اسم الطالب :...................................
المادة : الفيزياء

الصف والشعبة : الحادي عشر المتقدم (........)
عنوان الدرس : الوحدة (10) الحركة الدورانية

اليوم والتاريخ : العام الدراسي 2021 - 2022
الفصل الدراسي : الثالث

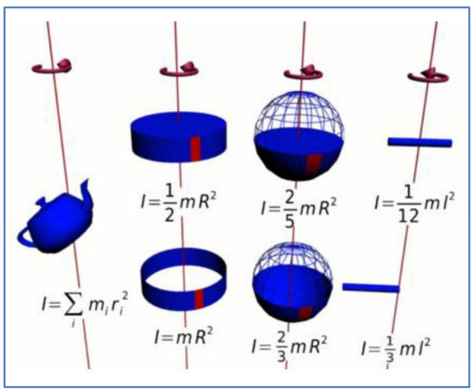
مدرسة الراشد الصالح الخاصة – دبي

(10.1) الطاقة الحركية للدوران المحوري – صفحة (285)

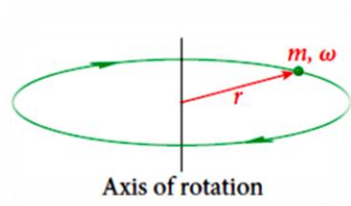
الحركة الدورانية:- هي حركة إلتفاف الجسم حول محور يمر بالجسم ، انظر الأشكال المجاورة .

ملاحظة) في الشكل المجاور نلاحظ ما يلي :-

* **الحركة الدائرية هي حركة (الكرة الحديدية) على محيط دائرة ، بينما الحركة الدورانية هي حركة (الرجل) حول محور يمر به (حول نفسه).**



****حساب الطاقة الحركية للدوران المحوري لحركة جسيم نقطي على محيط دائرة نصف قطرها (r) حول محور ثابت ، كما في الشكل المجاور .**



$$K=\frac{1}{2}m\mathcal{V}^2 \qquad (\mathcal{V}=\omega\, r)$$

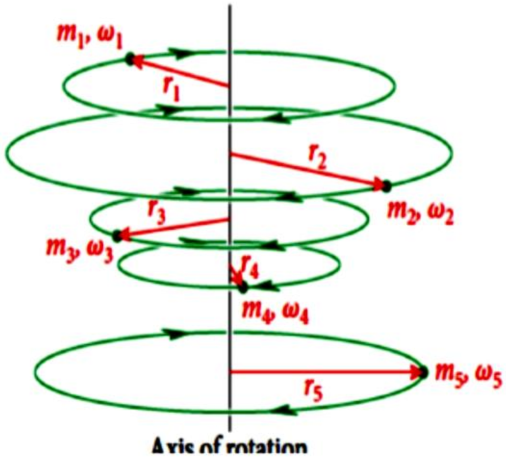
$$K=\frac{1}{2}m\mathcal{V}^2=\frac{1}{2}m(\,r\omega\,)^2=\frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

قانون حساب الطاقة الحركية للدوران المحوري لحركة جسيم نقطي على محيط دائرة نصف قطرها (r) حول محور ثابت :-

$$\boxed{K=\frac{1}{2}\,m\,r^2\omega^2}$$

(m) كتلة الجسيم .   (r) نصف قطر المسار الدائري.   (ω) السرعة الزاوية .

الحركة الدائرية لعدة جسيمات نقطية – صفحة (286)



* تُحدد الطاقة الحركية للدوران المحوري لجسيم نقطي واحد يتحرك حركة دائرية حول ثابت بالعلاقة :-

$$\boxed{K = \frac{1}{2}\, m\, r^2 \omega^2}$$

** إذا كان لدينا عدة جسيمات نقطية تتحرك حركة دائرية حول محور دوران ثابت ،حيث أنها تحتفظ بمسافات ثابتة فيما بينها وكذلك مسافات ثابتة بينها وبين محور الدوران المشترك لها .كما في الشكل المجاور.

لذلك يكون لجميع جسيمات النظام السرعة الزاويّة نفسها (ω).

في هذه الحالة تكون الطاقة الحركية الكلية للنظام تساوي مجموع الطاقات الحركية الفردية لجسيمات النظام ، أي أن :-

$$K_{tot} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i {r_i}^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i {r_i}^2\right)\omega^2$$

* ولكن تسمى الكمية ($\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$) عزم القصور الذاتي وكذلك تسمى القصور الدوراني ورمزها (I)، وتعتمد هذه الكمية فقط على كتل الجسيمات الفردية (m_i) والمسافات التي تفصلها عن محور الدوران (r_i^2) .

** لذلك يمكن حساب عزم القصور الذاتي لنظام يتكوّن من مجموعة جسيمات نقطية تدور حول محور ثابت باستخدام القانون التالي :-

$$\boxed{I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2}$$

(I) عزم القصور الذاتي للنظام ، ويُقاس بوحدة ($Kg\,.m^2$) .

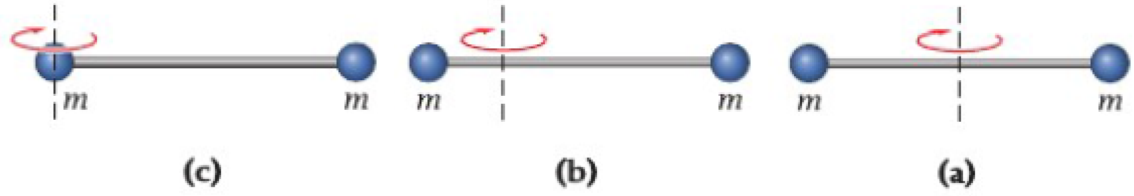
(m_i) كتلة كل جسيم من مكونات النظام ، ويُقاس بوحدة (Kg) .

(r_i^2) مربع المسافة بين الكتلة ومحور الدوران .

*** فيكون قانون حساب الطاقة الحركية للدوران المحوري لنظام يتكون من مجموعة من الجسيمات النقطية تتحرك حركة دائرية حول محور دوران مشترك كما يلي :-

$$K_{tot} = \frac{1}{2}\, I\, \omega^2$$

مراجعة المفاهيم (10.1) – صفحة (286) [فكّر في كتلتين متساويتين (m) متصلتين بساق رفيع عديم الكتلة ، كما في الأشكال المجاورة ، تدور الكتلتان في مستوى أفقي حول محور رأسي يُمَثّل بخط متقطع ، **ما النظام الذي يحظى بأعلى عزم قصور ذاتي** ؟



الحل) قانون عزم القصور الذاتي أو القصور الدوراني لنظام يتكون من مجموعة جسيمات نقطية هو $I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$

بما أن النظام يتكون من كتلتين ، لذلك يمكن كتابة القانون بالشكل التالي :- $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$

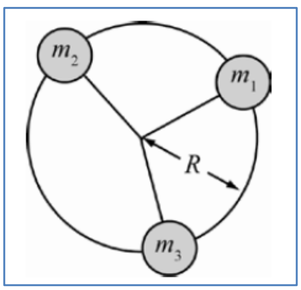
نفرض المسافة بين الكتلتين (d) .

* الشكل (a) :- $I_a = m.\left(\frac{d}{2}\right)^2 + m.\left(\frac{d}{2}\right)^2 = 2\,m\,.\left(\frac{d}{2}\right)^2 = 2\,m\,.\frac{d^2}{4} = m\,.\frac{d^2}{2} = 0.5\,m\,d^2$

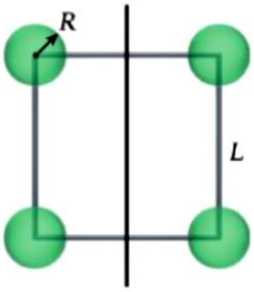
*الشكل (b) :- $I_b = m\,.\left(\frac{d}{4}\right)^2 + m\,.\left(\frac{3d}{4}\right)^2 = m\left(\frac{d^2}{16} + \frac{9d^2}{16}\right) = m\left(\frac{d^2+9d^2}{16}\right) = m\left(\frac{10d^2}{16}\right) = 0.625\,md^2$

* الشكل (c) :- $I_c = 0.0 + m\,.d^2 = m\,d^2$

سؤال(10.39) صفحة (318)[حدد عزم القصور الذاتي لثلاثة مراهقين كتلة كل منهم ($m_1 = 60\ Kg\ ,\ m_2 = 45\ Kg\ ,\ m_3 = 80\ Kg$) يجلسون في نقاط مختلفة على حافة منصة دوّارة نصف قطرها ($12.0\ m$) ، كما في الشكل المجاور ؟ $I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$



الحل)



سؤال(1)[أربعة أجسام كروية جوفاء كتلة كل منها $(1Kg)$ ونصف قطرها $(R=10\ cm)$ متصلة بقضبان عديمة الكتلة لتُشكّل مربعًا بأضلاع طولها $(L=50\ cm)$. إذا كانت الكتل تدور حول محور يُنصّف ضلعين من أضلاع المربع ،كما في الشكل المجاور. احسب عزم القصور الذاتي للنظام ؟

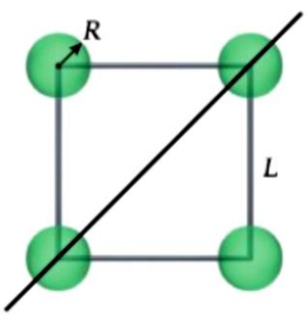
$0.25\ Kg.m^2\ (a)$ $\qquad$ $0.50\ Kg.m^2\ (b)$

$2500\ Kg.m^2\ (c)$ $\qquad$ $0.0\ (d)$

الحل) $\quad r=\frac{L}{2} \qquad I=\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$

$$I=m\left(\frac{L}{2}\right)^2+m\left(\frac{L}{2}\right)^2+m\left(\frac{L}{2}\right)^2+m\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$I=4\,m\left(\frac{L}{2}\right)^2=4\,m\frac{L^2}{4}=mL^2=$$

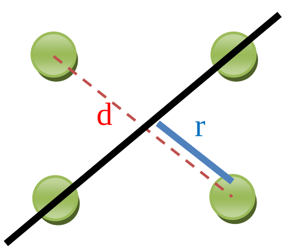


سؤال(2)[أربعة أجسام كروية جوفاء كتلة كل منها $(1Kg)$ ونصف قطرها $(R=10\ cm)$ متصلة بقضبان عديمة الكتلة لتُشكّل مربعًا بأضلاع طولها $(L=50\ cm)$. إذا كانت الكتل تدور حول محور يمر عبر الخط القطري للمربع ،كما في الشكل المجاور. احسب عزم القصور الذاتي للنظام ؟

الحل) حساب طول قطر المربع (d) :-

$$d=\sqrt{L^2+L^2}=\sqrt{2L^2}=\sqrt{2}\,L$$

$$r=\frac{d}{2}=\frac{\sqrt{2}\,L}{2}=\frac{L}{\sqrt{2}}$$

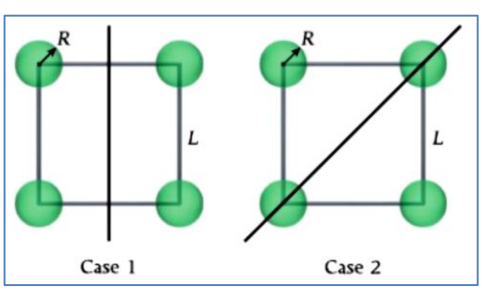


$$I=\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

$$I=m\left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right)^2+m\left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right)^2+0.0+0.0$$

$$I=2\,m\left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right)=2\,m\,\frac{L^2}{2}=m\,L^2=$$

سؤال(10.4) صفحة (316)[أربعة أجسام كروية جوفاء كتلة كل منها $(1Kg)$ ونصف قطرها $(R=10\ cm)$ متصلة بقضبان عديمة الكتلة لتُشكّل مربعًا بأضلاع طولها $(L=50\ cm)$. في الحالة الأولى تدور الكتل حول محور يُنصّف ضلعين من أضلاع المربع ، وفي الحالة الثانية تدور الكتل حول محور يمر عبر الخط القطري للمربع . كما هو موضح في الشكل ، احسب نسبة عزم القصور الذاتي $\left(\frac{I_1}{I_2}\right)$ في الحالتين ؟



$\frac{I_1}{I_2}=8\ \ (a)$ $\qquad$ $\frac{I_1}{I_2}=4\ \ (b)$ $\qquad$ $\frac{I_1}{I_2}=2\ \ (c)$ $\qquad$ $\frac{I_1}{I_2}=1\ \ (d)$ $\qquad$ $\frac{I_1}{I_2}=0.5\ \ (e)$

سؤال(10.5) صفحة (316)[إذا استبدلنا بالأجسام الكروية الجوفاء في السؤال (10.4) أجسامًا كروية صلبة لها الكتلة ونصف القطر أنفسهما ، فإن نسبة عزم القصور الذاتي في الحالتين سوف ؟

(a) تزيد. $\qquad$ (b) تقل. $\qquad$ (c) تظل كما هي. $\qquad$ (d) تكون صفرًا.

(10.2) حساب عزم القصور الذاتي – صفحة (286)

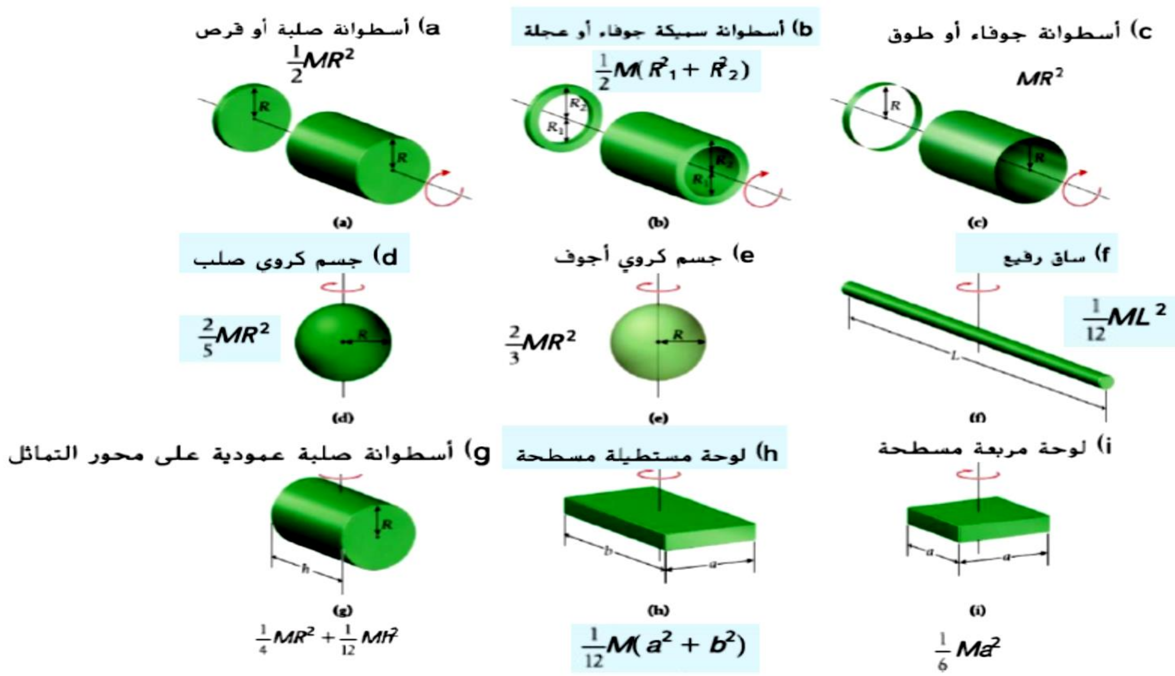
دوران جسم صلب حول محور ثابت يمر عبر مركز الكتلة

* **عزم القصور الذاتي لجسم صلب** يدور **حول محور** يمر عبر مركز كتلته تختلف قيمته وفقًا للشكل الهندسي للجسم ، حيث :-

****** عزم القصور الذاتي لجميع **الاجسام المستديرة** هو :- $\boxed{I = c\,MR^2}$

(c) ثابت قيمته تختلف وفقًا للشكل الهندسي للجسم الصلب ، حيث $[\,0 < c \le 1\,]$ ، وتُعطى قيمته ولا تُحفَظ .

ملاحظة) اشتقاق القوانين غير مطلوب ، وكذلك القوانين تُعطى ولا تُحفَظ .



الجدول 10.1 عزم القصور الذاتي وقيمة الثابت c للأجسام الموضحة في الشكل 10.10. جميع الأجسام لها كتلة M

الجسم	I	c
a) أسطوانة صلبة أو قرص	$\frac{1}{2}MR^2$	$\frac{1}{2}$
b) أسطوانة سميكة جوفاء أو عجلة	$\frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$	
c) أسطوانة جوفاء أو طوق	MR^2	1
d) جسم كروي صلب	$\frac{2}{5}MR^2$	$\frac{2}{5}$
e) جسم كروي أجوف	$\frac{2}{3}MR^2$	$\frac{2}{3}$
f) ساق رفيع	$\frac{1}{12}ML^2$	
g) أسطوانة صلبة عمودية على محور التماثل	$\frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}Mh^2$	
h) لوحة مستطيلة مسطحة	$\frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$	
i) لوحة مربعة مسطحة	$\frac{1}{6}Ma^2$	

** حساب الطاقة الحركية للدوران المحوري لجسم صلب

ملاحظة مهمة) يمكن اعتبار الجسم الصلب نظام يتكوّن من مجموعة جسيمات نقطية ، لذلك يمكن استخدام القانون التالي لحساب الطاقة الحركية للدوران المحوري لأي جسم صلب ، حيث :-

$$\boxed{K_{rot} = \frac{1}{2}\, I\, \omega^2}$$

(K_{rot}) الطاقة الحركية للدوران المحوري لجسم صلب يدور حول محور ثابت يمر في مركز الكتلة.

(I) عزم القصور الذاتي للجسم الصلب (لكل جسم صلب قانون خاص به حسب شكله الهندسي ، والقانون يُعطى ولا يُحفَظ) .

(ω^2) مربع السرعة الزاوية للجسم الصلب.

مثال (10.1) صفحة (292)] افترض أن الأرض جسم كروي صلب ذو كثافة ثابتة ، كتلته ($5.98 \times 10^{24} Kg$) ونصف قطره ($6370 Km$) ، وعزم القصور الذاتي له يُحسَب بالقانون [$I = \frac{2}{5}MR^2$] . احسب الطاقة الحركية للدوران المحوري للأرض ، حيث أنها تدور حول محورها دورة كاملة خلال ($23.93\ h$) ؟

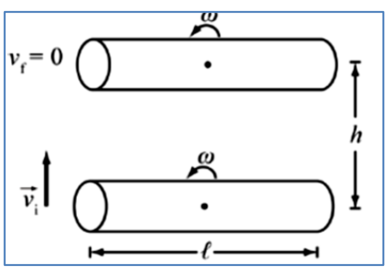
الحل)

$$T = 23.93 \times 3600\, s = 8.61 \times 10^4 s$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} =$$

$$K_{rot} = \frac{1}{2}\, I\, \omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\, MR^2\right)\omega^2 =$$

سؤال(10.40) صفحة (318)] قُذف قلم طوله ($0.24\ m$) إلى أعلى ليصل إلى أقصى إرتفاع ($1.2\ m$) فوق نقطة القذف ، وفي طريقه إلى الأعلى ينشىء القلم (1.80 دورة) خلال زمن ($0.49\ s$) ، إذا كان **عزم القصور الذاتي للقلم** ($I = \frac{1}{12}\, mL^2$) ، **احسب النسبة بين الطاقة الحركية الدورانية (K_{rot}) والطاقة الحركية الانتقالية (K_{trans}) ؟** افترض أن سرعة الدوران ثابتة وأن مقاومة الهواء مهملة .



ملاحظة) لاتنسى قانون حفظ الطاقة الميكانيكية ، حيث [$\frac{1}{2}mV_i^2 = mgh$] .

وأن [$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$]

الحل)

$$\frac{K_{rot}}{K_{trans}} = \frac{\frac{1}{2}I\,\omega^2}{\frac{1}{2}mV_i^2} =$$

سؤال(10.3) صفحة (316)] حدافة مولّد ، وهي أسطوانة صلبة متجانسة نصف قطرها (R) وكتلتها (M) وعزم القصور الذاتي لها $[I = \frac{1}{2}MR^2]$ ، تدور حول محورها الطولي ، والسرعة الخطية لنقطةٍ ما على الحدافة هي (ϑ) ، ما مقدار الطاقة الحركية للحدافة ؟

$K = \frac{1}{2}M\vartheta^2$ (a) $K = \frac{1}{4}M\vartheta^2$ (b.)* $K = \frac{1}{2}M\vartheta^2/R$ (c)

$K = \frac{1}{2}M\vartheta^2R$ (d)   (e) لا تتوفر معلومات كافية للإجابة .

سؤال(10.7) صفحة (316)] توجد اسطوانة صلبة وأخرى جوفاء تدوران حول محور يمر عبر مركز الكتلة بهما ، إذا كان الجسمان **متماثلين من حيث الكتلة ونصف القطر** ، فما الجسم الذي سيحظى بأكبر عزم قصور ذاتي ؟ (**ملاحظة :-** انظر الجدول 10.1).

$\boxed{I = c\,MR^2}$

(a) سيكون عزم القصور الذاتي متماثلًا في الجسمين.

(b) ستحظى الأسطوانة الصلبة بأكبر عزم قصور ذاتي لأن كتلتها موزعة بانتظام .

*(c) ستحظى الأسطوانة الجوفاء بأكبر عزم قصور ذاتي لأن كتلتها تقع بعيدًا عن محور الدوران..

(d) لا يمكن التنبؤ بذلك لعدم وجود معلوات كافية .

سؤال(10.18) صفحة (317)] ما العبارة الصحيحة حول عزم القصور الذاتي لجسم صلب غير نقطي مما يلي ؟

(a) عزم القصور الذاتي مستقل عن محور الدوران .   (b) عزم القصور الذاتي يعتمد على محور الدوران ..

(c) عزم القصور الذاتي يعتمد على كتلة الجسم فقط.   (d) عزم القصور الذاتي يعتمد فقط على أكبربُعد عمودي للجسم .

سؤال(10.10) صفحة (316)] تتدحرج أسطوانة لأسفل دون انزلاق على مستوى يميل بزاوية (θ) بالنسبة إلى المستوى الأفقي ، ما مقدار الشغل المبذول من قوة الاحتكاك أثناء انتقال الأسطوانة مسافة (S) على امتداد المستوى . (μ_s هو معامل الاحتكاك السكوني بين المستوى والأسطوانة) .

$+\mu_s mgs\,sin\theta$ (a) $-\mu_s mgs\,sin\theta$ (b) $+mgs\,sin\theta$ (c) $-mgs\,sin\theta$ (d)   *(e) لا يُبذل شغل..

سؤال(10.14) صفحة (316)] تدور متزلجة جليدية باسطة ذراعيها ثم تضمهما مما يجعلها تدور بشكل أسرع ، ما العبارة الصحيحة مما يلي ؟

(a) لا تتغير الطاقة الحركية للدوران لديها لأن الجزء الذي تزيده سرعتها الزاوية مماثل للجزء الذي يقلله قصورها الذاتي .

(b) تزداد الطاقة الحركية للدوران لديها بسبب الشغل الذي تبذله لضم ذراعيها..

(c) تقل الطاقة الحركية للدوران لديها بسبب انخفاض قصورها الذاتي ، إذ تفقد الطاقة لأنها تُجهد بصورة تدريجية .

سؤال(10.17) صفحة (317)] تسير دراجة بسرعة (*4.02 m/s*) فإذا كان نصف قطر العجلة الأمامية (*0.450 m*) ، فما المدة التي تستغرقها هذه العجلة للقيام بدورة كاملة ؟

0.703 s (a.)*   *1.23 s* (b)   *2.34 s* (c)   *4.04 s* (d)   *6.78 s* (e)

(10.3) التدحرج دون انزلاق – صفحة (293)

حركة التدحرج :- هي حالة خاصة للحركة الدورانية تقوم بها أجسام مستديرة نصف قطرها (R) وتتحرك عبر سطح من دون انزلاق .

*__يمكن وصف حركة التدحرج بأنها مزيج من الحركة الدورانية للجسم بالاضافة إلى الحركة الأنتقالية لمركز كتلته__ .

* **الطاقة الحركية الكلية (K)** لجسم في حركة التدحرج هي مجموع طاقته الحركية الانتقالية (K_{trans}) الناتجة عن الحركة الخطية لمركز كتلته وطاقته الحركية الدورانية (K_{rot}) الناتجة عن دوران الجسم حول مركز كتلته. أي أن :-

$$\boxed{K = K_{trans} + K_{rot} = \frac{1}{2}m\mathcal{V}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2} \quad or \quad \boxed{K = (1+c)\frac{1}{2}m\mathcal{V}^2}$$

[ملاحظات مهمة حول هذا القانون] $K = (1+c)\frac{1}{2}m\mathcal{V}^2$

* مقدار الطاقة الحركية (K) لأي جسم مستدير (كرة أو أسطوانة) متدحرج يعتمد على :-

1) مربع السرعة الخطية لمركز كتلة الجسم ($\mathcal{V}^2$) . **2)** كتلة الجسم (m).

3) قيمة الثابت (c) الذي تختلف قيمته باختلاف التوزيع الهندسي للكتلة وكذلك باختلاف طبيعة الجسم (صلب أو أجوف).

[مراجعة المفاهيم (10.2) صفحة (294)] جسم كروي صلب وأسطوانة صلبة وأسطوانة جوفاء **متماثلة من حيث الكتلة** ونصف القطر وتتدحرج **بالسرعة نفسها** ، ما العبارة الصحيحة مما يلي :- (**ملاحظة:-** انظر الجدول (10.1)) $\boxed{K = (1+c)\frac{1}{2}m\mathcal{V}^2}$

(a) الجسم الكروي الصلب به أعلى طاقة حركية . (b) الأسطوانة الصلبة بها أعلى طاقة حركية.

*(c) الأسطوانة الجوفاء بها أعلى طاقة حركية. (d) جميع الأجسام الثلاثة لها طاقة حركية مماثلة .

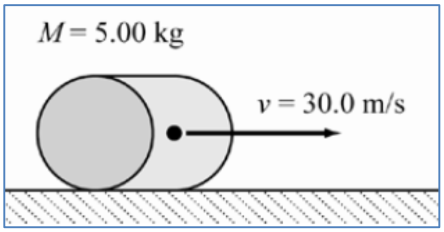
[سؤال(10.20) صفحة (317)] تتدحرج أسطوانة صلبة وأسطوانة جوفاء وجسم كروي صلب وجسم كروي أجوف دون انزلاق ، الأجسام الأربعة **متماثلة من حيث الكتلة** ونصف القطر وتنتقل **بالسرعة الخطية نفسها** ، ما العبارة الصحيحة مما يلي ؟

(a) الأسطوانة الصلبة بها أعلى طاقة حركية . *(b) الأسطوانة الجوفاء بها أعلى طاقة حركية ..

(c) الجسم الكروي الصلب به أعلى طاقة حركية. (d) الجسم الكروي الأجوف به أعلى طاقة حركية.

(e) الأجسام الأربعة لها الطاقة الحركية نفسها.

سؤال[(10.38) صفحة (318)] أسطوانة صلبة منتظمة كتلتها ($M=5.00\ Kg$) تتدحرج دون إنزلاق على طول سطح أفقي ، سرعة مركز كتلتها ($30.0 m/s$) ، احسب طاقتها ؟ حيث ($I=\frac{1}{2}MR^2$) .



الحل) للإسطوانة حركتين هما :-

* **حركة إنتقالية** لمركز كتلتها ، فيكون لها طاقة حركة انتقالية ، حيث :- $K_{trans}=\frac{1}{2}M\vartheta^2$

* **حركة دورانية** حول محور يمر عبر مركز كتلتها ، فيكون لها طاقة حركية للدوران المحوري ، حيث :- $K_{rot}=\frac{1}{2}I\omega^2$

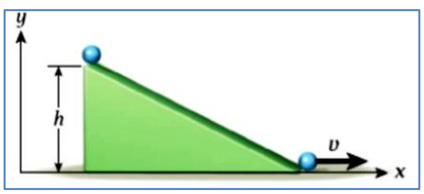
$$\boldsymbol{K=K_{trans}+K_{rot}}$$

$$K=\frac{1}{2}M\vartheta^2+\frac{1}{2}I\omega^2 \qquad \left(\omega=\frac{v}{R}\right)$$

$$K=\frac{1}{2}M\vartheta^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{\vartheta^2}{R^2}\right)=\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}M\mathcal{V}^2=\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\times 5\times 30^2=$$

طريقة ثانية للحل باستخدام القانون :- $\boldsymbol{K=(1+c)\frac{1}{2}m\mathcal{V}^2}$ حيث (c) تُأخذ من الجدول

مسألة محلولة (10.1) صفحة (294)] جسم كروي صلب كتلته ($5.15\ Kg$) ونصف قطره ($0.340\ m$) يبدأ الحركة من السكون على ارتفاع ($2.10\ m$) فوق قاعدة مستوى مائل ويتدحرج لأسفل دون انزلاق تحت تأثير الجاذبية ، **ما السرعة الخطية** لمركز كتلة الجسم الكروي عندما يغادر المستوى المائل ويتدحرج على سطح أفقي ؟



الحل) بتطبيق قانون حفظ الطاقة الميكانيكية ، حيث :-

$$\boldsymbol{E_{top}=E_{bottom}}$$

$$\boldsymbol{K_{top}+U_{top}=K_{bottom}+U_{bottom}}$$

$$\boldsymbol{0.0+mgh=(1+c)\frac{1}{2}m\mathcal{V}^2+0.0}$$

$$\boldsymbol{2gh=(1+c)\mathcal{V}^2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{V}=\sqrt{\frac{2gh}{(1+c)}}}} \qquad \mathcal{V}=\sqrt{\frac{2\times 9.81\times 2.10}{\left(1+\frac{2}{5}\right)}}=$$

ملاحظات مهمة حول القانون]

$$\mathcal{V} = \sqrt{\frac{2gh}{(1+c)}}$$

($\mathcal{V}$) مقدار السرعة الخطية لجسم مستدير(كرة أو أسطوانة) متدحرج عند أسفل سطح مائل . **(h) ارتفاع السطح المائل.**

(c) قيمة الثابت ، تُأخَذ من الجدول .

1) مقدار السرعة الخطية ($\mathcal{V}$) يعتمد على ارتفاع السطح المائل (h) .

2) مقدار السرعة الخطية ($\mathcal{V}$) لايعتمد على كتلة الجسم وإنما يعتمد على التوزيع الهندسي للكتلة الذي يمثله الثابت (c) . حيث قيمته تختلف باختلاف طبيعة الجسم (صلب أو أجوف).

3) كلما زادت قيمة الثابت (c) يقل مقدار السرعة الخطية ($\mathcal{V}$).

مثال(10.2) صفحة (295)] جسم كروي صلب وأسطوانة صلبة وأسطوانة جوفاء (أنبوب) ، كلها بالكتلة نفسها ولها نصف القطر الخارجي نفسه (R) ، تم تحريرها من وضع السكون في قمة السطح المائل وبدأت في التدحرج دون انزلاق ، فما ترتيب وصولها إلى أسفل السطح المائل ؟ [ارجع إلى الجدول (10.1) لمعرفة قيمة الثابت (c)]

استعن بالقانون $\mathcal{V} = \sqrt{\frac{2gh}{(1+c)}}$

(a) الأجسام الثلاثة تصل في اللحظة نفسها .

(b) الجسم الكروي الصلب يصل أولًا ، ثم الأسطوانة الصلبة ، وأخيرًا الأسطوانة الجوفاء.

(c) الأسطوانة الصلبة تصل أولًا ، ثم الجسم الكروي الصلب ، وأخيرًا الأسطوانة الجوفاء.

(d) الأسطوانة الجوفاء تصل أولًا ، ثم الأسطوانة الصلبة ، وأخيرًا الجسم الكروي الصلب.

سؤال(10.1) صفحة (316)] يبدأ جسم مستدير من حالة السكون ويتدحرج دون انزلاق على مستوى مائل، عبر مسافة رأسية تساوي ($4.0m$) ، وعند وصول الجسم إلى القاع فإن سرعته الأنتقالية تكون ($7.0\ m/s$) ، **ما الثابت (C)** الذي يربط عزم القصور الذاتي بكتلة هذا الجسم ونصف قطره ؟

$\nu=\sqrt{\frac{2gh}{1+c}}$

$\nu^2\,(1+c)=2gh$

$c=\frac{2gh}{\nu^2}-1 = 0.60$

(a) 0.80 (b) 0.60*

(c) 0.40 (d) 0.20

سؤال(10.2) صفحة (316)] كرتان من الفولاذ الصلب إحداهما صغيرة والأخرى كبيرة،على مستوى مائل.قطر الكرة الكبيرة أكبر مرتين من قطر الكرة الصغيرة ،ومع البدء من السكون تتدحرج الكرتان دون انزلاق على المستوى المائل حتى حتى يكون مركزا كتلتيهما ($1\ m$) أسفل موضعي البدء ، ما سرعة الكرة الكبيرة ($\mathcal{V}_L$) مقارنة بسرعة الكرة الصغيرة ($\mathcal{V}_S$) بعد التدحرج لمسافة ($1\ m$) ؟

$$\mathcal{V} = \sqrt{\frac{2gh}{(1+c)}}$$

$$C_{\text{كرة صلبة}} = \frac{2}{5}$$

(a) $\mathcal{V}_L = 4\mathcal{V}_S$ (b) $\mathcal{V}_L = 2\mathcal{V}_S$ (c) $\mathcal{V}_L = \mathcal{V}_S$*

(d) $\mathcal{V}_L = 0.5\mathcal{V}_S$ (e) $\mathcal{V}_L = 0.25\mathcal{V}_S$

سؤال(10.9) صفحة (316)] جسم كروي صلب يتدحرج دون انزلاق على مستوى مائل ، ويبدأ من حالة السكون ، في الوقت نفسه يبدأ صندوق من حالة السكون على الإرتفاع نفسه وينزلق على المستوى المائل نفسه ، مع احتكاك ضئيل ، ما الجسم الذي سيصل إلى القاع أولًا؟

(a) سيصل الجسم الكروي الصلب أولًا.   *(b) سيصل الصندوق أولًا..

(c) كلاهما سيصل في الوقت نفسه .   (d) من المستحيل تحديد ذلك .

توضيح الحل **سرعة الجسم الكروي** عند أسفل السطح المائل تساوي :- $\mathcal{V} = \sqrt{\frac{2gh}{(1+c)}}$ حيث $C = \frac{2}{5}$.

بينما **سرعة الصندوق** عند أسفل السطح المائل تساوي:- $mgh = \frac{1}{2}m\mathcal{V}^2 \rightarrow \mathcal{V} = \sqrt{2gh}$

(10.4) عزم الدوران صفحة (297)

عزم الدوران ($\vec{\tau}$):- هو مقدرة كل من القوة وذراع العزم على إحداث دوران الجسم . وينتج عن الضرب الاتجاهي لمتجه القوة ($\vec{F}$) ومتجه (ذراع العزم أو متجه الموقع) ($\vec{r}$) .

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

ذراع العزم أو متجه الموقع($\vec{r}$):- المسافة العمودية من محور الدوران (نقطة الأصل) إلى موقع تأثير القوة.

* يمكن حساب مقدار العزم باستخدام القانون التالي :- $\boldsymbol{\tau = r\,F\,\sin\theta}$ وحدة قياس العزم ($N\,.\,m$) .

ملاحظات حول القانون :- نلاحظ من القانون أن **مقدارالعزم (τ) يتناسب طرديا مع كل من** :-

*** ذراع العزم أو (r) .**   **** مقدار القوة (F) .**

***** $\sin\theta$ حيث (θ) هي الزاوية المحصورة بين متجه القوة ومتجه (ذراع العزم أو متجه الموقع) .**

سؤال (1)] الأشكال التالية توضح شخص يستخدم مفتاح لفك برغي ، ناقش الحالات الثلاث ؟ وفي أي منها يستطيع الشخص فك البرغي بسهولة ، مفسرًا إجابتك؟


(a) (b) (c)

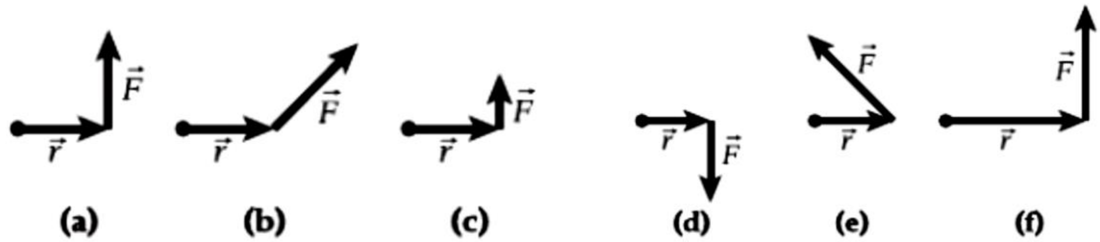
الجواب

الشكل(a):- عزم الدوران يساوي صفر ، لأن متجه القوة يوازي متجه الموقع (ذراع العزم) أي أن ($\theta = 0.0$) و ($\sin 0 = 0.0$) فإن ($\tau = 0.0$) .

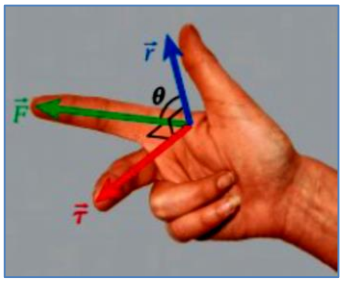
الشكل (b) :- من الصعوبة فك البرغي ، لأن ذراع العزم (r) قصير [المسافة من محور الدوران (موقع الرغي) إلى خط عمل القوة (موقع اليد) قصيرة] فيكون مقدار العزم قليل .

الشكل (c):- يوضح الشكل الاستخدام الأمثل للمفتاح حيث يَسهُل فك البرغي ، لأن ذراع العزم (r) كبير، وكذلك الزاوية بين متجه القوة ومتجه ذراع العزم تقريبا قائمة ($\theta = 90$) و ($\sin 90 = 1$) فيكون عزم الدوران عند أقصى قيمة له ($\tau_{max} = r\,F$).

مراجعة المفاهيم (10.4) صفحة (298)] أختر مزيجًا من متجه الموقع ($\vec{r}$) ومتجه القوة ($\vec{F}$) ينتج **عزم الدوران لأعلى مقدار** حول النقطة التي تشير إليها النقطة السوداء؟



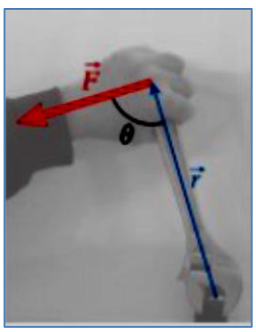
ملاحظات)



1) عزم الدوران (τ) يُعَد متجه محوري (المتجه المحوري هو متجه يُشير إلى محور الدوران) .

2) نحصل على اتجاه عزم الدوران باستخدام قاعدة اليد اليُمنى ، كما في الشكل المجاور، حيث يكون الابهام باتجاه متجه الموقع ($\vec{r}$) وتكون السبابة (أو الأصابع الأربعة) باتجاه متجه القوة ($\vec{F}$) فتُشير الوسطى (أوالقلم) إلى اتجاه عزم الدوران .

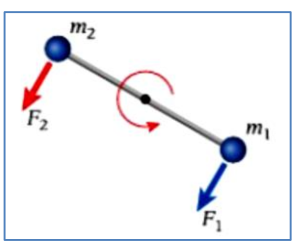
3) متجه عزم الدوران ($\vec{\tau}$) يكون دائمًا عموديًا على كل من متجه الموقع ($\vec{r}$) و متجه القوة ($\vec{F}$).



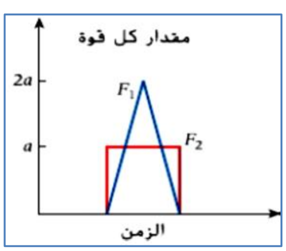
4) الدوران حول أي محور ثابت قد يكون في اتجاه عقارب الساعة أو عكس اتجاه عقارب الساعة ، كما في الشكل المجاور، فإن الدوران المتولد من اليد التي تسحب مفتاح الربط سيكون عكس اتجاه عقارب الساعة .

5) محصلة الدوران (τ_{net}) :- هي الفرق بين مجموع كل قيم العزم في اتجاه عقارب الساعة ومجموع كل قيم العزم في عكس اتجاه عقارب الساعة . أي أن :-

$$\tau_{\text{net}} = \sum_i \tau_{\text{counterclockwise},i} - \sum_j \tau_{\text{clockwise},j}$$



سؤال(10.6) صفحة (316)] جسم غير نقطي يتالف من كتلتين نقطيتين، (m_2 , m_1) متصلتين عبر ساق صلب عديم الكتلة طوله (L) كما هو موضح في الشكل. يدور الجسم بسرعة زاويّة ثابتة حول محور متعامد على الصفحة عبر نقطة منتصف الساق. وتُستخدم قوتان مماستان متفاوتتان في الزمن (F_2 , F_1) في (m_2 , m_1) على التوالي . وبعد استخدام القوتين ، ما الذي سيحدث للسرعة الزاويّة للجسم؟



(a) سوف تزيد. (b) سوف تقل.

(c) سوف تظل دون تغيير. (d) لا توجد معلومات كافية للتحديد.

سؤال(10.47) صفحة (318)] (السؤال معدّل) [قرص كتلته $(30.0Kg)$ ونصف قطره $(40.0cm)$ مُثبت في محور أفقي عديم الاحتكاك ، وقد لُفّ حبل عدة مرات حول القرص ثم رُبط في قالب $(70.0Kg)$ كما هو موضح في الشكل، أوجد مقدار عزم الدوران المؤثر على القرص؟

الحل)

(10.5) قانون نيوتن الثاني للدوران المحوري – صفحة (298)

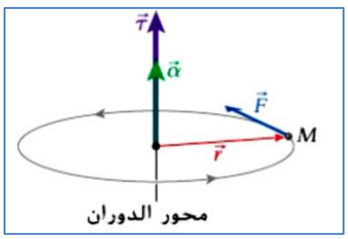
***القانون الأول لنيوتن في الحركة الخطية** :- إذا كانت محصلة القوى (F_{net}) المؤثرة على جسم متحرك على خط مستقيم تساوي صفر فإن الجسم سوف يتحرك بسرعة خطية $(\mathcal{V})$ ثابتة .

$$F_{net} = 0.0 \quad \rightarrow \quad a = 0.0$$

***القانون الثاني لنيوتن في الحركة الخطية** :- إذا أثرت على جسم محصلة قوى (F_{net}) فإنه سوف يتحرك بعجلة (a) .

$$F_{net} = m\,a$$

****القانون الأول لنيوتن في الحركة الدائرية** :- إذا كانت محصلة عزم الدوران (τ_{net}) المؤثرة على جسم يتحرك في مسار دائري تساوي صفر، فإن الجسم سوف يتحرك بسرعة زاويّة ثابتة ، فتكون عجلته الزاويّة صفرًا ، أي يكون الجسم في حالة إتزان دوراني .



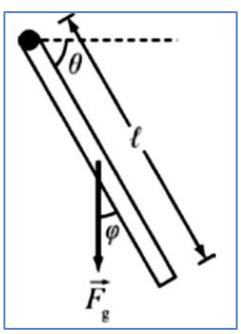
****القانون الثاني لنيوتن في الحركة الدائرية** :- في الشكل المجاور،جسيم نقطي كتلته (M) يتحرك في مسار دائري نصف قطره (r) بتأثير قوة (F) لذلك سوف يتأثر الجسيم بعزم دوران $(\tau = r\,F\,\sin\theta)$ فيكون له عجلة زاويّة (α) .

الصيغة الرياضية للقانون الثاني لنيوتن في الحركة الدائرية :-

$$\tau = I\,\alpha = r\,F\,\sin\theta$$

(τ) عزم الدوران . (I) عزم القصور الذاتي $(I = m\,r^2)$. (α) العجلة الزاويّة.

(r) نصف قطر المسار الدائري. (θ) الزاوية بين القوة $(\vec{F})$ و $(\vec{r})$.



سؤال(10.50) صفحة (319)] ساق رفيع منتظم طوله $(L=1.00\ m)$ وكتلته $(m=2.00Kg)$ يدور على محور قطعة خشبية أفقية عديمة الاحتكاك بأحد طرفيه ، وعزم القصور الذاتي للساق خلال هذا المحور هو $(I = \frac{1}{3}mL^2)$ ، يُطلق الساق عندما يكون (60°) أسفل المستوى الأفقي ، ما العجلة الزاويّة للساق لحظة انطلاقه؟

الحل)

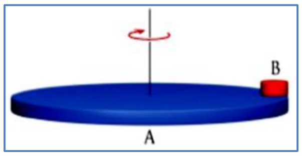
$$\theta = 60° \quad \rightarrow \quad \varphi = 90° - 60° = 30°$$

$$\tau = r\,F\sin\varphi = I\,\alpha$$

$$r\,F\,\sin\varphi = I\,\alpha \quad \rightarrow \quad \left(\tfrac{1}{2}L\right)\cancel{m}g\,\sin 30 = \left(\tfrac{1}{3}\cancel{m}L^2\right)\alpha$$

$$\tfrac{1}{2}\times 1\times 9.81\times\sin 30 = \left(\tfrac{1}{3}\times 1^2\right)\alpha \quad \rightarrow \quad \alpha = 7.35\,rad/s^2$$

سؤال(10.51) صفحة (319)] يدور جسم مكوّن من جزأين على شكل قرص (B , A) كما هو موضح في الشكل ، حول محور عبر مركز القرص (A) ، إذا كان عزم الدوران المحوري الناتج عن الاحتكاك هو ($0.200\ N.m$) وعزم القصور الذاتي للجسم ($0.072\ Kg.m^2$) ، **فما المدة التي يستغرقها الجسم** حتى يتوقف إذا كان يدور بسرعة زاويّة إبتدائية تساوي ($-2\pi\ rad/s$) ؟

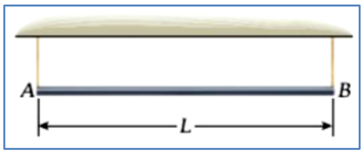


الحل)

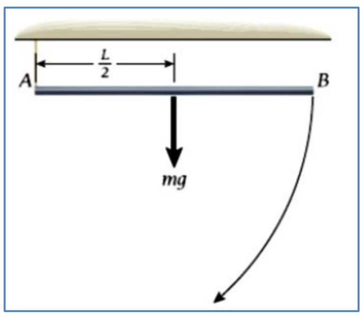
$$\tau = I\ \alpha \quad \rightarrow \quad \tau = I\ \left(\frac{\omega_f - \omega_i}{\Delta t}\right)$$

$$0.2 = 0.072\ \left(\frac{0.0-(-2\pi)}{\Delta t}\right) \quad \rightarrow \quad \Delta t = 2.28\ s$$

مسألة محلولة (10.3) صفحة (302)] ساق رفيع طوله (L=2.50 m) وكتلته (m=3.50 Kg) يتدلى أفقيًا بواسطة زوج الحبال العمودية المربوطة بالطرفين كما في الشكل المجاور ن بعد ذلك يُقطَع الحبل الذي يدعم الطرف (B) ، **مالعجلة الخطية المماسية** للطرف (B) من الساق بعد قطع الحبل ، علمًا بأن عزم القصور الذاتي للساق ($I = \frac{1}{3}mL^2$) ؟



الحل)



*عند قطع الحبل الذي يدعم الطرف (B) سوف يتأثر الساق بعزم دوران حول الطرف (A) ناتج عن قوة الجاذبية ($F_g = mg$) .

* بما أن الساق ذو كثافة كتلية ثابتة ، لذلك يكون مركز الكتلة (مركز الثقل) يقع في منتصفه ، كما يظهر في الشكل المجاور. أي تكون القوة ($F_g = mg$) على بُعد ($r = \frac{L}{2}$) عن محور الدوران (A).

* فيكون عزم الدوران (τ) المؤثر على الساق ناتج قوة الجاذبية ($F_g = mg$) مضروبًا في ذراع العزم ($r = \frac{L}{2}$) مضروبًا في (sin 90).

$$\tau = r\ F_g \sin\theta = \left(\frac{L}{2}\right) mg\ \sin 90 = \frac{mgL}{2} = \frac{3.5\times 9.81\times 2.5}{2} = 42.91\ N.m$$

$$\tau = I\ \alpha \quad \rightarrow \quad \tau = \left(\frac{1}{3}mL^2\right)\alpha$$

$$42.91 = \left(\frac{1}{3}\times 3.5\times 2.5^2\right)\alpha \quad \rightarrow \quad \alpha = 5.8848\ rad/s^2$$

$$a_t = r\ \alpha \quad \rightarrow \quad a_t = L\ \alpha \quad \rightarrow \quad a_t = 2.5\times 5.8848 = 14.7\ m/s^2$$

(10.7) كميّة الحركة الزاويّة – صفحة (306)

* **كمية الحركة الزاويّة للجسيم النقطي ($\vec{L}$)** :- هي الضرب الاتجاهي لمتجه الموقع ($\vec{r}$) ومتجه كمية الحركة ($\vec{P}$).

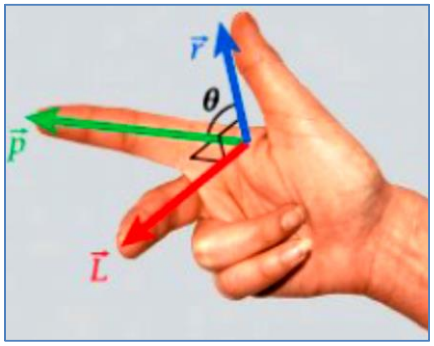
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$$

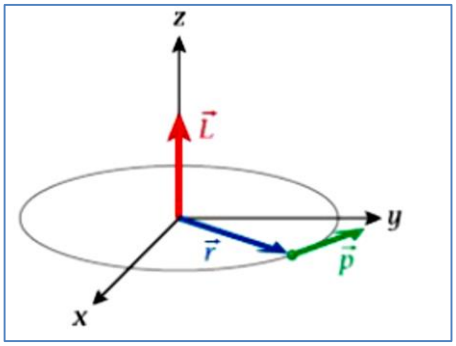
* لذلك يمكن **حساب مقدار كمية الحركة الزاويّة** باستخدام القانون التالي :-

$$L = r\, p\, \sin\theta$$

(θ) الزاوية بين متجه الموقع ($\vec{r}$) ومتجه كمية الحركة ($\vec{P}$).

* يمكن **تحديد اتجاه كمية الحركة الزاويّة ($\vec{L}$) باستخدام قاعدة اليد اليمنى** ، حيث يكون الابهام باتجاه متجه الموقع ($\vec{r}$) وتكون السبابة (أو الأصابع الأربعة) باتجاه كمية الحركة ($\vec{P}$). فتُشير الوسطى (أوالقلم) إلى اتجاه كمية الحركة الزاويّة ($\vec{L}$). انظر الشكل المجاور.





*** معدل تغير كمية الحركة الزاويّة أو مشتقة الزمن لمتجه كمية الحركة الزاويّة تساوي عزم الدوران ، أي أن :-

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{\tau}$$

* **كمية الحركة الزاويّة للجسم الصلب ($\vec{L}$)**

عندما يدور الجسم الصلب حول محور ثابت بسرعة زاوية (ω) ، فإن **كمية الحركة الزاويّة ($\vec{L}$) تتناسب طرديًا مع السرعة الزاوية ، ويكون ثابت التناسب هو عزم القصور الذاتي للجسم الصلب (I)** ، أي أن :-

$$\vec{L} = I\,\vec{\omega}$$

وحدة قياسه ($Kg.m^2/s$)

مثال (10.6) صفحة (308)] ما مقدار كمية الحركة الزاويّة لكرة جولف نصف قطرها ($R = 2.13\times10^{-2}m$) وكتلتها ($m = 4.59\times10^{-2}Kg$) وعزم القصور الذاتي لها ($I = \frac{2}{5}mR^2$) تدور بسرعة ($4250\ rpm$) بعد ضربة موفقة بالمضرب؟

الحل)

حفظ كمية الحركة الزاويّة – صفحة (309)

* بما أن معدل تغير كمية الحركة الزاويّة أو مشتقة الزمن لمتجه كمية الحركة الزاويّة تساوي عزم الدوران:-

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{\tau}$$

* فإذا كانت محصلة عزم الدوران الخارجي صفرًا $(\tau_{net} = 0.0)$ ، فإن معدل تغير كمية الحركة الزاويّة أو مشتقة الزمن لمتجه كمية الحركة الزاويّة تساوي صفرًا،عندها تكون كمية الحركة الزاويّة ثابتة $(\vec{L} = constant)$ ، أي أن $(\vec{L} = \vec{L}_o)$ وحيث $(\vec{L} = I\,\vec{\omega})$ لذلك يمكننا كتابة قانون حفظ كمية الحركة الزاويّة للجسم الصلب بالشكل التالي:-

$$If \quad \vec{\tau}_{net} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{L} = constant \quad \rightarrow \quad \vec{L} = \vec{L}_o \quad \rightarrow \quad I\,\omega = I_o\omega_o$$

مثال (10.7) صفحة (310)] موت نجم

في نهاية حياة نجم عملاق يبلغ خمسة أضعاف حجم الشمس، يكون لُب النجم بالكامل تقريبًا من فلز الحديد. وبمجرد الوصول إلى هذه المرحلة، يصبح اللُب غير مستقر وينهار (كما يوضّح الشكل 10.31) خلال عملية تستغرق حوالي ثانية فقط وتكون بمثابة المرحلة الأولى لانفجار المستعِر الأعظم. من بين أكبر الأحداث التي تُطلق الطاقة العظمى في الكون، يعتبر انفجار المستعر الأعظم مصدر أغلب العناصر الأثقل من الحديد. يطلق هذا الانفجار الحطام، بما فيه العناصر الثقيلة، في الفضاء الخارجي، وقد يترك خلفه نجمًا نيوترونيًا يتكوّن من مواد نجمية مضغوطة إلى كثافة أثقل بملايين المرات من أكبر الكثافات التي تم اكتشافها على الأرض.

المسألة] إذا كان اللب الحديدي يدور بمعدل (9.00) دورات في اليوم ، وإذا تناقص نصف قطره خلال الانهيار بمعامل (700) ، فكم تبلغ السرعة الزاويّة للّب في نهاية الانهيار؟ علمًا بأن عزم القصور الذاتي للّب الحديدي يتناسب طرديًا مع مربع نصف قطره أثناء عملية الانهيار. وأن محصلة عزم الدوران الخارجي المؤثرة في اللّب تساوي صفرًا .

المعطيات :-

$$\omega_o = 9\,\frac{rev}{day} \times \frac{2\pi\,rad}{rev} \times \frac{day}{24h} \times \frac{h}{3600\,s} = 6.55 \times 10^{-4} rad/s$$

$$R = \frac{1}{700}R_o \quad \rightarrow \quad \frac{R_o}{R} = 700$$

عزم القصور الذاتي للّب الحديدي يتناسب طرديًا مع مربع نصف قطره ، أي أن :-

$$\frac{I_o}{I} = \frac{R_o^2}{R^2} = 700^2$$

(الحل)

بما أن محصلة عزم الدوران الخارجي المؤثرة في اللّب تساوي صفرًا $(\vec{\tau}_{net} = 0)$ لذلك يتحقق قانون حفظ كمية الحركة الزاويّة ، أي أن:-

$$\vec{L} = \vec{L}_o \quad \rightarrow \quad I\,\omega = I_o\omega_o$$

$$\frac{\omega}{\omega_o} = \frac{I_o}{I} = \frac{R_o^2}{R} = 700^2 = 4.90 \times 10^5$$

$$\omega = \omega_0 \times 4.90 \times 10^5 = 6.55 \times 10^{-4} \times 4.90 \times 10^5 = 321\,rad/s$$

سؤال(10.16) صفحة(317)] إذا دار لُب حديدي لنجم منهار في البداية بتردد دوراني ($f_o = 3.20\ s^{-1}$) وإذا انخفض نصف قطر اللُّب أثناء الانهيار بمعامل (22.7) فما التردد الدوراني لِلُّب الحديدي في نهاية الانهيار؟ علمًا بأن عزم القصور الذاتي للّب الحديدي يتناسب طرديًا مع مربع نصف قطره أثناء عملية الانهيار. وأن محصلة عزم الدوران الخارجي المؤثرة في اللّب تساوي صفرًا .

$10.4\ KH_z\ (a)$ $\quad$ $1.65\ KH_z\ (b)$*

$65.3\ KH_z\ (c)$ $\quad$ $0.460\ KH_z\ (d)$

$$\frac{\omega}{\omega_o} = \frac{I_o}{I} = \frac{R_o^2}{R} = 22.7^2 = 515.29$$

$$\frac{f}{f_o} = 515.29 \quad \rightarrow \quad f = 3.20 \times 515.29 = 1648.928 H_z$$

$$f = 1648.928 H_z \times \frac{K}{10^3} = 1.65 KH_z$$

10.12 لنفترض أنك تبسط بكرة كابل كبيرة. إذا سحبت الكابل باستخدام شد ثابت، فماذا سيحدث للعجلة الزاوية والسرعة الزاوية للبكرة، مع افتراض بقاء نصف القطر الذي تسحب منه الكابل ثابتًا وانعدام قوة الاحتكاك؟

a) يزداد كلاهما عند بسط البكرة.

b) يقل كلاهما عند بسط البكرة.

c) تزداد العجلة الزاوية بينما تقل السرعة الزاوية.

d) تقل العجلة الزاوية بينما تزداد السرعة الزاوية.

e) يستحيل معرفة ذلك.

10.13 قرص من الصلصال يدور بسرعة زاوية ω. وتلتصق قطرة صلصال بالحافة الخارجية للقرص، كتلتها $\frac{1}{10}$ من ذلك القرص. إذا انفصلت القطرة وتطايرت خارج مماس الحافة الخارجية للقرص، فما السرعة الزاوية للقرص بعد انفصال القطرة؟

a) $\omega\frac{5}{6}$ $\quad$ d) $\omega\frac{11}{10}$

b) $\omega\frac{10}{11}$ $\quad$ e) $\omega\frac{6}{5}$

c) ω