x = 11.51$$

بحل المعادلة لـ x

إذن، قيمة x التي تُحقق $P(X > x) = 0.015$ هي 11.51

أنتحق من فهمي

إذا كان X مُتغيراً عشوائياً طبيعياً، وسطه الحسابي -3 ، وانحرافه المعياري 4 ، فأجد قيمة x التي تُحقق الاحتمال المعطى في كلِّ مما يأتي:

a) $P(X < x) = 0.9877$

b) $P(X < x) = 0.31$

c) $P(X > x) = 0.9738$

d) $P(X > x) = 0.2$

إيجاد الوسط الحسابي أو الانحراف المعياري إذا عُلِمَ الاحتمال

في بعض المسائل، يكون احتمال إحدى قيم المُتغير العشوائي الطبيعي معلوماً، في حين تكون قيمة الوسط الحسابي، أو الانحراف المعياري، أو قيمة الوسط الحسابي والانحراف المعياري غير معلومة. في هذه الحالة، أستعمل قيم الاحتمالات المعلومة لتحديد قيمة الوسط الحسابي، أو الانحراف المعياري للتوزيع الطبيعي.

مثال 7 : من الحياة

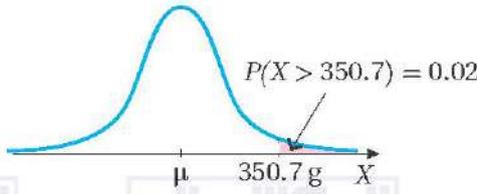
زراعة: يُمثل $X \sim N(\mu, 25)$ المُتغير العشوائي الطبيعي لكتل حبّات البطاطا العضوية (بالغرام) التي تُنتجها إحدى المزارع. إذا زادت كتلة 2% فقط منها على 350.7 g، فأجد الوسط الحسابي لكتل حبّات البطاطا.

معلومة

تُزرع المُنتجات العضوية من دون استخدام أيِّ مبيدات، أو أسمدة كيميائية، وهي غير مُعدّلة وراثياً.

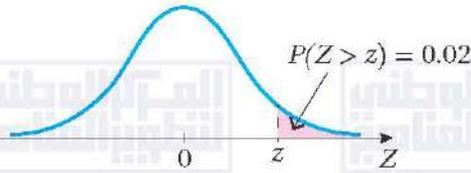


الخطوة 1: أرسم شكلاً توضيحياً للمعلومات المعطاة في المسألة.



الخطوة 2: أجد قيمة z التي تُحقِّق الاحتمال.

ألاحظ أن الاحتمال المعطى يُمثِّل المساحة التي تقع يمين القيمة x أسفل منحني التوزيع الطبيعي. وبما أن قيمة الاحتمال أقل من 0.5، فإن القيمة المعيارية المرتبطة بقيمة x هي z (قيمة موجبة).



يُمثِّل الاحتمال المساحة التي تقع يمين القيمة z أسفل منحني التوزيع الطبيعي المعياري كما في الشكل المجاور. لإيجاد قيمة z ، أستعين بخصائص التوزيع الطبيعي:

$$P(Z > z) = 1 - P(Z < z)$$

باستعمال الخصائص

$$0.02 = 1 - P(Z < z)$$

$$P(Z > z) = 0.02 \text{ بتعويض}$$

$$P(Z < z) = 0.98$$

بحل المعادلة لـ $P(Z < z)$

بالرجوع إلى جدول التوزيع الطبيعي المعياري، أجد أن القيمة الدقيقة للاحتمال 0.9800 غير موجودة؛ لذا أختار أقرب قيمة أقل منها، وهي 0.9798 ومن ثم، فإن قيمة z التي تُقابل الاحتمال هي 2.05.

الخطوة 3: أجد الوسط الحسابي.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

صيغة قيم z

$$2.05 = \frac{350.7 - \mu}{5}$$

$$x = 350.7, \sigma = 5, z = 2.17 \text{ بتعويض}$$

$$\mu = 340.45$$

بحل المعادلة لـ μ

إذن، الوسط الحسابي لكتل حبّات البطاطا هو 340.45 g

أتذكّر

لإيجاد قيمة z التي تُقابل احتمالاً مُعيَّناً قيمته الدقيقة غير موجودة في الجدول، أستعمل أقرب قيمة أقل من الاحتمال المطلوب.

أتذكّر

بما أن التباين هو 25، فإن الانحراف المعياري هو 5

يُمثَّل $X \sim N(4.5, \sigma^2)$ المُتغيِّر العشوائي الطبيعي لكتل أكياس السُّكَّر (بالكيلوغرام) التي يُنتجها أحد المصانع. إذا زادت كتلة 3% فقط منها على 4.8 kg، فأجد الانحراف المعياري لكتل أكياس السُّكَّر.

أدرب وأحل المسائل

إذا اتخذ التمثيل البياني لكتل الطلبة في إحدى المحافظات منحنيًا طبيعيًا، فأجد كلاً مما يأتي:

1 النسبة المئوية للطلبة الذين تزيد كتلهم على الوسط الحسابي.

2 النسبة المئوية للطلبة الذين تقل كتلهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحراف معياري واحد.

3 النسبة المئوية للطلبة الذين تزيد كتلهم على الوسط الحسابي بمقدار لا يقل عن انحرافين معياريين.

4 النسبة المئوية للطلبة الذين تقل كتلهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين، أو تزيد عليه بمقدار لا يزيد على ثلاثة انحرافات معيارية.

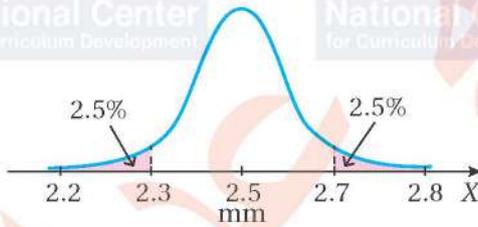
إذا كان: $X \sim N(50, 4^2)$ ، فأجد كلاً من الاحتمالات الآتية باستعمال القاعدة التجريبية:

5 $P(X < 50)$

6 $P(46 < X < 54)$

7 $P(42 < X < 62)$

صناعة: يُمكن نمذجة أطوال أقطار مسامير يُنتجها مصنع بمنحني التوزيع الطبيعي المُبيَّن في الشكل المجاور:



8 أجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لأطوال أقطار المسامير.

9 أجد النسبة المئوية للمسامير التي يزيد طول قُطر كلٍّ منها على الوسط الحسابي بما لا يزيد على انحرافين معياريين.



10 أفاع: يدلُّ المُتغيِّر العشوائي $X \sim N(100, \sigma^2)$ على أطوال الأفاعي (بالسنتمتر) في أحد مجتمعاتها. إذا كانت أطوال 68% منها تتراوح بين 93 cm و 107 cm، فأجد σ^2 .

أجد كلاً مما يأتي، مُستعملاً جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

11 $P(Z < 0.43)$

12 $P(Z > 1.08)$

13 $P(Z < -2.03)$

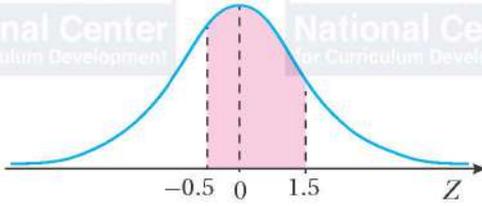
14 $P(Z > 2.2)$

15 $P(-0.72 < Z < 0.72)$

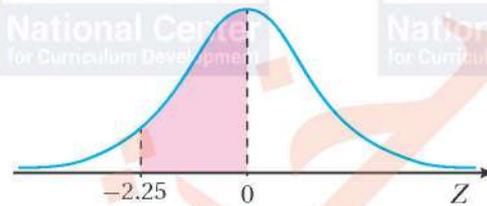
16 $P(1.5 < Z < 2.5)$

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة أسفل منحنى التوزيع الطبيعي المعياري في كلِّ مما يأتي:

17



18



أجد القيمة المعيارية z التي تُحقِّق كل احتمال مما يأتي:

19 $P(Z < z) = 0.7642$

20 $P(Z > z) = 0.372$

21 $P(Z > z) = 0.8531$

إذا كان: $X \sim N(-3, 25)$ ، فأجد كل احتمال مما يأتي، مُستعملاً جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

22 $P(X < 2)$

23 $P(X > 4.5)$

24 $P(-5 < X < -3)$

إذا كان X مُتغيِّراً عشوائياً طبيعياً، وسطه الحسابي 30، وانحرافه المعياري 10، فأجد قيمة x التي تُحقِّق الاحتمال المعطى في كلِّ مما يأتي:

25 $P(X < x) = 0.99$

26 $P(X > x) = 0.1949$

27 $P(X < x) = 0.35$

28 $P(X > x) = 0.05$

رياضة: تتبع أطوال لاعبي كرة السلة توزيعاً طبيعياً، وسطه الحسابي 185 cm، وانحرافه المعياري 5 cm. إذا اختير لاعب عشوائياً، فأجد كلاً مما يأتي:

29 احتمال أن يزيد طول اللاعب على 175 cm

30 احتمال أن يتراوح طول اللاعب بين 180 cm و 190 cm

31 العدد التقريبي للاعبين الذين تزيد أطوالهم على 195 cm من بين 2000 لاعب.



32 في دراسة عن أشجار الكينا في إحدى الغابات، تبين أن الوسط الحسابي لأطوال هذه الأشجار هو 6 m، وأن الانحراف المعياري هو 2 m. إذا كانت أطوال الأشجار تتبع توزيعاً طبيعياً، فأجد احتمال أن يكون طول شجرة اختيرت عشوائياً أكثر من 9 أمتار.



تعبئة: يُعبئ مصنع حبوب القهوة في أوعية من الكرتون. إذا كانت كتلة الأوعية تتبع توزيعاً طبيعياً، ووسطه الحسابي 232 g، وانحرافه المعياري 5 g، وكان المتغير العشوائي X يدل على كتلة الوعاء المختار عشوائياً، فأجد كلاً مما يأتي:

33 $P(X < 224)$.

34 قيمة x ، حيث: $P(232 < X < x) = 0.2$.

35 صناعة: يُمثل $X \sim N(\mu, 169)$ المتغير العشوائي الطبيعي لطول قُطر كلٍّ من إطارات درّاجات هوائية (بالمليمتر) يُنتجها أحد المصانع. إذا زاد طول قُطر 11% منها على 47 cm، فأجد الوسط الحسابي لأطوال أقطار الإطارات التي يُنتجها المصنع.

36 اختبارات: تتبع العلامات في أحد الاختبارات توزيعاً طبيعياً، ووسطه الحسابي 43. إذا كان X هو المتغير العشوائي للعلامات، فأجد قيمة الانحراف المعياري، علماً بأن احتمال ظهور علامة أعلى من 48 هو 0.2.

37 إذا كان: $X \sim N(\mu, \mu^2)$ ، وكانت قيمة z المعيارية المُقابلة لقيمة $x = 1$ هي $z = 2$ ، فأجد قيمة μ .

38 إذا كان: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ يُمثل توزيعاً طبيعياً، وكانت قيمة z المعيارية المُقابلة لقيمة $x = 10$ هي $z = 1$ ، وكانت قيمة z المُقابلة لقيمة $x = 4$ هي -2 ، فأجد قيمة كلٍّ من μ ، و σ .

39 في دراسة لإدارة السير، تبين أن سرعة السيّارات على أحد الطرق تتبع توزيعاً طبيعياً، ووسطه الحسابي 90 km/h، وانحرافه المعياري 5 km/h. إذا كانت السرعة القصوى المُحدّدة على هذا الطريق هي 100 km/h، وكان العدد الكلي للسيّارات التي تسير على هذا الطريق في أحد الأيام هو 1000 سيّارة، فأجد العدد التقريبي للسيّارات التي ستتجاوز السرعة المُحدّدة على الطريق في هذا اليوم.





40 يُمكن نمذجة كتل البيض في إحدى المزارع بتوزيع طبيعي، وسطه الحسابي 60 g، وانحرافه المعياري 4 g. أجد عدد البيض صغير الحجم من بين 5000 بيضة في المزرعة، علمًا بأن كتلة البيضة الصغيرة لا تزيد على 55 غرامًا.

مهارات التفكير العليا

41 أكتشف الخطأ: قالت عبير: "إذا كان: $X \sim N(6.4, 0.09)$ ، فإن 95% من البيانات تقع بين 6.22 و6.58". أكتشف الخطأ في قول عبير، ثم أصححه.

42 تبرير: إذا كان: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ، $P(X < 15) = 0.1469$ ، $P(X > 35) = 0.025$ ، فأجد قيمة كل من μ ، و σ ، مبررًا إجابتي.

43 تبرير: تقدّم 100000 طالب لاختبار دولي، وبلغ عدد الطلبة الذين زادت علاماتهم في الاختبار على 90% نحو 10000 طالب، منهم 5000 طالب أحرزوا علامات أكثر من 95%. إذا كانت علامات الطلبة المتقدمين تتبع توزيعًا طبيعيًا، فأجد الوسط الحسابي، والانحراف المعياري للعلامات.



44 تحدّد: أجرت باحثة تفاعلًا كيميائيًا بصورة متكرّرة، فوجدت أن الزمن اللازم لحدوث التفاعل يتبع توزيعًا طبيعيًا، وأن 5% من التجارب يلزمها أكثر من 13 دقيقة لحدوث التفاعل، وأن 12% منها تتطلّب أقل من 10 دقائق لحدوث التفاعل. أقدّر الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لزمان التفاعل.

تبرير: يُبيّن الشكل المجاور منحنى التوزيع الطبيعي للمتغير العشوائي X الذي وسطه الحسابي 79، وتباينه 144. إذا كان: $P(79 - a \leq X \leq 79 + b) = 0.6463$ ، وكان: $P(X \geq 79 + b) = 2P(X \leq 79 - a)$ ، فأجد كلاً ممّا يأتي، مبررًا إجابتي:

46 قيمة الثابت b .

45 مساحة المنطقة المظلّلة.

6 إذا كان هطل الأمطار السنوي في إحدى المدن يتبع توزيعاً طبيعياً، وسطه الحسابي 1000 mm، وانحرافه المعياري 200 mm، فإن احتمال أن يكون هطل الأمطار السنوي أكثر 1200 mm هو تقريباً:

- a) 0.34 b) 0.16
c) 0.75 d) 0.85

إذا كان: $X \sim Geo(0.3)$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

- 7 $P(X = 4)$ 8 $P(3 < X \leq 5)$
9 $P(X > 4)$ 10 $P(5 \leq X \leq 7)$

إذا كان: $X \sim B(10, 0.4)$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

- 11 $P(X = 3)$ 12 $P(X > 2)$
13 $P(7 \leq X < 9)$ 14 $P(X \leq 9)$

إذا كان: $X \sim N(4, 9)$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

- 15 $P(X > 8.5)$ 16 $P(-2 < X < 7)$
17 $P(X < 10)$ 18 $P(5.5 < X < 8.5)$
19 $P(X < 1)$ 20 $P(X > -3)$



21 تبين في مصنع للمصابيح الكهربائية أن احتمال أن يكون أي مصباح من إنتاج المصنع تالفاً هو 0.17. إذا اختير 100 مصباح عشوائياً من إنتاج المصنع، فأجد العدد المتوقع من المصابيح التالفة.

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1 إذا كان: $X \sim Geo(0.1)$ ، فإن $P(X = 1)$ يساوي:

- a) 0.1 b) 0.9
c) 0.5 d) 0

2 إذا كان: $X \sim B(5, 0.1)$ ، فإن $P(X = 6)$ يساوي:

- a) $(0.1)^6$ b) 0
c) $\binom{6}{5} (0.1)^6 (0.9)^{-1}$ d) $\binom{6}{5} (0.1)^5 (0.9)^1$

3 المساحة التي تقع يسار القيمة: $z = -1.73$ أسفل منحني التوزيع الطبيعي المعياري تساوي (بالوحدات المربعة):

- a) 0.4582 b) 0.5280
c) 0.0418 d) 0.9582

4 إذا كان Z مُتغيِّراً عشوائياً طبيعياً معيارياً، فإن $P(-2.3 < Z < 0.14)$ يساوي:

- a) 0.4449 b) 0.545
c) 0.6449 d) 0.8449

5 النسبة المئوية لمساحة المنطقة المحصورة بين $3\sigma - \mu$ و $3\sigma + \mu$ أسفل منحني التوزيع الطبيعي هي:

- a) 68% b) 95%
c) 99.7% d) 89.7%



31 يُعبأ إنتاج مزرعة من التفاح في صناديق، ثم تقاس كتلتها بحسب

المواصفات المطلوبة. وقد تبين أن 1578 صندوقاً من أصل 10000 صندوق تزيد كتلة كل منها على 6 kg. إذا كانت كتل الصناديق تتبع توزيعاً طبيعياً، ووسطه الحسابي 5 kg، فأجد الانحراف المعياري لهذه الكتل.

32 إذا كان X متغيّراً عشوائياً ذا حدّين، وكان: $E(X) = 2.5$, $Var(X) = 1.875$ ، فأجد $P(X \geq 8)$.

أعدّ أحد مصانع السيّارات الحديثة دراسة عن الزمن الذي يستغرقه الفنيون في اكتشاف عطل السيّارة الواحدة. وقد انتهت الدراسة إلى أنّه يتعيّن على الفني تشغيل السيّارة في كل مرّة يحاول فيها إيجاد العطل، وأنّه يستطيع تشغيل السيّارة بعد دقيقتين من تشغيله إيّاها في المرّة السابقة. إذا أمكن نمذجة الزمن الذي يلزم الفنيين إلى حين إيجاد العطل بمتغيّر طبيعي، ووسطه الحسابي 10 دقائق، وانحرافه المعياري 5 دقائق، فأجد كلاً ممّا يأتي:

33 احتمال أن يضطر الفني إلى تشغيل السيّارة أكثر من 6 مرّات حتى يتمكّن من تحديد العطل.

34 احتمال أن يتمكّن الفني من تحديد العطل بعد تشغيل السيّارة للمرّة الخامسة، وقبل تشغيلها مرّة سادسة.

35 احتمال ألاّ يتمكّن الفني من تحديد العطل خلال ثلث ساعة من الفحص.

22 تفيد إحصائيات أصدرتها إحدى الجامعات بأنّ 20% فقط من طلبة الجامعة يمارسون التمرينات الرياضية الصباحية بشكل منتظم. أرادت إدارة الجامعة تحفيز الطلبة على ممارسة هذه التمرينات، فبدأت إجراء مقابلات عشوائية مع الطلبة لتعرّف إذا كانوا يمارسون هذه التمرينات بانتظام أم لا. أجد عدد الطلبة المتوقّع مقابلتهم قبل مصادفة أوّل طالب يمارس التمرينات الرياضية الصباحية بشكل منتظم.

أجد القيمة المعيارية z التي تُحقّق كل احتمال ممّا يأتي:

23 $P(Z > z) = 0.1$

24 $P(Z < z) = 0.9671$

25 $P(-z < Z < z) = 0.9464$

26 $P(Z > z) = 0.9222$

توصّلت دراسة إلى أنّ أطوال الرجال حول العالم تتبع توزيعاً طبيعياً، ووسطه الحسابي 171 cm، وانحرافه المعياري 10 cm. إذا اختير رجل عشوائياً، فأجد كلاً ممّا يأتي:

27 احتمال أن يزيد طول الرجل على 181 cm.

28 احتمال أن يكون طول الرجل أقل من الوسط الحسابي للأطوال بأكثر من انحرافين معياريين.

29 احتمال أن يزيد طول الرجل على الوسط الحسابي للأطوال بأكثر من انحراف معياري.

30 احتمال ألاّ يزيد الفرق بين طول الرجل والوسط الحسابي للأطوال على انحراف معياري واحد.



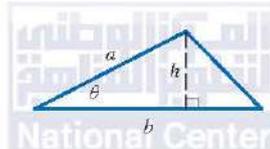
ملحقات



صيغ هندسية (المساحة، والمحيط، والحجم)

$$A = \frac{1}{2}bh$$

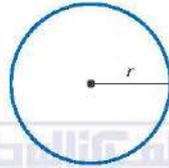
$$= \frac{1}{2}ab \sin \theta$$



المثلث:

$$A = \pi r^2$$

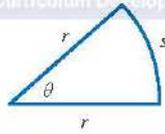
$$C = 2\pi r$$



الدائرة:

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta$$

$$s = r\theta \quad (\theta \text{ radian})$$



القطاع الدائري:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$A = 4\pi r^2$$



الكرة:

$$V = \pi r^2 h$$

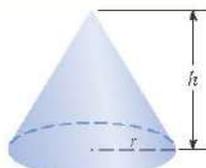
$$A = 2\pi r h + 2\pi r^2$$



الأسطوانة:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$



المخروط:

العمليات الحسابية

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a+c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

الأسس والجذور

$$x^m x^n = x^{m+n}$$

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

$$(x^m)^n = x^{mn}$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$(xy)^n = x^n y^n$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$$

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y}$$

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

حالات خاصة من تحليل كثيرات الحدود

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

القانون العام

إذا كان: $ax^2 + bx + c = 0$ ، فإن:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

الهندسة الإحداثية

المسافة بين نقطتين ونقطة المنتصف

المسافة بين النقطتين $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ هي:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

إحداثيا نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{P_1 P_2}$ هما:

$$M: \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

المستقيم

ميل المستقيم المارّ بالنقطتين $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ هو:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

معادلة المستقيم المارّ بالنقطة $P_1(x_1, y_1)$ وميله m هي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

إذا كان l مستقيماً في المستوى الإحداثي، وكانت θ

الزاوية التي يصنعها المستقيم مع المحور x الموجب،

فإن ميل المستقيم m يعطى بالمعادلة: $m = \tan \theta$

حيث: $0 < \theta < \pi$.

البُعد بين نقطة ومستقيم

البُعد بين المستقيم l الذي معادلته: $Ax + By + C = 0$

والنقطة $P(x_1, y_1)$ يعطى بالصيغة الآتية:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

شرط ألا تكون قيمتا A و B معاً صفرًا.

الدائرة

معادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ، ونصف قطرها r هي:

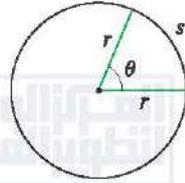
$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

المثلثات

قياسات الزوايا

$$\pi = 180^\circ \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$$



الاقتربات المثلثية في المثلث القائم الزاوية



$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\csc \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\sec \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\cot \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$$

الاقتربات المثلثية لأي زاوية

$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$

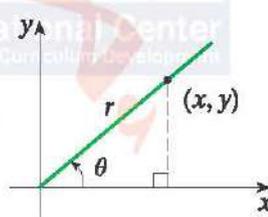
$$\csc \theta = \frac{r}{y}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y}$$



قانون الجيوب

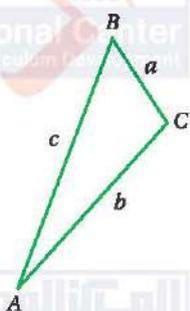
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

قانون جيوب التمام

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



المتطابقات المثلثية للمجموع والفرق

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \quad \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta \quad \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

المتطابقات المثلثية لتقليص القوة

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \quad \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$\tan^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$$

المتطابقات المثلثية الأساسية

• متطابقات المقلوب:

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

• المتطابقات النسبية:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

• متطابقات فيثاغورس:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

• متطابقات الزاويتين المتتامتين:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \csc \theta \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan \theta \quad \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sec \theta$$

• متطابقات الزاوية السالبة:

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta \quad \cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

قيم بعض الاقترانات المثلثية للزاويا الخاصة

θ°	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\theta \text{ rad}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0

قوانين اللوغاريتمات

إذا كانت x, y, b أعدادًا حقيقية موجبة، وكان p عددًا حقيقيًا، حيث: $b \neq 1$ ، فإن:

- قانون الضرب: $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$
- قانون القسمة: $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
- قانون القوة: $\log_b x^p = p \log_b x$

التفاضل

قواعد أساسية للاشتقاق

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = f'(x) - g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

مشتقات الاقترانات الأسية والاقترانات اللوغاريتمية

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}, x > 0$$

$$\frac{d}{dx}(b^x) = b^x \ln b$$

$$\frac{d}{dx}(\log_b x) = \frac{1}{x \ln b}$$

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \quad \cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$$

متطابقات تحويل الضرب إلى مجموع أو فرق

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x-y) + \sin(x+y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)]$$

$$\cos x \sin y = -\frac{1}{2} [\sin(x-y) - \sin(x+y)]$$

الاقترانات الأسية واللوغاريتمية

العلاقة بين الصورة الأسية والصورة اللوغاريتمية

إذا كان $x > 0$ و $b > 0, b \neq 1$ ، فإن:

الصورة الأسية

$$b^y = x$$

↑ الأس
↑ الأساس

الصورة اللوغاريتمية

$$\log_b x = y$$

↑ الأس
↑ الأساس

الخصائص الأساسية للوغاريتمات

إذا كان $x > 0$ و $b > 0, b \neq 1$ ، فإن:

- $\log_b 1 = 0$ $b^0 = 1$
- $\log_b b = 1$ $b^1 = b$
- $\log_b b^x = x$ $b^x = b^x$
- $b^{\log_b x} = x, x > 0$ $\log_b x = \log_b x$

مشتقات الاقترانات المثلثية

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sin x) &= \cos x & \frac{d}{dx}(\cos x) &= -\sin x \\ \frac{d}{dx}(\tan x) &= \sec^2 x & \frac{d}{dx}(\sec x) &= \sec x \tan x \\ \frac{d}{dx}(\csc x) &= -\csc x \cot x \\ \frac{d}{dx}(\cot x) &= -\csc^2 x\end{aligned}$$

التكامل

قواعد أساسية للتكامل

$$\begin{aligned}\int k dx &= kx + C \\ \int x^n dx &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, n \neq -1 \\ \int \frac{dx}{x} &= \ln |x| + C \\ \int e^x dx &= e^x + C \\ \int b^x dx &= \frac{b^x}{\ln b} + C \\ \int \sin x dx &= -\cos x + C \\ \int \cos x dx &= \sin x + C \\ \int \sec^2 x dx &= \tan x + C \\ \int \csc^2 x dx &= -\cot x + C \\ \int \sec x \tan x dx &= \sec x + C \\ \int \csc x \cot x dx &= -\csc x + C \\ \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \ln |f(x)| + C, f(x) \neq 0\end{aligned}$$

خصائص التكامل غير المحدود

$$\begin{aligned}\int kf(x) dx &= k \int f(x) dx \\ \int (f(x) \pm g(x)) dx &= \int f(x) dx \pm \int g(x) dx\end{aligned}$$

خصائص التكامل المحدود

$$\begin{aligned}\int_a^b kf(x) dx &= k \int_a^b f(x) dx \\ \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx &= \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \\ \int_a^a f(x) dx &= 0 \\ \int_a^b f(x) dx &= -\int_b^a f(x) dx \\ \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx\end{aligned}$$

المتجهات

إذا كان $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, $\vec{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ متجهين في الفضاء، وكان c عددًا حقيقيًا، فإن:

العمليات على المتجهات

$$\begin{aligned}\vec{v} + \vec{w} &= \langle (v_1 + w_1), (v_2 + w_2), (v_3 + w_3) \rangle \\ \vec{v} - \vec{w} &= \langle (v_1 - w_1), (v_2 - w_2), (v_3 - w_3) \rangle \\ c\vec{v} &= \langle cv_1, cv_2, cv_3 \rangle\end{aligned}$$

الضرب القياسي في الفضاء

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

قياس الزاوية بين متجهين في الفضاء

إذا كان \vec{v} و \vec{w} متجهين غير صفريين، فإنه يُمكن إيجاد الزاوية بينهما باستعمال الصيغة الآتية:

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| |\vec{w}|} \right)$$

رموز رياضية

arg سعة العدد المركب

Arg السعة الرئيسة للعدد المركب

JD دينار أردني

m متر

km كيلومتر

cm سنتيمتر

kg كيلوغرام

g غرام

s ثانية

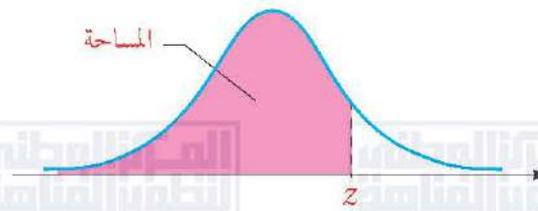
min دقيقة

h ساعة

in إنش

ft قدم

 $\binom{n}{r}$ توافق n من العناصر أُخِذَ منها r كل مرة ${}_n C_r$ $P(A)$ احتمال الحادث A $P(\bar{A})$ احتمال مُتَمَمَّة الحادث A μ الوسط الحسابي σ الانحراف المعياري σ^2 التباين \vec{AB} المستقيم المارَّ بالنقطتين A و B \overline{AB} القطعة المستقيمة التي نقطتا نهايتها A و B \vec{AB} الشعاع الذي نقطة بدايته A ، ويسرُّ بالنقطة B AB طول القطعة المستقيمة AB \vec{AB} متجه نقطة بدايته A ، ونقطة نهايته B \vec{v} المتجه v $|\vec{v}|$ مقدار المتجه v $\angle A$ الزاوية A $\angle ABC$ زاوية ضلعاها \vec{BA} و \vec{BC} $m\angle A$ قياس الزاوية A $\triangle ABC$ المثلث ABC \parallel موازٍ لـ \perp عمودي على $a:b$ نسبة a إلى b \int تكامل غير محدود \int_a^b تكامل محدود $f'(x)$ مشتقة الاقتران $f(x)$



جدول التوزيع الطبيعي المعياري

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998