



الرياضيات

الصف التاسع - كتاب الطالب

الفصل الدراسي الأول

9

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيساً)

د. سميرة حسن أحمد

إبراهيم أحمد عمارة

هبة ماهر التميمي

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:



06-5376262 / 237



06-5376266



P.O.Box: 2088 Amman 11941



@nccdjor



feedback@nccd.gov.jo



www.nccd.gov.jo

قرّرت وزارة التربية والتعليم تدريس هذا الكتاب في مدارس المملكة الأردنية الهاشمية جميعها، بناءً على قرار المجلس الأعلى للمركز الوطني لتطوير المناهج في جلسته رقم (2022/4)، تاريخ 2022/6/19 م، وقرار مجلس التربية والتعليم رقم (2022/44) تاريخ 2022/7/6 م بدءاً من العام الدراسي 2022 / 2023 م.

© HarperCollins Publishers Limited 2022.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 332 - 6

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2022/4/2009)

375.001

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج

الرياضيات الصف التاسع: كتاب الطالب (الفصل الدراسي الأول) المركز الوطني لتطوير المناهج -

عمان: المركز، 2022

(185) ص.

ر.ل.: 2022/4/2009

الواصفات: / تطوير المناهج / المقررات الدراسية / مستويات التعليم / المناهج /

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, sorted in retrieval system, or transmitted in any form by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise , without the prior written permission of the publisher or a license permitting restricted copying in the United Kingdom issued by the Copyright Licensing Agency Ltd, Barnard's Inn, 86 Fetter Lane, London, EC4A 1EN.

British Library Cataloguing -in- Publication Data

A catalogue record for this publication is available from the Library.

المقدمة

انطلاقاً من إيمان المملكة الأردنية الهاشمية الراسخ بأهمية تنمية قدرات الإنسان الأردني، وتسليحه بالعلم والمعرفة؛ سعى المركز الوطني لتطوير المناهج بالتعاون مع وزارة التربية والتعليم إلى تحديث المناهج الدراسية وتطويرها، لتكون معيّنًا على الارتقاء بمستوى الطلبة المعرفي، ومجارات الأقران في الدول المتقدمة. ولما كانت الرياضيات إحدى أهمّ الموادّ الدراسية التي تنمّي لدى الطلبة مهارات التفكير وحلّ المشكلات، فقد أولى المركز هذا المبحث عنايةً كبيرةً، وحرص على إعداد كتب الرياضيات وفق أفضل الطرائق المُتبَّعة عالمياً على أيدي خبرات أردنية؛ لضمان انسجامها مع القيم الوطنية الراسخة، وتلبيتها لاحتياجات طلبتنا.

روعي في إعداد كتب الرياضيات تقديم المحتوى بصورة سلسلة، ضمن سياقات حياتية شائقة، تزيد رغبة الطلبة في التعلّم، ووظّفت فيها التكنولوجيا لتُسهم في جعل الطلبة أكثر تفاعلاً مع المفاهيم المُقدمة لهم. كما عُنِيَ بإبراز خطة حلّ المسألة، فأفرد لها دروساً مستقلة تتيح للطلبة التدرب على أنواع مختلفة من هذه الخطط وتطبيقها في مسائل متنوعة. لقد احتوت الكتب على مشروع لكل وحدة؛ لتعزيز تعلّم الطلبة المفاهيم والمهارات الواردة فيها وإثرائها. ولأنّ التدرب المكثّف على حلّ المسائل يُعدّ إحدى أهم طرائق ترسيخ المفاهيم الرياضية وزيادة الطلاقة الإجرائية لدى الطلبة؛ فقد أُعِدَّ كتاب التمارين على نحوٍ يُقدّم للطلبة ورقة عمل في كل درس، تُحلّ بوصفها واجباً منزلياً، أو داخل الغرفة الصفية إن توافر الوقت الكافي. ولأنّنا ندرك جيداً حرص الكوادر التعليمية الأردنية على تقديم أفضل ما لديها للطلبة؛ فقد جاء كتاب التمارين أداةً مساعدة تُوفّر عليها جهد إعداد أوراق العمل وطباعتها.

من المعلوم أنّ الأرقام العربية تُستخدم في معظم مصادر تعليم الرياضيات العالمية، ولا سيّما على شبكة الإنترنت، التي أصبحت أداة تعليمية مهمّة؛ لما تزخر به من صفحات تُقدّم محتوى تعليمياً تفاعلياً ذا فائدة كبيرة. وحرصاً منا على ألا يفوت طلبتنا أيّ فرصة، فقد استعملنا في هذا الكتاب الأرقام العربية؛ لجسر الهوة بين طلبتنا والمحتوى الرقمي العلمي، الذي ينمو بتسارع في عالم يخطو نحو التعليم الرقمي بوتيرة متسارعة.

ونحن إذ نقدّم هذا الكتاب، نأمل أن ينال إعجاب أبنائنا الطلبة والكوادر التعليمية الأردنية، ويجعل تعليم الرياضيات وتعلّمها أكثر متعةً وسهولةً، ونعد بأن نستمرّ في تحسين هذا الكتاب في ضوء ما يصلنا من ملاحظات.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمة المحتويات

الوحدة 1 المتباينات الخطية 6

مشروع الوحدة: المتباينات والعلوم 7

الدرس 1 المجموعات والفترات 8

الدرس 2 حل المتباينات المركبة 17

الدرس 3 حل مُعادلات القيمة المطلقة ومتبايناتها 26

الدرس 4 تمثيل المتباينات الخطية بمتغيرين بيانياً 35

اختبار نهاية الوحدة 46

الوحدة 2 العلاقات والاقترانات 48

مشروع الوحدة: القطع المكافئ في حياتنا 49

الدرس 1 الاقترانات 50

الدرس 2 تفسير التمثيلات البيانية للعلاقات 62

الدرس 3 الاقتران التربيعي 72

معمل برمجة جوجيرا: استكشاف التحويلات الهندسية للاقتران التربيعي 83

الدرس 4 التحويلات الهندسية للاقترانات التربيعية 85

اختبار نهاية الوحدة 96

قائمة المحتويات

الوحدة 3 حلُّ المعادلات 98

99 مشروعُ الوحدة: أبني منجنيقًا

100 الدرسُ 1 حلُّ المُعادلاتِ التربيعيةِ بيانياً

107 الدرسُ 2 حلُّ المُعادلاتِ التربيعيةِ بالتحليل (1)

116 الدرسُ 3 حلُّ المُعادلاتِ التربيعيةِ بالتحليل (2)

125 الدرسُ 4 حلُّ المُعادلاتِ التربيعيةِ بإكمالِ المُربّع

133 الدرسُ 5 حلُّ المُعادلاتِ التربيعيةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ

144 الدرسُ 6 حلُّ مُعادلاتٍ خاصّةٍ

152 اختبارُ نهايةِ الوحدة

الوحدة 4 الهندسةُ الإحداثيّةُ 154

155 مشروعُ الوحدة: الهندسةُ الإحداثيّةُ والخريطةُ

156 الدرسُ 1 المسافةُ في المُستوى الإحداثيّ

166 الدرسُ 2 المسافةُ بينَ نقطةٍ ومُستقيمٍ

175 الدرسُ 3 البرهانُ الإحداثيّ

184 اختبارُ نهايةِ الوحدة

ما أهميّة هذه الوحدة؟

تُستعمل المُتباينات في الكثير من المواقف الحياتية والعلمية للتعبير عن مقادير ذات قيم غير مشروطة، مثل درجة الحرارة التي يمكن أن تعيش فيها أسماك الزينة، كما تُستعمل للتعبير عن التكلفة الممكنة لإنتاج سلعة ما أو الربح الذي يمكن تحقيقه عند بيعها.

سأتعلم في هذه الوحدة:

- التعبير عن المُتباينات باستعمال المجموعات والفترات.
- حلّ مُتباينات مُركّبة وتمثيل مجموعة حلّها على خطّ الأعداد.
- حلّ مُعادلات القيمة المطلقة ومُتبايناتها.
- تمثيل مُتباينة خطية بمتغيرين بيانياً.

تعلمت سابقاً:

- ✓ حلّ مُعادلات خطية بمتغير واحد.
- ✓ حلّ مُتباينة خطية بأكثر من خطوة، وتمثيل حلّها على خطّ الأعداد.
- ✓ تمثيل المُعادلة الخطية في المستوى الإحداثي.

فكرة المشروع توظيف المُتباينات الخطيّة في مواقف علميّة مختلفة.



المواد والأدوات شبكة الإنترنت.



خطوات تنفيذ المشروع:

- 1 أختار ثلاثة موضوعات ممّا يأتي، وأبحث في شبكة الإنترنت عن موقف في كلّ منها، وأعبّر عنه مُستعملًا طريقة سرد العناصر وطريقة الصّفة المُميّزة:
 - جسم الإنسان.
 - الزراعة.
 - الآلات والأدوات.
 - الموادّ الكيميائيّة.
 - علوم الأرض والبيئة.
 - الرياضة.
- 2 أختار اثنين من الموضوعات السابقة، وأبحث عن موقف في كلّ منهما يمكن التعبير عنه باستعمال مُتباينة مُركّبة.
- 3 أكتب مسألة حياتيّة على كلّ من الموقّعين اللّذين اخترتُهما في الخطوة السابقة، وأحلّ المسألتين باستعمال حلّ المُتباينات المُركّبة، وأمثّل الحلّ على خطّ الأعداد.
- 4 أختار اثنين من الموضوعات السابقة، وأبحث فيهما عن موقّعين يُمكن التعبير عن أحدهما باستعمال مُعادلة القيمة مطلقة، وعن الآخر باستعمال مُتباينة قيمة مطلقة.
- 5 أكتب مسألة حياتيّة على كلّ من الموقّعين اللّذين اخترتُهما في الخطوة السابقة، وأحلّتهما باستعمال حلّ مُعادلات و مُتباينات القيمة المطلقة، وأمثّل الحلّ على خطّ الأعداد.
- 6 أختار اثنين من الموضوعات السابقة، وأبحث عن موقف في كلّ منهما يمكن التعبير عنه باستعمال مُتباينة خطيّة بِمُتغيّرين، ثمّ أكتب مسألة حياتيّة مرتبطة بالموقف، وأمثّل حلّها في المُستوى الإحداثي.

عرض النتائج:

- أعدّ عرضًا تقديميًا لجميع المواقف العلميّة التي اخترتها، مدعّمًا كلًّا منها بصورة مناسبة، ومُضيفًا إلى العرض المسائل الحياتيّة التي كتبتها وحلّوها.
- أقدم العرض التقديمي الذي أعددته أمام زملائي.

ينبض قلب الإنسان من 60 إلى 100 نبضة في الدقيقة في أثناء الراحة.



المجموعات والفترات Sets and Intervals

- كتابة المجموعات باستخدام طريقتي سرد العناصر والصفة المميزة للمجموعة.
- التعبير عن المتباينات باستخدام الفترات.

فكرة الدرس



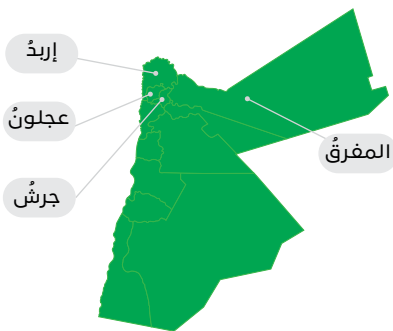
المصطلحات



مسألة اليوم



مجموعة، عنصر، سرد العناصر، الصفة المميزة للمجموعة، المجموعة الخالية، المجموعة المفردة، المجموعة المنتهية، المجموعة غير المنتهية، رمز الفترة، الملائمة، الفترة غير المحدودة.



يُبين الشكل المجاور مواقع بعض المحافظات على خريطة المملكة الأردنية الهاشمية. ما الصفة التي تشترك فيها المحافظات التي تظهر على الخريطة؟

المجموعة وطرائق التعبير عنها

المجموعة (set) تجمع أشياء متميزة تحمل صفة مشتركة، وتسمى كل من الأشياء التي تكون المجموعة **عنصرًا** (element)، ويمكن أن تكون عناصر المجموعة أحرفاً أو أعداداً أو كلمات. فمثلاً، يُعدُّ يوم الأحد عنصراً من عناصر مجموعة أيام الأسبوع.

تُستعمل الأحرف الكبيرة لتسمية المجموعات، مثل: $A, B, C, X, Y, \dots$ ، وتُستعمل الأحرف الصغيرة لتسمية عناصر المجموعة، مثل: $a, b, c, x, y, \dots$.

إذا كان a عنصراً من عناصر المجموعة A ، فإننا نقول إن a ينتمي إلى المجموعة A ، ونكتب ذلك على الصورة: $a \in A$ ؛ حيث يستعمل الرمز $(\in)$ للدلالة على (ينتمي إلى). ومن ناحية أخرى إذا كان b لا ينتمي إلى المجموعة A ، فإننا نكتب ذلك على الصورة: $b \notin A$ ؛ حيث يستعمل الرمز $(\notin)$ للدلالة على (لا ينتمي إلى).

يمكن التعبير عن المجموعة بطريقة **سرد العناصر** (roster form)، بحيث تُكتب عناصر المجموعة داخل رمز المجموعة $\{ \}$ ، ويُفصل بين كل عنصر وآخر بفاصلة. فمثلاً، نُعبّر عن المجموعة A ، التي عناصرها الأعداد الكليّة التي تقل عن أو تساوي 3، بطريقة سرد العناصر على الصورة: $A = \{0, 1, 2, 3\}$.

يمكن أيضاً التعبير عن المجموعة باستعمال **الصفة المميّزة للمجموعة** (set-builder notation). فمثلاً، يمكن التعبير عن المجموعة $A = \{0, 1, 2, 3\}$ بطريقة الصفة المميّزة $A = \{x \mid x \leq 3, x \in W\}$ ، ونقرأ: مجموعة الأعداد x ؛ حيث ينتمي x إلى مجموعة الأعداد الكليّة التي تقل عن أو تساوي 3.

رموز رياضيّة

يُرمز إلى مجموعة الأعداد الكليّة بالرمز W ، وهي: $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ، وهو الحرف الأول من كلمة whole باللغة الإنجليزيّة، وتعني كلياً.

مثال 1

أعبر عن كل من المجموعات الآتية مستعملاً طريقة سرد العناصر، وطريقة الصفة المميّزة:

1 مجموعة الأعداد الكليّة التي تقل عن 12

طريقة سرد العناصر: $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

طريقة الصفة المميّزة: $E = \{x \mid x < 12, x \in W\}$

2 مجموعة مضاعفات العدد 5 التي تقل عن أو تساوي 25

طريقة سرد العناصر: $C = \{5, 10, 15, 20, 25\}$

طريقة الصفة المميّزة: $C = \{x \mid x = 5k, k \in W, 0 < x \leq 25\}$

3 مجموعة حلّ المعادلة $2x - 8 = 0$

طريقة سرد العناصر: $S = \{4\}$

طريقة الصفة المميّزة: $S = \{x \mid 2x - 8 = 0\}$

أتعلّم

ترتيب العناصر غير مهم في طريقة سرد العناصر، كما أنني لا أكرّر كتابة العنصر.

أتذكّر

مضاعف العدد هو ناتج ضربه في أي عدد كلي ما عدا الصفر.

أتحقق من فهمي

أعبر عن كلٍّ من المجموعات الآتية مُستعملًا طريقة سرد العناصر، وطريقة الصِّفَةِ المُمَيِّزَةِ:

- (a) مجموعة الأعداد الكُلِّيَّة التي تقلُّ عن 8
- (b) مجموعة مُضاعفات العدد 3 التي تقلُّ عن 18
- (c) مجموعة حلِّ المُعادلة $3x - 2 = 0$

أنواع المجموعات

يوجد عدَّة أنواع للمجموعات تبعًا لعدد عناصرها، منها:

- **المجموعة الخالية** (empty set): هي المجموعة التي لا تحتوي على أيِّ عنصرٍ، ويُرمز لها بالرمز $\emptyset$ أو الرمز $\{ \}$ ، ومن أمثلتها مجموعة الأعداد الفردية التي تقبلُ القسمة على 2، فمن المعلوم أنَّه لا يوجد عدد فردي يقبلُ القسمة على 2
- **المجموعة المفردة** (singleton set): هي المجموعة التي تحتوي على عنصرٍ واحدٍ فقط، ومن أمثلتها مجموعة حلِّ المُعادلة $x + 8 = 0$ ؛ فهي تحتوي على عنصرٍ واحدٍ فقط، هو -8
- **المجموعة المنتهية** (finite set): هي المجموعة التي تحتوي على عددٍ محدَّد من العناصر، مثل $H = \{4, 8, 12, 16\}$ ؛ حيث تحتوي على 4 عناصر.
- **المجموعة غير المنتهية** (infinite set): هي المجموعة التي تحتوي على عددٍ لا نهائيٍّ من العناصر، مثل مجموعة الأعداد الكُلِّيَّة التي تزيدُ على 7، وهي: $P = \{8, 9, 10, \dots\}$

أنعلّم

تُسَمَّعَلُ النِّقَاطُ الثلاثُ "... للَدَّلَالَةِ على أَنَّ المجموعة غيرُ منتهية.

مثال 2

أكتب كلَّ مجموعةٍ ممَّا يأتي بطريقة سرد العناصر، ثمَّ أحدِّد ما إذا كانت خالية، أم مفردة، أم منتهية، أم غير منتهية:

$$1 \quad P = \{x \mid x > -3, x \in \mathbb{Z}\}$$

تمثِّل P مجموعة الأعداد الصحيحة التي تزيدُ على -3 ، وتكتبُ بطريقة سرد العناصر، كما يأتي:

$$P = \{-3, -2, -1, \dots\}$$

إذن، المجموعة P غير منتهية.

رموز رياضية

يُرمزُ لمجموعة الأعداد الصحيحة بالرمز $\mathbb{Z}$ ، وهي: $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

أتعلّم

يُستعمل المقدار $2k + 1$ للدلالة على الأعداد الفردية حيث k عدد صحيح. فمثلاً، العدد 7 عدد فردي، ويمكن كتابته على الصورة:

$$7 = 2(3) + 1$$

2 $O = \{x \mid x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$

تمثل O مجموعة الأعداد الفردية، وتكتب بطريقة سرد العناصر، كما يأتي:

$$O = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$$

إذن، المجموعة O غير منتهية.

3 $D = \{x \mid 3x - 12 = 0\}$

تمثل D مجموعة حل المعادلة $3x - 12 = 0$ ، وتكتب بطريقة سرد العناصر، كما يأتي:

$$D = \{4\}$$

إذن، المجموعة D مفردة.

4 $M = \{x \mid x = 3k, k \in W, 0 < x < 2\}$

تمثل M مجموعة مضاعفات العدد 3، التي تقل عن 2. وبما أنه لا توجد أعداد تحقق هذه القاعدة، فالمجموعة M خالية، ويرمز لها بالرمز $\emptyset$ أو الرمز $\{\}$.

5 $T = \{x \mid x = \frac{1}{k}, k \in W, 1 < k < 4\}$

تمثل T مجموعة مقلوب الأعداد الكلية التي تقع بين 1 و 4، وتكتب بطريقة سرد العناصر، كما يأتي:

$$T = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$$

إذن، المجموعة T منتهية.

أنتحق من فهمي

أكتب كل مجموعة مما يأتي بطريقة سرد العناصر، ثم أحدد ما إذا كانت خالية، أم مفردة، أم منتهية، أم غير منتهية:

a) $P = \{x \mid x > 10, x \in W\}$

b) $O = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$

c) $D = \{x \mid 0.5x + 10 = 0\}$

d) $D = \{x \mid x < 0, x \in W\}$

e) $T = \{x \mid x = k^2, k \in W, k < 5\}$

المُتبايناتُ والصِّفَةُ المُمَيِّزَةُ للمجموعةِ

تعلّمتُ سابقًا حلَّ المُتباينةِ الخطيَّةِ، وكانَ مِنَ الصَّعْبِ كتابَةُ جميعِ القيمِ الَّتِي تحقِّقُ المُتباينةَ؛ لذا لجأتُ إلى تمثيلِ تلكَ القيمِ على خطِّ الأعدادِ، ولكنَّ استعمالَ الصِّفَةِ المُمَيِّزَةِ للمجموعةِ يوفِّرُ طريقةً مُختصرةً للتعبيرِ عَنْ مجموعةِ حلِّ المُتباينةِ.

مثال 3

أكتبُ مجموعةَ حلِّ كلِّ مُتباينةٍ ممَّا يأتي باستعمالِ الصِّفَةِ المُمَيِّزَةِ:

1 $5x - 8 > 12$

$$5x - 8 > 12$$

المُتباينةُ الأصليةُ

$$5x - 8 + 8 > 12 + 8$$

بِجَمْعِ 8 لِطَرَفَيْ المُتباينةِ

$$\frac{5x}{5} > \frac{20}{5}$$

بِقِسْمَةِ طَرَفَيْ المُتباينةِ على 5

$$x > 4$$

بالتبسيط

إذن، مجموعةُ الحلِّ هي $\{x \mid x > 4\}$

2 $3x - 4 \geq 6x + 11$

$$3x - 4 \geq 6x + 11$$

المُتباينةُ الأصليةُ

$$3x - 4 + 4 \geq 6x + 11 + 4$$

بِجَمْعِ 4 لِطَرَفَيْ المُتباينةِ

$$3x - 6x \geq 6x - 6x + 15$$

بِطَرَحِ $6x$ مِنْ طَرَفَيْ المُتباينةِ

$$\frac{-3x}{-3} \leq \frac{15}{-3}$$

بِقِسْمَةِ طَرَفَيْ المُتباينةِ على -3 ، وتغيير اتجاهِ رمزِ المُتباينةِ

$$x \leq -5$$

بالتبسيط

إذن، مجموعةُ الحلِّ هي $\{x \mid x \leq -5\}$

أتحقِّقُ من فهمي 

أكتبُ مجموعةَ حلِّ كلِّ مُتباينةٍ ممَّا يأتي باستعمالِ الصِّفَةِ المُمَيِّزَةِ:

a) $2x + 10 \leq 14$

b) $3x + 3 < 4x - 5$

أتعلَّمُ

تدلُّ المجموعةُ

$\{x \mid x > 4\}$ على أنَّ

مجموعةُ الحلِّ هي جميعُ

الأعدادِ الحقيقيَّةِ الأكبرِ

مِنْ 4.

أندكِّرُ

إذا قُسمَ (أو ضُربَ) كلُّ

مِنْ طَرَفَيْ مُتباينةٍ صحيحةٍ

على عددٍ سالبٍ فيجبُ

تغيير اتجاهِ رمزِ المُتباينةِ

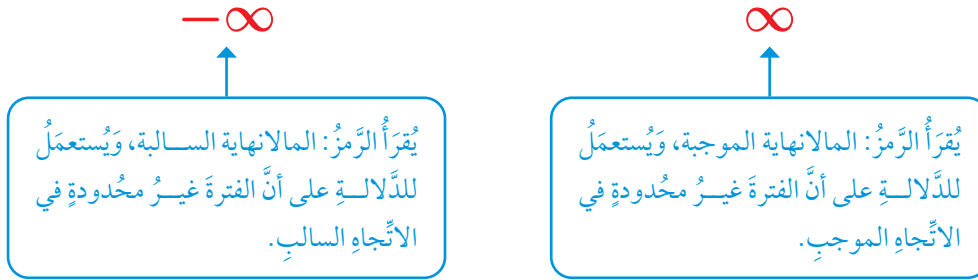
لجعلِ المُتباينةِ الناتجةِ

صحيحةً أيضًا.

المُتباينات والفترات

تعلّمتُ في المثال السابق كتابة مجموعة حلّ المُتباينة باستعمال الصّفة المُميّزة للمجموعة، ويمكن أيضًا استعمال رمز الفترة (interval notation) لكتابة مجموعة حلّ المُتباينة.

يُستعمل رمزا المالانهاية (infinity) أدناه للدلالة على أن الفترة غير محدودة (unbounded interval) في الاتجاه الموجب أو السالب.



يُستعمل الرَّمْزُ [أو الرَّمْزُ] عندما يكون رمز المُتباينة $\geq$ أو $\leq$ للدلالة على انتماء طرف الفترة إليها، ويُستعمل الرَّمْزُ (أو الرَّمْزُ) عندما يكون رمز المُتباينة $>$ أو $<$ للدلالة على عدم انتماء طرف الفترة إليها.

وفي ما يأتي تلخيص للفترات غير المحدودة وكيفية تمثيلها على خطّ الأعداد:

الفترات غير المحدودة

مفهوم أساسي

إذا كان a و b عددين حقيقيين فيمكن التعبير عن كل من المُتباينات الآتية باستعمال فترة غير محدودة:

المُتباينة	رمز الفترة	التمثيل على خطّ الأعداد
$x \geq a$	$[a, \infty)$	
$x > a$	(a, ∞)	
$x \leq b$	$(-\infty, b]$	
$x < b$	$(-\infty, b)$	
	$(-\infty, \infty)$	

أتعلّم

يُستعمل الرَّمْزُ (أو الرَّمْزُ) دائماً مع المالانهاية إذ إنّ المالانهاية ليست عددًا ولا يمكن احتواؤها في فترة.

مثال 4

أكتب كل مُتباينة مما يأتي باستعمال رمز الفترة، ثم أمثلها على خطّ الأعداد:

1 $x \leq 3$

رمز الفترة: $(-\infty, 3]$

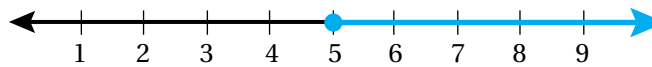
التمثيل على خطّ الأعداد:



2 $x \geq 5$

رمز الفترة: $[5, \infty)$

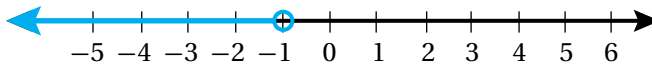
التمثيل على خطّ الأعداد:



3 $x < -1$

رمز الفترة: $(-\infty, -1)$

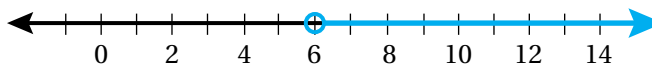
التمثيل على خطّ الأعداد:



4 $x > 6$

رمز الفترة: $(6, \infty)$

التمثيل على خطّ الأعداد:



أندكّر

تُستعمل الدائرة المفتوحة على خطّ الأعداد إذا كان رمز المُتباينة $>$ أو $<$ ، أمّا الدائرة المغلقة فتُستعمل إذا كان رمز المُتباينة $\leq$ أو $\geq$.

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي

اكتب كلَّ مُتباينةٍ ممَّا يأتي باستعمالِ رمزِ الفترة، ثمَّ أمثلها على خطِّ الأعداد:

a) $x \leq -2$

b) $x \geq 10$

c) $x < 8$

d) $x > -7$



أَتَدْرِبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ



أَعْبُرْ عَنْ كُلِّ مِنَ المجموعاتِ الآتيةِ مستعملاً طريقةَ سردِ العناصرِ، وطريقةَ الصِّفَةِ المُمَيِّزَةِ:

1 مجموعةُ الأعدادِ الكُلِّيَّةِ التي تزيدُ على أو تُساوي 20

2 مجموعةُ مُضاعفاتِ العددِ 4 التي تقلُّ عن 50

3 مجموعةُ الأعدادِ الفرديةِ التي تزيدُ على أو تُساوي 11

4 مجموعةُ الأعدادِ الصحيحةِ التي تقلُّ عن -4

5 مجموعةُ الأعدادِ الزوجيةِ التي تقلُّ عن أو تُساوي 100

6 مجموعةُ حلِّ المُعادلةِ $5x - 30 = 0$

7 مجموعةُ مُضاعفاتِ العددِ 5 التي تقلُّ عن 4

8 مجموعةُ الأعدادِ الكُلِّيَّةِ التي تقعُ بينَ العددينِ 1 و 15

اكتب كلَّ مجموعةٍ ممَّا يأتي بطريقةِ سردِ العناصرِ، ثمَّ أحدِّدْ ما إذا كانتْ خاليةً، أم مفردةً، أم منتهيةً، أم غير منتهية:

9 $A = \{x \mid x \in W, x \leq 1\}$

10 $B = \{x \mid 3x + 1 = 0\}$

11 $C = \{x \mid x < 2, x \in Z\}$

12 $D = \{x \mid x^2 = x, x \in Z\}$

13 $E = \{x \mid x = 6k, k \in W, x < 5\}$

14 $T = \{x \mid x = k^3, k \in W, x < 80\}$

أكتب مجموعة حل كل مُتباينة مما يأتي باستعمال الصِّفَةِ المُميِّزة:

15 $7 + 6x < 19$

16 $2(y + 2) - 3y \geq -1$

17 $18x - 5 \leq 3(6x - 2)$

أكتب كل مُتباينة مما يأتي باستعمال رمز الفترة، ثم أُمثلها على خطِّ الأعداد:

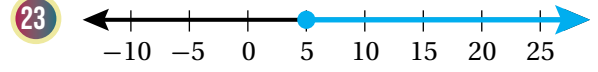
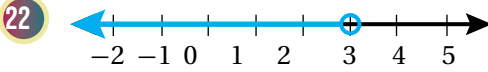
18 $x < -7$

19 $x > 12$

20 $x \leq 1$

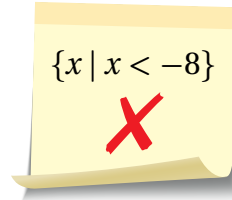
21 $x \geq -20$

أكتب المُتباينة المُمثَّلة على خطِّ الأعداد في كلِّ مما يأتي، ثمَّ أعبر عنها باستعمال رمز الفترة:



مهارات التفكير العليا

24 **أكتشف الخطأ:** أعاد أحمد كتابة الفترة $(-\infty, -8]$ باستعمال الصِّفَةِ المُميِّزة، كما هو مبيِّن جانبًا.

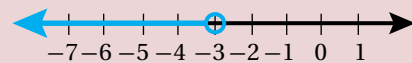


أبين الخطأ الذي وقع فيه أحمد، وأصحِّحه.

25 **تحدِّ:** أكتب المجموعة $D = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \frac{5}{26}, \frac{6}{37}, \frac{7}{50} \right\}$ باستعمال الصِّفَةِ المُميِّزة.

26 **أكتشف المُختلِف:** أيُّ مما يأتي مختلف؟ أبرِّر إجابتي:

$x < -3$



$\{x \mid x < -3\}$

$\{ \dots, -5, -4, -3 \}$

حلُّ المُتبايناتِ المُركَّبةِ Solving Compound Inequalities

- حلُّ مُتبايناتِ مُركَّبةٍ تحتوي على أداة الرِّبط (و) أو (أو)، وتمثِّل مجموعة حلِّها على خطِّ الأعداد.
- التعبير عن المُتبايناتِ المركَّبةِ باستعمالِ الفترات.

فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم



مُتباينةٌ بسيطةٌ، مُتباينةٌ مُركَّبةٌ، تقاطعٌ، اتِّحادٌ، فترةٌ محدودةٌ.
تُعَدُّ سمكةُ (النيون تيترا) مِنْ أَكْثَرِ أَسْمَاكِ الزينةِ شهرةً، وتعيشُ في مياهٍ عذبةٍ تتراوحُ درجةُ حرارتِها بينَ 20°C و 26°C . أكتبُ مُتباينةً تمثِّلُ درجاتِ الحرارةِ الملائمةَ للسمكةِ.

المُتباينةُ المُركَّبةُ

تُسَمَّى المُتبايناتُ الَّتِي تعلَّمْتُها سابقًا مُتبايناتٍ بسيطةً (simple inequalities)؛ لأنَّها تحتوي على رمزٍ مُتباينةٍ واحدٍ.

المُتباينةُ المُركَّبةُ (compound inequality): هِيَ عبارةٌ ناتجةٌ عَنْ رِبطِ مُتباينتينِ باستعمالِ أداةِ الرِّبطِ (و) أو مرادفِها بالُّغةِ الإنجليزِيَّةِ (and) أو باستعمالِ أداةِ الرِّبطِ (أو) أو مرادفِها بالُّغةِ الإنجليزِيَّةِ (or).

مُتباينةٌ بسيطةٌ

$$x \geq 5$$

مُتبايناتٌ مُركَّبةٌ

$$x \geq 1 \text{ and } x \leq 4$$

$$x < 0 \text{ or } x \geq 3$$

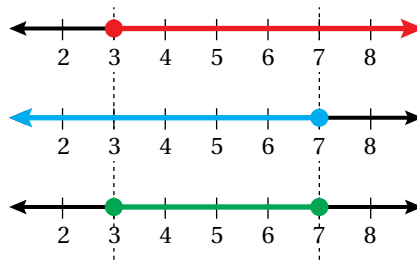
التمثِيلُ البيانيُّ للمُتباينةِ المُركَّبةِ الَّتِي تحتوي على أداةِ الرِّبطِ (و) هُوَ **تقاطعٌ** (intersection) التمثيلَيْن البيانيَّيْنِ للمُتباينَتَيْنِ المُكوِّنَتَيْنِ للمُتباينةِ المُركَّبةِ.

$$x \geq 3$$

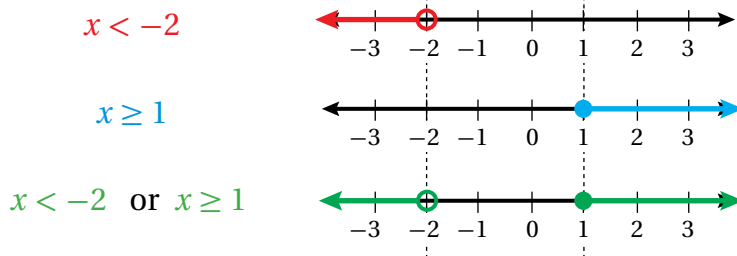
$$x \leq 7$$

$$x \geq 3 \text{ and } x \leq 7$$

$$3 \leq x \leq 7$$



التمثيل البياني للمُتباينة المركَّبة التي تحتوي على أداة الرِّبط (أو) هو اتحاد (union) التمثيلين البيانيين للمُتباينتين المكوَّنتين للمُتباينة المركَّبة.



مثال 1

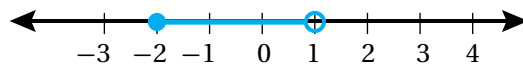
اكتب مُتباينةً مركَّبةً تمثل كلَّ جملةٍ ممَّا يأتي، ثمَّ أمثلها على خطِّ الأعداد:

1 عددٌ أكبر من أو يساوي -2 وأقل من 1

أختار مُتغيِّراً: ليكن x ممثلاً للعدد

أكتب المُتباينة: $-2 \leq x < 1$

أمثل على خطِّ الأعداد:

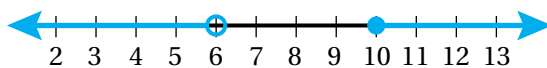


2 عددٌ أقل من 6 أو لا يقل عن 10

أختار مُتغيِّراً: ليكن y ممثلاً للعدد

أكتب المُتباينة: $y < 6$ or $y \geq 10$

أمثل على خطِّ الأعداد:



أتحقق من فهمي

اكتب مُتباينةً مركَّبةً تمثل كلَّ جملةٍ ممَّا يأتي، ثمَّ أمثلها على خطِّ الأعداد:

(a) عددٌ أكبر من -3 وأقل من 7

(b) عددٌ على الأكثر 0 أو على الأقل 2

أندكر

تُشير عبارة "على الأكثر" إلى الرَّمز $\leq$ ، أما عبارة "على الأقل" فتشير إلى الرَّمز $\geq$

المُتباينات المُركَّبة والفتراث

تعلَّمتُ في الدرسِ السابقِ كيفيةَ التعبيرِ عَنِ المُتباينةِ البسيطةِ باستعمالِ رمزِ الفترة، ويمكنُ أيضًا التعبيرُ عَنِ المُتباينةِ المُركَّبةِ باستعمالِ رمزِ الفترة.

يمكنُ التعبيرُ عَنِ بعضِ المُتبايناتِ المُركَّبةِ الَّتِي تحتوي على أداةِ الرِّبطِ (و) باستعمالِ فترةٍ **مُحدودةٍ** (bounded interval)، وهي فترةٌ لا يمتدُّ أيٌّ مِنْ طَرَفَيْهَا إلى المالا نهاية، وفي ما يأتي أشكالُ الفتراثِ المُحدودةِ المختلفةِ الَّتِي تُعبَّرُ عَنِ المُتبايناتِ المُركَّبةِ:

الفتراثُ المُحدودةُ

مفهومٌ أساسيٌّ

إذا كانَ a و b عدديَّينِ حقيقيَّينِ؛ حيثُ $a < b$ ، فيمكنُ التعبيرُ عَنِ كُلِّ مِنَ المُتبايناتِ المُركَّبةِ الآتيةِ باستعمالِ فترةٍ مُحدودةٍ:

المُتباينةُ	رَمَزُ الفترةِ	التمثيلُ على خطِّ الأعدادِ
$a \leq x \leq b$	$[a, b]$	
$a < x < b$	(a, b)	
$a \leq x < b$	$[a, b)$	
$a < x \leq b$	$(a, b]$	

أما إذا احتوتِ المُتباينةُ المُركَّبةُ على أداةِ الرِّبطِ (أو)، فيمكنُ التعبيرُ عَنِ كُلِّ مِنَ المُتباينَتَيْنِ المُكوِّنَتَيْنِ لها، ثُمَّ الرِّبطُ بَيْنَ الفترَتَيْنِ باستعمالِ رمزِ الاتحادِ $\cup$.

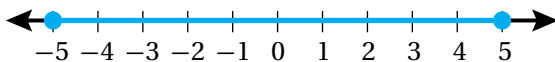
مثال 2

اكتبُ كُلَّ مُتباينةٍ مُركَّبةٍ ممَّا يأتي باستعمالِ رمزِ الفترة، ثُمَّ أمثلُها على خطِّ الأعدادِ:

1 $-5 \leq x \leq 5$

رَمَزُ الفترة: $[-5, 5]$

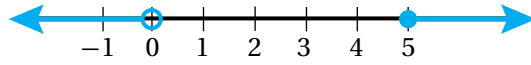
التمثيلُ على خطِّ الأعدادِ:



2 $x < 0$ or $x \geq 5$

اتحاد فترتين منفصلتين: $(-\infty, 0) \cup [5, \infty)$

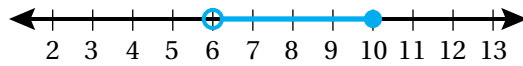
التمثيل على خط الأعداد:



3 $6 < x \leq 10$

رمز الفترة: $(6, 10]$

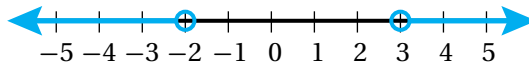
التمثيل على خط الأعداد:



4 $x < -2$ or $x > 3$

اتحاد فترتين منفصلتين: $(-\infty, -2) \cup (3, \infty)$

التمثيل على خط الأعداد:



أتحقق من فهمي

اكتب كل مُتباينة مُركَّبة ممَّا يأتي باستعمالِ رمزِ الفترة، ثمَّ أمثلها على خطِّ الأعداد:

a) $-10 < x \leq 10$

b) $x > 1$ or $x < -4$

c) $7 \leq x < 12$

d) $x \leq -8$ or $x \geq 8$

حلُّ المُتبايناتِ المُركَّبةِ

تعلَّمتُ سابقًا حلَّ المُتبايناتِ البسيطةِ باستعمالِ خصائصِ جمعِ المُتبايناتِ وطرحها وضربها وقسمتها، ويمكنُ تطبيقُ الخصائصِ ذاتها لحلَّ المُتبايناتِ المُركَّبةِ التي تحتوي على أداة الرِّبط (و).

أتعلَّم

$(-\infty, 0) \cup [5, \infty)$

ليستُ فترةً وإلَّا اتحادُ

الفترتين المنفصلتين

$(-\infty, 0)$ و $[5, \infty)$

مثال 3

أتعلم

مجموعة حل المتباينة المركبة التي تحتوي على أداة الربط (و)، هي مجموعة الأعداد التي تحقق المتباينتين المكونتين للمتباينة المركبة معاً. فمثلاً، $1 < x \leq 4$ هي مجموعة الأعداد التي تحقق المتباينتين $x > 1$ و $x \leq 4$ معاً.

أجد مجموعة حل كل متباينة مما يأتي، ثم أمثلها على خط الأعداد:

1 $-4 < x - 5 \leq -1$

$$-4 < x - 5 \leq -1$$

المتباينة المعطاة

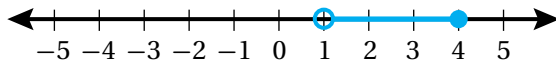
$$-4 + 5 < x - 5 + 5 \leq -1 + 5$$

بإضافة 5 إلى كل طرف

$$1 < x \leq 4$$

بالتبسيط

إذن، مجموعة الحل هي: $\{x \mid 1 < x \leq 4\}$ ، ويمكن كتابتها باستعمال رمز الفترة على الصورة: $(1, 4]$ ، ويمكن تمثيلها على خط الأعداد على النحو الآتي:



2 $-3 < -2x + 1 < 9$

$$-3 < -2x + 1 < 9$$

المتباينة المعطاة

$$-3 - 1 < -2x + 1 - 1 < 9 - 1$$

ب طرح 1 من كل طرف

$$-4 < -2x < 8$$

بالتبسيط

$$\frac{-4}{-2} > \frac{-2x}{-2} > \frac{8}{-2}$$

بقسمة كل طرف على -2، وتغيير اتجاه رمز المتباينة

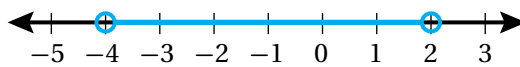
$$2 > x > -4$$

بالتبسيط

$$-4 < x < 2$$

بإعادة كتابة المتباينة

إذن، مجموعة الحل هي: $\{x \mid -4 < x < 2\}$ ، ويمكن كتابتها باستعمال رمز الفترة على الصورة: $(-4, 2)$ ، ويمكن تمثيلها على خط الأعداد على النحو الآتي:



أتحقق من فهمي

أجد مجموعة حل كل متباينة مما يأتي، ثم أمثلها على خط الأعداد:

a) $-5 < x - 4 < 2$

b) $-2 < -3x - 8 \leq 10$

يمكن أيضاً حل المتباينات المركبة التي تحتوي على أداة الربط (أو) باستعمال خصائص المتباينات.

مثال 4

أجد مجموعة حل كل متباينة مما يأتي، ثم أمثلها على خط الأعداد:

1 $2x + 3 < 5$ or $x + 7 > 11$

$2x + 3 < 5$ or $x + 7 > 11$ المتباينة المعطاة

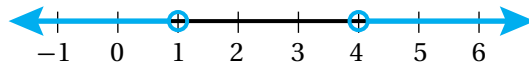
$2x + 3 - 3 < 5 - 3$ $x + 7 - 7 > 11 - 7$ بالطرح

$2x < 2$ $x > 4$ بالتبسيط

$\frac{2x}{2} < \frac{2}{2}$ بالقسمة

$x < 1$ or $x > 4$ بالتبسيط

إذن، مجموعة الحل هي $\{x \mid x < 1 \text{ or } x > 4\}$ ، ويمكن كتابتها باستعمال اتحاد فترتين منفصلتين على الصورة: $(-\infty, 1) \cup (4, \infty)$ ، ويمكن تمثيلها على خط الأعداد على النحو الآتي:



2 $-3x + 4 < 19$ or $7x - 3 > 18$

$-3x + 4 < 19$ or $7x - 3 > 18$ المتباينة المعطاة

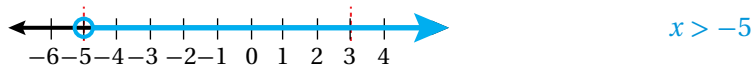
$-3x + 4 - 4 < 19 - 4$ $7x - 3 + 3 > 18 + 3$ بالطرح أو الجمع

$-3x < 15$ $7x > 21$ بالتبسيط

$\frac{-3x}{-3} > \frac{15}{-3}$ $\frac{7x}{7} > \frac{21}{7}$ بالقسمة

$x > -5$ or $x > 3$ بالتبسيط

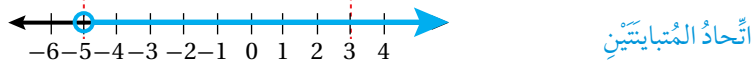
مجموعة حل المتباينة هي اتحاد المتباينتين. إذن، أمثل كلاً من المتباينتين الآتيتين، ثم أجد اتحاد التمثيلين:



$x > -5$



$x > 3$



اتحاد المتباينتين

أتعلم

تكون المتباينة المركبة التي تحتوي على أداة الربط (و) صحيحة إذا كانت المتباينتان المكونتان لها صحيحتين، أما المتباينة المركبة التي تحتوي على أداة الربط (أو) فتكون صحيحة إذا كانت إحدى المتباينتين المكونتين لها على الأقل صحيحة.

أتعلم

عند إيجاد مجموعة حل متباينة مركبة تحتوي على أداة الربط (أو)، يُفضل تمثيل كل متباينة على حدة، ثم إيجاد اتحاد التمثيلين البيانيين، لا سيما عند تغيير اتجاه رمز المتباينة، أو إذا كان للمتباينتين الأصليتين الاتجاه نفسه.

ألاحظ أن التمثيل البياني للمتباينة $x > -5$ يحتوي على جميع نقاط التمثيل البياني للمتباينة $x > 3$ ؛ لذا يكون الاتحاد هو التمثيل البياني للمتباينة $x > -5$ ، وتكون مجموعة الحل $\{x | x > -5\}$ ، ويمكن كتابتها باستعمال رمز الفترة على الصورة: $(-5, \infty)$.

أتحقق من فهمي

أجد مجموعة حل كل متباينة مما يأتي، ثم أمثلها على خط الأعداد:

a) $x + 2 \leq 5$ or $x - 4 \geq 2$ b) $-2x + 7 \leq 13$ or $5x + 12 < 37$

يمكن استعمال المتباينات لحل كثير من التطبيقات الحياتية.

مثال 5: من الحياة



درجة الحرارة: تتراوح درجة حرارة محرك سيارة في أثناء تشغيله بين 90°C و 110°C . أكتب متباينة مركبة تمثل درجة حرارة محرك السيارة في أثناء تشغيله وأمثلها على خط الأعداد، ثم أحوّل المتباينة إلى الدرجة الفهرنهايتية. علماً أن $^\circ\text{C} = \frac{5}{9} (^\circ\text{F} - 32)$

اختار متغيراً: ليكن C ممثلاً لدرجة حرارة المحرك بالسلسيوس.

أكتب المتباينة: $90 \leq C \leq 110$

أمثل على خط الأعداد:



ليكن F ممثلاً لدرجة الحرارة بالفهرنهايت، ومنه:

$90 \leq C \leq 110$ المتباينة

$90 \leq \frac{5}{9} (F - 32) \leq 110$ بالتعويض عن C بـ $\frac{5}{9} (F - 32)$

$162 \leq F - 32 \leq 198$ بضرب كل طرف بـ $\frac{9}{5}$

$194 \leq F \leq 230$ بجمع 32 لكل طرف

إذن، تتراوح درجة حرارة المحرك في أثناء التشغيل بين 194°F و 230°F



يتكون نظام تبريد محرك السيارة من مضخة تدفع الماء أو سائل تبريد خاصاً ذهاباً وإياباً بين المحرك والمشع (الرديتر)، الذي يظهر في الصورة أعلاه.

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي



درجة الحرارة: إذا عَلِمْتُ أَنَّ درجة حرارة الجسم الطبيعية للأشخاص البالغين تتراوح بين 36.1°C و 37.2°C ، فأكتب مُتباينةً مُركَّبةً تمثل درجة حرارة الشخص البالغ وَأُمثلها على خطِّ الأعداد، ثمَّ أحوِّل المُتباينة إلى الدرجة الفهرنهايتية. علماً أنَّ $^{\circ}\text{C} = \frac{5}{9} (^{\circ}\text{F} - 32)$

أَتَدَرَّبُ وَأُحَلِّ المسائل

أكتب مُتباينةً مركَّبةً تمثل كلَّ جملةٍ ممَّا يأتي، ثمَّ أُمثلها على خطِّ الأعداد:

- 1 عدد أكبر من -7 وأقل من 2
- 2 عدد أقل من أو يساوي -5 أو أكبر من 12
- 3 عدد يقع بين -10 و 10
- 4 عدد على الأكثر -2 أو على الأقل 9
- 5 ناتج ضرب عدد في -5 أكبر من 35 أو أقل من 10
- 6 عدد مطروح منه 8 لا يزيد على 4 ولا يقل عن 5

أكتب كلَّ مُتباينةٍ مُركَّبةٍ ممَّا يأتي باستعمالِ رموزِ الفترة، ثمَّ أُمثلها على خطِّ الأعداد:

- 7 $x \geq 4$ or $x \leq -7$
- 8 $-2 < x < 4$
- 9 $x < 2$ or $x \geq 15$
- 10 $-5 \leq x \leq 10$

أكتب مُتباينةً مُركَّبةً تُعبِّرُ عَنْ كلِّ تمثيلٍ على خطِّ الأعداد ممَّا يأتي، ثمَّ أعبِّرُ عنها برمزِ الفترة:

- 11
- 12
- 13
- 14

أجد مجموعة حل كل مُتباينة مما يأتي، ثم أُمثلها على خط الأعداد:

15 $-5 < x + 1 < 4$

16 $\frac{1}{2} < \frac{3x-1}{4} \leq 5$

17 $-9 < 3x + 6 \leq 18$

18 $x + 1 < -3$ or $x - 2 > 0$

19 $2r + 3 < 7$ or $-r + 9 \leq 2$

20 $2n + 11 \leq 13$ or $-3n \geq -12$



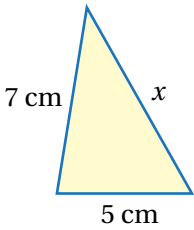
21 **سُعرات حراريّة:** إذا عَلِمْتُ أَنَّ حاجة الرياضيِّ مِنَ الطاقةِ تعتمدُ على عواملٍ عدَّة، مِنْ أَهمَّها كُتْلَتُهُ وسرعةُ التمرينِ، وكانَ رياضيٌّ يحتاجُ يوميًّا ما بينَ 3000 و 4500 سعرة حراريّة، فأكتبُ مُتباينةً تمثِّلُ السُّعراتِ الحراريّةَ الَّتِي يحتاجُ إليها الرياضيُّ، وأُمثلها على خطِّ الأعداد.



مهارات التفكير العليا



تبرير: إذا كان مجموع طولي أيّ ضلعين في المثلث أكبر من طول الضلع الثالث، فاستعمل هذه الحقيقة للإجابة عن السؤالين الآتيين تبعًا:



22 هل يمكن أن تكون قيمة x في المثلث المجاور 1 cm؟ أبرر إجابتي.

23 استعمل المثلث المجاور لكتابة مُتباينة تُحدِّد قيم x الممكنة، مُبرِّرًا إجابتي.

24 **أكتشف الخطأ:** ناتج تقريب العدد x إلى أقرب 100 هو 400. تقول عبيد إن المُتباينة $395 \leq x < 405$ تُعبِّر عن جميع قيم x المُحتملة، وتقول لمياء إن المُتباينة $350 \leq x < 450$ تُعبِّر عن جميع قيم x المُحتملة. أيُّهما إجابتها صحيحة؟ أبرر إجابتي.

تبرير: أجد مجموعة حل كل مُتباينة مما يأتي، مُبرِّرًا إجابتي:

25 $-1 + x < 3$ or $-x \geq -4$

26 $3x - 7 \geq 5$ and $2x + 6 \leq 12$

الدرس 3

حلُّ مُعادلاتِ القيمةِ المُطلقةِ ومُتبايناتها Solving Absolute-Value Equations and Inequalities

حلُّ مُعادلاتِ القيمةِ المُطلقةِ ومُتبايناتها.

فكرة الدرس



مُعادلةُ القيمةِ المُطلقةِ، مُتباينةُ القيمةِ المُطلقةِ.

المصطلحات



مسألة اليوم



استعملتُ مريمُ 8 g من مادّةٍ كيميائيّةٍ في تجربةٍ علميّةٍ. إذا كانت دقّةُ الميزانِ المخبريّ الذي استعملتهُ مريمُ تُحدّدُ الكتلةَ بهامشٍ خطأً لا يتجاوزُ 0.1 g $\pm$ ، فأكتبُ مُتباينةَ قيمةٍ مُطلقةٍ تُحدّدُ الكتلةَ الحقيقيّةَ للمادّةِ الّتي استعملتها.

مقاديرُ القيمةِ المُطلقةِ

تعلّمتُ سابقاً أنّ المقدارَ الجبريّ هو عبارةٌ تحتوي متغيّراتٍ وأعداداً تفصلُ بينها عمليّاتٌ.

ويمكنُ أن يتضمّنَ المقدارُ الجبريّ قيمةً مُطلقةً. ولإيجاد قيمتهِ، أعوّضُ قيمةَ المُتغيّرِ الّذي يحتويه، ثمّ أتّبعُ أولوياتِ العمليّاتِ.

مثال 1

أجدُ قيمةَ كلِّ من المقدارين الآتيين عند القيمة المُعطاة:

1 $|x + 3| - 8, x = 2$

$$|x + 3| - 8 = |2 + 3| - 8$$

بتعويض $x = 2$

$$= |5| - 8$$

$$2 + 3 = 5$$

$$= 5 - 8$$

$$|5| = 5$$

$$= -3$$

بالتبسيط

أتعلّم

لإيجاد قيمةٍ مقدارٍ جبريّ يتضمّنُ قيمةً مُطلقةً أُجري العمليات الحسابيّة داخل القيمة المُطلقة أولاً.

2 $10 - |5 - 2x|, x = 7$

$$10 - |5 - 2x| = 10 - |5 - 2(7)|$$

بتعويض $x = 7$

$$= 10 - |5 - 14|$$

$$2(7) = 14$$

$$= 10 - |-9|$$

$$5 - 14 = -9$$

$$= 10 - 9$$

$$|-9| = 9$$

$$= 1$$

بالتبسيط

أتحقق من فهمي 

أجد قيمة كل من المقادير الآتية عند القيمة المُعطاة:

a) $|x - 2| + 10, x = -4$

b) $-2|3x + 1|, x = -1$

معادلات القيمة المطلقة

معادلة القيمة المطلقة (absolute value equation) هي مُعادلة تحتوي على قيمة مُطلقة. وبما أن القيمة المطلقة لكل من العدد ومعكوسه متساويتان فيمكن تحويل مُعادلة القيمة المطلقة إلى مُعادلتين مُرتبطتين بها لا تحتويان على رمز القيمة المطلقة، وذلك بجعل العبارة التي داخل القيمة المطلقة موجبة مرةً وسالبةً مرةً أخرى.

أتذكر

القيمة المطلقة للعدد هي المسافة بين ذلك العدد والصفر على خط الأعداد.

حل مُعادلات القيمة المطلقة

مفهوم أساسي

لحل المُعادلة $|ax + b| = c$ ؛ حيث $c \geq 0$ ، أحل المُعادلتين المُرتبطتين بها، وهما:

$$ax + b = c \quad \text{or} \quad ax + b = -c$$

مثال 2

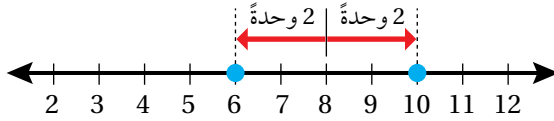
أحلّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتية، وأُمثِّل مجموعةَ الحلّ على خطِّ الأعدادِ (إنَّ أمكنَ):

1 $|x - 8| = 2$

$x - 8 = 2$ or $x - 8 = -2$ بكتابة المُعادلتين المُرتبطتين

$x = 10$ $x = 6$ بجمع 8 لكلِّ طرفٍ

إذن، مجموعةُ حلِّ المُعادلة هي: $\{6, 10\}$ ، وتُمثِّلها على خطِّ الأعدادِ على النحوِّ الآتي:



أنعلّم

تعني المُعادلة $|x - 8| = 2$ أن المسافة بين x و 8 تُساوي 2 وحدة.

2 $2|x - 4| + 10 = 16$

لحلِّ هذه المُعادلة، أكتب القيمةَ المطلقةَ أولاً معزولةً في أحدِ طرفي المُعادلة.

$2|x - 4| + 10 = 16$ المُعادلة المُعطاة

$2|x - 4| = 6$ بطرح 10 من طرفي المُعادلة

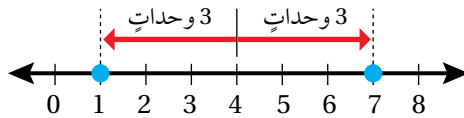
$|x - 4| = 3$ بقسمة طرفي المُعادلة على 2

الآن، أكتب مُعادلتين مُرتبطتين بالمُعادلة $|x - 4| = 3$ ، ثمَّ أُلِّ كُلًّا منهما.

$x - 4 = 3$ or $x - 4 = -3$ بكتابة المُعادلتين المُرتبطتين

$x = 7$ $x = 1$ بجمع 4 لكلِّ طرفٍ

إذن، مجموعةُ حلِّ المُعادلة هي: $\{1, 7\}$ ، وتُمثِّلها على خطِّ الأعدادِ على النحوِّ الآتي:



3 $|3x + 1| = -5$

المعادلة $|3x + 1| = -5$ تعني أنَّ المسافة بين $3x$ و -1 تُساوي -5 وبما أنَّه لا يمكن أن تكون المسافة سالبة فإن مجموعة حل هذه المعادلة $\emptyset$ ؛ أي أنه لا يوجد حل للمعادلة.

أتحقق من فهمي

أحلُّ كلاً من المعادلات الآتية، وأُمثِّل مجموعة الحل على خطِّ الأعداد (إن أمكن):

a) $|x - 7| = 5$

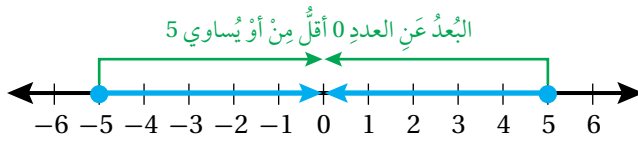
b) $4|2x + 7| = 16$

c) $|x + 4| = -10$

متباينات القيمة المطلقة

متباينة القيمة المطلقة (absolute value inequality) هي متباينة تحتوي على قيمة مطلقة.

فمثلاً، $|x| \leq 5$ هي متباينة قيمة مطلقة، وتعني أنَّ المسافة بين x و 0 أقل من أو تُساوي 5 ؛ لذا فإن $x \leq 5$ و $x \geq -5$



وبذلك، فإن مجموعة حل هذه المتباينة هي الفترة $[-5, 5]$.

وبشكل عام، يمكن تحويل متباينة القيمة المطلقة، التي تحتوي على الرمز $(<)$ ، إلى متباينة مركبة تحتوي على أداة الربط $(و)$ ، ثم حل المتباينة المركبة الناتجة.

حل متباينات القيمة المطلقة $(<)$

مفهوم أساسي

لحل المتباينة $|ax + b| < c$ ؛ حيث $c > 0$ ، أحل المتباينة المركبة المرتبطة بها، وهي:

$$-c < ax + b < c$$

تبقى القاعدة صحيحة إذا احتوت المتباينة على $(\leq)$

مثال 3

أحلُّ كُلًّا مِنَ الْمُتَبَايِنَاتِ الْآتِيَةِ، وَأُمَثِّلُ مَجْمُوعَةَ الْحَلِّ عَلَى خَطِّ الْأَعْدَادِ (إِنْ أُمَكَّنَ):

1 $|x + 5| < 9$

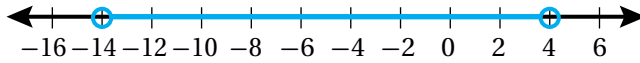
$$-9 < x + 5 < 9$$

الْمُتَبَايِنَةُ الْمُركَّبَةُ الْمُرتَبِطَةُ

$$-14 < x < 4$$

بِطَرَحِ 5 مِنْ كِلَا الطَّرَفَيْنِ

إِذْنًا، مَجْمُوعَةُ حَلِّ الْمُتَبَايِنَةِ هِيَ $\{x \mid -14 < x < 4\}$ ، وَيُمْكِنُ كِتَابَتُهَا بِاسْتِعْمَالِ رَمِيزِ الْفَتْرَةِ عَلَى الصُّورَةِ: $(-14, 4)$ ، وَيُمْكِنُ تَمَثُّلُهَا عَلَى خَطِّ الْأَعْدَادِ عَلَى النَّحْوِ الْآتِي:



أَتَعَلَّمُ

الْمُتَبَايِنَةُ $|x + 5| < 9$ تُعْنِي أَنَّ الْمَسَافَةَ بَيْنَ x وَ -5 أَقَلُّ مِنْ 9 وَحَدَاتٍ.

2 $-4|x + 3| - 2 \geq 6$

لِحَلِّ هَذِهِ الْمُتَبَايِنَةِ، أَكْتُبُ أَوَّلًا مَقْدَارَ الْقِيَمَةِ الْمُطْلَقَةِ مَعزُولًا فِي أَحَدِ طَرَفَيْ الْمُتَبَايِنَةِ.

$$-4|x + 3| - 2 \geq 6$$

الْمُتَبَايِنَةُ الْمُعْطَاةُ

$$-4|x + 3| \geq 8$$

بِجَمْعِ 2 لِطَرَفَيْ الْمُتَبَايِنَةِ

$$|x + 3| \leq -2$$

بِقِسْمَةِ طَرَفَيْ الْمُتَبَايِنَةِ عَلَى -4 ، وَتَغْيِيرِ اتِّجَاهِ رَمِيزِ الْمُتَبَايِنَةِ

بِمَا أَنَّ $|x + 3|$ لَا يُمْكِنُ أَنْ تَكُونَ سَالِبَةً، فَلَا يُمْكِنُ أَنْ تَكُونَ $|x + 3|$ أَقَلَّ مِنْ -2 ، وَمِنْهُ فَإِنَّ مَجْمُوعَةَ حَلِّ هَذِهِ الْمُتَبَايِنَةِ $\emptyset$ ؛ أَيُّ أَنَّهُ لَا يَوْجَدُ حَلٌّ لِلْمُتَبَايِنَةِ الْمُعْطَاةِ.

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي

أحلُّ كُلًّا مِنَ الْمُتَبَايِنَاتِ الْآتِيَةِ، وَأُمَثِّلُ مَجْمُوعَةَ الْحَلِّ عَلَى خَطِّ الْأَعْدَادِ (إِنْ أُمَكَّنَ):

a) $|x - 2| \leq 1$

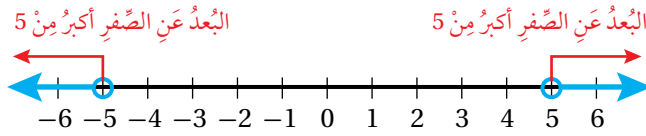
b) $|x + 7| + 10 < 2$

أَتَذَكَّرُ

يُسْتَعْمَلُ الرَّمْزُ $]$ أَوِ الرَّمْزُ $[$ لِلدَّلَالَةِ عَلَى انْتِمَاءِ طَرَفِ الْفَتْرَةِ إِلَيْهَا، أَمَّا الرَّمْزُ $($ أَوِ الرَّمْزُ $)$ فَيُسْتَعْمَلُ لِلدَّلَالَةِ عَلَى عَدَمِ انْتِمَاءِ طَرَفِ الْفَتْرَةِ إِلَيْهَا.

الوحدة 1

تعني مُتباينة القيمة المطلقة $|x| > 5$ أن المسافة بين x و 0 أكبر من 5؛ لذا فإن $x > 5$ أو $x < -5$



وبذلك، فإن مجموعة حل هذه المُتباينة هي $(-\infty, -5) \cup (5, \infty)$

وبشكل عام، يمكن تحويل مُتباينة القيمة المطلقة، التي تحتوي على الرمز $(>)$ ، إلى مُتباينة مُركبة تحتوي على أداة الربط (أو)، ثم حل المُتباينة المُركبة الناتجة.

حل مُتباينات القيمة المطلقة $(>)$

مفهوم أساسي

لحل المُتباينة $|ax + b| > c$ ؛ حيث $c > 0$ ، أحل المُتباينة المُركبة المُرتبطة بها، وهي:

$$ax + b < -c \quad \text{or} \quad ax + b > c$$

تبقى القاعدة صحيحة إذا احتوت المُتباينة على $(\geq)$

مثال 4

أحل كلاً من المُتباينات الآتية، وأمثل مجموعة الحل على خط الأعداد (إن أمكن):

1 $|2x + 1| \geq 5$

$$2x + 1 \leq -5 \quad \text{or} \quad 2x + 1 \geq 5$$

المُتباينة المُركبة المُرتبطة

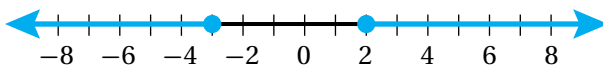
$$2x \leq -6 \quad 2x \geq 4$$

ب طرح 1 من كُل طرف

$$x \leq -3 \quad \text{or} \quad x \geq 2$$

بقسمة كُل طرف على 2

إذن، مجموعة الحل هي $\{x \mid x \leq -3 \text{ or } x \geq 2\}$ ، ويمكن كتابتها باستعمال اتحاد فترتين منفصلتين على الصورة: $(-\infty, -3] \cup [2, \infty)$ ، وتمثيلها البياني على النحو الآتي:



2 $|4x + 8| \geq -3$

يُنصُّ تعريفُ القيمةِ المطلقةِ على أنَّ مقدارها يجبُ أن يكونَ أكبرَ منْ أو يساوي صفرًا،
وَمِنْهُ فَإِنَّ $|4x + 8|$ دائماً أكبرُ منْ -3 لأيِّ منْ قِيَمِ المُتَغَيِّرِ x

إذن، مجموعةُ الحلِّ هي مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيَّةِ R ، ويمكنُ كتابتها باستعمالِ رمزِ الفترةِ
على الصورة: $(-\infty, \infty)$.

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ الْمُتَبَايِنَاتِ الْآتِيَةِ، وَأُمَثِّلُ مَجْمُوعَةَ الْحَلِّ عَلَى خَطِّ الْأَعْدَادِ (إِنْ أَمَكَنَ):

a) $|x - 3| \geq 4$

b) $|10 - x| > -5$

يمكنُ استعمالُ المُتَبَايِنَاتِ لِحَلِّ كَثِيرٍ مِنَ التَّطبيقاتِ الْحَيَاتِيَّةِ.

مثال 5: مِنَ الْحَيَاةِ



صناعة: إذا عَلِمْتُ أَنَّ مَصْنَعًا يُنتِجُ رُؤُوسَ مِثاقِبَ طَوَّلِ قُطْرٍ
أَحَدِهَا المِثَالِيُّ 0.625 cm ، وَيُسَمَحُ أَنْ يَزِيدَ طَوَّلُ هَذَا
القُطْرِ أَوْ يَقِلَّ بِمِقْدَارٍ لَا يَتَجَاوَزُ 0.005 cm ، فَأَكْتُبُ
مُتَبَايِنَةَ قِيَمَةٍ مُطلقةٍ أَجِدُ بِهَا المَدَى المسموحَ بِهِ لَطَوْلِ
قُطْرِ رَأْسِ المِثْقَبِ.

بالكلمات: الفرقُ بينَ طَوْلِ القُطْرِ الْحَقِيقِيِّ وَطَوْلِ القُطْرِ المِثَالِيِّ لَا يَتَجَاوَزُ 0.005

أَخْتَارُ مُتَغَيِّرًا: لِيَكُنْ x مُمَثِّلًا طَوْلَ قُطْرِ رَأْسِ المِثْقَبِ.

أَكْتُبُ المُتَبَايِنَةَ: $|x - 0.625| \leq 0.005$

$|x - 0.625| \leq 0.005$ **المُتَبَايِنَةُ**

$-0.005 \leq x - 0.625 \leq 0.005$ **المُتَبَايِنَةُ المُرَكَّبَةُ المُرتَبِطَةُ**

$0.62 \leq x \leq 0.63$ **بجمع 0.625 لِكِلَا الطَّرْفَيْنِ**

إذن، المَدَى المسموحُ بِهِ لَطَوْلِ قُطْرِ رَأْسِ المِثْقَبِ هُوَ $[0.62, 0.63]$ بِوَحْدَةِ cm

رُمُوزُ رِياضِيَّةٌ

يُرمَزُ لمجموعةِ الأعدادِ
الحقيقيَّةِ بِالْحَرْفِ R ، وَهُوَ
الْحَرْفُ الْأَوَّلُ مِنْ كَلِمَةِ
 $Real$ بِاللُّغَةِ الْإِنْجِلِيزِيَّةِ،
وَتَعْنِي حَقِيقِيًّا.

معلومة

توجدُ في بعضِ المِثاقِبِ
خاصيَّةُ الاهتزازِ في أثناءِ
الدَّورانِ؛ ما يساعدُ على ثَقْبِ
الجدرانِ الخرسانيَّةِ بِسَهولَةٍ.

أتحقق من فهمي

صناعة: إذا عُلِمْتُ أَنَّ طَوْلَ الْقُطْرِ الْمِثَالِيِّ لِأَحَدِ الْمَكَابِسِ الْأُسْطُوَانِيَّةِ فِي مُحَرَّكَاتِ السَّيَّارَاتِ 90 mm، وَيُسَمَحُ أَنْ يَزِيدَ طَوْلُ هَذَا الْقُطْرِ أَوْ يَقِلَّ بِمِقْدَارٍ لَا يَتَجَاوَزُ 0.008 mm، فَأَكْتُبْ مُتَبَايِنَةً قِيَمَةً مُطْلَقَةً أَجْدُ بِهَا الْمَدَى الْمَسْمُوحَ بِهِ لَطَوْلِ قُطْرِ الْمَكَابِسِ.



أَتَدَرَّبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ



أَجِدُ قِيَمَةً كُلِّ مِنَ الْمَقَادِيرِ الْآتِيَةِ عِنْدَ الْقِيَمَةِ الْمُعْطَاةِ:

1 $|5x + 2| + 1, x = -3$

2 $|14 - x| - 18, x = 1$

3 $-3|3x + 8| + 5, x = -4$

أَحْلُ كُلًّا مِنَ الْمُعَادَلَاتِ الْآتِيَةِ، وَأُمَثِّلُ مَجْمُوعَةَ الْحَلِّ عَلَى خَطِّ الْأَعْدَادِ (إِنْ أُمَكَّنَ):

4 $|x + 3| = 7$

5 $|x - 8| = 14$

6 $|-3x| = 15$

7 $|3x + 2| + 2 = 5$

8 $|2x - 4| - 8 = 10$

9 $-4|8 - 5x| = 16$

أَحْلُ كُلًّا مِنَ الْمُتَبَايِنَاتِ الْآتِيَةِ، وَأُمَثِّلُ مَجْمُوعَةَ الْحَلِّ عَلَى خَطِّ الْأَعْدَادِ (إِنْ أُمَكَّنَ):

10 $|x + 8| \leq 3$

11 $|2x - 5| < 9$

12 $|3x + 1| > 8$

13 $|3x - 1| + 6 > 0$

14 $2|3x + 8| - 13 \leq -5$

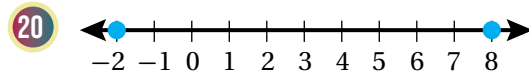
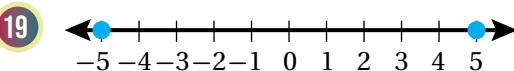
15 $-3|2 - 4x| + 5 < -13$

16 $|6x + 2| < -4$

17 $3|5x - 7| - 6 < 24$

18 $|5x + 3| - 4 \geq 9$

أَكْتُبُ مُعَادَلَةَ قِيَمَةٍ مُطْلَقَةٍ تُعَبِّرُ عَنْ كُلِّ تَمَثِيلٍ عَلَى خَطِّ الْأَعْدَادِ مِمَّا يَأْتِي:



أكتب مُتباينةً تمثل كل جملةٍ مما يأتي، ثم أُمثلها على خطِّ الأعداد:

21 المسافة بين عددٍ والصَّفرِ أكبر من 7

22 المسافة بين عددٍ و3 أقل من أو تساوي 4



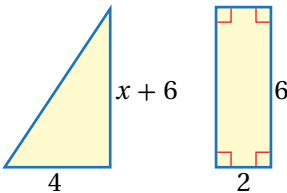
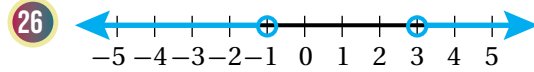
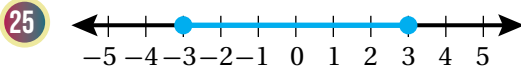
23 **صناعة:** إذا عَلِمْتُ أَنَّ مصنعًا يُنتِجُ علبَ بسكويتٍ كتلتها المثاليَّةُ 454 g، وكانَ مراقِبُ الجُودةِ يَستَشي العلبَ الَّتِي تَزيدُ على الكتلةِ المثاليَّةِ أو تنقُصُ عنها بِمقدار 5 g، فأكتبُ مُتباينةً قيمةً مُطلقةً أَجِدُ بها المدى المسموحَ به لِكُتَلِ علبِ البسكويتِ.



24 **كرة قَدَم:** إذا كانتِ الكتلةُ المثاليَّةُ المُوصى بها لكرة القدم 430 g، وكانَ مسموحًا أن تَزيدَ على الكتلةِ المثاليَّةِ أو تنقُصَ عنها بِمقدار 20 g، فأكتبُ مُعادلةً قيمةً مُطلقةً لِإيجادِ أكبرِ وأقلِّ كتلةٍ مسموحٍ بها لكرة القدم، ثم أحلُّها.

مهارات التفكير العليا

تبرير: أكتب مُتباينةً قيمةً مُطلقةً تُعبِّرُ عَن كُلِّ تمثيلٍ على خطِّ الأعدادِ مما يأتي، مُبرِّرًا إجابتي:



27 **تبرير:** يبيِّن الشكل المجاور مُثلثًا ومُسَطيلاً الفرقُ بين مساحتيهما أقل من 2 وحدةٍ مُربَّعة. أكتبُ مُتباينةً قيمةً مُطلقةً تمثل الجملة السابقة وأحلُّها، مُبرِّرًا إجابتي.

28 **تحد:** أحلُّ المُتباينة المُركَّبة الآتية: $|x - 3| < 4$ and $|x + 2| > 8$

تمثيل المتباينات الخطية بمتغيرين بيانياً Graphing Linear Inequalities in Two Variables

تمثيل متباينة خطية بمتغيرين بيانياً.

فكرة الدرس



المتباينة الخطية بمتغيرين، منطقة الحلول الممكنة، المُستقيمُ الحُدوديُّ.

المصطلحات



مسألة اليوم



تعمل شركة على تجميع نوعين مختلفين من أجهزة المايكروويف. إذا كان تجميع الجهاز الواحد من النوع الأول يحتاج إلى ساعتين، وتجميع الجهاز الواحد من النوع الثاني يحتاج إلى 1.5 ساعة، وكان الحد الأقصى لعدد ساعات العمل أسبوعياً 80 ساعة، فأكتب متباينة خطية بمتغيرين تمثل عدد أجهزة المايكروويف التي يمكن للشركة تجميعها أسبوعياً من كل نوع.

المتباينات الخطية بمتغيرين

المتباينة الخطية بمتغيرين (linear inequality in two variables) هي متباينة يمكن كتابتها على إحدى الصور الآتية:

$$ax + by < c \quad ax + by \leq c \quad ax + by > c \quad ax + by \geq c$$

حيث a, b, c أعداد حقيقية، و a و b لا تساويان صفراً معاً، وحل المتباينة الخطية بمتغيرين هو مجموعة جميع الأزواج المرتبة (x, y) ، التي تجعل المتباينة صحيحة عند تعويض إحداثياتها في المتباينة.

أتعلم

لكل متباينة خطية معادلة خطية مرتبطة بها. فمثلاً، $x + 2y > 1$ هي متباينة خطية، و $x + 2y = 1$ هي المعادلة الخطية المرتبطة بها.

مثال 1

أحدد إذا كان كل زوج مرتب مما يأتي يمثل حلاً للمتباينة $3x + y < 7$:

1 $(-3, 1)$

أعوض الزوج المرتب $(-3, 1)$ في المتباينة:

$$3x + y < 7$$

المتباينة المعطاة

$$3(-3) + 1 < 7$$

بتعويض $x = -3, y = 1$

$$-8 < 7 \quad \checkmark$$

النتيجة صحيحة

ألاحظ عند تعويض الزوج المرتب في المتباينة أن الناتج يكون صحيحاً. إذن، الزوج المرتب $(-3, 1)$ هو أحد الحلول الممكنة للمتباينة.

2 (2, 4)

أعوّض الزوج المرتب (2, 4) في المتباينة:

$$3x + y < 7$$

المتباينة المعطاة

$$3(2) + 4 \stackrel{?}{<} 7$$

بتعويض $x = 2, y = 4$

$$10 \not< 7 \quad \times$$

النتيجة غير صحيحة

ألاحظ عند تعويض الزوج المرتب في المتباينة أن الناتج لا يكون صحيحًا.

إذن، الزوج المرتب (2, 4) ليس أحد الحلول الممكنة للمتباينة.

3 (0, 2)

أعوّض الزوج المرتب (0, 2) في المتباينة:

$$3x + y < 7$$

المتباينة المعطاة

$$3(0) + 2 \stackrel{?}{<} 7$$

بتعويض $x = 0, y = 2$

$$2 < 7 \quad \checkmark$$

النتيجة صحيحة

ألاحظ عند تعويض الزوج المرتب في المتباينة أن الناتج يكون صحيحًا.

إذن، الزوج المرتب (0, 2) هو أحد الحلول الممكنة للمتباينة.

أتحقق من فهمي 

أحدّد إذا كان كل زوج مرتب مما يأتي يمثل حلًا للمتباينة $-2x + 3y \geq 3$:

a) (4, 1)

b) (-1, 2)

c) (0, 1)

أتعلّم

يُستعمل الرمز $\nless$ للدلالة على عدم تحقق المتباينة.

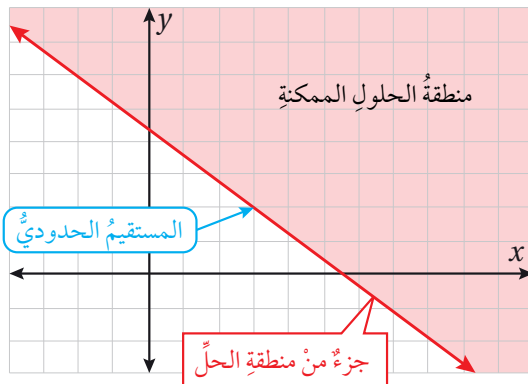
تمثيل المتباينات الخطية بمتغيرين بيانياً

ألاحظ من المثال السابق أن مجموعة حل المتباينة الخطية بمتغيرين تتكون من العديد من الأزواج المرتبة التي تحقق المتباينة، وعند تمثيل المتباينة الخطية بمتغيرين بيانياً في المستوى الإحداثي فإن النقاط التي تمثل جميع حلولها الممكنة تسمى **منطقة الحلول الممكنة** (feasible region)، ويسمى المستقيم الذي يقسم المستوى الإحداثي إلى جزأين، أحدهما منطقة الحلول الممكنة، **المستقيم الحدودي** (boundary line).

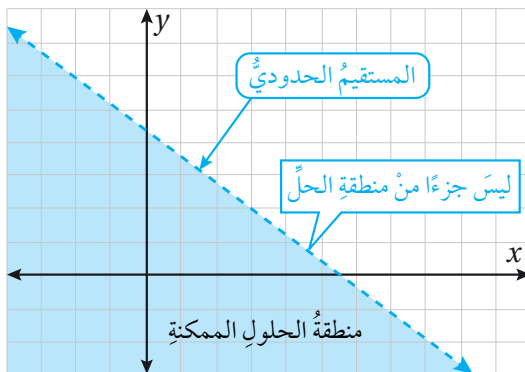
أتعلم

يقسم المستقيم الحدودي للمتباينة المستوى الإحداثي قسمين؛ أحدهما منطقة الحلول الممكنة.

وقد يكون المستقيم الحدودي جزءاً من منطقة الحلول الممكنة إذا تضمنت المتباينة الرمز $\leq$ أو الرمز $\geq$ ، وعندئذ يرسم المستقيم الحدودي متصلاً.



وقد لا يكون المستقيم الحدودي جزءاً من منطقة الحلول الممكنة إذا تضمنت المتباينة الرمز $<$ أو الرمز $>$ ، عندئذ يرسم المستقيم الحدودي متقطعاً.



تمثيل المتباينات الخطية بمتغيرين بيانياً

مفهوم أساسي

لتمثيل المتباينات الخطية بمتغيرين بيانياً، اتبع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: أرسم منحنى المعادلة المرافقة للمتباينة بأن أستخدم رمز المساواة (=) بدلاً من الرمز ($>$ ، $<$ ، $\geq$ ، $\leq$)؛ حيث تمثل المعادلة الناتجة المستقيم الحدودي.

الخطوة 2: أختار نقطة لا تقع على المستقيم الحدودي، ثم أعوضها في المتباينة الخطية لتحديد ما إذا كانت تمثل حلاً للمتباينة أم لا.

الخطوة 3: إذا كانت النقطة تحقق المتباينة؛ أي تنجم عنها نتيجة صحيحة، فأظلل الجزء من المستوى الإحداثي الذي تقع فيه تلك النقطة، وإذا لم تكن كذلك أظلل الجزء الآخر الذي لا تقع فيه تلك النقطة.

أتذكر

بما أنه يمكن تمثيل المستقيم بنقطتين، فإن أسهل طريقة لتمثيل المعادلة الخطية هي إيجاد نقطتي تقاطع المستقيم مع المحورين الإحداثيين، إن أمكن.

مثال 2

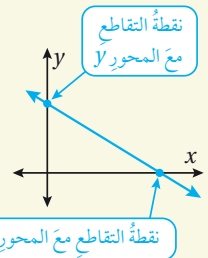
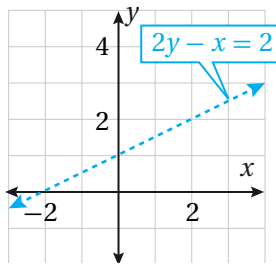
أمثل المتباينة الخطية $2y - x < 2$ في المستوى الإحداثي.

الخطوة 1: أمثل المستقيم الحدودي.

أمثل المستقيم الحدودي $2y - x = 2$ ، وأنشئ جدول قيم يبين نقاط تقاطع المستقيم مع المحورين.

x	0	-2
y	1	0

أعين النقطتين (0, 1) و (-2, 0) في المستوى الإحداثي، ثم أرسم مستقيماً يمر بهما. وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة، فيرسم المستقيم الحدودي متقطعاً، كما في الشكل الآتي.



الخطوة 2: أحدد منطقة الحلول الممكنة.

أختار نقطة لا تقع على المستقيم الحدودي، مثل $(0, 0)$ ، ثم أتأكد إذا كان الناتج صحيحاً أم لا عند تعويضها في المتباينة:

$$2y - x < 2$$

المتباينة الخطية

$$2(0) - 0 < 2$$

بتعويض $x = 0, y = 0$

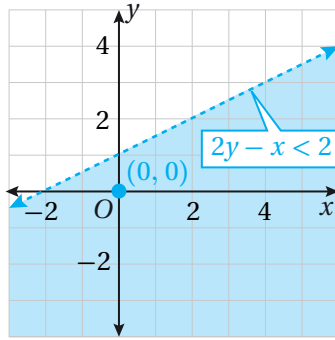
$$0 < 2$$

✓

الناتج صحيح

الخطوة 3: أظل منطقة الحلول الممكنة.

بما أن النقطة $(0, 0)$ هي إحدى الحلول الممكنة للمتباينة، فأظل الجزء من المستوى الذي تقع فيه هذه النقطة، كما في الشكل الآتي.



أتحقق من فهمي

أمثل المتباينة الخطية $-x + 2y > 2$ في المستوى الإحداثي.

مثال 3

أمثل المتباينة الخطية $y \geq 2x$ في المستوى الإحداثي.

الخطوة 1: أمثل المستقيم الحدودي.

أمثل المستقيم الحدودي $y = 2x$ ، وأنشئ جدول قيم وذلك باختيار قيم للمتغير x وتعويضها في المعادلة لإيجاد قيم المتغير y المقابلة لها.

x	0	1
y	0	2

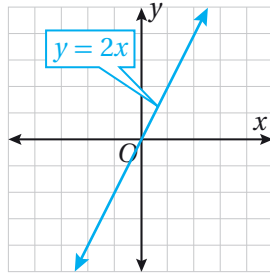
أتعلم

لسهولة إجراء الحسابات، يُفضل اختيار النقطة $(0, 0)$ لفحص المتباينة. ولكن، إذا وقعت على المستقيم الحدودي فيجب اختيار نقطة غيرها.

أتذكر

هل يمكن تمثيل المستقيم $y = 2x$ باستعمال نقطتي تقاطع المستقيم مع المحورين الإحداثيين؟ أبرر إجابتي.

أَعَيَّنُ النقطَتَيْنِ $(0, 0)$ وَ $(1, 2)$ فِي الْمُسْتَوَى الْإِحْدَاثِيِّ، ثُمَّ أَرَسَمُ مُسْتَقِيمًا يَمُرُّ بِهِمَا. وَبِمَا أَنَّهُ تَوْجَدُ مُسَاوَاةٌ فِي رَمَزِ الْمُتَبَايِنَةِ فَيَرَسَمُ الْمُسْتَقِيمَ الْحُدُودِيَّ مُتَّصِلًا، كَمَا فِي الشَّكْلِ الْآتِي.



الخطوة 2: أُحَدِّدُ مَنْطِقَةَ الْحُلُولِ الْمُمْكِنَةِ.

أَخْتَارُ نَقْطَةً لَا تَقَعُ عَلَى الْمُسْتَقِيمِ الْحُدُودِيِّ، مِثْلَ $(2, 1)$ ، ثُمَّ أَتَحَقَّقُ إِذَا كَانَ النَّاتِجُ صَحِيحًا أَمْ لَا عِنْدَ تَعْوِيضِهَا فِي الْمُتَبَايِنَةِ:

$$y \geq 2x$$

الْمُتَبَايِنَةُ الْخَطِيئَةُ

$$1 \stackrel{?}{\geq} 2(2)$$

بِتَعْوِيضِ $x = 2, y = 1$

$$1 \not\geq 4 \quad \times$$

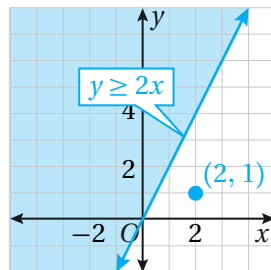
النَّاتِجُ غَيْرُ صَحِيحٍ

أَفَكِّرْ

هَلْ يُمْكِنُ اسْتِعْمَالُ
النَّقْطَةِ $(0, 0)$ لِفَحْصِ
الْمُتَبَايِنَةِ؟ أَجِبْ إيجابتي.

الخطوة 3: أَظَلِّلُ مَنْطِقَةَ الْحُلُولِ الْمُمْكِنَةِ.

بِمَا أَنَّ النَّقْطَةَ $(2, 1)$ لَيْسَتْ إِحْدَى الْحُلُولِ الْمُمْكِنَةِ لِلْمُتَبَايِنَةِ، فَأُظَلِّلُ الْجُزْءَ مِنَ الْمُسْتَوَى الَّذِي لَا تَقَعُ فِيهِ هَذِهِ النَّقْطَةُ، كَمَا فِي الشَّكْلِ الْآتِي.



أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي

أُمَثِّلُ الْمُتَبَايِنَةَ الْخَطِيئَةَ $y - 3x \leq 0$ فِي الْمُسْتَوَى الْإِحْدَاثِيِّ.

تمثيل المتباينات الخطية بمتغير واحد بيانياً

تعلمت سابقاً تمثيل المتباينة الخطية بمتغير واحد على خط الأعداد، ويمكن أيضاً تمثيلها في المستوى الإحداثي.

مثال 4

أمثل كلاً من المتباينات الآتية في المستوى الإحداثي:

1 $x > -1$

الخطوة 1: أمثل المستقيم الحدودي.

أمثل المستقيم الحدودي $x = -1$ في المستوى الإحداثي. وبما أنه لا توجد مساواة في رمز المتباينة فيرسم مُتَقَطَّعاً.

الخطوة 2: أحدد منطقة الحلول الممكنة.

أختار نقطة لا تقع على المستقيم الحدودي، مثل $(0, 0)$ ، ثم أتأكد إذا كان الناتج صحيحاً أم لا عند تعويضها في المتباينة:

$$x > -1$$

المتباينة الخطية

$$0 > -1$$

بتعويض $x = 0$

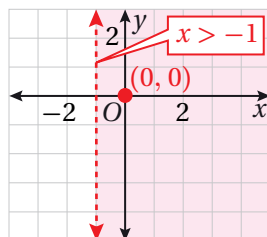
$$0 > -1$$

✓

الناتج صحيح

الخطوة 3: أظلل منطقة الحلول الممكنة.

بما أن النقطة $(0, 0)$ هي إحدى الحلول الممكنة للمتباينة، فأظلل الجزء من المستوى الذي تقع فيه هذه النقطة، كما في الشكل الآتي.



أتذكر

معادلة المستقيم الرأسي تكون دائماً على الصورة

$$x = a$$

2 $y \leq 3$

الخطوة 1: أمثل المُستقيمَ الحُدُوديَّ.

أمثل المُستقيمَ الحُدُوديَّ $y = 3$ في المُستوى الإحداثيَّ. وبما أنه توجد مُساواة في رمز المُتباينة فيرسم مُتصلاً.

الخطوة 2: أحدد منطقة الحُلُول المُمكنة.

أختار نقطة لا تقع على المُستقيم الحُدُوديَّ، مثل $(0, 0)$ ، ثم أتحقق إذا كان الناتج صحيحاً أم لا عند تعويضها في المُتباينة:

$$y \leq 3$$

المُتباينة الخطيَّة

$$0 \leq 3$$

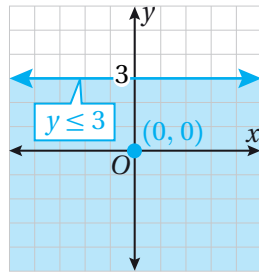
بتعويض $y = 0$

$$0 \leq 3 \quad \checkmark$$

الناتج صحيح

الخطوة 3: أظلل منطقة الحُلُول المُمكنة.

بما أن النقطة $(0, 0)$ هي إحدى الحُلُول الممكنة للمُتباينة، فأظلل الجزء من المُستوى الذي تقع فيه هذه النقطة، كما في الشكل الآتي.



أتحقق من فهمي

أمثل كلاً من المُتباينات الآتية في المُستوى الإحداثيَّ:

a) $x \leq 4$

b) $y > -5$

c) $y \geq 0$

أتذكّر

معادلة المُستقيم الأفقي تكون دائماً على الصورة $y = a$

أتعلّم

عند تمثيل المُتباينة الخطيَّة بِمُتغيّر واحد في المُستوى الإحداثيَّ، يكون المُستقيم الحُدُوديّ إما أفقيّاً أو عموديّاً.

للمُتباينات استعمالات كثيرة في المواقف العلمية والحياتية؛ إذ تُساعدنا على اتخاذ القرار الأنسب المُتعلق بتحديد القيم المُمكنة ضمن شروطٍ مُحددة.

مثال 5: مِنَ الحياة



معلومة

إنَّ المشابرة على حلِّ الواجبات المنزلية تُعزِّزُ تعلُّمي وُترسُّخهُ في ذهني، وتُساعدني على قياس مدى إتقاني المهارات الرياضية، وتغرس في نفسي الاعتماد على الذات وتحمل المسؤولية.



دراسة: إذا عَلِمْتُ أَنَّ لَدَى عَمَّارٍ 60 دقيقةً على الأكثر لإنهاء الواجب المنزليِّ لمادتي الرياضيات والعلوم، فأكتب مُتباينةً خطيةً بِمُتَغَيَّرَيْنِ تُمَثِّلُ عددَ الدقائق التي يمكنُ أَنْ يَقْضِيَهَا عَمَّارٌ فِي حُلِّ كُلِّ وَاجِبٍ، ثُمَّ أُمَثِّلُهَا فِي الْمُسْتَوَى الإحداثيِّ.

الخطوة 1: أكتب المُتباينة.

بالكلمات: عددُ الدقائق اللازمة لإنهاء الواجب المنزليِّ على الأكثر 60 دقيقةً.

أختار مُتَغَيَّرًا: لِيَكُنْ x مُمَثِّلًا لعددِ الدقائق اللازمة لإنهاء واجبِ الرياضيات، وَ y عددَ الدقائق اللازمة لإنهاء واجبِ العلوم.

أكتب المُتباينة: $x + y \leq 60$

الخطوة 2: أُمَثِّلُ المُتباينة بيانيًا

أُمَثِّلُ المُستقيمَ الحُدُوديَّ $x + y = 60$ فِي الْمُسْتَوَى الإحداثيِّ. وَبِمَا أَنَّهُ تَوْجَدُ مُساواةٌ فِي رَمَزِ الْمُتباينة فَيُرْسَمُ المُستقيمُ الحُدُوديُّ مُتَّصِلًا.

أختارُ نقطةً لَا تَقَعُ عَلَى المُستقيمِ الحُدُوديِّ، مِثْلَ $(0, 0)$ ، ثُمَّ أَتَحَقَّقُ إِذَا كَانَ النَّاتِجُ صَحِيحًا أَمْ لَا عِنْدَ تَعْوِضِهَا فِي الْمُتباينة:

$$x + y \leq 60$$

المُتباينة الخطية

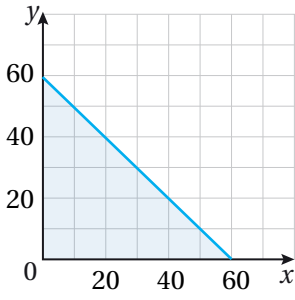
$$0 + 0 \leq 60$$

بتعويض $x = 0, y = 0$

$$0 \leq 60$$

✓

الناتج صحيح



بما أن النقطة $(0, 0)$ هي إحدى الحلول الممكنة للمتباينة، وبما أن قيم x و y يجب أن تكون موجبة؛ لأنها تمثل الزمن، فأُظِلَّ الجزء من المستوى الذي يقع في الربع الأول، كما في الشكل المجاور.

ألاحظ أيضًا أن أي نقطة يقع إحداثيها على المستقيم الحدودي، أو ضمن المنطقة المظللة، فإنها تُعدُّ حلًا. فمثلاً، النقطة $(20, 40)$ تُمثِّل حلًا للمتباينة، و $(30, 30)$ تُمثِّل أيضًا حلًا لها.

أتحقق من فهمي

نجارة: إذا علمت أن نجارًا يريد شراء نوعين من الخشب، لا يزيد ثمنهما الكلي على JD 72، ووجد أن ثمن المتر الطولي من النوع الأول JD 4، ومن النوع الثاني JD 6، فأكتب متباينة خطية بمتغيرين تمثل كمية الخشب التي يمكن للنجار شراؤها من كل نوع، ثم أمثلها في المستوى الإحداثي.



تستعمل الحسابات الرياضية كثيرًا في مهنة النجارة لاستغلال الألواح الخشبية بطريقة مثلى وتجنب الهدر.

أدرب وأحل المسائل

أحدد إذا كان كل زوج مُرتَّبٍ مما يأتي يمثل حلًا للمتباينة: $x + 3y < 6$

1 $(0, 1)$

2 $(-2, 4)$

3 $(8, -1)$

أحدد إذا كان كل زوج مُرتَّبٍ مما يأتي يمثل حلًا للمتباينة: $-3x + 4y \geq 12$

4 $(-5, 3)$

5 $(0, 2)$

6 $(3, 7)$

أُمَثِّلْ كَلًّا مِنَ الْمُتَبَايِنَاتِ الْآتِيَةِ فِي الْمُسْتَوَى الْإِحْدَاثِيِّ:

7 $y \leq 3 - 2x$

8 $x + y < 11$

9 $x - 2y < 0$

10 $4y - 8 \geq 0$

11 $3x - y \leq 6$

12 $2x + 5y < -10$

13 $-4x + 6y > 24$

14 $y < 3x + 3$

15 $-2x \geq 10$

16 $x < 6$

17 $y > -2$

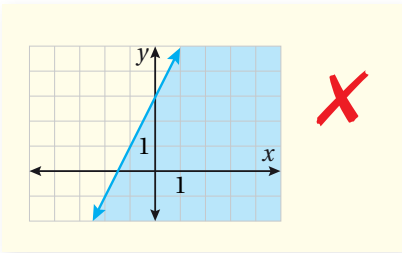
18 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} < 1$



19 **حقائب:** يصنع جمال حقائب نسائية كبيرة وصغيرة لبيعها في معرض الحرف اليدوية. إذا كان يحتاج إلى 3 أيام لصنع الحقيبة الصغيرة، و 5 أيام لصنع الحقيبة الكبيرة، فأكتب متباينة خطية بمتغيرين تمثل عدد الحقائب التي يمكن له صنعها من كل نوع في 30 يومًا حدًا أقصى قبل يوم افتتاح المعرض، ثم أمثلها في المستوى الإحداثي.

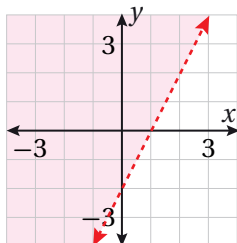
20 **تسوق:** تريد سامية شراء العنب والتفاح، بحيث لا يزيد المبلغ الذي تدفعه ثمنًا لِكِلَا النوعين على JD 6. إذا كان ثمن الكيلوغرام الواحد من العنب JD 1.5، و ثمن الكيلوغرام الواحد من التفاح JD 1، فأكتب متباينة خطية بمتغيرين تمثل عدد الكيلوغرامات التي يمكن لسامية أن تشتريها من كل نوع، ثم أمثلها في المستوى الإحداثي.

مهارات التفكير العليا



21 **أكتشف الخطأ:** مثل رامي المتباينة $y < 2x + 3$ ، كما هو مبين في الشكل المجاور. أكتشف الخطأ الذي وقع فيه رامي، وأصححه.

22 **مسألة مفتوحة:** أكتب متباينة خطية بمتغيرين، بحيث تمثل النقطتين $(-1, 3)$ و $(1, 6)$ حلاً لها، في حين لا تمثل النقطة $(4, 0)$ حلاً.



23 **تبرير:** أكتب المتباينة الخطية المعطى تمثيلها البياني في الشكل المجاور، مُبرِّراً إجابتي.

اختبار نهاية الوحدة

أكتب كل مجموعة مما يأتي بطريقة الصفة المميزة:

- 6 $\{11, 12, 13, 14, \dots\}$
 7 $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
 8 $\{3, 6, 9, 12\}$
 9 $\{3, 2, 1\}$

أعبر عن كل من المجموعات الآتية، مستعملًا طريقة سرد العناصر وطريقة الصفة المميزة:

10 الأعداد الزوجية التي تزيد على 7 وتقل عن 20

11 الأعداد الكلية التي تقل عن 4

أكتب متباينة تمثل كل جملة مما يأتي، ثم أمثلها على خط الأعداد:

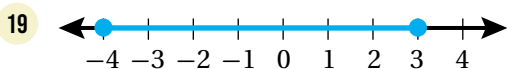
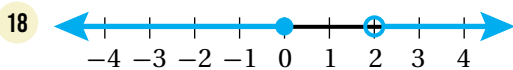
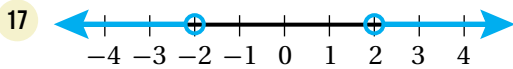
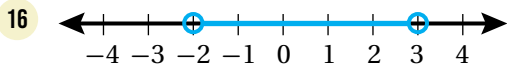
12 عدد على الأكثر -3 أو على الأقل 5

13 عدد على الأقل 2 وعلى الأكثر 9

14 عدد يقع بين -4 و 6

15 عدد أقل من 100 أو أكبر من 300

أكتب متباينة مركبة تعبر عن كل تمثيل مما يأتي، ثم أعبر عنها برمز الفترة:

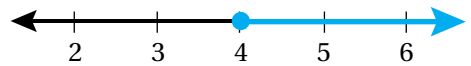


أختار رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 حل المتباينة $-9x + 17 \geq -64$ ، هو:

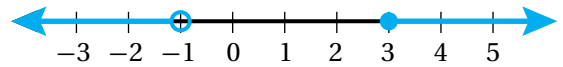
- a) $\{x \mid x \leq 9\}$ b) $\{x \mid x \geq 9\}$
 c) $\{x \mid x \leq -9\}$ d) $\{x \mid x \geq -9\}$

2 الفترة التي تعبر عن التمثيل البياني الآتي، هي:



- a) $(4, \infty)$ b) $[4, \infty)$
 c) $(-\infty, 4)$ d) $(-\infty, 4]$

3 المتباينة المركبة التي تعبر عن التمثيل البياني الآتي، هي:



- a) $-1 < x < 3$ b) $x \leq -1$ or $x > 3$
 c) $x < -1$ or $x \geq 3$ d) $x > -1$ or $x \leq 3$

4 مجموعة حل المتباينة $-7 < x + 2 < 4$ ، هي:

- a) $(-5, 6)$ b) $(-9, 6)$
 c) $(-5, 2)$ d) $(-9, 2)$

5 مجموعة حل المعادلة $|x + 5| = 2$ ، هي:

- a) $\{-3, 3\}$ b) $\{-3, -7\}$
 c) $\{-2, 2\}$ d) $\{3, 7\}$

اختبار نهاية الوحدة

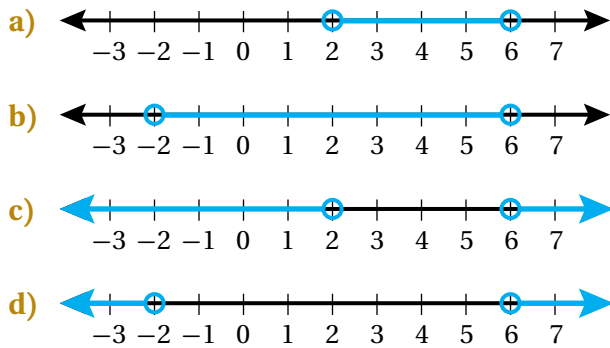
41 **نقل:** يمكن لشاحنة نقل 3500 kg من البضائع حداً أقصى. إذا كانت الشاحنة تنقل ثلاث كتلة الواحدة منها 125 kg، وغسالات كتلة الواحدة منها 100 kg، فأكتب متباينة خطية بمتغيرين تمثل عدد الثلاثيات والغسالات التي يمكنها نقلها، ثم أمثلها في المستوى الإحداثي.



42 **كرة سلة:** إذا كان المحيط المثالي لكرة السلة النسائية 28.75 in، وكان مسموحاً أن يزيد على ذلك أو ينقص عنه بمقدار 0.25 in حداً أقصى، فأكتب متباينة قيمة مطلقة لإيجاد مدى محيط الكرة المسموح به، ثم أحلها.

تدريب على الاختبارات الدولية

43 التمثيل البياني الذي يمثل مجموعة حل المتباينة $|x - 4| > 2$ ، هو:



44 الزوج المرتب الذي لا يمثل حلاً للمتباينة $3x - 5y < 30$ ، هو:

- a) (1, -7) b) (-1, 7)
c) (0, 0) d) (-5, -5)

أحدد إذا كان كل زوج مرتب مما يأتي يمثل حلاً للمتباينة:
 $2x + y > -3$

- 20 (2, -2) 21 (1, -3)
22 (-5, 4) 23 (2, 0)

أجد مجموعة حل كل متباينة مما يأتي، ثم أمثلها على خط الأعداد:

- 24 $-2 \leq x - 7 \leq 1$
25 $-2 < -2n + 1 < 7$
26 $-8 < \frac{2}{3}x - 4 < 10$
27 $3x + 2 < -10$ or $2x - 4 > -4$
28 $x - 1 \leq 5$ or $x + 3 \geq 10$
29 $4x - 3 > 11$ or $4x - 3 \leq -11$

أحل كلًا من المعادلات والمتباينات الآتية:

- 30 $3 - |5x + 3| > 3$
31 $7|x + 1| - 3 \leq 11$
32 $-4|8 - x| + 2 > -14$
33 $|x + 5| = 6.5$
34 $|7x + 3| + 2 = 33$
35 $|x - \frac{1}{2}| = \frac{5}{2}$

أمثل كلًا من المتباينات الآتية في المستوى الإحداثي:

- 36 $y \leq -2x + 1$ 37 $x < -4$
38 $y \geq x - 1$ 39 $y > 5x - 5$
40 $4x - y < 2$

ما أهميّة هذه الوحدة؟

يُعدُّ الاقتران التربيعيُّ أحدَ أكثرِ الاقتراناتِ شهرةً واستخدماً في الرياضيات؛ ولذلك خُصِّصَتْ هذه الوحدة لتقديم خصائص هذا الاقتران الجبريّة والبيانيّة وبعض استعمالاته الحيّاتيّة، مثل تصميم الجُسور والمباني، كما يظهرُ في قصرِ المشتى التاريخيِّ.

سأتعلّم في هذه الوحدة:

- ◀ تحديد ما إذا كانت العلاقة اقتراناً أم لا.
- ◀ تعرّف الاقتران التربيعيَّ وخصائصه، وتمثيله بيانياً في المُستوى الإحداثيِّ.
- ◀ تمثيل مُنحنيات الاقترانات التربيعيّة الناتجة من تطبيق تحويلٍ هندسيٍّ أو أكثرَ على مُنحني الاقتران الرئيس.

تعلّمت سابقاً:

- ✓ تمثيل الاقترانات الخطيّة بيانياً.
- ✓ حلّ المعادلات الخطيّة بمتغيّر واحد.
- ✓ إجراء تحويلات هندسيّة لأشكالٍ ثنائيّة البعد في المُستوى الإحداثيِّ.
- ✓ نمذجة ظواهر ومواقف حيّاتيّة هندسيّاً على مفهوم الاقتران الخطيِّ.

فكرة المشروع البحث عن الاقتران التربيعي في نماذج حياتية.

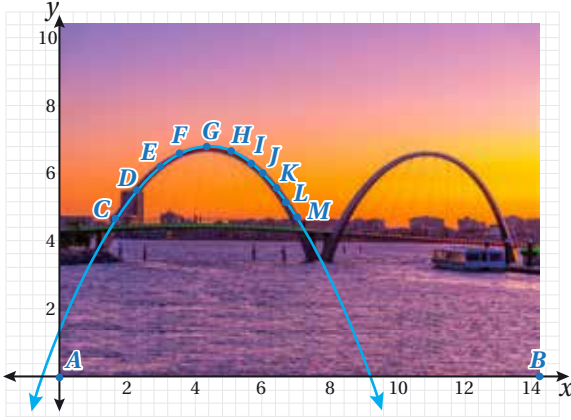


المواد والأدوات شبكة الإنترنت، برمجية جيو جيبرا.



خطوات تنفيذ المشروع:

- 1 أبحث مع أفراد مجموعتي في شبكة الإنترنت عن صور لنماذج حياتية تظهر فيها منحنيات على شكل قطع مكافئ، مثل: الجسور، ونوافير المياه، وواجهات بعض المباني، أو ألتقط صورة لذلك، ثم أحفظها في ملف على جهاز الحاسوب.
- 2 أستخدم برمجية جيو جيبرا لإيجاد قاعدة الاقتران التربيعي، الذي يمثل القطع المكافئ الذي يظهر في الصورة، باتباع الخطوات الآتية:



- أنقر على أيقونة  من شريط الأدوات، ثم أختار الصورة التي حفظتها.
- أعدل موقع الصورة، وأختار مقاساً مناسباً لها بتحريك النقطتين A و B، اللتين تظهران عليها.
- أحدد بعض النقاط على القطع المكافئ، الذي يظهر في الصورة، باستعمال أيقونة  من شريط الأدوات.
- أكتب الصيغة FitPoly (C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M), n في شريط الإدخال ليظهر منحنى فوق الصورة، ومعادلة في شريط الإدخال.
- أستخدم المؤشر فوق المعادلة لضبط المنحنى الظاهر، بحيث ينطبق تماماً على المنحنى الذي في الصورة، وتظهر قاعدة الاقتران التربيعي الممثل للقطع المكافئ بشكل دقيق في شريط الإدخال.
- أجد معادلة محور التماثل، وإحداثي الرأس ومجال ومدى واتجاه فتحة الاقتران التربيعي وقيمته العظمى أو الصغرى.
- أعدل موقع الصورة بتحريكها إلى اليمين وإلى اليسار وإلى الأعلى وإلى الأسفل، ثم أعيد الخطوات السابقة لتحديد قاعدة الاقتران في كل مرة، ووصف كيف يرتبط منحنى كل اقتران منها بمنحنى الاقتران الأصلي.

عرض النتائج:

أعدُّ عرضاً تقديمياً أُبين فيه ما يأتي:

- خطوات تنفيذ المشروع موضحة بالصور (أستعمل خاصية طباعة الشاشة).
- بعض الصعوبات التي واجهتها في أثناء العمل بالمشروع.
- معلومة عن الصورة التي اخترتها.

الاقتارات Functions

- تعرّف العلاقة، وتحديد ما إذا كانت العلاقة اقتراناً أم لا.
- تحديد مجال الاقتران ومداه.

فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم



علاقة، مجال، مدى، الاقتران، اقتران مُتَّصِل، اقتران مُنْفَصِل، اختبار الخطّ الرأسي، الاقتران الخطّي، الاقتران غير الخطّي.



يمثّل الاقتران $d(t) = 300000t$ المسافة d بالكيلومتر، التي يقطعها الضّوء بعد t ثانية.

(1) أجد المسافة التي يقطعها الضّوء بعد 15 s

(2) أجد عدد الثواني اللازمة ليقطع الضّوء 12 مليون كيلومتر.

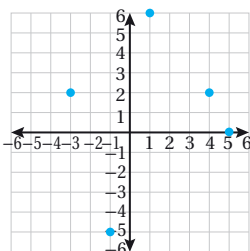
العلاقة والاقتران

تُسمّى مجموعة الأزواج المُرتَّبة التي تكونها المُدخلات والمُخرجات **علاقة** (relation)؛ حيث الإحداثي x للأزواج المُرتَّبة هو المُدخلات، والإحداثي y هو المُخرجات، ويمكن التعبير عن العلاقة بطرائق مختلفة، منها: الأزواج المُرتَّبة، والتمثيل البياني، وجدول المُدخلات والمُخرجات، والمُخطّط السهمي. فمثلاً، تمثّل مجموعة الأزواج المُرتَّبة الآتية علاقة:

$$\{(1, 6), (-3, 2), (5, 0), (-1, -5), (4, 2)\}$$

ويمكن التعبير عن هذه العلاقة بطرائق مختلفة، كما يأتي:

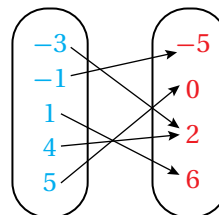
تمثيل بياني



جدول مُدخلات ومُخرجات

x	y
1	6
-3	2
5	0
-1	-5
4	2

مُخطّط سهمي



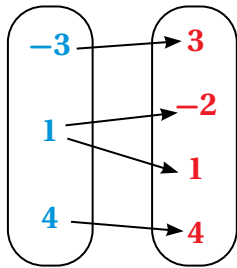
الوحدة 2

تُسَمَّى مجموعة مُدخلاتِ العلاقة **المجال** (domain)، أمّا مجموعة مُخرجاتِ العلاقة فتُسَمَّى **المدى** (range)، وتُسَمَّى العلاقة التي تربطُ كلَّ عنصرٍ في مجالها بعنصرٍ واحدٍ فقط منَ المدى **اقتراًناً** (function).

مثال 1

أحدّد مجال كلِّ علاقةٍ ممّا يأتي ومداها، ثمَّ أحدّد ما إذا كانت تمثّل اقتراًناً أم لا:

1 المجال والمدى



المجال: $\{-3, 1, 4\}$ **المدى:** $\{3, -2, 1, 4\}$

ألاحظُ ارتباطَ العنصرِ 1 في المجالِ بالعنصرين -2 و 1 في المدى. إذن، لا تمثّل هذه العلاقة اقتراًناً.

أتذكّر

يمكنُ تمثيلُ العلاقة بِمُخَطَّطٍ سهميٍّ.

2

x	5	3	2	0	-4	-6
y	1	3	1	3	-2	2

المجال: $\{5, 3, 2, 0, -4, -6\}$ **المدى:** $\{1, 3, -2, 2\}$

ألاحظُ ارتباطَ كلِّ عنصرٍ في المجالِ بعنصرٍ واحدٍ في المدى. إذن، تمثّل هذه العلاقة اقتراًناً.

أتعلّم

يمكنُ أن يرتبطَ أكثرُ من عنصرٍ في مجالِ الاقترانِ بعنصرٍ واحدٍ في مداها.

3 $\{(0, 1), (2, 4), (3, 7), (5, 4)\}$

المجال: $\{0, 2, 3, 5\}$ **المدى:** $\{1, 4, 7\}$

ألاحظُ ارتباطَ كلِّ عنصرٍ في المجالِ بعنصرٍ واحدٍ في المدى. إذن، تمثّل هذه العلاقة اقتراًناً.

أتذكّر

عندَ كتابةِ المجموعة بطريقتي سردِ العناصرِ، أكتبُ العنصرَ المُكرَّرَ مرَّةً واحدةً. علماً أن ترتيبَ العناصرِ ليسَ مهمّاً.

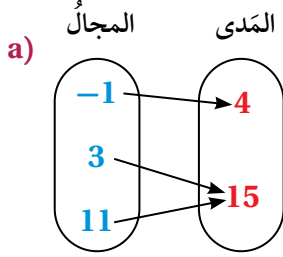
4 $\{(-4, 2), (6, -1), (0, 0), (-4, 0)\}$

المجال: $\{-4, 6, 0\}$ **المدى:** $\{2, -1, 0\}$

ألاحظُ ارتباطَ العنصرِ -4 في المجالِ بالعنصرين 2 و 0 في المدى. إذن، لا تمثّل هذه العلاقة اقتراًناً.

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي

أُحَدِّدُ مَجَالَ كُلِّ عِلَاقَةٍ مِمَّا يَأْتِي وَمَدَاهَا، ثُمَّ أُحَدِّدُ مَا إِذَا كَانَتْ تُمَثِّلُ اقْتِرَانًا أَمْ لَا:



b)

x	5	2	-7	2	5
y	4	8	9	12	14

c) $\{(-2, 5), (0, 2), (4, 5), (5, 6)\}$ d) $\{(6, 5), (4, 3), (6, 4), (5, 8)\}$

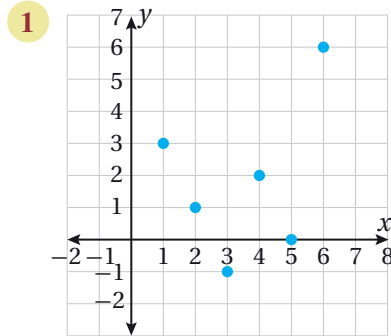
الاقترانُ المُتَّصِلُ والاقترانُ المُنفَصِلُ

يُسَمَّى الاقترانُ الذي يُمَثَّلُ فِي الْمُسْتَوَى الْإِحْدَائِيِّ بِنِقَاطٍ غَيْرِ مُتَّصِلَةٍ **اقْتِرَانًا مُنْفَصِلًا** (discrete function)، أَمَّا الاقترانُ الذي يُمَثَّلُ بِخَطٍّ أَوْ مَنْحَنٍ دُونَ انْقِطَاعٍ فَيُسَمَّى **اقْتِرَانًا مُتَّصِلًا** (continuous function).

يُمْكِنُ تَحْدِيدُ مَجَالِ الاقتراناتِ الْمُتَّصِلَةِ وَالْمُنْفَصِلَةِ وَمَدَاهَا مِنْ خِلَالِ تَمَثُّلِهَا بِيَانِيًّا، كَمَا فِي الْمَثَالِ الْآتِي:

مثال 2

أُحَدِّدُ مَا إِذَا كَانَ كُلُّ اقْتِرَانٍ مِمَّا يَأْتِي مُنْفَصِلًا أَمْ مُتَّصِلًا، ثُمَّ أُحَدِّدُ مَجَالَهُ وَمَدَاهُ:



الاقترانُ المُمَثَّلُ فِي الشَّكْلِ الْمُجَاوِرِ مُنْفَصِلٌ؛ لِأَنَّ تَمَثُّلَهُ فِي الْمُسْتَوَى الْإِحْدَائِيِّ عَلَى شَكْلِ نِقَاطٍ غَيْرِ مُتَّصِلَةٍ.

لِتَحْدِيدِ مَجَالِ الاقترانِ وَمَدَاهُ، أَكْتُبُ الْأُزْوَاجَ الْمُرْتَبَّةَ وَأُحَدِّدُ مِنْهَا الْمَجَالَ وَالْمَدَى.

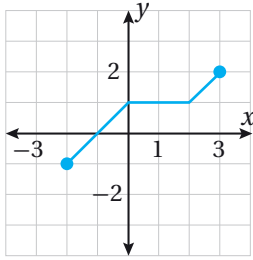
الأُزْوَاجُ الْمُرْتَبَّةُ: $\{(1, 3), (2, 1), (3, -1), (4, 2), (5, 0), (6, 6)\}$

المَجَالُ: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ المَدَى: $\{3, 1, -1, 2, 0, 6\}$

أَتَذَكَّرُ

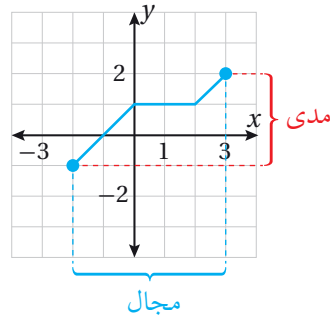
تُمَثِّلُ قِيَمُ x الْمَجَالَ فِي حِينِ تُمَثِّلُ قِيَمُ y الْمَدَى.

2



الاقتران المُمَثَّل في الشكل المُجاوِر مُتَّصِلٌ؛ لأنَّ تمثيله في المُستوى الإحداثيَّ على شكلِ قطعٍ مستقيمةٍ دونَ انقطاعٍ.

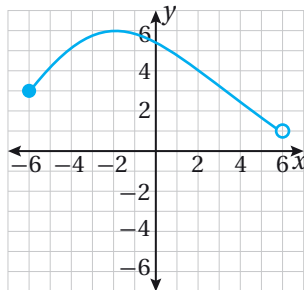
أستعملُ التمثيلَ البيانيَّ لتحديدِ قيمِ x وقيمِ y ، التي تمثلُ المجالَ والمَدَى كالآتي:



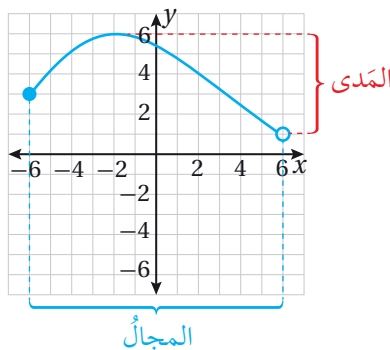
المجال: $\{x \mid -2 \leq x \leq 3\}$ أو الفترة $[-2, 3]$.

المَدَى: $\{y \mid -1 \leq y \leq 2\}$ أو الفترة $[-1, 2]$.

3



الاقتران المُمَثَّل في الشكل المُجاوِر مُتَّصِلٌ؛ لأنَّ تمثيله في المُستوى الإحداثيَّ على شكلِ منحنى ليس فيه انقطاعٌ. أستعملُ التمثيلَ البيانيَّ لتحديدِ قيمِ x وقيمِ y ، التي تُمثِّلُ المجالَ والمَدَى كالآتي:



المجال: $\{x \mid -6 \leq x < 6\}$ أو الفترة $[-6, 6)$.

المَدَى: $\{y \mid 1 < y \leq 6\}$ أو الفترة $(1, 6]$.

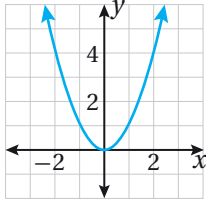
أتعلَّم

- يُكتَبُ مجالُ الاقترانِ المُنفَصِلِ ومَداهُ على شكلِ مجموعةٍ مِنَ العناصرِ المُنفَصِلَةِ.
- يُكتَبُ مجالُ الاقترانِ المُتَّصِلِ ومَداهُ على شكلِ فتراتٍ أو مُتبايناتٍ.

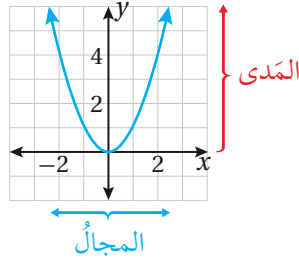
أتعلَّم

تعني الدائرةُ المفتوحةُ في التمثيلِ البيانيِّ أنَّ الإحداثيَّ x للزوجِ المُرتَّبِ لا ينتمي إلى مجالِ الاقترانِ، والإحداثيَّ y لا ينتمي إلى مدى الاقترانِ بسببِ قيمةٍ x ، ويُعبَّرُ عن ذلك عند كتابةِ الفتراتِ باستعمالِ الرمزِ (أو الرمزِ).

4



الاقتران المُمَثَّل في الشكل المُجاوِر مُتَّصِلٌ؛ لأنَّ تمثيله في المُستوى الإحداثي على شكل منحنى ليس فيه انقطاع.
أستعمل التمثيل البياني لتحديد قيم x وقيم y ، التي تُمثِّل المجال والمدى كالآتي:



يَدُلُّ وجودُ رأسِ السَّهم في التمثيل البياني أعلاه على أنَّ المنحنى ممتدٌّ إلى ما لا نهاية. وعليه، يمكنُ كتابةُ مجالِ الاقتران ومداهُ على النحو الآتي:

المجال: $\{x \mid -\infty < x < \infty\}$ أو الفترة $(-\infty, \infty)$

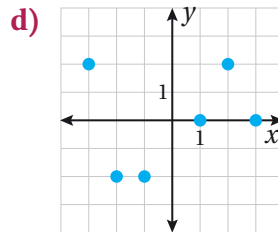
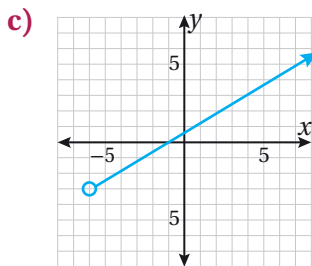
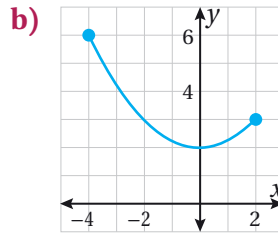
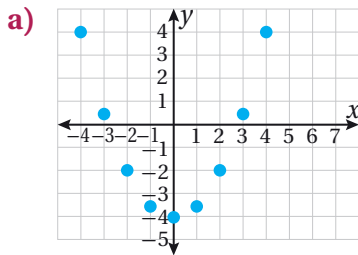
المدى: $\{y \mid y \geq 0\}$ أو الفترة $[0, \infty)$

أفكّر

هل يمكنُ التعبيرُ عن المجالِ بطريقةٍ أخرى؟
أبرّرُ إجابتي.

أتحقّق مِن فهمي

أحدّد ما إذا كان كلُّ اقترانٍ ممّا يأتي مُنفصلاً أم مُتّصلاً، ثمَّ أحدّد مجاله ومداهُ:



اختبار الخط الرأسي

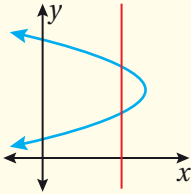
يُمكنني استعمال اختبار الخط الرأسي (vertical line test) لتحديد ما إذا كانت العلاقة المُمثلة بيانياً تُمثل اقتراناً أم لا.

اختبار الخط الرأسي

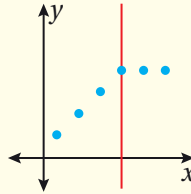
مفهوم أساسي

بالكلمات: تُعدُّ العلاقة المُمثلة بيانياً اقتراناً إذا لم يقطع أي خط رأسي تمثيلها البياني في أكثر من نقطة واحدة.

ليست اقتراناً



اقتران

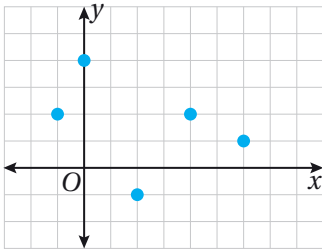


أمثلة:

مثال 3

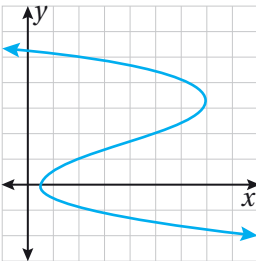
أحدّد ما إذا كانت العلاقة المُمثلة بيانياً في كلٍّ ممّا يأتي تُمثل اقتراناً أم لا، مُبرِّراً إجابتي:

1



تُمثّل العلاقة المُمثلة في الشكل المُجاور اقتراناً؛ لأنّه لا يوجد خط رأسي يَمُرُّ بأكثر من نقطة واحدة في تمثيلها البياني.

2

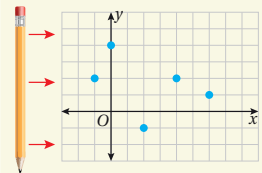


لا تُمثّل العلاقة المُعطى تمثيلها البياني في الشكل المُجاور اقتراناً؛ لأنّها تفشل في اختبار الخط الرأسي. فمثلاً، يوجد مستقيم رأسي يقطع التمثيل البياني في ثلاث نقاط عندما $x = 2$

وهذا يعني أنّ القيمة $x = 2$ في المجال ترتبط بثلاث قيم مختلفة لـ y في المدى.

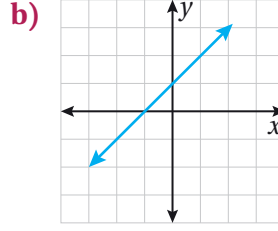
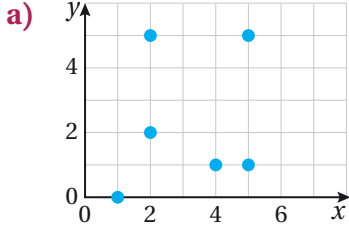
أتعلّم

يُمكنني استعمال قلمي لإجراء اختبار الخط الرأسي؛ إذ أضعه رأسيّاً يسار التمثيل البياني، ثمّ أبدأ بتحريكه باتجاه اليمين، فإذا استمرّ القلم بقطع التمثيل البياني في نقطة واحدة فقط فإنّ العلاقة تُمثل اقتراناً.

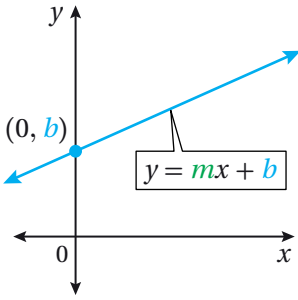


أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي

أُحَدِّدُ مَا إِذَا كَانَتْ الْعِلَاقَةُ الْمُمَثَّلَةُ بَيَانِيًّا فِي كُلِّ مِمَّا يَأْتِي تُمَثِّلُ اقْتِرَانًا أَمْ لَا، مُبَرَّرًا إيجابتي:



رَمَزُ الْاِقْتِرَانِ وَالاِقْتِرَانُ الْخَطِيّ



يُبَيِّنُ الشَّكْلُ الْمُجَاوِرُ التَّمَثِيلَ الْبَيَانِيَّ لِمُعَادَلَةٍ خَطِيَّةٍ بمتغيرين، وَقَدْ تَعَلَّمْتُ سَابِقًا كِتَابَتَهَا بِاسْتِعْمَالِ صِيغَةِ الْمِيلِ وَالْمَقْطَعِ عَلَى الصُّورَةِ: $y = mx + b$ ؛ حَيْثُ $m \neq 0$ هُوَ مِيلُ الْمُسْتَقِيمِ وَ b الْمَقْطَعُ y لَهُ. وَبِمَا أَنَّ التَّمَثِيلَ الْبَيَانِيَّ لِهَذِهِ الْمُعَادَلَةِ يَجْتَازُ اخْتِبَارَ الْخَطِّ الرَّأْسِيِّ فَإِنَّهَا تُعَدُّ اقْتِرَانًا، وَيُسَمَّى اقْتِرَانًا خَطِيًّا (linear function).

يُمْكِنُ أَيْضًا كِتَابَةُ قَاعِدَةِ الْاِقْتِرَانِ الْخَطِيّ بِاسْتِعْمَالِ رَمَزِ الْاِقْتِرَانِ $f(x)$ عَلَى الصُّورَةِ الْآتِيَةِ:

المجال المدى

↓ ↓

$$\underbrace{f(x)} = 4x + 10$$

$$f(x) = mx + b$$

وَتُمَثَّلُ قِيَمُ x عُنَاوَرِ مَجَالِ الْاِقْتِرَانِ f ، أَمَّا قِيَمُ $f(x)$ فَتُمَثَّلُ عُنَاوَرِ مَدَاهُ.

لُغَةُ الرِّيَاضِيَّاتِ

يُقْرَأُ الرَّمَزُ $f(x)$:

f of x

مِثَال 4

إِذَا كَانَ $f(x) = 2x + 6$ ، فَأُجِيبُ عَنِ الْأَسْئَلَةِ الْآتِيَةِ تَبَاعًا:

1 أَجِدُ $f(3)$

$$f(x) = 2x + 6$$

$$f(3) = 2(3) + 6$$

$$= 12$$

الاقتران المُعطى

بتعويض $x = 3$

بالتبسيط

2 أجد $f(-4) + 10$

$$\begin{aligned} f(-4) + 10 &= (2(-4) + 6) + 10 \\ &= -2 + 10 \\ &= 8 \end{aligned}$$

بتعويض $x = -4$
بالتبسيط
بالتبسيط

أتعلم

يمكن استعمال حروفٍ أخرى للدلالة على الاقتران غير حرف f ، مثل: g أو h .

3 أجد قيمة x التي تجعل $f(x) = -10$

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x + 6 \\ -10 &= 2x + 6 \\ -16 &= 2x \\ x &= -8 \end{aligned}$$

الاقتران المُعطى
بتعويض $f(x) = -10$
ب طرح 6 من طرفي المعادلة
بقسمة طرفي المعادلة على 2

إذن، عندما $x = -8$ ، فإن $f(x) = -10$

أتحقق من فهمي

إذا كان $x = 10 - g(x)$ ، فأجب عن الأسئلة الآتية تبعاً:

(b) أجد $g(3) + 6$

(a) أجد $g(-5)$

(c) أجد قيمة x التي تجعل $g(x) = -35$

للاقترانات الخطية تطبيقات حياتية كثيرة.

مثال 5: من الحياة



درجات حرارة: يُمثل الاقتران $t(m) = 19m + 65$ درجة الحرارة t بالفهرنهايت لفرن في أحد الأيام بعد تسخينه مدة m دقيقة.

1 أجد درجة حرارة الفرن بعد 10 دقائق.

أجد $t(10)$:

$$\begin{aligned} t(m) &= 19m + 65 \\ t(10) &= 19(10) + 65 \\ &= 255 \end{aligned}$$

الاقتران المُعطى
بتعويض $m = 10$
بالتبسيط

إذن، درجة حرارة الفرن بعد 10 دقائق من بدء تسخينه 255°F



2

إذا كانت أقصى درجة حرارة للفرن 350°F ، فأجد مجال الاقتران ومداه.

$$t(m) = 19m + 65$$

$$350 = 19m + 65$$

$$285 = 19m$$

$$m = 15$$

الاقتران المُعطى

$$t(m) = 350$$

بترج 65 من طرفي المعادلة

بقسمة طرفي المعادلة على 19

يصل الفرن إلى أقصى درجة حرارة عند تشغيله مدة 15 دقيقة؛ لذا فإن أكبر قيمة للزمن الذي يمثل المجال 15. وعليه، فإن مجال الاقتران هو $[0, 15]$.

لايجاد مدى الاقتران أعوض $m = 0$ في الاقتران لينتج $t(0) = 65$. وعليه، فإن مدى الاقتران هو $[65, 350]$.

أتحقق من فهمي



يُمثل الاقتران $d(x) = 12x$ المسافة d بالكيلومتر التي تقطعها سيارة باستعمال x لتر من الوقود. أجد مجال الاقتران ومداه إذا كان الحد الأقصى لسعة خزان السيارة من الوقود 40 L

أتعلم

بما أن m تمثل الزمن، فإن أقل قيمة له هي 0

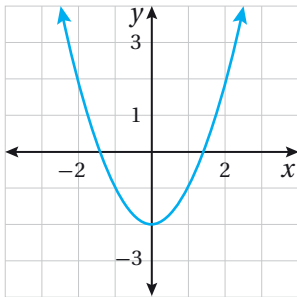
أتعلم

يمكن إيجاد مدى الاقتران الخطي بتعويض أقل قيمة وأعلى قيمة في المجال.

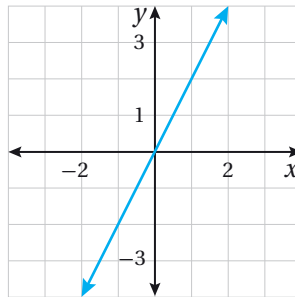
الاقترانات غير الخطية

الاقتران غير الخطي (nonlinear function) اقتران لا يمكن كتابته على الصورة $f(x) = mx + b$ ، وتمثيله البياني ليس خطأ مستقيماً.

اقتران غير خطي



اقتران خطي



أتعلم

إذا احتوى الاقتران $f(x)$ على أي أس غير الواحد للمقدار x ، فإن الاقتران غير خطي.

ويمكن إيجاد قيمة الاقتران غير الخطي عند قيمة معينة من خلال التعويض، ثم اتباع أولويات العمليات.

أولويات العمليات الحسابية

مراجعة المفهوم

أولويات العمليات الحسابية، هي:

- (1) أجد قيمة المقدار داخل الأقواس.
- (2) أجد قيم المقادير الأسية والجذور جميعها.
- (3) أضرب أو أقسم من اليسار إلى اليمين (أيهما سبق).
- (4) أجمع أو أطرح من اليسار إلى اليمين (أيهما سبق).

مثال 6

إذا كان $g(x) = 2x^2 + 2x - 3$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

ألاحظ أن أس المتغير في الاقتران $g(x)$ هو 2؛ لذا فهو ليس اقتراناً خطياً.

1 $g(-1)$

$$g(x) = 2x^2 + 2x - 3$$

الاقتران المعطى

$$g(-1) = 2(-1)^2 + 2(-1) - 3$$

بتعويض $x = -1$

$$= -3$$

بالتبسيط

2 $3g(0) + g(2)$

$$3g(0) + g(2) = 3(2(0)^2 + 2(0) - 3) + (2(2)^2 + 2(2) - 3)$$

بتعويض

$$x = 0, x = 2$$

$$= 3(-3) + 9$$

بالتبسيط

$$= 0$$

بالتبسيط

أتحقق من فهمي 

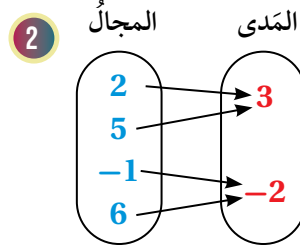
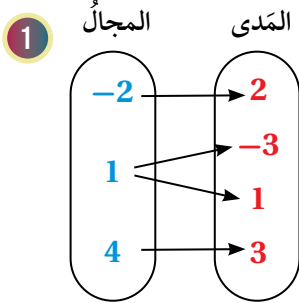
إذا كان $h(x) = x^3 - 2x + 1$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

a) $h(-2)$

b) $h(1) - 4h(0)$



أُحَدِّدُ مَجَالَ كُلِّ عِلَاقَةٍ مِمَّا يَأْتِي وَمَدَاهَا، ثُمَّ أُحَدِّدُ مَا إِذَا كَانَتْ تُمَثِّلُ اقْتِرَانًا أَمْ لَا:



3

x	4	2	-3	4	-4
y	0	-1	0	-1	0

4

x	-2	-1	0	1	2
y	-3	-3	-3	-3	-3

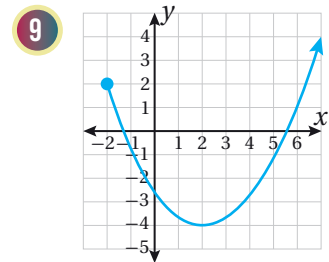
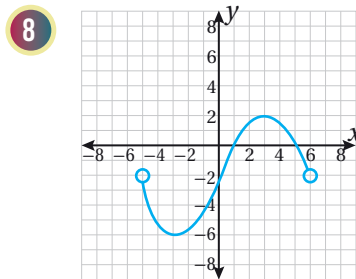
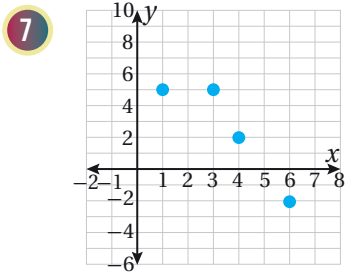
5

$$\{(-2, 5), (-1, 2), (0, 4), (1, -9)\}$$

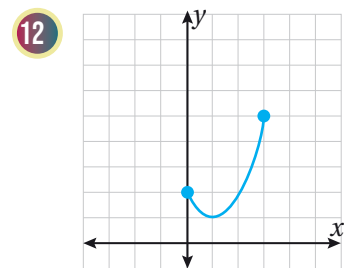
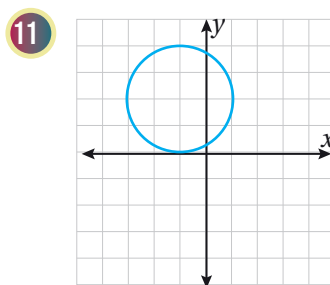
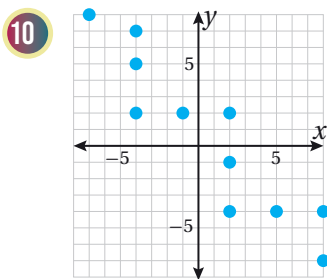
6

$$\{(4, 2), (1, 1), (0, 0), (1, -1), (4, -2)\}$$

أُحَدِّدُ مَا إِذَا كَانَ كُلُّ اقْتِرَانٍ مِمَّا يَأْتِي مُنْفَصِلًا أَمْ مُتَّصِلًا، ثُمَّ أُحَدِّدُ مَجَالَهُ وَمَدَاهُ:



أُحَدِّدُ مَا إِذَا كَانَتِ الْعِلَاقَةُ الْمُعْطَى تَمَثِيلَهَا الْبَيَانِي فِي كُلِّ مِمَّا يَأْتِي تُمَثِّلُ اقْتِرَانًا أَمْ لَا، مُبَرِّرًا إجابتي:



إذا كان $f(x) = 3x - 8$ ، فأجيب عن الأسئلة الآتية تبعاً:

13 أجد $f(-3)$

14 أجد $2f(5) - 11$

15 أجد قيمة x ، التي تجعل $f(x) = 19$

إذا كان $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

18 $2h(0) - h(-2)$

17 $h(3)$

16 $h(2)$



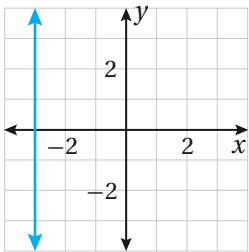
تغذية: يُمثّل الاقتران $V(c) = 98c$ عدد وحدات فيتامين د، التي يمكن للإنسان أن يحصل عليها عند شربه c كوباً من الحليب.

19 أجد عدد وحدات فيتامين د، التي يمكن للإنسان أن يحصل عليها عند شرب 8 أكواب من الحليب.

20 إذا كان الحد الأقصى لعدد أكواب الحليب التي يوصي الأطباء المرأة الحامل أن تشربها 4 أكواب، فأجد مجال الاقتران ومداه.



مهارات التفكير العليا



21 **اكتشف الخطأ:** تقول هديل إن التمثيل البياني المُجاور يُمثّل اقتراناً خطياً؛ لأنه على شكل مُستقيم. اُكتشف الخطأ في قول هديل، وأصحّحه.

تبرير: اُحدّد الجملة الصحيحة والجملة الخطأ ممّا يأتي، مُبرّراً إجابتي:

22 كل اقتران هو علاقة.

23 كل علاقة هي اقتران.

24 إذا كان مجال الاقتران $(-\infty, \infty)$ ، فإن مداه أيضاً سيكون $(-\infty, \infty)$.

25 **تبرير:** أجد مجموعة قيم x ، التي تجعل العلاقة $\{(1, 5), (x, 8), (-7, 9)\}$ اقتراناً؛ حيث $x \in \mathbb{Z}$ ، مُبرّراً إجابتي.

تفسير التمثيلات البيانية للعلاقات Analyzing Graphs of a Relation

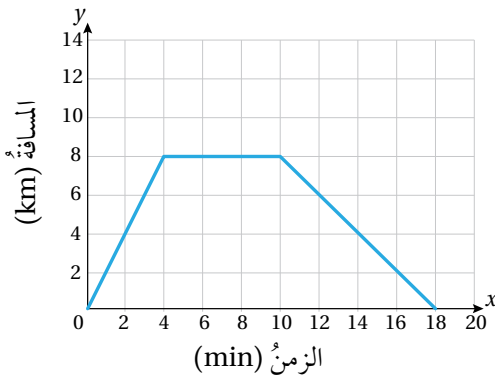
تفسير الرسوم البيانية للمواقف الحياتية.

منحنيات التحويل، منحنى المسافة - الزمن.

يبيّن الشكل المجاور التمثيل البياني للعلاقة بين المسافة التي قطعها سياراً والزمن الذي استغرقته لقطعها.

(1) كم ساعة استمرت رحلة السيارة؟

(2) ما المدة الزمنية التي توقفتها السيارة في أثناء الرحلة؟



فكرة الدرس

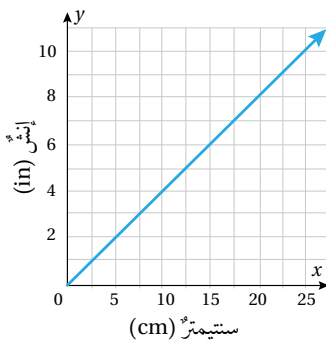
المصطلحات

مسألة اليوم



تعلمت سابقاً التحويل بين وحدات القياس المختلفة باستعمال علاقات خطية تربط بينها، وسأتعلم اليوم كيفية قراءة وتفسير **منحنيات التحويل** (conversion graphs)، وهي منحنيات تستعمل لتمثيل العلاقات بين وحدات القياس المختلفة والتحويل بينها.

مثال 1



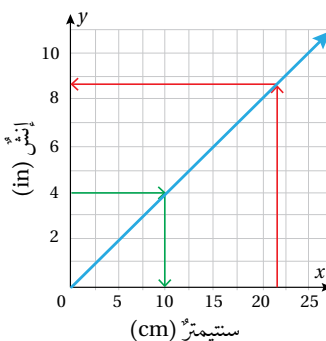
يبيّن منحنى التحويل المجاور العلاقة بين السنتيمتر (cm) والإنش (in). أستخدم المنحنى للإجابة عن كلّ مما يأتي:

1 أحوّل 4 in إلى وحدة السنتيمتر.

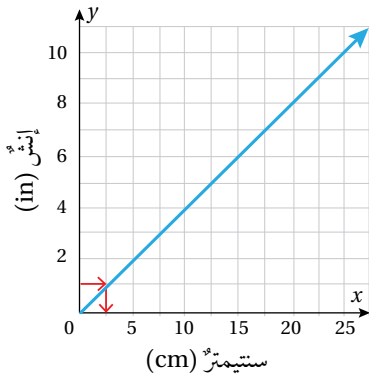
ألاحظ من التمثيل البياني أنّ 4 in على المحور y تقابل 10 cm على المحور x.

2 أحوّل 22 cm إلى وحدة الإنش.

ألاحظ من التمثيل البياني أنّ 22 cm على المحور x تقابل 8.7 in تقريباً على المحور y.



3



أُبَيِّنْ كَيْفَ أَسْتَعْمَلُ الْمُنْحَنِي الْمَجَاوِرَ لِتَحْوِيلِ 18 in إلى سنتيمتراتٍ.

بما أنَّ 18 in غير موجودةٍ على التمثيل البياني، أَتَّبِعُ الْخُطُواتِ الْآتِيَةَ لِلتَّحْوِيلِ:

الخطوة 1: أَجِدُ كَمْ سَنَتِيمَتراً فِي الْإِنْشِ الْوَاحِدِ.

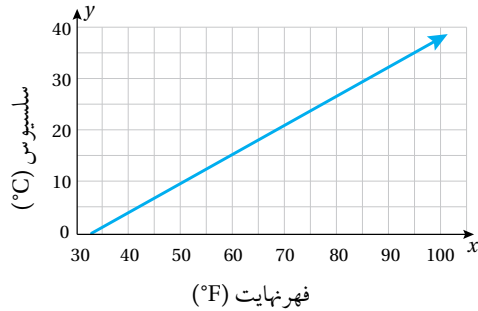
أَلَاخِظُ مِنَ التَّمْثِيلِ الْبَيَانِيِّ أَنَّ كُلَّ 1 in عَلَى الْمَحْوَرِ y يُقَابِلُ 2.5 cm تَقْرِيباً عَلَى الْمَحْوَرِ x .

الخطوة 2: أَضْرِبُ 18 in فِي 2.5

$$18 \times 2.5 = 45$$

إِذَنْ، 18 in تَسَاوِي 45 cm تَقْرِيباً.

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي



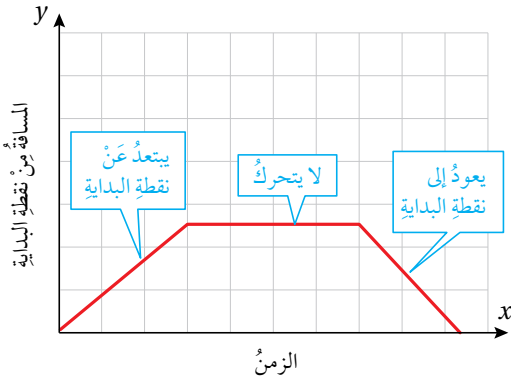
يَبَيِّنُ مُنْحَنِي التَّحْوِيلِ الْمَجَاوِرُ الْعِلَاقَةَ بَيْنَ وَحَدَّتَيْ قِيَاسِ دَرَجَاتِ الْحَرَارَةِ الْفَهْرَنْهَاتِ وَالسَّلْسِيُوسِ. أَسْتَعْمَلُ الْمُنْحَنِي الْمَجَاوِرَ لِلْإِجَابَةِ عَنْ كُلِّ مِمَّا يَأْتِي:

(a) أَحْوَلُ 35°C إِلَى وَحْدَةِ الْفَهْرَنْهَاتِ.

(b) أَحْوَلُ 50°F إِلَى وَحْدَةِ السَّلْسِيُوسِ.

(c) إِذَا كَانَتْ دَرَجَةُ حَرَارَةِ تَجَمُّدِ الْمَاءِ 0°C ، فَمَا دَرَجَةُ الْحَرَارَةِ الْمَقَابِلَةُ لَهَا بِالْفَهْرَنْهَاتِ؟

يَكُونُ مِنَ الصَّعْبِ فِي بَعْضِ الْأَحْيَانِ وَصْفُ حَرَكَةِ جِسْمٍ خِلَالَ مَدَّةٍ زَمْنِيَّةٍ مُحَدَّدَةٍ بِالْكَلِمَاتِ؛ لِذَلِكَ تُسْتَعْمَلُ الْمُنْحَنِيَّاتُ لِتَمْثِيلِ تِلْكَ الْحَرَكَةِ بِوُضُوحٍ. يُسْتَعْمَلُ مُنْحَنِي الْمَسَافَةِ-الزَّمَنِ (distance-time graph) لِتَمْثِيلِ الْمَسَافَةِ الَّتِي قَطَعَهَا جِسْمٌ مُتَحَرِّكٌ خِلَالَ مَدَّةٍ زَمْنِيَّةٍ مُعَيَّنَةٍ (بَيْنَ نَقْطَتَيْنِ زَمْنِيَّتَيْنِ).



يبيّن الشكل المجاور كيف يمكن لشكل المنحنى أن يصف سرعة الجسم، حيث تظهر المسافة على المحور الرأسي والزمن على المحور الأفقي.

ويمكن إيجاد سرعة الجسم (S)

بقسمة التغير في المسافة ($y_2 - y_1$) على التغير في الزمن ($x_2 - x_1$)، إذن:

$$S = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

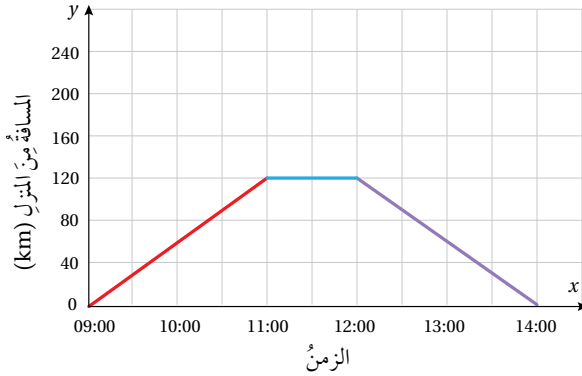
ألاحظ أن صيغة السرعة تشبه صيغة الميل، إذن سرعة الجسم تساوي ميل منحنى المسافة - الزمن.

أندكّر

يمكن إيجاد الميل (m) للمستقيم غير الرأسي المارّ بالنقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) على النحو الآتي:

$$m = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال 2: من الحياة



يبيّن التمثيل البياني المجاور رحلة أحمد بسيارته من منزله إلى مطار الملكة علياء الدولي ليستقبل أخاه العائد من السفر، حيث مكث بعض الوقت في المطار مُتَظَرّاً وصول أخيه، ثم عاداً معاً إلى المنزل.

1 في أي ساعة غادر أحمد منزله؟

غادر أحمد منزله الساعة 9:00 عندما بدأ التمثيل البياني الحركة من المستوى الأفقي.

2 ما المسافة بين منزل أحمد ومطار الملكة علياء الدولي؟

أصبح منحنى المسافة - الزمن بين الساعة 11:00 والساعة 12:00 أفقيًا، ما يعني أن المسافة بين أحمد ومنزله لا تتغير في هذه المدة، إذن يكون أحمد عندها قد وصل إلى المطار، وهذا يدل على أن المطار يبعد عن منزل أحمد 120 km

أندكّر

الوقت بصيغة الـ 24 ساعة هو نظام يبدأ فيه اليوم من منتصف الليل إلى منتصف الليل الذي يليه خلال دورة واحدة مكونة من الـ 24 ساعة اليومية.

3 كم أمضى أحمد من الوقت في المطار؟

تقع القطعة الأفقية من المنحنى بين الساعة 11:00 والساعة 12:00 وطولها يساوي الزمن الذي أمضاه أحمد في المطار. إذن، أمضى أحمد ساعة واحدة في المطار.

4 أجد سرعة السيارة في المدة الزمنية: 9:00–11:00

لأجد سرعة السيارة في المدة الزمنية 9:00–11:00؛ يتطلب أن أجد ميل المستقيم في هذه المدة.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{صيغة الميل}$$

$$= \frac{120 - 0}{11 - 9} \quad \begin{array}{l} \text{أعوّض عن } (x_1, y_1) \text{ بـ } (9, 0) \\ \text{وعن } (x_2, y_2) \text{ بـ } (11, 120) \end{array}$$

$$= \frac{120}{2} = 60 \quad \text{أبسط}$$

بما أن ميل المستقيم هو 60، إذن سرعة السيارة في المدة الزمنية 9:00 – 11:00 تساوي 60 km/h.

5 أجد سرعة السيارة في المدة الزمنية 12:00–14:00، ثم أبين ماذا تمثل.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{صيغة الميل}$$

$$= \frac{0 - 120}{14 - 12} \quad \begin{array}{l} \text{أعوّض عن } (x_1, y_1) \text{ بـ } (12, 120) \\ \text{وعن } (x_2, y_2) \text{ بـ } (14, 0) \end{array}$$

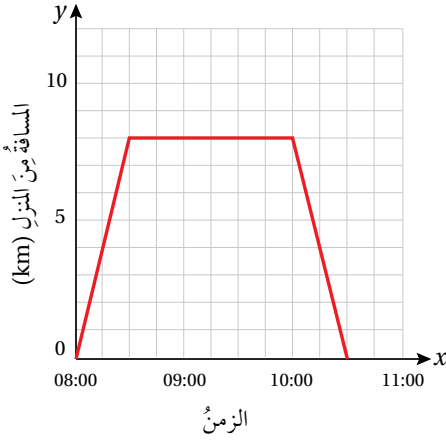
$$= \frac{-120}{2} = -60 \quad \text{أبسط}$$

بما أن ميل المستقيم هو -60؛ فإن القيمة السالبة للميل تعني أن أحمد بدأ بالعودة إلى المنزل الساعة 12:00 بسرعة ثابتة مقدارها 60 km/h، ووصل إلى منزله الساعة 14:00.

أتعلم

القيمة السالبة للسرعة تعني أن الحركة تكون باتجاه متناقض فيه المسافة.

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي



يبيّن التمثيل البياني المجاور رحلة خالد على درّاجته من منزله إلى المكتبة، حيثُ أمضى بعض الوقت فيها، ثمّ عادَ بدرّاجته إلى المنزل.

(a) في أيّ ساعة غادر خالد منزله؟

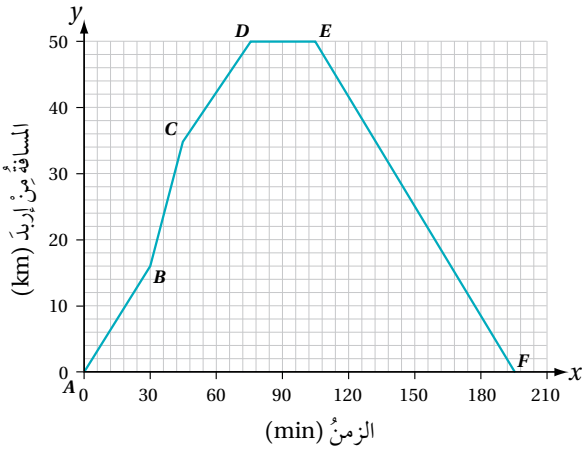
(b) ما المسافة بين منزل خالد والمكتبة؟

(c) كم أمضى خالد من الوقت في المكتبة؟

(d) أجد سرعة خالد في المدة الزمنية 10:00–10:30، ثمّ أبين ماذا تمثّل.

يُظهر مُنحني المسافة - الزمن في المثال السابق المسافة التي يقطعها جسم متحرك بين أوقات مختلفة من ساعات اليوم. وتوجد أيضًا مُنحنيات تُظهر المسافة التي يقطعها الجسم المتحرك بعد مرور مدة زمنية محدّدة من لحظة انطلاقه كما هو موضّح في المثال الآتي:

مثال 3



يمثّل مُنحني المسافة - الزمن رحلة حافلة نقلت ركّابًا من مدينة إربد إلى مدينة المفرق؛ حيثُ توقّف سائق الحافلة في الموقف مدّة من الزمن لتحميل الركّاب، ثمّ عادَ إلى مدينة إربد.

1 ما المسافة بين إربد والمفرق؟

أصبح مُنحني المسافة - الزمن بعد ما يقارب 75 دقيقة أفقيًا؛ ما يعني أنّ المسافة بين إربد والمفرق لا تتغيّر، إذن تكون الحافلة عندها قد وصلت إلى مدينة المفرق وتوقّفت بعض الوقت، وهذا يدلّ على أنّ مدينة إربد تبعد عن مدينة المفرق 50 km

2 ما المدة الزمنية التي انتظرها سائق الحافلة في الموقف لتحميل الركاب؟

بما أن المنحنى أفقي بين 75 دقيقة و 105 دقائق من انطلاق الحافلة من إربد إلى المفرق، فهذا يعني أن الحافلة توقفت 30 دقيقة في المفرق لتحميل الركاب.

3 ما زمن الرحلة كلها؟

ألاحظ من المنحنى أن زمن الرحلة كلها 195 دقيقة تقريباً؛ أي 3 ساعات وربع.

4 ماذا يمكننا القول عما يتعلق برحلة الحافلة من النقطة E إلى النقطة F؟

بدأت الحافلة بالعودة من مدينة المفرق إلى مدينة إربد بين هاتين النقطتين، واستغرقت رحلة العودة 90 دقيقة.

5 أحسب سرعة الحافلة في المدة من C إلى D .

لأجد سرعة السيارة في المدة من C إلى D؛ يتطلب أن أجد ميل المستقيم في هذه المدة:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{صيغة الميل}$$

$$= \frac{50 - 35}{75 - 45} \quad \begin{array}{l} \text{أعوّض عن } (x_1, y_1) \text{ بـ } (45, 35) \\ \text{وعن } (x_2, y_2) \text{ بـ } (75, 50) \end{array}$$

$$= \frac{15 \text{ km}}{30 \text{ min}} \quad \text{أبسّط}$$

وبما أن الحافلة قطعت 15 km في 30 min، إذن يمكنني إيجاد سرعة الحافلة في الساعة الواحدة.

$$\frac{15 \text{ km}}{30 \text{ min}} \quad \text{سرعة السيارة بوحدة km/min}$$

$$= \frac{15 \times 2 \text{ km}}{30 \times 2 \text{ min}} \quad \begin{array}{l} \text{أضرب في 2 لتحويل سرعة الحافلة} \\ \text{بوحدة الكيلومتر لكل ساعة} \end{array}$$

$$= \frac{30 \text{ km}}{60 \text{ min}} \quad \text{أبسّط}$$

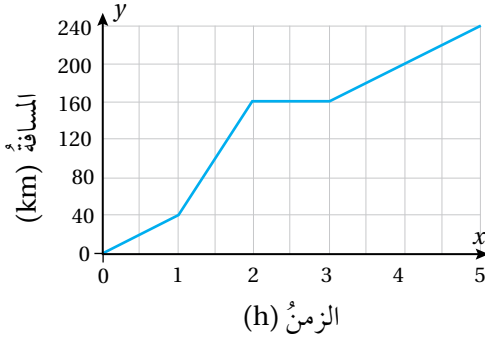
$$= \frac{30 \text{ km}}{1 \text{ h}} \quad \text{كل 60 min تساوي 1 ساعة}$$

إذن، سرعة الحافلة من C إلى D تساوي 30 km/h

أتعلّم

ألاحظ أن ميل المنحنى ثابت خلال هذه المدة، ما يعني أن سرعة الحافلة كانت ثابتة خلال رحلة العودة.

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي



يُبيِّن التمثيل البياني المجاور رحلة بهاء بسيارته من مدينة الكرك متجهًا إلى عمله في مدينة العقبة عبر طريق الغور الأردني.

(a) ما المسافة بين مدينة الكرك ومدينة العقبة؟

(b) ما المدة الزمنية التي استغرقها لأخذ استراحة؟

(c) أحسب سرعة السيارة في الجزء الأخير من الرحلة.

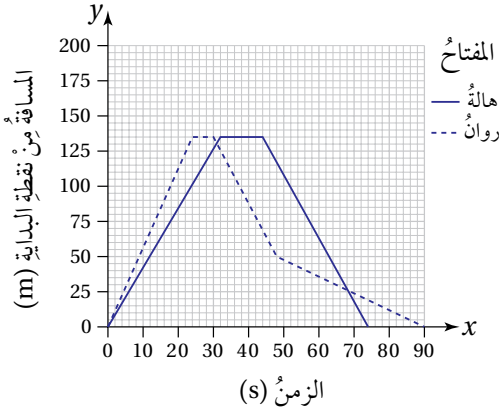
(d) إذا وصل بهاء مدينة العقبة الساعة 1 p.m.، ففي أي ساعة انطلق من مدينة الكرك؟

أَتَعَلَّمُ

إذا احتوى اقتران المسافة - الزمن أكثر من قطعة مستقيمة، فإن ذلك يعني أن الحركة لم تكن بسرعة ثابتة.

تعلمت في الأمثلة السابقة قراءة وتفسير التمثيل البياني لمنحنى واحد، ولكن تظهر بعض التمثيلات أكثر من منحنى في التمثيل البياني نفسه، مثل منحنى المسافة - الزمن لأكثر من شخص، وعندئذ نكون في حاجة إلى المقارنة بين المنحنيين.

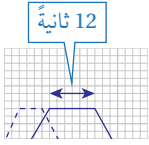
مثال 4



يبيِّن التمثيل البياني المجاور سباقًا بين روان وهالة، حيث ركضتا إلى نهاية الطريق المُحاذاي لمنزلهما، وأخذت كلُّ منهما استراحة قصيرة، ثم عادتا ركضًا إلى نقطة البداية، وفي طريق العودة التوى كاحل روان.

1 أيُّهما أنهت السباق بوقت أقصر: روان أم هالة؟ ولماذا؟

أنهت هالة السباق أولاً، حيث يظهر من التمثيل البياني أن منحنى هالة عاد إلى المحور x قبل منحنى روان، حيث أنهت هالة السباق في 75 ثانية تقريباً، في حين أنهت روان السباق في 90 ثانية.



2 ما مقدار الوقت الذي استراحت فيه هالة؟

ألاحظ أن كل خطوة أفقية في المستوى الإحداثي تمثل ثانيتين؛ لذا استراحت هالة مدة 12 ثانية كما يظهر في الشكل المجاور.

3 بعد كم ثانية من بدء السباق التوى كاحل روان؟

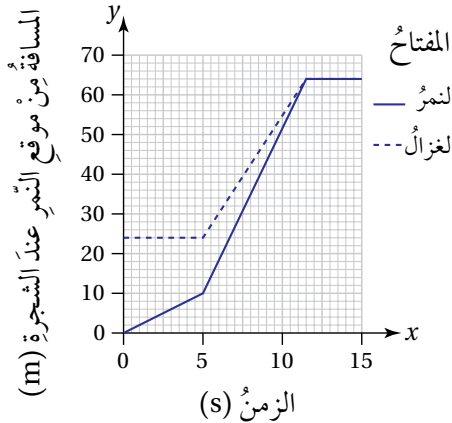
التوى كاحل روان بعد 48 ثانية، وذلك لأن سرعتها قلت فجأة عند الثانية 48، ويظهر ذلك في التمثيل البياني، حيث قل ميل المنحنى بعد الثانية 48.

4 ماذا حدث بعد 68 ثانية من بدء السباق؟

ألاحظ أن المنحنيين تقاطعا في الثانية 68، وهذا يدل على أن هالة وروان كانتا على البعد نفسه من نقطة البداية/ النهاية في تلك اللحظة.

أتحقق من فهمي

رصد نمر غزالاً عندما كان أسفل شجرة، ثم بدأ بمطاردة الغزال حتى اصطاده. يبين التمثيل البياني الآتي المطاردة بين النمر والغزال.



(a) كم كانت المسافة بين الغزال والنمر عند بدء المطاردة؟

(b) ماذا فعل الغزال بين الثانية 0 والثانية 5؟

(c) كم ثانية ركض الغزال قبل أن يصطاده النمر؟

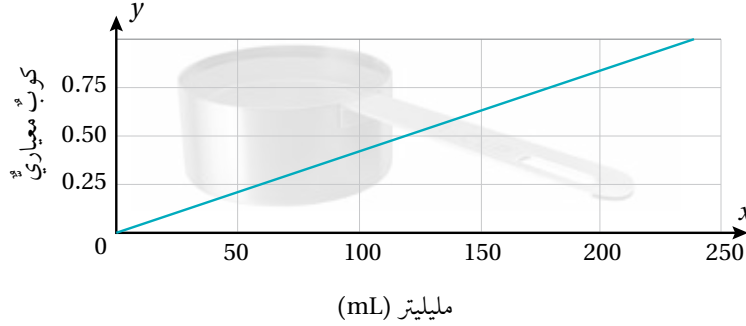
(d) كيف أستدل من التمثيل البياني على أن النمر أسرع من الغزال؟

أتعلم

اقرأ مقياس الرسم للتمثيل البياني جيداً، وألاحظ أن كل مربع صغير يمثل ثانيتين.



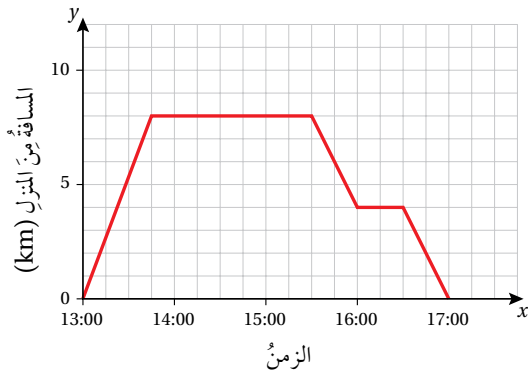
يُبيِّنُ مُنْحَنِي التَّحْوِيلِ الْآتِي الْعِلَاقَةَ بَيْنَ الْمِلِيلِترِ وَوَحْدَةِ الْكُوبِ الْمَعْيَارِيِّ الَّتِي يُسْتَعْمَلُ لِقِيَاسِ الْكِمِيَّاتِ فِي الطَّبِيخِ.



1 كمّ ميليتراً من السائل يقابل الكوب المعياري الواحد؟

2 كمّ كوباً معيارياً يقابل 150 mL؟

3 كمّ ميليتراً من السائل تحتاج إليه وصفة تتطلب كوباً ونصفاً.



يُبيِّنُ التَّمثِيلُ الْبَيَانِيَّ الْمَجَاوِزُ رَحْلَةَ زَيْدٍ عَلَى دَرَجَتِهِ مِنْ مَنْزِلِهِ إِلَى الْمَرْكَزِ الثَّقَافِيِّ، وَفِي طَرِيقِ عَوْدَتِهِ إِلَى الْمَنْزِلِ تَوَقَّفَ عِنْدَ أَحَدِ الْمَحَالِّ التِّجَارِيَةِ.

4 في أي ساعة غادر زيد المنزل؟

5 كم كيلومتراً يبعد المركز الثقافي عن منزل زيد؟

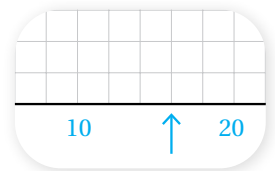
6 كم كيلومتراً يبعد المحل التجاري عن منزل زيد؟

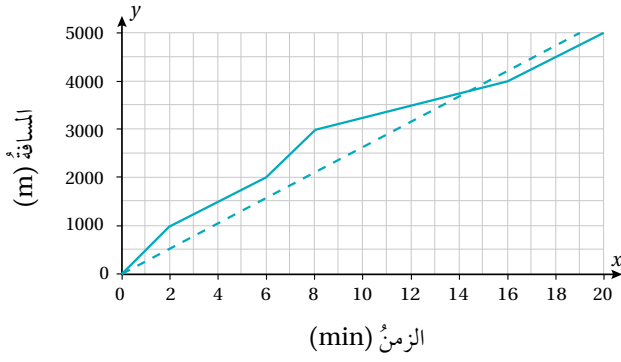
7 كم أمضى زيد من الوقت في المركز الثقافي؟

8 أجد سرعة زيد في المدة الزمنية 15:30 – 16:00

أَتَعَلَّمُ

عندما أقرأ التمثيل البياني أحدّد مقياس الرسم أولاً لمعرفة ما يمثله كل مربع في المستوى الإحداثي، ويمكن التحقق من ذلك بالعدّ. فمثلاً يشير السهم في الشكل أدناه إلى العدد 16

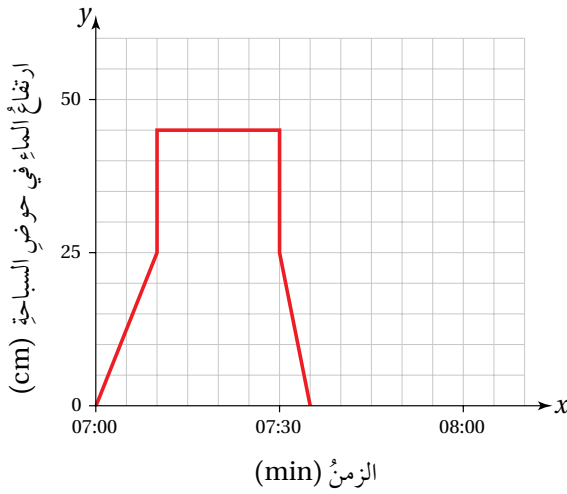




شارك تميم وريان في سباق الجري لمسافة 5000 m، وبين الشكل المجاور العلاقة بين المسافة التي قطعها كل منهما والزمن الذي استغرقه في أثناء السباق.

9 أيهما ركض بسرعة ثابتة تميم أم ريان؟ أبرر إجابتي.

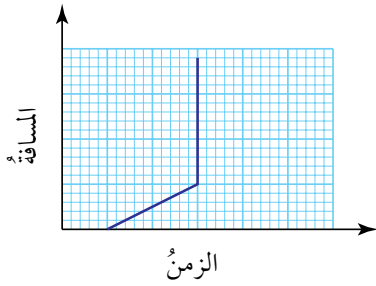
10 أجد سرعة ريان خلال السباق. 11 من فاز بالسباق ريان أم تميم؟ أبرر إجابتي.



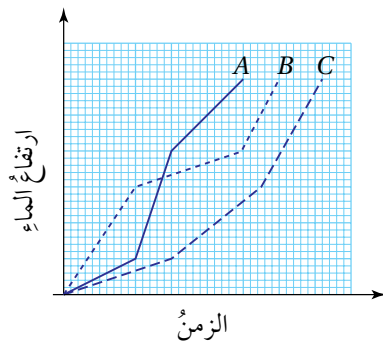
ملاً كمال حوض استحمام بالماء، وعندما أصبحت فيه كمية مناسبة من الماء نزل فيه مدة زمنية معينة، ثم خرج وأفرغ الحوض من الماء. يبين التمثيل البياني المجاور ارتفاع الماء في الحوض خلال هذه المدة.

12 ما ارتفاع الماء في الحوض قبل نزول كمال فيه؟ 13 ما ارتفاع الماء في الحوض عندما نزل كمال فيه؟ 14 كم دقيقة أمضى كمال في الحوض؟

مهارات التفكير العليا

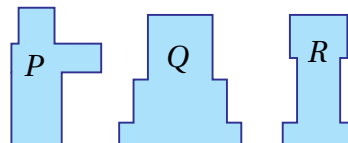


15 تبرير: لماذا لا يمكن أن يكون أي جزء من منحنى المسافة - الزمن رأسياً كما هو مبين في الشكل المجاور؟ أبرر إجابتي.



16 تبرير: يتدفق الماء بمعدل ثابت ومتساو في ثلاثة أنابيب تتصل بالأوعية R و P و Q المبيّنة أدناه لملئها، ويوضح التمثيل البياني المجاور ارتفاع الماء في كل وعاء مع مرور الزمن.

أصل المنحنيات A و B و C بالوعاء المناسب لكل منها، مبرراً إجابتي.

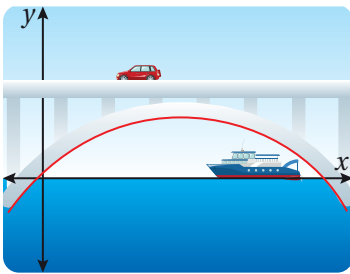


الاقتران التربيعي Quadratic Function

• تعرّف الاقتران التربيعي وخصائصه.

• تمثيل الاقتران التربيعي بيانياً في المستوى الإحداثي.

الاقتران التربيعي، الصورة القياسية، الاقتران الرئيس، قطع مكافئ، محور التماثل، الرأس، نقطة القيمة الصغرى، نقطة القيمة العظمى.



يُمثّل الاقتران $f(x) = -0.007x^2 + 0.51x + 0.8$ ارتفاع دعامة جسر على شكل قوسٍ عن سطح الماء بالأمتار؛ حيث x المسافة الأفقية من نقطة التقاء الدعامة اليسرى مع سطح الماء. هل يمكن أن تمر سفينة ارتفاعها 8 m أسفل الجسر؟ أبرّر إجابتي.

فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم



خصائص الاقتران التربيعي

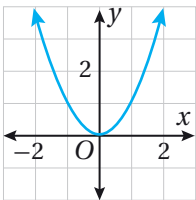
الاقتران التربيعي (quadratic function) اقتران يمكن كتابته على الصورة $f(x) = ax^2 + bx + c$ ؛ حيث a و b و c أعداد حقيقية، و $a \neq 0$ ، والتي تُسمى الصورة القياسية (standard form) للاقتران التربيعي، ومن أمثله:

$$f(x) = 4x^2 + 3x + 1$$

$$g(x) = x^2 - 2x$$

$$h(x) = 3x^2$$

يُعَدُّ الاقتران $f(x) = x^2$ أبسط صور الاقتران التربيعي؛ لذا يُسمى الاقتران الرئيس (parent function) لعائلة الاقترانات التربيعية.

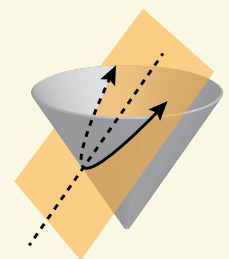


يأخذ التمثيل البياني للاقتران التربيعي شكل الحرف U الإنجليزي، ويُسمى قطعاً مكافئاً (parabola)، كما في الشكل المجاور، الذي يُظهر التمثيل البياني للاقتران $f(x) = x^2$.

محور التماثل (axis of symmetry) هو المستقيم الرأسي الذي يقسم القطع المكافئ إلى جزأين متطابقتين، ويقطعه في نقطة واحدة تُسمى الرأس (vertex).

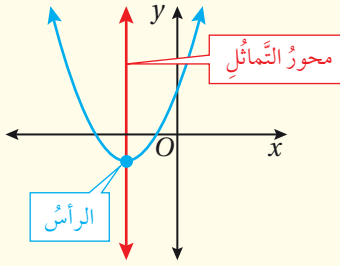
أنعلّم

يَتَّبِعُ القطع المكافئ من تقاطع مستوى مائل ومخروط.



محور تماثل الاقتران التربيعي ورأسه

مفهوم أساسي



معادلة محور التماثل لمنحنى الاقتران التربيعي

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ حيث } a \neq 0$$

$$x = -\frac{b}{2a} \text{، وإحداثيًا رأسه هما:}$$

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

أفكر

لِمَ لا تحتوي معادلة خطّ التماثل على العدد c ؟

مثال 1

أجد معادلة محور التماثل، وإحداثي رأس الاقتران التربيعي $f(x) = 5x^2 - 10x + 4$

بما أن $a = 5$ و $b = -10$ ، فيمكن إيجاد معادلة محور التماثل كالآتي:

$$x = -\frac{b}{2a} \quad \text{معادلة محور التماثل}$$

$$= -\frac{-10}{2(5)} \quad \text{بتعويض } a = 5, b = -10$$

$$= 1 \quad \text{بالتبسيط}$$

إذن، معادلة محور التماثل هي: $x = 1$

لإيجاد إحداثي الرأس، أعتبر القيمة الناتجة عن معادلة محور التماثل هي الإحداثي x لرأس القطع المكافئ، ثم أعوضها في قاعدة الاقتران لإيجاد الإحداثي y .

$$f(x) = 5x^2 - 10x + 4 \quad \text{الاقتران المعطى}$$

$$f(1) = 5(1)^2 - 10(1) + 4 \quad \text{بتعويض } x = 1$$

$$= -1 \quad \text{بالتبسيط}$$

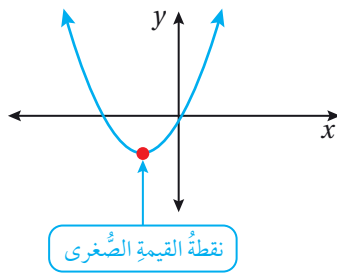
إذن، إحداثي الرأس $(1, -1)$

أتحقق من فهمي

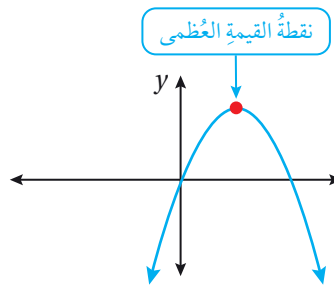
أجد معادلة محور التماثل، وإحداثي رأس الاقتران التربيعي $f(x) = x^2 + 2x - 1$

يكون التمثيل البياني للاقتراح التربيعي $f(x) = ax^2 + bx + c$ ؛ حيث $a \neq 0$ ، مفتوحاً للأعلى إذا كان $a > 0$ ، وتُسمى أدنى نقطة فيه **نقطة القيمة الصغرى** (minimum point)، ويكون مفتوحاً للأسفل إذا كان $a < 0$ ، وتُسمى أعلى نقطة فيه **نقطة القيمة العظمى** (maximum point)، وتُمثل نقطة القيمة الصغرى أو نقطة القيمة العظمى رأس القطع المكافئ.

$a > 0$



$a < 0$



مجال الاقتراح التربيعي هو جميع الأعداد الحقيقية، أما مداه فيمكن تحديده كالاتي:

مدى الاقتراح التربيعي

مفهوم أساسي

إذا كان $f(x) = ax^2 + bx + c$ ؛ حيث $a \neq 0$ ، فإن مدى $f(x)$ يكون:

- مجموعة الأعداد الحقيقية التي تزيد على القيمة الصغرى أو تساويها إذا كان $a > 0$.
- مجموعة الأعداد الحقيقية التي تقل عن القيمة العظمى أو تساويها إذا كان $a < 0$.

لغة الرياضيات

يُشير مُصطلح نقطة القيمة العظمى إلى النقطة (x, y) ، أما مُصطلح القيمة العظمى فيشير إلى الإحداثي y لنقطة القيمة العظمى، وكذلك الأمر بالنسبة إلى نقطة القيمة الصغرى.

مثال 2

لكل قطع مكافئ مما يأتي، أجد القيمة العظمى أو الصغرى والمجال والمدى واتجاه الفتحة:

1 $f(x) = x^2 + 6x + 9$

في الاقتراح $f(x) : a = 1, b = 6$

بما أن $a > 0$ فالتمثيل البياني للاقتراح التربيعي يكون مفتوحاً للأعلى، ويكون للاقتراح قيمة صغرى يمكن إيجادها كالاتي:

الخطوة 1: أجدُ الإحداثيَّ x للرأس.

$$x = -\frac{b}{2a}$$

الإحداثيَّ x للرأس

$$= -\frac{6}{2(1)}$$

بتعويض $a = 1, b = 6$

$$= -3$$

بالتبسيط

الخطوة 2: أجدُ الإحداثيَّ y للرأس.

$$f(x) = x^2 + 6x + 9$$

الاقترانُ المُعطى

$$f(-3) = (-3)^2 + 6(-3) + 9$$

بتعويض $x = -3$

$$= 0$$

بالتبسيط

إذن، القيمة الصغرى للاقتران هي 0

المجال: جميعُ الأعداد الحقيقية أو الفترة $(-\infty, \infty)$.

المدى: $\{y \mid y \geq 0\}$ أو الفترة $[0, \infty)$.

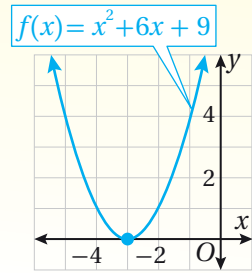
الدعم البياني

يُظهر التمثيل البياني للاقتران

$$f(x) = x^2 + 6x + 9$$

أنه مفتوح للأعلى ورأسه

النقطة $(-3, 0)$.



2 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$

في الاقتران $f(x)$: $a = -\frac{1}{2}, b = 1$

بما أن $a < 0$ ، فالتمثيل البياني للاقتران التربيعي يكون مفتوحاً للأسفل، ويكون للاقتران قيمة عظمى يمكن إيجادها كالآتي:

الخطوة 1: أجدُ الإحداثيَّ x للرأس.

$$x = -\frac{b}{2a}$$

الإحداثيَّ x للرأس

$$= -\frac{1}{2(-\frac{1}{2})}$$

بتعويض $a = -\frac{1}{2}, b = 1$

$$= 1$$

بالتبسيط

الخطوة 2: أجدُ الإحداثيَّ y للرأسِ.

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$$

الاقترانُ المُعطى

$$f(1) = -\frac{1}{2}(1)^2 + 1 + 4$$

بتعويضِ $x = 1$

$$= 4\frac{1}{2}$$

بالتبسيطِ

إذن، القيمةُ العظمى للاقترانِ هيَ $4\frac{1}{2}$

المجال: جميعُ الأعدادِ الحقيقيَّةِ أو الفترة $(-\infty, \infty)$.

المدى: $\{y \mid y \leq 4\frac{1}{2}\}$ أو الفترة $(-\infty, 4\frac{1}{2}]$.

أتحققُ مِن فهمي

لكلِّ قطعٍ مكافئٍ ممَّا يأتي، أجدُ القيمةَ العظمى أو الصُّغرى والمجالَ والمدى واتِّجاهَ الفتحة:

a) $f(x) = 2x^2 - 2x + 8$

b) $f(x) = -3x^2 + 12x + 9$

للاقترانِ التربيعةِ تطبيقاتٌ حياتيةٌ كثيرةٌ، منها الألعابُ الناريةُ، التي تتكوَّنُ مِنْ أنبوبٍ يحتوي على البارودِ ومجموعةٍ مِنَ الأغلفةِ الصغيرةِ تُسمَّى كُلُّ منها نجمةً، وعند إشعالِ الفتيلِ تنطلقُ النُّجومُ إلى الأعلى لينفجرَ كُلُّ نجمٍ عند ارتفاعٍ مُعيَّن، ويرسُمُ الضَّوءُ الناتجُ عَنِ انفجارِ النُّجمِ في الجَوِّ قطعاً مكافئاً.

مثال 3 : مِنَ الحياة



ألعابُ ناريةٌ: يُمثِّلُ الاقترانُ $h(t) = -16t^2 + 72t + 520$

ارتفاعَ نجمةِ ألعابِ ناريةٍ عَنِ سطحِ الأرضِ بالأمتارِ، بعدَ t ثانيةً مِنَ انفجارِها.

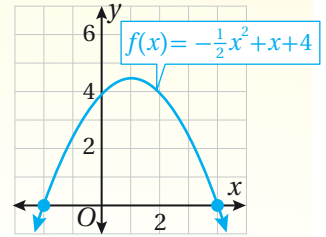
الدَّعمُ البيانيُّ

يُظهرُ التمثيلُ البيانيُّ للاقترانِ

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$$

أنَّهُ مفتوحٌ للأسفلِ ورأسُهُ

النقطةُ $(1, 4\frac{1}{2})$.



معلومة

تحتوي اللعبة النارية على فتيل يُشعل البارود، وعندما تسخن المواد الكيميائية تمتص ذراتها الطاقة فتنتج الأضواء، لتفقد الذرات طاقتها الزائدة. وتختلف كميات الطاقة والألوان تبعاً لاختلاف المواد الكيميائية المستخدمة.

1 أجد الارتفاع الذي انفجرت عنده النجمة في الجو.

الزمن الذي تنفجر عنده النجمة في الجو هو $t = 0$

$$h(t) = -16t^2 + 72t + 520$$

الاقتران المعطى

$$h(0) = -16(0)^2 + 72(0) + 520$$

بتعويض $t = 0$

$$= 520$$

بالتبسيط

إذن، انفجرت النجمة على ارتفاع 520 m من سطح الأرض.

2 أجد أقصى ارتفاع تصل إليه النجمة.

يصل النجم إلى أقصى ارتفاع له عند رأس القطع المكافئ؛ لذا أجد القيمة العظمى للقطع.

الخطوة 1: أجد الإحداثي x للرأس.

$$x = -\frac{b}{2a}$$

الإحداثي x للرأس

$$= -\frac{72}{2(-16)}$$

بتعويض $a = -16, b = 72$

$$= 2.25$$

بالتبسيط

الخطوة 2: أجد الإحداثي y للرأس.

$$h(t) = -16t^2 + 72t + 520$$

الاقتران المعطى

$$h(2.25) = -16(2.25)^2 + 72(2.25) + 520$$

بتعويض $t = 2.25$

$$= 601$$

بالتبسيط باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، أقصى ارتفاع تصل إليه النجمة 601 m

أتحقق من فهمي

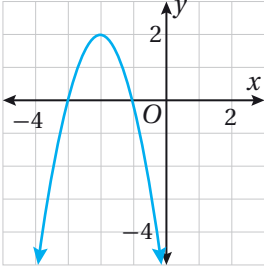
كرة قدم: يُمثّل الاقتران $h(t) = -16t^2 + 64t$ ارتفاع كرة قدم عن سطح الأرض بالأقدام، بعد t ثانية من ركلها.

(a) أجد ارتفاع الكرة بعد 3 ثوانٍ من ركلها. (b) أجد أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة.

تحديد خصائص الاقتران التربيعي من تمثيله البياني

تعلمت في المثالين السابقين تحديد خصائص الاقتران التربيعي من قاعدته، وسأعلم في هذا المثال تحديد خصائصه من تمثيله البياني.

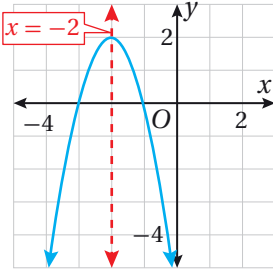
مثال 4



أجد رأس ومعادلة محور التماثل، والقيمة العظمى أو الصغرى ومجال ومدى القطع المكافئ الممثل بيانياً في المستوى الإحداثي المجاور:

الخطوة 1: أجد إحداثيي الرأس.

بما أن القطع مفتوح للأسفل فالرأس يمثل نقطة العظمى، وهي $(-2, 2)$.



الخطوة 2: أجد معادلة محور التماثل.

بما أن محور التماثل هو المستقيم الذي يقسم القطع المكافئ إلى جزأين متطابقتين، ويقطع القطع المكافئ في الرأس، فإن معادلة محور التماثل هي $x = -2$.

الخطوة 3: أجد القيمة العظمى.

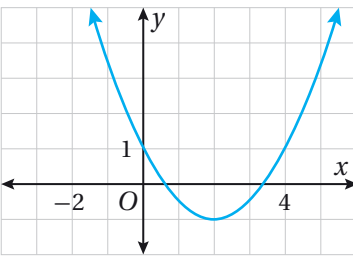
بما أن القيمة العظمى هي الإحداثي y لنقطة الرأس، فإن القيمة العظمى للاقتران هي 2.

الخطوة 4: أجد المجال والمدى.

المجال: جميع الأعداد الحقيقية أو الفترة $(-\infty, \infty)$.

المدى: $\{y \mid y \leq 2\}$ أو الفترة $(-\infty, 2]$.

أتحقق من فهمي



أجد رأس ومعادلة محور التماثل، والقيمة العظمى أو الصغرى ومجال ومدى القطع المكافئ الممثل بيانياً في المستوى الإحداثي المجاور:

أتذكر

الإحداثي x للرأس هو نفسه العدد الذي يظهر في معادلة محور التماثل.

تمثيل الاقتران التربيعي بيانياً

يمكن استعمال خصائص الاقتران التربيعي لتمثيله بيانياً.

تمثيل الاقتران التربيعي بيانياً

مفهوم أساسي

لتمثيل الاقتران التربيعي بيانياً، اتبع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: أحدد اتجاه فتحة القطع المكافئ، وأجد معادلة محور التماثل وإحداثيي الرأس، وأحدد إذا كان يمثل نقطة صغرى أم نقطة عظمى.

الخطوة 2: أجد نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y .

الخطوة 3: أجد نقطة أخرى باختيار قيمة لـ x تقع في الجانب الذي يقع فيه المقطع y يمين محور التماثل أو يساره.

الخطوة 4: أمثل رأس القطع والنقطتين اللتين أوجدتهما من الخطوتين 2 و 3، ثم أستعمل التماثل لأعكس النقطتين من الخطوتين 2 و 3 حول محور التماثل؛ لإيجاد نقطتين أخريين على التمثيل البياني.

الخطوة 5: أصل بين النقاط بمنحنى أملس.

مثال 5

أمثل الاقتران: $f(x) = -3x^2 + 6x + 5$ بيانياً.

الخطوة 1: أحدد اتجاه فتحة القطع المكافئ، وأجد معادلة محور التماثل وإحداثيي الرأس، وأحدد إذا كان يمثل نقطة صغرى أم نقطة عظمى.

في الاقتران $f(x)$: $a = -3$, $b = 6$

بما أن $a < 0$ ، فالتمثيل البياني للقطع المكافئ يكون مفتوحاً للأسفل، ويمثل الرأس نقطته العظمى.

• أجد مُعادلة محور التماثل.

$$x = -\frac{b}{2a}$$

$$= -\frac{6}{2(-3)}$$

$$= 1$$

مُعادلة محور التماثل

بتعويض $a = -3, b = 6$

بالتبسيط

إذن، مُعادلة محور التماثل هي $x = 1$.

• أجد إحداثي الرأس.

$$f(x) = -3x^2 + 6x + 5$$

$$f(1) = -3(1)^2 + 6(1) + 5$$

$$= 8$$

الاقتراح المُعطى

بتعويض $x = 1$

بالتبسيط

إذن، إحداثي الرأس $(1, 8)$.

الخطوة 2: أجد نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y .

لإيجاد نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y ، أُعوّض $x = 0$ في قاعدة الاقتران.

$$f(x) = -3x^2 + 6x + 5$$

$$f(0) = -3(0)^2 + 6(0) + 5$$

$$= 5$$

الاقتراح المُعطى

بتعويض $x = 0$

بالتبسيط

إذن، نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y هي $(0, 5)$.

الخطوة 3: أجد نقطة أخرى باختبار قيمة x تقع في الجانب الذي يقع فيه المقطع y يمين محور التماثل أو يساره.

$$x = -1$$

$$f(x) = -3x^2 + 6x + 5$$

$$f(-1) = -3(-1)^2 + 6(-1) + 5$$

$$= -4$$

الاقتراح المُعطى

بتعويض $x = -1$

بالتبسيط

إذن، النقطة الأخرى هي $(-1, -4)$.

أَتَعَلَّمُ

بما أن محور التماثل يقسم القطع المكافئ جزأين متطابقتين فإن لكل نقطة على يسار هذا المحور نقطة تناظرها على يمينه وَتَبْعُدُ عنه المسافة نفسها، ويكون للنقطتين الإحداثي y نفسه.

إرشاد

أستعمل أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

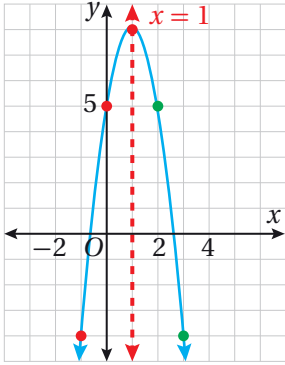
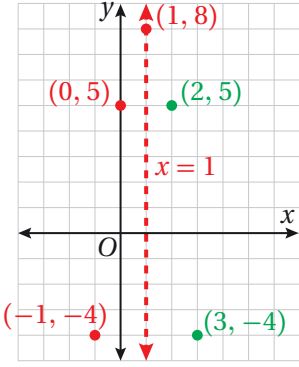
الخطوة 4: أمثل النقاط في المستوى الإحداثي.

أمثل رأس القطع والنقطتين اللتين أوجدتهما من الخطوتين 2 و 3، وهما $(0, 5)$ و $(-1, -4)$ ، ثم أستعمل التماثل لأعكس النقطتين $(0, 5)$ و $(-1, -4)$ حول محور التماثل؛ لإيجاد نقطتين أخريين على التمثيل البياني.

الخطوة 5: أصِل بين النقاط بمنحنى أملس.

أتحقق من فهمي

أمثل الاقتران: $f(x) = x^2 - 4x - 5$



أجد رأس ومعادلة محور التماثل، والقيمة العظمى أو الصغرى ومجال ومدى الاقترانات التربيعية الآتية:

1 $f(x) = 3x^2$

2 $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

3 $f(x) = -x^2 + 5$

4 $f(x) = x^2 + 3$

5 $f(x) = 3x^2 + 6x - 2$

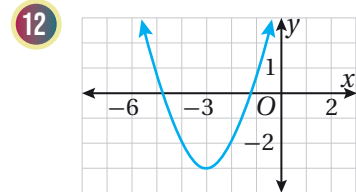
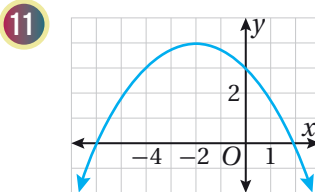
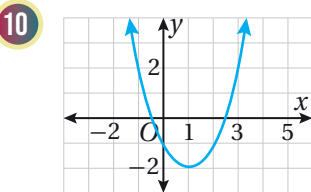
6 $f(x) = -8x + 2x^2$

7 $f(x) = -2x^2 - 6x + 4$

8 $f(x) = 5 + 16x - 2x^2$

9 $f(x) = -2(x-4)^2 - 3$

أجد رأس ومعادلة محور التماثل والقيمة العظمى أو الصغرى ومجال ومدى كل من القطوع المكافئة الآتية:



أُمَثِّلْ كُلًّا مِنْ الاقترانات الآتية بيانيًا: إرشاد: أَسْتَعْمِلْ أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

13 $f(x) = x^2 + 6x - 2$

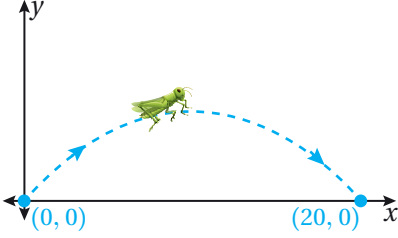
14 $f(x) = 2x^2 - 10x + 1$

15 $f(x) = -3x^2 + 18x + 6$

16 $f(x) = -4x^2 - 8x + 7$

17 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$

18 $f(x) = 5x^2 - 20$



19 **حشرات:** يُمَثِّلُ الاقتران $f(x) = -\frac{1}{20}x^2 + x$ ارتفاع جندبٍ بالسنتيمتر فوق سطح الأرض عند قفزه؛ حيث x المسافة الأفقية من نقطة القفز. أجد أقصى ارتفاع يمكن أن يصل إليه الجندب.



رياضة: يُمَثِّلُ الاقتران $h(t) = -4.9t^2 + 3.8t + 0.5$ ارتفاع كرة مضرب بالأمتر فوق سطح الأرض، بعد t ثانية من ضرب سميّر لها.

20 أجد ارتفاع الكرة لحظة ضرب سميّر لها.

21 أجد أقصى ارتفاع يمكن أن تصل إليه الكرة.

مهارات التفكير العليا

22 **مسألة مفتوحة:** أكتب قاعدة اقتران تربيعي مُعادله محور تماثله $x = -2$.

23 **اكتشف الخطأ:** حاول هشام وملك إيجاد مُعادلة محور التماثل للقطع المكافئ $f(x) = -2x^2 - 16x + 7$ ، فكانت إجابتهما كالآتي. أيُّهما إجابته صحيحة؟ أبرّر إجابتي.

ملك

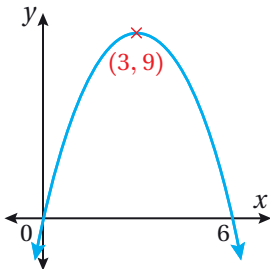
$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-16)}{2(-2)}$$

$$x = -4$$

هشام

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{16}{2(-2)}$$

$$x = 4$$



24 **تحدّ:** أجد قاعدة الاقتران المُمثِّل بيانيًا في الشكل المُجاور.

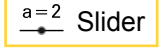
استكشاف التحويلات الهندسيّة للاقتران التربيعي

Exploring Transformations of Quadratic Function

الهدف: يمكنني استعمال برمجيّة جيو جيرا؛ لاستكشاف أثر التحويلات الهندسيّة في منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$

نشاط

الخطوة 1: أكتب قاعدة الاقتران $f(x) = x^2$ في شريط الإدخال، ثم أضغط ، ليظهر التمثيل البياني للاقتران.

الخطوة 2: أنقر على أيقونة  Slider $a=2$ من شريط الأدوات، ثم أنقر على الموقع الذي أريده في الشاشة، ليظهر مربع حوار أحدد فيه أعلى قيمة وأقل قيمة لـ a (مثلاً، أقل قيمة -10 وأعلى قيمة 10)، وأضبط المؤشر على العدد 1.

الخطوة 3: أكرّر الخطوة السابقة لإدراج مؤشرين للتحكم، وأسّمي أحدهما h ، والآخر k ، وأضبط المؤشرين على العدد 0

الخطوة 4: أكتب القاعدة $g(x) = a(x-h)^2 + k$ في شريط الإدخال، ثم أضغط ، ليظهر التمثيل البياني للاقتران.

الخطوة 5: أحرّك المؤشر a لتصبح قيمته مرة أكبر من 1، ومرة بين 0 و 1، ومرة أقل من 1، ثم أجيب عن الأسئلة الآتية:

- ما تأثير تغيير قيمة a عندما تكون أكبر من 1 على منحنى الاقتران g بالمقارنة مع منحنى الاقتران f ؟
- ما تأثير تغيير قيمة a عندما تكون بين 0 و 1 على منحنى الاقتران g بالمقارنة مع منحنى الاقتران f ؟
- ما تأثير تغيير قيمة a عندما تكون أصغر من 0 على منحنى الاقتران g بالمقارنة مع منحنى الاقتران f ؟

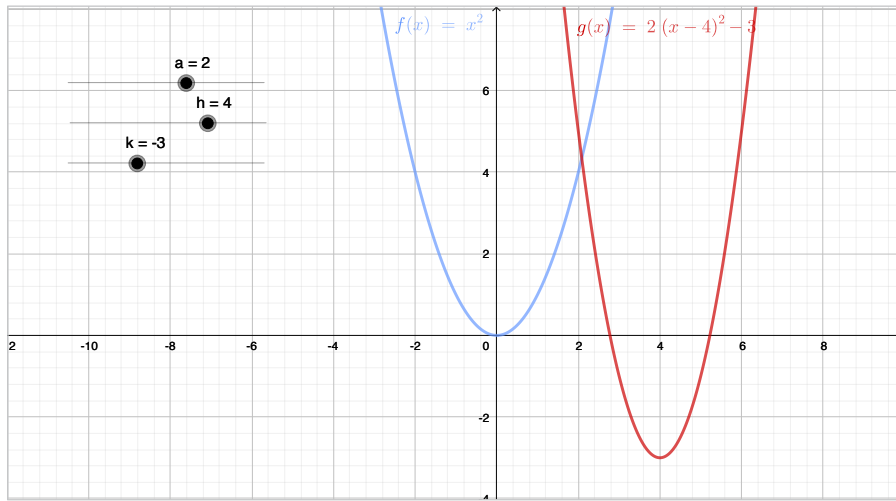
أتعلّم

يمكنني تغيير مواقع المؤشرات في الشاشة وترتيبها فوق بعضها باستعمال خاصيّة النّقر والسحب.

الخطوة 6: أحرّك المؤشّر h بحيث تصبح قيمته مرّة أكبر من 0، ومرّة أقل من 0، ثم أجب عن الأسئلة الآتية:

- في أيّ الاتجاهات يتحرّك الاقتران g عند تحريك المؤشّر h ؟
- ما تأثير تغيير قيمة h عندما تكون أكبر من 0 على منحنى الاقتران g بالمقارنة مع منحنى الاقتران f ؟
- ما تأثير تغيير قيمة h عندما تكون أصغر من 0 على منحنى الاقتران g بالمقارنة مع منحنى الاقتران f ؟

الخطوة 7: أحرّك المؤشّر k بحيث تصبح قيمته مرّة أكبر من 0، ومرّة أقل من 0، ثم أجب عن الأسئلة الآتية:



- في أيّ الاتجاهات يتحرّك الاقتران g عند تحريك المؤشّر k ؟
- ما تأثير تغيير قيمة k عندما تكون أكبر من 0 على منحنى الاقتران g بالمقارنة مع منحنى الاقتران f ؟
- ما تأثير تغيير قيمة k عندما تكون أصغر من 0 على منحنى الاقتران g بالمقارنة مع منحنى الاقتران f ؟

الخطوة 8: أضبط المؤشّرات الثلاثة على أعدادٍ اختارها، ثم أصفُ علاقة منحنى الاقتران g بمنحنى الاقتران الرئيس f .

أتعلّم

يمكنني تغيير لون الاقتران، بالنقر على منحناه واختيار (settings) ثم (color) من القائمة التي ظهرت يمين الشاشة، ومنها أختار لونًا.

التحويلات الهندسيّة للاقتران التربيعي Transformations of Quadratic Function

تمثيل مُنحنيات الاقترانات التربيعيّة الناتجة عن تطبيق تحويل هندسيّ أو أكثر على مُنحني الاقتران الرئيس.

التحويل الهندسيّ، الانسحاب، الانسحاب الرأسيّ، الانسحاب الأفقيّ، التمدّد، الانعكاس، صيغة الرأس.

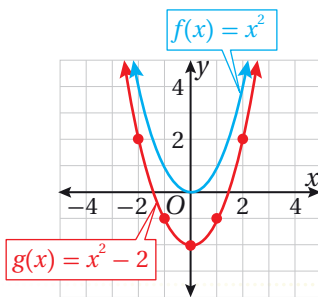
فكرة الدرس



المصطلحات



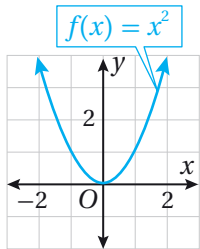
مسألة اليوم



يبيّن الشكل المُجاور التمثيل البيانيّ لمُنحنيّ الاقترانين $f(x) = x^2$ و $g(x) = x^2 - 2$.

ما العلاقة بين مُنحنيّ الاقترانين f و g ؟

الانسحاب



تعلّمت سابقاً أنّ الاقتران الرئيس لعائلة الاقترانات التربيعيّة هو $f(x) = x^2$ ، الذي يأخذ مُنحنه شكل القطع المُكافئ، كما في الشكل المُجاور.

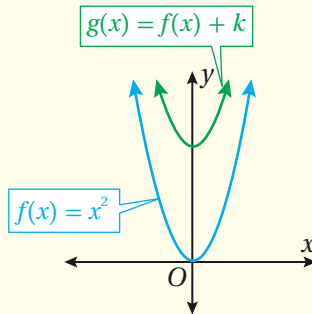
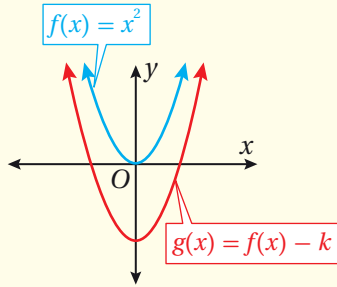
أمّا مُنحنيات الاقترانات التربيعيّة الأخرى فهي ناتجة عن تطبيق تحويل هندسيّ (transformation) أو أكثر على مُنحني الاقتران الرئيس، بحيثُ تغيّر هذه التحويلات الهندسيّة موقع الاقتران الرئيس أو أبعاده.

يُعدّ الانسحاب (translation) أحد التحويلات الهندسيّة التي تؤثر في موقع الاقتران الرئيس وتنقله إمّا إلى الأعلى أو إلى الأسفل أو إلى اليمين أو إلى اليسار دون تغيير في أبعاده.

عند إضافة الثابت الموجب k إلى قاعدة الاقتران الرئيس $f(x)$ أو طرحه منها فإنّ مُنحني الاقتران $f(x) \pm k$ هو مُنحني الاقتران الرئيس مُزاحاً إلى الأعلى أو إلى الأسفل بمقدار k وحدة، ويُسمّى هذا التحويل الانسحاب الرأسيّ (vertical translation).

إذا كان $f(x) = x^2$ وكان k عددًا حقيقيًا موجبًا، فإنَّ:

- مُنحني $g(x) = x^2 + k$ ، هو مُنحني $f(x)$ مُزاحًا إلى الأعلى k وحدةً.
- مُنحني $g(x) = x^2 - k$ ، هو مُنحني $f(x)$ مُزاحًا إلى الأسفل k وحدةً.



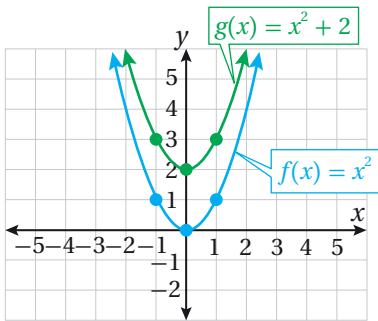
مثال 1

أَصِفْ كيفَ يرتبطُ مُنحني كلِّ اقترانٍ ممَّا يأتي بِمُنحني الاقترانِ الرئيسِ $f(x) = x^2$ ، ثمَّ أُمثِّلْهُ بيانيًّا:

1 $g(x) = x^2 + 2$

مُنحني $g(x)$ هو مُنحني $f(x) = x^2$ مُزاحًا وحدتين إلى الأعلى.
لتمثيل مُنحني $g(x)$ بيانيًّا اتَّبِعِ الإجراءاتِ الآتية:

- أختارُ مجموعةً مِنَ النقاطِ التي تقعُ على مُنحني $f(x) = x^2$.
- أضيفُ 2 للإحداثي y للنقاطِ التي اخترتها.



- أُمثِّلُ النقاطَ الجديدةَ في المستوى الإحداثي، ثمَّ أَصِلُ بينها بِمُنحني أَمْلَسَ، كما يظهرُ في الشكلِ المُجاوِرِ.

أَتَعَلَّمُ

عندَ اختيارِ مجموعةٍ مِنَ النقاطِ على مُنحني الاقترانِ الرئيسِ يُفَضَّلُ أنْ تتوسَّطَ نقطةُ الرأسِ هذهِ النقاطَ. فمثلاً، يمكنُ اختيارُ النقاطِ الآتية:

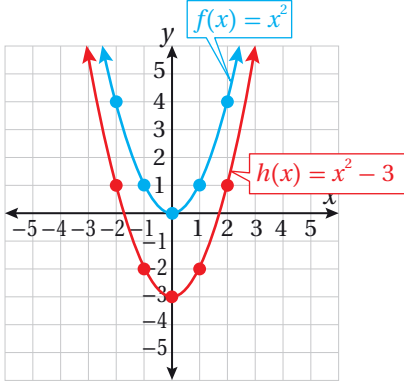
$(-2, 4), (-1, 1),$

$(0, 0), (1, 1), (2, 4)$

2 $h(x) = x^2 - 3$

منحنى $h(x)$ هو منحنى $f(x) = x^2$ مُزاحًا 3 وحداتٍ إلى الأسفل.

لتمثيل منحنى $h(x)$ بيانًا أتبع الإجراءات الآتية:



- أختار مجموعة من النقاط التي تقع على منحنى $f(x) = x^2$.
- أطرُح 3 من الإحداثي y للنقاط التي اخترتها.
- أمثل النقاط الجديدة في المستوى الإحداثي، ثم أصِل بينها بمنحنى أملَس، كما يظهر في الشكل المُجاور.

أتحقق من فهمي

أصف كيف يرتبط منحنى كل اقترانٍ ممّا يأتي بمنحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$ ، ثم أمثله بيانًا:

a) $p(x) = x^2 + 3$

b) $t(x) = x^2 - 4$

إرشاد

أستعمل أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

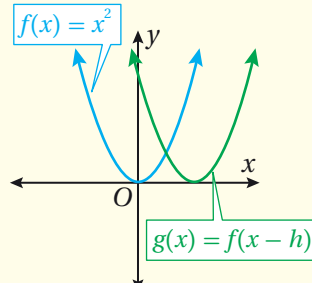
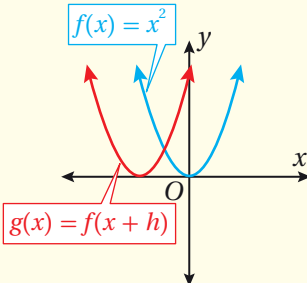
عند إضافة الثابت الموجب h إلى قيم x جميعها في مجال الاقتران $f(x)$ أو طرحه منها، فإن منحنى الاقتران $f(x \pm h)$ هو منحنى الاقتران الرئيس مُزاحًا إلى اليمين أو إلى اليسار بمقدار h وحدة، ويسمى هذا التحويل **الانسحاب الأفقي** (horizontal translation).

الانسحاب الأفقي للاقتران التربيعي

مفهوم أساسي

إذا كان $f(x) = x^2$ وكان h عددًا حقيقيًا موجبًا، فإن:

- منحنى $g(x) = (x - h)^2$ هو منحنى $f(x)$ مُزاحًا إلى اليمين h وحدة.
- منحنى $g(x) = (x + h)^2$ هو منحنى $f(x)$ مُزاحًا إلى اليسار h وحدة.



أفكر

لماذا يُعبّر عن الإزاحة إلى اليمين بالطرح $(x - h)$ ، وإلى اليسار بالجمع $(x + h)$ ؟

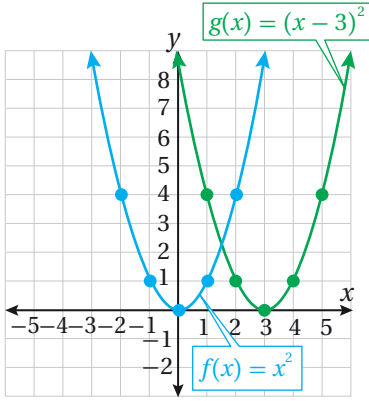
مثال 2

أَصِفْ كيفَ يرتبطُ مُنحني كلِّ اقترانٍ ممَّا يأتي بِمُنحني الاقترانِ الرئيسِ $f(x) = x^2$ ، ثمَّ أُمَثِّلُهُ بيانيًّا:

1 $g(x) = (x-3)^2$

مُنحني $g(x)$ هُوَ مُنحني $f(x) = x^2$ مُزاحًا 3 وحداتٍ إلى اليمين.

لتمثيل مُنحني $g(x)$ بيانيًّا اتَّبِعُ الإجراءاتِ الآتية:

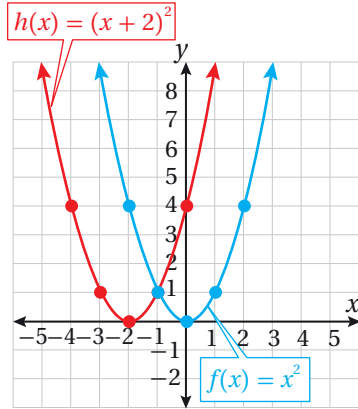


- أختارُ مجموعةً مِنَ النقاطِ تقعُ على مُنحني $f(x) = x^2$.
- أضيفُ 3 إلى الإحداثي x للنقاطِ التي اخترتها.
- أُمَثِّلُ النقاطَ الجديدةَ في المُستوى الإحداثي، ثمَّ أصِلُ بينها بِمُنحني أملَس، كما يظهرُ في الشكلِ المُجاور.

2 $h(x) = (x+2)^2$

مُنحني $h(x)$ هُوَ مُنحني $f(x) = x^2$ مُزاحًا وحدتينٍ إلى اليسار.

لتمثيل مُنحني $h(x)$ بيانيًّا اتَّبِعُ الإجراءاتِ الآتية:



- أختارُ مجموعةً مِنَ النقاطِ التي تقعُ على مُنحني $f(x) = x^2$.
- أطرحُ 2 مِنَ الإحداثي x للنقاطِ التي اخترتها.
- أُمَثِّلُ النقاطَ الجديدةَ في المُستوى الإحداثي، ثمَّ أصِلُ بينها بِمُنحني أملَس، كما يظهرُ في الشكلِ المُجاور.

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي

إرشادٌ

أستعملُ أوراقَ الرسمِ البيانيِّ الموجودةَ في نهايةِ كتابِ التمارين.

أَصِفْ كيفَ يرتبطُ مُنحني كلِّ اقترانٍ ممَّا يأتي بِمُنحني الاقترانِ الرئيسِ $f(x) = x^2$ ، ثمَّ أُمَثِّلُهُ بيانيًّا:

a) $p(x) = (x-4)^2$

b) $t(x) = (x+3)^2$

التمدد

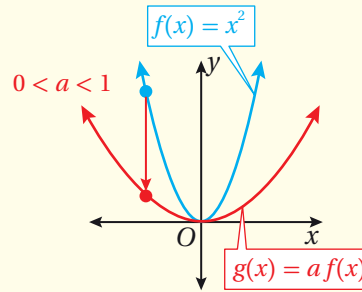
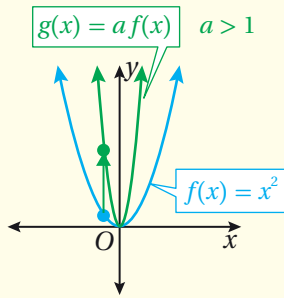
التمدد (dilation) هو تحويل هندسي يؤدي إلى توسيع منحنى الاقتران أو تضيقه، فعند ضرب الاقتران الرئيس $f(x)$ بالثابت a ؛ حيث a عدد حقيقي موجب، فإن منحنى الاقتران $af(x)$ هو توسيع أو تضيق رأسي لمنحنى الاقتران $f(x)$.

تمدد الاقتران التربيعي

مفهوم أساسي

إذا كان $f(x) = x^2$ وكان a عدداً حقيقياً موجباً، فإن منحنى $g(x) = ax^2$ هو:

- توسيع رأسي بمعامل مقداره a لمنحنى $f(x)$ ، إذا كانت $a > 1$.
- تضيق رأسي بمعامل مقداره a لمنحنى $f(x)$ ، إذا كانت $0 < a < 1$.



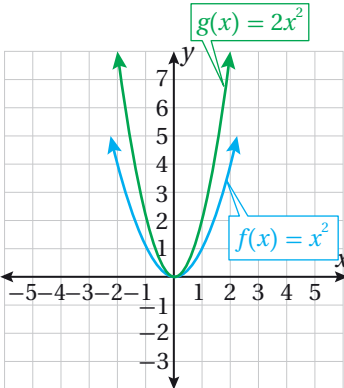
مثال 3

أصف كيف يرتبط منحنى كل اقتران مما يأتي بمنحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$ ، ثم أمثله بيانياً:

1 $g(x) = 2x^2$

منحنى $g(x)$ هو توسيع رأسي لمنحنى $f(x) = x^2$ بمعامل مقداره 2 لتمثيل منحنى $g(x)$ بيانياً اتبع الإجراءات الآتية:

- أختار مجموعة من النقاط تقع على منحنى $f(x) = x^2$.
- أضرب الإحداثي y للنقاط التي اخترتها في 2.
- أمثل النقاط الجديدة في المستوى الإحداثي، ثم أصل بينها بمنحنى أملس، كما يظهر في الشكل المجاور.

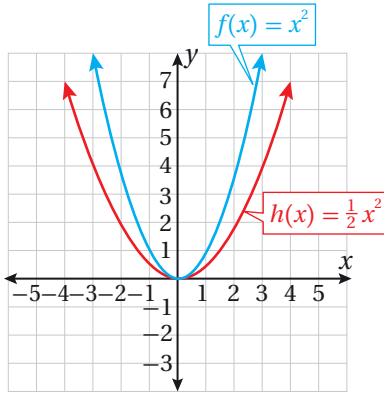


أتعلم

ألاحظ أن منحنى الاقتران التربيعي عندما يتوسع رأسيًا، فإنه يبدو أضيق أفقياً من الاقتران الرئيس.

2 $h(x) = \frac{1}{2}x^2$

مُنحنى $h(x)$ هُوَ تَضْيِيقٌ لِمُنحنى $f(x) = x^2$ بِمَعَامِلٍ مَقْدَارُهُ $\frac{1}{2}$
لتمثيل مُنحنى $h(x)$ بَيَانِيًّا اتَّبِعِ الإِجْرَاءَاتِ الْآتِيَةَ:



- اخْتَارْ مَجْمُوعَةً مِنَ النِّقَاطِ الَّتِي تَقَعُ عَلَى مُنْحَنِى $f(x) = x^2$.
- أَضْرِبْ الْإِحْدَائِيَّ y لِلنِّقَاطِ الَّتِي اخْتَرْتَهَا فِي $\frac{1}{2}$.
- أُمَثِّلِ النِّقَاطَ الْجَدِيدَةَ فِي الْمُسْتَوَى الْإِحْدَائِيَّ، ثُمَّ أَصِلْ بَيْنَهَا بِمُنْحَنِى أَمْلَسَ، كَمَا يَظْهَرُ فِي الشَّكْلِ الْمُجَاوِرِ.

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي

أَصِفْ كَيْفَ يَرْتَبِطُ مُنْحَنِى كُلِّ اقْتِرَانٍ مِمَّا يَأْتِي بِمُنْحَنِى الْاقْتِرَانِ الرَّئِيسِ $f(x) = x^2$ ، ثُمَّ أُمَثِّلُهُ بَيَانِيًّا:

a) $g(x) = 3x^2$

b) $g(x) = \frac{1}{3}x^2$

أَنْعَلَمُ

أَلَا حِظُّ أَنَّ مُنْحَنِى الْاقْتِرَانِ التَّرْبِيعِيِّ عِنْدَمَا يَضِيقُ رَأْسِيًّا، فَإِنَّهُ يَبْدُو أَوْسَعَ أَفْقِيًّا مِنَ الْاقْتِرَانِ الرَّئِيسِ.

إِرْشَادُ

أَسْتَعْمَلُ أَوْرَاقَ الرَّسْمِ الْبَيَانِيَّ الْمَوْجُودَةَ فِي نِهَآيَةِ كِتَابِ التَّمَارِينِ.

الانعكاسُ

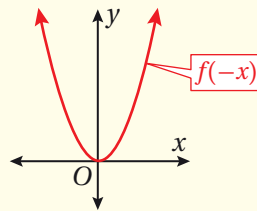
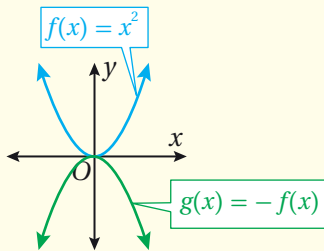
الانعكاسُ (reflection) هُوَ تَحْوِيلٌ هَنْدَسِيٌّ يَعْكِسُ مُنْحَنِى الْاقْتِرَانِ حَوْلَ مُسْتَقِيمٍ مُخَدَّدٍ.

الانعكاسُ

مَفْهُومٌ أَسَاسِيٌّ

إِذَا كَانَ $f(x) = x^2$ فَإِنَّ:

- مُنْحَنِى $g(x) = -f(x)$ ، هُوَ انْعِكَاسُ لِمُنْحَنِى $f(x)$ حَوْلَ الْمَحْوَرِ x .
- مُنْحَنِى $g(x) = f(-x)$ ، هُوَ انْعِكَاسُ لِمُنْحَنِى $f(x)$ حَوْلَ الْمَحْوَرِ y .



أَنْعَلَمُ

انْعِكَاسُ الْاقْتِرَانِ $f(x) = x^2$ حَوْلَ الْمَحْوَرِ y يُعْطِي الْاقْتِرَانِ نَفْسَهُ؛ لِأَنَّ:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2$$

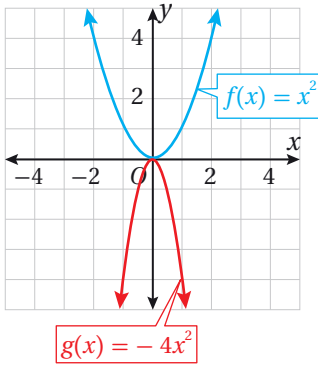
مثال 4

أَصِفْ كيف يرتبط مُنحني كلِّ اقترانٍ ممَّا يأتي بِمُنحني الاقترانِ الرئيس $f(x) = x^2$ ، ثمَّ أُمَثِّلْهُ بيانيًّا:

1 $g(x) = -4x^2$

مُنحني $g(x)$ هُوَ انعكاسٌ لِمُنحني $f(x) = x^2$ حَوْلَ المحورِ x ، ثمَّ توسيعٌ رأسيٌّ بِمعاملٍ مقداره 4

لتمثيل مُنحني $g(x)$ بيانيًّا اتَّبِعُ الإجراءاتِ الآتية:

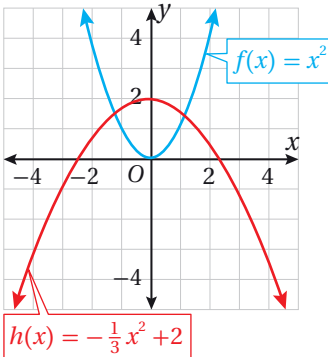


- أختار مجموعةً مِنَ النقاطِ تقعُ على مُنحني $f(x) = x^2$.
- أضربُ الإحداثيَّ y للنقاطِ التي اخترتها في -4
- أُمَثِّلُ النقاطَ الجديدةَ في المُستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أَصِلُ بينها بِمُنحنيٍّ أَمْلَسَ، كما يظهرُ في الشكلِ المُجاوِرِ.

2 $h(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2$

مُنحني $h(x)$ هُوَ انعكاسٌ لِمُنحني $f(x) = x^2$ حَوْلَ المحورِ x ، ثمَّ تضيقٌ رأسيٌّ بِمعاملٍ مقداره $\frac{1}{3}$ ، ثمَّ انسحابٌ وحدتَينِ إلى الأعلى.

لتمثيل مُنحني $h(x)$ بيانيًّا اتَّبِعُ الإجراءاتِ الآتية:



- أختار مجموعةً مِنَ النقاطِ التي تقعُ على مُنحني $f(x) = x^2$.
- أضربُ الإحداثيَّ y للنقاطِ التي اخترتها في $-\frac{1}{3}$
- أَضِفُ 2 إلى الإحداثيَّ y للنقاطِ الناتجةِ مِنَ الخطوةِ السابقةِ.
- أُمَثِّلُ النقاطَ مِنَ الخطوةِ السابقةِ في المُستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أَصِلُ بينها بِمُنحنيٍّ أَمْلَسَ، كما يظهرُ في الشكلِ المُجاوِرِ.

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي

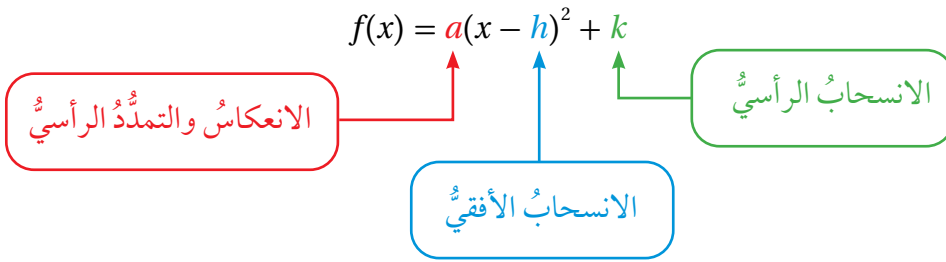
أَصِفْ كَيْفَ يَرْتَبِطُ مُنْحَنِي كُلِّ اقْتِرَانٍ مِمَّا يَأْتِي بِمُنْحَنِي الْاقْتِرَانِ الرَّئِيسِ $f(x) = x^2$ ، ثُمَّ أُمَثِّلْهُ بَيَانِيًّا:

a) $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$

b) $g(x) = -x^2 - 4$

كِتَابَةُ التَّحْوِيلِ الْهَنْدَسِيِّ لِلاقْتِرَانِ التَّرْبِيعِيِّ

تُسَمَّى الصِّيغَةُ $f(x) = a(x-h)^2 + k$ **صِيغَةُ الرَّأْسِ** (vertex form) للاقْتِرَانِ التَّرْبِيعِيِّ؛ حَيْثُ $a \neq 0$ وَ (h, k) هُوَ رَأْسُ الْقَطْعِ الْمُكَافِئِ، وَ يُمْكِنُ اسْتِعْمَالُهَا لِكِتَابَةِ قَاعِدَةِ الْاقْتِرَانِ التَّرْبِيعِيِّ النَّاتِجِ مِنْ تَطْبِيقِ تَحْوِيلِ هَنْدَسِيٍّ أَوْ أَكْثَرَ عَلَى الْاقْتِرَانِ التَّرْبِيعِيِّ الرَّئِيسِ، بِحَيْثُ يُمَثِّلُ h الْانْسَحَابَ الْأَفْقِيَّ، وَيُمَثِّلُ k الْانْسَحَابَ الرَّأْسِيَّ، أَمَّا a فَيُمَثِّلُ الْانْعِكَاسَ وَالتَّمَدُّدَ الرَّأْسِيَّ.



أَتَعَلَّمُ

سُمِّيَتِ الصِّيغَةُ

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

بصيغة الرأس للاقْتِرَانِ

التَّرْبِيعِيِّ؛ لِأَنَّهُ يُمْكِنُ مِنْ

خِلَالِهَا تَحْدِيدُ الرَّأْسِ

بسهولة.

مثال 5

إِذَا كَانَ مُنْحَنِي الْاقْتِرَانِ $g(x)$ نَاتِجًا مِنْ انْعِكَاسِ مُنْحَنِي الْاقْتِرَانِ الرَّئِيسِ $f(x) = x^2$ حَوْلَ الْمَحْوَرِ x ، ثُمَّ تَوْسِيعِ رَأْسِيٍّ بِمَعَامِلٍ مَقْدَارُهُ 2، ثُمَّ انْسَحَابٍ إِلَى الْيَسَارِ بِمَقْدَارٍ وَحْدَتَيْنِ، ثُمَّ انْسَحَابٍ إِلَى الْأَعْلَى بِمَقْدَارٍ 3 وَحَدَاتٍ، فَأُجِيبُ عَنِ الْأَسْئَلَةِ الْآتِيَةِ:

أَكْتُبْ قَاعِدَةَ الْاقْتِرَانِ $g(x)$ بِاسْتِعْمَالِ صِيغَةِ الرَّأْسِ.

- بما أَنَّ الْانْعِكَاسَ حَوْلَ الْمَحْوَرِ x ، وَمَعَامِلَ التَّوْسِيعِ الرَّأْسِيِّ 2، فَإِنَّ: $a = -2$
- بما أَنَّ الْانْسَحَابَ الْأَفْقِيَّ إِلَى الْيَسَارِ بِمَقْدَارٍ 2، فَإِنَّ: $h = -2$
- بما أَنَّ الْانْسَحَابَ الرَّأْسِيَّ إِلَى الْأَعْلَى بِمَقْدَارٍ 3، فَإِنَّ: $k = 3$

أَتَعَلَّمُ

أُسْتَعْمِلُ الْإِشَارَةَ السَّالِبَةَ

لِلدَّلَالَةِ عَلَى الْانْعِكَاسِ

حَوْلَ الْمَحْوَرِ x ،

وَالانْسَحَابِ إِلَى الْيَسَارِ

وَالِإِلَى الْأَسْفَلِ.

$$g(x) = a(x-h)^2 + k$$

صيغة الرأس للاقتران التربيعي

$$= -2(x - (-2))^2 + 3$$

بتعويض $a = -2, h = -2, k = 3$

$$= -2(x + 2)^2 + 3$$

بالتبسيط

2 أجد إحداثيي رأس القطع، ومعادلة محور التماثل، والقيمة العظمى أو الصغرى للاقتران $g(x)$.

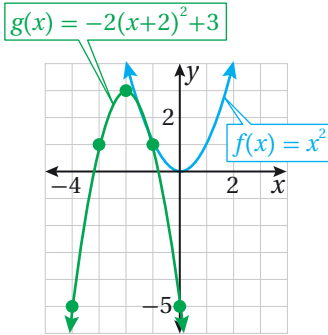
بما أن $g(x) = -2(x + 2)^2 + 3$ ، فإن:

- رأس القطع $(-2, 3)$
- معادلة محور التماثل $x = -2$
- القيمة العظمى 3

أذكر

بما أن $a < 0$ ، فإن رأس القطع المكافئ يمثل نقطة القيمة العظمى.

3 أمثل الاقتران $g(x)$ بيانياً.



يمكنني استعمال التحويلات الهندسية لتمثيل منحنى الاقتران، كما في الشكل المجاور.

أتحقق من فهمي

إذا كان منحنى الاقتران $g(x)$ ناتجاً من انعكاس منحنى الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$ حول المحور x ، ثم تضيق رأسي بمعامل مقداره $\frac{1}{2}$ ، ثم انسحاب إلى اليمين بمقدار 3 وحدات، ثم انسحاب إلى الأسفل بمقدار 5 وحدات، فأجب عن الأسئلة الآتية:

(a) أكتب قاعدة الاقتران $g(x)$ باستعمال صيغة الرأس.

(b) أجد إحداثيي رأس القطع، ومعادلة محور التماثل، والقيمة العظمى أو الصغرى للاقتان $g(x)$.

(c) أمثل الاقتران $g(x)$ بيانياً.

إرشاد

أستعمل أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

أَصِفْ كَيْفَ يَرْتَبِطُ مُنْحَنِي كُلِّ اقْتِرَانٍ مِمَّا يَأْتِي بِمُنْحَنِ الْاقْتِرَانِ الرَّئِيسِ $f(x) = x^2$ ، ثُمَّ أُمَثِّلْهُ بَيَانِيًّا:

1 $h(x) = x^2 + 5$

2 $g(x) = x^2 - 6$

3 $h(x) = (x - 2)^2$

4 $g(x) = (x + 1)^2$

5 $v(x) = (x - 1)^2 + 3$

6 $u(x) = (x + 2)^2 - 4$

7 $l(x) = \frac{1}{4}x^2$

8 $m(x) = 2x^2 - 3$

9 $h(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 1$

10 $g(x) = -4(x + 2)^2 + 3$

11 $p(x) = (x - 7)^2 + 1$

12 $t(x) = 2(x - 3)^2 - 10$

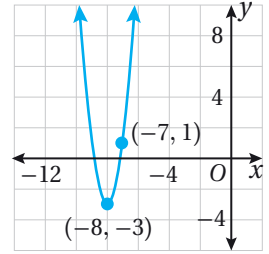
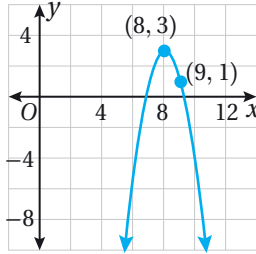
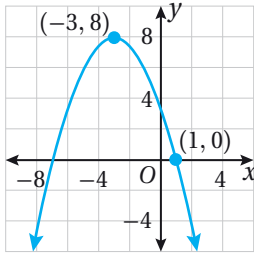
إِرْشَادٌ: أَسْتَعْمَلُ أَوْرَاقَ الرَّسْمِ الْبَيَانِيِّ الْمَوْجُودَةَ فِي نِهَآيَةِ كِتَابِ التَّمَارِينِ.

أَصِلُ الْاقْتِرَانِ بِتَمَثِيلِهِ الْبَيَانِيِّ فِي كُلِّ مِمَّا يَأْتِي:

13 $a(x) = 4(x + 8)^2 - 3$

14 $b(x) = -2(x - 8)^2 + 3$

15 $c(x) = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 + 8$



إِذَا كَانَ مُنْحَنِي الْاقْتِرَانِ $g(x)$ نَاتِجًا مِنْ انْعِكَاسِ مُنْحَنِ الْاقْتِرَانِ الرَّئِيسِ $f(x) = x^2$ حَوْلَ الْمَحْوَرِ x ، ثُمَّ تَوْسِيعِ رَأْسِيٍّ بِمَعَامِلٍ مَقْدَارُهُ 4، ثُمَّ انْسِحَابٍ إِلَى الْأَعْلَى بِمِقْدَارٍ وَحْدَتَيْنِ، فَأُجِيبُ عَنِ الْأَسْئَلَةِ الْآتِيَةِ:

16 أَكْتُبْ قَاعِدَةَ الْاقْتِرَانِ $g(x)$ بِاسْتِعْمَالِ صِيغَةِ الرَّأْسِ.

17 أَجِدْ إِحْدَاثِيَّ رَأْسِ الْقَطْعِ، وَمُعَادَلَةَ مَحْوَرِ التَّمَاثُلِ، وَالْقِيَمَةَ الْعُظْمَى أَوِ الصُّغْرَى لِلْاقْتِرَانِ $g(x)$.

18 أُمَثِّلُ الْاقْتِرَانِ $g(x)$ بَيَانِيًّا.

آليات ثقيلة: يُمثّل الاقتران $l(t) = -t^2 + 200$ العلاقة بين عدد لترات الوقود $l(t)$ المتبقية في خزان آليّة ثقيلة والزمن t بالساعات خلال مدّة عملها؛ حيث $t \geq 0$.



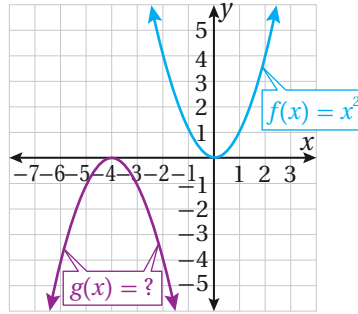
19 ماذا تُمثّل نقطة رأس القطع المكافئ في سياق المسألة؟ اُبْرّر إجابتي.

20 هل يمكن أن يكون معامل t^2 موجباً في مواقف حياتيّة مشابهة؟ اُبْرّر إجابتي.

21 أصف العلاقة بين مُنحني الاقتران $l(t)$ ، و مُنحني الاقتران الأصلي $f(t) = t^2$.

مهارات التفكير العليا

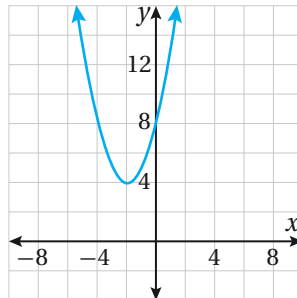
تبرير: في الشكل الآتي، إذا كان مُنحني الاقتران g ناتجاً من تحويل هندسيّ أو أكثر لِمُنحني الاقتران f ، فأجب عن السؤالين الآتيين:



22 أصف التحويلات الهندسيّة التي مرّ بها مُنحني الاقتران f ليتّجّ الاقتران g ، مُبرِّراً إجابتي.

23 أكتب قاعدة الاقتران g بصيغة الرأس.

24 **تحدّ:** أكتب بصيغة الرأس قاعدة الاقتران المُمثّل بيانياً في الشكل الآتي:



اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 مجال العلاقة:

هو: $\{(3, 5), (2, -2), (1, 5), (0, -2), (1, 2)\}$

a) $\{0, 1, 2, 3\}$ b) $\{-2, 2, 5\}$

c) $\{0, 2, 3\}$ d) $\{-2, 0, 1\}$

2 إذا كان $f(x) = x^2 + 2x - 3$ ، فإن $f(1)$ تساوي:

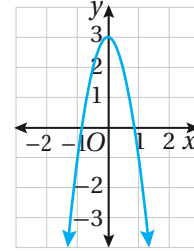
a) -3 b) -1 c) 0 d) 3

3 معادلته محور التماثل للاقتراح $f(x) = x^2 - 10x + 1$:

a) $y = 5$ b) $x = 10$

c) $x = 5$ d) $x = -5$

4 أي الاقترانات الآتية يُعبر عن المنحنى المُمثل بيانياً؟



a) $f(x) = -4x^2$ b) $f(x) = -4x^2 + 3$

c) $f(x) = x^2 + 3$ d) $f(x) = 1 - 4x^2$

5 إحداثيًا نقطة رأس القطع المكافئ للاقتراح التربيعي

$$y = x^2 + 2x + 3$$

a) $(0, 3)$

b) $(2, 11)$

c) $(1, 6)$

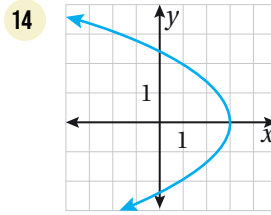
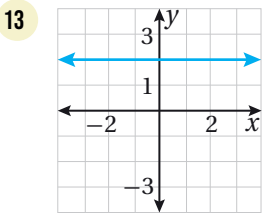
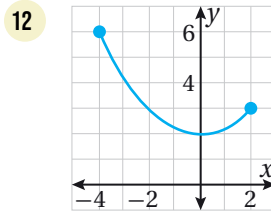
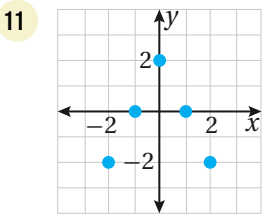
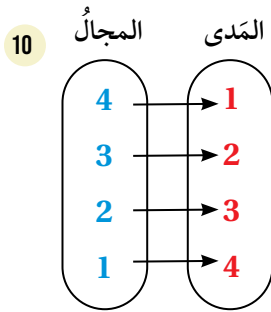
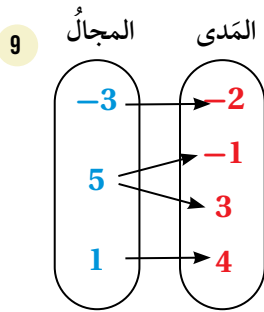
d) $(-1, 2)$

أحدّد مجال كل علاقة مما يأتي ومداها، ثمّ أحدّد ما إذا كانت تُمثّل اقتراناً أم لا:

6 $\{(-1, 6), (4, 2), (2, 36), (1, 6)\}$

7 $\{(5, -4), (-2, 3), (5, -1), (2, 3)\}$

8	x	-4	-2	0	3
	y	-2	1	2	1



15 **كرة:** رَكَلَ خليلُ كرةً عن سطح الأرض. إذا كانت العلاقة بين ارتفاع الكرة عن سطح الأرض h بالمتري والزمن t بالثواني مُعطاةً بالاقتران $h = -5t^2 + 17t$ ، فأجد أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة والزمن الذي تحتاج إليه حتى تصل إلى أقصى ارتفاع.

قذيفة: يُمثِّل الاقتران $h(t) = -16(t - 6)^2 + 576$ ارتفاع قذيفة عن سطح الأرض بالأمتار، بعد t ثانية من قذفها.

27 أجد ارتفاع القذيفة بعد 4 ثوانٍ من ركلها.

28 أجد أقصى ارتفاع تصل إليه القذيفة.

29 أصف علاقة مُنحني الاقتران $h(t)$ بمنحني الاقتران $f(t) = t^2$.

تدريب على الاختبارات الدولية

30 التحويلات اللذان أثرا في مُنحني الاقتران $f(x) = x^2$ للحصول على مُنحني الاقتران $h(x) = 2(x-3)^2$ ، هما:

(a) تضيق رأسي وانسحاب 3 وحدات إلى اليمين.

(b) تضيق رأسي وانسحاب 3 وحدات إلى اليسار.

(c) توسيع رأسي وانسحاب 3 وحدات إلى اليسار.

(d) توسيع رأسي وانسحاب 3 وحدات إلى اليمين.

31 مدى الاقتران التربيعي $f(x) = 12x - 3x^2 + 3$

(a) $\{y: y \leq 15\}$ (b) $\{y: y \geq 15\}$

(c) $\{y: y \leq 3\}$ (d) $\{y: y \geq 3\}$

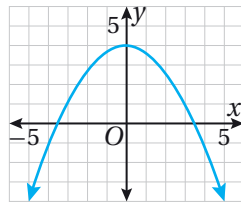
32 أي الاقترانات الآتية تُمثِّل القطع المُكافئ في الشكل الآتي؟

(a) $y = -\frac{1}{3}x^2 - 4$

(b) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 4$

(c) $y = -3x^2 - 4$

(d) $y = 3x^2 + 4$



أجد رأس ومعادلة محور التماثل، والقيمة العظمى أو الصغرى، ومجال الاقترانات التربيعية الآتية ومداها، ثم أمثلها بيانياً:

16 $f(x) = 2x^2 + 12x + 4$

17 $f(x) = -8x^2 - 16x - 9$

18 $f(x) = 3x^2 - 18x + 15$

19 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 11x + 6$

أصف كيف يرتبط مُنحني كل اقتران مما يأتي بمنحني الاقتران الرئيس $f(x) = x^2$ ، ثم أمثلها بيانياً:

20 $p(x) = 4(x - 6)^2 - 9$

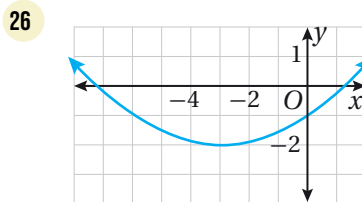
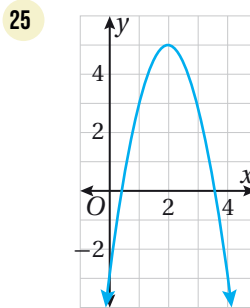
21 $p(x) = \frac{1}{2}(x + 8)^2$

22 $t(x) = -3x^2 + 5$

23 $h(x) = (x + 5)^5$

24 $g(x) = -(x + 4)^2 - 3$

أجد رأس ومعادلة محور التماثل، والقيمة العظمى أو الصغرى، ومجال كل من القطوع المُكافئة الآتية ومداها:



ما أهميّة هذه
الوحدة؟

تُستعملُ المُعادلاتُ كثيرًا لنمذجة حركة الأجسام في
المواقف الحياتيّة والعمليّة، ويمكنُ من خلال حلّ تلك
المُعادلات تحديد قيم مهمّة في هذه المواقف، مثل:
تحديد زمن تحليق الجسم المقذوف قبل ارتطامه
بالأرض، أو المسافة الأفقيّة التي تقطعها
الدلافين عند قفزها خارج الماء.

سأتعلّم في هذه الوحدة:

- ◀ حلّ المُعادلة التربيعيّة بيانيًا.
- ◀ حلّ المُعادلة التربيعيّة بالتحليل.
- ◀ حلّ المُعادلة التربيعيّة بإكمال المربع.
- ◀ حلّ المُعادلة التربيعيّة باستعمال القانون العامّ.
- ◀ حلّ مُعادلات خاصّة.

تعلّمتُ سابقًا:

- ✓ تحليل المقادير الجبريّة بإخراج العامل
المُشترك الأكبر وتجميع الحدود.
- ✓ تحليل الفرق بين مربّعين حدّين، وتحليل
ثلاثيّ الحدود على الصورة $x^2 + bx + c$
- ✓ التمثيل البيانيّ لمُنحنى الاقتران التربيعيّ.



بناءً منجنيق، وكتابةً الاقتران المُمثل لحركة الكرة المقذوفة منه، وحلّ المعادلة التربيعية المرتبطة بالاقتران.

أعواد آيس كريم، سيليكون لاصق، مطاطات، غطاء بلاستيكي، كرة مطاطية، ساعة مؤقت.

فكرة المشروع



المواد والأدوات



خطوات تنفيذ المشروع:

1 أشاهد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز المجاور.

2 أنفذ خطوات صناعة المنجنيق من أعواد الآيس كريم، كما في المقطع المرئي.

3 باستعمال المنجنيق، أطلق كرة مطاطية بجانب حائط، وأحدّد أقصى ارتفاع تصل إليه، واستعمل الساعة المؤقتة لأحدّد بعد كم ثانية وصلت إلى سطح الأرض.

4 استعمل المعلومات من الخطوة السابقة لكتابة قاعدة الاقتران التربيعي المُمثل لمنحنى القطع المكافئ، الذي يُمثل ارتفاع الكرة المطاطية بالنسبة إلى الزمن، مُستعينًا بالصيغة: $f(t) = -5t^2 + vt + h$ ؛ حيث t الزمن بالثواني، و $f(t)$ ارتفاع الكرة بالأمتار، و v السرعة الابتدائية، و h الارتفاع الابتدائي للكرة عن سطح الأرض.

5 أبحث في شبكة الإنترنت عن تصميمين آخرين للمنجنيق من أعواد الآيس كريم باستعمال الكلمات المفتاحية: catapult with popsicle sticks، وأتبع الخطوات اللازمة لتنفيذ التصميمين.

6 أطلق الكرة الزجاجة باستعمال كل من التصميمين، وأنفذ الخطوتين 3 و 4 مرة أخرى، وأقارن بين الاقترانات الناتجة من حيث: أقصى ارتفاع، والمدة التي بقيت فيها الكرة في الهواء.

7 أكتب المعادلة التربيعية الخاصة بالتصاميم الثلاثة، وأحلّها جبريًا باستعمال الطرائق الآتية (إن أمكن): التمثيل البياني، والتحليل، وإكمال المربع، والقانون العام، مُبينًا أي الطرائق لا يمكن حلّ المعادلات التربيعية بها.

عرض النتائج:

أعدّ عرضًا تقديميًا أُبين فيه خطوات تنفيذ المشروع مُوضّحةً بالصور، وبعض الصعوبات التي واجهتها في أثناء العمل.



حلُّ المُعادلاتِ التربيعيّةِ بيانيًّا Solving Quadratic Equations by Graphing



حلُّ المُعادلةِ التربيعيّةِ بيانيًّا.

المُعادلةُ التربيعيّةُ، جذورُ المُعادلةِ، أصفارُ الاقترانِ.

يُمثِّلُ الاقترانُ $h(t) = -5t^2 + 10t$ ارتفاعَ دولفينٍ بالمتريّ فوق سطحِ الماءِ بعدَ t ثانيةً من ظهوره فوق هذا السطح. كم ثانيةً يبقى الدولفينُ خارجَ الماءِ؟

فكرةُ الدرس



المصطلحاتُ



مسألةُ اليوم



حلُّ المُعادلةِ التربيعيّةِ بيانيًّا

المُعادلةُ التربيعيّةُ (quadratic equation) مُعادلةٌ يمكنُ كتابتها على الصورة:
 $ax^2 + bx + c = 0$ ، حيث $a \neq 0$ ، والتي تُسمّى الصورة القياسية للمُعادلة التربيعيّة، ولكلّ مُعادلةٍ تربيعيّةٍ اقترانٌ تربيعيٌّ مُرتبطٌ بها يمكنُ الحصولُ عليه باستبدالِ $f(x)$ بالعددِ 0.

المُعادلةُ التربيعيّةُ

$$2x^2 - 3x + 8 = 0$$

الاقترانُ التربيعيُّ المُرتبطُ بالمُعادلةِ

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 8$$

يمكنُ حلُّ المُعادلةِ التربيعيّةِ بتحديدِ قِيَمِ x التي يقطعُ عندها منحنى الاقترانِ التربيعيِّ المُرتبطُ بالمُعادلةِ المحورَ x ، وتُسمّى تلك القِيَمُ **جذورُ المُعادلةِ** (roots of the equation) أو **أصفارُ الاقترانِ** (zeros of the function)، ويمكنُ أن يكونَ للمُعادلةِ التربيعيّةِ حلّانِ حقيقيّانِ مختلفانِ، أو حلٌّ حقيقيٌّ واحدٌ، أو ألا يكونَ لها حلولٌ حقيقيّةٌ. يمكنُ حلُّ المُعادلةِ التربيعيّةِ بيانيًّا باتّباعِ الخطواتِ الآتية:

حلُّ المُعادلةِ التربيعيّةِ بيانيًّا

مفهومٌ أساسيٌّ

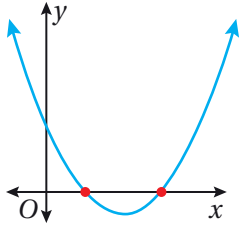
لحلِّ المُعادلاتِ التربيعيّةِ بيانيًّا اتّبعِ الخطواتِ الآتية:

الخطوةُ 1: أكتب المُعادلةَ بالصورة القياسية $ax^2 + bx + c = 0$

الخطوةُ 2: أمثّل بيانيًّا الاقترانَ التربيعيَّ المُرتبطَ بالمُعادلةِ وهو: $f(x) = ax^2 + bx + c$

الخطوةُ 3: أجد قِيَمَ x التي يقطعُ عندها منحنى الاقترانِ التربيعيِّ المُرتبطَ بالمُعادلةِ المحورَ x ، إن وُجدت، وهي أصفارُ الاقترانِ المُرتبطِ، التي تُعدُّ حلولَ المُعادلةِ.

الوحدة 3



حلُّ المعادلة التربيعية بيانيًا: حلان حقيقيان مختلفان

يكون للمعادلة التربيعية حلان حقيقيان، إذا قطع منحنى الاقتران التربيعي المرتبط المحور x في نقطتين، كما في الشكل المُجاور.

مثال 1

أحلُّ المعادلة $x^2 + 2x = 3$ بيانيًا.

الخطوة 1: أكتب المعادلة بالصورة القياسية، ثم أكتب الاقتران التربيعي المرتبط بالمعادلة.

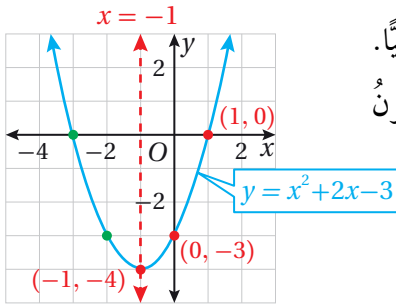
$$x^2 + 2x = 3$$

المعادلة المُعطاة

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

ب طرح 3 من طرفي المعادلة

إذن، الاقتران التربيعي المرتبط بالمعادلة: $f(x) = x^2 + 2x - 3$



الخطوة 2: أمثل الاقتران التربيعي المرتبط بالمعادلة بيانيًا.

• بما أن $a > 0$ ، فالتمثيل البياني للقطع المكافئ يكون مفتوحًا للأعلى.

• معادلة محور التماثل: $x = -1$

• إحداثي الرأس: $(-1, -4)$

• نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y ، هي: $(0, -3)$ ، ونقطة أخرى تقع في الجانب الذي يقع فيه المقطع y من محور التماثل وهي مثلًا: $(1, 0)$.

• أمثل الرأس والنقطتين في المستوى الإحداثي، ثم أستعمل التماثل لأعكسهما.

الخطوة 3: أجد القيم التي يقطع عندها المنحنى المحور x .

يقطع المنحنى محور x عند $1, -3$

إذن، للمعادلة جذران، هما: $1, -3$

التحقق: أتحقق من صحة كل من الحلين بالتعويض في المعادلة الأصلية.

$$x^2 + 2x = 3$$

المعادلة المُعطاة

$$x^2 + 2x = 3$$

$$(-3)^2 + 2(-3) \stackrel{?}{=} 3$$

بالتعويض

$$(1)^2 + 2(1) \stackrel{?}{=} 3$$

$x = -3$ or $x = 1$

$$3 = 3 \quad \checkmark$$

بالتبسيط

$$3 = 3 \quad \checkmark$$

أتذكر

القطع المكافئ مفتوح للأعلى إذا كانت $a > 0$ ومفتوح للأسفل إذا كانت $a < 0$.

أتذكر

معادلة محور التماثل لمنحنى الاقتران التربيعي $f(x) = ax^2 + bx + c$ حيث $a \neq 0$ هي $x = -\frac{b}{2a}$ رأسه $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

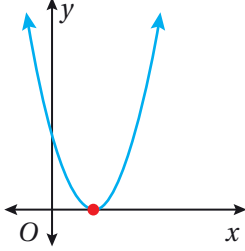
أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي

أَحْلُ الْمُعادِلَة $2x^2 - 2 = 0$ بَيَانِيًا.

إرشاد

أستعمل أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

حلّ المُعادلة التربيعية بيانيًا: حلّ حقيقي واحد.



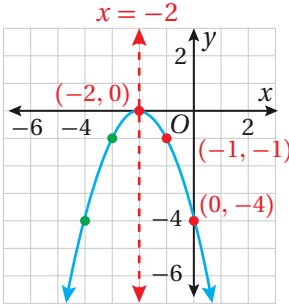
يكون للمُعادلة التربيعية حلّ حقيقي واحد إذا قطع منحنى الاقتران التربيعي المُرتبط المحور x في نقطة واحدة فقط، كما في الشكل المُجاور.

مثال 2

أَحْلُ الْمُعادِلَة $-x^2 - 4x - 4 = 0$ بَيَانِيًا.

الخطوة 1: أكتب المُعادلة بالصورة القياسية، ثم أكتب الاقتران التربيعي المُرتبط بالمُعادلة. ألاحظ أن المُعادلة مكتوبة بالصورة القياسية. إذن، الاقتران التربيعي المُرتبط بالمُعادلة:

$$f(x) = -x^2 - 4x - 4$$



الخطوة 2: أمثل الاقتران المُرتبط بالمُعادلة بيانيًا.

- بما أن $a < 0$ ، فالتمثيل البياني للقطع المكافئ يكون مفتوحًا للأسفل.
- مُعادلة محور التماثل: $x = -2$
- إحداثي الرأس: $(-2, 0)$

- نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y ، هي: $(0, -4)$ ، ونقطة أخرى تقع في الجانب الذي يقع فيه المقطع y من محور التماثل وهي مثلاً: $(-1, -1)$.
- أمثل الرأس والنقطتين في المستوى الإحداثي، ثم أستعمل التماثل لأعكسهما.

الخطوة 3: أجد القيم التي يقطع عندها المنحنى المحور x .

يقطع المنحنى المحور x عند -2

إذن، للمُعادلة جذرٌ وحيدٌ، هو: $x = -2$

أَتَعَلَّم

ألاحظ أن الإحداثي x لرأس القطع هو حلّ المُعادلة الوحيد، عندما يكون للمُعادلة حلّ واحد فقط.

التحقّق: أتحقّق مِنْ صِحَّةِ الحُلِّ الوحيدِ بالتعويضِ في المُعادلةِ الأصليّةِ.

$$-x^2 - 4x - 4 = 0$$

المُعادلةُ المُعطاةُ

$$-(-2)^2 - 4(-2) - 4 \stackrel{?}{=} 0$$

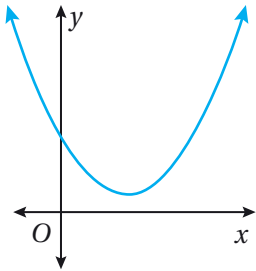
بالتعويضِ $x = -2$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

بالتبسيط

أتحقّق مِنْ فهمي

أحلُّ المُعادلةِ $x^2 - 8x = -16$ بيانياً.



حلُّ المُعادلةِ التربيعيّةِ بيانياً: لا توجد حلولٌ حقيقيّةٌ.

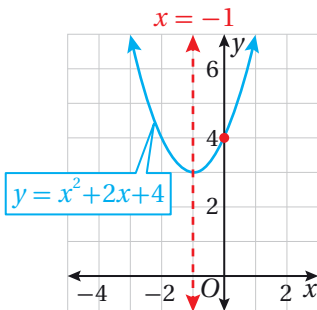
لا يكونُ للمُعادلةِ التربيعيّةِ حلٌّ حقيقيٌّ إذا لم يقطعْ منحنى الاقترانِ التربيعيّ المرتبطَ بالمُعادلةِ التربيعيّةِ المحوَر x ، كما في الشكلِ المُجاوِرِ.

مثال 3

أحلُّ المُعادلةِ $x^2 + 2x + 4 = 0$ بيانياً.

الخطوة 1: أكتبُ المُعادلةَ بالصورةِ القياسية، ثمَّ أكتبُ الاقترانَ التربيعيّ المرتبطَ بالمُعادلةِ. ألاحظُ أنَّ المُعادلةَ مكتوبةٌ بالصورةِ القياسية. إذن، الاقترانُ التربيعيّ المرتبطُ بالمُعادلةِ:

$$f(x) = x^2 + 2x + 4$$



الخطوة 2: أمثّل الاقترانَ المرتبطَ بالمُعادلةِ بيانياً.

- بما أن $a > 0$ ، فالتمثيلُ البيانيُّ للقطعِ المكافئِ يكونُ مفتوحاً للأعلى.
- مُعادلةُ محوَر التماثلِ: $x = -1$
- إحداثيّ الرأسِ: $(-1, 3)$
- نقطةُ تقاطعِ الاقترانِ مع المحوَر y ، هي: $(0, 4)$ ، ونقطةٌ أخرى تقعُ في الجانبِ الذي يقعُ فيه المقطعُ y من محوَر التماثلِ وهي مثلاً: $(1, 7)$.
- أمثّل الرأسَ والنقطتينِ في المستوى الإحداثيّ، ثمَّ أستعملُ التماثلَ لأعكسَهُما.

الخطوة 3: أجد القيم التي يقطع عندها المنحنى المحور x .

ألاحظ أن التمثيل البياني للاقتران المرتبط لا يقطع المحور x . إذن، لا يوجد جذر حقيقي للمعادلة.

أتحقق من فهمي

أحلل المعادلة $x^2 + 5 = 4x$ بيانياً.

إرشاد

أستعمل أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

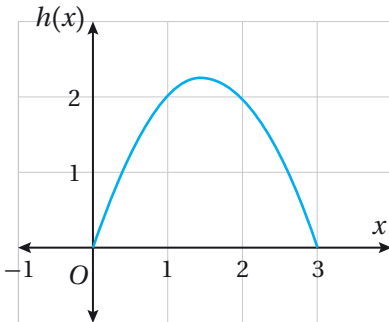
يأخذ مسار بعض المقذوفات شكل القطع المكافئ؛ لذا يمكن استعمال خصائص الاقترانات التربيعية لتحديد زمن بقاء المقذوف في الهواء والمسافة الأفقية التي يقطعها.

مثال 4 : من الحياة

نوافير: يُمثل الاقتران $h(x) = 3x - x^2$ ارتفاع قطرة ماء متدفقة من فوهة نافورة بالأمتر عندما تكون على بُعد x متراً من الفوهة. أستعمل التمثيل البياني لأجد أبعد نقطة أفقية تصل إليها قطرة الماء.

يكون ارتفاع قطرة الماء عند خروجها من فوهة النافورة 0 m، ويكون ارتفاعها 0 m عند عودتها إلى سطح الأرض؛ لذا فإن أبعد نقطة أفقية تصلها قطرة الماء تكون عندما يقطع الاقتران $h(x) = 3x - x^2$ المحور x .

إذن، أحلل المعادلة $3x - x^2 = 0$ بيانياً لأحدد هاتين القيمتين.



الخطوة 1: أُمثل الاقتران $h(x) = 3x - x^2$ بيانياً.

الخطوة 2: أجد القيم التي يقطع عندها المنحنى المحور x .

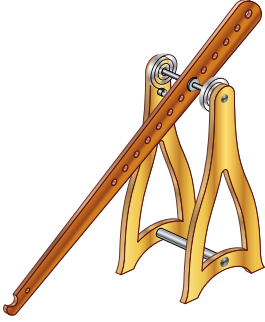
بما أن المقطع x للاقتران هو 3، فإن أبعد نقطة تصل إليها قطرة الماء هي على بُعد 3 m من النافورة.

معلومة

برع المهندسون المسلمون في العصر الأندلسي في تصميم النوافير، وابتكروا لها طرائق ميكانيكية معقدة لضخ الماء من غير مُحركات.

أفكر

لماذا اُكتفي بتمثيل الاقتران فوق المحور x الموجب؟



أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي

فيزياء: في تجربة فيزيائية، قذفت صفاة كتلة إلى الأعلى، فَمَثَّلَ الاقتران $h(t) = -5t^2 + 20t$ ارتفاع هذه الكتلة بالأمتار، بعد t ثانية من قذفها. أَسْتَعْمَلُ التمثيل البياني لأَجِدَ زمن بقاء الكتلة في الهواء.

أَتَدَرَّبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ

أَحْلُ كُلًّا مِنَ الْمُعَادَلَاتِ الْآتِيَةِ بِيَانِيًّا:

1 $x^2 - 9 = 0$

2 $x^2 - 5x = 0$

3 $-12x^2 = 16$

4 $-x^2 + 12x = 36$

5 $x^2 - 6x + 9 = 0$

6 $x^2 - 6x = 7$

7 $x^2 + x - 6 = 0$

8 $x^2 = 6x - 8$

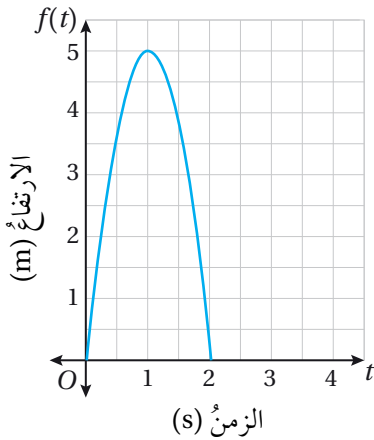
9 $-x^2 + 4 = 3x$

10 $x^2 + 3x + 6 = 0$

11 $2x^2 - 5x = -6$

12 $2x^2 + 32 = -20x$

إرشاد: أَسْتَعْمَلُ أَوْرَاقَ الرَّسْمِ الْبِيَانِيَّ الْمَوْجُودَةَ فِي نِهَآيَةِ كِتَابِ التَّمَارِينِ.



رياضة: يُبَيِّنُ الشَّكْلُ الْمُجَاوِرُ ارْتِفَاعَ لَاعِبِ جُمْبَازٍ h بِالْأَمْتَارِ بَعْدَ t ثَانِيَةً مِنْ وَثْبِهِ عَنْ سَطْحِ الْأَرْضِ.

13 كَمْ ثَانِيَةً بَقِيَ اللَّاعِبُ فِي الْهَوَاءِ؟

14 مَا أَقْصَى ارْتِفَاعٍ وَصَلَ إِلَيْهِ اللَّاعِبُ؟

15 هَلْ يُمَثِّلُ الْاِقْتِرَانُ $f(t) = -5t^2 + 10t$ حَرَكَةَ لَاعِبِ الْجُمْبَازِ؟ أُبَرِّرُ إِجَابَتِي.



16 **طيور:** التقط نسر سمكة من بحيرة وطار بها، وعندما وصل إلى ارتفاع 9 m تمكنت السمكة من التحرر لتسقط مرة أخرى في البحيرة. إذا علمت أن الاقتران $h(t) = -5t^2 + 9$ يُمثل ارتفاع السمكة بالأمتار بعد t ثانية من سقوطها، فاستعمل التمثيل البياني لأجد زمن بقاء السمكة في الهواء.

مهارات التفكير العليا

17 **أكتشف المختلف:** أيُّ المعادلات الآتية مُختلفة؟ اُبَرِّر إجابتي.

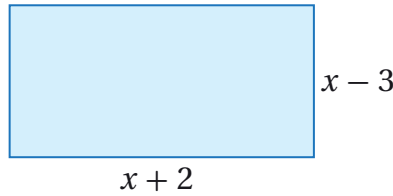
$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

18 **تبرير:** يبين الشكل الآتي مستطيلًا مساحته 50 m^2 . استعمل التمثيل البياني لأجد قيمة x ، مُبرِّرًا إجابتي.



مسألة مفتوحة: أكتب مُعادلة تُحقِّق الوصف المُعطى في كلِّ ممَّا يأتي:

19 مُعادلة تربيعية ليس لها جذر حقيقي.

20 مُعادلة تربيعية لها جذر حقيقي واحد.

21 مُعادلة تربيعية لها جذران صحيحان موجبان.

الدرس 2

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيّةِ بالتحليل (1) Solving Quadratic Equations by Factoring (1)

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيّةِ بالتحليل.

خاصيّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ.

فكرةُ الدرس

المصطلحات

مسألة اليوم



يُمثِّلُ الاقترانُ $h(t) = -16t^2 + 7t$ ارتفاعَ كَنغَرٍ بالقدمِ فوقَ سطحِ الأرضِ بعدَ t ثانيةٍ مِنْ قفزِهِ. كمَ ثانيةً تقريبًا يحتاجُ الكَنغَرُ ليعودَ إلى سطحِ الأرضِ؟

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيّةِ بالتحليل، وبخاصيّةِ الضَّربِ الصِّفريِّ.

تعلَّمتُ في الدرسِ السابقِ حلَّ المُعادلاتِ التربيعيّةِ بيانًا، وسأَتعلَّمُ في هذا الدرسِ حلَّها جبريًا.

أَتأمَّلُ كُلاً مِنْ الجُمْلِ الآتيةِ:

$$6(0) = 0 \quad 0(-5) = 0 \quad (7-7)(0) = 0$$

أَلاحِظُ أَنَّ أَحَدَ العَامِلَيْنِ على الأقلِّ في كُلِّ حالةٍ مِمَّا سَبَقَ يُساوي صِفْرًا؛ لِذَا فَإِنَّ حَاصِلَ ضَرْبِهِمَا يُساوي صِفْرًا، وهذا ما يُسمَّى **بخاصيّةِ الضَّربِ الصِّفريِّ** (zero-product property).

خاصيّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ

مفهومٌ أساسيٌّ

بالكلمات: إذا كانَ حَاصِلُ ضَرْبِ عَدَدَيْنِ حَقِيقَتَيْنِ يُساوي صِفْرًا، فَإِنَّ أَحَدَهُمَا على الأقلِّ يجبُ أَنْ يَكُونَ صِفْرًا.

بالرموز: إذا كانَ a و b عَدَدَيْنِ حَقِيقَتَيْنِ، وكانَ $ab = 0$ ، فَإِنَّ:

$$a = 0 \quad \text{or} \quad b = 0$$

يَمكِنُ اسْتِعْمَالُ خاصيّةِ الضَّربِ الصِّفريِّ والتحليلِ لِحَلِّ المُعادلاتِ التربيعيّةِ، فإذا كانَ أَحَدُ طرفي مُعادلةٍ مكتوبًا بالصورة التحليليّة، والطرفُ الآخرُ هو 0، فيمكِنُ اسْتِعْمَالُ خاصيّةِ الضَّربِ الصِّفريِّ لِحَلِّها.

أَتذكَّرُ

كتابةُ مقدارٍ جبريٍّ بالصورة التحليليّة يعني تحليلَهُ تحليلًا كاملاً.
أمثلة:

- $x^2 + 5x = x(x + 5)$
- $x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$

حلُّ المُعادلة التربيعية بالتحليل

مفهوم أساسي

لحلُّ المُعادلات التربيعية بالتحليل، اتَّبِع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: أنقل جميع الحدود إلى الطرف الأيسر من المُعادلة، وأترك الصفر في الطرف الأيمن.

الخطوة 2: أحلل المقدار الجبري في الطرف الأيسر من المُعادلة على صورة حاصل ضرب عاملين.

الخطوة 3: أساوي كل عامل بالصفر (خاصية الضرب الصفرية)، وأحل كل مُعادلة خطية.

الخطوة 4: حلول المُعادلة التربيعية هي حلول المُعادلتين الخطيتين.

حلُّ المُعادلات التربيعية بالتحليل: إخراج العامل المشترك الأكبر

تعلمت سابقاً أنه يمكن تحليل المقدار الجبري بإخراج العامل المشترك الأكبر لحدوده، ويمكن استعمال هذه الطريقة من التحليل لحل المُعادلات التربيعية، كما في المثال الآتي:

أذكر

إخراج العامل المشترك الأكبر لحدود مقدار جبري هي عملية عكسية لعملية التوزيع.

مثال 1

أحلُّ كلاً من المُعادلات الآتية:

$$1 \quad x^2 = -5x$$

$$x^2 = -5x$$

المُعادلة المُعطاة

$$x^2 + 5x = 0$$

بجمع $5x$ إلى طرفي المُعادلة

$$x(x + 5) = 0$$

بإخراج العامل المشترك الأكبر

$$x = 0 \quad \text{or} \quad x + 5 = 0$$

خاصية الضرب الصفرية

$$x = -5$$

بحل كل مُعادلة

إذن، الجذران هما: -5 ، 0

التحقّق: أَعَوِّضْ قِيَمَتَي x فِي الْمُعَادِلَةِ الْأَصْلِيَّةِ.

عندما $x = 0$

$$x^2 = -5x$$

$$(0)^2 \stackrel{?}{=} -5(0)$$

$$0 = 0 \quad \checkmark$$

عندما $x = -5$

$$x^2 = -5x$$

$$(-5)^2 \stackrel{?}{=} -5(-5)$$

$$25 = 25 \quad \checkmark$$

2 $6x^2 = 20x$

$$6x^2 = 20x$$

$$6x^2 - 20x = 0$$

$$2x(3x - 10) = 0$$

$$2x = 0 \quad \text{or} \quad 3x - 10 = 0$$

$$x = 0 \quad x = \frac{10}{3}$$

المُعَادِلَةُ الْمُعْطَاةُ

بَطْرَحِ $20x$ مِنْ طَرَفَيِ الْمُعَادِلَةِ

بِإِخْرَاجِ الْعَامِلِ الْمُشْتَرَكِ الْأَكْبَرِ

خَاصِيَّةُ الضَّرْبِ الصَّفْرِيِّ

بِحُلِّ كُلِّ مُعَادِلَةٍ

إِذْنًا، الْجَذْرَانِ هُمَا: $0, \frac{10}{3}$

التحقّق: أَعَوِّضْ قِيَمَتَي x فِي الْمُعَادِلَةِ الْأَصْلِيَّةِ.

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي 

أَحْلُ كُلًّا مِنَ الْمُعَادِلَاتِ الْآتِيَةِ:

a) $x^2 - 3x = 0$

b) $8x^2 = -12x$

حُلُّ الْمُعَادِلَاتِ التَّرْبِيعِيَّةِ بِالتَّحْلِيلِ: الصُّورَةُ الْقِيَاسِيَّةُ $x^2 + bx + c = 0$

إِذَا كَانَ الْمَقْدَارُ الْجَبْرِيُّ $x^2 + bx + c$ قَابِلًا لِلتَّحْلِيلِ فَيُمْكِنُ أَيْضًا اسْتِعْمَالُ خَاصِيَّةِ الضَّرْبِ الصَّفْرِيِّ لِحَلِّ الْمُعَادِلَةِ التَّرْبِيعِيَّةِ الْمَكْتُوبَةِ بِالصُّورَةِ الْقِيَاسِيَّةِ $x^2 + bx + c = 0$.

أَتَذَكَّرُ

لِتَحْلِيلِ ثَلَاثِيٍّ حَدُودٍ عَلَى الصُّورَةِ $x^2 + bx + c$ ، أُبْحَثُ عَنْ عَدَدَيْنِ صَحِيحَيْنِ m وَ n مَجْمُوعُهُمَا يُسَاوِي b ، وَحَاصِلُ ضَرْبِهِمَا يُسَاوِي c ، ثُمَّ أَكْتُبُ $x^2 + bx + c$ عَلَى الصُّورَةِ $(x+m)(x+n)$.

مثال 2

أحلُّ كُلًّا مِنَ الْمُعَادَلَاتِ الْآتِيَةِ:

1 $x^2 + 6x + 8 = 0$

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$

$$(x + 4)(x + 2) = 0$$

$$x + 4 = 0 \quad \text{or} \quad x + 2 = 0$$

$$x = -4 \quad \quad \quad x = -2$$

المُعَادَلَةُ الْمُعْطَاةُ

بِالتَّحْلِيلِ إِلَى الْعَوَامِلِ

خَاصِيَّةُ الضَّرْبِ الصَّفْرِيِّ

بِحَلِّ كُلِّ مُعَادَلَةٍ

إِذْنًا، الْجَذْرَانِ هُمَا: -4 ، -2

التَّحْقُوقُ: أَعَوِّضْ قِيَمَتَيْ x فِي الْمُعَادَلَةِ الْأَصْلِيَّةِ.

أَتَذَكَّرُ

بِمَا أَنَّ $b = 6$ ، $c = 8$ ،
فَأَبْحَثُ عَنْ عَدَدَيْنِ
صَحِيحَيْنِ مُوجِبَيْنِ
مَجْمُوعَهُمَا 6 وَحَاصِلُ
ضَرْبِهِمَا 8

2 $x^2 - 8x + 12 = 0$

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$(x - 6)(x - 2) = 0$$

$$x - 6 = 0 \quad \text{or} \quad x - 2 = 0$$

$$x = 6 \quad \quad \quad x = 2$$

المُعَادَلَةُ الْمُعْطَاةُ

بِالتَّحْلِيلِ إِلَى الْعَوَامِلِ

خَاصِيَّةُ الضَّرْبِ الصَّفْرِيِّ

بِحَلِّ كُلِّ مُعَادَلَةٍ

إِذْنًا، الْجَذْرَانِ هُمَا: 6 ، 2

التَّحْقُوقُ: أَعَوِّضْ قِيَمَتَيْ x فِي الْمُعَادَلَةِ الْأَصْلِيَّةِ.

أَتَذَكَّرُ

بِمَا أَنَّ $b = -8$ ، $c = 12$ ،
فَأَبْحَثُ عَنْ عَدَدَيْنِ
صَحِيحَيْنِ سَالِبَيْنِ
مَجْمُوعَهُمَا -8 وَحَاصِلُ
ضَرْبِهِمَا 12

3 $x^2 + 5x = 6$

$$x^2 + 5x = 6$$

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$(x - 1)(x + 6) = 0$$

$$x - 1 = 0 \quad \text{or} \quad x + 6 = 0$$

$$x = 1 \quad \quad \quad x = -6$$

المُعَادَلَةُ الْمُعْطَاةُ

بِطَرَحِ 6 مِنْ طَرَفِي الْمُعَادَلَةِ

بِالتَّحْلِيلِ إِلَى الْعَوَامِلِ

خَاصِيَّةُ الضَّرْبِ الصَّفْرِيِّ

بِحَلِّ كُلِّ مُعَادَلَةٍ

إِذْنًا، الْجَذْرَانِ هُمَا: 1 ، -6

التَّحْقُوقُ: أَعَوِّضْ قِيَمَتَيْ x فِي الْمُعَادَلَةِ الْأَصْلِيَّةِ.

أَتَذَكَّرُ

بِمَا أَنَّ $b = 5$ ، $c = -6$ ،
فَأَبْحَثُ عَنْ عَدَدَيْنِ
صَحِيحَيْنِ مُخْتَلِفَيْنِ فِي
الْإِشَارَةِ مَجْمُوعَهُمَا 5
وَحَاصِلُ ضَرْبِهِمَا -6

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي

أَحْلُ كُلَّ مِنَ الْمُعَادَلَاتِ الْآتِيَةِ:

a) $x^2 + 7x = -6$ b) $x^2 - 9x + 8 = 0$ c) $x^2 - 4x - 21 = 0$

حُلُّ الْمُعَادَلَاتِ التَّرْبِيعِيَّةِ بِالتَّحْلِيلِ: تَحْلِيلُ الْفَرْقِ بَيْنَ مُرَبَّعَيْنِ

يُمْكِنُ اسْتِعْمَالُ خَاصِيَّةِ الضَّرْبِ الصُّفْرِيِّ وَالتَّحْلِيلِ لِحُلِّ مُعَادَلَاتٍ تَرْبِيعِيَّةٍ تَتَضَمَّنُ فَرْقًا بَيْنَ مُرَبَّعَيْنِ.

مثال 3

أَحْلُ كُلَّ مِنَ الْمُعَادَلَاتِ الْآتِيَةِ:

1 $x^2 - 36 = 0$

$$x^2 - 36 = 0$$

المُعادلة المُعطاة

$$(x - 6)(x + 6) = 0$$

بتحليل الفرق بين مُرَبَّعَيْنِ

$$x - 6 = 0 \quad \text{or} \quad x + 6 = 0$$

خاصية الضرب الصفري

$$x = 6 \quad \quad \quad x = -6$$

بحل كل مُعادلة

إذن، الجذران هما: 6, -6

التحقق: أَعَوِّضُ قِيَمَتَي x فِي الْمُعَادَلَةِ الْأَصْلِيَّةِ.

2 $8x^2 - 50 = 0$

$$8x^2 - 50 = 0$$

المُعادلة المُعطاة

$$4x^2 - 25 = 0$$

بقسمة طَرَفَيِ الْمُعَادَلَةِ عَلَى 2

$$(2x - 5)(2x + 5) = 0$$

بتحليل الفرق بين مُرَبَّعَيْنِ

$$2x - 5 = 0 \quad \text{or} \quad 2x + 5 = 0$$

خاصية الضرب الصفري

$$x = \frac{5}{2} \quad \quad \quad x = -\frac{5}{2}$$

بحل كل مُعادلة

إذن، الجذران هما: $\frac{5}{2}$, $-\frac{5}{2}$

التحقق: أَعَوِّضُ قِيَمَتَي x فِي الْمُعَادَلَةِ الْأَصْلِيَّةِ.

أَتَذَكَّرُ

الفرق بين مُرَبَّعَيْنِ حَدِيثَيْنِ يُساوي ناتج ضرب مجموع الحدين في الفرق بينهما.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

أَتَذَكَّرُ

يحتاج تحليل بعض المقادير الجبرية إلى إجراء خطوتين، مثل: إخراج العامل المشترك الأكبر للحدود جميعها، ثم تحليل ما تبقى من المقدار باستعمال تحليل الفرق بين مُرَبَّعَيْنِ، أو التحليل العادي.

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ الْمُعَادَلَاتِ الْآتِيَةِ:

a) $4x^2 - 1 = 0$

b) $2x^2 - 18 = 0$

حُلُّ الْمُعَادَلَاتِ التَّرْبِيعِيَّةِ بِالتَّحْلِيلِ: تَحْلِيلُ الْمُرَبَّعَاتِ الْكَامِلَةِ

تَعَلَّمْتُ سَابِقًا أَنَّ ثَلَاثِيَّ الْحُدُودِ عَلَى الصُّورَةِ $a^2 + 2ab + b^2$ أَوْ الصُّورَةِ $a^2 - 2ab + b^2$ يُسَمَّى مُرَبَّعًا كَامِلًا ثَلَاثِيَّ الْحُدُودِ، وَيُمْكِنُ تَحْلِيلُهُ كَالْآتِي:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b)$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)(a - b)$$

إِذْنًا، يَنْتُجُ الْمُرَبَّعُ الْكَامِلُ ثَلَاثِيَّ الْحُدُودِ مِنْ ضَرْبِ مُقَدَّارٍ جَبْرِيٍّ فِي نَفْسِهِ، وَهَذَا يَعْنِي وَجُودَ عَامِلٍ مُكَرَّرٍ عِنْدَ حُلِّ مُعَادَلَةٍ تَرْبِيعِيَّةٍ تَحْتَوِي عَلَى مُرَبَّعٍ كَامِلٍ ثَلَاثِيَّ حُدُودٍ فِي أَحَدِ طَرَفَيْهَا وَتَحْتَوِي فِي طَرَفِهَا الْآخَرَ عَلَى صِفْرِ، وَحِينَهَا تَكْفِي مُسَاوَاةُ أَحَدِ هَذَيْنِ الْعَامِلَيْنِ بِالصَّفْرِ عِنْدَ اسْتِخْدَامِ خَاصِيَّةِ الضَّرْبِ الصَّفْرِيِّ.

مثال 4

أَحُلُّ الْمُعَادَلَةَ: $9x^2 + 6x + 1 = 0$

$$9x^2 + 6x + 1 = 0$$

المُعَادَلَةُ الْمُعْطَاةُ

$$(3x)^2 + 2(3x)(1) + 1^2 = 0$$

أَكْتُبُ الطَّرْفَ الْأَيْسَرَ عَلَى الصُّورَةِ $a^2 + 2ab + b^2$

$$(3x + 1)(3x + 1) = 0$$

بِتَحْلِيلِ الْمُرَبَّعِ الْكَامِلِ ثَلَاثِيَّ الْحُدُودِ

$$3x + 1 = 0$$

خَاصِيَّةُ الضَّرْبِ الصَّفْرِيِّ

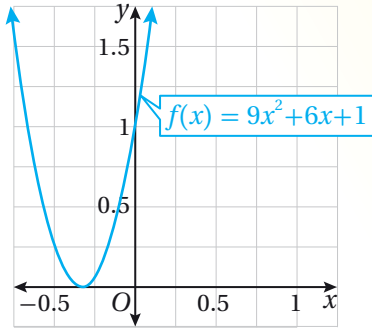
$$x = -\frac{1}{3}$$

بِحُلِّ الْمُعَادَلَةِ

إِذْنًا، لِلْمُعَادَلَةِ جَذْرٌ وَاحِدٌ، هُوَ: $-\frac{1}{3}$

التَّحَقُّقُ: أَعَوِّضُ قِيَمَةَ x فِي الْمُعَادَلَةِ الْأَصْلِيَّةِ.

الدعم البياني:



يظهر في الشكل المُجاور منحنى الاقتران التربيعي المرتبط بالمعادلة $9x^2 + 6x + 1 = 0$ ، الذي يقطع المحور x في نقطة واحدة؛ ما يعني وجود حل واحد للمعادلة.

أتحقق من فهمي

أحلُّ المعادلة: $x^2 - 6x + 9 = 0$

حلُّ المعادلات التربيعية باستعمال الجذر التربيعي

تعلمت سابقاً أنه يمكن حلُّ المعادلات على الصورة $x^2 = c$ ؛ حيث $c \geq 0$ ، باستعمال تعريف الجذر التربيعي للعدد الموجب؛ حيث: $x = \pm \sqrt{c}$ ، أما إذا لم تكن المعادلة التربيعية مكتوبة على الصورة $x^2 = c$ ، فاستعمل العمليات الجبرية لكتابة x^2 وحده في أحد طرفي المعادلة أولاً، إن أمكن، ثم أحلُّ المعادلة بأخذ الجذر التربيعي لكل طرف.

مثال 5

أحلُّ كلاً من المعادلات الآتية:

1 $3x^2 - 27 = 0$

$3x^2 - 27 = 0$

المعادلة المُعطاة

$3x^2 = 27$

بجمع 27 إلى طرفي المعادلة

$x^2 = 9$

بقسمة طرفي المعادلة على 3

$x = \pm \sqrt{9}$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x = \pm 3$

بالتبسيط

إذن، الجذران هما: 3، -3

التحقق: للتحقق، أعوّض قيمتي x في المعادلة الأصلية.

أفكر

هل يمكن حلُّ الفرع 1 من المثال 5 بطريقة أخرى؟

2 $(x + 4)^2 = 49$

$$(x + 4)^2 = 49$$

$$x + 4 = \pm \sqrt{49}$$

$$x + 4 = \pm 7$$

$$x = -4 \pm 7$$

$$x = -4 + 7 \quad \text{or} \quad x = -4 - 7$$

$$x = 3 \quad \text{or} \quad x = -11$$

المُعَادَلَةُ الْمُعْطَاةُ

بِأَخْذِ الْجَذْرِ التَّرْبِيعِيِّ لِلطَّرَفَيْنِ

بِالتَّبْسِيطِ

بَطْرَحِ 4 مِنْ طَرَفِي الْمُعَادَلَةِ

بِفَصْلِ الْحَلَّتَيْنِ

بِالتَّبْسِيطِ

إِذْنًا، الْجَذْرَانِ هُمَا: 3, -11

التَّحْقُوقُ: لِلتَّحْقُوقِ، أَعَوِّضْ قِيَمَتَيْ x فِي الْمُعَادَلَةِ الْأَصْلِيَّةِ.

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي 

أَحْلُ كُلًّا مِنَ الْمُعَادَلَاتِ الْآتِيَةِ:

a) $4x^2 - 100 = 0$

b) $(x - 1)^2 = 16$

أَتَدْرِبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ 

أَحْلُ كُلًّا مِنَ الْمُعَادَلَاتِ الْآتِيَةِ:

1 $4x^2 + 9x = 0$

2 $7x^2 = 6x$

3 $x^2 + 5x + 4 = 0$

4 $x^2 - 2x - 15 = 0$

5 $t^2 - 8t + 16 = 0$

6 $x^2 - 18x = -32$

7 $x^2 + 2x = 24$

8 $x^2 = 17x - 72$

9 $2m^2 = 50$

10 $x^2 - 9 = 0$

11 $x^2 - 25 = 0$

12 $\frac{1}{3}x^2 - 3 = 0$

13 $s^2 + 20s + 100 = 0$

14 $y^2 + \frac{1}{2}y = -\frac{1}{16}$

15 $9m^2 - 12m + 4 = 0$

16 $(x + 1)^2 = 4$

17 $9(x - 1)^2 = 16$

18 $5x^2 + 2 = 6$

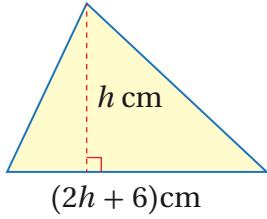


19 **فرشاة:** سقطت فرشاة طلاء من يد سفيان. إذا مثل الاقتران $h(t) = 3 - 5t^2$ ارتفاع تلك الفرشاة بالأمتار عن الأرض، بعد t ثانية من سقوطها، فبعد كم ثانية تصل إلى الأرض؟

أعمار: إذا كان عمر لينة x عامًا، ويكبرها زوجها بثلاثة أعوام، وكان حاصل ضرب عمريهما 700، فأجد:

20 معادلة تربيعية تمثل الموقف. 21 عمر لينة.

22 **حديقة:** حديقة مستطيلة الشكل يزيد طولها على عرضها بمقدار 40 m، ومساحتها 48000 m^2 ، يريد مزارع إحاطتها بسياج. أجد طول السياج.



23 **هندسة:** يبين الشكل المجاور مثلثًا مساحته 40 cm^2 . أجد ارتفاعه h ، وطول قاعدته.

24 أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.

مهارات التفكير العليا

25 **اكتشف الخطأ:** حل سلمان ومهند المعادلة التربيعية $x^2 - 3x - 4 = 0$ ، كما هو مبين أدناه. أيهما إجابته صحيحة؟ أبرر إجابتي.

مهند

$$x(x - 3) = 4$$

$$x = 4 \quad \text{or} \quad x - 3 = 4$$

$$x = 7$$

سلمان

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x - 4)(x + 1) = 0$$

$$x - 4 = 0 \quad \text{or} \quad x + 1 = 0$$

$$x = 4 \quad \quad \quad x = -1$$

تبرير: أعدد عدد حلول كل معادلة مما يأتي من دون حلها، مبررًا إجابتي:

26 $y^2 = -36$

27 $a^2 - 12 = 6$

28 $n^2 - 15 = -15$

29 **تبرير:** أكتب معادلة تربيعية على الصورة القياسية، جذراها $x = -4$, $x = 6$ ، مبررًا إجابتي.

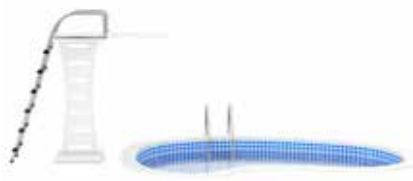
حلُّ المُعادلاتِ التربيعيّةِ بالتحليل (2) Solving Quadratic Equations by Factoring (2)

- تحليلُ ثلاثيّ الحدودِ على الصورة $ax^2 + bx + c$.
- حلُّ المُعادلاتِ التربيعيّةِ على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ بالتحليل.

فكرة الدرس



مسألة اليوم



إذا كان الاقتران $h(t) = -5t^2 + 7t + 6$ يُمثّل ارتفاع غطّاسٍ بالأمتار فوق سطح الماء، بعد t ثانية من قفزه عن منصّة القفز. فما الزمن الذي يستغرقه للوصول إلى سطح الماء؟

تحليلُ ثلاثيّ الحدودِ $ax^2 + bx + c$

تعلّمتُ سابقاً كيفُ أُحلّلُ ثلاثيّ الحدودِ $x^2 + bx + c$ ، التي معامل x^2 فيها يساوي 1، ويمكنُ أيضاً تحليلُ بعضِ ثلاثيّاتِ الحدودِ التي على الصورة $ax^2 + bx + c$ ؛ حيثُ $a \neq 1$ و $a \neq 0$ بطريقةٍ مُشابهةٍ.

ألاحظُ النمطَ الآتي في عمليّة ضربِ المقدارينِ الجبريّين $(2x + 1)$ و $(4x + 5)$:

$$(2x+1)(4x+5) = 8x^2 + 10x + 4x + 5 \\ = 8x^2 + 14x + 5$$

$$10 + 4 = 14 \quad \text{and} \quad 10 \times 4 = 8 \times 5$$

$$ax^2 + mx + nx + c \\ ax^2 + bx + c$$

$$m + n = b \quad \text{and} \quad mn = ac$$

إذن، لتحليلِ ثلاثيّ الحدودِ $8x^2 + 14x + 5$ أجدُ عدديّن m و n حاصلُ ضربيهما 5×8 أو 40، ومجموعهما 14.

أتعلّم

عند ضربِ مقدارينِ جبريّين فإنَّ كلّاً منهما يكونُ عاملاً لنواتجِ الضربِ.

تحليلُ ثلاثيّةِ الحدودِ $ax^2 + bx + c$

مفهومٌ أساسيٌّ

لتحليلِ ثلاثيّةِ $ax^2 + bx + c$ ، أجدُ عدديّنِ صحيحينِ m و n حاصلُ ضربيهما يساوي (ac) ، ومجموعهما يساوي b ، ثمَّ أكتبُ $ax^2 + bx + c$ على الصورة $ax^2 + mx + nx + c$ ، ثمَّ أُحلّلُ بتجميعِ الحدودِ.

إذا كانت إشارة c موجبة في ثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$ ، حيث $a > 0$ ، فإن لكل m و n الإشارة نفسها، ويعتمد تحديد إشارتي m و n (موجبة أو سالبة) على إشارة b ، فإذا كانت b موجبة فإن إشارة كل منهما موجبة، وإذا كانت إشارة b سالبة فإن إشارة كل منهما سالبة.

أَتَعَلَّمُ

لتسهيل عملية التحليل
من الأفضل أن أجعل
معامل x^2 موجباً.

مثال 1

$$\text{أحلُّ } 6x^2 + 23x + 7$$

بما أن $a = 6$, $b = 23$, $c = 7$ ، فأبحث عن عددين حاصل ضربهما $6 \times 7 = 42$ ومجموعهما 23.
وبما أن إشارة كل من c و b موجبة، فأُنشئ جدولاً أنظّم فيه أزواج عوامل العدد 42 الموجبة، ثم أُحدّد العاملين اللذين مجموعهما 23.

مجموع العاملين	أزواج عوامل العدد 42
43	1, 42
23	2, 21

العاملان الصحيحان

$$6x^2 + 23x + 7 = 6x^2 + mx + nx + 7$$

بكتابة القاعدة

$$= 6x^2 + 2x + 21x + 7$$

بتعويض $m = 2$, $n = 21$

$$= (6x^2 + 2x) + (21x + 7)$$

بتجميع الحدود ذات العوامل المشتركة

$$= 2x(3x + 1) + 7(3x + 1)$$

بتحليل كل تجميع بإخراج العامل المشترك الأكبر

$$= (3x + 1)(2x + 7)$$

إخراج $(3x + 1)$ عاملاً مشتركاً

أتحقق: أتحقق من صحة التحليل بضرب العاملين:

$$(3x+1)(2x+7) = 6x^2 + 21x + 2x + 7$$

خاصية التوزيع

$$= 6x^2 + 23x + 7 \quad \checkmark$$

بالتبسيط

أتحقق من فهمي

$$\text{أحلُّ } 2x^2 + 7x + 6$$

إذا كانت c موجبةً و b سالبةً في ثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$ ، حيث $a > 0$ ، فإن إشارة كل من m و n تكون سالبةً.

مثال 2

أحلل كلاً مما يأتي:

1 $3x^2 - 14x + 8$

بما أن $a = 3$, $b = -14$, $c = 8$ ، فأبحث عن عددين حاصل ضربهما $3 \times 8 = 24$ ومجموعهما -14

بما أن b سالبةً و c موجبةً، فأنشئ جدولاً أنظم فيه أزواج عوامل العدد 24 السالبة، ثم أحدد العاملين اللذين مجموعهما -14

مجموع العاملين	أزواج عوامل العدد 24
-25	-1, -24
-14	-2, -12

العاملان الصحيحان

$$3x^2 - 14x + 8 = 3x^2 + mx + nx + 8$$

بكتابة القاعدة

$$= 3x^2 - 2x - 12x + 8 \quad \text{بتعويض } m = -2, n = -12$$

$$= (3x^2 - 2x) + (-12x + 8)$$

بتجميع الحدود ذات العوامل المشتركة

$$= x(3x - 2) + (-4)(3x - 2)$$

بتحليل كل تجميع بإخراج العامل المشترك الأكبر

$$= (3x - 2)(x - 4)$$

بإخراج $(3x - 2)$ عاملاً مشتركاً

أتحقق: أتحقق من صحة التحليل بضرب العاملين:

$$(3x - 2)(x - 4) = 3x^2 - 12x - 2x + 8$$

خاصية التوزيع

$$= 3x^2 - 14x + 8 \quad \checkmark$$

بالتبسيط

2 $20x^2 - 80x + 35$

الخطوة 1: أخرج العامل المشترك الأكبر أولاً.

بالتحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر $20x^2 - 80x + 35 = 5(4x^2 - 16x + 7)$

الخطوة 2: أحلل المقدار $4x^2 - 16x + 7$

بما أن $a = 4$, $b = -16$, $c = 7$ ، فأبحث عن عددين حاصل ضربهما $4 \times 7 = 28$ ومجموعهما -16

بما أن b سالبة و c موجبة، فأنشئ جدولاً أنظم فيه أزواج عوامل العدد 28 السالبة، ثم أحدد العاملين اللذين مجموعهما -16

مجموع العاملين	أزواج عوامل العدد 28
-29	-1, -28
-16	-2, -14

العاملان الصحيحان

بكتابة القاعدة $4x^2 - 16x + 7 = 4x^2 + mx + nx + 7$

بتعويض $m = -2$, $n = -14$ $= 4x^2 - 2x - 14x + 7$

بتجميع الحدود ذات العوامل المشتركة $= (4x^2 - 2x) + (-14x + 7)$

بتحليل كل تجميع بإخراج العامل المشترك الأكبر $= 2x(2x-1) + (-7)(2x-1)$

بإخراج $(2x-1)$ عاملاً مشتركاً $= (2x-1)(2x-7)$

أتحقق: أتحقق من صحة التحليل بضرب العاملين:

خاصية التوزيع $(2x-1)(2x-7) = 4x^2 - 14x - 2x + 7$

بالتبسيط $= 4x^2 - 16x + 7$ ✓

إذن، $20x^2 - 80x + 35 = 5(2x-1)(2x-7)$

أتعلم

في بعض الأحيان يكون عامل مشترك بين جميع حدود ثلاثي الحدود، وفي هذه الحالة أستعمل خاصية التوزيع لتحليل ثلاثي الحدود بإخراج العامل المشترك الأكبر أولاً قبل البدء بعملية التحليل.

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي

أَحْلُلْ كُلًّا مِمَّا يَأْتِي:

a) $9x^2 - 33x + 18$

b) $5x^2 - 13x + 6$

إذا كانت c سالبة في ثلاثي الحدود $ax^2 + bx + c$ ، حيث $a > 0$ ، فإن m و n إشارتيين مختلفتين.

مثال 3

أَحْلُلْ $3x^2 - 7x - 6$

بما أن $c = -6$ ، $b = -7$ ، $a = 3$ ، فأجد عدديين حاصل ضربيهما $3 \times -6 = -18$ ومجموعهما -7 .

بما أن c سالبة، فأُنشئ جدولاً أنظّم فيه أزواج عوامل العدد (-18) مختلفة الإشارة، ثم أحدد العاملين اللذين مجموعهما -7 .

مجموع العاملين	أزواج عوامل العدد -18
-17	$1, -18$
17	$-1, 18$
-7	$2, -9$

العاملان الصحيحان

$3x^2 - 7x - 6 = 3x^2 + mx + nx - 6$ أكتب القاعدة

$= 3x^2 + 2x - 9x - 6$ بتعويض $m = 2, n = -9$

$= (3x^2 + 2x) + (-9x - 6)$ بتجميع الحدود ذات العوامل المشتركة

$= x(3x+2) + (-3)(3x+2)$ بتحليل كل تجميع بإخراج العامل المشترك الأكبر

$= (3x+2)(x-3)$ بإخراج $(3x+2)$ عاملاً مشتركاً

أَتَحَقَّقُ: أَتَحَقَّقُ مِنْ صِحَّةِ التَّحْلِيلِ بِضَرْبِ الْعَامِلَيْنِ:

$$(3x+2)(x-3) = 3x^2 - 9x + 2x - 6$$

$$= 3x^2 - 7x - 6 \quad \checkmark$$

خاصية التوزيع

بالتبسيط

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي

أَحْلِلْ $3x^2 - 3x - 6$

حُلُّ الْمُعَادَلَاتِ عَلَى الصُّورَةِ $ax^2 + bx + c = 0$ بِالتَّحْلِيلِ

يُمْكِنُ حُلُّ الْمُعَادَلَاتِ التَّرْبِيعِيَّةِ عَلَى الصُّورَةِ $ax^2 + bx + c = 0$ بِالتَّحْلِيلِ أَوَّلًا، ثُمَّ اسْتِعْمَالِ خَاصِيَّةِ الضَّرْبِ الصُّفْرِيِّ.

مثال 4

أَحْلِلْ كُلًّا مِنَ الْمُعَادَلَاتِ الْآتِيَةِ:

1 $3x^2 - 4x + 1 = 0$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

المُعَادَلَةُ الْمُعْطَاةُ

$$(3x-1)(x-1) = 0$$

بِالتَّحْلِيلِ إِلَى الْعَوَامِلِ

$$3x-1=0 \quad \text{or} \quad x-1=0$$

خَاصِيَّةُ الضَّرْبِ الصُّفْرِيِّ

$$x = \frac{1}{3} \quad x = 1$$

بِحُلِّ كُلِّ مُعَادَلَةٍ

إِذْنًا، الْجَذْرَانِ هُمَا: $1, \frac{1}{3}$

2 $30x^2 - 5x = 5$

$$30x^2 - 5x = 5$$

المُعَادَلَةُ الْمُعْطَاةُ

$$30x^2 - 5x - 5 = 0$$

بَطْرَحِ 5 مِنْ طَرَفِي الْمُعَادَلَةِ

$$6x^2 - x - 1 = 0$$

بِقِسْمَةِ طَرَفِي الْمُعَادَلَةِ عَلَى 5

$$(3x+1)(2x-1) = 0$$

بِالتَّحْلِيلِ إِلَى الْعَوَامِلِ

أَتَذَكَّرُ

إِذَا كَانَتْ c مُوجِبَةً، وَ b سَالِبَةً فِي ثَلَاثِيِ الْحُدُودِ $ax^2 + bx + c$ ، حَيْثُ $a > 0$ ، فَإِنَّ إِشَارَةَ كُلِّ مِنْ m وَ n سَالِبَةٌ.

أَتَذَكَّرُ

أَحْرِصْ دَائِمًا عَلَى إِخْرَاجِ الْعَامِلِ الْمُشْتَرَكِ الْأَكْبَرِ أَوَّلًا قَبْلَ الْبَدْءِ بِعَمَلِيَّةِ التَّحْلِيلِ.

$$3x+1=0 \text{ or } 2x-1=0$$

$$x = -\frac{1}{3} \quad x = \frac{1}{2}$$

خاصية الضرب الصفري

بحل كل معادلة

إذن، الجذران هما: $-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

أتحقق من فهمي

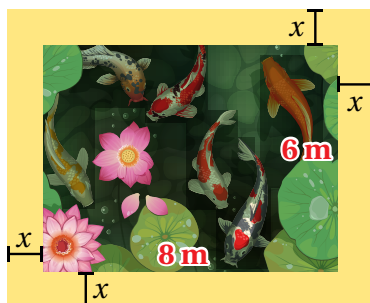
أحلُّ كلاً من المعادلات الآتية:

a) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

b) $2x^2 + 6x = -4$

يمكن استعمال حل المعادلات التربيعية بالتحليل في كثير من التطبيقات الحياتية.

مثال 5: من الحياة



بركة: بركة أسماك زينة مستطيلة الشكل طولها 8 m وعرضها 6 m، يحيط بها ممر عرضة x m، كما في الشكل المجاور. إذا كانت المساحة المخصصة للبركة والممر معاً 120 m^2 ، فأجد عرض الممر x .

طول المنطقة المخصصة للبركة والممر معاً يساوي $(2x + 8) \text{ m}$ وعرضها $(2x + 6) \text{ m}$. بما أن مساحة هذه المنطقة 120 m^2 ، فيمكن كتابة معادلة لإيجاد قيمة x على النحو الآتي:

$$(2x + 6)(2x + 8) = 120$$

مساحة البركة والممر

$$4x^2 + 16x + 12x + 48 = 120$$

خاصية التوزيع

$$4x^2 + 28x + 48 = 120$$

بالتبسيط

$$4x^2 + 28x - 72 = 0$$

بالتبسيط

$$x^2 + 7x - 18 = 0$$

بقسمة طرفي المعادلة على 4

$$(x + 9)(x - 2) = 0$$

بالتحليل إلى العوامل

$$x + 9 = 0 \text{ or } x - 2 = 0$$

$$x = -9 \quad x = 2$$

خاصية الضرب الصفري

بحل كل معادلة

بما أن الطول لا يمكن أن يكون سالبًا، فإن عرض الممر يساوي 2 m

أتحقق من فهمي

محمية: محمية طبيعية مستطيلة الشكل يزيد طولها على مثلي عرضها بمقدار 1 km. إذا كانت مساحتها 136 km^2 ، فأجد أبعادها.

معلومة

يهدف إنشاء المحميات الطبيعية إلى حماية الأنواع المهددة بالانقراض من الحيوانات والنباتات، ومن أهم تلك المحميات في الأردن محمية ضانا للمحيط الحيوي، التي تقع في محافظة الطفيلة وتبلغ مساحتها 320 km^2

أدرب وأحل المسائل

أحل كل ما يأتي:

1 $3x^2 + 11x + 6$

2 $8x^2 - 30x + 7$

3 $6x^2 + 15x - 9$

4 $4x^2 - 4x - 35$

5 $12x^2 + 36x + 27$

6 $6r^2 - 14r - 12$

أحل كل ما من المعادلات الآتية:

7 $24x^2 - 19x + 2 = 0$

8 $18t^2 + 9t + 1 = 0$

9 $5x^2 + 8x + 3 = 0$

10 $5x^2 - 9x - 2 = 0$

11 $4t^2 - 4t - 35 = 0$

12 $6x^2 + 15x - 9 = 0$

13 $28s^2 - 85s + 63 = 0$

14 $9d^2 - 24d - 9 = 0$

15 $8x(x + 1) = 16$

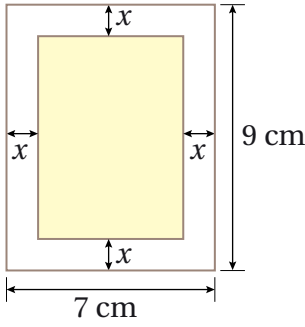
16 $13x^2 = 11 - 2x$

17 $8x - 16 - x^2 = 0$

18 $2t^2 - t = 15$

19 $(2x + 1)(5x + 2) = (2x - 2)(x - 2)$

20 $8x^2 + 6x + 3 = 2x^2 + x + 2$



هندسة: يُبين الشكل المُجاوِرُ مستطيلًا مساحته 35 cm^2 ، صَنَعَتْهُ شُرُوقُ بِقَصِّ أَشْرَطَةٍ متساوية العرضِ مِنْ ورقةٍ مستطيلةٍ الشكلِ.

21 أجد عرض الشريط.

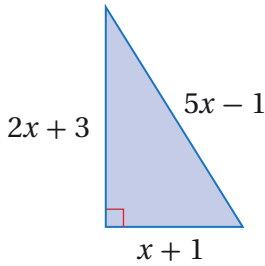
22 أجد أبعاد المستطيل الجديد.



23 **بطاقة:** بطاقة دعوة مستطيلة الشكل يزيد طولها على مثلّي عرضها بمقدار 3 cm . إذا كانت مساحتها 90 cm^2 ، فأجد طولها وعرضها.

24 أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.

مهارات التفكير العليا



تبرير: يُبين الشكل المُجاوِرُ مثلثًا قائم الزاوية.

25 أبين، بالاعتماد على الشكل، أن $20x^2 - 24x - 9 = 0$ ، مُبرّرًا إجابتي.

إرشاد: أستخدم نظرية فيثاغورس

26 أجد مساحة المثلث.

27 **اكتشف المختلف:** أيّ المقادير الآتية مُختلفة؟ اُبرّر إجابتي.

$$(2x - 3)(x + 2)$$

$$x(2x - 3) + 2(2x - 3)$$

$$(2x + 3)(x - 2)$$

$$2x(x + 2) - 3(x + 2)$$

28 **نحد:** أجد جميع قيم الثابت k ؛ حيث يمكن تحليل ثلاثي الحدود $2x^2 + kx + 12$ إلى عامليين باستعمال الأعداد الصحيحة.

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيةِ بإكمالِ المُربَّعِ

Solving Quadratic Equations by Completing the Square

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيةِ بإكمالِ المُربَّعِ.

إكمالُ المُربَّعِ.

فكرةُ الدرس



المصطلحاتُ



مسألةُ اليوم



ألقي أحمدُ طُعماً في الماءِ مِنْ ارتفاعِ مترٍ واحدٍ. إذا كانَ
الاقترانُ $h(t) = -5t^2 + 8t + 1$ قد مثَّلَ ارتفاعَ هذا
الطُعْمِ بالمترِ فوقَ سطحِ الماءِ، بعدَ t ثانيةً مِنْ إلقائه، فبعدَ
كم ثانيةً يصلُ إلى سطحِ الماءِ؟

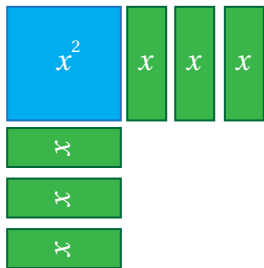
إكمالُ المُربَّعِ

تعلَّمتُ سابقاً حلَّ المُعادلةِ التربيعيةِ التي على الصورةِ $(x + m)^2 = n$ ؛ حيثُ $n > 0$ ، وذلكَ
بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ لِطَرَفَيِ المُعادلةِ.

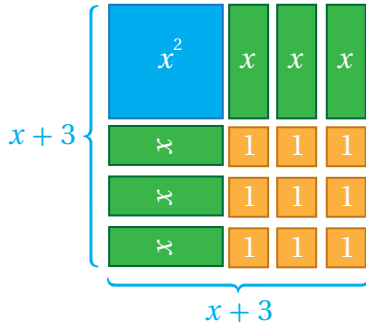
ألاحظُ أنَّ المقدارَ $(x + m)^2$ هو الصورةُ التحليليةُ للمُربَّعِ الكاملِ $x^2 + 2mx + m^2$ ، وهذا
يقودُنَا إلى استنتاجٍ أَنَّهُ يمكنُ حلُّ المُعادلاتِ التربيعيةِ التي تحوي مُربَّعاً كاملاً ثلاثيَّ الحدودِ
معاملُ x^2 فيه يُساوي 1 باستخدامِ الجذرِ التربيعيِّ. ولكن، ماذا عَنِ المُعادلاتِ التي لا تحوي
مُربَّعاً كاملاً؟



تُمثِّلُ القطعُ الجبريَّةُ المُجاورةُ المقدارَ
الجبريَّ $x^2 + 6x$



ويمكنُ إعادةُ ترتيبِ القطعِ الجبريَّةِ لِشَكْلِ جُزءٍ مِنْ مُربَّعٍ،
كما في الشكلِ المُجاوِرِ. ألاحظُ أنَّ القطعَ الخضراءَ قُسمَتِ
مجموعَتَيْنِ في كُلِّ منها 3 قطعٍ.



يمكنُ إكمالُ المُرَبَّعِ بإضافة 3^2 أو 9 قطعٍ مفردةٍ.
 إذن، المُرَبَّعُ الكاملُ ثُلَاثِيّ الحدودِ الناتجُ هُوَ
 $(x + 3)^2$ أو $x^2 + 6x + 9$

يمكنُ التعبيرُ عَنِ الخُطواتِ السابقةِ جبريًّا كما يأتي:

$$x^2 + 6x + 9$$

$$[\frac{1}{2}(6)]^2$$

وبشكلٍ عامٍّ، يمكنُ تحويلُ المقدارِ التربيعيِّ الذي على الصورة $x^2 + bx$ إلى مُرَبَّعٍ كاملٍ ثُلَاثِيّ الحدودِ بإضافة $(\frac{b}{2})^2$ ، وتُسمَّى هذه العمليةُ **إكمالُ المُرَبَّعِ** (completing the square).

إكمالُ المُرَبَّعِ

مفهومٌ أساسيٌّ

بالكلمات: لإكمالِ مُرَبَّعٍ أيِّ مقدارٍ تربيعيٍّ على الصورة $x^2 + bx$ ، اتَّبِعْ الخُطواتِ الآتية:

الخطوة 1: أجدُ نصفَ b .

الخطوة 2: أُرَبِّعُ الناتجَ مِنَ الخطوة 1

الخطوة 3: أضيفُ الناتجَ مِنَ الخطوة 2 إلى $x^2 + bx$.

بالرموز: $x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$

أتعلَّم

اتَّبِعْ الخُطواتِ نفسَها،
 سواءً كانت b موجبةً أو
 سالبةً.

مثال 1

أجعلُ كلَّ مقدارٍ ممَّا يأتي مُرَبَّعًا كاملاً، ثمَّ أحلِّلُ المُرَبَّعَ الكاملَ ثُلَاثِيّ الحدودِ الناتجَ:

1 $x^2 + 12x$

$$\frac{12}{2} = 6$$

بإيجاد $\frac{b}{2}$

$$6^2 = 36$$

بإيجاد $\left(\frac{b}{2}\right)^2$

$$x^2 + 12x + 36$$

بإضافة $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ إلى المقدارِ الأصليِّ

إذن، المقدار الناتج بعد إكمال المربع هو $x^2 + 12x + 36$ ، ويمكن تحليله كما يأتي:

$$x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2 \quad \text{بتحليل المربع الكامل ثلاثي الحدود}$$

2 $x^2 - 26x$

$$\frac{-26}{2} = -13 \quad \text{بإيجاد } \frac{b}{2}$$

$$(-13)^2 = 169 \quad \left(\frac{b}{2}\right)^2 \text{ بإيجاد}$$

$$x^2 - 26x + 169 \quad \text{بإضافة } \left(\frac{b}{2}\right)^2 \text{ إلى المقدار الأصلي}$$

إذن، المقدار الناتج بعد إكمال المربع هو $x^2 - 26x + 169$ ، ويمكن تحليله كما يأتي:

$$x^2 - 26x + 169 = (x - 13)^2 \quad \text{بتحليل المربع الكامل ثلاثي الحدود}$$

أتحقق من فهمي 

أجعل كل مقدار مما يأتي مربعًا كاملاً، ثم أحلّ المربع الكامل ثلاثي الحدود الناتج:

a) $x^2 + 2x$

b) $x^2 - 14x$

حلّ المعادلات التربيعية على الصورة $x^2 + bx + c = 0$ بإكمال المربع

يمكنني استعمال إكمال المربع لحلّ أيّ معادلة تربيعية على الصورة $x^2 + bx + c = 0$ ، وذلك يتطلب فصل المقدار $x^2 + bx$ في الطرف الأيسر أولاً، ثم أكمل المربع.

مثال 2

أحلّ كلّاً من المعادلات الآتية بإكمال المربع، مُقرّباً إجابتي لأقرب جزء من عشرة (إن لزم):

1 $x^2 + 4x - 12 = 0$

$$x^2 + 4x - 12 = 0 \quad \text{المعادلة المُعطاة}$$

$$x^2 + 4x = 12 \quad \text{بجمع 12 إلى طرفي المعادلة}$$

$$x^2 + 4x + 4 = 12 + 4 \quad \text{بإكمال المربع بإضافة } 4 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 \text{ إلى طرفي المعادلة}$$

$$(x + 2)^2 = 16 \quad \text{بتحليل المربع الكامل ثلاثي الحدود}$$

أفكر

هل يمكن حلّ الفرع 1 من المثال بالتحليل؟ أبرّر إجابتي.

$$x + 2 = \pm 4$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$x = -2 \pm 4$$

بطرح 2 من طرفي المعادلة

$$x = -2 + 4 \quad \text{or} \quad x = -2 - 4$$

بفصل الحليين

$$x = 2$$

$$x = -6$$

بالتبسيط

إذن، جذرا المعادلة 2، -6

التحقق: للتحقق، أعوّض قيمتي x في المعادلة الأصلية.

$$2 \quad x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$x^2 - 3x - 1 = 0$$

المعادلة المعطاة

$$x^2 - 3x = 1$$

بجمع 1 إلى طرفي المعادلة

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 1 + \frac{9}{4}$$

بإكمال المربع بإضافة $\left(\frac{-3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ إلى طرفي المعادلة

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$$

بتحليل المربع الكامل ثلاثي الحدود

$$x - \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$$

بجمع $\frac{3}{2}$ من طرفي المعادلة

$$x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \quad \text{or} \quad x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$$

بفصل الحليين

$$x \approx 3.3$$

$$x \approx -0.3$$

باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، جذرا المعادلة التقريبيان 3.3، -0.3

أتحقق من فهمي 

أحلُّ كلاً من المعادلات الآتية بإكمال المربع، مُقرَّباً إجابتي لأقرب جزءٍ من عشرة (إن لزم):

a) $x^2 + 8x + 7 = 0$

b) $x^2 - 5x - 3 = 0$

أفكّر

هل يمكن حلُّ الفرع 2 من المثال بالتحليل؟ أبرّر إجابتي.

حلُّ المعادلات التربيعية على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ بإكمال المربع.

لحلُّ المعادلة التربيعية على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ ؛ حيث $a \neq 1$ ، أقسم كل حد في المعادلة على a ، ثم أفصل الحدَّين اللذين يحتويان على x^2 و x في الطرف الأيسر أولاً، ثم أكمل المربع.

مثال 3

أحلُّ كلاً من المعادلات الآتية بإكمال المربع:

1 $2x^2 - 12x + 8 = 0$

$2x^2 - 12x + 8 = 0$ المعادلة المُعطاة

$x^2 - 6x + 4 = 0$ بقسمة كل حد على 2

$x^2 - 6x = -4$ بطرح 4 من طرفي المعادلة

$x^2 - 6x + 9 = -4 + 9$ بإكمال المربع بإضافة $9 = \left(\frac{-6}{2}\right)^2$ إلى طرفي المعادلة

$(x-3)^2 = 5$ بتحليل المربع الكامل ثلاثي الحدود

$x - 3 = \pm\sqrt{5}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x = 3 \pm\sqrt{5}$ بجمع 3 إلى طرفي المعادلة

$x = 3 + \sqrt{5}$ or $x = 3 - \sqrt{5}$ بفصل الحدين

إذن، جذرا المعادلة $3 + \sqrt{5}$, $3 - \sqrt{5}$

التحقق: للتحقق، أعوِّض قيمتي x في المعادلة الأصلية.

2 $3x^2 + 6x + 15 = 0$

$3x^2 + 6x + 15 = 0$ المعادلة المُعطاة

$x^2 + 2x + 5 = 0$ بقسمة كل حد على 3

$x^2 + 2x = -5$ بطرح 5 من طرفي المعادلة

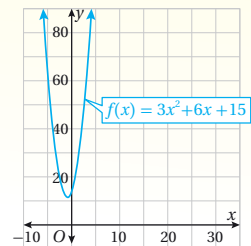
$x^2 + 2x + 1 = -5 + 1$ بإكمال المربع بإضافة $1 = \left(\frac{2}{2}\right)^2$ إلى طرفي المعادلة

$(x + 1)^2 = -4$ بتحليل المربع الكامل ثلاثي الحدود

بما أنه لا توجد أعداد حقيقية مربعاتها سالبة فالمعادلة ليس لها حلول حقيقية.

الدعم البياني

يظهر في الشكل الآتي منحنى الاقتران التربيعي المرتبط بالمعادلة $3x^2 + 6x + 15 = 0$ الذي لا يقطع المحور x ؛ ما يعني عدم وجود حلول حقيقية للمعادلة.



أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي

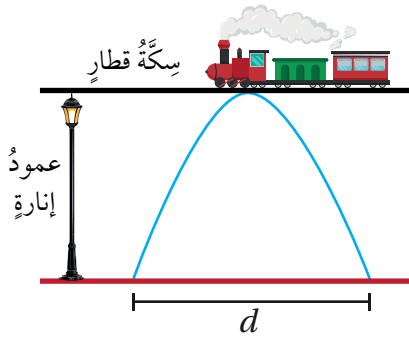
أَحُلُّ كُلًّا مِنَ الْمُعَادَلَاتِ الْآتِيَةِ بِإِكْمَالِ الْمُرَبَّعِ:

a) $2x^2 + 20x - 10 = 0$

b) $2x^2 + 8x + 12 = 0$

يمكنُ استعمالُ حلِّ المُعادلاتِ التربيعيةِ بطريقةِ إكمالِ المُربَّعِ في كثيرٍ مِنَ التطبيقاتِ الحياتيةِ.

مثال 4 : مِنَ الْحَيَاةِ



تصميم: تَمُرُّ سَكَّةُ قِطَارٍ أَعْلَى جِسْرِ قَوْسِيٍّ، وَيُمَثَّلُ الْاِقْتِرَانُ $h(x) = -x^2 + 10x - 18$ ارْتِفَاعُ أَيِّ نَقْطَةٍ عَلَى الْجِسْرِ عَنْ سَطْحِ الْأَرْضِ بِالْمِتْرِ، وَ x الْبُعْدُ الْأَفْقِيَّ لِلنَّقْطَةِ بِالْمِتْرِ عَنْ عَمُودِ إِنْارَةٍ بِجَانِبِ الْجِسْرِ، كَمَا فِي الشَّكْلِ الْمُجَاوِرِ. أَجِدْ طَوَلَ قَاعِدَةِ الْقَوْسِ d ، مُقَرَّبًا إِيَّابَتِي لِأَقْرَبِ جُزْءٍ مِنْ عَشْرَةٍ.

أَفْتَرِضْ أَنَّ مُسْتَوَى سَطْحِ الْأَرْضِ يُمَثَّلُ بِالْمُحَوَّرِ x ، إِذَنْ تُمَثِّلُ كُلُّ مِنْ نَقْطَةٍ بِدَايَةِ الْقَوْسِ وَنَهَائِهِ حَلًّا لِلْمُعَادَلَةِ الْمُرتَبِطَةِ بِالْاِقْتِرَانِ $h(x)$.

الخطوة 1: أَحُلُّ الْمُعَادَلَةَ الْمُرتَبِطَةَ بِالْاِقْتِرَانِ.

$$-x^2 + 10x - 18 = 0$$

المُعَادَلَةُ الْمُرتَبِطَةُ بِالْاِقْتِرَانِ

$$x^2 - 10x + 18 = 0$$

بِقِسْمَةِ كُلِّ حَدٍّ عَلَى -1

$$x^2 - 10x = -18$$

بِطَرَحِ 18 مِنْ طَرَفِي الْمُعَادَلَةِ

$$x^2 - 10x + 25 = -18 + 25 \quad \left(\frac{-10}{2}\right)^2 = 25 \quad \text{بِإِكْمَالِ الْمُرَبَّعِ بِإِضَافَةِ } 25 \text{ إِلَى طَرَفِي الْمُعَادَلَةِ}$$

$$(x - 5)^2 = 7$$

بِتَحْلِيلِ الْمُرَبَّعِ الْكَامِلِ ثَلَاثِيَّ الْحُدُودِ

$$x - 5 = \pm\sqrt{7}$$

بِأَخْذِ الْجَذْرِ التَّربيعِيِّ لِلطَّرَفَيْنِ

$$x = 5 \pm \sqrt{7}$$

بِجَمْعِ 5 إِلَى طَرَفِي الْمُعَادَلَةِ

$$x = 5 + \sqrt{7} \quad \text{or} \quad x = 5 - \sqrt{7}$$

بِفَصْلِ الْحَلَيْنِ

$$x \approx 7.6$$

$$x \approx 2.4$$

بِاسْتِعْمَالِ الْآلَةِ الْحَاسِبَةِ

أَتَعَلَّمُ

أَلَا حِظُّ أَنَّهُ لَا يُمْكِنُ حَلُّ الْمُعَادَلَةِ الْمُرتَبِطَةِ بِالْاِقْتِرَانِ بِالتَّحْلِيلِ؛ لِذَا أَحُلُّهَا بِإِكْمَالِ الْمُرَبَّعِ.

الخطوة 2: أجد طول قاعدة القوس d .

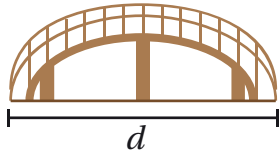
لإيجاد طول قاعدة القوس d أطرح أحد الحلين من الآخر.

$$d = 7.6 - 2.4 = 5.2$$

إذن، طول قاعدة القوس 5.2 m تقريبًا.

أتحقق من فهمي

تصميم: صمم مهندس نموذجًا لجسر مُشاة على شكل قطع مكافئ، بحيث يُمثّل الاقتران:



ارتفاع الجسر عن قاعدة النموذج بالديسمتر، و x البعد الأفقي بالديسمتر عن إشارة ضوئية، كما في الشكل المجاور. أجد طول قاعدة الجسر d ، مُقَرَّبًا إجابتي لأقرب جزء من عشرة.

أجعل كل مقدار مما يأتي مُربَّعًا كاملاً، ثم أحلُّ المُرَّع الكامل ثلاثي الحدود الناتج:

1 $x^2 + 4x$

2 $x^2 + 14x$

3 $x^2 - 3x$

4 $x^2 + 8x$

5 $x^2 - 2x$

6 $x^2 + 22x$

أجد قيمة c في كل مما يأتي، ثم أجد المقدار الجبري الذي يُعبّر عن النموذج:

7

	x	2
x	x^2	$2x$
2	$2x$	c

8

	x	8
x	x^2	$8x$
8	$8x$	c

9

	x	10
x	x^2	$10x$
10	$10x$	c

أحلُّ كُلًّا مِنَ الْمُعادَلاتِ الآتيةِ بِإكمالِ المُربَّعِ:

10 $x^2 + 4x = 12$

11 $x^2 - 14x = -13$

12 $x^2 - 6x - 11 = 0$

13 $x^2 + 4x - 1 = 0$

14 $x^2 + 14x - 5 = 0$

15 $x^2 - 6x + 3 = 0$

16 $x^2 + 13x + 35 = 0$

17 $x^2 + 2x - 1 = 0$

18 $x^2 + 2x - 3 = 0$

أحلُّ كُلًّا مِنَ الْمُعادَلاتِ الآتيةِ بِإكمالِ المُربَّعِ، مُقَرَّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عَشْرَةٍ (إِنْ لَزِمَ):

19 $x^2 + 2x - 9 = 0$

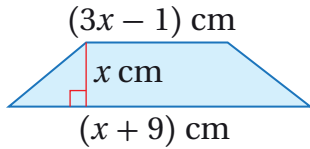
20 $x^2 - 4x - 7 = 0$

21 $x^2 + 2x - 5 = 0$

22 $2x^2 - 6x - 3 = 0$

23 $4x^2 - 8x + 1 = 0$

24 $2x^2 + 5x - 10 = 0$



25 **هندسة:** يبيِّن الشكلُ المُجاوِرُ شبهَ منحرِفٍ مساحتهُ 20 cm^2 . أجدُ قيمةَ x ، مُقَرَّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عَشْرَةٍ.

إرشادُ: مساحةُ شبهِ المنحرِفِ تُساوي نصفَ مجموعِ طوليِ الضِّلَعَيْنِ المُتوازيَيْنِ مضروبًا في الارتفاعِ.



26 **ضفادع:** وقفَ ضفدعٌ على جذعِ شجرةٍ يرتفعُ 1 m عَنْ سطحِ الأرضِ، ثُمَّ قفزَ إلى سطحِ الأرضِ ليُمَثِّلَ الاقترانُ $h(t) = -5t^2 + 15t + 1$ ارتفاعَهُ بِالْمِترِ عَنْ سطحِ الأرضِ بعدَ t ثانيةٍ مِنْ قفزِهِ عَنِ الجذعِ. بعدَ كم ثانيةٍ يصلُ الضفدعُ إلى سطحِ الأرضِ؟ أَقَرِّبُ إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عَشْرَةٍ.

27 **أحلُّ المسألةِ الواردةِ في بدايةِ الدرسِ.**



مهاراتُ التفكيرِ العليا

28 **تبرير:** أجدُ جميعَ قيمِ الثابتِ b ، التي تجعلُ المقدارَ $x^2 + bx + 25$ مُربَّعًا كاملاً، مُبرِّرًا إجابتي.

29 **تبرير:** هل يمكنُ حلُّ المُعادلةِ $x^2 + 10x = -20$ بطريقتي التحليلِ وإكمالِ المُربَّعِ؟ أبرِّرُ إجابتي.

30 **مسألةٌ مفتوحة:** أكتبُ مُعادلةً تربيعيةً تُحلُّ بطريقةِ إكمالِ المُربَّعِ لا بطريقةِ التحليلِ، ويكونُ جذراها عدديَّين حقيقيَّين موجبيَّين.

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيّةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ

Solving Quadratic Equations Using the Quadratic Formula

حلُّ المُعادلةِ التربيعيّةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ.

القانونُ العامُّ، المُميّزُ.

فكرة الدرس

المصطلحات

مسألة اليوم



في لعبة رمي القرص، رمى لاعب القرص فمَثَلَ الاقترانُ
 $f(x) = -0.04x^2 + 0.84x + 2$ ارتفاع القرص بالمتري عن سطح
 الأرض، حيث x المسافة الأفقيّة بالمتري بين اللاعب والقرص. أجد المسافة
 الأفقيّة بين اللاعب والقرص عندما يصل القرص إلى سطح الأرض.

القانون العامُّ

تعلّمت في الدرس السابق حلُّ المُعادلاتِ التربيعيّةِ باستعمالِ طريقة إكمال المُربّع، ويمكنُ من خلالِ هذه الطريقة اشتقاق قانون يُستعملُ
 لحلّ أيّ مُعادلةٍ تربيعيّةٍ مكتوبةٍ على الصورة القياسية $ax^2 + bx + c = 0$ ، كما سألأحظ عند تنفيذ النشاط المفاهيمي الآتي:

حلُّ المُعادلةِ التربيعيّةِ بإكمال المُربّع

نشاط مفاهيمي

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = -c$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

توضّح الخطوات المُجاورة

طريقة حلّ أيّ مُعادلةٍ

تربيعيّةٍ على الصورة

$ax^2 + bx + c = 0$ ؛ حيثُ

$a \neq 0$. باستعمالِ طريقة إكمال

المُربّع، أصفّ الإجراء الذي تمّ

في كلّ خطوةٍ:

تُسمى الصيغة التي جرى التوصل إليها في السطر الأخير من النشاط السابق **القانون العام** (quadratic formula).

حلّ المعادلة التربيعية بالقانون العام

مفهوم أساسي

يمكن حلّ المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ بالقانون العام على النحو الآتي:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

حيث $a \neq 0$ و $b^2 - 4ac \geq 0$.

مثال 1

أحلّ كلّاً من المعادلات الآتية بالقانون العام، مُقرّباً إجابتي لأقرب جزءٍ من عشرة (إن لزم):

1 $2x^2 - 3x = 5$

الخطوة 1: أكتب المعادلة بالصورة القياسية.

$$2x^2 - 3x = 5$$

المعادلة المُعطاة

$$2x^2 - 3x - 5 = 0$$

ب طرح 5 من طرفي المعادلة

الخطوة 2: أطبق القانون العام.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

صيغة القانون العام

$$= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(-5)}}{2(2)}$$

بتعويض $a = 2, b = -3, c = -5$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{4}$$

بالتبسيط

$$= \frac{3 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4}$$

بالجمع، ثم إيجاد الجذر التربيعي

$$x = \frac{3 - 7}{4} \quad \text{or} \quad x = \frac{3 + 7}{4}$$

بفصل الحليّن

$$x = -1 \quad x = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

بالتبسيط

إذن، جذرا المعادلة هما $-1, \frac{5}{2}$

أتعلّم

بما أنّه يمكن إيجاد الجذر التربيعي للعدد 49، فلا حاجة إلى استعمال الآلة الحاسبة؛ لذا تكون قيمة الجذر دقيقة وليست تقريبية.

الوحدة 3

2 $5x^2 - 11x = 4$

الخطوة 1: أكتب المُعادلة بالصورة القياسية.

$$5x^2 - 11x = 4$$

المُعادلة المُعطاة

$$5x^2 - 11x - 4 = 0$$

بطرح 4 من طرفي المُعادلة

الخطوة 2: أطبق القانون العام.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

صيغة القانون العام

$$= \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4(5)(-4)}}{2(5)}$$

بتعويض $a = 5, b = -11, c = -4$

$$= \frac{11 \pm \sqrt{121 + 80}}{10}$$

بالتبسيط

$$= \frac{11 \pm \sqrt{201}}{10}$$

بالجمع

$$x = \frac{11 - \sqrt{201}}{10} \quad \text{or} \quad x = \frac{11 + \sqrt{201}}{10}$$

بفصل الحليين

$$x \approx -0.3$$

$$x \approx 2.5$$

باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، جذرا المُعادلة التقريبيان $-0.3, 2.5$

أتحقق من فهمي

أحلُّ كلاً من المُعادلات الآتية بالقانون العام، مُقرِّباً إجابتي لأقرب جزءٍ من عشرة (إن لزم):

a) $3x^2 + 16x = -5$

b) $x^2 - 2x = 4$

المُمَيِّز

تعلَّمتُ سابقاً أنَّ للمُعادلة التربيعية حلَّين حقيقيَّين مختلفين، أو حلاً حقيقياً واحداً، أو لا توجد لها حلولٌ حقيقية، ويمكنُ تحديدُ عددِ الحلولِ الحقيقيَّةِ للمُعادلة التربيعية قبل حلِّها باستعمالِ **المُمَيِّز** (discriminant)، وهو المقدارُ التربيعيُّ الذي يقع أسفل الجذر التربيعيِّ في القانون العام $(b^2 - 4ac)$ ، ويُمَرِّزُ له بالرمز Δ .

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

المُمَيِّز

أتعلَّم

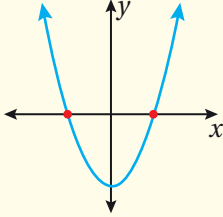
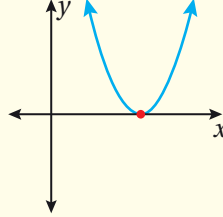
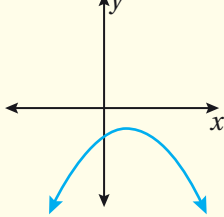
بما أنَّ $\sqrt{201}$ عددٌ غير نسبيٍّ، لذا أستمعلُ الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة تقريبية للحلِّ، أمَّا القيمة الدقيقة للحل فتكون بالابقاء على الجذر كما هو.

رُموز رياضية

الرمز Δ إغريقي، ويُقرأ دلتا.

استعمال المُميز

مُميز المُعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ هو $\Delta = b^2 - 4ac$ ، ويمكن استعماله لتحديد عدد حلول المُعادلة التربيعية كما يأتي:

إشارة المُميز Δ	$\Delta > 0$ موجب	$\Delta = 0$ صفر	$\Delta < 0$ سالب
عدد الحلول	حلان حقيقيان مختلفان	حل حقيقي واحد	لا توجد حلول حقيقية
مثال بياني			

مثال 2

أحدّد عدد الحلول الحقيقية لكل مُعادلة تربيعية مما يأتي باستعمال المُميز:

1 $x^2 - 4x + 3 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

صيغة المُميز

$$= (-4)^2 - 4(1)(3)$$

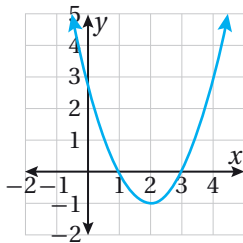
بتعويض $a=1, b=-4, c=3$

$$= 4$$

بالتبسيط

بما أن $\Delta > 0$ ، إذن للمُعادلة حلان حقيقيان مختلفان.

الدعم البياني:



يُظهر التمثيل البياني المُجاور لمنحنى الاقتران التربيعي المرتبط بالمُعادلة $x^2 - 4x + 3 = 0$ وجود حلين حقيقيين مختلفين لها.

2 $x^2 - 2x + 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-2)^2 - 4(1)(1)$$

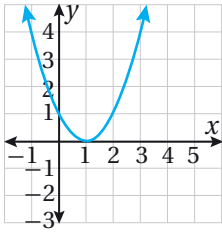
$$= 0$$

صيغة المُميز

$$a=1, b=-2, c=1 \text{ بتعويض}$$

بالتبسيط

بما أن $\Delta = 0$ ، إذن للمعادلة حل حقيقي واحد.



الدعم البياني:

يُظهر التمثيل البياني المُجاور لمنحنى الاقتران التربيعي المرتبط بالمعادلة $x^2 - 2x + 1 = 0$ وجود حل حقيقي واحد.

3 $x^2 - x + 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (-1)^2 - 4(1)(1)$$

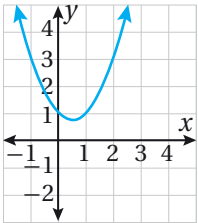
$$= -3$$

صيغة المُميز

$$a=1, b=-1, c=1 \text{ بتعويض}$$

بالتبسيط

بما أن $\Delta < 0$ ، إذن ليس للمعادلة أي حل حقيقي.



الدعم البياني:

يُظهر التمثيل البياني المُجاور لمنحنى الاقتران التربيعي المرتبط بالمعادلة $x^2 - x + 1 = 0$ عدم وجود أي حل حقيقي للمعادلة.

أتحقق من فهمي

أحدّد عدد الحلول الحقيقية لكل معادلة تربيعية مما يأتي باستعمال المُميز:

a) $-x^2 + 4x - 4 = 0$

b) $2x^2 + 8x - 3 = 0$

c) $x^2 - 6x + 11 = 0$

اختيار الطريقة الأنسب لحلّ المعادلة التربيعيّة

تعلّمتُ خمسَ طرائقٍ لحلّ المُعادلاتِ التربيعيّة، وفي بعضِ الأحيان يكونُ استعمالُ إحدى هذه الطرائق أنسبَ من استعمالِ الطرائق الأخرى، ويبيّن الجدولُ الآتي ملخصًا لهذه الطرائق وإيجابياتِ كلّ منها وسلبيّاتها.

طرائقُ حلّ المُعادلاتِ التربيعيّة

ملخصُ المفهوم

الطريقة	الإيجابيات	السلبيات
التمثيل البياني	- يمكنُ استعمالها لحلّ أيّ مُعادلةٍ تربيعيّة. - يمكنُ بسهولة تحديدُ الحلولِ مِنَ التمثيل.	قد لا تُعطي حلولًا دقيقةً.
التحليل إلى العوامل	- من أفضلِ الطرائق لتجربتها أوّلًا. - تُعطي إجابةً مباشرةً إذا كانتِ المُعادلة قابلةً للتحليل أو كان الحدُّ الثابت صفرًا.	ليست جميع المُعادلاتِ التربيعيّة قابلةً للتحليل.
استعمالُ الجذور التربيعيّة	تُستعملُ لحلّ المُعادلاتِ على الصورة $(x + a)^2 = c$، حيث $c \geq 0$	لا تُستعملُ إذا كان الحدُّ bx موجودًا.
إكمال المربع	- يمكنُ استعمالها لحلّ أيّ مُعادلةٍ تربيعيّة على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$. - من الأسهل استعمالها إذا كان $a = 1$، و b عددًا زوجيًا.	في بعضِ الأحيان تكونُ الحساباتُ مُعقّدةً.
القانون العام	- يمكنُ استعمالها لحلّ أيّ مُعادلةٍ تربيعيّة على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$. - تُعطي حُلُولًا دقيقةً.	قد تستغرقُ وقتًا أطولَ من باقي الطرائق لإجراء الحسابات.

مثال 3

أحل كل معادلة مما يأتي باستعمال أي طريقة، مبرراً سبب اختيار الطريقة:

1 $x^2 + 5x - 14 = 0$

يمكن تحليل الطرف الأيسر من المعادلة بسهولة؛ لذا أحلها باستعمال التحليل إلى العوامل.

$$x^2 + 5x - 14 = 0$$

المعادلة المعطاة

$$(x + 7)(x - 2) = 0$$

بالتحليل إلى العوامل

$$x + 7 = 0 \quad \text{or} \quad x - 2 = 0$$

خاصية الضرب الصفري

$$x = -7$$

$$x = 2$$

بحل كل معادلة

إذن، جذرا المعادلة هما 2، -7

أتذكر

أجرب أولاً طريقة التحليل إلى العوامل قبل باقي الطرائق.

2 $x^2 - 8x - 3 = 0$

بما أن معامل x^2 يساوي 1، ومعامل x عدد زوجي، فمن الأفضل استعمال طريقة إكمال المربع.

$$x^2 - 8x - 3 = 0$$

المعادلة المعطاة

$$x^2 - 8x = 3$$

بجمع 3 إلى طرفي المعادلة

$$x^2 - 8x + 16 = 3 + 16$$

بإكمال المربع بإضافة $16 = \left(\frac{-8}{2}\right)^2$ إلى طرفي المعادلة

$$(x - 4)^2 = 19$$

بتحليل المربع الكامل ثلاثي الحدود

$$x - 4 = \pm \sqrt{19}$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$x = 4 \pm \sqrt{19}$$

بجمع 4 إلى طرفي المعادلة

$$x = 4 + \sqrt{19} \quad \text{or} \quad x = 4 - \sqrt{19}$$

بفصل الحدين

إذن، جذرا المعادلة $4 + \sqrt{19}$ ، $4 - \sqrt{19}$

أفكر

هل يمكن حل المعادلة بالتحليل؟ أبرر إجابتي.

3 $2x^2 - 15x = -19$

بما أنه لا يمكن تحليل المعادلة والأعداد فيها كبيرة، فاستعمل القانون العام.

الخطوة 1: أكتب المعادلة بالصورة القياسية.

$$2x^2 - 15x = -19 \quad \text{المعادلة المعطاة}$$

$$2x^2 - 15x + 19 = 0 \quad \text{بجمع 19 إلى طرفي المعادلة}$$

الخطوة 2: استعمل المميز لتحديد عدد الحلول الحقيقية للمعادلة.

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \text{صيغة المميز}$$

$$= (-15)^2 - 4(2)(19) \quad \text{بتعويض } a = 2, b = -15, c = 19$$

$$= 73 \quad \text{بالتبسيط}$$

بما أن $\Delta > 0$ ، إذن للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان.

الخطوة 3: أطبق القانون العام.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{صيغة القانون العام}$$

$$x = \frac{-(-15) \pm \sqrt{73}}{2(2)} \quad \text{بتعويض } a = 2, b = -15, \Delta = 73$$

$$= \frac{15 \pm \sqrt{73}}{4} \quad \text{بالتبسيط}$$

$$x = \frac{15 - \sqrt{73}}{4} \quad \text{or} \quad x = \frac{15 + \sqrt{73}}{4} \quad \text{بفصل الحدين}$$

$$\text{إذن، جذرا المعادلة } \frac{15 - \sqrt{73}}{4}, \frac{15 + \sqrt{73}}{4}$$

أتحقق من فهمي

أحل كل معادلة مما يأتي باستعمال أي طريقة، مبرراً سبب اختيار الطريقة:

a) $x^2 + 3x - 28 = 0$

b) $-x^2 - 10x = 11$

c) $3x^2 - 13x = 5$

أتعلم

يُفضّل تحديد عدد الحلول الحقيقية للمعادلة قبل البدء بحلّها باستعمال القانون العام.

يُستعمل القانون العام كثيرًا في حلّ المعادلات التربيعية التي تُنمذج تطبيقات حياتية أو علمية؛ لأنّ قيمّ المعاملات في تلك المعادلات قد لا تكون بسيطة؛ ما يجعلها غير قابلةٍ للتحليل.

مثال 4: مِنَ الحياة

حرائقُ الغابات: أُطلقت قذيفة لإطفاء حريقٍ شَبَّ في إحدى الغابات، فمثَّل الاقتران $h(x) = -0.001x^2 + 0.5x + 4$ ارتفاعها بالمتّر عن سطح الأرض؛ حيث x المسافة الأفقية بين القذيفة والمدفع. أجد المسافة الأفقية بين موقع سقوط القذيفة والمدفع.

إذا افترضنا أنّ سطح الأرض يمثّل المحور x ، فإنّ أحد جذري المعادلة $-0.001x^2 + 0.5x + 4 = 0$ يمثّل موقع سقوط القذيفة.

أستعمل القانون العام لحلّ المعادلة:

$$-0.001x^2 + 0.5x + 4 = 0$$

المعادلة المرتبطة بالاقتران

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

صيغة القانون العام

$$x = \frac{-(0.5) \pm \sqrt{(0.5)^2 - 4(-0.001)(4)}}{2(-0.001)}$$

بتعويض $a = -0.001$

$b = 0.5$, $c = 4$

$$x = \frac{-0.5 \pm \sqrt{0.266}}{-0.002}$$

بالتبسيط

$$x = \frac{-0.5 + \sqrt{0.266}}{-0.002} \quad \text{or} \quad x = \frac{-0.5 - \sqrt{0.266}}{-0.002}$$

بفصل الحليّين

$$x \approx -7.9$$

$$x \approx 507.9$$

باستعمال الآلة الحاسبة

بما أنّ موقع سقوط القذيفة يكون أمام المدفع وليس خلفه، فأستثني القيمة السالبة. إذن، يبعد موقع سقوط القذيفة عن المدفع 507.9 m تقريبًا.

أتحقّق مِنْ فهمي

في مناورة تدريبية للقوّات المسلّحة الأردنية - الجيش العربي، أُطلقت قذيفة من ارتفاع 2 m، فمثَّل الاقتران $h(x) = -0.001x^2 + 0.9x + 2$ ارتفاعها بالمتّر عن سطح الأرض؛ حيث x المسافة الأفقية بين القذيفة وموقع إطلاقها. أجد المسافة الأفقية بين موقع إطلاق القذيفة وموقع سقوطها.



معلومة

استطاع العلماء مؤخرًا تطوير قنابل تحتوي على موادّ تُطفئ الحرائق، تُطلق باستخدام مدافع من مسافة تصل إلى 5 km نحو مناطق الاشتعال التي يصعب الوصول إليها، مثل الغابات.





أَحْلُ كُلًّا مِنَ الْمُعَادَلَاتِ الْآتِيَةِ بِالقانونِ العامِّ، مُقَرَّبًا إيجابيًا لأقربِ جُزءٍ مِنْ عَشْرَةٍ (إِنْ لَزِمَ):

1 $2x^2 + x - 8 = 0$

2 $3x^2 + 5x + 1 = 0$

3 $x^2 - x - 10 = 0$

4 $4x^2 + 3 = -9x$

5 $6x^2 + 22x + 19 = 0$

6 $x^2 + 3x = 6$

7 $3x^2 + 1 = 7x$

8 $2x^2 + 11x + 4 = 0$

9 $4x^2 + 5x = 3$

10 $4x^2 = 9x - 4$

11 $7x^2 = 2 - 3x$

12 $5x^2 - 10x + 1 = 0$

أَحْدُدْ عَدَدَ الْحُلُولِ الْحَقِيقِيَّةِ لِكُلِّ مُعَادَلَةٍ تَرْبِيعِيَّةٍ مِمَّا يَأْتِي بِاسْتِعْمَالِ الْمُمَيِّزِ:

13 $x^2 - 6x + 10 = 0$

14 $2x^2 - 12x = -18$

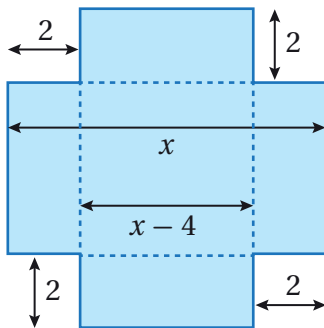
15 $-5x^2 + 8x + 9 = 0$

أَحْلُ كُلَّ مُعَادَلَةٍ مِمَّا يَأْتِي بِاسْتِعْمَالِ أَيِّ طَرِيقَةٍ، مُبَرِّرًا سَبَبَ اخْتِيَارِ الطَّرِيقَةِ:

16 $x^2 + 4x = 15$

17 $9x^2 - 49 = 0$

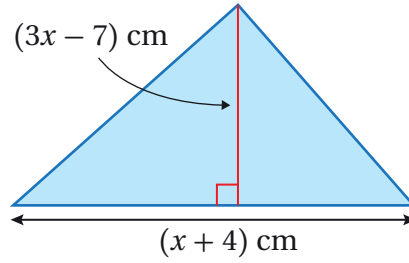
18 $x^2 + 4x - 60 = 0$



19 **صناعة:** تجري صناعة صندوق معدنيٍّ مِنْ صَفِيحَةٍ مُرَبَّعَةِ الشَّكْلِ بقطع 4 مُرَبَّعَاتٍ مُتطابِقةٍ مِنْ زَوَايَا الصَّفِيحَةِ، طَوَّلُ ضَلَعِ كُلِّ مُرَبَّعٍ مِنْهَا 2 m، ثُمَّ تُطَوَّى الْجَوَانِبُ لِتَشْكِيلِ الصُّنْدُوقِ. إِذَا كَانَ حَجْمُ الصُّنْدُوقِ 144 m^3 ، فَاجِدْ أبعادَ الصَّفِيحَةِ الْأَصْلِيَّةِ الَّتِي صُنِعَ مِنْهَا الصُّنْدُوقُ، مُقَرَّبًا إيجابيًا لأقربِ جُزءٍ مِنْ عَشْرَةٍ.

20 **حديقة:** حديقةٌ مُسْتطِيلَةُ الشَّكْلِ يَزِيدُ طَوَّلُهَا عَلَى عَرْضِهَا بِمَقْدَارِ 5 m. إِذَا كَانَتْ مَسَاحَتُهَا 60 m^2 ، فَاجِدْ أبعادَهَا، مُقَرَّبًا إيجابيًا لأقربِ جُزءٍ مِنْ مِئَةٍ.

21 هندسة: يُبين الشكل الآتي مثلثاً مساحته 10 cm^2 . أجد قيمة x ، مُقَرَّبًا إجابتي لأقرب جزءٍ من عشرة.

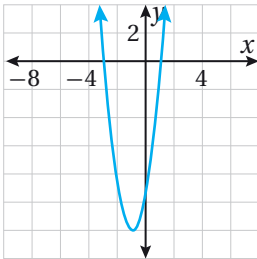


22 أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.

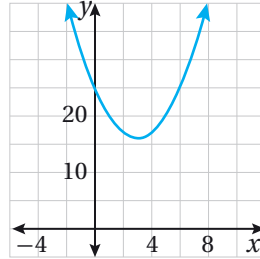
مهارات التفكير العليا

تبرير: أصل كل معادلة في ما يأتي بالتمثيل البياني للافتراض المرتبط بها، مُبرِّراً إجابتي:

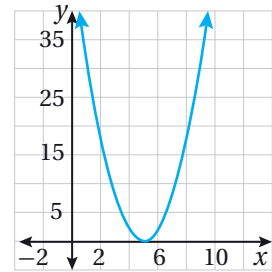
23 $x^2 - 6x + 25 = 0$



24 $2x^2 - 20x + 50 = 0$



25 $3x^2 + 6x - 9 = 0$



26 نَحَدِّ: حلَّت رنيم معادلةً تربيعيةً باستعمال القانون العام فكانت إجابتها $x = \frac{3 \pm \sqrt{37}}{2}$. أجد المعادلة التربيعية التي حلَّتها رنيم.

27 أكتشف الخطأ: يقول نور إن مُميِّز المعادلة $2x^2 + 5x - 1 = 0$ هو 17. أكتشف الخطأ الذي وقع فيه نور وأصحَّحه.

حلُّ مُعادلاتٍ خاصَّةٍ

Solving Special Equations

حلُّ مُعادلاتٍ خاصَّةٍ أُسِّ المُتغيِّر فيها عددٌ صحيحٌ موجبٌ أكبر من 2

الصورة التريبيَّة.

فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم



$(18 - w)$ cm

كيسٌ للهدايا على شكلٍ مُتوازي مستطيلات، حجمه 1152 cm^3 ، وأبعاده بدلالة المُتغيِّر w مَوْضَحَةٌ في الشكل المُجاور. أجد أبعاده.

w cm

$(2w + 4)$ cm

تعلَّمتُ في الدروسِ السابقة حلَّ المُعادلاتِ التريبيَّةِ بطرائقٍ مُتنوِّعة، وسأتعلَّمُ في هذا الدرسِ حلَّ مُعادلاتِ أُسِّ المُتغيِّر فيها عددٌ صحيحٌ موجبٌ أكبر من 2 باستعمالِ التحليلِ والتجميعِ وخاصيَّةِ الضربِ الصِّفريِّ.

حلُّ المُعادلاتِ بإخراجِ العاملِ المُشتركِ

تعلَّمتُ سابقاً أنَّ تحليلَ المقدارِ الجبريِّ بإخراجِ العاملِ المُشتركِ لحدوده هُوَ عمليَّةٌ عكسيَّةٌ لعمليَّةِ التوزيع، ويمكنُ الإفادة من إخراجِ العاملِ المُشتركِ في تبسيطِ وحلِّ مُعادلاتِ أُسِّ المُتغيِّر فيها عددٌ صحيحٌ أكبر من 2.

أتعلَّمُ

أحتاجُ في بعضِ المُعادلاتِ إلى استعمالِ طرائقِ حلِّ المُعادلاتِ التريبيَّةِ التي تعلَّمتُها سابقاً، بعد إخراجِ العاملِ المُشتركِ الأكبر.

مثال 1

أحلُّ كُلًّا من المُعادلاتِ الآتية:

1 $x^3 + 4x^2 = 5x$

$$x^3 + 4x^2 = 5x$$

المُعادلة المُعطاة

$$x^3 + 4x^2 - 5x = 0$$

ب طرح $5x$ من طرفي المُعادلة

$$x(x^2 + 4x - 5) = 0$$

بالتحليلِ بإخراجِ العاملِ المُشتركِ الأكبر

$$x(x + 5)(x - 1) = 0$$

بالتحليلِ إلى العوامل

$$x = 0 \quad \text{or} \quad x + 5 = 0 \quad \text{or} \quad x - 1 = 0$$

خاصيَّةُ الضربِ الصِّفريِّ

$$x = -5$$

$$x = 1$$

بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ

إذن، جذورُ المُعادلة $-5, 0, 1$

أتعلَّمُ

أكتبُ جميعَ حدودِ المُعادلة في الطرفِ الأيسرِ من المُعادلة قبل إخراجِ العاملِ المُشتركِ.

2 $2x^3 = 18x$

$$2x^3 = 18x$$

المعادلة المُعطاة

$$2x^3 - 18x = 0$$

بِطرح $18x$ من طَرَفِيّ المعادلةِ

$$2x(x^2 - 9) = 0$$

بالتحليلِ بإخراج العاملِ المُشتركِ الأكبرِ

$$2x(x - 3)(x + 3) = 0$$

بتحليلِ الفرقِ بينَ مُربَّعينِ

$$2x = 0 \quad \text{or} \quad x - 3 = 0 \quad \text{or} \quad x + 3 = 0$$

خاصيةُ الضربِ الصّفريّ

$$x = 0$$

$$x = 3$$

$$x = -3$$

بحلّ كلّ معادلةٍ

إذن، جذورُ المعادلةِ $-3, 0, 3$

أُتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي  أحلُّ كُلاًّ مِنَ المعادلاتِ الآتية:

a) $x^3 + 12x = 7x^2$

b) $x^3 = 25x$

حلُّ المعادلاتِ بالتجميعِ

يمكنُ حلُّ المعادلاتِ التي تحتوي على أربعة حُدودٍ جبريّةٍ أو أكثرَ باستعمالِ طريقةِ التجميعِ، وذلكَ بتجميعِ الحُدودِ التي تحتوي على عواملٍ مُشتركةٍ بينها، ثمَّ استعمالِ خاصيةِ الضربِ الصّفريّ لحلِّ المعادلةِ.

مثال 2

أحلُّ كُلاًّ مِنَ المعادلاتِ الآتية:

1 $x^3 - 2x^2 + 9x - 18 = 0$

$$x^3 - 2x^2 + 9x - 18 = 0$$

المعادلة المُعطاة

$$(x^3 - 2x^2) + (9x - 18) = 0$$

بتجميعِ الحُدودِ ذاتِ العواملِ المُشتركةِ

$$x^2(x - 2) + 9(x - 2) = 0$$

بتحليلِ كلّ تجميعٍ بإخراج العاملِ المُشتركِ الأكبرِ

$$(x - 2)(x^2 + 9) = 0$$

إخراج $(x - 2)$ عاملاً مُشترَكًا

$$x - 2 = 0 \quad \text{or} \quad x^2 + 9 = 0$$

خاصيةُ الضربِ الصّفريّ

$$x = 2$$

بحلِّ المعادلةِ

بما أنَّه لا يوجدُ حلٌّ حقيقيٌّ للمعادلةِ $x^2 + 9 = 0$ ، فإنَّ للمعادلةِ الأصليّةِ جذرًا واحدًا هو 2

أتذكّر

للتحقّقِ مِنْ صِحّةِ الحلِّ، أَعوّضُ قِيَمَ x في المعادلةِ الأصليّةِ.

أتذكّر

يمكنُ تحليلُ المقدارِ الجبريّ بالتجميعِ إذا تحقّقتِ الشروطُ الآتيةُ جميعُها:

- إذا احتوى على أربعة حُدودٍ أو أكثرَ.
- إذا احتوى على عواملٍ مُشتركةٍ بينَ الحُدودِ يمكنُ تجميعُها معًا.
- إذا احتوى على عاملينِ مُشترَكَيْنِ مُتساوَيْنَيْنِ أو كانَ أحدهُما نظيرًا لآخر.

أفكّر

لماذا $x^2 + 9 \neq 0$ ؟ أبرّر إجابتي.

2 $4x^3 + 8x^2 - 5x - 10 = 0$

$$4x^3 + 8x^2 - 5x - 10 = 0$$

المعادلة المُعطاة

$$(4x^3 + 8x^2) + (-5x - 10) = 0$$

بتجميع الحدود ذات العوامل المشتركة

$$4x^2(x + 2) - 5(x + 2) = 0$$

بتحليل كل تجميع بإخراج العامل المشترك الأكبر

$$(x + 2)(4x^2 - 5) = 0$$

إخراج $(x+2)$ عاملاً مشتركاً

$$x + 2 = 0 \quad \text{or} \quad 4x^2 - 5 = 0$$

خاصية الضرب الصفري

$$x = -2 \quad x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

بحل كل المعادلة

$$\text{إذن، جذور المعادلة } -2, -\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}$$

أتحقق من فهمي

أحلُّ كلاً من المعادلات الآتية:

a) $9x^3 + 18x^2 + 2x + 4 = 0$

b) $2x^3 + x^2 - 14x - 7 = 0$

أندكر

تُستعمل الجذور التربيعية لحل المعادلات على الصورة $x^2 = c$ ، حيث $c \geq 0$

تحليل مجموع مُكعَّبين أو تحليل الفرق بينهما، وحل معادلتيهما

تعلَّمت سابقاً حالة خاصة من تحليل المقادير الجبرية، هي تحليل الفرق بين مُربَّعين، وتوجد أيضاً حالة خاصة أخرى من تحليل المقادير الجبرية، هي تحليل مجموع مُكعَّبين أو تحليل الفرق بينهما.

تحليل مجموع مُكعَّبين أو تحليل الفرق بينهما

مفهوم أساسي

• تحليل مجموع مُكعَّبين

بالرموز	مثال
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$	$x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$

• تحليل الفرق بين مُكعَّبين

بالرموز	مثال
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$	$x^3 - 64 = (x - 4)(x^2 + 4x + 16)$

يمكنُ حلُّ مُعادلاتٍ تحتوي على مجموع مُكعَّبين أو على الفرق بينهما باستعمال طرائق التحليل الخاصّة بكلّ منهما وخاصيّة الضرب الصّفريّ.

مثال 3

أحلُّ كُلٍّ مِنَ المُعادلات الآتية:

1 $8x^3 + 1 = 0$

$8x^3 + 1 = 0$ المُعادلة المُعطاة

$(2x)^3 + 1^3 = 0$ بالكتابة على صورة مجموع مُكعَّبين

$(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) = 0$ بتحليل مجموع مُكعَّبين

$2x + 1 = 0$ or $4x^2 + 2x + 1 = 0$ خاصيّة الضرب الصّفريّ

$x = -\frac{1}{2}$ بحلّ المُعادلة

بما أنّه لا يوجد حلّ حقيقيّ للمُعادلة $4x^2 + 2x + 1 = 0$ ، فإنّ للمُعادلة الأصليّة جذراً وحيداً هو $-\frac{1}{2}$

طريقة بديلة

يمكنُ حلُّ المُعادلة $8x^3 + 1 = 0$ بطريقةٍ أخرى كالآتي:

$8x^3 + 1 = 0$ المُعادلة المُعطاة

$8x^3 = -1$ ب طرح 1 من طرفي المُعادلة

$x^3 = \frac{-1}{8}$ بقسمة طرفي المُعادلة على 8

$x = -\frac{1}{2}$ بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين

2 $x^3 - 125 = 0$

$x^3 - 125 = 0$ المُعادلة المُعطاة

$x^3 - 5^3 = 0$ بالكتابة على صورة الفرق بين مُكعَّبين

$(x - 5)(x^2 + 5x + 25) = 0$ بتحليل الفرق بين مُكعَّبين

$x - 5 = 0$ or $x^2 + 5x + 25 = 0$ خاصيّة الضرب الصّفريّ

$x = 5$ بحلّ المُعادلة

بما أنّه لا يوجد حلّ حقيقيّ للمُعادلة $x^2 + 5x + 25 = 0$ ، فإنّ للمُعادلة الأصليّة جذراً وحيداً هو $x = 5$

أفكّر

لماذا $4x^2 + 2x + 1 \neq 0$ ؟
أستعمل المُميّز لأبَرّر
إجابتي.

3 $128x^5 - 54x^2 = 0$

$128x^5 - 54x^2 = 0$ المُعَادَلَةُ الْمُعْطَاةُ

$2x^2 (64x^3 - 27) = 0$ بالتحليل بإخراج العامل المشترك

$2x^2 ((4x)^3 - 3^3) = 0$ بالكتابة على صورة الفرق بين مكعبين

$2x^2 (4x-3)(16x^2 + 12x + 9) = 0$ بتحليل الفرق بين مكعبين

$2x^2 = 0$ or $4x-3=0$ or $16x^2+12x+9=0$ خاصية الضرب الصفري

$x = 0$ $x = \frac{3}{4}$ بحل كل معادلة

بما أنه لا يوجد حل حقيقي للمعادلة $16x^2 + 12x + 9 = 0$ ، فإن للمعادلة الأصلية جذران هما: $0, \frac{3}{4}$

✍ **أتحقق من فهمي**

أحلُّ كلاً من المعادلات الآتية:

a) $27x^3 - 1 = 0$ b) $x^3 + 1000 = 0$ c) $16x^4 - 250x = 0$

تحليل مُعادلاتٍ على الصورة التربيعية

يُسمَّى المقدار الجبري المكتوب على الصورة $au^2 + bu + c$ ؛ حيث u مقدار جبري، مقداراً على **الصورة التربيعية** (quadratic form)، ويمكن استعمال طرائق التحليل التي تعلّمناها سابقاً في حلّ مُعادلاتٍ تحوي مقادير على الصورة التربيعية.

مثال 4

أحلُّ المعادلة: $x^6 - 3x^3 - 40 = 0$

الطريقة 1: التحليل

$x^6 - 3x^3 - 40 = 0$ المُعَادَلَةُ الْمُعْطَاةُ

$(x^3)^2 - 3x^3 - 40 = 0$ بكتابة المعادلة على الصورة التربيعية

$(x^3 - 8)(x^3 + 5) = 0$ بالتحليل إلى العوامل

$x^3 - 8 = 0$ or $x^3 + 5 = 0$ خاصية الضرب الصفري

$x = 2$ $x = \sqrt[3]{-5}$ بحل كل معادلة

إذن، جذرا المعادلة $2, \sqrt[3]{-5}$

أُنذِرُ

أحلُّ أولاً بإخراج العامل المشترك لتسهيل حلّ المعادلة.

أفكّر

هل يمكن حلّ المعادلة $x^3 + 5 = 0$ بطريقة أخرى؟ أبرّر إجابتي.

الطريقة 2: التعويض

أفترض أن $u = x^3$

$$x^6 - 3x^3 - 40 = 0$$

المعادلة المُعطاة

$$(x^3)^2 - 3x^3 - 40 = 0$$

بكتابة المعادلة على الصورة التربيعية

$$u^2 - 3u - 40 = 0$$

بتعويض $x^3 = u$

$$(u - 8)(u + 5) = 0$$

بتحليل الفرق بين مربعين

$$u - 8 = 0 \quad \text{or} \quad u + 5 = 0$$

خاصية الضرب الصفري

$$u = 8$$

$$u = -5$$

بحل كل المعادلة

$$x^3 = 8$$

$$x^3 = -5$$

بتعويض $u = x^3$

$$x = 2$$

$$x = \sqrt[3]{-5}$$

بأخذ الجذر التكعيبي لطرفي كل معادلة

إذن، جذرا المعادلة $2, \sqrt[3]{-5}$

أتحقق من فهمي

أحلّ كلاً من المعادلات الآتية:

a) $x^4 - 625 = 0$

b) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

لحلّ المعادلات التي أس المتغير فيها عدد صحيح أكبر من 2 كثير من التطبيقات الحياتية.

مثال 5: من الحياة



صناعة: تصنع شركة صناديق لحفظ البضائع على شكل مُتوازي مستطيلات، طولها يقل 30 cm عن ارتفاعها، وعرضها يقل 90 cm عن ارتفاعها. إذا كان حجم الصندوق 324000 cm^3 ، فأجد أبعاده.

أفترض أن طول الصندوق l ، وعرضه w ، وارتفاعه h ، وحجمه V .

طول الصندوق: $l = h - 30$

عرض الصندوق: $w = h - 90$

$$V = l \times w \times h$$

حجم مُتوازي المستطيلات

$$324000 = (h - 30)(h - 90)h$$

بتعويض, $V = 324000$

$$l = h - 30, w = h - 90$$

$$324000 = h^3 - 120h^2 + 2700h$$

باستعمال خاصية التوزيع

$$h^3 - 120h^2 + 2700h - 324000 = 0$$

ب طرح 324000 من طَرَفِي المُعادلة

$$(h^3 - 120h^2) + (2700h - 324000) = 0$$

بتجميع الحدود ذات العوامل المُشتركة

$$h^2(h - 120) + 2700(h - 120) = 0$$

بتحليل كل تجميع بإخراج العامل المُشترك الأكبر

$$(h - 120)(h^2 + 2700) = 0$$

إخراج $(h - 120)$ عاملاً مُشتركًا

$$h - 120 = 0 \quad \text{or} \quad h^2 + 2700 = 0$$

خاصية الضرب الصفرِي

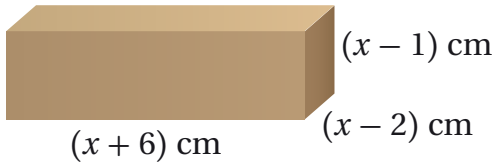
$$h = 120$$

بحل المُعادلة

بما أَنَّهُ لا يوجد حل حقيقي للمُعادلة $h^2 + 2700 = 0$, فإن ارتفاع الصندوق 120 cm, ومنهُ

فإن طوله 90 cm, وعرضه 30 cm

أتحقق مِن فهمي



صناعة: تصنع شركة صناديق لجهاز إلكتروني على شكل مُتوازي مستطيلات،

أبعادها كما هو مُبين في الشكل المُجاور.

إذا كان حجم الصندوق 60 cm^3 , فأجد أبعاده.



أَتدرب وَأحلُّ المسائل



أحلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلات الآتية:

1 $3x^4 - 12x^3 = 0$

2 $35x^3 - 28x^2 - 7x = 0$

3 $6x^6 - 3x^4 - 9x^2 = 0$

4 $2x^3 + 4x^2 + 2x = 0$

5 $3x^3 = 12x$

6 $x^3 + 4x^2 + 4x = 0$

7 $2x^3 - 3x^2 - 4x + 6 = 0$

8 $10x^3 - 15x^2 + 2x - 3 = 0$

9 $x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$

10 $125x^3 - 1 = 0$

11 $3x^3 + 3000 = 0$

12 $x^4 + x^3 - 12x - 12 = 0$

13 $5x^3 - 320 = 0$

14 $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

15 $2x^4 - 9x^2 + 4 = 0$

16 $4x^4 + 20x^2 = -25$

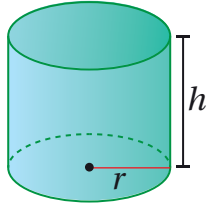
17 $16x^4 - 81 = 0$

18 $5w^6 - 25w^3 + 30 = 0$



19 **مشاريع صغيرة:** يُمثّل الاقتران $R(t) = t^3 - 8t^2 + t + 15$ الإيراد السنوي (بالألف

دينار) لمشروع غداء الصغير بعد t عامًا من إنشائه. بعد كم سنة يصل إيراد غداء إلى 23 ألف دينار؟



20 **هندسة:** يُبين الشكل المجاور أسطوانة حجمها $25\pi h \text{ cm}^3$. إذا كان طول نصف قطر

قاعدة الأسطوانة يقل عن ارتفاعها بمقدار 3 cm، فأجد أبعادها.

21 **أحلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.**

مهارات التفكير العليا

22 **أكتشف الخطأ:** حلّت نداء المعادلة $2x^4 - 18x^2 = 0$ ، كما هو مبين أدناه. أكتشف الخطأ في حلّها وأصحّحه.

$$\begin{aligned} 2x^4 - 18x^2 &= 0 \\ 2x^2(x^2 - 9) &= 0 \\ x^2 - 9 &= 0 \\ (x + 3)(x - 3) &= 0 \\ x = -3 \text{ or } x &= 3 \end{aligned}$$

تحدّد: أحلّ المعادلتين الآتيتين، مُبرّرًا إجابتي:

23 $x^6 + 4x^3 = 2$

24 $(x^2 - 1)^2 - 2(x^2 - 1) = 3$

25 **تبرير:** أجد قيمة العدد w التي تجعل للمعادلة $5x^3 + wx^2 + 80x = 0$ حلين حقيقيين فقط، مُبرّرًا إجابتي.

اختبار نهاية الوحدة

أحلّ كُلًّا مِنَ الْمُعَادَلَاتِ الْآتِيَةِ بَيَانِيًّا:

7 $-x^2 + 7x - 12 = 0$

8 $x^2 - 8x + 16 = 0$

9 $-x^2 - 6x = 9$

10 $3x^2 - 27 = 0$

11 $x^2 + 6x = -8$

أحلّ كُلًّا مِنَ الْمُعَادَلَاتِ الْآتِيَةِ:

12 $x^2 - 3x - 10 = 0$

13 $x^2 - 8x + 15 = 0$

14 $m^2 + 10m + 25 = 0$

15 $25t^2 - 49 = 0$

16 $12x^2 - 16x - 35 = 0$

17 $10x^2 - x = 2$

18 $25x^2 = 10 - 45x$



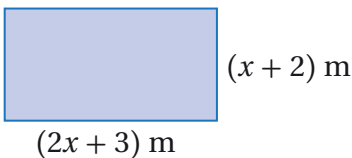
19 يُمَثِّلُ الاقتران $h(t) = -16t^2 + 8t$

ارتفاع جندبٍ بالقدم بعد t ثانية من

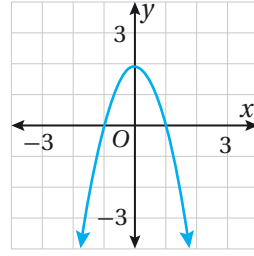
قفزه. بعد كم ثانية يصل إلى ارتفاع 1 ft

عن سطح الأرض؟

20 يبيِّن الشكل الآتي مستطيلاً مساحته 91 m^2 . أجد أبعاده.



أختار رمز الإجابة الصحيحة لكلِّ ممَّا يأتي:



1 أيُّ ممَّا يأتي يُمَثِّلُ أحد

حلولِ المُعادلة التربيعية

في الشكل المُجاور؟

a) 1 b) 2

c) 0 d) 3

2 جذرا المُعادلة $3x^2 - 48 = 0$ ، هما:

a) -2, 2 b) -4, 4

c) -16, 16 d) 6, -6

3 جذرا المُعادلة $x^2 - 17x + 42 = 0$ ، هما:

a) 1, 42 b) 2, 21

c) 3, 14 d) 6, 7

4 جذرا المُعادلة $2x^2 - x - 3 = 0$ ، هما:

a) $-\frac{2}{3}, 1$ b) $\frac{2}{3}, -1$

c) $-\frac{3}{2}, 1$ d) $\frac{3}{2}, -1$

5 مُستطيلٌ مساحته $(3x^2 + 22x + 24)$ وحدة مُربَّعة.

أيُّ ممَّا يأتي يُمَثِّلُ محيطه؟

a) $8x + 20$ b) $4x + 24$

c) $4x + 10$ d) $8x + 50$

6 أيُّ المقادير الجبرية الآتية ليس مُربَّعاً كاملاً؟

a) $x^2 - 26x + 169$ b) $x^2 + 32x + 256$

c) $x^2 + 30x - 225$ d) $x^2 - 44x + 484$

اختبار نهاية الوحدة

أحلّ كُلَّ مَا يَأْتِي:

أحلّ كُلَّ مَا مِنَ الْمُعَادَلَاتِ الْآتِيَةِ بِالقانونِ العامِّ، مُقَرَّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عَشْرَةٍ (إِنْ لَزِمَ):

37 $5x^2 + 2x - 1 = 0$

38 $7x^2 + 12x = -2$

39 $3x^2 + 11x = -9$

أحلّ كُلَّ مُعَادَلَةٍ مِمَّا يَأْتِي بِاستعمالِ أَيِّ طَرِيقَةٍ، مُبَرَّرًا سَبَبَ اختيارِ الطَرِيقَةِ:

40 $2x^2 + 7x = 0$

41 $4x^2 + 8x - 5 = 0$

42 $x^2 - 2x = 5$

أحلّ كُلَّ مَا مِنَ الْمُعَادَلَاتِ الْآتِيَةِ:

43 $3x^4 = 27x^2$

44 $x^3 + x^2 = 4x + 4$

45 $2x^3 + 3x^2 = 8x + 12$

46 $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$

تدريب على الاختبارات الدولية

47 أيُّ قِيَمِ c الْآتِيَةِ تَجْعَلُ الْمُعَادَلَةَ $5x^2 + c = 10$ دُونَ حُلٍّ؟

- a) 12 b) 5 c) 9 d) 1

48 أيُّ مِمَّا يَأْتِي يُعَدُّ عاملاً لثلاثي الحدود $13x^2 + 32x - 21$ ؟

- a) $13x + 3$ b) $13x + 7$
c) $13x + 21$ d) $13x - 7$

49 أيُّ مِمَّا يَأْتِي يَجْعَلُ الْمَقْدَارَ $x^2 + 14x$ عِنْدَ إِضَافَتِهِ مُرَبَّعًا كَامِلًا؟

- a) 7 b) 49 c) 14 d) 196

50 عددُ الحُلُولِ الْحَقِيقِيَّةِ لِلْمُعَادَلَةِ $x^2 + 7x = -11$ ، هُوَ:

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

21 $2x^2 + 13x + 20$

22 $7y^2 + 16y - 15$

23 $2t^2 - t - 3$

24 $8y^2 - 10y - 3$

25 $2q^2 - 11q - 21$

26 $10w^2 + 11w - 8$



27 يُمَثِّلُ الاقتران $h(t) = -5t^2 + 30t$

ارتفاع صاروخ ألعاب نارية بالأمتار بعد t ثانية مِنْ إطلاقيه. بعد كم ثانية مِنْ إطلاقيه يصل الصاروخ إلى الأرض؟

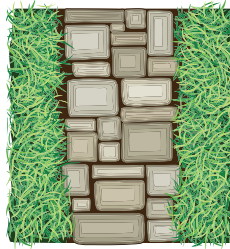
أحلّ كُلَّ مَا مِنَ الْمُعَادَلَاتِ الْآتِيَةِ بِإِكْمَالِ الْمُرَبَّعِ، تَارِكًا الإجابة بدلالة الجذر التربيعي:

28 $x^2 + 6x + 7 = 0$

29 $x^2 - 3x - 1 = 0$

30 $x^2 - 9x + 10 = 0$

31 $x^2 - 2x - 7 = 0$



32 **فناء:** فناء منزل على شكل

مُسْتَطِيلٍ يَزِيدُ طَوْلُهُ عَلَى عَرْضِهِ بِمَقْدَارِ 6 m، وَمَسَاحَتُهُ 216 m^2 . أَجِدْ أبعادَهُ، مُسْتَعْمِلًا إِكْمَالِ الْمُرَبَّعِ.

أحلّ كُلَّ مَا مِنَ الْمُعَادَلَاتِ الْآتِيَةِ بِإِكْمَالِ الْمُرَبَّعِ، مُقَرَّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عَشْرَةٍ (إِنْ لَزِمَ):

33 $x^2 - 10x = 24$

34 $x^2 + x - 1 = 0$

35 $2x^2 + 20x - 10 = 0$

36 $3x^2 - 6x - 9 = 0$

ما أهمية هذه
الوحدة؟

الهندسة الإحداثية عماد نظام تحديد المواقع العالمي (GPS)، وهي تُستخدم في كثير من التطبيقات العلمية والحياتية المهمة، مثل أجهزة الرادار التي ترصد حركة السفن والطائرات وتنظمها، كما تُستخدم في تخطيط الطرق والحدائق.

سأتعلم في هذه الوحدة:

- إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي.
- إيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي.
- إيجاد البعد بين نقطة ومستقيم.
- استعمال الهندسة الإحداثية لبرهنة بعض النظريات.

تعلمت سابقاً:

- ✓ إيجاد ميل خط مستقيم ومعادلته.
- ✓ حل نظام من معادلتين خطيتين.
- ✓ الشروط التي تؤكد أن شكلاً رباعياً متوازي أضلاع.
- ✓ تحديد ما إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلاً أو معيناً أو مربعاً.

إيجاد المسافة بين مدينتين على الخريطة باستعمال برمجية جيو جيرا.

فكرة المشروع

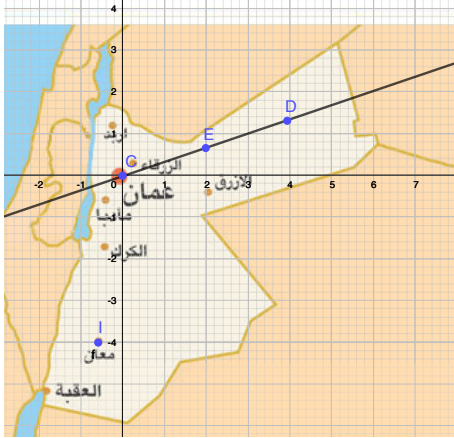


شبكة الإنترنت، برمجية جيو جيرا.

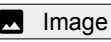
المواد والأدوات



خطوات تنفيذ المشروع:



1 أبحث مع أفراد مجموعتي في شبكة الإنترنت عن خريطة المملكة الأردنية الهاشمية، ثم أحفظها في جهاز الحاسوب.

2 أنقر على أيقونة  Image من شريط الأدوات، ثم أختار الصورة التي حفظتها.

3 أعدل موقع الصورة، وأختار مقاساً مناسباً لها بتحرك النقطتين A و B، اللتين تظهران عليها، بحيث تكون العاصمة عمان نقطة الأصل.

4 أظهر الشبكة فوق الصورة بنقر زر الفأرة الأيمن، ثم أختار  Settings ، ومنها أختار  background image

5 أجد مقياس رسم الخريطة، التي أدرجتها، باتباع الخطوات الآتية:

- أختار أيقونة  A من شريط الأدوات، ثم أنقر موقع العاصمة على الخريطة ليظهر الحرف C، وأنقر موقع المحافظة ليظهر الحرف D، ونظهر الإحداثيات في شريط الإدخال.

- أستعمل صيغة المسافة بين نقطتين لأجد بُعد المحافظة عن العاصمة عمان.

- أبحث في شبكة الإنترنت عن المسافة الحقيقية بين المحافظة التي اخترتها والعاصمة عمان، ثم أجد مقياس الرسم.

6 أجد المسافة الحقيقية بين 3 محافظات أخرى، مستعملاً الخطوات السابقة ومقياس الرسم الذي أوجدته.

7 أستعمل صيغة نقطة المنتصف في المستوى الإحداثي لأجد نقطة المنتصف بين المحافظات الثلاث التي اخترتها في الخطوة السابقة.

8 يُمكنني إيجاد معادلة المستقيم الواصل بين أي محافظتين على الخريطة بالنقر على أيقونة  Line من شريط الأدوات، ثم بالنقر على كل من النقطتين اللتين تمثلان المحافظتين، لتظهر معادلة المستقيم في شريط الإدخال.

9 أجد البعد بين النقطة التي تمثل إحدى المحافظات والمستقيم من الخطوة السابقة باستعمال صيغة البعد بين نقطة ومستقيم.

عرض النتائج:

أعدُّ عرضاً تقديمياً أُبين فيه خطوات تنفيذ المشروع موضحاً بالصور، وبعض الصعوبات التي واجهتها في أثناء العمل.

الدرس 1

المسافة في المستوى الإحداثي Distance in the Coordinate Plane

- إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي.
 - إيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي.
- المسافة، إحداثي، نقطة المنتصف.

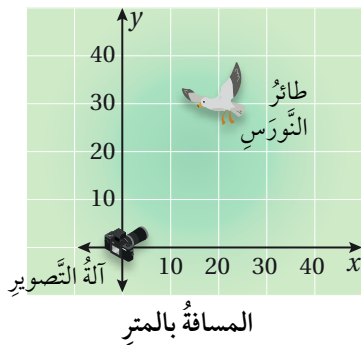
فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم

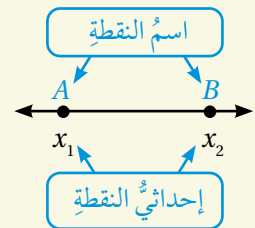


تلتقط آلة تصوير صورًا عالية الدقة للطيور التي تبعد عنها 50 m أو أقل. هل تلتقط الآلة صورة عالية الدقة لطائر النورس الموضح موقعه في المستوى الإحداثي المجاور؟

المسافة بين نقطتين

المسافة (distance) بين نقطتين على خط الأعداد هي طول القطعة المستقيمة الواصلة بين هاتين النقطتين بحيث تمثلان نهايتي القطعة، ويمكن استعمال **إحداثي** (coordinate) كل من النقطتين لإيجاد المسافة بينهما.

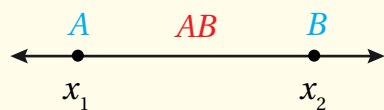
أنعلّم



صيغة المسافة على خط الأعداد

مفهوم أساسي

بالكلمات: المسافة بين نقطتين على خط الأعداد هي القيمة المطلقة للفرق بين إحداثيهما.



بالرموز: إذا كان إحداثي النقطة A على خط الأعداد هو x_1 وإحداثي النقطة B هو x_2 ، فإن:

$$AB = |x_2 - x_1| \quad \text{or} \quad AB = |x_1 - x_2|$$

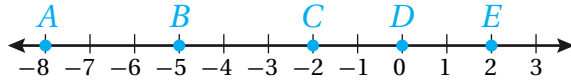
رموز رياضية

يُرمز للقطعة المستقيمة التي نقطة بدايتها A ونهايتها B بالرمز $\overline{AB}$ أما طولها فيرمز له بالرمز

AB

مثال 1

أستعمل خطَّ الأعداد الآتي لِأجد BE .



بما أن إحداثي النقطة B هو -5 ، وإحداثي النقطة E هو 2 ، فإن:

$$\begin{aligned} BE &= |x_2 - x_1| && \text{صيغة المسافة على خط الأعداد} \\ &= |2 - (-5)| && \text{بتعويض } x_2 = 2, x_1 = -5 \\ &= 7 && \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

أتحقق من فهمي

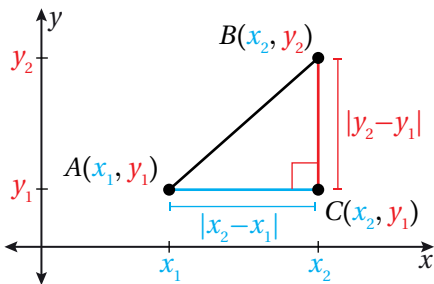
أستعمل خطَّ الأعداد المُبين أعلاه لِأجد كلاً ممَّا يأتي:

a) AD

b) CB

أتعلّم

بما أن $\overline{BE}$ هو نفسه $\overline{EB}$ ، فإن ترتيب اسم النقطتين غير مهم عند إيجاد المسافة بينهما.

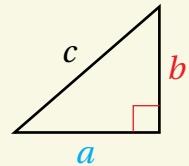


يُمكنني إيجاد المسافة بين النقطتين A و B في المستوى الإحداثي باستعمال نظرية فيثاغورس، وذلك بتشكيل مثلث قائم الزاوية يكون $\overline{AB}$ وترًا فيه، كما في الشكل المُجاور، ثم أستعمل نظرية فيثاغورس لِأجد AB كالآتي:

$$\begin{aligned} (AB)^2 &= (AC)^2 + (CB)^2 && \text{نظرية فيثاغورس} \\ (AB)^2 &= (|x_2 - x_1|)^2 + (|y_2 - y_1|)^2 && \text{بتعويض } AC = |x_2 - x_1| \\ &&& CB = |y_2 - y_1| \\ (AB)^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 && \text{مربعات الأعداد دائماً موجبة} \\ AB &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} && \text{بأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة} \end{aligned}$$

أذكر

نظرية فيثاغورس

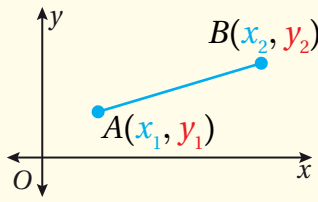


$$a^2 + b^2 = c^2$$

تُسمى الصيغة التي توصّلت إليها من نظرية فيثاغورس صيغة المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي.

صيغة المسافة في المستوى الإحداثي

مفهوم أساسي



المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ هي:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

أتعلم

من الأسهل إيجاد طول القطعة المستقيمة الأفقية في المستوى الإحداثي باستعمال صيغة المسافة على خط الأعداد، وذلك بإيجاد القيمة المطلقة للفرق بين الإحداثي x لكل من نقطتي نهايتي القطعة، وإيجاد طول القطعة المستقيمة العمودية. أجد القيمة المطلقة للفرق بين الإحداثي y لكل من نقطتي نهايتي القطعة.

مثال 2

أجد المسافة بين النقطتين $P(-7, 5)$ و $Q(4, -3)$ ، مُقَرَّبًا إيجابيًا لأقرب جزء من عشرة.

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

صيغة المسافة في المستوى الإحداثي

$$= \sqrt{(4 - (-7))^2 + ((-3) - 5)^2}$$

بتعويض $(x_1, y_1) = (-7, 5)$

$(x_2, y_2) = (4, -3)$

$$= \sqrt{(11)^2 + (-8)^2}$$

بالتبسيط

$$= \sqrt{185}$$

بإيجاد مربع كل عدد، والجمع

$$\approx 13.6$$

باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، المسافة بين النقطتين P و Q هي 13.6 وحدة تقريبًا.

أتحقق من فهمي

أجد المسافة بين كل نقطتين مما يأتي، مُقَرَّبًا إيجابيًا لأقرب جزء من عشرة (إن لزم):

a) $C(5, 0), D(-7, 9)$

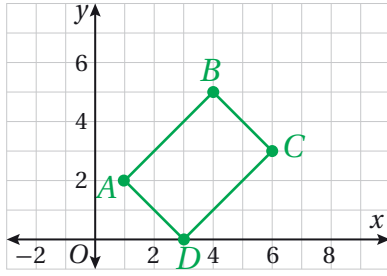
b) $G(4, -2), H(8, -8)$

يمكن استعمال صيغة المسافة في تطبيقات حياتية، مثل إيجاد المساحة والمحيط في المخططات الهندسية.

أتعلم

عند إيجاد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي لا يكون ترتيب الإحداثيين x و y في كل مجموعة من الأقواس مهمًا.

مثال 3: مِنَ الحِياةِ



حديقة: يظهر في المستوى الإحداثي المجاور مخطط قاعدة بيت بلاستيكي مستطيل الشكل بنته غيداء في فناء منزلها الخلفي لزراعة النباتات. إذا كانت كل وحدة في المستوى الإحداثي تمثل متراً واحداً، فأجد مساحة البيت البلاستيكي، مقرباً إجابتي لأقرب جزء من عشرة.



معلومة

للبيت البلاستيكي العديد من المميزات، مثل توفير درجة حرارة مناسبة لنمو النباتات؛ ما يتيح إمكانية الزراعة في أي وقت من العام.

لإيجاد مساحة البيت البلاستيكي، أجد طول وعرضه باستعمال صيغة المسافة في المستوى الإحداثي.

الخطوة 1: أجد طول البيت البلاستيكي.

أفترض أن طول البيت AB ، وبما أن $A(1, 2)$ و $B(4, 5)$ ، فإن:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} && \text{صيغة المسافة في المستوى الإحداثي} \\ &= \sqrt{(4 - 1)^2 + (5 - 2)^2} && \text{بتعويض } (x_1, y_1) = (1, 2), (x_2, y_2) = (4, 5) \\ &= \sqrt{(3)^2 + (3)^2} && \text{بالتبسيط} \\ &= \sqrt{18} && \text{بإيجاد مربع كل عدد، والجمع} \\ &= 3\sqrt{2} && \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

إذن، طول البيت البلاستيكي $3\sqrt{2} \text{ m}$

الخطوة 2: أجد عرض البيت البلاستيكي.

أفترض أن عرض البيت البلاستيكي BC ، وبما أن $B(4, 5)$ و $C(6, 3)$ ، فإن:

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} && \text{صيغة المسافة في المستوى الإحداثي} \\ &= \sqrt{(6 - 4)^2 + (3 - 5)^2} && \text{بتعويض } (x_1, y_1) = (4, 5), (x_2, y_2) = (6, 3) \\ &= \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} && \text{بالتبسيط} \\ &= \sqrt{8} && \text{بإيجاد مربع كل عدد، والجمع} \\ &= 2\sqrt{2} && \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

إذن، عرض البيت البلاستيكي $2\sqrt{2} \text{ m}$

أفكر

هل هذا هو الحل الوحيد للمثال؟ أبرر إجابتي.

الخطوة 3: أجد مساحة البيت البلاستيكي.

$$A = l \times w$$

$$= 3\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$$

$$= 12$$

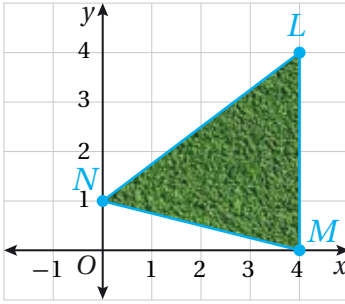
صيغة مساحة المستطيل

$$l = 3\sqrt{2}, w = 2\sqrt{2}$$

بالتبسيط

إذن، مساحة البيت البلاستيكي 12 m^2

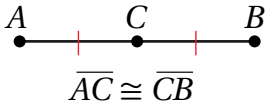
أتحقق من فهمي



يظهر في المستوى الإحداثي المجاور مخطط حديقة مثلثة الشكل، يرغب خالد في تركيب مرشحات لريها عند رؤوس المثلث. إذا كانت كل وحدة في المستوى الإحداثي تمثل متراً واحداً، فأجد طول الأنابيب التي تصل بين المرشحات الثلاثة، مقرباً إجابتي لأقرب جزء من عشرة.

نقطة منتصف القطعة المستقيمة

نقطة منتصف (midpoint) القطعة المستقيمة هي النقطة التي تقع في منتصف المسافة بين نقطتي نهايتي القطعة المستقيمة.



فمثلاً، إذا كانت C نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، فإن $AC = CB$ وهذا يعني أن $\overline{AC} \cong \overline{CB}$.

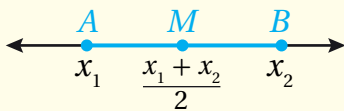
يمكنني إيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة على خط الأعداد بإيجاد الوسط الحسابي لإحداثيتي نقطتي نهايتي.

أندكر

يدل الرمز $\cong$ على التطابق، وتدل الإشارة الحمراء في الشكل المجاور على أن $\overline{AC} \cong \overline{CB}$ ، أي أن لهما الطول نفسه.

صيغة نقطة المنتصف على خط الأعداد

مفهوم أساسي



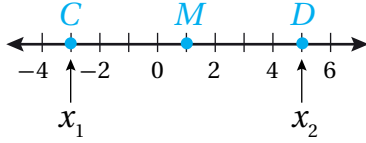
إذا كان إحداثي النقطة A على خط الأعداد هو x_1 وإحداثي النقطة B هو x_2 ، وكانت M نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، فإن إحداثي M هو:

$$\frac{x_1 + x_2}{2}$$

مثال 4

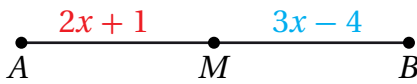
1 إذا كان إحداثيًا نقطتي نهايتي $\overline{CD}$ هما -3 و 5 ، فأجد إحداثي نقطة منتصف $\overline{CD}$.

أفترض أن $x_1 = -3$ و $x_2 = 5$ ، وأن نقطة منتصف $\overline{CD}$ هي M .



$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2}{2} & \text{ صيغة نقطة المنتصف على خط الأعداد} \\ &= \frac{-3 + 5}{2} \quad \text{بتعويض } x_1 = -3, x_2 = 5 \\ &= \frac{2}{2} = 1 \quad \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

إذن، إحداثي نقطة المنتصف هو 1



2 في الشكل المجاور، إذا كانت M نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، فأجد طول $\overline{MB}$.

الخطوة 1: أجد قيمة x .

$$\begin{aligned} \overline{AM} &\cong \overline{MB} & \text{تعريف نقطة منتصف قطعة مستقيمة} \\ \overline{AM} &= \overline{MB} & \text{تعريف تطابق القطع المستقيمة} \\ 2x + 1 &= 3x - 4 & \text{بالتعويض} \\ 2x + 5 &= 3x & \text{بجمع 4 إلى طرفي المعادلة} \\ 5 &= x & \text{بطرح 2x من طرفي المعادلة} \end{aligned}$$

الخطوة 2: أجد طول $\overline{MB}$.

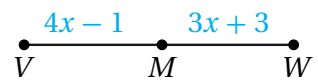
$$\begin{aligned} \overline{MB} &= 3x - 4 & \text{طول } \overline{MB} \\ &= 3(5) - 4 & \text{بتعويض } x = 5 \\ &= 11 & \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

إذن، طول $\overline{MB}$ هو 11 وحدة طول.

أتحقق من فهمي

(a) إذا كان إحداثيًا نقطتي نهايتي $\overline{PT}$ هما -9 و 10 ، فأجد إحداثي نقطة منتصف $\overline{PT}$.

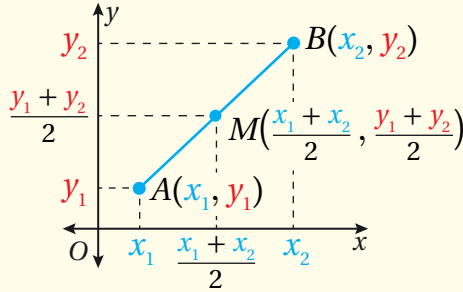
(b) في الشكل المجاور، إذا كانت M نقطة منتصف $\overline{VW}$ ، فأجد طول $\overline{VM}$ و طول $\overline{VW}$.



يمكن إيجاد إحداثي نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي بإيجاد الوسط الحسابي لكل من الإحداثي x والإحداثي y لنقطتي نهايتيه.

صيغة نقطة المنتصف في المستوى الإحداثي

مفهوم أساسي



إذا كانت $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ نقطتين في المستوى الإحداثي، و M نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، فإن إحداثي M هما:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

أندكّر

يعني الرمز $M(x, y)$ أن اسم النقطة M وإحداثيها (x, y) .

مثال 5

أجد إحداثي النقطة M ، التي تمثل منتصف $\overline{PQ}$ ؛ حيث $P(-6, 3)$ و $Q(1, -1)$.

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

صيغة نقطة المنتصف في المستوى الإحداثي

$$M\left(\frac{-6 + 1}{2}, \frac{3 + (-1)}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &= (1, -1) \\ (x_2, y_2) &= (-6, 3) \end{aligned}$$

$$M\left(\frac{-5}{2}, 1\right)$$

بالتبسيط

إذن، إحداثي النقطة M منتصف $\overline{PQ}$ ، هما $\left(\frac{-5}{2}, 1\right)$

أتحقق من فهمي

أجد إحداثي النقطة M ، التي تمثل منتصف $\overline{HI}$ ؛ حيث $H(5, -3)$ و $I(-1, -7)$.

أتعلم

ترتيب إحداثي نقطتي نهايتي القطعة المستقيمة ليس مهماً عند إيجاد إحداثي نقطة منتصف قطعة مستقيمة.

يمكن إيجاد إحداثي نقطة نهاية قطعة مستقيمة إذا عُلِمَ إحداثي نقطة النهاية الأخرى للقطعة وإحداثي نقطة المنتصف.

إذا كانت $M(2, 1)$ نقطة مُتَصفِـفِـ $\overline{JK}$ ؛ حيث $J(1, 4)$ ، فأَجِدْ إحداثيَّ النقطة K .

الخطوة 1: أعوِّض الإحداثيات المعروفة في صيغة نقطة المُتَصفِـفِـ في المُستوى الإحداثي.

أفترض أن $J(x_1, y_1)$ و $K(x_2, y_2)$

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = M(2, 1) \quad \text{صيغة نقطة المُتَصفِـفِـ في المُستوى الإحداثي}$$

$$M\left(\frac{1 + x_2}{2}, \frac{4 + y_2}{2}\right) = M(2, 1) \quad \text{بتعويض } (x_1, y_1) = (1, 4)$$

الخطوة 2: أكتب مُعادلتين، وأحلَّهُما لإيجاد إحداثيَّ K .

أَجِدْ x_2

$$\frac{1 + x_2}{2} = 2$$

$$1 + x_2 = 4$$

$$x_2 = 3$$

أَجِدْ y_2

$$\frac{4 + y_2}{2} = 1$$

$$4 + y_2 = 2$$

$$y_2 = -2$$

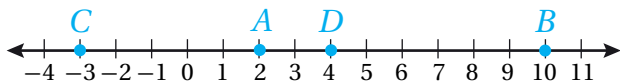
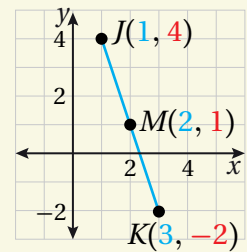
إذن، إحداثيَّ النقطة K هما $(3, -2)$.

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي

إذا كانت $M(-5, 10)$ نقطة مُتَصفِـفِـ $\overline{EP}$ ؛ حيث $E(-8, 6)$ ، فأَجِدْ إحداثيَّ النقطة P .

أَتَعَلَّمُ

يُمْكِنُنِي التَّحَقُّقُ مِنْ
معقولية الإجابة بتمثيل
النقاط الثلاثة في
المُستوى الإحداثي،
وملاحظة أنَّ المسافة
بين J و M تَظْهَرُ مساويةً
للمسافة بين M و K .



أَسْتَعْمِلُ خَطَّ الأَعْدَادِ المُجَاوِرَ لِأَجِدَ كُلَّ مَا بَاقِي:

1 AB

2 CD

3 CB

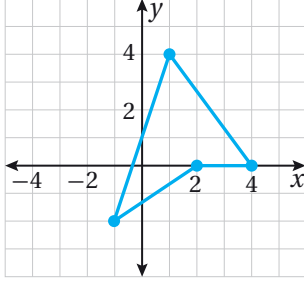
4 AC

أجد المسافة بين كل نقطتين مما يأتي، مُقَرَّبًا إجابتي لأقرب جزءٍ من عشرة (إن لزم):

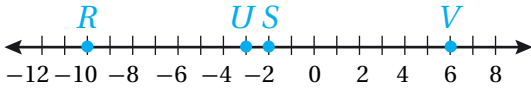
5 $C(-1, 6), D(4, 8)$

6 $E(6, -1), F(2, 0)$

7 $G(4, -5), H(0, 2)$



8 أجد محيط المضلع المعطاة رؤوسه في المستوى الإحداثي المجاور.

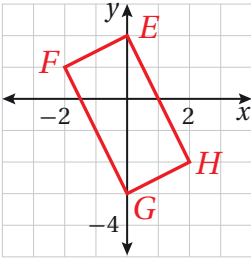


أستعمل خط الأعداد المجاور لأجد نقطة المنتصف لكل من القطع المستقيمة الآتية:

9 $\overline{RS}$

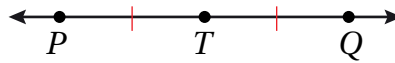
10 $\overline{UV}$

11 $\overline{VS}$



12 أجد مساحة المستطيل $FEHG$ المعطاة رؤوسه في المستوى الإحداثي المجاور.

أستعمل الشكل في أدناه لأجد PT في كل مما يأتي:



13 $PT = 5x + 3, TQ = 7x - 9$

14 $PT = 7x - 24, TQ = 6x - 2$

أجد إحداثي نقطة منتصف $\overline{HK}$ في كل من الحالات الآتية:

15 $H(7, 3), K(-4, -1)$

16 $H(-4, -5), K(2, 9)$

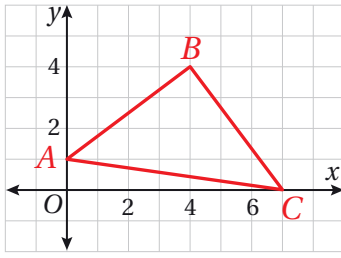
17 $H(-6, 10), K(8, -2)$

أجد إحداثي نقطة نهاية القطعة المستقيمة $\overline{CD}$ المجهولة في كل مما يأتي. علماً أن M نقطة منتصف $\overline{CD}$:

18 $C(-5, 4), M(-2, 5)$

19 $D(1, 7), M(-3, 1)$

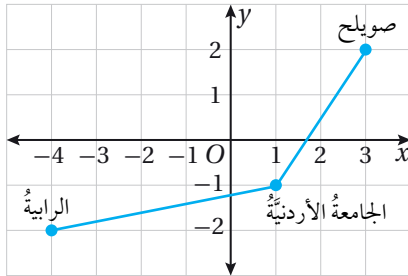
20 $D(-4, 2), M(6, -1)$



أستعمل الشكل المجاور الذي يُبين $\triangle ABC$ في المستوى الإحداثي، للإجابة عن السؤالين الآتيين تبعاً:

21 أحدد نوع المثلث من حيث الأضلاع.

22 أجد محيط المثلث.



23 مسافة: تظهر في المستوى الإحداثي المجاور 3 مناطق في العاصمة عمان، هي: صويلح، والجامعة الأردنية، والرابية. إذا كانت كل وحدة في المستوى الإحداثي تمثل كيلومتراً واحداً، فأجد المسافة بين صويلح والجامعة الأردنية والمسافة بين الرابية والجامعة الأردنية، مقرباً إجابتي لأقرب جزء من عشرة.

24 أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.

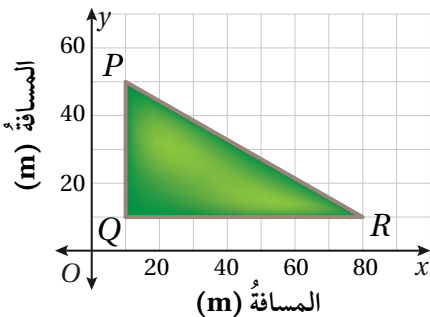
مهارات التفكير العليا

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(2 - 1)^2 + (6 - (-4))^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 10^2} \\ &= \sqrt{1 + 100} \\ &= \sqrt{101} \approx 10 \end{aligned}$$



25 أكتشف الخطأ: وجد عماد المسافة التقريبية بين النقطتين $A(6, 2)$ و $B(1, -4)$ ، كما هو مبين جانباً. أكتشف الخطأ في حل عماد، وأصححه.

26 تبرير: تقع النقطة P على القطعة المستقيمة التي نهايتها النقطتان $A(1, 4)$ و $D(7, 13)$. إذا كانت المسافة بين P و A ثلاثة أمثال المسافة بين P و D، فأجد إحداثيات النقطة P. أبرر إجابتي.



27 تبرير: يُبين الشكل المجاور مخططاً لحديقة عامة على شكل مثلث مُحاطة بممر مشاة. تمارس فيها مرأى رياضة الركض، حيث انطلقت على الممر بسرعة ثابتة مقدارها 130 m لكل دقيقة من P إلى Q ثم من Q إلى R ثم عادت إلى P. كم دقيقة تقريباً استغرقت مرأى للعودة إلى P مرة أخرى؟ أبرر إجابتي.

الدرس 2

البُعدُ بين نقطةٍ ومستقيمٍ Distance between a Point and a Line

فكرة الدرس



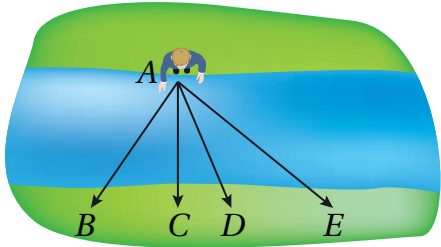
• إيجاد البعد بين نقطةٍ ومستقيمٍ.

• إيجاد البعد بين مُستقيمين مُتوازيين.

مسألة اليوم

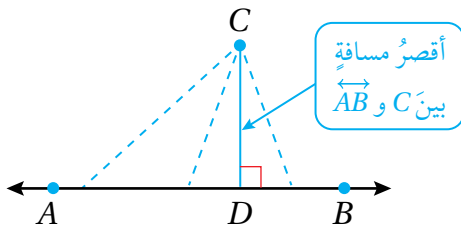


يحاولُ جمالُ عبورَ جدولٍ ماءٍ بالفِز من موقعه عند النقطة A إلى الجهة الأخرى من الجدول، كما يظهر في الشكل المُجاور. إلى أي نقطة يجب أن يفزَ جمالُ؟ أبررْ إجابتي.



البعدُ بين نقطةٍ ومستقيمٍ

البعدُ بين مستقيمٍ ونقطةٍ لا تقع عليه هو طول القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من تلك النقطة، وتُمثل أقصر مسافة بين المستقيم والنقطة. فمثلاً، أقصر مسافة بين النقطة C و $\overleftrightarrow{AB}$ هي طول $\overline{CD}$.

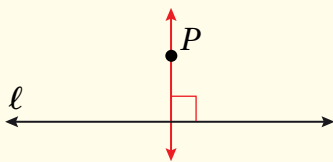


أتذكرُ

يشير الرمز $\overleftrightarrow{AB}$ إلى المستقيم المارّ بالنقطتين A و B .

تعلّمتُ سابقاً كيف أنشئُ عموداً على قطعةٍ مستقيمةٍ من نقطةٍ لا تقع عليه باستعمالِ فرجارٍ ومسطرةٍ، ويتضح من هذه الطريقة وجودُ مستقيمٍ عموديٍّ واحدٍ على الأقل على مستقيمٍ معلومٍ من نقطةٍ لا تقع عليه، لكنَّ المُسلّمة الآتية تنصُّ على أنَّ هذا المستقيمَ العموديَّ مستقيمٌ وحيدٌ.

مُسلّمةُ التعامدِ



مُسلّمةُ

لأيّ مستقيمٍ ونقطةٍ لا تقع عليه يوجدُ مستقيمٌ واحدٌ فقط يَمُرُّ بالنقطة، ويكونُ عمودياً على المستقيم المعلوم.

أتذكرُ

المُسلّمة عبارةٌ رياضيّةٌ تُقبلُ على أنَّها صحيحةٌ من غيرِ برهانٍ.

مثال 1

أجد البعد بين النقطة $(1, 0)$ والمستقيم l المارّ بالنقطتين $(3, 0)$ و $(1, 2)$.

الخطوة 1: أجد مُعادلة المستقيم l .

• أجد ميل المستقيم l .

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{صيغة الميل}$$

$$= \frac{2 - 0}{1 - 3} \quad \text{بالتعويض } (x_1, y_1) = (3, 0), (x_2, y_2) = (1, 2)$$

$$= \frac{2}{-2} = -1 \quad \text{بالتبسيط}$$

إذن، ميل المستقيم l هو -1

• أجد مقطع المستقيم l من المحور y باستعمال ميله ونقطة يمرُّ بها:

$$y = mx + b \quad \text{صيغة الميل والمقطع}$$

$$0 = -1(3) + b \quad \text{بتعويض } m = -1, x = 3, y = 0$$

$$3 = b \quad \text{بجمع 3 لطرفي المعادلة}$$

إذن، مُعادلة المستقيم l هي: $y = 3 - x$

الخطوة 2: أجد مُعادلة المستقيم w العمودي على المستقيم l والمارّ بالنقطة $(1, 0)$.

بما أن ميل المستقيم l الذي معادلته $y = 3 - x$ هو -1 ؛ فإن ميل المستقيم w العمودي على المستقيم l هو 1

أجد مقطع المستقيم w من المحور y باستعمال ميله والنقطة التي يمرُّ بها.

$$y = mx + b \quad \text{صيغة الميل والمقطع}$$

$$0 = 1(1) + b \quad \text{بتعويض } m = 1, x = 1, y = 0$$

$$-1 = b \quad \text{بطرح 1 من طرفي المعادلة}$$

إذن، مُعادلة المستقيم w هي: $y = x - 1$

أتذكّر

أستعمل ميل المستقيم والمقطع y لكتابة مُعادلة مستقيم بصيغة الميل والمقطع على الصورة $y = mx + b$

أتذكّر

• ميل المستقيم m هو $y = mx + b$
• حاصل ضرب ميلي المستقيمين المتعامدين يساوي -1

الخطوة 3: أستخدمُ مُعادلتَي المُستقيمين l و w لكتابة نظام مُعادلاتٍ وَحَلِّهِ لإيجاد نقطة تقاطع المُستقيمين.

$$y = -x + 3$$

مُعادلة المُستقيم l

$$(+)\ y = x - 1$$

مُعادلة المُستقيم w

$$2y = 2$$

بحذف المُتغيّر x

$$y = 1$$

بقسمة طَرَفَي المُعادلة على 2

أعوّض 1 بدلاً من y في إحدى المُعادلتين؛ لإيجاد قيمة x .

$$y = x - 1$$

مُعادلة المُستقيم w

$$1 = x - 1$$

بتعويض 1 بدلاً من y

$$x = 2$$

بجمع 2 لِطَرَفَي المُعادلة

إذن، يتقاطع المُستقيمان l و w في النقطة $(2, 1)$.

الخطوة 4: أستخدمُ صيغةَ المسافة بين نقطتين لِأَجْدَ المسافة بين $(1, 0)$ و $(2, 1)$.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

صيغةُ المسافة في المُستوى الإحداثي

$$= \sqrt{(1 - 2)^2 + (0 - 1)^2}$$

بتعويض $(x_1, y_1) = (1, 0)$

$(x_2, y_2) = (2, 1)$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}$$

بالتبسيط

$$= \sqrt{2}$$

بإيجاد مُربّع كُلِّ عددٍ، والجمع

إذن، البعدُ بين النقطة $(1, 0)$ والمُستقيم l هي $\sqrt{2}$ وحدة.

أتحقّق مِن فهمي 

أجدُ البعدُ بين النقطة $(1, 0)$ والمُستقيم l الذي مُعادلتُهُ: $y = 3x + 3$

أندكّر

حلُّ نظام المُعادلاتِ الخطيّةِ بِمُتغيّرين هُوَ زوجٌ مُرتّبٌ يُحقّقُ كُلَّ مُعادلةٍ في النظامِ.

أندكّر

يمكنُ حلُّ نظامِ المُعادلاتِ بالحدفِ أو بالتعويضِ.

أنعلّم

أجدُ البعدَ بينَ النقطةِ والمحورِ x بتحديدِ الإحداثيِّ y للنقطةِ، وأجدُ البعدَ بينَ النقطةِ والمحورِ y بتحديدِ الإحداثيِّ x للنقطةِ.

صيغة البعد بين نقطة ومستقيم

تعلمت في المثال السابق إيجاد البعد بين نقطة ومستقيم في المستوى الإحداثي باستعمال حل المعادلات وصيغة المسافة بين نقطتين، ويمكن أيضًا إيجاد البعد بين نقطة ومستقيم في المستوى الإحداثي بشكل مباشر باستعمال الصيغة الآتية:

صيغة البعد بين نقطة ومستقيم

مفهوم أساسي

البعد بين المستقيم l ، الذي معادلته: $Ax + By + C = 0$ ، والنقطة $P(x_1, y_1)$ تُعطى بالصيغة:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

شرط ألا تكون قيمتا A و B معًا صفرًا.

مثال 2

أجد البعد بين النقطة $(3, -5)$ والمستقيم $3x - 4y = 26$

الخطوة 1: أكتب مُعادلة المستقيم على الصورة $Ax + By + C = 0$

$$3x - 4y = 26$$

مُعادلة المستقيم المُعطاة

$$3x - 4y - 26 = 0$$

ب طرح 26 من طرفي المُعادلة

$$\text{إذن، } A = 3, B = -4, C = -26$$

الخطوة 2: أجد البعد بين النقطة والمستقيم.

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

صيغة البعد بين نقطة ومستقيم

$$= \frac{|3(3) + (-4)(-5) + (-26)|}{\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}}$$

بتعويض $A = 3, B = -4,$

$$C = -26, x_1 = 3, y_1 = -5$$

$$= \frac{3}{5}$$

بالتبسيط

إذن، البعد بين النقطة والمستقيم $\frac{3}{5}$ وحدة.

أتذكر

أكتب مُعادلة المستقيم

على الصورة

$$Ax + By + C = 0$$

التطبيق في صيغة البعد

بين نقطة ومستقيم.

أتذكر

أتبع أولويات العمليات

الحسابية عند التطبيق

في قانون البعد بين نقطة

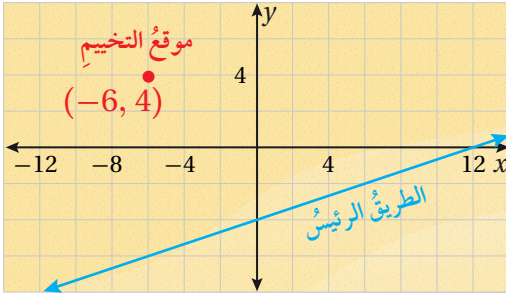
ومستقيم.

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي

أَجِدُ البُعدَ بَيْنَ النُقْطَةِ $(-1, 3)$ وَالْمُسْتَقِيمِ $3x - 4y = 16$

نَحْتَاجُ فِي كَثِيرٍ مِنَ الْمَوَاقِفِ الْحَيَاتِيَّةِ إِلَى تَحْدِيدِ أَقْصَرِ مَسَافَةٍ لِتَوْفِيرِ الْوَقْتِ وَالْجُهْدِ.

مثال 3: مِنَ الْحَيَاةِ



مُخَيِّمٌ: يظهرُ في المُستوى الإحداثيِّ المُجاوِرِ موقعَ تخييمِ مجموعةٍ كُشْفِيَّةٍ فِي مَنطَقَةِ وادي رَمٍّ. إِذَا أَرَادَتِ المَجموعةُ العُودَةَ إِلَى مَدِينَةِ الْعُقْبَةِ عَبرَ

الطريقِ الرئيسِ، وَكَانَتْ مُعَادَلَةُ الْمُسْتَقِيمِ الَّتِي تُمَثِّلُ هَذَا الطَّرِيقَ الْمُؤَدِّيَ إِلَى مَدِينَةِ الْعُقْبَةِ هِيَ $y = \frac{1}{3}x - 4$ ، فَأَجِدُ أَقْصَرَ مَسَافَةٍ بَيْنَ مَوْضِعِ التَّخْيِيمِ وَالطَّرِيقِ، مُقَرَّبًا إِجَابَتِي لِأَقْرَبِ جُزْءٍ مِنْ عَشْرَةٍ. عَلِمًا أَنَّ كُلَّ وَحْدَةٍ فِي الْمُسْتَوَى الإحداثيِّ تُمَثِّلُ كِيلُومِتْرًا وَاحِدًا.

لِإِجَادِ أَقْصَرِ مَسَافَةٍ بَيْنَ مَوْضِعِ التَّخْيِيمِ وَالطَّرِيقِ الرَّئِيسِ، أَجِدُ الْبُعدَ بَيْنَ النُقْطَةِ $(-6, 4)$ وَالْمُسْتَقِيمِ $y = \frac{1}{3}x - 4$.

الخطوة 1: أَكْتُبُ مُعَادَلَةَ الْمُسْتَقِيمِ عَلَى الصُّورَةِ $Ax + By + C = 0$.

$$y = \frac{1}{3}x - 4$$

مُعَادَلَةُ الْمُسْتَقِيمِ الْمُعْطَاةُ

$$\frac{1}{3}x - y - 4 = 0$$

بكِتَابَةِ الْمُعَادَلَةِ عَلَى الصُّورَةِ $Ax + By + C = 0$

$$\text{إِذْنًا، } A = \frac{1}{3}, B = -1, C = -4$$



مَعْلُومَةٌ

يُسَمَّى وادي رَمٍّ أَيْضًا وادي القمر؛ لِأَنَّ تَضَارِيسَهُ تُشَبِّهُ تَضَارِيسَ سَطْحِ الْقَمَرِ، كَمَا أَنَّهُ يُعَدُّ مَنطَقَةً سِيَاحِيَّةً مُهِمَّةً يَرْتَادُهَا الزُّوَّارُ وَالسَّيَّاحُ مِنْ مُخْتَلَفِ أَنْحَاءِ الْعَالَمِ لِتَمَتُّعِ بِالطَّبِيعَةِ الصَّحْرَاوِيَّةِ الْخَلَّابَةِ.

الخطوة 2: أجد البعد بين النقطة والمستقيم.

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$= \frac{\left| \frac{1}{3}(-6) + (-1)(4) + (-4) \right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + (-1)^2}}$$

$$\approx 9.5$$

صيغة البعد بين نقطة ومستقيم

بتعويض $A = \frac{1}{3}, B = -1, C = -4, x_1 = -6, y_1 = 4$

باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، البعد بين موقع التخيم والطريق الرئيس 9.5 km تقريبًا.

أتعلم

يمكن إيجاد معادلة

مكافئة للمعادلة

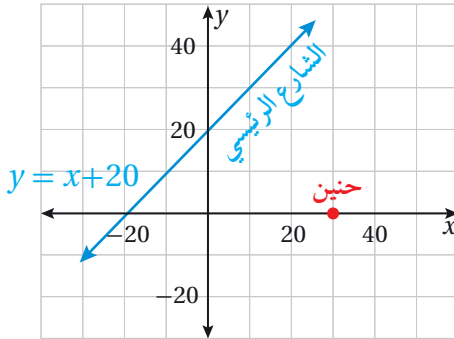
$$\frac{1}{3}x - y - 4 = 0$$

بضرب طرفي المعادلة

بالعدد 3، وذلك لتسهيل

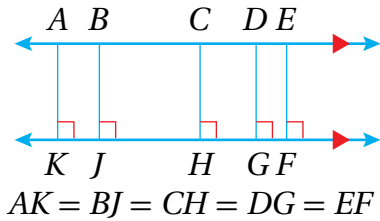
الحسابات.

أتحقق من فهمي



يظهر في المستوى الإحداثي المجاور موقع منزل حنين بالنسبة إلى الشارع الرئيس المؤدي إلى مدرستها. إذا كانت معادلة المستقيم الذي يُمثل الشارع الرئيس هي $y = x + 20$ ، فأجد أقصر مسافة بين منزل حنين والطريق، مُقَرَّبًا إجابتي لأقرب جزء من عشرة.

البعد بين مستقيمين متوازيين



تعلمت سابقًا أن المستقيمين المتوازيين هما مستقيمان يقعان في المستوى نفسه، بحيث يكون البعد بينهما ثابتًا، وهذا يعني أن البعد بين أي نقطة على أحدهما والمستقيم الآخر ثابت.

البعد بين مستقيمين متوازيين

مفهوم أساسي

البعد بين مستقيمين متوازيين هو البعد بين أحد المستقيمين وأي نقطة على المستقيم الآخر.

مثال 4

أجد البعد بين المستقيمين المتوازيين m, n إذا كانت معادلتها $3x + 4y + 8 = 0$ ، $3x + 4y + 10 = 0$ على الترتيب.

الخطوة 1: أجد إحداثيي نقطة تقع على أحد المستقيمين.

أعوّض $x = 0$ في معادلة المستقيم m لأجد الإحداثي y المقابل لها.

$$3x + 4y + 8 = 0$$

معادلة المستقيم m

$$3(0) + 4y + 8 = 0$$

بتعويض $x = 0$

$$y = -2$$

بحل المعادلة

إذن، تقع النقطة $(0, -2)$ على المستقيم m

الخطوة 2: أجد البعد بين النقطة والمستقيم الآخر.

أجد البعد بين النقطة $(0, -2)$ والمستقيم n ؛ حيث $A = 3, B = 4, C = 10$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + 10|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

صيغة البعد بين نقطة ومستقيم

$$= \frac{|3(0) + (4)(-2) + 10|}{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}}$$

بتعويض $A = 3, B = 4$

$C = 10, x_1 = 0, y_1 = -2$

$$= \frac{2}{5}$$

بالتبسيط

إذن، البعد بين المستقيمين m و n هو $\frac{2}{5}$ وحدة.

أتحقق من فهمي

أجد البعد بين المستقيمين المتوازيين m, n إذا كانت معادلتها $x - 7y + 14 = 0$ ، $x - 7y - 11 = 0$ على الترتيب.

أتعلم

يمكن تحديد ما إذا كان المستقيمان متوازيين أم لا إذا كان لهما الميل نفسه وكان المقطع y مختلفاً.



أَجِدُ البعدَ بينَ النقطة P والمستقيم l في كلِّ ممَّا يأتي مِنْ غيرِ استعمالِ صيغةِ البعدِ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ:

1 النقطة $P(2, 1)$ والمستقيم l المارُّ بالنقطتين $(-6, 0)$ و $(1, -4)$.

2 النقطة $P(-9, 2)$ والمستقيم l المارُّ بالنقطتين $(2, 8)$ و $(-2, 3)$.

3 النقطة $P(4, 4)$ والمستقيم l المارُّ بالنقطتين $(1, -3)$ و $(-7, 4)$.

أَجِدُ البعدَ بينَ النقطة P والمستقيم l في كلِّ ممَّا يأتي باستعمالِ صيغةِ البعدِ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ:

4 النقطة $P(5, 7)$ والمستقيم l المارُّ بالنقطتين $(-2, 1)$ و $(0, 1)$.

5 النقطة $P(1, -9)$ والمستقيم l المارُّ بالنقطتين $(4, 9)$ و $(4, -1)$.

6 النقطة $P(-3, -10)$ والمستقيم l المارُّ بالنقطتين $(3, 1)$ و $(-8, -1)$.

أَجِدُ البعدَ بينَ النقطة والمستقيم في كلِّ ممَّا يأتي:

7 $y - \frac{1}{6}x + 6 = 0, P(-6, 5)$

8 $y = x + 2, Q(2, 4)$

9 $y + \frac{1}{4}x = 1, S(4, 3)$

10 $y = -3, T(5, 2)$

11 $x = 4, K(-2, 5)$

12 $y - x = 0, R(5, 3)$

أَجِدُ البعدَ بينَ كلِّ مُستقيمين مُتوازيين في ما يأتي:

13 $4x - y + 1 = 0$

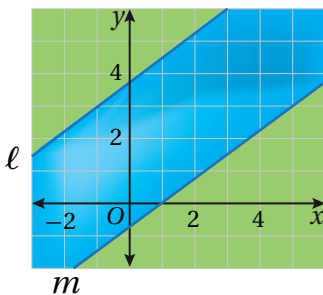
14 $12x + 5y - 3 = 0$

15 $2x - 3y + 4 = 0$

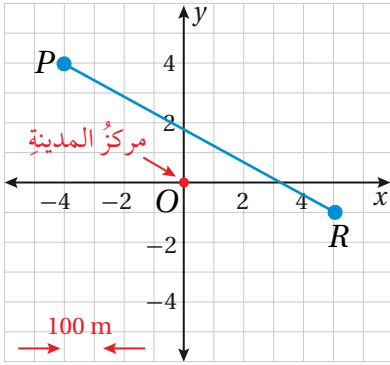
$4x - y - 8 = 0$

$12x + 5y + 7 = 0$

$y = \frac{2}{3}x + 5$



16 **نهر:** يظهرُ في المُستوى الإحداثيِّ المُجاوِرِ جزءٌ مِنْ نهرٍ يُمثِّلُ المُستقيمان l و m ضِفَّتَيْهِ. أَجِدُ عَرْضَ النهرِ، مُقَرَّبًا إيجابيًا لأقربِ جزءٍ مِنْ عَشْرَةٍ. علِّمًا أَنَّ كُلَّ وَحْدَةٍ فِي المُستوى الإحداثيِّ تُمثِّلُ 10 أمتارٍ.



يظهرُ في المُستوى الإحداثيِّ المُجاوِرِ منزلُ بسمّة الذي يقعُ عندَ النقطةِ P ، ومنزلُ رشا الذي يقعُ عندَ النقطةِ R .

17 أجدُ طولَ الطريقِ بينَ منزلِ بسمّة ومنزلِ رشا.

18 أجدُ النقطةَ التي تُمثِّلُ مُتَصفَ الطريقِ بينَ منزلِ بسمّة ومنزلِ رشا.

19 إذا كانَ مركزُ المدينةِ يقعُ عندَ نقطةِ الأصلِ، فأجدُ أقصرَ مسافةٍ بينَ هذا المركزِ والطريقِ الواصلِ بينَ منزلَي بسمّة ورشا.

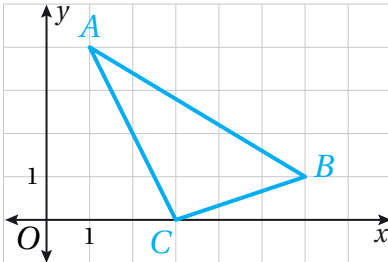
مهارات التفكير العليا

20 **أكتشفُ الخطأ:** وجدَ عمرانُ البعدَ بينَ المستقيمِ l الذي مُعادَلَتُهُ: $y + 2x - 8 = 0$ والنقطةِ $P(1, -1)$ ، كما هو مُبيِّنُ أدناه. أكتشفُ الخطأَ في حلِّ عمرانَ، وأصحِّحُهُ.

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + 10|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$= \frac{|1(1) + (2)(-1) + (-8)|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}}$$

$$= \frac{9}{\sqrt{2}}$$



21 **تبرير:** أجدُ مساحةَ المثلثِ المرسومِ في المُستوى الإحداثيِّ المُجاوِرِ، مُبرِّراً إجابتي.

22 **تحدّد:** أجدُ إحداثيَّي النقطةِ (النقاطِ) على المحورِ x ، التي تَبْعُدُ 4 وحداتٍ عَنِ المستقيمِ $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

البرهان الإحداثي Coordinate Proof

استعمال الهندسة الإحداثية لبرهنة نظريات هندسية.

البرهان الإحداثي.

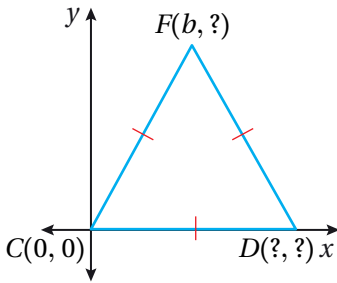
يُبين الشكل المجاور المثلث المتطابق أضلاع CFD.

أجد الإحداثيات المجهولة للرؤوس.

فكرة الدرس

المصطلحات

مسألة اليوم

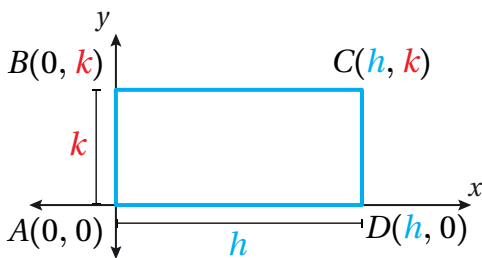


تمثيل المضلع في المستوى الإحداثي وتسميته

لتمثيل مضلع في المستوى الإحداثي، يُفضل رسم أحد أضلاعه على محور إحداثي أو أحد رؤوسه على نقطة الأصل؛ وذلك لتسهيل تحديد إحداثيات بقية رؤوسه اعتماداً على خصائصه.

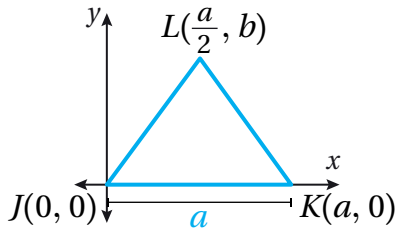
مثال 1

- أرسم في المستوى الإحداثي المستطيل $ABCD$ ، الذي طوله h وحدة وعرضه k وحدة.
 - أجعل زاوية المستطيل القائمة A على نقطة الأصل؛ لرسمه في الربع الأول.
 - أفترض أن AD يمثل طول المستطيل ويساوي h وحدة، وأن AB يمثل عرضه ويساوي k وحدة.
 - أرسم D على المحور x . وبما أن طول $\overline{AD}$ يساوي h وحدة، فإن الإحداثي y للنقطة D هو 0 ، والإحداثي x هو h .
 - أرسم B على المحور y . وبما أن طول $\overline{AB}$ يساوي k وحدة، فإن الإحداثي x للنقطة B هو 0 ، والإحداثي y هو k .
 - أرسم الرأس C ، بحيث يكون إحداثياته (h, k) .



أرسم في المستوى الإحداثي المثلث المتطابق الضلعين JLK ، الذي فيه طول $\overline{JK}$ يساوي a وحدة.

- أجعل رأس المثلث J على نقطة الأصل؛ لأرسمه في الربع الأول.
- أرسم K على المحور x ، وبما أن طول $\overline{JK}$ يساوي a وحدة، فإن الإحداثي y للنقطة K هو 0، والإحداثي x هو a .



- بما أن المثلث متطابق الضلعين، فإن الإحداثي x للرأس L يقع في منتصف المسافة بين 0 و a ؛ أي أنه يساوي $\frac{a}{2}$ ، وبما أن الإحداثي y لا يمكن تحديده، فيمكن تسميته b .

أتحقق من فهمي

- (a) أرسم في المستوى الإحداثي المستطيل $ABCD$ ، الذي طوله a وحدة، وعرضه $2b$ وحدة.
- (b) أرسم في المستوى الإحداثي المثلث قائم الزاوية HMN ، الذي فيه طول $\overline{HM}$ يساوي a وحدة، وطول $\overline{NM}$ يساوي b وحدة.

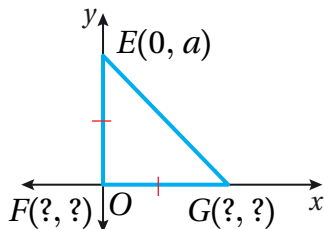
إيجاد الإحداثيات المجهولة

يمكن تحديد إحداثيات مجهولة لرؤوس مضلع ممثل في المستوى الإحداثي، وذلك باستعمال خصائص المضلع والإحداثيات الأخرى المعروفة.

مثال 2

أجد الإحداثيات المجهولة في كل من الأشكال الآتية:

1

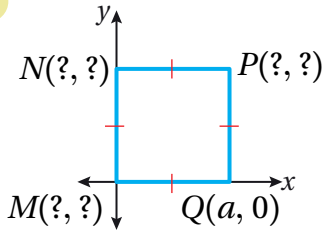


- بما أن الرأس F يقع عند نقطة الأصل فإن إحداثيته $(0, 0)$.
- بما أن $\overline{EF} \cong \overline{FG}$ فإن طول $\overline{GF}$ يساوي a وحدة، وهو يمثل الإحداثي x للرأس G .
- بما أن الرأس G على المحور x ، فإن إحداثيته y يساوي 0. ومنه، فإن إحداثيي G هما $(a, 0)$.

أفكر

هل المثلث في الفرع 1 من المثال 2 قائم الزاوية؟ أبرر إجابتي.

2



بما أن الرأس M يقع عند نقطة الأصل فإن إحداثيته $(0, 0)$.

بما أن الرأس Q يقع على المحور x ، ويقع الرأس N على المحور y ، فإن $\angle NMQ$

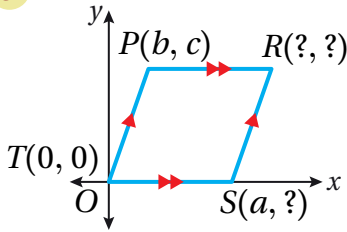
قائمة، إذن أضلاع الشكل متطابقة. وعليه، فالشكل مربع.

بما أن الشكل مربع فإن طول $\overline{MN}$ يساوي a وحدة، وهو يمثل الإحداثي y للرأس N .

بما أن الرأس N يقع على المحور y ، فإن إحداثيته x يساوي 0 . ومنه، فإن إحداثي N هما $(0, a)$.

بما أن الشكل مربع، فإن بُعد الرأس P عن المحور x وعن المحور y هو a . ومنه، فإن إحداثي P هما (a, a) .

3



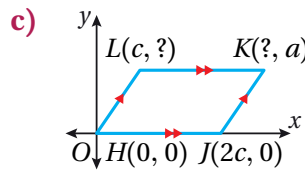
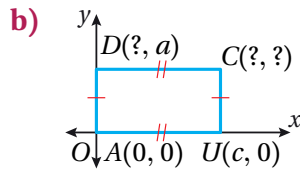
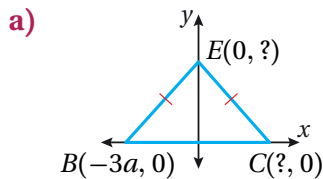
بما أن كل ضلعين متقابلين متوازيين فالشكل متوازي أضلاع.

بما أن الرأس S على المحور x فإن إحداثيه y يساوي 0 . ومنه، فإن إحداثي S هما $(a, 0)$.

بما أن القطع المستقيمة الأفقية متوازية دائماً، فإن للنقطتين P و R الإحداثي y نفسه، وبما أن طول $\overline{PR}$ يساوي a وحدة والإحداثي x للنقطة P هو b ، فإن الإحداثي x للنقطة R هو $b + a$. ومنه، فإن إحداثي R هما $(a + b, c)$.

أتحقق من فهمي

أجد الإحداثيات المجهولة في كلٍّ من الأشكال الآتية:



أتذكر

إذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة فإن زواياه الأربع قوائم، وعندها يكون مستطيلاً، وبما أن أضلاعه متطابقة وزواياه قوائم فالشكل الهندسي مربع.

أتذكر

إذا كان الشكل متوازي أضلاع فإن الأضلاع المتقابلة متطابقة.

البرهان الإحداثي

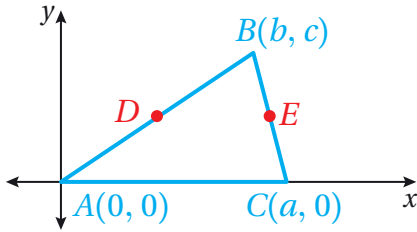
البرهان الإحداثي (coordinate proof) هو أحد أنواع البراهين، تُستعمل فيه أشكال هندسية مرسومة في المستوى الإحداثي لإثبات صحة نظريات هندسية، ويتضمن أيضًا استعمال متغيرات تمثل إحداثيات رؤوس الشكل أو قياسات زواياه أو أضلاعه؛ لضمان أن النتيجة التي يجري برهانها صحيحة لجميع الأشكال من النوع نفسه بغض النظر عن إحداثيات رؤوسه.

أندكّر

تعلمت سابقًا نوعين من البراهين، هما: البرهان السهوي، والبرهان ذو العمودين.

مثال 3

اكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات أن القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفَي ضلعين في مثلث تساوي نصف طول الضلع الثالث وتوازيه.



الخطوة 1: أرسم المثلث في المستوى الإحداثي.

أرسم المثلث ABC في المستوى الإحداثي، وأحدد إحداثيات كل من رؤوسه.

الخطوة 2: أحدد المعطيات والمطلوب.

المعطيات: في $\triangle ABC$

• D نقطة منتصف $\overline{AB}$.

• E نقطة منتصف $\overline{BC}$.

المطلوب: إثبات أن $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ ، وأن $DE = \frac{1}{2} AC$.

الخطوة 3: البرهان

(1) أثبت أن $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$

باستعمال صيغة نقطة المنتصف، فإن إحداثي كل من D و E هما:

$$D\left(\frac{b+0}{2}, \frac{c+0}{2}\right) = D\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right) \quad E\left(\frac{b+a}{2}, \frac{c+0}{2}\right) = E\left(\frac{b+a}{2}, \frac{c}{2}\right)$$

بما أن الإحداثي y لكل من D و E متساويان، فإن ميل $\overline{DE}$ يساوي صفرًا، وبما أن $\overline{AC}$ منطبق على المحور x ، فإن ميله أيضًا يساوي صفرًا. إذن، $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ لأن لهما الميل نفسه.

أتعلم

المثلث ABC الذي رُسم في المستوى الإحداثي غير مُحدد القياسات؛ لأن اختيار الإحداثيات اعتمد على قيمتين متغيرتين هما a و b ؛ لذا يمكن استعمال هذا المثلث لإثبات صحة علاقات في جميع المثلثات.

أندكّر

للمستقيمات المتوازية الميل نفسه، والمستقيمات الأفقية جميعها متوازية وميلها يساوي 0.

$$(2) \text{ أثبت أن } DE = \frac{1}{2} AC$$

أستعمل صيغة المسافة على خطّ الأعداد لإيجاد DE .

$$DE = |x_2 - x_1| \quad \text{صيغة طول قطعة مستقيمة أفقية}$$

$$= \left| \frac{b+a}{2} - \frac{b}{2} \right| \quad \text{بالتعويض } x_1 = \frac{b}{2}, x_2 = \frac{b+a}{2}$$

$$= \left| \frac{a}{2} \right| \quad \text{بالتبسيط}$$

$$= \frac{a}{2} \quad \text{بإيجاد القيمة المطلقة}$$

أستعمل صيغة المسافة على خطّ الأعداد لإيجاد AC .

$$AC = |x_2 - x_1| \quad \text{صيغة طول قطعة مستقيمة أفقية}$$

$$= |a - 0| \quad \text{بالتعويض } x_1 = 0, x_2 = a$$

$$= |a| \quad \text{بالتبسيط}$$

$$= a \quad \text{بإيجاد القيمة المطلقة}$$

$$\text{بما أن } DE = \frac{a}{2} \text{ و } AC = a, \text{ فإن } DE = \frac{1}{2} AC$$

أتحقق من فهمي

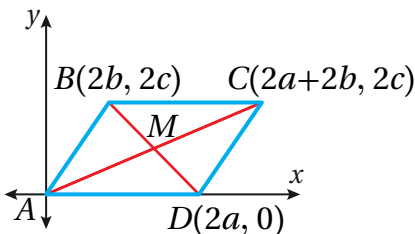
أكتب برهاناً إحدائياً لإثبات أن القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس المثلث قائم الزاوية ومُنْتَصَف الوتر تُساوي نصف طول الوتر.

أتذكر

من الأسهل إيجاد طول القطعة المستقيمة الأفقية في المستوى الإحداثي باستعمال صيغة المسافة على خطّ الأعداد، وذلك بإيجاد القيمة المطلقة للفرق بين الإحداثي x لكل من نقطتي نهايتي القطعة، وإيجاد طول القطعة المستقيمة العمودية أجد القيمة المطلقة للفرق بين الإحداثي y لكل من نقطتي نهايتي القطعة.

مثال 4

أكتب برهاناً إحدائياً لإثبات أنه إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع فإن قطريه يُنصف كل منهما الآخر.



الخطوة 1: أرسم متوازي الأضلاع في المستوى الإحداثي.

أرسم $ABCD$ في المستوى الإحداثي، وأحدد إحداثيات كل من رؤوسه، كما في الشكل المجاور.

أتعلم

بما أن صيغة نقطة المنتصف تتضمن قسمة مجموع الإحداثيين على 2، فمن الأسهل استعمال إحداثيات من مضاعفات العدد 2

الخطوة 2: أَدِّدُ الْمُعْطِيَّاتِ وَالْمَطْلُوبَ.

الْمُعْطِيَّاتُ:

• إحدائيات رؤوس $\square ABCD$.

• نقطة تقاطع $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ هي M .

الْمَطْلُوبُ: إثبات أن M نقطة مُتَنَصِّفِ $\overline{AC}$ ، ونقطة مُتَنَصِّفِ $\overline{BD}$ أيضًا.

الخطوة 3: البرهان

• أجد مُتَنَصِّفَ $\overline{AC}$ باستعمال صيغة نقطة المُتَنَصِّفِ.

$$\left(\frac{2a + 2b + 0}{2}, \frac{2c + 0}{2} \right) = (a + b, c)$$

• أجد مُتَنَصِّفَ $\overline{BD}$ باستعمال صيغة نقطة المُتَنَصِّفِ.

$$\left(\frac{2a + 2b}{2}, \frac{2c + 0}{2} \right) = (a + b, c)$$

• بما أن لكلٍ من $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ نقطة المُتَنَصِّفِ نفسها، ونقطة تقاطع $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ هي M ، فإن M نقطة مُتَنَصِّفِ $\overline{AC}$ ونقطة مُتَنَصِّفِ $\overline{BD}$.

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي

أكتبُ برهانًا إحدائيًا لِأُثْبِتَ أَنَّهُ إِذَا كَانَ فِي الشَّكْلِ الرَّبَاعِيِّ ضِلْعَانِ مُتَوَازِيَانِ وَمُتَطَابِقَانِ فَإِنَّ الشَّكْلَ الرَّبَاعِيَّ مُتَوَازِي أضلاع.

تصنيف الأشكال الرباعية باستعمال الهندسة الإحداثية

تعلَّمتُ سابقًا أَنَّ كُلًّا مِنْ المُسْتطِيلِ وَالْمَعِينِ وَالْمُرَبَّعِ هُوَ حَالَةٌ خَاصَّةٌ مِنْ مُتَوَازِي الأضلاع، ولكلِّ شكلٍ منها خصائصٌ تُمَيِّزُهُ.

أَتَذَكَّرُ

جميعُ خصائصِ مُتَوَازِي الأضلاع والمُسْتطِيلِ والمَعِينِ تَنْطَبِّقُ عَلَى الْمُرَبَّعِ.

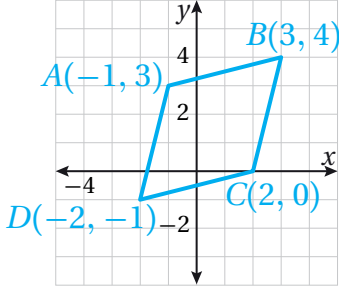
مراجعة المفهوم

حالاتٌ خَاصَّةٌ مِنْ مُتَوَازِي الأضلاع

- المُسْتطِيلُ مُتَوَازِي أضلاعٍ زواياهُ الأربعةُ قوائمٌ وقُطْرَاهُ مُتَطَابِقَانِ.
- المَعِينُ مُتَوَازِي أضلاعٍ أضلاعهُ مُتَطَابِقَةٌ وقُطْرَاهُ مُتَعَامِدَانِ.
- الْمُرَبَّعُ مُتَوَازِي أضلاعٍ أضلاعهُ مُتَطَابِقَةٌ وزواياهُ الأربعةُ قوائمٌ وأقطارهُ مُتَعَامِدَةٌ وَمُتَطَابِقَةٌ.

أحدّد ما إذا كان $\square ABCD$ ، الذي إحداثيات رؤوسه $B(3, 4)$ ، $C(2, 0)$ ، $D(-2, -1)$ ، $A(-1, 3)$ ، مستطيلاً أو معيناً أو مربعاً.

الخطوة 1: أرسم متوازي الأضلاع في المستوى الإحداثي.



أرسم $\square ABCD$ في المستوى الإحداثي، كما في الشكل المجاور.

الخطوة 2: أحدّد المعطيات والمطلوب.

المعطيات: إحداثيات رؤوس $\square ABCD$.

المطلوب: إثبات أن $\square ABCD$ معين أو مستطيل أو مربع.

الخطوة 3: البرهان

إذا كان قُطراً متوازي الأضلاع متطابقين فإنه مُستطيل، وإذا كانا مُتعامدين فإنه معين، وإذا كانا مُتطابقين ومُتعامدين فإنه مُربع.

• أستخدم صيغة المسافة بين نقطتين للمقارنة بين طولي القطرين $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$.

$$AC = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BD = \sqrt{(-2 - 3)^2 + ((-1) - 4)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

بما أن $3\sqrt{2} \neq 5\sqrt{2}$ فإن القطرين ليسا مُتطابقين؛ لذا $\square ABCD$ ليس مُستطيلاً ولا مُربعاً.

• أستخدم صيغة الميل لتحديد ما إذا كان القطران مُتعامدين.

ميل $\overline{BD}$

$$m = \frac{(-1) - 4}{(-2) - 3} = \frac{-5}{-5} = 1$$

ميل $\overline{AC}$

$$m = \frac{0 - 3}{2 - (-1)} = \frac{-3}{3} = -1$$

بما أن حاصل ضرب الميكن يساوي -1 فإن القطرين مُتعامدان؛ لذا فإن $\square ABCD$ معين.

أتحقق من فهمي

أحدّد ما إذا كان $\square ABCD$ ، الذي إحداثيات رؤوسه $C(-2, -3)$ ، $D(-3, -1)$ ، $A(3, 2)$ ، $B(4, 0)$ ، مُستطيلاً أو معيناً أو مُربعاً.

أتعلّم

يظهر من التمثيل البياني لـ $\square ABCD$ أن زواياه ليست قوائم؛ لذا فإن التخمين الأولي أن الشكل معين وليس مُربعاً أو مُستطيلاً، ويبقى التحقق من صحة التخمين جبرياً.



أرسمُ كُلًّا مِنْ الْمُضَلَّعَاتِ الْآتِيَةِ فِي الْمُسْتَوَى الْإِحْدَائِيّ، مُحَدِّدًا إِحْدَاثِيَّاتِ رُؤُوسِ كُلِّ مِنْهَا:

1 المثلث قائم الزاوية RMN ، الذي طول MN فيه يساوي 3 وحدات، وطول MR يساوي 4 وحدات.

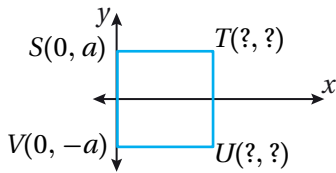
2 المربع $ABCD$ ، الذي طول ضلعه $3a$.

3 المثلث قائم الزاوية متطابق الضلعين JGF ، الذي طول كل من ساقيه p وحدة.

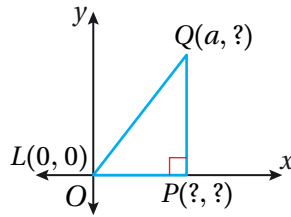
4 المثلث متطابق الأضلاع QWR ، الذي طول ضلعه $4b$.

أجدُ الإحداثيات المجهولة في كلٍّ مِنَ الأشكالِ الْآتِيَةِ:

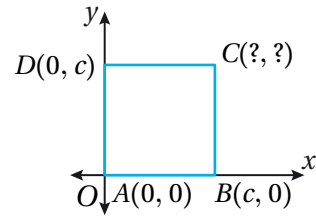
7 مربع



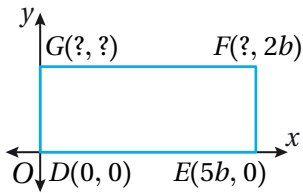
6 مثلث



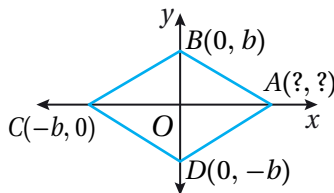
5 مربع



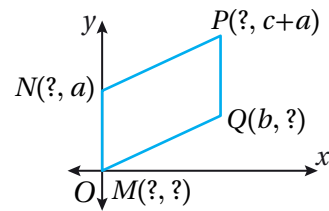
10 مستطيل



9 معين



8 متوازي أضلاع

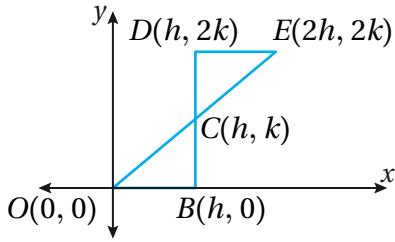


أكتبُ برهانًا إِحْدَائِيًّا لِأُبَيِّنَ كُلًّا مِمَّا يَأْتِي:

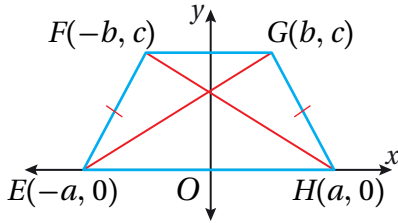
11 إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع فإن أضلاعه المتقابلة متطابقة.

12 إذا كان كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي متطابقين فإنه متوازي أضلاع.

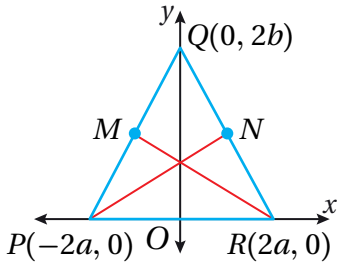
13 العمود النازل من رأس المثلث المتطابق الضلعين إلى القاعدة ينصف القاعدة.



14 أَسْتَعْمِلُ المَعْلُومَاتِ المُعْطَاةَ عَلَى الشَّكْلِ المُجَاوِرِ، لِأُثَبِّتَ
بِاسْتِعْمَالِ البرهانِ الإحداثيِّ أَنَّ $\triangle DEC \cong \triangle BOC$.



15 أَسْتَعْمِلُ المَعْلُومَاتِ المُعْطَاةَ عَلَى الشَّكْلِ المُجَاوِرِ، لِأُثَبِّتَ
بِاسْتِعْمَالِ البرهانِ الإحداثيِّ أَنَّ $\overline{EG} \cong \overline{FH}$.



16 فِي الشَّكْلِ المُجَاوِرِ، إِذَا كَانَ $\overline{PQ} \cong \overline{RQ}$ ، وَكَانَتْ M نَقْطَةً
مُتَّصِفِ $\overline{PQ}$ وَ N نَقْطَةً مُتَّصِفِ $\overline{RQ}$ ، فَأُثَبِّتَ بِاسْتِعْمَالِ البرهانِ
الإحداثيِّ أَنَّ $\overline{PN} \cong \overline{RM}$.

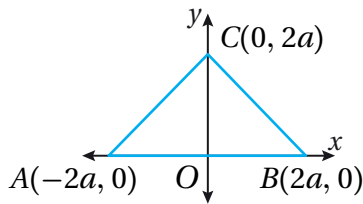
أَحَدِّدْ مَا إِذَا كَانَ $\square JKLM$ المُعْطَاةَ إِحْدَاثِيَّاتُ رُؤُوسِهِ فِي كُلِّ مِمَّا يَأْتِي،
مَعِينًا أَوْ مُسْتَطِيلًا أَوْ مُرَبَّعًا:

17 $J(-4, 2), K(0, 3), L(1, -1), M(-3, -2)$

18 $J(-2, 7), K(7, 2), L(-2, -3), M(-11, 2)$

19 $J(5, 0), K(8, -11), L(-3, -14), M(-6, -3)$

20 $J(-1, 4), K(-3, 2), L(2, -3), M(4, -1)$



مهارات التفكير العليا

21 تَبَرَّرْ: أَصْنَفُ $\triangle ABC$ ، المرسوم في المُسْتَوَى الإحداثيِّ المُجَاوِرِ،
بِحَسَبِ أَضْلَاعِهِ وَزَوَايَاهُ، مُبَرَّرًا إيجابيًا.

22 أَكْشِفُ الخَطَأَ: تَقُولُ شَذَا إِنَّ الشَّكْلَ الرُّبَاعِيَّ $PQRS$ ، الَّذِي إِحْدَاثِيَّاتُ رُؤُوسِهِ $R(1, -5), S(-2, 1), P(0, 2), Q(3, -4)$ ،
مُتَوَازِي أَضْلَاعٌ وَلَيْسَ مُسْتَطِيلًا، وَتَقُولُ ضُحَى إِنَّهُ مُسْتَطِيلٌ. أَيُّ الإِجَابَتَيْنِ صَحِيحَةٌ؟ أَبَرِّرْ
إيجابيًا.

23 تَحَدَّثْ: مُتَوَازِي أَضْلَاعٌ أَحَدُ رُؤُوسِهِ النِّقْطَةُ $(2, 4)$ وَالرَّأْسُ الْآخَرُ النِّقْطَةُ $(3, 1)$ وَنَقْطَةُ تَقَاطُعِ قُطْرَيْهِ $(0, 1)$. أَجِدْ
بَقِيَّةَ رُؤُوسِهِ.

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 المسافة بين النقطتين $A(-1, 4)$ و $B(-3, -2)$ هي:

- a) $\sqrt{26}$ b) $\sqrt{40}$
c) $\sqrt{20}$ d) $\sqrt{34}$

2 إحداثيًا نقطة منتصف $\overline{CD}$ حيث $C(1, -2)$

و $D(-3, 6)$ هما:

- a) $(-1, 2)$ b) $(-2, 4)$
c) $(1.5, -0.5)$ d) $(-4.5, 1.5)$

3 إذا كانت $M(-2, -6)$ نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، حيث

$B(7, 4)$ ، فإن إحداثيي النقطة A هما:

- a) $(-11, 16)$ b) $(11, -16)$
c) $(11, 16)$ d) $(-11, -16)$

4 نقطة تقاطع قطري مربع طول ضلعيه s ورأساه $(0, 0)$

و (s, s) هي:

- a) (s, s) b) $(2s, 2s)$
c) $(\frac{s}{2}, \frac{s}{2})$ d) $(\frac{s}{2}, 0)$

5 إذا كانت $(0, 0)$ ، $(5, 3)$ ، $(3, 5)$ تمثل رؤوس متوازي

أضلاع، فإن النقطة التي تمثل الرأس الرابع لمتوازي الأضلاع هي:

- a) $(5, 0)$ b) $(3, 0)$
c) $(2, -2)$ d) $(2, 2)$

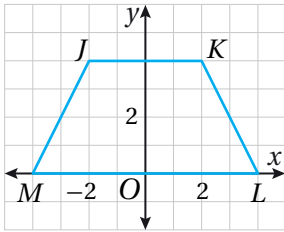
أجد المسافة بين كل نقطتين مما يأتي، مُقرَّبًا إجابتي لأقرب جزء من عشرة (إن لزم):

- 6 $A(2, 2)$, $B(6, 5)$ 7 $N(-3, 2)$, $M(9, 7)$
8 $P(1, 5)$, $T(7, -3)$ 9 $F(-6, -4)$, $J(9, 4)$

أجد إحداثيي نقطة منتصف $\overline{AB}$ في كل من الحالات الآتية:

- 10 $A(8, 4)$, $B(12, 2)$
11 $A(9, 5)$, $B(8, -6)$
12 $A(-11, -4)$, $B(-9, -2)$

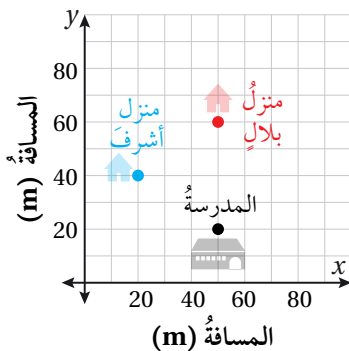
13 في الشكل الآتي، إذا كانت M نقطة منتصف $\overline{RS}$ ، فأجد طول $\overline{MR}$.



14 أجد محيط شبه المنحرف $JKLM$ المرسوم في المستوى الإحداثي المجاور.

15 انطلق بلال من منزله إلى المدرسة مرورًا بمنزل

أشرف. أجد المسافة التي قطعها بلال من منزله إلى المدرسة، مُستعينًا بالمستوى الإحداثي أدناه.



اختبار نهاية الوحدة

أجد البعد بين النقطة والمستقيم في كل مما يأتي:

16 $y = -x + 2, P(8, 4)$

17 $x - 3y + 9 = 0, Q(-13, 6)$

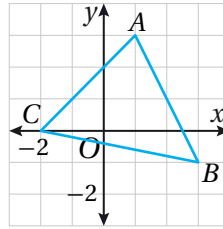
18 $y - 4x = 7, B(-13, 6)$

19 $y - 1 = 5x, S(3, 3)$

20 $y + 2x + 15 = 0, M(-1, -4)$

21 $2x + y + 5 = 0, N(0, 0)$

22 أجد مساحة المثلث المرسوم في المستوى الإحداثي المجاور، مبرراً إجابتني.



أجد البعد بين كل مستقيمين متوازيين في ما يأتي:

23 $x + 2y - 3 = 0$

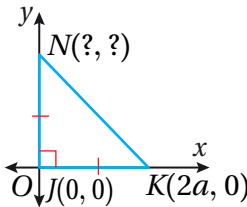
24 $9x + 12y + 10 = 0$

$x + 2y + 4 = 0$

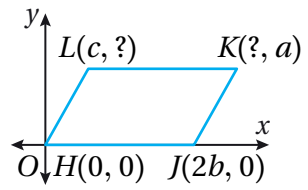
$9x + 12y - 20 = 0$

أجد الإحداثيات المجهولة في كل من الأشكال الآتية:

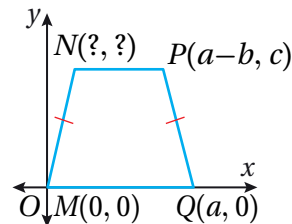
26 مثلث



25 متوازي أضلاع



27 شبه منحرف

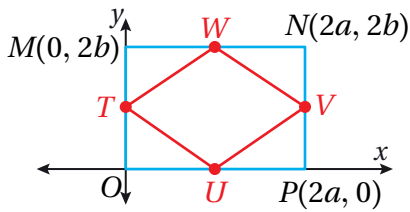


أحدد ما إذا كان $\square JKLM$ ، المُعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي، معيناً أو مُستطيلاً أو مُربّعاً:

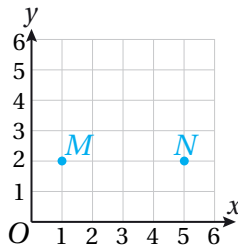
28 $J(5, 2), K(1, 9), L(-3, 2), M(1, -5)$

29 $J(5, 2), K(2, 5), L(-1, 2), M(2, -1)$

30 في الشكل الآتي، إذا كان $MNPO$ مُستطيلاً، وكانت T, W, V, U نقاط مُتّصف أضلاعه، فأثبت باستعمال البرهان الإحداثي أن $TWVU$ معين.

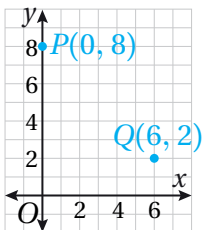


تدريب على الاختبارات الدولية



31 يبين الشكل المجاور النقطتين M و N . أي مما يأتي يمكن أن يكون إحداثي النقطة P ، بحيث يكون المثلث MPN متطابق الضلعين؟

- a) (3, 5) b) (3, 2) c) (1, 5) d) (5, 1)



32 أي النقاط الآتية تقع في مُتّصف المسافة بين النقطتين P و Q ، الممثلتين في المستوى الإحداثي المجاور؟

- a) (7, 8) b) (4, 4)
c) (3, 5) d) (2, 2)