إدارة المناهج والكتب المدرسية

المادة التعليمية المساندة

الرياضيات

الفصل الدراسي الأول

الصف الحادي عشر

الفرع الأدبي

الناشر
وزارة التربية والتعليم
إدارة المناهج والكتب المدرسية

يسر إدارة المناهج والكتب المدرسية استقبال آرائكم وملحوظاتكم الخاصة بهذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:
هاتف: 8-5/ 4617304 فاكس: 4637569 ص.ب: 1930 الرمز البريدي: 11118
أو بوساطة البريد الإلكتروني: Scientific.Division@moe.gov.jo

عمّان – الأردن، ص.ب: 1930

أشرف على تأليف هذه المادة التعليمية كل من:

د. نــواف العقيل العجارمــة / الأمين العام للشؤون التعليمية

أ. صالح محمد أمين العمري / مدير إدارة المناهج والكتب المدرسية

د. أســامة كامل جــرادات / مدير المناهج

د. زايــد حســن عكــور / مدير الكتب المدرسية

د. إسراء طالـب أبو نحلــه / عضو مناهج الرياضيات (مقررًا)

لجنة تأليف المادة التعليمية:

مهنـد إبراهيـم العسـود   آيــة محمــود حبـش   يزيـد محمـد إسـماعيل

التحرير العلمي: د. إسراء طالب أبو نحله

التحرير اللغوي: د. خليل إبراهيم القعيسي

التحرير الفني: نـداء فـؤاد أبو شنب

التصـــميم: عمـر أحمـد أبوعليـان

الرســـم: عمـر أحمد أبوعليـان

الإنتـــاج: شـيماء جـودة محمـد

دقق الطباعة: مهند إبراهيم العسود

راجع الطباعة: د. إسراء طالب أبو نحله

الطبعة الأولى (تجريبية)

1444هـ / 2022م

قائمة المحتويات

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدّمة

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على سيد المرسلين سيدنا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين.

وبعدُ؛ فانطلاقًا من رؤية وزارة التربية والتعليم في تحقيق التعليم النوعي المتميّز على نحوٍ يلائم حاجات الطلبة، ويمكنهم من امتلاك المعارف والمهارات الأساسية اللازمة للتكيّف مع متطلبات الحياة وتحدياتها، مزوّدين بمعارف ومهارات وقِيَم تساعد على بناء شخصياتهم بصورة متوازنة، فقد أُعدّت المادة التعليمية المساندة لمبحث الرياضيات على شكل أنشطة بسيطة رشيقة مختزلة ومكثّفة وجاذبة تتيح للطلبة ممارسة التعلم الذاتي النشط وتنبثق من متطلبات التعلم السابق وتبني عليها وتدعم تعلمهم، وتعالج مواطن الضعف لديهم، وتراعي فروقاتهم الفردية ودرجات إتقانهم المتفاوتة للمفاهيم والمهارات اللازمة، وبشكل يسهل على المعلم متابعة تقدم سير التعلم لدى طلبته.

ونضع بين أيديكم كتاب المادة التعليمية المساندة في مبحث الرياضيات للصف الحادي عشر، مُعينًا ومُيسّرًا؛ على وجه الإفادة والاسترشاد وسعيًا إلى الانتقال بالطالب انتقالًا سلسًا في تحقيق نتاجات التعلّم السّابقة لتعويض ما فات الطالب تعلّمه، و تعزيز ما يمتلكه؛ ليتمكّن من امتلاك المعارف والمهارات المطلوبة منه في صفّه الحاليّ جنبًا إلى جنب مع ما يحويه المقرّر الدّراسيّ.

وسنستمرّ في تطوير هذه النسخة وفق التغذية الراجعة، بما يسهم في الوصول إلى المستوى المنشود من جودة التعليم.

والله الموفّق

الوحدة (1) البرمجة الخطية

1
حل المتباينات الخطية بمتغيرين وأنظمتها بيانيًّا

- أحل متباينة خطية بمتغيرين بيانيًّا.
- أحل نظام متباينات خطية بمتغرين بيانيًّا.

2
البرمجة الخطية

- أحل مسائل حياتية باستخدام طريقة البرمجة الخطية.

1 حل المتباينات الخطية بمتغيرين وأنظمتها بيانيًّا

النتاجات

- أحل المتباينة الخطية بمتغيرين بيانيًّا.
- أحل نظام المتباينات الخطية بمتغيرين بيانيًّا.

النشاط 1 تمثيل المعادلة الخطية بمتغيرين بيانيًّا

1) أمثل المعادلة $y = 2x - 3$ بيانيًّا

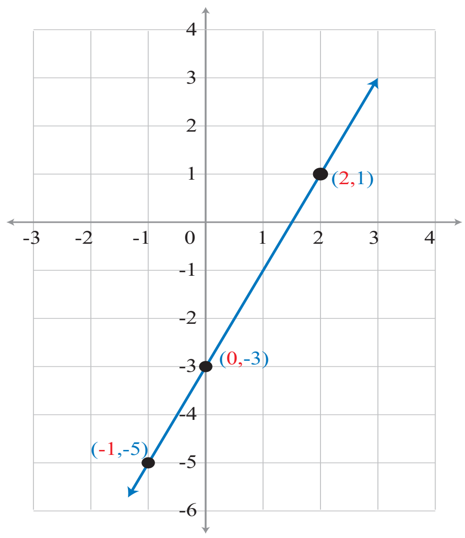
لتمثيل المعادلة الخطية بمتغيرين x و y أنشئ جدولًا كما يأتي:

الخطوة (1) أختار قِيَمًا للمتغير x، ثم أجد قيم المتغير y المقابلة لها.

الزوج المرتب	قيم y	التعويض في المعادلة	قيم x
(x, y)	y	$2x - 3$	x
$(2, 1)$	1	$2(2) - 3$	2
$(0, -3)$	-3	$2(0) - 3$	0
$(-1, -5)$	-5	$2(-1) - 3$	-1

أتذكر
المعادلة الخطية هي معادلة تكون أسس المتغيرات فيها 1 مثل $y = x + 3$

الخطوة (2) أمثل الأزواج المرتبة على المستوى الإحداثي وأصل بينها بخط مستقيم



أتذكر
تسمى المعادلة الخطية هذا الاسم لأن التمثيل البياني لها على شكل خط مستقيم.

2) أمثل المعادلة $y = 2 - 3x$ بيانيًّا

الزوج المرتب (x , y)	قيم y	التعويض في المعادلة $2 - 3x$	قيم x

3) أبين أي النقاط الآتية تمثل حلًّا للمعادلة الخطية $y = x + 1$

حل/ ليست حلًّا	اختبار النقطة	النقطة
ليست حلًّا	$1 \stackrel{?}{=} 2 + 1$	$(2 , 1)$
حل	$4 \stackrel{?}{=} 3 + 1$	$(3 , 4)$
......	....	$(0 , 1)$
......	....	$(-3 , 2)$

أتذكر
جميع النقاط الواقعة على المستقيم هي حلول للمعادلة.

4) أبين أي النقاط الآتية تمثل حلًّا للمعادلة الخطية $y = 3x - 4$ في الجدول الآتي:

حل/ ليست حلًّا	اختبار النقطة	النقطة
		(0, 0)
		(0, −4)
		(1, −5)
		(2, 2)

5) أمثل المعادلات الآتية بيانيًّا:

1. $x - 2y = 3$
2. $x = 5$

النشاط 2 حل المتباينة الخطية بمتغيرين بيانيًّا

1) أميز الأزواج المرتبة التي تمثل حلًّا للمتباينة:

$3x - y > 4$

حل/ ليست حلًّا	اختبار النقطة	النقطة
حل	$3(2) - 1 = 5 > 4$	$(2 , 1)$
....	......	$(3 , 4)$
ليست حلًّا	$3(0) - 1 = -1 \ngtr 4$	$(0 , 1)$
......	....	$(-3 , 2)$

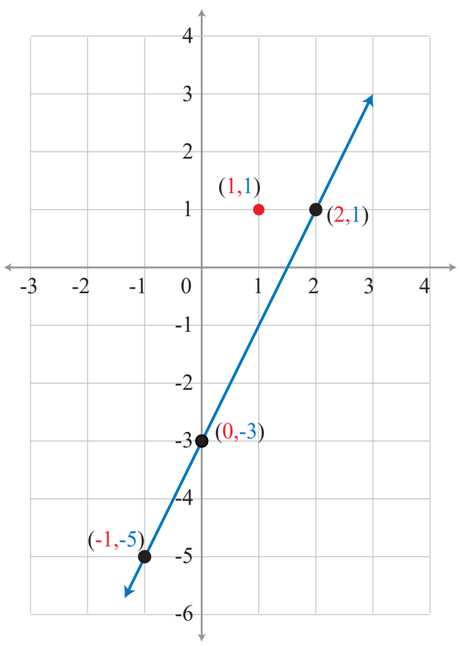
أتذكر

المتباينة الخطية بمتغيرين كالمعادلة الخطية بمتغيرين، إلا أنها تحوي إحدى إشارات المقارنة بدل المساواة، مثل: $2x + 3y \geq 5$

2) أحدد منطقة حل المتباينة $2x - 3 \geq y$ بيانيًّا:

الخطوة(1) أمثل المعادلة المرافقة للمتباينة وهي معادلة المستقيم الحدودي.

$2x - 3 = y$ (مُثِّلَتْ سابقًا في النشاط 1 البند1) كما في الشكل المجاور



أتعلم

المستقيم الحدودي: هو الخط المستقيم الذي يقسم المستوى الإحداثي إلى جزأين، أحدهما منطقة الحلول الممكنة.

الخطوة (2) أحدد منطقة حل المتباينة كما يأتي:

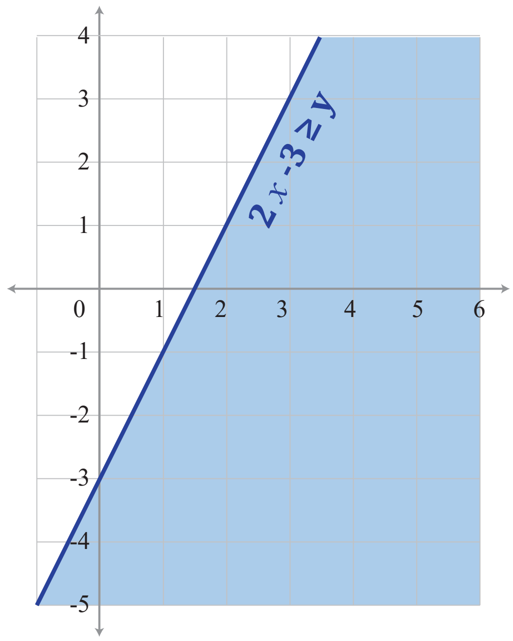
أختار أي نقطة في المستوى ليست على الخط المستقيم، مثل النقطة $(1,1)$، ثم أختبر النقطة إن كانت حلًّا للمتباينة أم لا بتعويضها بالمعادلة المرافقة للمتباينة كما يأتي:

$2(1) - 3 = -1 \ngeq 1$؛ الاحظ أنّ النقطة $(1،1)$ أفضت إلى ناتج غير صحيح للمتباينة، لذلك أظلل الجزء من المستوى البياني الذي لا تقع فيه هذه النقطة.

الخطوة (3) أظلل منطقة حل المتباينة:

أي نقطة تقع في المنطقة المظللة تمثل حلًّا للمتباينة مثل النقاط: $(4,4),(-1,2)$؟

هل النقاط الواقعة على المستقيم حل للمتباينة؟

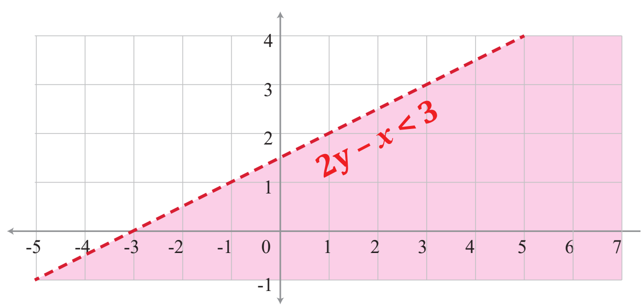


إذا كانت المتباينة تحوي الإشارتين $\geq$ أو $\leq$، فإن النقاط الواقعة على المستقيم تمثل حلًّا للمتباينة، أي أنها ضمن منطقة الحل؛ لذلك أرسم المستقيم الحدودي **مُتصِلًا**.

إذا كانت المتباينة تحوي الإشارتين $>$ أو $<$، فإن النقاط الواقعة على المستقيم ليست ضمن منطقة الحل؛ لذلك أرسم المستقيم الحدودي **مُتقطِّعًا**.

3) أحدد منطقة حل المتباينات الآتية:

1. $2y - x < 3$



ألاحظ أن الخط الحدودي متقطع لعدم وجود المساواة في المتباينة.

2. $2x + 4y > -1$
3. $x - 2y < 3$
4. $x > 5$

النشاط 3 حل نظام المتباينات الخطية بمتغيرين بيانيًّا

1) أحدد منطقة حل نظام المتباينات الآتي:

$$2y - x < 3$$

$$2x - 3 \geq y$$

لتحديد منطقة حل نظام المتباينات الخطية بمتغيرين بيانيًّا، أتّبع الخطوات الآتية:

- أمثل منطقة حل كل متباينة في النظام على المستوى الإحداثي نفسه.

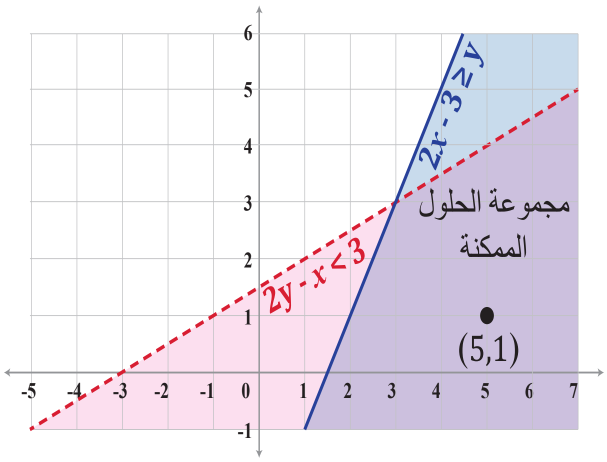
- أظلل المنطقة المشتركة بين مناطق حل المتباينات جميعها التي تمثل حل النظام، وتتضمن مجموعة الأزواج المرتبة التي تحقق جميع المتباينات. مثال: الزوج المرتب (5,1) يقع ضمن منطقة الحل ويحقق المتباينات جميعها.

$$2(1) - 5 < 3$$

$$2(5) - 3 \geq 1$$

أتعلم

نظام المتباينات الخطية بمتغيرين نظام يحوي متباينتين أو أكثر.

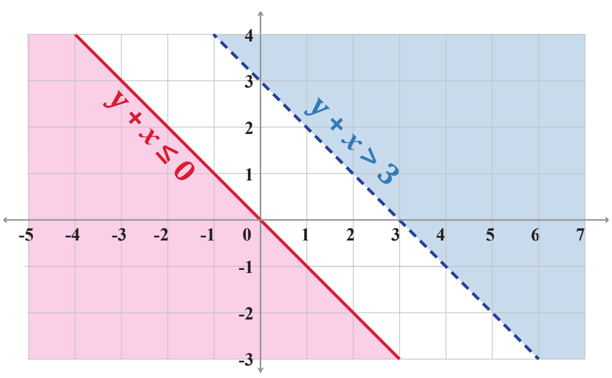


2) أحدد منطقة حل نظام المتباينات الآتية:

$$y + x > 3$$

$$y + x \leq 0$$

ألاحظ من التمثيل البياني للنظام في الشكل المجاور أنه لا توجد منطقة مشتركة بين حلول المتباينتين؛ لأن المستقيمين الحدوديين **متوازيان**، وعليه، فإن النظام **لا حل له**. ويرمز إليها بالمجموعة الخالية أو { } أو $\emptyset$.



هل يمكنني إيجاد عددين مجموعهما سالب وأكبر من 3؟ ....

3) أحدد منطقة حل النظام الآتي:

$$2x + 2y \geq 5$$
$$x + 3y < 0$$
$$x > 2$$

4) مصنع ينتج نوعين من القمصان. إذا كان عدد القطع المَعيبة من النوعين لا يزيد على 10 قطع، علمًا أنّ القطع المَعيبة من النوع الأول أقل من مِثْلَي القطع المَعيبة من النوع الثاني.

أكتب نظام المتباينات الذي يمثل إنتاج القطع المَعيبة من المصنع، ثم أحدد منطقة حله بيانيًّا.

الحل:

أفترض أن عدد القطع المَعيبة من النوع الأول $= x$

أفترض أن عدد القطع المَعيبة من النوع الثاني $= y$

عدد القطع المَعيبة من النوعين لا يزيد على 10 قطع؛ أي أن $x + y \leq 10$

القطع المَعيبة من النوع الأول أقل من مِثْلَي القطع المَعيبة من النوع الثاني؛ أي أن $x \leq 2y$

ألاحظ أن المصنع ينتج من كلا النوعين، ولا تكون قِيَمًا سالبة؛ أي أن $x \geq 0,\ y \geq 0$ أي أنّ منطقة الحل بالربع الأول.

إذًا، نظام المتباينات هو:

$$x + y \leq 10$$
$$x \leq 2y$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

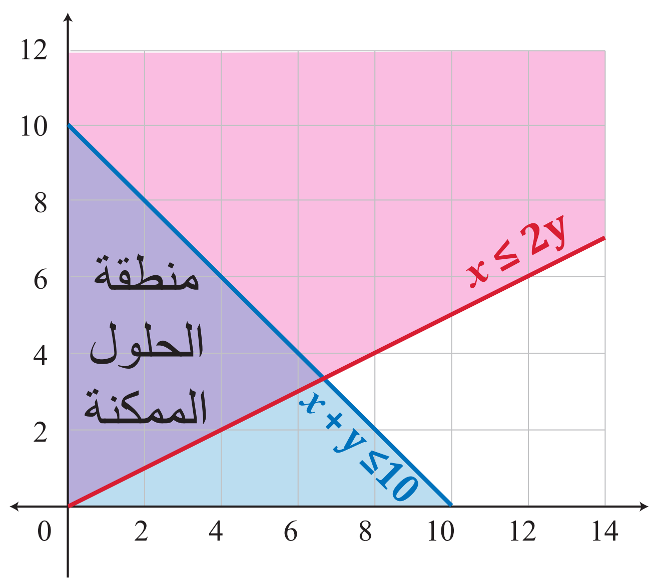
أمثل منطقة حل النظام كما في الشكل الآتي:

$x + y = 10$

x	y	(x, y)
0	10	(0, 10)
2	8	(2, 8)
.....	.....	.....

$x = 2y$

x	y	(x, y)
0	10	(0, 0)
2	1	(2, 1)
4	2	.....
.....	.....	.....



5) يريد نجار شراء نوعين من الخشب. فإذا كان ثمن المتر الطولي من النوع الأول هو 4 دنانير، وثمن المتر الطولي من النوع الثاني هو 6 دنانير، ويريد شراء خشب لا يزيد سعره على 72 دينارًا، على أن يكون مجموع الأمتار من النوعين لا يقل عن 10 أمتار طولية. أجد عدد الأمتار التي يمكن للنجار شراؤها من كل نوع.

الحل:

أفترض أن عدد الأمتار من النوع الأول = x

أفترض أن عدد الأمتار من النوع الثاني = ...

المعطيات: ....

المطلوب: ....

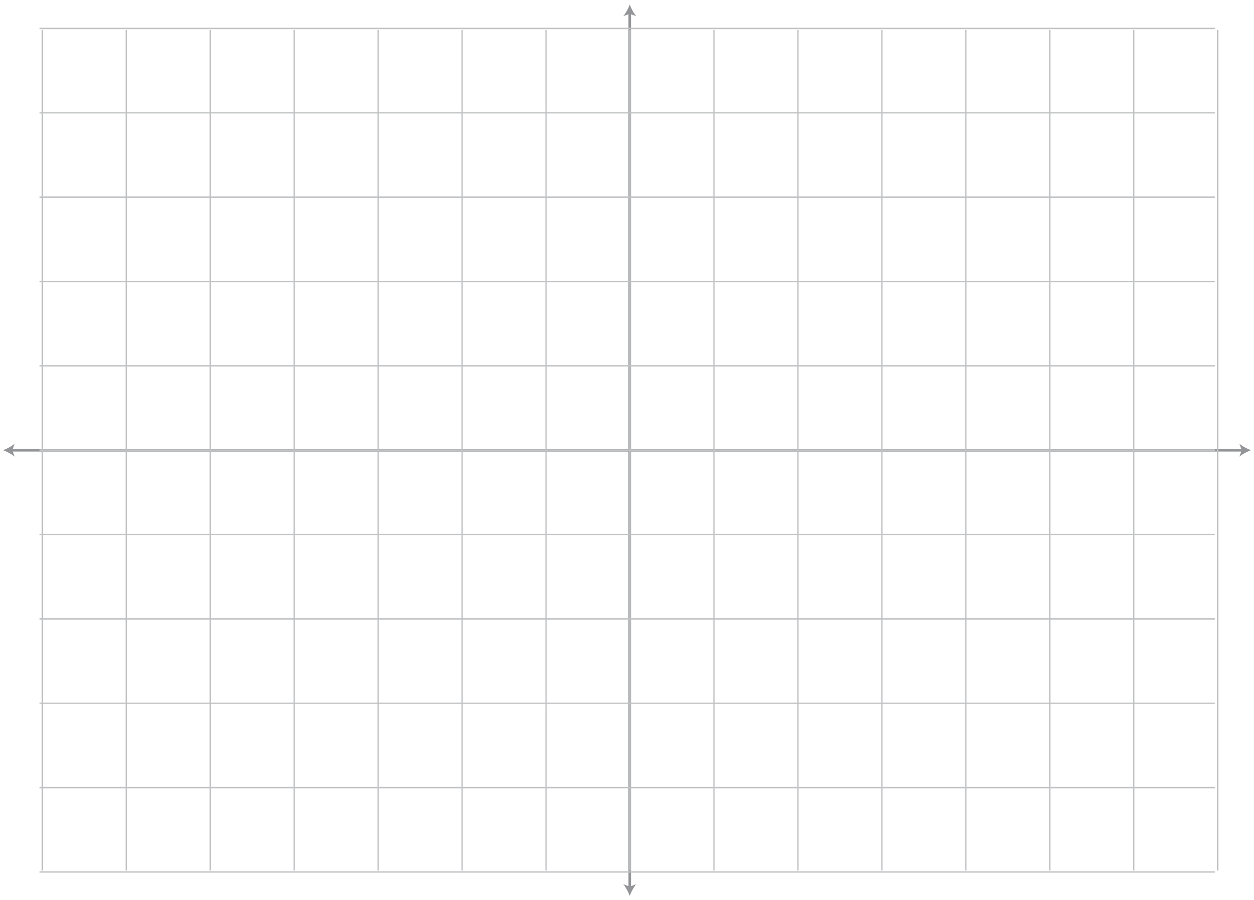
المتباينات: ....

إذًا، نظام المتباينات هو: ....

....

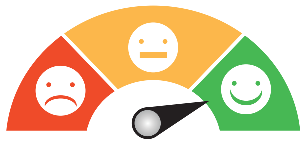
....

أحدد منطقة حل النظام بيانيًا في المستوى الإحداثي الآتي:



أتأمل في تعلمي

– أضع المؤشر على الوجه الذي يصف أدائي في موضوع (حل المتباينات الخطية بمتغيرين وأنظمتها بيانيًّا).



- إن استطعت حل الأنشطة دون مساعدة.
- إن حللت معظم الأسئلة في الأنشطة واحتجت إلى مساعدة قليلة.
- إن احتجت إلى مساعدة على حل أكثر من نصف الأسئلة في الأنشطة.

– أحدد الصعوبة التي واجهتني وموضوع النشاط الذي احتجت فيه إلى المساعدة، ثم أصف كيف حصلت على المساعدة.

– أحدد الإجراءات التي سأتّبعها لتجاوز هذه الصعوبة.

2 البرمجة الخطية

النتاجات

- أحل مسائل حياتية باستخدام طريقة البرمجة الخطية.

النشاط 1 حل نظام معادلتين خطيتين بالحذف أو التعويض

1) أستخدم طريقتَي الحذف والتعويض في إيجاد نقاط التقاطع بين المستقيمين $2x + y = 5$ و $x - y = 4$ جبريًّا.

طريقة الحذف

أجمع المعادلتين لحذف المتغير y

$$2x + y = 5$$
$$x - y = 4$$

أحسب قيمة y بتعويض قيمة x في إحدى المعادلتين

$$3x = 9 \Longrightarrow x = 3$$
$$2(3) + y = 5 \Longrightarrow y = -1$$

إذًا، نقطة تقاطع المستقيمين هي النقطة $(3,-1)$

طريقة التعويض

أجعل x في أحد طرفي المعادلة $(x - y = 4)$

$$x = 4 + y$$

أعوض في المعادلة $(2x + y = 5)$

$$2(4 + y) + y = 5$$

أبسط المعادلة الناتجة وأحلها

$$8 + 2y + y = 5$$
$$\Longrightarrow 3y = -3$$
$$\Longrightarrow y = -1$$

أعوض قيمة y في المعادلة وأحسب قيمة x

$$x = 4 + (-1) \Longrightarrow x = 3$$

إذًا، نقطة تقاطع المستقيمين هي النقطة $(3,-1)$

2) أحل نظام المعادلات الآتي:

$$3x + 2y = 6$$
$$x + y = -4$$

النشاط 2 تكوين اقتران الهدف والقيود

1) تطبع مطبعة نوعين من الكتب: كتب علوم، وكتب أدب. إذا كانت كلفة الورق لكتاب العلوم 3 دنانير، ولكتاب الأدب 4 دنانير، وكلفة الحبر لكتاب العلوم 8 دنانير، ولكتاب الأدب 10 دنانير، وكان ربح المطبعة من كتاب العلوم هو 20 دينارًا، وربحها من كتاب الأدب 25 دينارًا، علمًا أن المطبعة تملك ورقًا قيمته 200 دينار، وتملك حبرًا قيمته 400 دينار. أجد العدد الذي يجب أن تطبعه المطبعة من كل نوع لتحقيق **أكبر ربح** ممكن. (أكوِّن البرنامج الخطي فقط).

لتكوين البرنامج الخطي أكوِّن جدول المعطيات:

نوع الكتاب	عدد الكتب	كلفة الورق	كلفة الحبر	الربح (P)
علوم	x	$3x$	$8x$	$20x$
أدب	y	4y	10y	25y
		قيمة المتوافر 200	قيمة المتوافر 400	

1 ما المطلوب من السؤال؟ أحدد عدد الكتب التي يمكن طباعتها من النوعين لتحقيق أكبر ربح

أجد أن الربح في جدول المعطيات هو $P = 20x + 25y$، وهذا يسمى اقتران الهدف؛ لأنه يمثل أكبر قيمة ممكنة (عظمى) أو أصغر قيمة ممكنة (صغرى) للاقتران. وهو هدف السؤال

2 ما القيود التي يفرضها السؤال؟

استخدام ورق قيمته محددة أو أقل منها واستخدام حبر بقيمة محددة أو أقل منها

أجد من جدول المعطيات أن كلفة الورق للنوعين معًا هي $3x + 4y$، وأن قيمة ما يتوافر من الورق هي 200 دينار. إذًا، يجب أن تكون كلفة الورق $3x + 4y \leq 200$، وهذا يسمى قيد 1

وكذلك يجب أن تكون كلفة الحبر $8x + 10y \leq 400$، وهذا يسمى قيد 2

3 هل يمكن أن تكون حلول السؤال قِيَمًا سالبة أو أعدادًا غير صحيحة؟ لا يمكن أن يكون الحل سالبًا أو أعدادًا غير صحيحة؛ لأن السؤال يطلب عدد كتب؛ لذلك يجب إضافة قيود أخرى للسؤال، وهي:

$x \geq 0, \ y \geq 0$

إذًا، البرنامج الخطي للمسألة هو:

اقتران الهدف	$P = 20x + 25y$
قيد1	$3x + 4y \le 200$
قيد2	$8x + 10y \le 400$
قيود إضافية	$x \ge 0 , y \ge 0$

ألاحظ أن القيود في البرنامج الخطي هي نظام متباينات خطية بمتغيرين

هل يمكن إنتاج 60 كتاب علوم؟ لماذا؟ لا يمكن؛ لأن الحبر لن يكون كافيًا لذلك من المتباينة الثانية

هل يمكن إنتاج 41 كتاب أدب؟ لماذا؟ ....

2) يعمل مصنع للبسكويت بخطَّي إنتاج، ينتج الخط الأول 20 علبة من النوع A و10 علب من النوع B في اليوم الواحد، كلفة إنتاجها 240 دينارًا، وينتج الخط الثاني 10 علب من النوع A و50 علبة من النوع B في اليوم الواحد، كلفة إنتاجها 200 دينار. فإذا تسلّم المصنع طلبًا لتوريد 150 علبة من النوع A و210 علب من النوع B، فكم يومًا يستغرقه تشغيل الخطين لتلبية الطلب بأقل كلفة ممكنة؟ (أكوِّن البرنامج الخطي فقط).

أنشئ جدول المعطيات:

الخط	عدد أيام التشغيل	عدد العلب (A)	عدد العلب (B)	الكلفة
الأول	x	$20x$	$10x$	$240x$
الثاني	y	$10y$	$50y$	$200y$
		كمية المطلوب 150	كمية المطلوب 210	

البرنامج الخطي:

اقتران الهدف	
قيد1	
قيد2	
قيود إضافية	

النشاط 3 حل المسألة باستخدام البرمجة الخطية

1) أجد قيمة x, y التي تجعل قيمة اقتران الهدف $M = 4x + 5y$ **أكبر ما يمكن** ضمن القيود الآتية:

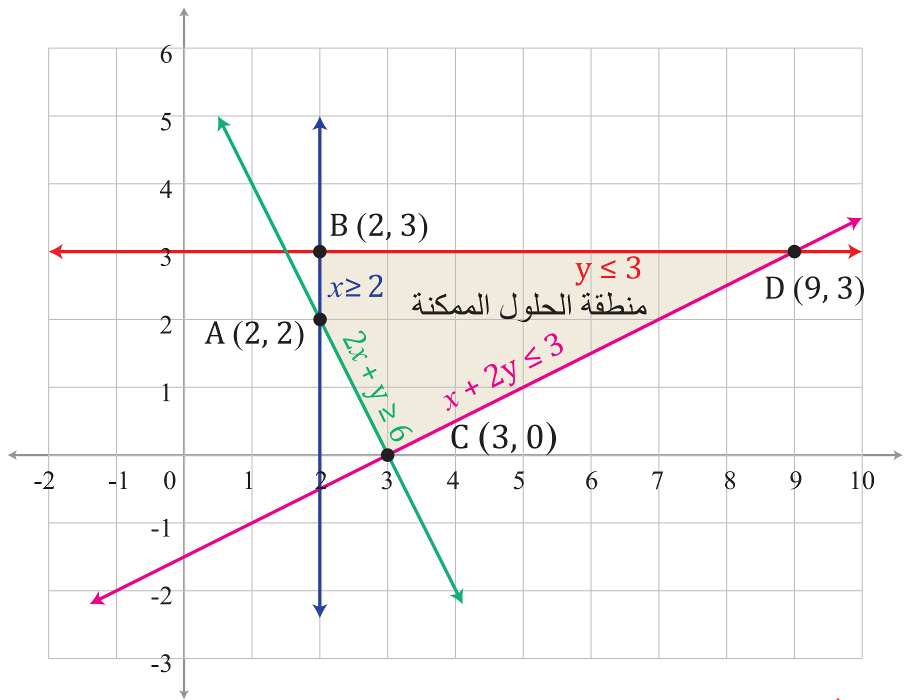
$2x + y \geq 6$

$x - 2y \leq 3$

$y \leq 3$

$x \geq 2$

الخطوة (1) أحدد منطقة حل نظام المتباينات الخطية (القيود) بيانيًّا كما في الشكل الآتي:



ألاحظ أن منطقة الحلول الممكنة التي تحددها القيود هي **منطقة مغلقة**

الخطوة (2) أحـــدد رؤوس منطقـــة الحلـــول الممكنـــة وإحداثياتها وهي النقاط: A,B,C,D.

ألاحظ من الرسم أن إحداثيات الرؤوس هي:

أتعلم

أجد إحداثيات الرؤوس التي تمثل نقاط تقاطع كل مستقيمين جبريًّا عن طريق حل أنظمة المعادلات الخطية.

A	B	C	D
(2,2)	(2,3)	(3,0)	(9,3)

الخطوة (3) أعوض إحداثيات الرؤوس في اقتران الهدف كما يأتي:

النقطة (x, y)	التعويض في اقتران الهدف $M = 4x + 5y$	ناتج التعويض
A (2,2)	$M = 4(2) + 5(2)$	18
B (2, 3)	$M = 4(2) + 5(3)$	23
C (3, 0)	$M = 4(3) + 5(0)$	12
D (9, 3)	$M = 4(9) + 5(3)$	**51**

ألاحظ أن أكبر ناتج تعويض هو 51 وهو ناتج من تعويض إحداثيات النقطة D (9, 3). إذًا، أستنتج أن أكبر قيمة لاقتران الهدف تكون عند $y = 3$, $x = 9$

2) أجد قيمة x, y التي تجعل قيمة اقتران الهدف $R = 3x - 4y$ **أقل ما يمكن** ضمن القيود الآتية:

$2x + y \geq 1$

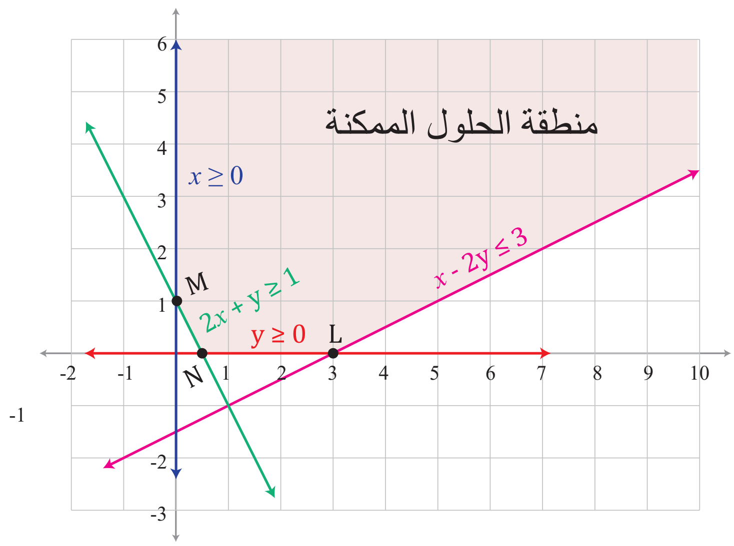
$x - 2y \leq 3$

$y \geq 0$

$x \geq 0$

الخطوة (1) أحدد منطقة حل نظام المتباينات الخطية (القيود) بيانيًّا كما في الشكل الآتي:

ألاحظ أن منطقة الحلول الممكنة التي تحددها القيود هي منطقة **مفتوحة**



الخطوة (2) أحدد .... منطقة الحلول الممكنة وهي النقاط: M ,...... ,......

الخطوة (3) أجد إحداثيات رؤوس منطقة الحلول الممكنة

ألاحظ من الرسم أن إحداثيات الرؤوس هي:

....	N	....
(0,1)	(0.5,0)	.....

الخطوة (4) أعوض إحداثيات الرؤوس في اقتران الهدف كما يأتي:

ناتج التعويض	التعويض في اقتران الهدف $R = 3x - 4y$	النقطة (x ,y)
.....	....	M ....
.....	....	N (0.5,0)
.....	....	L ....

ألاحظ أنَّ أقل ناتج تعويض هو ...... وهو ناتج من تعويض إحداثيات النقطة (......, ...)

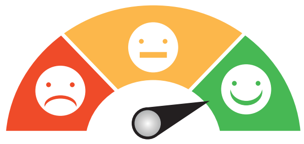
إذًا، أستنتج أن أقل قيمة لاقتران الهدف تكون عند $x = \cdots,\ y = \cdots$

3) يعمل عاملان في ورشة تنتج نوعين من المكاتب المعدنية: النوع A، والنوع B. يصنع أحد العاملين المكاتب، أما الآخر، فيطليها. يستغرق العامل الأول 4 ساعات في صناعة وحدة واحدة من النوع A، و3 ساعات في صناعة وحدة واحدة من النوع B. في حين يستغرق العامل الثاني 3 ساعات في طلاء وحدة واحدة من النوع A، و4 ساعات في طلاء وحدة واحدة من النوع B. يعمل العامل الأول 5 ساعات على الأقل يوميًّا، ويعمل الآخر 7 ساعات يوميًّا حدًّا أقصى. إذا كانت الورشة تحقّق ربحًا قيمته 60 دينارًا (من كل وحدة)، أجد عدد الوحدات المراد إنتاجها من كل نوع لتحقيق **أكبر ربح ممكن**.

4) أحل البرنامج الخطي الوارد في النشاط 2 البند 2.

أتأمل في تعلمي

– أضع المؤشر على الوجه الذي يصف أدائي في موضوع (البرمجة الخطية).



- إن استطعت حل الأنشطة دون مساعدة.
- إن حللت معظم الأسئلة في الأنشطة واحتجت إلى مساعدة قليلة.
- إن احتجت إلى مساعدة على حل أكثر من نصف الأسئلة في الأنشطة.

– أحدد الصعوبة التي واجهتني وموضوع النشاط الذي احتجت فيه إلى المساعدة، ثم أصف كيف حصلت على المساعدة.

– أحدد الإجراءات التي سأتّبعها لتجاوز هذه الصعوبة.

التقويم الختامي

1) أمثل المعادلتين الآتيتين بيانيًّا:

1. $2x + 4y = -1$
2. $y = 3$

2) أحدد منطقة حل المتباينتين الآتيتين بيانيًّا:

1. $y \geq 2x$
2. $y \leq 3$

الوحدة (2) مبدأ العد والتباديل والتوافيق

1
مبدأ العد الأساسي

- أتعرف مبدأ العد الأساسي.
- أستخدم مبدأ العد في حل المسائل .

2
مضروب العدد

- أتعرف مضروب العدد الصحيح غير السالب.
- أستخدم مضروب العدد الصحيح غير السالب في حل مسائل حياتية.

3
التباديل والتوافيق

- أتعرف مفهوم التباديل.
- أتعرف مفهوم التوافيق.
- أستخدم التباديل في حل مسائل حياتية.
- أستخدم التوافيق في حل مسائل حياتية.

1 مبدأ العد الأساسي

النتاجات

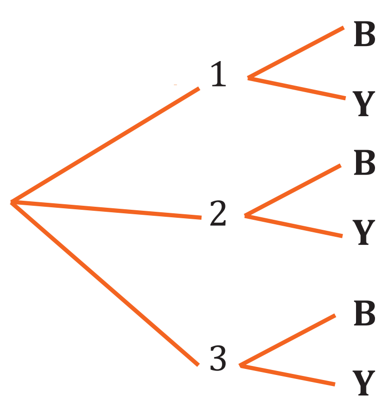
- أتعرف مبدأ العد الأساسي.
- أستخدم مبدأ العد في حل المسائل.

نشاط 1 عدد النواتج الممكنة

1) أجد عدد النواتج الممكنة في كل من التجارب الآتية:

التجربة	النواتج الممكنة	عدد النواتج الممكنة
(1) رَمْي قطعة نقدية مرة واحدة	H أو T	2
(2) رَمْي حجر نرد مرة واحدة		
(3) سَحْب بطاقة واحدة من صندوق يحوي 4 بطاقاتٍ حمراء و6 زرقاء و3 بيضاء		
(4) تسجيل نتيجة مباراة كرة القدم بين طلاب الصفين التاسع والعاشر	فوز أو تعادل أو خسارة	

2) صندوقان، الأول منهما يحتوي بطاقات متماثلة مكتوبًا عليها الأرقام: 1، 2، 3، ويحتوي الثاني كرات متماثلة زرقاء وصفراء. أجد عدد النواتج الممكنة لسحب بطاقة ثم كرة بالطرائق الآتية:

المخطّط الشجري	التوضيح
المرحلة الثانية المرحلة الأولى 	✓ التجربة من مرحلتين ✓ المرحلة الأولى فيها 3 خيارات ✓ المرحلة الثانية فيها خياران ✓ أرسم شجرة تتكون من مرحلتين النواتج الممكنة هي: **1B, 1Y, 2B, 2Y, 3B, 3Y** إذًا، يمكن سحب بطاقة وكرة بـ 6 طرائق مختلفة.

القائمة المنظمة	الجدول
	لأنّ التجربة تتكون من مرحلتين، فيمكن استخدام الجدول في إيجاد النواتج الممكنة.

	B	Y
1	1B	1Y
2	2B	2Y
3	3B	3Y

1B	2B	3B
1Y	2Y	3Y

للتعبير عن النواتج بالكلمات:

– نتيجة السحب، ستكون بطاقة مكتوبًا عليها 1 وكرة لونها أزرق

– نتيجة السحب، ستكون بطاقة مكتوبًا عليها 1 وكرة لونها أصفر

– نتيجة السحب، ستكون بطاقة مكتوبًا عليها 2 وكرة لونها........

أكمل النواتج الثلاثة الأخرى الممكنة.

3) أجد عدد النواتج الممكنة في تجربة رمي قطعة نقدية وحجر نرد مرة واحدة بالطرائق الآتية:

المخطط الشجري	الجدول	القائمة المنظمة
		H,1 T,1 H,2 T,2 H,3 T,3 H,4 T,4 H,5 T,5 H,6 T,6

4) أجد عدد الأعداد الممكن تكوينها من منزلتين، مُستخدِمًا الأرقام: 2، 6 ،7، ومستعينًا بالجدول في كل من الحالات الآتية:

1 إذا سُمِحَ بتكرار الرقم بالمنزلتين، أجد جميع الأعداد الممكن تكوينها.

العشرات \ الآحاد	2	6	7
2	22	26	27
6	......	66	......
7	72	76	......

عدد الأعداد الممكن تكوينها هو 9

2 إذا لم يُسمَح بتكرار الرقم بالمنزلتين، سأستثني الأعداد التي فيها الآحاد والعشرات متشابهة .

العشرات \ الآحاد	2	6	7
2	~~22~~	26	27
6	62	~~66~~	67
7			~~77~~

عدد الأعداد الممكن تكوينها هو ....

5) يحتوي صندوق أربع بطاقات متماثلة مكتوبًا عليها الأرقام: 9،5،3،2، سُحِبَتْ من الصندوق بطاقتان على التوالي. ما عدد النواتج الممكنة في كل من الحالات الآتية باستخدام القائمة المنظمة؟

1 إذا سُمِح بإعادة البطاقة المسحوبة الأولى	2 إذا لم يُسمَح بإعادة البطاقة المسحوبة الأولى

النشاط 2 مبدأ العد

تطبيقات 1 مبدأ العد الأساسي

1) أراد وسام شراء بسكويت ومشروب ساخن من متجر، فوجد فيه البسكويت بشكلين: مستطيل ودائري، وثلاثة أنواع من المشروبات الساخنة: الشاي، والقهوة، ونسكافيه. بكم طريقة يمكن لوسام اختيار نوع واحد من المشروبات الساخنة وشكل واحد من البسكويت؟

لاختيار البسكويت، هناك طريقتان (لوجود نوعين) ولاختيار المشروبات الساخنة هناك 3 طرائق (لوجود 3 أنواع)، فينتج 6 طرائق لشراء بسكويت ومشروب ساخن، وأستطيع أن أجد عدد الطرائق باستخدام **مبدأ العد الأساسي**.

بسكويت دائري شاي	بسكويت مستطيل شاي
بسكويت دائري قهوة	....
بسكويت دائري نسكافيه	....

باستخدام مبدأ العد الأساسي:

عدد طرائق اختيار				
	ثلاثة أنواع مشروبات		بسكويت بنوعيه	
6	=	3	×	2

2) أجد عدد الطرائق الممكنة لتكوين عدد من منزلتين مختلفتين، مُستخدِمًا الأرقام: 1، 4، 6، 9

عدد طرائق اختيار				
	منزلة الآحاد		منزلة العشرات	
12	=	4	×	3

الحل: منزلتان مختلفتان، أي أن الآحاد تختلف عن العشرات (أو دون تكرار الرقم نفسه) إذا كان رقم الآحاد 1، فإن الرقم في منزلة العشرات سيكون أحد الأرقام: 4، 6 ، 9 وعليه يوجد لمنزلة الآحاد **أربع** طرائق، ولمنزلة العشرات **ثلاث** طرائق .

أكتب هذه الأعداد.

3) أجد عدد الطرائق الممكنة لتكوين رمز سري لخزنة تتكون من كلمة «عمان»، وعدد من منزلتين مختلفتين من الأرقام: 3، 4، 5، 6، 7، 9 في كل حالة من الحالات الآتية:

1 آحاد العدد 3.

الحل: الآحاد هناك فقط خيار واحد وهو العدد 3، أما العشرات، فهناك 5 خيارات، وهي: 4، 5، 6، 7، 8

عدد طرائق اختيار				
	منزلة الآحاد		منزلة العشرات	
.....	=	.....	×	.....

الأعداد هي: 43، 53، 73، 63، 93

اذًا، الرموز الممكنة هي: عمان 43، عمان 53، عمان 73، عمان 93

2 العدد زوجي

الحل: لمنزلة الآحاد طريقتان، وهما .... ولمنزلة العشرات .... طرائق،

وهي الأعداد: ....

عدد طرائق اختيار				
	منزلة الآحاد		منزلة العشرات	
..... =	.....	×	.....	

الرموز هي:

3 العدد أقل من 60

هل يمكن أن يكون الرقم في منزلة العشرات 6 أو رقم أكبر؟

4 العدد يقبل القسمة على 5

4) أراد كنان شراء بنطال رياضي وقميص رياضي من محل ألبسة يتوافر فيه 5 أنواع من القمصان، و3 أنواع من البناطيل. أجد عدد الطرائق الممكنة لاختيار الزي الرياضي.

5) أجد عدد الطرائق الممكنة لتكوين كلمة (ليس بالضرورة لها معنًى) من حرفين مختلفين، مُستخدِمًا الأحرف الآتية: ن، م، ع، ل، ف.

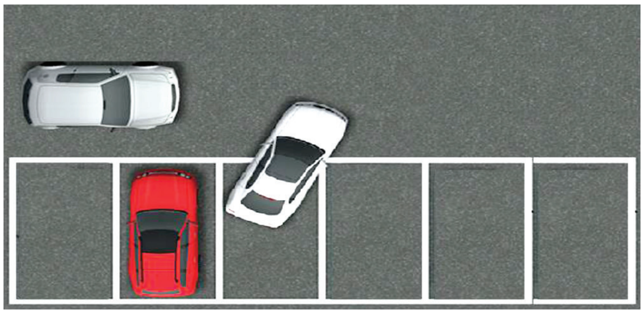
عدد طرائق اختيار			
	الحرف الثاني		الحرف الأول
..... =	.....	×	.....

6) أجد عدد الطرائق التي يمكن أن يجلس بها أمير وحسن على 8 مقاعد مختلفة على استقامة واحدة.

1) أجد عدد الطرائق التي يمكن أن تصطف بها 3 سيارات في موقف للسيارات فيه 6 مواقف فارغة على استقامة واحدة.

الحل: السيارة الأولى أمامها 6 مواقف فارغة تصطف في موقف واحد.

السيارة الثانية أمامها 5 مواقف فارغة السيارة الثالثة أمامها 4 مواقف فارغة عدد الطرائق الممكنة لاصطفاف 3 سيارات هو.....



عدد الأماكن المتاحة (الخالية)			
	السيارة الثالثة	السيارة الثانية	السيارة الأولى
..... =	..... ×	..... ×	.....

2) لحديقة ما أربعة أبواب، أراد ريان الدخول من أحد الأبواب والخروج من باب آخر. أجد عدد الطرائق الممكنة لذلك.

ستُجرى هذه التجربة عبر مرحلتين:

المرحلة الأولى: الدخول من أحد الأبواب وهي **4 طرائق.**

المرحلة الثانية: الخروج سيكون من بوابة مختلفة عن بوابة الدخول فيكون عددها .... أبواب ممكنة للخروج.

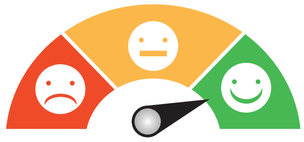
الحل:

عدد الطرائق الممكنة لهذه التجربة ....

3) أجد عدد الطرائق التي يمكن بها تكوين كلمة من ثلاثة أحرف مختلفة من مجموعة الحروف: (ك، م، ن، ل، هـ)، على أن يكون الحرف الثاني (م)، وليس شرطًا أن يكون للكلمة معنًى.

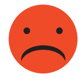
أتأمل في تعلمي

– أضع المؤشر على الوجه الذي يصف أدائي في موضوع (مبدأ العد الأساسي).



 إن استطعت حل الأنشطة دون مساعدة.

 إن حللت معظم الأسئلة في الأنشطة واحتجت إلى مساعدة قليلة.

 إن احتجت إلى مساعدة على حل أكثر من نصف الأسئلة في الأنشطة.

– أحدد الصعوبة التي واجهتني وموضوع النشاط الذي احتجت فيه إلى المساعدة، ثم أصف كيف حصلت على المساعدة.

– أحدد الإجراءات التي سأتّبعها لتجاوز هذه الصعوبة.

2 مضروب العدد

النتاجات

- أتعرف مضروب العدد الصحيح غير السالب.
- أستخدم مضروب العدد الصحيح غير السالب في حل مسائل حياتية.

النشاط 1 مفهوم مضروب العدد

1) أجد عدد الطرائق الممكنة لتوزيع أربعة أقلام ملونة على أربع طالبات في ما يأتي:

الحل:

عدد الأقلام المتوافرة لاختيار كل من								
		الطالبة الرابعة		الطالبة الثالثة		الطالبة الثانية		الطالبة الأولى
24	=	1	×	2	×	3	×	4

2) أجد عدد الطرائق الممكنة لجلوس 6 أشخاص على ستة مقاعد على استقامة واحدة في ما ياتي:

عدد الطرائق الممكنة لكل شخص												
		السادس		الخامس		الرابع		الثالث		الثاني		الأول
720	=	1	×	2	×	3	×	4	×	5	×	6

ألاحظ من المثالين السابقين أن الناتج هو الضرب تنازليًا من العدد وصولًا إلى العدد 1

يمكن التعبير عنها بالرزمز !4 يقرأ **مضروب العدد 4** $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

أكتب !6 وتقرأ مضروب العدد 6 $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

بالكلمات مضروب العدد الصحيح الموجب n هو حاصل ضرب الأعداد الصحيحة الموجبة التي هي أصغر من (أو تساوي n)

بالرموز: $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$

بالتعريف، فإنّ: $1! = 1$ $0! = 1$

3) أجد ناتج كل مما يأتي:

$3! = \overbrace{3 \times 2 \times 1}^{3!} = 6$	أستنتج أنه يمكن كتابة $n! = n(n-1)!$ $6! = 6\,(6-1)!$ $6! = 6\,(6-1)\,(6-2)\,(6-3)\,(6-4)\,\,(6-5)$
$4! = 4 \times \boxed{3 \times 2 \times 1} = 24$ $4! = 4 \times 3!$	
$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$	$5! = 5 \times 4! = 5 \times 24 = 120$
$6! =$	
$7! =$	

النشاط 2 إيجاد القيمة العددية لمقادير تحوي المضروب

أجد ناتج كل مما يأتي:

1 $(3+4)! = 7!$ $= 7 \times 6!$ $= 7 \times 720 = 5040$	2 $3! + 4!$ $3! + 4! = 6 + 24$ $= 30$
3 $(9-5)!$ $(9-5)! = 4!$ $= 24$	4 $9! - 5!$
أستنتج أن:	

5 $\dfrac{6!}{4!}$ $= \dfrac{6 \times 5 \times \cancel{4!}}{\cancel{4!}}$ $= 6 \times 5$ $= 30$	6 $\dfrac{11!}{8!}$
7 $\dfrac{8!}{5! \times 3!}$ $= \dfrac{8 \times 7 \times \cancel{6} \times \cancel{5!}}{\cancel{5!} \times \cancel{6}}$ $= 8 \times 7$ $= 56$	8 $\dfrac{12!}{9! \times 2!}$

نشاط 3 مواقف حياتية

1) تقترح بعض شركات السيارات على زبائنها تبديل مواضع إطارات السيارة كل مسافة معينة.

1 كم طريقة مختلفة يمكن بها تبديل مواضع الإطارات الأربعة؟

2 إذا ثُبِّتَ أحد الإطارات في مكانه، فكم يصبح عدد طرائق تبديل الإطارات؟

2) طلب المدير الإداري في إحدى الشركات الاجتماع بـ 10 موظفين فرادى لمناقشة إنجازاتهم وتطور العمل.

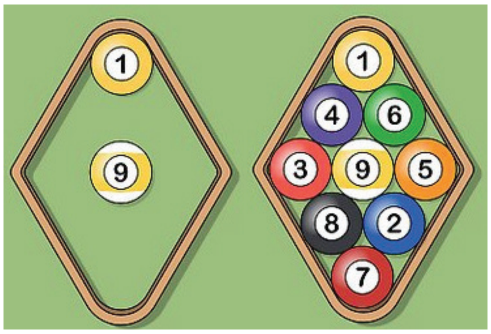
1 كم طريقة يستطيع بها المدير تنفيذها؟

2 أراد المدير بعد شهر الاجتماع بالموظفين البالغ عددهم 10، على أن يكون وسام وأمير وعلي معًا في اجتماع واحد، والبقية بشكل فردي. بكم طريقة يمكنه ذلك؟

كم عدد الاجتماعات التي سيجريها المدير؟

بكم طريقة يمكن ترتيب هذه الاجتماعات؟

3) ترتب 9 كرات مرقمة من 1 إلى9 على شكل معين، بحيث توضع الكرة 1 في المقدمة، والكرة 9 في المنتصف كما في الشكل المجاور، وتوضع بقية الكرات عشوائيًا. أجد عدد طرائق ترتيب الكرات.



نشاط 4 عدد الطرائق لترتيب حروف

عدد طرائق ترتيب الأحرف الثلاثة: K,L,M هو 6 أي !3 وهي KLM,.....,.....,.....,.......,.....

عدد طرائق ترتيب الأحرف: K,L,L هو ......، وهي: KLL, LKL, LLK

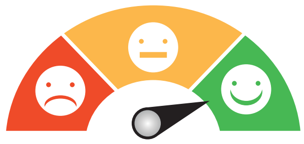
عندما تكرر حرف، قل عدد مرات ترتيب الحروف بصورة مختلفة من 6 إلى 3 أي أصبحت $\frac{3!}{2!}$

أجد عدد الطرائق لترتيب حروف كل كلمة مما يأتي:

ألاحظ أن الكلمة تحوي 10 أحرف تكرر منها الأحرف الآتية: $S_1, S_2, S_3, T_1, T_2, T_3, I_1, I_2$ أجد عدد طرائق ترتيب 10 أحرف وأستثني طرائق ترتيب الأحرف المكررة (أي أقسم على عدد مرات ترتيب الأحرف المكررة)؛ لأنه لا يوجد فرق بين ترتيب S_1, S_2 و S_2, S_1	1 STATISTICS $\frac{10!}{3! \times 3! \times 2!}$ $\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6} \times 5 \times \cancel{4}^{2} \times \cancel{3!}}{(\cancel{3!} \times \cancel{6} \times \cancel{2})}$ $= 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 5 \times 2$ $= 201600$
3 economics	2 mathematics

أتأمل في تعلمي

- أضع المؤشر على الوجه الذي يصف أدائي في موضوع (مضروب العدد).



إن استطعت حل الأنشطة دون مساعدة.

إن حللت معظم الأسئلة في الأنشطة واحتجت إلى مساعدة قليلة.

إن احتجت إلى مساعدة على حل أكثر من نصف الأسئلة في الأنشطة.

- أحدد الصعوبة التي واجهتني وموضوع النشاط الذي احتجت فيه إلى المساعدة، ثم أصف كيف حصلت على المساعدة.

- أحدد الإجراءات التي سأتّبعها لتجاوز هذه الصعوبة.

التباديل والتوافيق

3

النتاجات

- أتعرف مفهوم التباديل.
- أتعرف مفهوم التوافيق.
- أستخدم التباديل في حل مسائل حياتية.
- أستخدم التوافيق في حل مسائل حياتية.

النشاط 1 مفهوم التباديل

1) أراد مدير أحد المراكز الصحية اختيار طبيبين، طبيب لحضور مؤتمر طبي، والآخر للمشاركة في يوم طبي مجاني من بين الأطباء: وسام، جود، علي. بكم طريقة يمكنه ذلك؟

المشاركة في اليوم الطبي	حضور المؤتمر الطبي
جود	وسام
	وسام
وسام	جود
علي	
	علي
جود	

ألاحظ أن **الترتيب مهم**؛ فاختيار وسام للمشاركة في اليوم الطبي، واختيار جود لحضور المؤتمر الطبي يختلف عن اختيار وسام لحضور المؤتمر الطبي واختيار جود للمشاركة في اليوم الطبي.

إذًا، هناك 6 طرائق ممكنة لاختيار طبيبين

وأستطيع أن أجد الناتج باستخدام مبدأ العد الأساسي؟

عدد الأطباء للمشاركة في			
	اليوم الطبي		المؤتمر الطبي
.... =	....	×	....

2) اشتركت 6 خيول في منافسة لسباق للخيل.

1 بكم طريقة يمكن ترتيب 6 خيول؟

عدد الخيول ستة. إذًا، ستصل الخيول إلى نهاية السباق بالترتيب من الأول إلى السادس

عدد الخيول المرشحة للمركز						
	السادس	الخامس	الرابع	الثالث	الثاني	الأول
...... =	...... ×	...... ×	...... ×	...... ×	...... ×	......

أستطيع أن أكتب الناتج بصورة !6 ويساوي 720

2 بكم طريقة يمكن للخيول إنهاء السباق في المراكز الثلاثة الأولى؟

عدد الخيارات للمركز							
		الثالث		الثاني		الأول
......	=	......	×	......	×	......

هل الترتيب مهم؟

ألاحظ أن عدد طرائق ترتيب 3 خيول من 6 خيول يمكن إيجاده بقسمة عدد طرائق ترتيب 6 خيول على عدد طرائق ترتيب 3 خيول من دون تكرار أي:

$$\frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}}$$

$$= 6 \times 5 \times 4 = 120$$

أي أن الضرب يبدأ من العدد 6 تنازليًّا 3 مرات

بالكلمات: عدد تباديل n من العناصر، آخذ منها r كل مرّة، هو:

$${}_{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

حيث r, n عددان صحيحان موجبان و $n \geq r$

مثال: ما عدد تباديل 10 من العناصر، آخذ منها 3 كل مرّة ؟

$${}_{10}P_{3} = \frac{10!}{(10-3)!}$$

$$10 \times 9 \times 8 = 720$$

ألاحظ أن الضرب يبدأ من العدد 10 تنازليًّا 3 مرات

3 يتكون مجلس الإدارة لإحدى الشركات من رئيس المجلس ونائبه والمدير التنفيذي. بكم طريقة يمكن تكوين مجلس الإدارة من أصل 8 مرشحين؟

هل هناك اختلاف بين المهمات الوظيفية لكل شخص؟

هل الترتيب مهم؟

الحل

- أعبر عن عدد طرائق تكوين مجلس الإدارة باستخدام مبدأ العد الأساسي..................
- أعبر عن عدد طرائق تكوين مجلس الإدارة باستخدام التباديل.............................

النشاط 2 القيمة العددية لمقادير تحوي التباديل

1) أجد قيمة كل مما يأتي:

1) ${}_{8}P_{2}$

$${}_{8}P_{2} = \frac{8!}{(8-2)!}$$

$$= \frac{8 \times 7 \times 6!}{6!} = 56$$

2) ${}_{11}P_{4}$

3) ${}_{9}P_{3} - {}_{5}P_{2}$

$$= \frac{9!}{6!} - \frac{5!}{3!}$$

$$= (9 \times 8 \times 7) - (5 \times 4)$$

$$= 504 - 20$$

$$= 484$$

4) ${}_{6}P_{3} - {}_{7}P_{2}$

5) ${}_{7}P_{1} \times {}_{5}P_{2}$

$$= \frac{7!}{6!} \times \frac{5!}{3!}$$

$$= \frac{7 \times \cancel{6!}}{\cancel{6!}} \times \frac{5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}}$$

$$= 7 \times 5 \times 4$$

$$= 140$$

6) ${}_{5}P_{4} \times {}_{3}P_{3}$

7) $\dfrac{{}_{12}P_{4}}{{}_{11}P_{4}}$

أستخدم قانون التباديل أو أبدأ من العدد 12 تنازليًّا أربعة أعداد متتالية، ومن العدد 11 تنازليًّا أربعة أعداد متتالية، ومن ثَمَّ، أختصر الأعداد.

$$\frac{{}_{12}P_{4}}{{}_{11}P_{4}} = \frac{12 \times \cancel{11} \times \cancel{10} \times \cancel{9}}{\cancel{11} \times \cancel{10} \times \cancel{9} \times 8}$$

$$= \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

8) $\dfrac{{}_{15}P_{2}}{{}_{14}P_{1}}$

2) أجد قيمة ما يأتي، ثم أستنتج القاعدة:

1 $_{15}P_{15}$ $_{15}P_{15} = \frac{15!}{0!} = \frac{15!}{1} = 15!$	$_nP_n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$ أستنتج أن: $\boxed{_nP_n = n!}$
2 $_6P_6$	
3 $_9P_1$ $_9P_1 = \frac{9!}{8!} = \frac{9 \times 8!}{8!} = 9$	أكمل الحل: $_nP_1$ $_nP_1 =$ أستنتج أن: $\boxed{_nP_1 = n}$
4 $_{12}P_1$	
5 $_7P_0$ $_7P_0 = \frac{7!}{(7-0)!} = \frac{7!}{7!} = 1$	أكمل الحل: $_nP_0$ أستنتج أن: $\boxed{_nP_0 = 1}$
6 $_{21}P_0$	

3) أجد قيمة r في كل مما يأتي:

1 $_7P_r = 210$ أبدأ من العدد 7 تنازليًّا r من المرات بعملية الضرب حتى أصل إلى العدد 210 ألاحظ أن ضرب ثلاثة أعداد متتالية $7 \times 6 = 42$ ينتج العدد 210 $42 \times 5 = 210$ إذًا، $r = 3$ $7 \times 6 \times 5 = 210$	2 $_{12}P_r = 132$

النشاط 3 مفهوم التوافيق

أراد ريّان اختيار 3 كرات من بين 15 مرقمة بالأرقام من 1 إلى 15. بكم طريقة يمكنه ذلك؟

إذا لم يهتم بالترتيب	إذا اهتم بالترتيب
6 9 14	6 9 14
	6 14 9
	9 6 14
	9 14 6
	14 6 9
	14 9 6

ألاحظ أنه عند اختيار 3 كرات من 15 كرة إذا كان الترتيب مهمًّا

$${}_{15}P_3 = \frac{15!}{12!}$$

فإن لكل 3 كرات 6 مرات ترتيب مختلفة

وإذا لم أهتم بترتيب الكرات، فإنني أقسم على عدد مرات ترتيب 3 كرات

$${}_{15}C_3 = \frac{15!}{12! \times 3!}$$

بالكلمات: عدد توافيق n من العناصر، آخذ منها r كل مرّة، هو:

$${}_{n}C_{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

حيث r, n عددان صحيحان موجبان و $r \leq n$

مثال: عدد توافيق 10 من العناصر، آخذ منها 3 كل مرّة

$${}_{10}C_3 = \frac{10!}{3!\,(10-3)!}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3 \times 2 \times 8 \times 7!} = 120$$

مثال: مثال: بكم طريقة يمكن اختيار 3 لاعبي وسط في الملعب من أصل 6 لاعبي كرة قدم؟

هل الترتيب بين لاعبي الوسط الثلاثة مهم؟

الحل: من 6 لاعبين أختار 3 لاعبين عشوائيًّا

$${}_{6}C_3 = \frac{6!}{3!(6-3)!}$$

$$= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{6 \times 3!} = 20$$

النشاط 4 إيجاد القيمة العددية لمقادير تحوي التوافيق

1) أجد قيمة في كل مما يأتي:

1 $_5C_2 = \frac{5!}{2!(5-2)!}$

$= \frac{(5 \times \overset{2}{\cancel{4}} \times \cancel{3!})}{(\cancel{2} \times \cancel{3!})}$

$= 5 \times 2$

$= 10$

2 $_7C_3$

3 $_{10}C_3 + {}_8C_2 = \frac{10!}{(3! \times 7!)} + \frac{8!}{(2! \times 6!)}$

$= \frac{(10 \times \overset{3}{\cancel{9}} \times \overset{4}{\cancel{8}} \times \cancel{7!})}{(\cancel{3} \times \cancel{2} \times 1 \times \cancel{7!})} + \frac{(\overset{4}{\cancel{8}} \times 7 \times \cancel{6!})}{(\cancel{2} \times \cancel{6!})}$

$= 120 + 28$

$= 148$

4 $_{12}C_3 - {}_6C_3$

5 $_7C_2 \times {}_8C_5 = \frac{7!}{(2! \times 5!)} \times \frac{8!}{(5! \times 3!)}$

$= \frac{(7 \times \overset{3}{\cancel{6}} \times \cancel{5!})}{(\cancel{2} \times \cancel{5!})} \times \frac{(8 \times 7 \times \cancel{6} \times \cancel{5!})}{(\cancel{5!} \times \cancel{6})}$

$= 7 \times 3 \times 8 \times 7$

$= 1176$

6 $_{10}C_8 \times {}_6C_2$

7 $_{12}C_4 \div {}_{11}C_3$ أضرب في مقلوب $_{11}C_3$

$= \frac{12!}{4! \times 8!} \times \frac{3! \times 8!}{11!}$

$= \frac{\overset{3}{\cancel{12}} \times \cancel{11!}}{\cancel{4} \times \cancel{3!} \times \cancel{8!}} \times \frac{\cancel{3!} \times \cancel{8!}}{\cancel{11!}} = 3$

8 $_{15}C_3 \div {}_{14}C_4$

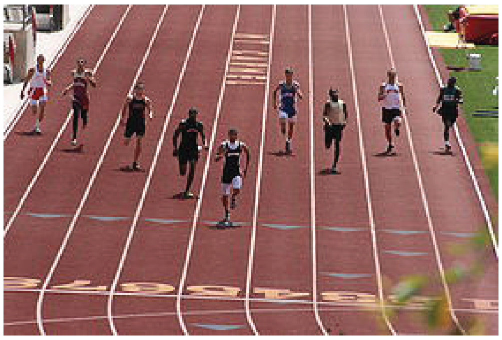
2) أجد قيمة في كل مما يأتي:

أتذكر 0! = 1 $_nC_n$ $_nC_n = \dfrac{n!}{n! \times (n-n)!}$ $= \dfrac{n!}{n! \times 0!} = 1$ أستنتج أن: $\boxed{_nC_n = 1}$	1) $_9C_9$ $_9C_9 = \dfrac{9!}{(9! \times 0!)}$ $= 1$ 2) $_{17}C_{17}$
أكمل الحل: $_nC_1$ $_nC_1 =$ أستنتج أن: $\boxed{_nC_1 = n}$	3) $_9C_1$ $_9C_1 = \dfrac{9!}{1! \times 8!}$ $= \dfrac{9 \times \cancel{8!}}{\cancel{8!}}$ $= 9$ 4) $_{21}C_1$
أكمل الحل: $_nC_0$ أستنتج أن: $\boxed{_nC_0 = 1}$	5) $_6C_0$ $_6C_0 = \dfrac{6!}{0! \times (6-0)!}$ $= \dfrac{6!}{6!}$ $= 1$ 6) $_{18}C_0$

النشاط 5 مسائل حياتية

تطبيقات 1 تباديل أم توافيق؟

1) اشترك 9 طلاب في سباق الجري 400m. أجد عدد الطرائق الممكنة للطلبة الثلاثة الفائزين بالذهبية والفضية والبرونزية.



- هل هناك اختلاف بين الفائزين الأول والثاني والثالث؟

....

- هل الترتيب مهم؟

....

عدد طرائق الفوز						
		المتسابق الثالث		المتسابق الثاني		المتسابق الأول
504	=	7	×	8	×	9

ألاحظ أن الترتيب مهم، أي أنه سيكون هناك فائز أول، وفائز ثانٍ، وفائز ثالث.

أو أستخدم التباديل في إيجاد عدد طرائق الفوز: $_9P_3 = \frac{9!}{(9-3)!} = 504$

2) بكم طريقة يمكن سحب كرتين معًا من صندوق فيه 4 كرات ملونة: صفراء، وخضراء، وسوداء، وزرقاء؟

هل الترتيب مهم أم أن السحب سيكون عشوائيًّا؟

الحل: ألاحظ أن الترتيب غير مهم؛ فالمطلوب سحب كرتين بصرف النظر عن الترتيب.

الخيارات هي: $6 = {}_4C_2 = \frac{4!}{2! \times (4-2)!}$

صفراء خضراء صفراء سوداء صفراء زرقاء	.... خضراء زرقاء	....

3) بكم طريقة يمكن لوسام أن يحل 3 أسئلة في امتحان من أصل 5 أسئلة؟

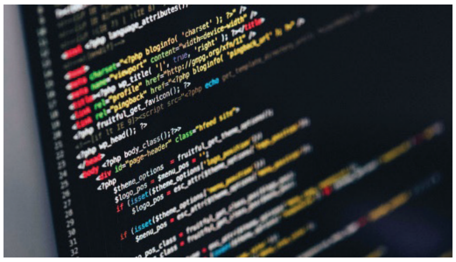
هل ترتيب اختيارات وسام للأسئلة مهم؟

4) قرر مسؤول قسم التكنولوجيا في إحدى الشركات إصدار برنامج لقسم إدارة شؤون الموظفين؛ حيث قام بالعمل 5 مبرمجين كُلِّف كل منهم مهمات **مختلفة** من أصل 12 مبرمجًا. بكم طريقة يمكن اختيار المبرمجين الخمسة؟

كل مبرمج من المبرمجين الخمسة سينفذ مهمات مختلفة، فهل الترتيب مهم؟

إذا كانت الإجابة (نعم)، أستخدم التباديل، وإذا كانت (لا)، أستخدم التوافيق

5) رُشِّح 18 طالبًا وطالبة من أوائل الدفعة في كلية الآداب لتقديم امتحان منحة دراسية في إحدى الجامعات الأردنية، علمًا أن الطالب الأول سيحصل على المنحة كاملة، والثاني على نصف المنحة، والثالث على ربع المنحة. أجد عدد الطرائق الممكنة لاختيار الطلبة الأوائل الثلاثة.



- هل ترتيب الطلبة الثلاثة الأوائل مهم؟

إذا كانت الإجابة (نعم)، أستخدم التباديل، وإذا كانت (لا)، أستخدم التوافيق

6) بكم طريقة يمكن اختيار معلمين اثنين من أصل 8 معلمين للإشراف على إعداد احتفال مدرسي بعيد الاستقلال؟

- هل الترتيب مهم؟ .... أبرر إجابتي

إذا كانت الإجابة (نعم)، أستخدم التباديل، وإذا كانت (لا)، أستخدم التوافيق

الحل: ....

7) تضم إحدى الجامعات 13 كلية، منها 7 كليات علمية و6 كليات إنسانية. بكم طريقة يمكن للطالبة بيان زيارة كليتين علميتين و3 كليات إنسانية؟

- هل وضعت بيان شرط ترتيب الزيارات أم ستزورها عشوائيًّا؟ ....

- هل الترتيب مهم؟ ....

ألاحظ أن الاختيار عشوائي، فمن بين 7 كليات علمية ستزور كليتين، ومن بين 6 كليات إنسانية ستزور 3 كليات عشوائيًا.

الحل: أفرض أن $n(A)$ هو عدد الطرائق التي يمكنها بها زيارة الكليات، وترتيب زيارة الكليات ليس مهمًا:

$$n(A) = {}_7C_2 \times {}_6C_3$$

$$= \frac{7!}{5! \times 2!} \times \frac{6!}{3! \times 3!}$$

أكمل الحل: ....

تطبيقات 2 تباديل وتوافيق

1) نظّم 7 طلاب من مجلس الطلبة في الجامعة الأردنية مبادرة موهبتي. أجد عدد طرائق تكوين لجنة ثلاثية منهم للتحدث إلى رئيس الجامعة في كل من الحالات الآتية:

7 طلاب

اللجنة الثلاثية ${}_7C_3 = \frac{7!}{4! \times 3!}$ 35	تتكون اللجنة من رئيس ونائبه وضابط ارتباط ألاحظ أن الترتيب مهم ${}_7P_3 = \frac{7!}{4!}$ $= 210$	رئيس للجنة وعضوان. لاختيار الرئيس هناك 7 خيارات، ولاختيار عضوين سيكون الاختيار عشوائيًا: $= {}_7P_1 \times {}_6C_2$ $= 7 \times \frac{6!}{2! \times 4!}$ $= 105$

2) مجموعة مكونة من (4) معلمين و(6) طلاب. أجد عدد طرائق التي يمكن بها تكوين فريق رباعي مكون من رئيس ونائبه من المعلمين وطالبين اثنين.

ألاحظ عند اختيار رئيس للفريق ونائب له من المعلمين، فإن الترتيب مهم، أما عند اختيار الطالبين، فإن الترتيب غير مهم وسيكون عشوائيًا.

إذًا، أستخدم .... لإيجاد رئيس الفريق ونائبه و.................................. لاختيار الطالبين.

3) فاز 16 طالبًا بعضوية فريق كرة القدم في المدرسة. بكم طريقة يمكن اختيار 11 لاعبًا منهم، علمًا أن مهندًا هو حارس المرمى؟

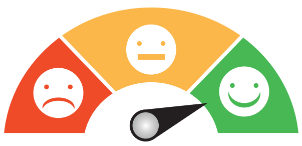
ألاحظ أن حارس المرمى هو أحد لاعبي الفريق المكوّن من 11 لاعبًا، وهو خيار واحد «مهند».

هل الترتيب مهم بين 10 لاعبين؟

4) أجد عدد الطرائق الممكنة لتشكيل فريق طبي رباعي من بين 5 أطباء، و7 ممرضين للمشاركة في يوم طبي مجاني، علمًا أن رئيس الفريق طبيب ومساعده ممرض وبقية الأعضاء من الأطباء.

أتأمل في تعلمي

– **أضع المؤشر على الوجه الذي يصف أدائي في موضوع (التباديل والتوافيق).**



إن استطعت حل الأنشطة دون مساعدة.

إن حللت معظم الأسئلة في الأنشطة واحتجت إلى مساعدة قليلة.

إن احتجت إلى مساعدة على حل أكثر من نصف الأسئلة في الأنشطة.

– **أحدد الصعوبة التي واجهتني وموضوع النشاط الذي احتجت فيه إلى المساعدة، ثم أصف كيف حصلت على المساعدة.**

– **أحدد الإجراءات التي سأتّبعها لتجاوز هذه الصعوبة.**

التقويم الختامي

1) أرادت جود معلمة التربية الفنية اختيار 4 لوحات فنية من بين 10 لوحات للمشاركة في معرض للفنون الجميلة. أجد عدد الطرائق الممكنة لذلك.

2) تقدم (8) من طلبة المرحلة الثانوية لمنحة مدرسية. أجد عدد الطرائق الممكنة لترتيب الطلبة الثلاثة الأوائل الحاصلين على المنحة.

الوحدة (3) الاحتمالات

1
الاحتمالات بالتباديل والتوافيق

- أستعمل مبدأ العد الأساسي والتباديل والتوافيق لحساب احتمالات الحوادث في تجربة عشوائية.

2
المتغيرات العشوائية واحتماله

- أجد قيم متغير عشوائي في تجربة عشوائية
- أجد احتمالات قيم متغير عشوائي في تجربة عشوائية.

3
توقع المتغير العشوائي

- أجد التوقع والتباين لمتغير عشوائي في تجربة عشوائية.

الاحتمال بالتباديل والتوافيق

1

النتاجات

- أجد عناصر الحادث.
- أجد احتمال الحادث باستخدام التباديل والتوافيق.

النشاط 1 عناصر الحادث

أتذكر

تسمى مجموعة جميع النواتج الممكنة لتجربة عشوائية **الفضاء العيني Ω (أوميجا).**

أتذكر

العدد الزوجي هو العدد الذي آحاده زوجي.

1) رتبت الأرقام: $\{1,5,8\}$ لتكوين عدد من 3 منازل مختلفة. أجد عناصر الفضاء العيني (النواتج الممكنة Ω)، ثم أجد عناصر كل حادث مما يأتي:

8 5 1

$\Omega = \{851\ ,\ 815\ ,\ 581\ ,\ 518\ ,\ 185\ ,\ 158\}$

1 أن يكون الرقمان 5 و8 متجاورين

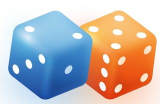
أختار فقط العناصر التي يكون فيها الرقمان 5 و8 متجاورين:

$A = \{581\ ,851\ ,158\ ,185\}$

2 أن يكون العدد الناتج زوجيًّا ....

....

2) في تجربة إلقاء حجري نرد متماثلين دفعة واحدة وتسجيل الرقمين الظاهرين على الوجهين العلويين، أكمل الجدول الآتي:



أكتب عناصر الفضاء العيني Ω (النواتج الممكنة)، ثم أختار منها العناصر التي تحقق كل حادث.

ملاحظات	عناصر الحادث	الحادث
أختار من الفضاء العيني Ω العناصر التي تحقق الحادث A	$\{(2,2), (2,4), (2,6), (4,4), (4,6), (6,6)\}$	A: ظهور رقمين زوجيين
ألاحظ أنّ حجري النرد أُلقيا دفعة واحدة، وعليه، فإن ترتيب الرقمين الظاهرين غير مهم، (3,4) هو نفسه (4,3)	$\{(3,4)\}$	B: ظهور الرقمين 3 و 4
مرة واحدة على الأقل تعني ظهور الرقم 6 على أحد حجري النرد أو كليهما		C: ظهور الرقم 6 مرة واحدة على الأقل

D: ظهور رقم فردي على أحد حجري النرد ورقم زوجي على الآخر		
E: ظهور رقمين مجموعهما 8		

يمكنني إيجاد عدد عناصر الفضاء العيني Ω باستخدام:

مبدأ العد الأساسي

عند إجراء تجربة عشوائية على أكثر من مرحلة

التباديل

اختيار مجموعة عدد عناصرها **r** من مجموعة عدد عناصرها **n**

والترتيب مهم

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

التوافيق

اختيار مجموعة عدد عناصرها **r** من مجموعة عدد عناصرها **n**

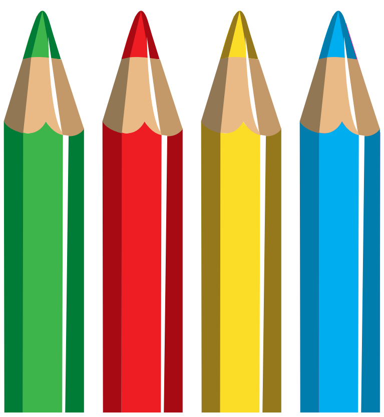
والترتيب غير مهم

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

3) لدى خالد 4 أقلام مختلفة الألوان (أخضر، أحمر، أصفر، أزرق)، أراد أن يستخدمها في حل 4 مسائل مختلفة في مادة الرياضيات، على أن يحل كل سؤال بلون مختلف، أجد عدد الطرائق التي يمكنه حل الأسئلة بها، ثم أجد عدد عناصر كل من الحوادث الآتية:

أتذكر

عند إعادة ترتيب مجموعة من الأشياء أستخدم **المضروب**.



1 حل السؤال الأول باللون الأحمر

أجد عدد عناصر الفضاء العيني باستخدام المضروب

$n(\Omega) = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

السؤال الأول باللون الأحمر $n(A) = 1 \times 3! = 6$

وإعادة ترتيب الألوان الثلاثة المتبقية على الأسئلة الثلاثة المتبقية

2 حل سؤالين متتاليين باللونين الأحمر والأزرق.

جدول يصف عمليات الاختيار المتاحة – أدرس الحالة الأولى وأكمل الجدول

رقما السؤالين المتتالين	لون القلم الأول	لون القلم الثاني	لون القلم الثالث	لون القلم الرابع
1 2	أحمر	أزرق	أخضر	أصفر
	أزرق	أحمر	أصفر	أخضر
	أحمر	أزرق	أصفر	أخضر
	أزرق	أحمر	أخضر	أصفر
2 3				
3 4				

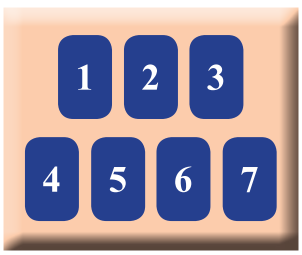
$n(B) = 2 \times 3! = 2 \times 6 = 12$

الأحمر والأزرق لونان متتاليان، وذلك يعني أنهما عنصر واحد، فيصبح المطلوب هو ترتيب 3 عناصر.

نضرب الناتج في 2 وهو عدد طرائق ترتيب اللونين الأحمر والأزرق للسؤالين المتتالين.

3 حل السؤال الثالث أو الرابع باللون الأصفر ...

$n(C) = $ ....



4) يحتوي صندوق 7 بطاقاتٍ متماثلة مرقمة من 1 إلى 7، سُحِبت بطاقتان عشوائيًّا على التوالي **دون إرجاع**. أجد عدد عناصر كل مما يأتي:

الفضاء العيني Ω

أستخدم التباديل عندما يكون ترتيب الاختيار مهمًّا $n(\Omega) = P(7, 2)$

$= 7 \times 6$

الحادث	A: ظهور الرقمين 1 و7	B: ظهور رقمين فرديين	C: ظهور رقمين مجموعهما أقل من 8	D: ظهور الرقم 7 على إحدى البطاقتين
عدد عناصر الحادث				

نشاط 2 احتمال الحادث

أتذكر

الحادث هو مجموعة جزئية من الفضاء العيني، واحتمال الحادث يعني فرصة وقوعه

احتمال الحادث = $\frac{\text{عدد عناصر الحادث}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}}$

بالرموز $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$

1) يتكون مجلس الطلبة من 5 طلبة، بينهم سامر ورامي، والمطلوب اختيار رئيس للمجلس ومقرر له. إذا علمت أن عملية الاختيار تمت بطريقة عشوائية، أجد احتمال:

1 اختيار سامر رئيسًا ورامي مُقرِّرًا له

أجد أولًا عدد عناصر الفضاء العيني Ω:

اختيار عنصرين من بين 5 عناصر والترتيب مهم (أستخدم التباديل) $n(\Omega) = {}_5P_2 = 5\times4 = 20$

أفرض الحادث A هو اختيار سامر رئيسًا ورامي مُقرِّرًا، ثم أجد عدد عناصر الحادث A

هناك حالة واحدة فقط يكون فيها سامر رئيسًا ورامي مُقرِّرًا $n(A) = 1$

أجد احتمال الحادث A $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$

2 اختيار سامر ورامي، على أن يكون أحدهما رئيسًا للمجلس والآخر مُقرِّرًا له

أفرض الحادث B هو اختيار سامر ورامي، على أن يكون أحدهما رئيسًا للمجلس والآخر مُقرِّرًا له.

أجد عدد عناصر الحادث B $n(B) = \text{..............}$

أجد احتمال الحادث B $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \text{..............}$

2) أسرة مكونة من 4 أولاد و3 بنات، يراد اختيار 3 منهم لتنظيف حديقة المنزل. أجد احتمال كل مما يأتي:

1 أن يكون الفريق كله من البنات

أفرض أن الحادث A هو أن يكون الفريق كله من البنات

اختيار جميع البنات للفريق والترتيب غير مهم، أستخدم التوافيق $n(A) = {}_3C_3$

أجدعدد عناصر Ω $P(\Omega) = {}_7C_3 = \frac{7!}{3!\times(7-3)!}$

أجد الاحتمال $P(B) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} =$

2 يوجد في الفريق بنتان على الأقل

أفرض أن الحادث B هو أن يوجد في الفريق بنتان على الأقل

هناك حالتان تحققان هذا الحادث: بنتان وولد واحد أو 3 بنات و0 أولاد

$n(B) = {}_3C_2 \times {}_4C_1 + 1 =$

اختيار بنتين من 3 بنات والترتيب غير مهم	اختيار ولد واحد من 4 أولاد والترتيب غير مهم	اختيار جميع البنات للفريق

$P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} =$

3 رئيس الفريق من البنات

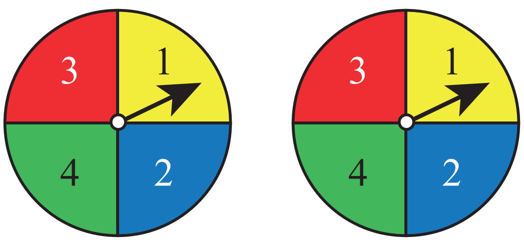
في هذه الحاله، تجربة عشوائية على مرحلتين: اختيار الرئيس واختيار عضوين من الأولاد والبنات الباقين.

أجد عدد عناصر الفضاء العيني $n(\Omega) = {}_7P_1 \times {}_6C_2 =$

أجد عدد عناصر الحادث $n(C) = {}_3P_1 \times {}_6C_2 =$

أجد الاحتمال $P(A) = \dfrac{n(C)}{n(\Omega)}$

3) قرصان دائريان، كل منهما مقسَّم 4 قطاعات متطابقة، كتبت عليها الأرقام: 1، 2، 3، 4، كما في الشكل.



تم تدوير القرصين معًا عشوائيًّا، وتوقف كل مؤشر عند أحد الأرقام، فأجد احتمال كل مما يأتي:

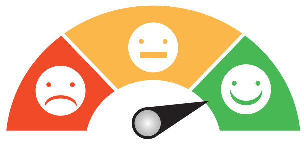
1 توقف المؤشر على الرقم 3 على كل من القرصين

2 توقف المؤشر على رقم زوجي على القرص الأول ورقم أولي على القرص الثاني

3 توقف المؤشر على رقمين مجموعهما 5

أتأمل في تعلمي

- أضع المؤشر على الوجه الذي يصف أدائي في موضوع (احتمال الحادث).



- إن استطعت حل الأنشطة دون مساعدة.
- إن حللت معظم الأسئلة في الأنشطة واحتجت إلى مساعدة قليلة.
- إن احتجت إلى مساعدة على حل أكثر من نصف الأسئلة في الأنشطة.

- أحدد الصعوبة التي واجهتني وموضوع النشاط الذي احتجت فيه إلى المساعدة، ثم أصف كيف حصلت على المساعدة.
- أحدد الإجراءات التي سأتّبعها لتجاوز هذه الصعوبة.

المتغير العشوائي واحتماله

2

النتاجات

- إيجاد قيم متغير عشوائي في تجربة عشوائية.
- إيجاد احتمالات قيم متغير عشوائي في تجربة عشوائية.

النشاط 1 قيم المتغير العشوائي

1) عند اختيار عائلة لديها طفلان، إذا دل المتغير العشوائي X على عدد الأطفال الإناث، فأجد قيم المتغير العشوائي X.

أجد أولًا الفضاء العيني لهذه التجربة، أرمز إلى الطفل الذكر بالحرف B، والأنثى بالحرف G

عناصر الفضاء العيني Ω	(B,B)	(B,G)	(G,B)	(G,G)
عدد الأطفال الإناث	0	1	1	2
قيمة المتغير العشوائي X	0	1	1	2

أكتب قيم المتغير العشوائي X (دون تكرار) $X = \{ 0 , 1 , 2 \}$

و هذا يعني: إما لديهم بنت وإما بنتان وإما لا بنات لديهم.

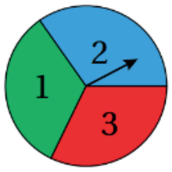
2) لعب فريق لكرة السلة 3 مباريات، بحيث تكون نتيجة كل مباراة فوزًا أو خسارة، إذا دل المتغير العشوائي X على عدد المباريات التي فاز بها الفريق، فأجد قيم المتغير العشوائي X.

✓ أعبر عن الفوز بالرمز W والخسارة بالرمز L

المباراة الأولى	فوز	فوز	فوز	خسارة	فوز	خسارة	خسارة	خسارة
المباراة الثانية	فوز	فوز	خسارة	فوز	خسارة	فوز	خسارة	خسارة
المباراة الثالثة	فوز	خسارة	فوز	فوز	خسارة	خسارة	فوز	خسارة
الفضاء العيني	(W,W,W)	(W,W,L)	(W,L,W)	(L,W,W)				
عدد مرات الفوز	3	2	2	2				

أكتب قيم المتغير العشوائي $X = \{ \quad , \quad , \quad , \quad \}$

3) أراد زيد إجراء تجربة إلقاء حجر نرد، وتدوير قرص مرقم (1,2,3) وتسجيل الرقمين الناتجين ، إذا دل المتغير العشوائي Y على مجموع الرقمين الظاهرين، فأجد قيم المتغير العشوائي Y.



القرص \ حجر النرد	1	2	3	4	5	6
1	1 + 1 = 2	2 + 1 = 3	3 + 1 =			
2						
3						

$\Omega = \{ 11 , 21 , 31 , 41 , 51 , 61 , 12 , 22 , ... , 63 \}$

Y = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 3, 4, ..., 9

النشاط 2 احتمال المتغير العشوائي

1) في تجربة إلقاء قطعتين نقديتين متمايزتين معًا، إذا دل المتغير العشوائي X على عدد مرات ظهور الصورة، فأكتب قيم المتغير العشوائي X، واحتمال كل قيمة منها.

الفضاء العيني Ω	(H,H)	(H,T)	(T,H)	(T,T)
عدد مرات ظهور الصورة	2	1	1	0

قيم المتغير العشوائي X $X = \{ 2 , 1 , 0 \}$

احتمال ظهور الصورة مرتين $= \dfrac{\text{عدد عناصر } \Omega \text{ التي تظهر فيها الصورة مرتين}}{\text{عدد عناصر } \Omega}$ (H,H)

$P(x=2) = \dfrac{1}{4}$

احتمال ظهور الصورة مرة واحدة $= \dfrac{\text{عدد عناصر } \Omega \text{ التي تظهر فيها الصورة مرة واحدة}}{\text{عدد عناصر } \Omega}$ (T,H)،(H,T)

$P(x=1) = \dfrac{2}{4}$

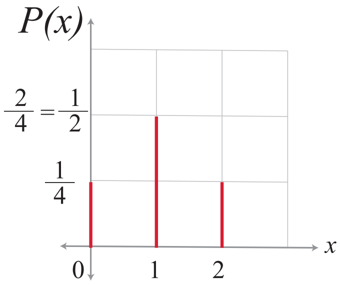
احتمال عدم ظهور الصورة $= \dfrac{\text{عدد عناصر } \Omega \text{ التي لا تظهر فيها الصورة}}{\text{عدد عناصر } \Omega}$ (T,T)

$P(x=0) =$

مجموع احتمالات قيم المتغير العشوائي X ⟵ $\dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$

التوزيع الاحتمالي لقيم المتغير العشوائي X (جدول التوزيع الاحتمالي)

x	2	1	0
$P(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$



أمثل التوزيع الاحتمالي في صورة تمثيل بياني

أحدد قيم المتغير العشوائي X على المحور الأفقي وقيم الاحتمال على المحور الرأسي أرسم خطوطًا رأسية من قيم المتغير العشوائي X إلى احتمال كل منها فأحصل على التمثيل البياني الذي يمثل التوزيع الاحتمالي

2) يحتوي صندوق أربع كرات متماثلة مرقمة من 1 إلى 4، سُحِبت كرتان عشوائيًا على التوالي مع الإرجاع. إذا دل المتغير العشوائي X على حاصل ضرب الرقمين الظاهرين، أكتب قيم المتغير العشوائي X، والتوزيع الاحتمالي لها.

أفرض الرقم الظاهر على الكرة الأولى a، والظاهر على الكرة الثانية b

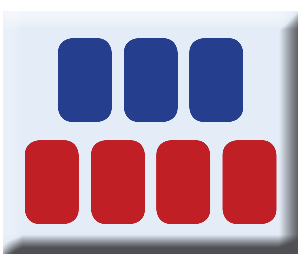
a	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4
b	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Ω	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,1)	(2,2)										
a×b	1	2	3	4	2	4										

قيم المتغير العشوائي X $X = \{1, 2, 3, 4, 6, \ , \ , \ , \ \}$

أكتب جدول التوزيع الاحتمالي

x	1	2	3	4	6				
P(x)	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{....}{16}$	$\frac{....}{16}$	$\frac{....}{16}$	$\frac{....}{16}$

3) يحتوي صندوق 3 بطاقات زرقاء، و4 بطاقات حمراء جميعها متماثلة، سُحِبت 3 بطاقات معًا وسُجِّلت الألوان الظاهرة، إذا دل المتغير العشوائي X على عدد البطاقات الحمراء الظاهرة، أكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.



أكتب قيم المتغير العشوائي X $X = \{ 0 , 1 , 2 , 3 \}$

X = 0 عدم ظهور أي بطاقة حمراء يعني أن تكون البطاقات الظاهرة جميعها زرقاء ويمكن حساب عدد النواتج باستخدام التوافيق (اختيار 3 بطاقات زرقاء من بين 3 بطاقات والترتيب غير مهم).

أجد عدد عناصر الفضاء العيني باستخدام التوافيق (سُحِبت 3 بطاقات من بين 7 والترتيب غير مهم).

$$P(x=0) = \frac{{}_3C_3}{{}_7C_3}$$

$$P(x=0) = \frac{1}{35}$$

$x = 1$ بطاقة واحدة حمراء وبطاقتان زرقاوان

$$P(x=1) = \frac{{}_4C_1 \times {}_3C_2}{{}_7C_3}$$

$x = 2$ بطاقتان حمراوان وبطاقة واحدة زرقاء

$$P(x=2)$$

$x = 3$ 3 بطاقات حمراء

$$P(x=3)$$

x	0	1	2	3
$P(x)$				

النشاط 3 اقتران التوزيع الاحتمالي

1) الجدول الآتي يمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X. أجد قيمة الثابت C.

x	0	1	2	3
$P(x)$	0.25	0.15	c	0.3

أتذكر مجموع احتمالات قيم المتغير العشوائي يساوي= **1** $\sum P(X) = 1$

$P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3) = 1$

$0.25 + 0.15 + \mathbf{c} + 0.3 = 1$

$\mathbf{c} = 1 - 0.7$

$\mathbf{c = 0.3}$

أجد $P(x > 1)$ (تعني احتمال أن تكون x أكبر من 1)

$P(x > 1) = P(x = 2) + P(x = 3)$

$0.3 + 0.3 =$

$0.6 =$

2) الجدول الآتي يمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي Z. أجد $P(z \le 3)$.

z	1	2	3	4	5
$P(z)$	0.1	2k	0.05	0.2	3k

الاحتمال المطلوب $P(z \le 3) = P(z = 3) + P(z = 2) + P(z = 1)$

$= 0.05 + 2k + 0.1$

أجد قيمة الثابت k

$0.1 + 2k + 0.05 + 0.2 + 3k = 1$

$5k + 0.35 = 1$

$5k = 1 - 0.35$

$5k = 0.65$

$\mathbf{k = 0.13}$

$2k = 0.26$

$P(z \le 3) = 0.1 + 0.26 + 0.05 = \mathbf{0.41}$

3) أراد مدير مصنع أن يتابع 5 من العمال الذين يعملون ساعات عمل إضافية نهاية كل يوم، وبحسب متابعته للعمال فإن عدد الذين يعملون ساعات إضافية كل يوم يمكن تمثيله بمتغير عشوائي X. كما أن التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي كالآتي:

x	1	2	3	4	5
$P(x)$	0.2	a	0.33	a	0.17

أجد احتمال أن يكون عدد العمال الذين عملوا ساعات إضافية يوم الاثنين 4 عمال على الأكثر

4 على الأكثر تعني 4 أو 3 أو 2 أو 1 أي $(x \leq 4)$ إذًا، المطلوب هو إيجاد $P\ (x \leq 4)$

أجد قيمة الثابت a

$P(x = 1) + P(x = 2) +$ .... + ... + ... $= 1$

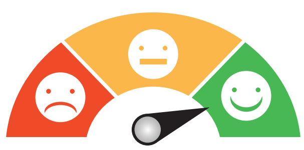
$a =$

أجد الاحتمال

$P\ (x \leq 4) =$ ....

أتأمل في تعلمي

– أضع المؤشر على الوجه الذي يصف أدائي في موضوع (المتغير العشوائي واحتماله).



إن استطعت حل الأنشطة دون مساعدة.

إن حللت معظم الأسئلة في الأنشطة واحتجت إلى مساعدة قليلة.

إن احتجت إلى مساعدة على حل أكثر من نصف الأسئلة في الأنشطة.

– أحدد الصعوبة التي واجهتني وموضوع النشاط الذي احتجت فيه إلى المساعدة، ثم أصف كيف حصلت على المساعدة.

– أحدد الإجراءات التي سأتّبعها لتجاوز هذه الصعوبة.

3 توقع المتغير العشوائي

النتاجات

- أجد التوقع والتباين لمتغير عشوائي في تجربة عشوائية.

النشاط 1 توقع المتغير العشوائي

1) الجدول التكراري الآتي يمثل علامات 45 طالبًا في امتحان الرياضيات. أجد الوسط الحسابي لعلامات الطلبة.

العلامة x	3	5	6	9	7
عدد الطلبة (التكرار) f	11	8	19	5	2

أتذكر

الوسط الحسابي لمجموعة من المشاهدات في جدول تكراري يمكنني إيجاده باستخدام العلاقة الآتية:

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot f}{\sum f}$$

مجموع المشاهدات

مجموع التكرار

الوسط الحسابي

$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot f}{\sum f} = \frac{3 \times 11 + 5 \times 8 + 6 \times 19 + 9 \times 5 + 7 \times 2}{11 + 8 + 19 + 5 + 2}$$

$$= \frac{33 + 40 + 114 + 45 + 14}{45} = \frac{246}{45} \approx 5.5$$

2) الجدول الآتي يمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

x	0	1	2
$P(x)$	0.25	0.5	0.25

التكرار النسبي

أجد الوسط الحسابي للتوزيع الاحتمالي

$$\bar{x} = \frac{\sum x.P(x)}{\sum P(x)} = \frac{(0\times0.25)+(1\times0.5)+(2\times0.25)}{1} = \frac{(0+0.5+0.5)}{1} = 1$$

دائمًا يساوي 1

يسمى الوسط الحسابي للتوزيع الاحتمالي التوقع $E(x)$ حيث $E(x) = \sum x.P(x)$

3) إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	0	1	2	3
P(x)	0.11	0.24	0.3	0.35

أجد التوقع للمتغير العشوائي X

أكتب قانون التوقع $E(x) = \sum x.P(x)$

$= (0\times0.11) + (1\times0.24) +$ ....+...................=

نشاط 2 إيجاد قيمة الثوابت

1) إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	0	1	2	3
P(x)	0.2	0.32	a	b

وكان $E(x)=1.5$، فأجد قيمة كل من a و b.

مجموع احتمالات المتغير العشوائي يساوي 1 $0.2 + 0.32 + a + b = 1$

أكوّن المعادلة الأولى $a + b = 0.48$

أستخدم قانون التوقع $E(x) = (0 \times 0.2) + (1 \times 0.32) + (2 \times a) + (3 \times b) = 1.5$

أكوّن المعادلة الثانية $2a + 3b = 1.18$

أستخدم طريقة الحذف لحل نظام المعادلات (أضرب المعادلة الأولى في (2−) وأجمعها للمعادلة الثانية لحذف المتغير a)

$\cancel{2a} - 2b = -0.96$

$\cancel{2a} + 3b = 1.18$

$b = 0.22 \rightarrow a = 0.48 - 0.22 \rightarrow a = 0.26$

2) الجدول الآتي يبين التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

x	1	2	3
P(x)	0.3	0.41	k

أجد التوقع $E(x)$

النشاط 3 التباين للمتغير العشوائي

1) الجدول الآتي يبين التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

x	0	1	2	3
P(x)	0.21	0.22	0.4	0.17

أجد التباين σ^2

$$\sigma^2 = \left(\sum x^2 \cdot P(x)\right) - (E(x))^2$$

التباين

التوقع

أجد التوقع أولًا

$E(x) = (0 \times 0.21) + (1 \times 0.22) + (2 \times 0.4) + (3 \times 0.17) = 1.53$

$\sigma^2 = (\sum x^2 \cdot P(x)) - (E(x))^2 = (0^2 \times 0.21) + (1^2 \times 0.22) + (2^2 \times 0.4) + (3^2 \times 0.17) - (1.53)^2$

$\sigma^2 = (0 \times 0.21) + (1 \times 0.22) + (4 \times 0.4) + (9 \times 0.17) - (1.53)^2 = \mathbf{1.0091}$

2) الجدول الآتي يبين التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

x	0	1	2
P(x)	0.35	0.37	a

أجد التباين σ^2

لكي أجد التباين للمتغير العشوائي، يجب أولًا أن أجد التوقع

أجد أولًا قيمة الثابتة a

$0.35 + 0.37 + a = 1$

$a = 1 - 0.72 = 0.28$

أجد التوقع

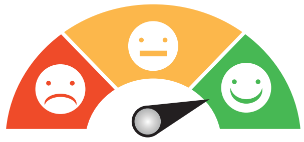
$E(x) = (0 \times 0.35) + (\ldots\ldots \times \ldots\ldots) + (\ldots\ldots \times \ldots\ldots) =$

أجد التباين

$\sigma^2 = 0 \times 0.35 + 1 \times 0.37 + 4 \times 0.28 - (\ldots\ldots)^2 =$

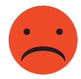
أتأمل في تعلمي

– أضع المؤشر على الوجه الذي يصف أدائي في موضوع (**توقع المتغير العشوائي**).



 إن استطعت حل الأنشطة دون مساعدة.

 إن حللت معظم الأسئلة في الأنشطة واحتجت إلى مساعدة قليلة.

 إن احتجت إلى مساعدة على حل أكثر من نصف الأسئلة في الأنشطة.

– أحدد الصعوبة التي واجهتني وموضوع النشاط الذي احتجت فيه إلى المساعدة، ثم أصف كيف حصلت على المساعدة.

– أحدد الإجراءات التي سأتّبعها لتجاوز هذه الصعوبة.

التقويم الختامي

1) في تجربة عشوائية، كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول الآتي:

x	1	2	3	4
$p(x)$	a	0.3	2	0.1

1 أجد قيمة a

2 أجد $p(x = 3)$

3 أجد $p(1 \leq x < 3)$

4 أجد $p(x > 1)$

2) يعمل في مركز صحي 5 أطباء و6 ممرضين. أجد احتمال تكوين فريق رباعي للمشاركة بيوم طبي منهم عشوائيًا، بحيث يضم الفريق طبيبين على الأقل.

تم بحمد الله تعالى