الوحدةُ 6

المشتقاتُ
Derivatives

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

يُستعمَلُ الاشتقاقُ لإيجادِ الميلِ عندَ أيِّ نقطةٍ على المنحنى؛ ما يُسهِّلُ الحساباتِ في كثيرٍ منَ التطبيقاتِ العلميةِ والحياتيةِ التي يُمكِنُ نمذجتُها باستعمالِ الاقتراناتِ. ومنْ ذلكَ، حسابُ سرعةِ سيّارةٍ عندَ لحظةٍ ما، وحسابُ أعلى ارتفاعٍ تبلغُهُ كرةٌ عندَ ركلِها إلى الأعلى.

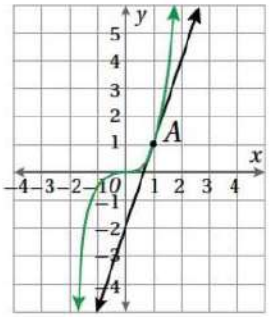
تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ تعريفَ المماسِّ، والقاطعِ، ونقطةِ التماسِّ.
- ✓ حسابَ ميلِ المستقيمِ.
- ✓ معادلةَ الخطِّ المستقيمِ.
- ✓ منحنى المسافةِ– الزمنِ، ومنحنى السرعةِ– الزمنِ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- ◄ تقديرَ ميلِ المنحنى عنْ طريقِ رسمِ المماسِّ.
- ◄ إيجادَ المشتقةِ الأولى لكثيراتِ الحدودِ.
- ◄ إيجادَ القيمِ العظمى والصغرى لكثيراتِ الحدودِ.
- ◄ حلَّ مسائلَ حياتيةٍ عنِ القيمِ العظمى والصغرى.

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: تقديرُ ميلِ المنحنى الصفحة: 57



أتحقق من فهمي

يُمثِّلُ المستقيمُ في الشكلِ المجاورِ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ $y = x^3$ عندَ النقطةِ $A(1, 1)$.

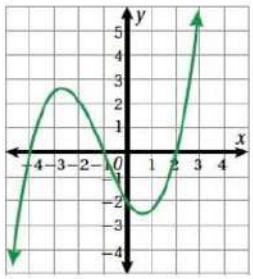
أَجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ A.

الحل:

$$(1,1)(2,4)$$

$$m = \frac{4-1}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: تقديرُ ميلِ المنحنى الصفحة: 58

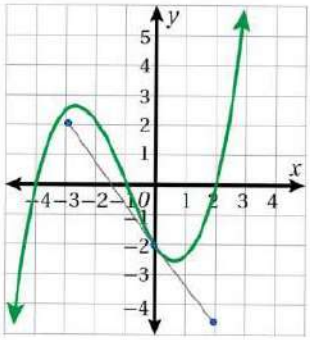


أتحقق من فهمي

أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ المُمثَّلِ بيانيًّا في الشكلِ المجاورِ عندَ كلٍّ منَ النقطتيْنِ: $A(-4, 0), B(0,-2)$.

الحل:

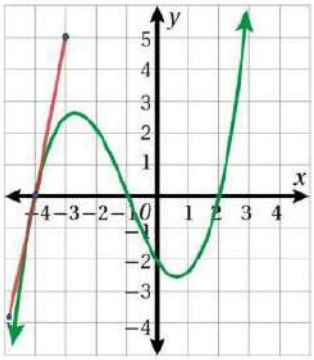
الميل عند $(0,-2)$



$(0,-2), (-3,2)$

$$m = \frac{2 - -2}{-3 - 0} = \frac{4}{-3}$$

الميل عند $(-4,0)$



$(-4,0), (-3,5)$

$$m = \frac{5 - 0}{-3 - -4} = \frac{5}{1} = 5$$

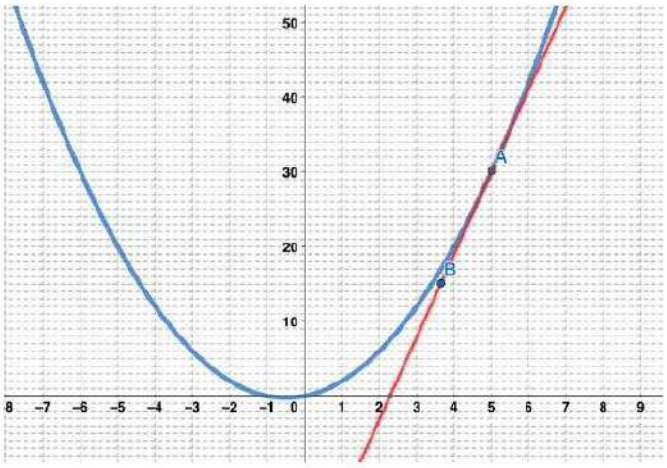
رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: تقديرُ ميلِ المنحنى الصفحة: 60

أتحقق من فهمي

يُمثِّلُ الاقترانُ $d(t) = t^2 + t$ المسافةَ التي يقطعُها جسمٌ ما، حيثُ d المسافةُ المقطوعةُ بالمترِ، وَ t الزمنُ بالثانيةِ. أُقدِّرُ السرعةَ اللحظيةَ بعدَ 5 ثوانٍ، وَ 11 ثانيةً.

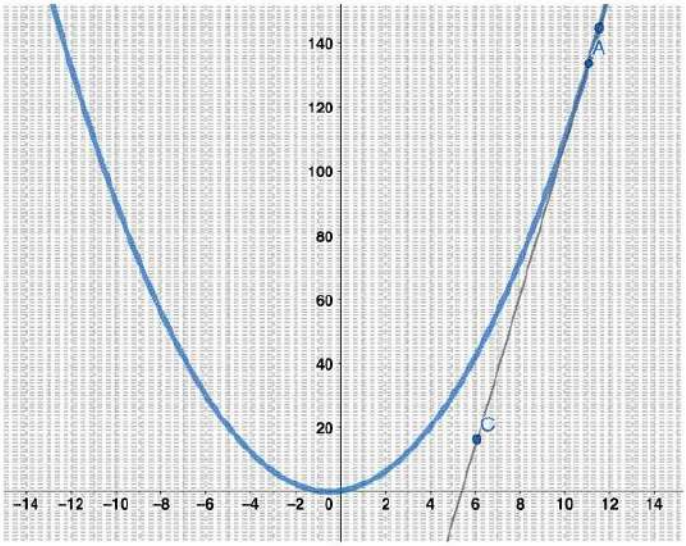
الحل:

$$d(5) = 25 + 5 = 30$$



$$(5,30), (6,41)$$

$$m = \frac{41 - 30}{6 - 5} = \frac{11}{1} = 11$$



$$d(11) = 121 + 11 = 132$$

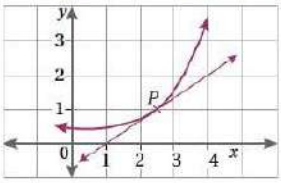
$$(11,132), (6,18)$$

$$m = \frac{132 - 18}{11 - 6} = \frac{114}{5} = 22.8$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: تقديرُ ميلِ المنحنى الصفحة: 60

1 يُمثِّلُ المستقيمُ في الشكلِ المجاورِ مماسًّا لمنحنى اقترانٍ عندَ النقطةِ $P(2.5, 1)$.

أَجِدُّ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ P.

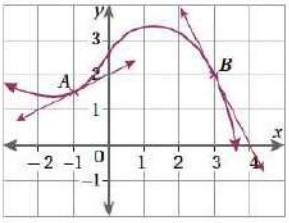


الحل:

(2.5,1), (4,2)

$$m = \frac{2-1}{4-2.5} = \frac{1}{1.5} = 0.66$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: تقديرُ ميلِ المنحنى الصفحة: 60



2 في الشكلِ المجاورِ، رُسِمَ مماسّانِ لمنحنى اقترانٍ عندَ النقطتيْنِ $A(-1, 1.5)$ وَ $B(3, 2)$.

أَجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ كلٍّ منْ A وَ B.

الحل:

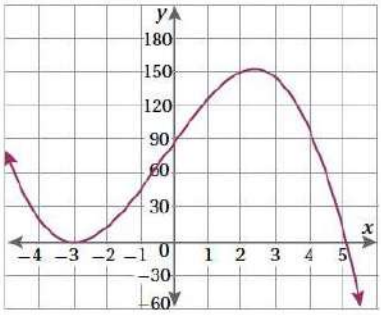
$$(-1,1.5), (0,2)$$

$$m = \frac{2 - 1.5}{0 - -1} = \frac{0.5}{1} = 0.5$$

$$(3,2), (4,0)$$

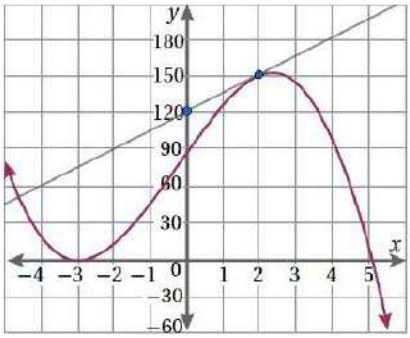
$$m = \frac{0 - 2}{4 - 3} = \frac{-2}{1} = -2$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: تقديرُ ميلِ المنحنى الصفحة: 61



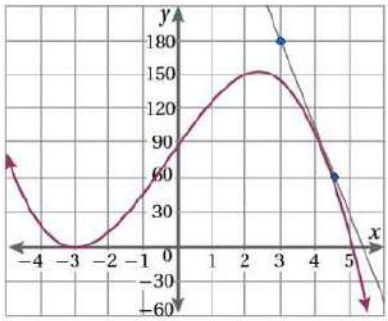
3 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ المُبيَّنِ جانبًا عندَ النقطةِ (2, 150)، والنقطةِ (4.5, 60).

الحل:



$(2,150), (0,120)$

$$m = \frac{150 - 120}{2 - 0} = \frac{30}{2} = 15$$



$(4.5,60), (3,180)$

$$m = \frac{180 - 60}{3 - 4.5} = \frac{120}{-1.5} = -80$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: تقديرُ ميلِ المنحنى الصفحة: 61

أستعملُ جدولَ القيمِ الآتي للإجابةِ عن الأسئلةِ (7 –4):

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	1.5	2	3.5	6

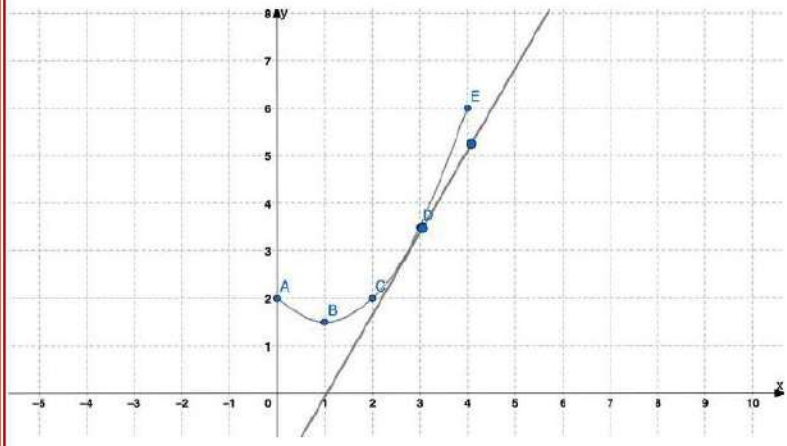
4 أُمثِّلُ منحنى الاقترانِ $f(x)$ بيانيًّا في الفترةِ $0 \le x \le 4$

5 أرسمُ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ (3, 3.5).

6 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ (3, 3.5).

7 ما إحداثياتُ النقطةِ التي يكونُ ميلُ المنحنى عندَها صفرًا؟

الحل:



(3,3.5), (1,0)

$$m = \frac{3.5 - 0}{3 - 1} = \frac{3.5}{2} = 1.75$$

الميل يساوي 0 عند (1,1.5) لأن الميل عندها أفقي

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: تقديرُ ميلِ المنحنى الصفحة: 61

أُكملُ جدولَ قيمِ الاقترانِ $f(x) = 0.1x^3$ الآتيَ، ثمَّ أستعملُهُ لحلِّ المسائلَ (8–10):

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$0.1x^3$		0.01	0.1		0.8		

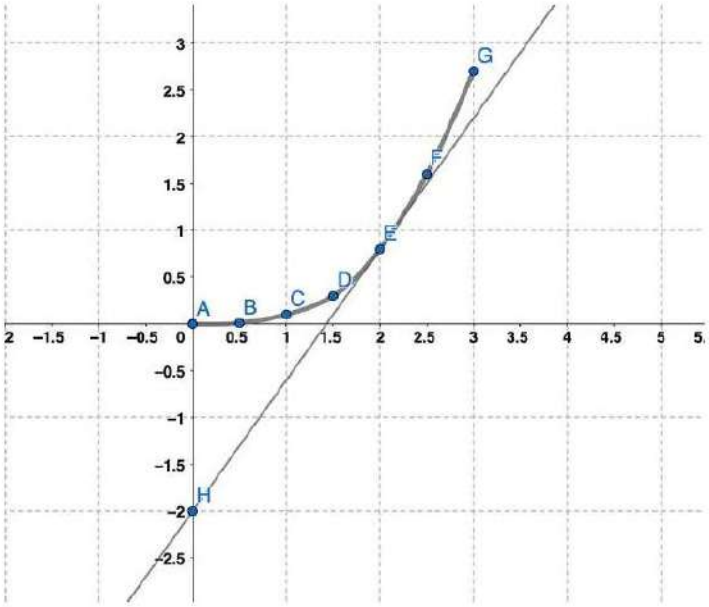
8 أرسمُ منحنى الاقترانِ $f(x)=0.1x^3$ في الفترةِ $0 \le x \le 3$

9 أرسمُ مماسًّا لمنحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ (2, 0.8).

10 أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ النقطةِ (2, 0.8).

الحل:

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$0.1x^3$	0	0.01	0.1	0.3	0.8	1.6	2.7



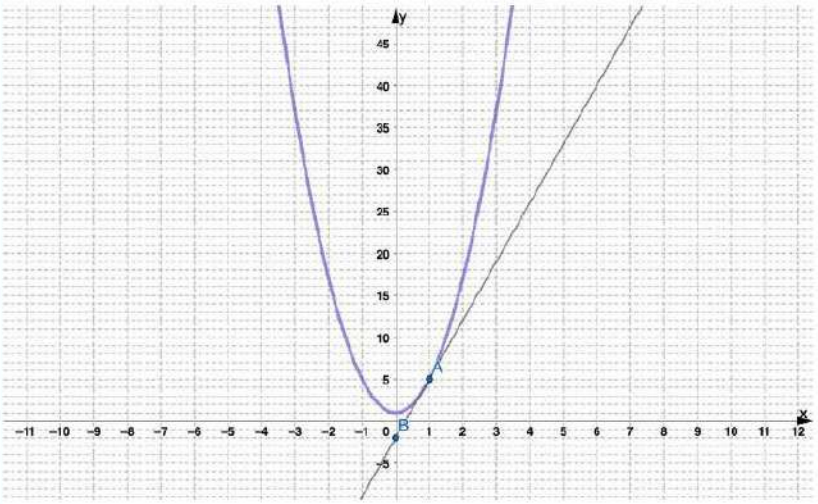
$(2,0.8), (0,-2)$

$$m = \frac{-2-0.8}{0-2} = \frac{-2.8}{-2} = 1.4$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: تقديرُ ميلِ المنحنى الصفحة: 61

أُقدِّرُ ميلَ منحنى كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

11 $y = 4x^2 + 1$ عندَ النقطةِ $(1, 5)$.



الحل:

$(1,5), (0,-2.5)$

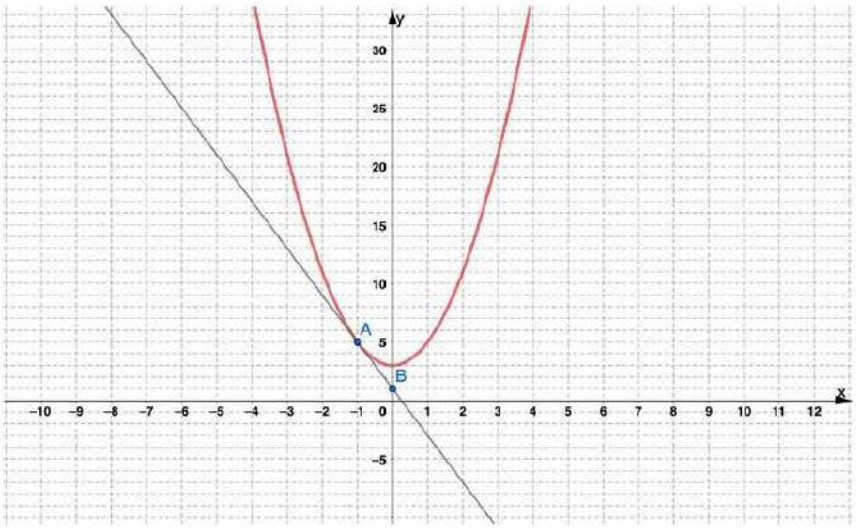
$$m = \frac{5 - -2.5}{1 - 0} = \frac{7.5}{1} \approx 7.5$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: تقديرُ ميلِ المنحنى الصفحة: 61

أُقدِّرُ ميلَ منحنى كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

12 $y = 3 + 2x^2$ عندَ النقطةِ $(-1, 5)$.

الحل:



$(-1,5), (0,1)$

$$m = \frac{5-1}{-1-0} = \frac{4}{-1} \approx -4$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: تقديرُ ميلِ المنحنى الصفحة: 61

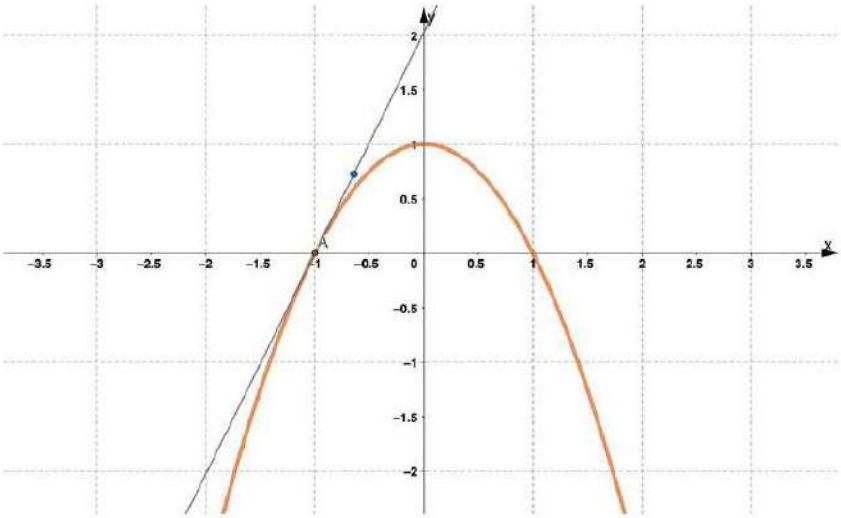
أُقدِّرُ ميلَ منحنى كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

13 $y = 1 - x^2$ عندَ النقطةِ $(-1, 0)$.

الحل:

$(-1,0), (0,2)$

$$m = \frac{2-0}{0--1} = \frac{2}{1} \approx 2$$

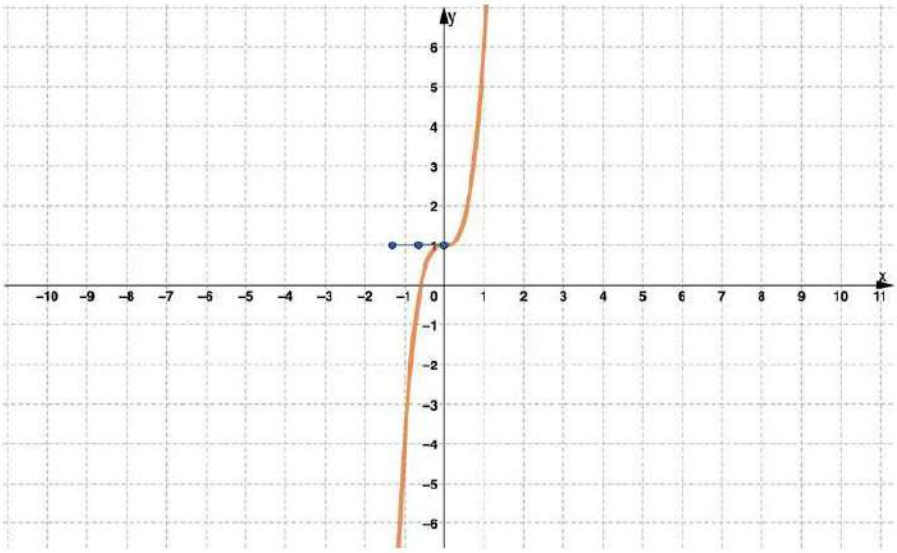


رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: تقديرُ ميلِ المنحنى الصفحة: 61

أُقدِّرُ ميلَ منحنى كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

14 $y = 5x^3 + 1$ عندَ النقطةِ $(0, 1)$.

الحل:



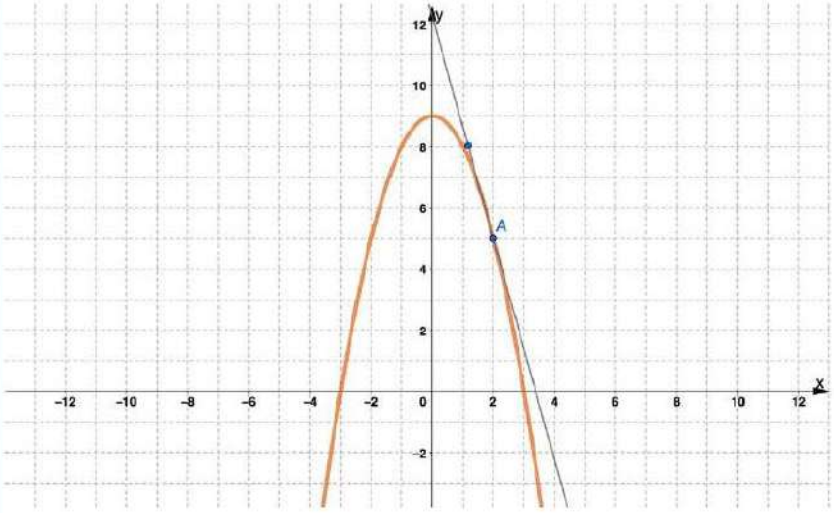
الميل 0 لأن المماس أفقي

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: تقديرُ ميلِ المنحنى الصفحة: 61

أُقدِّرُ ميلَ منحنى كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

15 $y = 9 - x^2$ عندَ النقطةِ $(2, 5)$.

الحل:



$(2,5), (4,-2)$

$$m = \frac{-2-5}{4-2} = \frac{-7}{2} \approx -3.5$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: تقديرُ ميلِ المنحنى الصفحة: 61

أُقدِّرُ ميلَ منحنى كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

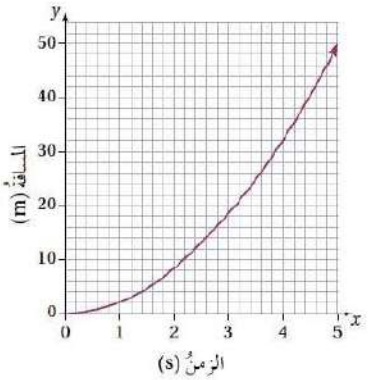
16 $y = 8 - 2x$ عندَ النقطةِ $(1, 6)$.

الحل:

$(1,6), (0,8)$

$$m = \frac{8-6}{0-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: تقديرُ ميلِ المنحنى الصفحة: 62



دراجاتٌ ناريةٌ: بدأَتْ دراجةٌ ناريةٌ الحركةَ منْ وضعِ السكونِ في مسارٍ مستقيمٍ. ويُبيِّنُ المنحنى المجاورُ المسافةَ التي قطعَتْها الدرّاجةُ في 5 ثوانٍ:

17 أرسمُ نسخةً منَ المنحنى، مستعينًا بالجدولِ الآتي:

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	2	8	18	32	50

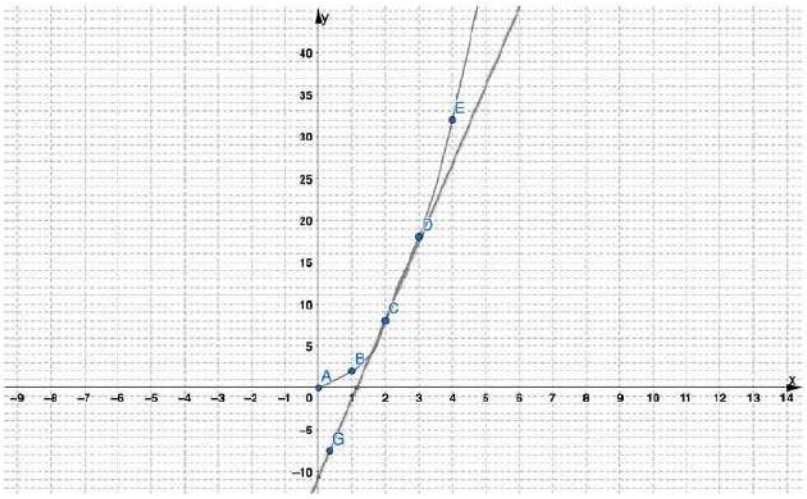
18 أرسمُ مماسًّا للمنحنى عندما $x=2$.

19 أُقدِّرُ سرعةَ الدرّاجةِ بعدَ ثانيتَيْنِ.

20 أُقدِّرُ سرعةَ الدرّاجةِ بعدَ 4 ثوانٍ.

الحل:

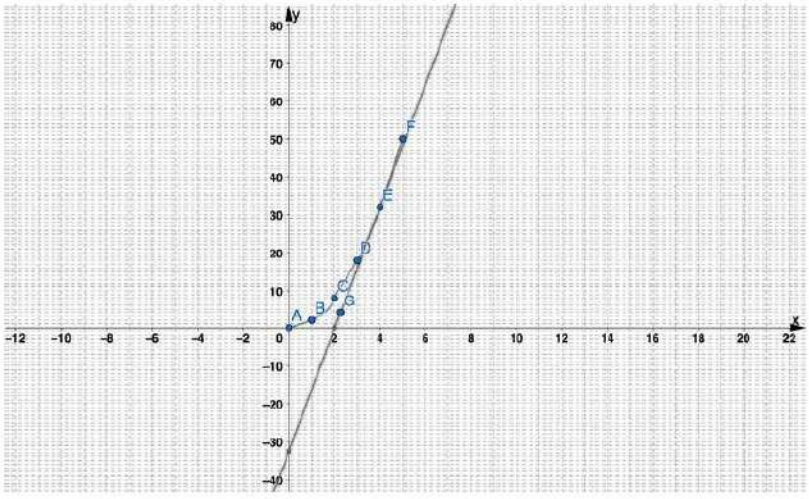
السرعة بعد 2 ثانية



$(2,8), (1.1,0)$

$$m = \frac{8-0}{2-1.1} = \frac{8}{0.9} \approx 8.9$$

السرعة بعد 4 ثانية



$(4,32), (2,0)$

$$m = \frac{32-0}{4-2} = \frac{32}{2} \approx 16$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: تقديرُ ميلِ المنحنى الصفحة: 62

سيّاراتٌ: أرادَ مهندسٌ أنْ يدرسَ سرعةَ سيّارةٍ، فسجَّلَ المسافةَ المقطوعةَ كلَّ 3 ثوانٍ كما في الجدولِ الآتي، ثمَّ استعملَ المعادلةَ $x = at^2 + bt^4$ لتمثيلِ العلاقةِ بينَ قيمِ المسافةِ والزمنِ، حيثُ a وَ b عددانِ ثابتانِ:

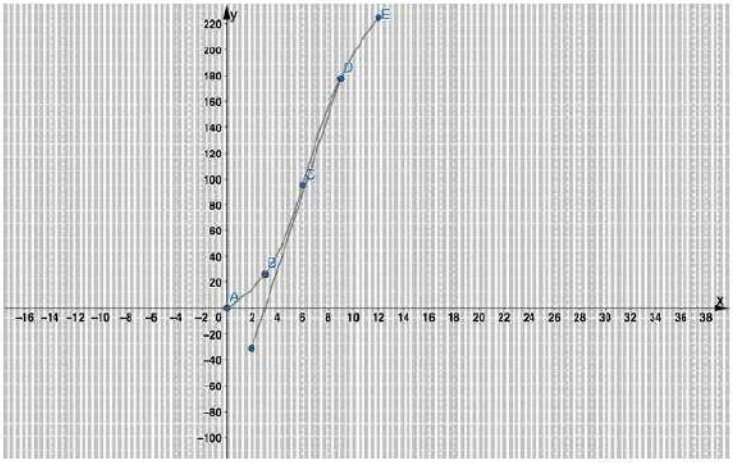
الزمنُ t (ثانيةٌ)	0	3	6	9	12
المسافةُ x (مترٌ)	0	26.19	95.04	177.39	224.64

21 أرسمُ منحنى المسافةِ – الزمنِ.

22 أُقدِّرُ السرعةَ عندما $t = 9$.

23 أَجِدُ قيمةَ كلٍّ منْ: a وَ b.

الحل:



$$(9,177.39), (3,0)$$

$$m = \frac{177.39 - 0}{9 - 3} = \frac{177.39}{3} \approx 59$$

$$x(3) = 26.19$$

$$26.19 = 9a + 81b$$
$$x(6) = 95.04$$
$$95.04 = 36a + 1296b$$

$$4 \times \quad 26.19 = 9a + 81b$$
$$95.04 = 36a + 1296b$$

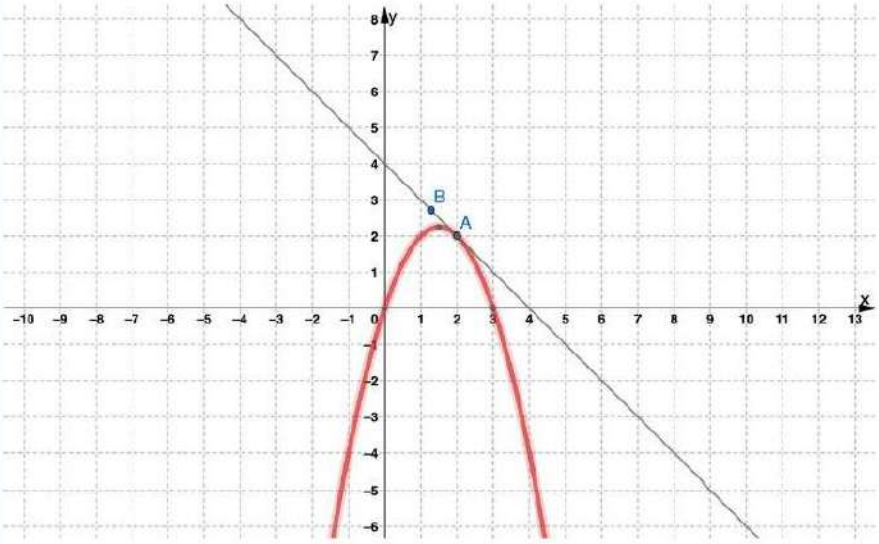
$$104.76 = 36a + 324b$$
$$- \quad 95.04 = 36a + 1296b$$
$$9.72 = -972b$$
$$b = \frac{-1}{100}$$

$$a = \frac{26.19 - 81 \times -\frac{1}{100}}{9} = \frac{27}{9} = 3$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: تقديرُ ميلِ المنحنى الصفحة: 62

24 فيزياءُ: تُمثِّلُ المعادلةُ $s(t) = 3t - t^2$ المسافةَ التي يقطعُها جسمٌ بالمترِ، حيثُ t الزمنُ بالثانيةِ.
أُقدِّرُ سرعةَ الجسمِ عندما $t = 2$.

الحل:



السرعة بعد 2 ثانية
(2,2), (4,0)

$$m = \frac{0-2}{4-2} = \frac{-2}{2} \approx -1$$

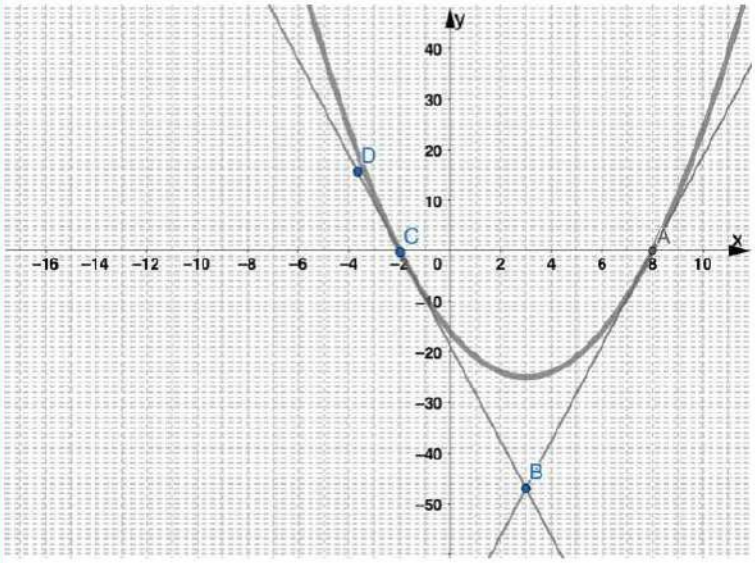
رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: تقديرُ ميلِ المنحنى الصفحة: 62

25 تبريرٌ: أُقدِّرُ ميلَ منحنى الاقترانِ $f(x) = x^2 - 6x - 16$ عندَ كلٍّ منَ النقاطِ الآتيةِ، مُبرِّرًا إجابتي:

- نقطتا تقاطعِ المنحنى معَ محورِ x.
- نقطةُ تقاطعِ المنحنى معَ محورِ y.

الحل:

نقطتا التقاطع مع محور x



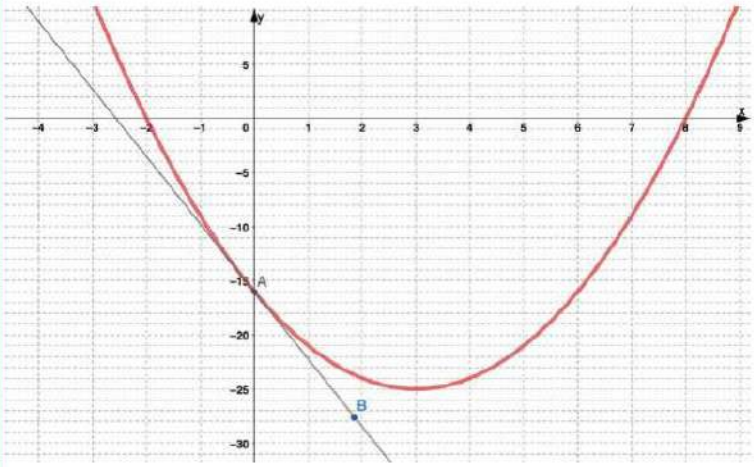
$(-2,0), (3,-47)$

$$m = \frac{-47-0}{3--2} = \frac{-47}{5} \approx -9.4$$

$(8,0), (3,-47)$

$$m = \frac{-47-0}{3-8} = \frac{-47}{-5} \approx 9.4$$

نقطة التقاطع مع محور y



$(0,-16), (-2.6,0)$

$$m = \frac{-16-0}{0--2.6} = \frac{-16}{2.6} \approx -6.2$$

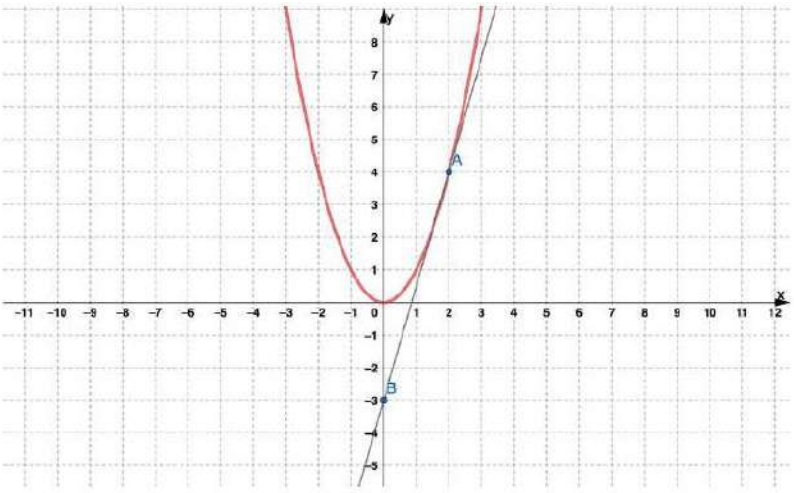
رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: تقديرُ ميلِ المنحنى الصفحة: 62

26 مسألةٌ مفتوحةٌ: أكتبُ قاعدةَ اقترانٍ منَ الدرجةِ الثانيةِ، ثمَّ أُمثِّلُهُ بيانيًّا، مُقدِّرًا ميلَهُ عندَ نقطتيْنِ مُتعاكِستيْنِ عليْهِ:

$(a,b), (-a, b)$.

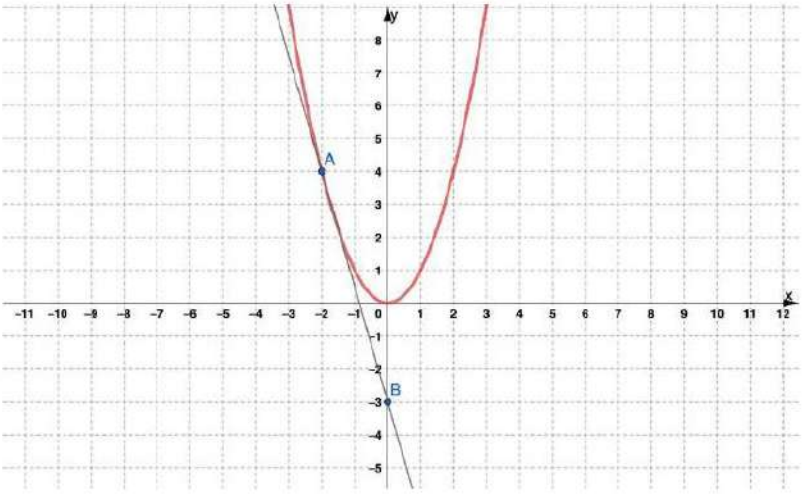
الحل:

$$f(x) = x^2$$



$(2,4), (0,-3)$

$$m = \frac{4 - -3}{2 - 0} = \frac{7}{2} \approx 3.5$$



$(-2,4), (0,-3)$

$$m = \frac{4 - -3}{-2 - 0} = \frac{7}{-2} \approx -3.5$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس: الاشتقاقُ الصفحة: 64

أتحقق من فهمي

أَجِدُ مشتقةَ كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

a) $f(x) = x^7$

الحل:

$$f'(x) = 7x^6$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس: الاشتقاقُ الصفحة: 64

أتحقق من فهمي

أَجِدُ مشتقةَ كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي:

b) $f(x) = x^{11}$

الحل:

$$f'(x) = 11x^{10}$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس: الاشتقاقُ الصفحة: 65

أتحقق من فهمي

أَجِدُ مشتقةَ كلِّ اقترانٍ في ما يأتي:

a) $f(x) = 5x^{12}$

الحل:

$$f'(x) = 5 \times 12x^{11}$$

$$f'(x) = 60x^{11}$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس: الاشتقاقُ الصفحة: 65

أتحقق من فهمي

أَجِدُ مشتقةَ كلِّ اقترانٍ في ما يأتي:

b) $f(x) = -7x^8$

الحل:

$$f'(x) = 8 \times -7x^7$$

$$f'(x) = -56x^7$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس: الاشتقاقُ الصفحة: 65

أتحقق من فهمي

أَجِدُ مشتقةَ كلِّ اقترانٍ في ما يأتي: c) $f(x) = 0.5x^6$

الحل:

$$f'(x) = 6 \times 0.5x^5$$

$$f'(x) = 3x^5$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس: الاشتقاقُ الصفحة: 65

أتحقق من فهمي

أَجِدُ مشتقةَ كلِّ اقترانٍ في ما يأتي:

d) $f(x) = -11$

الحل:

$$f'(x) = 0$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس: الاشتقاقُ الصفحة: 66

أتحقق من فهمي

أَجِدُ مشتقةَ كلٍّ منَ الاقترانيْنِ الآتييْنِ:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x - 1$

الحل:

$$f'(x) = 2 \times \frac{1}{2}x + 4$$

$$f'(x) = x + 4$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس: الاشتقاقُ الصفحة: 66

أتحقق من فهمي

أَجِدُ مشتقةَ كلٍّ منَ الاقترانيْنِ الآتييْنِ:

b) $g(x) = 9x - 7x^5 - 6 + \sqrt{3}\,x^2$

الحل:

$$f'(x) = 9 - 35x^4 + 2\sqrt{3}x$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس: الاشتقاقُ الصفحة: 67

أتحقق من فهمي

إذا كانَ $f(x) = 5x^2 + 25x - 9$، فأستعملُ المشتقةَ لإيجادِ كلٍّ ممّا يأتي:

a) ميلُ منحنى $f(x)$ عندما $x = -2$.

b) قيمةُ x التي يكونُ عندها ميلُ منحنى الاقترانِ صفرًا.

الحل:

$$f'(x) = 10x + 25$$

$$m = 10 \times -2 + 25$$

$$= -20 + 25 = 5$$

$$0 = 10x + 25$$

$$-25 = 10x$$

$$x = \frac{-25}{10} = -2.5$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس: الاشتقاقُ الصفحة: 68

أتحقق من فهمي

يُمثِّلُ الاقترانُ $d(t) = 2.5t^2 + 0.1t - 0.3$ المسافةَ (بالمترِ) التي يقطعُها جسمٌ مُتحرِّكٌ، حيثُ t الزمنُ بالثانيةِ. أَجِدُ سرعةَ الجسمِ وتسارعَهُ عندما $t = 3$.

الحل:

$$v(t) = 5t + 0.1$$

$$v(3) = 5 \times 3 + 0.1$$

$$= 15 + 0.1 = 15.1$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس: الاشتقاقُ الصفحة: 68

أَجِدُ مشتقةَ كلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ:

1 $f(x) = -7$

الحل:

$$f'(x) = 0$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس: الاشتقاقُ الصفحة: 68

أَجِدُ مشتقةَ كلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ:

2 $g(x) = 3x^9$

الحل:

$$g'(x) = 27x^8$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس: الاشتقاقُ الصفحة: 68

أَجِدُ مشتقةَ كلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ:

3 $r(x) = -5x^2$

الحل:

$$r'(x) = -10x$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس: الاشتقاقُ الصفحة: 68

أَجِدُ مشتقةَ كلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ:

4 $i(x) = x^4 - 3x$

الحل:

$$i'(x) = 4x^3 - 3$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس: الاشتقاقُ الصفحة: 68

أَجِدُ مشتقةَ كلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ:

5 $v(x) = x^2 + x + 1$

الحل:

$$v'(x) = 2x + 1$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس: الاشتقاقُ الصفحة: 68

أَجِدُ مشتقةَ كلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ:

6 $t(x) = 6 - 2x + x^2$

الحل:

$$t'(x) = -2 + 2x$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس: الاشتقاقُ الصفحة: 68

أَجِدُ قيمةَ $f'(-2)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

7 $f(x)=\frac{3}{5}x^3+x^4-2x+7$

الحل:

$$f'(x)=\frac{9}{5}x^2+4x^3-2$$

$$f'(-2)=\frac{9}{5}\times 4+4\times -8-2$$

$$=\frac{36}{5}-32-2$$

$$=\frac{36}{5}-34$$

$$=\frac{36}{5}-\frac{170}{5}=\frac{-134}{5}$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس: الاشتقاقُ الصفحة: 68

أَجِدُ قيمةَ $f'(-2)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

8 $f(x)= x^{99} +\sqrt{2}\, x$

الحل:

$$f'(x) = 99x^{98} + \sqrt{2}$$

$$f'(-2) = 99 \times (-2)^{98} + \sqrt{2}$$

$$f'(x) = 99 \times 3.1 \times 10^{29} + \sqrt{2}$$

$$= 3.1 \times 10^{31} + \sqrt{2}$$

$$= 3.1 \times 10^{31}$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس: الاشتقاقُ الصفحة: 68

أَجِدُ قيمةَ $f'(-2)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

9 $f(x) = \frac{7\pi}{18}$

الحل:

$$f'(x) = 0$$

$$f'(-2) = 0$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس: الاشتقاقُ الصفحة: 68

10 أَجِدُ النقطةَ التي يكونَ عندها ميلُ منحنى الاقترانِ $f(x) = 2x^2 - 10$ هوَ 12

الحل:

$$f'(x) = 4x$$

$$12 = 4x$$

$$x = 3$$

النقطة

$$(3,8)$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس: الاشتقاقُ الصفحة: 68

يُمثِّلُ الاقترانُ $d(t) = t^3 - 6t + 3$ المسافةَ (بالمترِ) التي يقطعُها جسمٌ مُتحرِّكٌ، حيثُ t الزمنُ بالثانيةِ:

11 أَجِدُ الاقترانَ $v(t)$ الذي يُمثِّلُ سرعةَ الجسمِ في أيِّ لحظةٍ (t ثانيةً).

12 أَجِدُ سرعةَ الجسمِ عندما $t = 3$.

13 أَجِدُ الزمنَ t عندما تكونُ السرعةُ $6\ \text{m/s}$

14 أَجِدُ الاقترانَ $a(t)$ الذي يُمثِّلُ تسارعَ الجسمِ، حيثُ t الزمنُ بالثانيةِ.

15 أَجِدُ تسارعَ الجسمِ عندما $t = 5$.

الحل:

$$v(t) = 3t^2 - 6$$

$$v(3) = 27 - 6 = 21$$

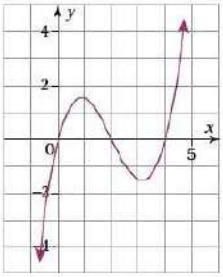
$$6 = 3t^2 - 6$$
$$3t^2 = 12$$
$$t^2 = 4$$
$$t = 2$$

$$a(t) = 6t$$

$$a(5) = 30$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس: الاشتقاقُ الصفحة: 69

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ منحنى الاقترانِ $f(x) = 0.5x^3 - 3x^2 + 4x$:



16 أَجِدُ $f'(x)$.

17 أَجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ عندَ نقاطِ تقاطعِهِ معَ محورِ x.

18 أُحدِّدُ على المنحنى النقطةَ التي يساوي عندها الميلُ -0.5

الحل:

$$f'(x) = 1.5x^2 - 6x + 4$$

$$m = f'(0) = 1.5(0)^2 - 6(0) + 4 = 4$$

$$m = f'(4) = 1.5(4)^2 - 6(4) + 4$$

$$= 24 - 24 + 4$$
$$= 4$$

$$-0.5 = 1.5x^2 - 6x + 4.5$$
$$1.5x^2 - 6x + 4.5 = 0$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$(x - 3)(x - 1) = 0$$
$$x = 3 \; or \; x = 1$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس: الاشتقاقُ الصفحة: 69

19 أَجِدُ معادلةَ مماسِّ منحنى الاقترانِ $f(x)=3x^3+2$ عندَ النقطةِ التي يكونُ إحداثيُّ x لها 1

الحل:

$$x_1 = 1$$

$$y_1 = f(1) = 3(1)^3 + 2 = 5$$

$$f'(x) = 9x^2$$
$$m = 9(1)^2 = 9$$
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 5 = 9(x - 1)$$
$$y = 9x - 9 + 5$$
$$y = 9x - 4$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس: الاشتقاقُ الصفحة: 69

تقعُ النقطةُ $P(-2, b)$ على منحنى الاقترانِ $g(x) = 3x^3 - x^2 - 7x + 4$:

20 أَجِدُ قيمةَ b.

21 أَجِدُ قيمةَ x التي يكونُ عندها ميلُ منحنى الاقترانِ صفرًا.

الحل:

$$b = g(-2) = 3 \times -8 - 4 + 14 + 4$$
$$= -24 - 4 + 14 + 4$$
$$= -28 + 18$$
$$= -10$$

$$g'(x) = 9x^2 - 2x - 7$$
$$0 = 9x^2 - 2x - 7$$
$$(3x - 3)\left(3x + \frac{7}{3}\right) = 0$$

$$(3x - 3) = 0 \; or \; \left(3x + \frac{7}{3}\right) = 0$$

$$x = 1 \; or \; x = \frac{-7}{9}$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس: الاشتقاقُ الصفحة: 69

إذا كانَتْ قيمةُ الميلِ عندما $x = 2$ لمنحنى المعادلةِ $y = x^3 - 2ax$، حيثُ a عددٌ ثابتٌ، هيَ -12

22 أَجِدُ قيمةَ الثابتِ a.

23 أَجِدُ قيمةَ ميلِ المنحنى عندما $x = 4$.

الحل:

$$y' = 3x^2 - 2a$$

$$-12 = 3(2)^2 - 2a$$

$$-12 = 12 - 2a$$
$$-24 = -2a$$
$$a = 12$$

$$m = 3(4)^2 - 24$$

$$= 48 - 24 = 24$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس: الاشتقاقُ الصفحة: 69

أَجِدُ $f'(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

24 $f(x) = 2x\,(x+1)$

الحل:

$$f(x) = 2x^2 + 2x$$

$$f'(x) = 4x + 2$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس: الاشتقاقُ الصفحة: 69

أَجِدُ $f'(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

25 $f(x) = (x+2)(x+5)$

الحل:

$$f(x) = x^2 + 5x + 2x + 10$$

$$f(x) = x^2 + 7x + 10$$

$$f'(x) = 2x + 7$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس: الاشتقاقُ الصفحة: 69

أَجِدُ $f'(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

26 $f(x) = (x + 3)(x-3)$

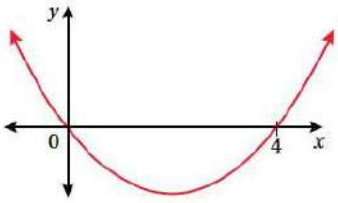
الحل:

$$f(x) = x^2 - 9$$

$$f'(x) = 2x$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس: الاشتقاقُ الصفحة: 69

27 يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ التمثيلَ البيانيَّ للاقترانِ $f(x) = kx(x-4)$، حيثُ k عددٌ حقيقيٌّ. أَجِدُ قيمةَ k إذا كانَ ميلُ المنحنى عندَ النقطةِ $(4, 0)$ هوَ 2



الحل:

$$f(x) = kx^2 - 4kx$$

$$f'(x) = 2kx - 4k$$

$$2 = 2k(4) - 4k$$

$$2 = 4k$$

$$k = \frac{1}{2}$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس: الاشتقاقُ الصفحة: 69

28 تبريرٌ: أُثبِتُ وجودَ نقطتيْنِ على منحنى الاقترانِ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x + 4$، تكونُ عندَهُما مشتقةُ الاقترانِ تساوي 4، ثمَّ أَجِدُ إحداثيَّيْ هاتيْنِ النقطتيْنِ، مُبرِّرًا إجابتي.

الحل:

$$f'(x) = x^2 - 5$$

$$4 = x^2 - 5$$

$$x^2 = 9$$
$$x = 3 \; or \; x = -3$$

$$(3, f(3)), (-3, f(-3))$$

$$(3, -2), (-3, 10)$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس: الاشتقاقُ الصفحة: 69

29 تحدٍّ: أَجِدُ قيمَ a, b إذا كانَ ميلُ منحنى الاقترانِ $y = ax^3 + bx^2 + 5$ عندَ النقطةِ $(2, -3)$ هوَ صفرًا.

الحل:

$$-3 = 8a + 4b + 5$$
$$8a + 4b = -8$$
$$2a + b = -2$$

$$y' = 3ax^2 + 2bx$$
$$0 = 12a + 4b$$
$$3a + b = 0$$

$$2a + b = -2$$
$$-3a + b = 0$$
$$-a = -2$$
$$a = 2$$

$$b = -6$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة الأولى الدرس: الاشتقاقُ الصفحة: 69

30 تحـدٍّ: أُطلِقَتْ قذيفةٌ رأسـيًّا إلـى الأعلى، فـكانَ ارتفاعُها عنْ سـطحِ الأرضِ h بالمتـرِ بعدَ t ثانيةً مـنْ إطلاقِها $h(t) = -4.9t^2 + 147t$. ما ارتفاعُ القذيفةِ عنِ الأرضِ عندما تكونُ سرعتُها 98 m/s؟

الحل:

$$v(t) = -9.8t + 147$$

$$98 = -9.8t + 147$$
$$98 - 147 = -9.8t$$

$$-49 = -9.8t$$
$$t = 5$$
$$h(5) = -4.9 \times 25 + 147 \times 5$$
$$= -122.5 + 735$$

$$= 612.5$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: القيمُ العظمى والقيمُ الصغرى الصفحة: 71

أتحقق من فهمي

أَجِدُ القيمَ العظمى والقيمَ الصغرى المحليّةَ للاقترانِ $g(x) = 2x^3 - 6x - 15$ (إنْ وُجِدَتْ).

الحل:

$$g'(x) = 6x^2 - 6$$

$$6x^2 - 6 = 0$$
$$6(x^2 - 1) = 0$$
$$x^2 - 1 = 0$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \mp 1$$

$$+ \quad + \quad + \quad - \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$
$$\longleftarrow \quad -1 \quad\quad 1 \quad \longrightarrow$$

له قيمة عظمى عند $x = -1$ هي $f(-1) = 11$

وله قيمة صغرى عند $x = 1$ هي $f(1) = -19$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: القيمُ العظمى والقيمُ الصغرى الصفحة: 72

أتحقق من فهمي

يُمثِّلُ الاقترانُ $h(t)= 20t-5t^2$ ارتفاعَ حجرٍ عنْ سطحِ الأرضِ بالمترِ بعدَ t ثانيةً منْ قذفِهِ إلى الأعلى:

a) أَجِدُ سرعةَ الحجرِ بعدَ ثانيتيْنِ منْ قذفِهِ. b) أَجِدُ أقصى ارتفاعٍ يصلُهُ الحجرُ.

الحل:

$$h'(t) = 20 - 10t$$

$$h'(t) = 20 - 10 \times 2$$
$$= 20 - 20 = 0$$

عند أقصى ارتفاع تكون السرعة صفر

$$20 - 10t = 0$$

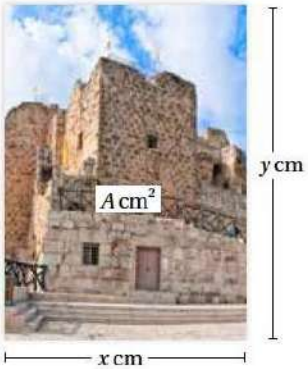
$$10t = 20$$

$$t = 2$$
$$h(t) = 20 \times 2 - 5 \times (2)^2$$
$$= 40 - 20 = 20$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: القيمُ العظمى والقيمُ الصغرى الصفحة: 74

أتحقق من فهمي

يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ صورةً مستطيلةَ الشكلِ، محيطُها **72 cm**، ومِساحتُها A **cm²**:



a) أُبيِّنُ أنَّ الاقترانَ $A(x) = 36x - x^2$ يُمثِّلُ مِساحةَ الصورةِ.

b) أَجِدُ $A'(x)$.

c) أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ x التي تجعلُ مِساحةَ الصورةِ أكبرَ ما يُمكِنُ.

d) أَجِدُ أكبرَ مِساحةٍ ممكنةٍ للصورةِ.

الحل:

a

$$2x + 2y = 72$$
$$x + y = 36$$
$$y = 36 - x$$
$$A = x \times y$$
$$= x \times (36 - x)$$
$$= 36x - x^2$$

b

$$A'(x) = 36 - 2x$$

c

$$36 - 2x = 0$$
$$2x = 36$$
$$x = 18$$

d

$$A(18) = 36 \times 18 - (18)^2$$
$$= 324$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: القيمُ العظمى والقيمُ الصغرى الصفحة: 74

أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ القيمِ العظمى والقيمِ المحليّةِ الصغرى لكلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ (إنْ وُجِدَتْ):

1 $f(x) = x^2 - 4x + 3$

الحل:

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$2x - 4 = 0$$
$$2x = 4$$
$$x = 2$$
$$\underset{2}{\overset{- - - + + +}{\longleftrightarrow}}$$

له قيمة صغرى عند $x = 2$ هي $f(2) = -1$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: القيمُ العظمى والقيمُ الصغرى الصفحة: 74

أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ القيمِ العظمى والقيمِ المحليّةِ الصغرى لكلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ (إنْ وُجِدَتْ):

2 $f(x) = x^2 + 6x - 3$

الحل:

$$f'(x) = 2x + 6$$

$$2x + 6 = 0$$
$$2x = -6$$
$$x = -3$$
$$- \ - \ - \ + \ + \ +$$
$$\longleftrightarrow$$
$$-3$$

له قيمة صغرى عند $x = -3$ هي $f(-3) = -12$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: القيمُ العظمى والقيمُ الصغرى الصفحة: 74

أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ القيمِ العظمى والقيمِ المحليّةِ الصغرى لكلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ (إنْ وُجِدَتْ):

3 $f(x) = 1 + 5x - x^2$

الحل:

$$f'(x) = 5 - 2x$$

$$5 - 2x = 0$$
$$2x = 5$$
$$x = \frac{5}{2} = 2.5$$

$+ \ + \ + \ - \ - \ -$ على $\longleftrightarrow$ عند 2.5

له قيمة عظمى عند $x = 2.5$ هي $f(2.5) = 7\frac{1}{4}$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: القيمُ العظمى والقيمُ الصغرى الصفحة: 74

أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ القيمِ العظمى والقيمِ المحليّةِ الصغرى لكلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ (إنْ وُجِدَتْ):

4 $f(x) = x^3 + 1.5x^2 - 18x$

الحل:

$$f'(x) = 3x^2 + 3x - 18$$

$$3x^2 + 3x - 18 = 0$$
$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x+3)(x-2) = 0$$
$$x = -3 \text{ or } x = 2$$

$$\underset{-3}{+ + +} \underset{}{- - -} \underset{2}{+ + +}$$

له قيمة عظمى عند $x = -3$ هي $f(-3) = 40\frac{1}{2}$

وله قيمة صغرى عند $x = 2$ هي $f(2) = -22$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: القيمُ العظمى والقيمُ الصغرى الصفحة: 74

أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ القيمِ العظمى والقيمِ المحليّةِ الصغرى لكلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ (إنْ وُجِدَتْ):

5 $f(x) = 18x^2 - x^4$

الحل:

$$f'(x) = 36\,x - 4\,x^3$$

$$36\,x - 4\,x^3 = 0$$
$$4x(9 - x^2) = 0$$
$$x = 0 \; or \; x = \mp 3$$

$+ \; + \; + \; - \; - \; - \; + \; + \; + \; - \; - \; -$ $\quad f'(x)$

$\longleftrightarrow$

$-3 \quad 0 \quad 3$

له قيمة عظمى عند $x = -3$ هي $f(-3) = 81$

وله قيمة عظمى عند $x = 3$ هي $f(3) = 81$

وله قيمة صغرى عند $x = 0$ هي $f(0) = 0$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: القيمُ العظمى والقيمُ الصغرى الصفحة: 74

أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ القيمِ العظمى والقيمِ المحليّةِ الصغرى لكلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ (إنْ وُجِدَتْ):

6 $f(x) = 2x^3 - 6x + 4$

الحل:

$$f'(x) = 6x^2 - 6$$

$$6x^2 - 6 = 0$$
$$6(x^2 - 1) = 0$$
$$x^2 - 1 = 0$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \mp 1$$

$+ \quad + \quad + \quad - \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$

$\longleftarrow \quad -1 \quad\quad 1 \quad \longrightarrow$

له قيمة عظمى عند $x = -1$ هي $f(-1) = 8$

وله قيمة صغرى عند $x = 1$ هي $f(1) = 0$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: القيمُ العظمى والقيمُ الصغرى الصفحة: 74

أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ القيمِ العظمى والقيمِ المحليّةِ الصغرى لكلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ (إنْ وُجِدَتْ):

7 $f(x) = x^3 - 12x - 4$

الحل:

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

$$3x^2 - 12 = 0$$
$$3(x^2 - 4) = 0$$
$$x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \mp 2$$

$$\underset{\longleftarrow}{+ \; + \; +} \; \underset{-2}{-} \; - \; - \; \underset{2}{+} \; \underset{\longrightarrow}{+ \; +}$$

له قيمة عظمى عند $x = -2$ هي $f(-2) = 12$

وله قيمة صغرى عند $x = 2$ هي $f(2) = -20$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: القيمُ العظمى والقيمُ الصغرى الصفحة: 74

أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ القيمِ العظمى والقيمِ المحليّةِ الصغرى لكلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ (إنْ وُجِدَتْ):

8 $f(x) = 2x^3 + 7$

الحل:

$$f'(x) = 6x^2$$

$$6x^2 = 0$$
$$x^2 = 0$$
$$x = 0$$

$+ \quad + \quad + \quad + \quad + \quad +$

$\longleftrightarrow$

0

له قيمة صغرى عند $x = 0$ هي $f(0) = 0$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: القيمُ العظمى والقيمُ الصغرى الصفحة: 74

أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ القيمِ العظمى والقيمِ المحليّةِ الصغرى لكلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ (إنْ وُجِدَتْ):

9 $f(x) = x^3 - 2x + 4$

الحل:

$$f'(x) = 3x^2 - 2$$

$$3x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = \frac{2}{3}$$

$$x = \mp\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\xleftarrow{+\ +\ +\ -\ -\ -\ +\ +\ +} \quad \text{at } -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{ and } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

له قيمة عظمى عند $x = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ هي $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = 5.1$

وله قيمة صغرى عند $x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ هي $f\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = 2.9$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: القيمُ العظمى والقيمُ الصغرى الصفحة: 74

أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ القيمِ العظمى والقيمِ المحليّةِ الصغرى لكلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ (إنْ وُجِدَتْ):

10 $f(x) = x^3 + x^2 - 8x + 54$

الحل:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 8$$

$$3x^2 + 2x - 8 = 0$$
$$(3x - 4)(x + 2) = 0$$
$$x = \frac{4}{3} \text{ or } x = -2$$

$$\underset{-2}{+ + +} \underset{}{- - -} \underset{\frac{4}{3}}{+ + +}$$

له قيمة عظمى عند $x = -2$ هي $f(-2) = 66$

وله قيمة صغرى عند $x = \frac{4}{3}$ هي $f\left(\frac{4}{3}\right) = 47.5$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: القيمُ العظمى والقيمُ الصغرى الصفحة: 74

يُمثِّلُ الاقترانُ $h(t)=1.2+19.6t-4.9t^2$ ارتفاعَ سهمٍ عنْ سطحِ الأرضِ بالمترِ بعدَ t ثانيةً منْ إطلاقِهِ:

11 أَجِدُ سرعةَ السهمِ بعدَ 3 ثوانٍ.

12 أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ أقصى ارتفاعٍ يصلُهُ السهمُ.

الحل:

$$h'(x) = 19.6 - 9.8t$$
$$h'(3) = 19.6 - 9.8 \times 3 = -9.8$$

عند أقصى ارتفاع تكون السرعة صفر

$$19.6 - 9.8t = 0$$

$$9.8t = 19.6$$
$$t = \frac{19.6}{9.8} = 2$$
$$h(2) = 1.2 + 19.6 \times 2 - 4.9 \times 2^2 = 20.8$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: القيمُ العظمى والقيمُ الصغرى الصفحة: 74

13 يُمثّلُ الاقترانُ $A(x) = x(50-x)$ مِساحةَ مستطيلٍ، حيثُ x الطولُ بالمترِ. ما أكبرُ مِساحةٍ ممكنةٍ للمستطيلِ؟

الحل:

$$A(x) = 50x - x^2$$

$$A'(x) = 50 - 2x$$

$$50 - 2x = 0$$

$$x = 25$$

$$\underset{25}{\overset{+\,+\,+\,-\,-\,-}{\longleftrightarrow}} \quad A'(x)$$

$$A(25) = 50 \times 25 - 25^2 = 625$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: القيمُ العظمى والقيمُ الصغرى الصفحة: 75

14 للاقترانِ $f(x) = 3x^4 - 10x^3 + 6x^2 + 3$ ثلاثُ نقاطٍ حرجةٍ. أَجِدُ إحداثياتِ هذهِ النقاطِ، مُصنِّفًا إيّاها إلى عظمى، وصغرى محلية.

الحل:

$$f'(x) = 12x^3 - 30x^2 + 12x$$

$$12x^3 - 30x^2 + 12x = 0$$
$$6x(2x^2 - 5x + 2) = 0$$
$$6x(2x - 1)(x - 2) = 0$$

$$x = 0 \; or \; x = \frac{1}{2} \; or \; x = 2$$

$$---+++---+++ \quad f'(x)$$

$0 \qquad \frac{1}{2} \qquad 2$

صغرى محلية $(0,3)$

عظمى محلية $\left(\frac{1}{2}, 3.4\right)$

صغرى محلية $(2, -5)$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: القيمُ العظمى والقيمُ الصغرى الصفحة: 75

15 أَجِدُ قيمةَ الثابتِ k إذا كانَ للاقترانِ $f(x) = x^2 + \frac{1}{k}x$ قيمةٌ حرجةٌ عندما $x = 3$.

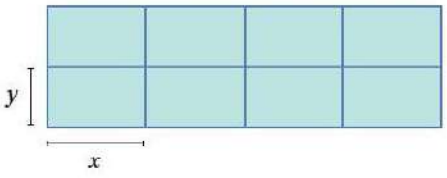
الحل:

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{k}$$
$$f'(3) = 0$$

$$f'(3) = 2 \times 3 + \frac{1}{k}$$
$$0 = 6 + \frac{1}{k}$$
$$\frac{1}{k} = -6$$

$$k = \frac{-1}{6}$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: القيمُ العظمى والقيمُ الصغرى الصفحة: 75



لدى مُزارعٍ 180 m منَ الشِّـــباكِ، أرادَ أنْ يصنعَ منْها حظائرَ لأغنامِهِ، طولُ كلٍّ منْها x مترًا، وعرضُها y مترًا كما في الشكلِ المجاورِ:

16 أُبيِّنُ أنَّ العلاقةَ بينَ x وَ y هيَ $y = 18 - 1.2x$

17 أُبيِّنُ أنَّ الاقترانَ $A(x) = 144x - 9.6x^2$ يُمثِّلُ المِساحةَ الكليةَ للحظائرِ.

18 أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ x التي تجعلُ المِساحةَ الكليةَ للحظائرِ أكبرَ ما يُمكِنُ.

19 أَجِدُ أكبرَ مِساحةٍ كليةٍ ممكنةٍ للحظائرِ.

الحل:

16

$$12x + 10y = 180$$
$$1.2x + y = 18$$
$$y = 18 - 1.2x$$

17

$$A(x) = 4x \times 2y$$
$$= 4x \times 2(18 - 1.2x)$$
$$= 4x \times (36 - 2.4x)$$
$$= 144x - 9.6x^2$$

18

$$A(x) = 144x - 9.6x^2$$
$$A'(x) = 144 - 19.2x$$
$$144 - 19.2x = 0$$
$$x = \frac{144}{19.2} = 7.5$$

19

$$A(7.5) = 144 \times 7.5 - 9.6(7.5)^2$$
$$= 540$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: القيمُ العظمى والقيمُ الصغرى الصفحة: 75

20 برهانٌ: أُثبِتُ أنَّ الاقترانَ $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x - 5$ ليسَ لهُ قيمٌ حرجةٌ.

الحل:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x + 4$$

$$6x^2 + 6x + 4 = 0$$

$$3x^2 + 3x + 2 = 0$$

المميز سالب بالتالي لا يوجد أصفار للمشتقة بالتالي لا يوجد قيم حرجة

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: القيمُ العظمى والقيمُ الصغرى الصفحة: 75

21 تبريرٌ: أَجِدُ قيمتَيِ الثابتيْنِ a, b إذا كانَ للاقترانِ $f(x) = x^2 + ax + b$ قيمةٌ حرجةٌ عندَ النقطةِ $(1, 3)$، ثمَّ أُحدِّدُ نوعَ القيمةِ الحرجةِ، مُبرِّرًا إجابتي.

الحل:

$$f(1) = 3$$
$$f'(1) = 0$$
$$f(1) = 3 \quad so$$
$$f(1) = 1 + a + b$$
$$3 = 1 + a + b$$

$$2 = a + b$$

$$f'(1) = 0 \quad so$$
$$f'(x) = 2x + a$$

$$f'(1) = 2 + a$$
$$0 = 2 + a$$
$$a = -2$$
$$b = 4$$

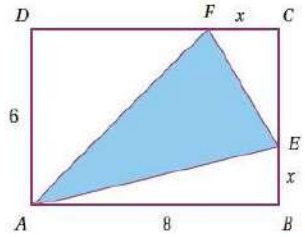
$$f'(x) = 2x - 2$$
$$2x - 2 = 0$$
$$x = 1$$

$$\underset{1}{\overset{- - - \; + + +}{\longleftrightarrow}} \quad f'(x)$$

صغرى محلية (1,3)

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: القيمُ العظمى والقيمُ الصغرى الصفحة: 75

يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ المثلثَ AFE الذي تقعُ رؤوسُهُ على أضلاعِ المستطيلِ $ABCD$:



22 اعتمادًا على القياساتِ المعطاةِ في الشكلِ، أُبيّنُ أنَّ الاقترانَ $H(x) = 24 - 4x + \frac{1}{2}x^2$ يُمثِّلُ مِساحةَ المثلثِ AFE.

23 أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ x التي تجعلُ مِساحةَ المثلثِ AFE أصغرَ ما يُمكِنُ.

الحل:

مساحة المثلث الأزرق = مساحة المستطيل – (مساحة المثلث 1 + مساحة المثلث 2 + مساحة المثلث 3)

$$H(x) = 8 \times 6 - [(\frac{1}{2}(x)(6-x)) + (\frac{1}{2}(8)(x)) + (\frac{1}{2}(6)(8-x))]$$

$$H(x) = 48 - [(\frac{1}{2}(x)(6-x)) + (\frac{1}{2}(8)(x)) + (\frac{1}{2}(6)(8-x))]$$

$$H(x) = 48 - [(3x - \frac{1}{2}x^2) + (4x) + (24 - 3x)]$$

$$H(x) = 48 - [-\frac{1}{2}x^2 + 4x + 24]$$

$$H(x) = 24 + \frac{1}{2}x^2 - 4x$$

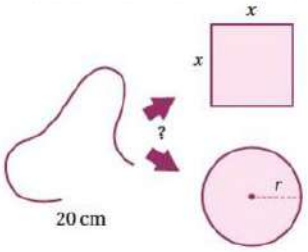
$$H'(x) = x - 4$$

$$x - 4 = 0$$

$$x = 4$$

$$\underset{4}{\overset{- - - + + +\quad H'(x)}{\longleftrightarrow}}$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: القيمُ العظمى والقيمُ الصغرى الصفحة: 75



24 تحدٍّ: سلكٌ طولُهُ 20 cm، يرادُ قصُّهُ لعملِ مُربَّعٍ ودائرةٍ. أُحدِّدُ موقعَ القصِّ بحيثُ يكونُ مجموعُ مِساحتَيِ المُربَّعِ والدائرةِ أصغرَ ما يُمكِنُ.

الحل:

مساحة المربع $A_1 = x^2$

محيط المربع $d_1 = 4x$

مساحة الدائرة $A_2 = \pi r^2$

محيط الدائرة $d_2 = 2\pi r$

$$4x + 2\pi r = 20$$

$$\Rightarrow x = \frac{20 - 2\pi r}{4}$$

$$A = x^2 + \pi r^2$$

$$= \left(\frac{20 - 2\pi r}{4}\right)^2 + \pi r^2$$

$$= \left(5 - \frac{1}{2}\pi r\right)^2 + \pi r^2$$

$$= 25 - 5\pi r + \frac{1}{4}(\pi r)^2 + \pi r^2$$

$$= \frac{1}{4}(\pi r)^2 + \pi r^2 - 5\pi r + 25$$

$$= \left(\frac{1}{4}\pi^2 + \pi\right) r^2 - 5\pi r + 25$$

$$A'(r) = \left(\frac{1}{2}\pi^2 + 2\pi\right) r - 5\pi$$ حصل الاشتقاق بالنسبة ل r

$$\left(\frac{1}{2}\pi^2 + 2\pi\right) r - 5\pi = 0$$

$$\Rightarrow r \approx 1.4$$

$$\Rightarrow x \approx 2.8$$

موقع القص يكون تقريبًا على بُعْد $4 \times 2.8 = 11.2\ cm$ من طرف السلك ليُكوّن هذا الجزء مربعًا، ويُكوّن الجزء الآخر دائرة محيطها $20 - 11.2 = 8.8\ cm$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 76

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

1 ميلُ منحنى الاقترانِ $f(x)=3x-1$ عندَ النقطةِ $x=5$ هوَ:

a) 3 b) $\frac{1}{3}$ c) -1 d) 0

الحل:

$$f'(x)=3$$

$$m=f'(5)=3$$

الجواب: a

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 76

2 إذا كانَ $f(x) = x(2x + 1)$، فإنَّ $f'(x)$ يساوي:

a) x b) $2x + 1$

c) $2x^2 + x$ d) $4x + 1$

الحل:

$$f(x) = 2x^2 + x$$
$$f'(x) = 4x + 1$$

الجواب: d

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 76

3 قيمةُ x التي عندَها قيمةٌ عظمى للاقترانِ $f(x)=(x-2)(x-3)^2$ هيَ:

a) $-\frac{7}{3}$ b) $-\frac{5}{2}$

c) $\frac{7}{3}$ d) $\frac{5}{2}$

الحل:

$$f(x)=(x-2)(x^2-6x+9)$$
$$f(x)=x\,(x^2-6x+9)-2\,(x^2-6x+9)$$

$$f(x)=x^3-6x^2+9x-2x^2+12x-18$$
$$f(x)=x^3-8x^2+21x-18$$
$$f'(x)=3x^2-16x+21$$
$$3x^2-16x+21=0$$
$$(3x-7)(x-3)=0$$
$$x=\frac{7}{3}\ \ or\ x=3$$

$f'(x)$: $+\ +\ +\ -\ -\ -\ +\ +\ +$ على $\frac{7}{3}$ و 3

الجواب: c

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 76

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

4 إذا مثَّلَ الاقترانُ $d(t) = t^2$ المسافةَ التي يقطعُها جسمٌ مُتحـرِّكٌ بالأمتارِ، حيـثُ t الزمنُ بالثانيةِ، فإنَّ سـرعةَ الجسمِ بوحدةِ $\mathrm{m/s}$ عندما $t = 1$ هيَ:

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 4

الحل:

$$d'(t) = 2t$$
$$d'(1) = 2 \times 1 = 2$$

الجواب: c

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 76

أَضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

5 أكبرُ قيمةٍ لسرعةِ جسمٍ مُتحرِّكٍ يسيرُ بسرعةٍ تُعطى بالاقترانِ $v(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 4$ ، حيثُ v السرعةُ بالمترِ لكلِّ ثانيةٍ، وَ t الزمنُ بالثانيةِ، هيَ:

a) 3 b) 4

c) 8 d) 9

الحل:

$$v'(t) = 3t^2 - 12t + 9$$

الجواب: d

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 76

6 إذا كانَ $h(x) = 2x^2 + x$ ، فأَجِـدُ $h'(x)$ ، ثمَّ أُبيِّنُ أنَّ

$$x(1 + h'(x)) = 2h(x).$$

الحل:

$$h'(x) = 4x + 1$$
$$2h(x) = 4x^2 + 2x$$
$$x(1 + h'(x)) = x(1 + 4x + 1)$$
$$= x(4x + 2)$$
$$= (4x^2 + 2x)$$
$$= 2h(x)$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 76

7 إذا وقعَتِ النقطةُ $P(-1, c)$ على منحنى الاقترانِ $f(x) = 5x^2 + 2$، فأَجِدُ قيمةَ c، ثمَّ أُحدِّدُ إذا كانَ الميلُ موجبًا أوْ سالبًا عندَ النقطةِ P.

الحل:

$$f(-1) = c$$
$$c = 5(-1)^2 + 2$$
$$c = 7$$

$$f'(x) = 10x$$
$$m = f'(-1) = -10$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 76

8 أَجِدُ معادلةَ مماسِّ منحنى الاقترانِ $f(x) = 4x^3 + 2$ عندَ النقطةِ التي إحداثيُّ x لها -1

الحل:

$$f(-1) = -4 + 2 = -2$$

$$f'(x) = 12\,x^2$$

$$m = f'(-1) = 12$$

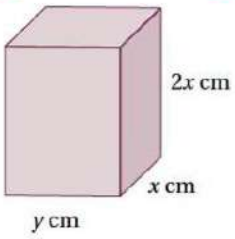
$$y - -2 = 12(x - -1)$$

$$y = 12x + 12 - 2$$

$$y = 12x + 10$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 76

يُبيِّنُ الشكلُ المجاورُ قالبًا يُستعمَلُ لصنعِ لَبِـنِ البناءِ، وتبلغُ مِساحةُ سطحِهِ الكليةُ $600\ cm^2$:



9 أُبيِّنُ أنَّ الاقترانَ $V(x)=200x-\frac{4}{3}x^3$ يُمثِّلُ حجمَ القالبِ.

10 أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ قيمةِ x التي تجعلُ الحجمَ أكبرَ ما يُمكِنُ.

11 أجِدُ أكبرَ حجمٍ ممكنٍ للقالبِ.

الحل:

$$v(x) = 2xyx$$
$$v(x) = 2yx^2$$
$$600 = 2yx + 2x(2y + 2x)$$
$$300 = yx + (2xy + 2x^2)$$
$$300 - 2x^2 = yx + 2xy$$
$$300 - 2x^2 = y(x + 2x)$$
$$300 - 2x^2 = y(3x)$$
$$y = \frac{300 - 2x^2}{(3x)}$$
$$y = \frac{100}{x} - \frac{2x}{3}$$
$$v(x) = 2x^2 \times \left(\frac{100}{x} - \frac{2x}{3}\right)$$
$$v(x) = 200\,x - \frac{4}{3}x^3$$
$$v'(x) = 200 - 4x^2$$
$$200 - 4x^2 = 0$$
$$4(50 - x^2) = 0$$
$$4\left(\sqrt{50} - x\right)\left(\sqrt{50} + x\right) = 0$$
$$x = \sqrt{50}$$
$$v\left(\sqrt{50}\right) = 200\,\sqrt{50} - \frac{4}{3}(\sqrt{50})^3$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 76

12 يُمثِّلُ الاقترانُ $d(t) = t^2 + 1$ المسافةَ (بالمترِ) التي يقطعُها جسمٌ مُتحرِّكٌ، حيثُ t الزمنُ بالثانيةِ. أَجِدُ السرعةَ بعدَ ثانيتَيْنِ، ثمَّ أَجِدُ الزمنَ t عندما تبلغُ السرعةُ $6\ \text{m/s}$

الحل:

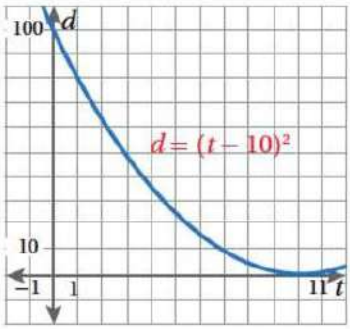
$$v'(t) = 2t$$
$$v'(2) = 4$$

$$6 = 2t$$
$$t = 3$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 76

أطلقَتْ سيّارةُ سُمَيَّةَ جرسَ إنذارٍ لتعبئةِ الوَقودِ، فتوجَّهَتْ إلى محطةِ الوَقودِ.

يُمثِّلُ المنحنى في الشكلِ المجاورِ العلاقةَ بينَ الزمنِ (t) والمسافةِ (d) المُتبقِّيةِ حتى وصلَتْ سُمَيَّةُ إلى المحطةِ:



13 أَجِدُ سرعةَ السيّارةِ بعدَ ثانيتيْنِ منَ انطلاقِ جرسِ تعبئةِ الوَقودِ.

14 أَجِدُ سرعةَ السيّارةِ بعدَ 10 ثوانٍ.

الحل:

$$d(t) = t^2 - 20t + 100$$
$$v(t) = 2t - 20$$
$$v(2) = 4 - 20 = -16$$
$$v(10) = 20 - 20 = 0$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 77

أَجِدُ مشتقةَ كلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ:

15 $f(x) = 2\pi^3$

الحل:

$$f'(x) = 0$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 77

أَجِدُ مشتقةَ كلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ:

16 $f(x) = x^8$

الحل:

$$f'(x) = 8x^7$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 77

أَجِدُ مشتقةَ كلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ:

17 $f(x) = -3x^4$

الحل:

$$f'(x) = -12x^3$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 77

أَجِدُ مشتقةَ كلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ:

18 $f(x) = x$

الحل:

$$f'(x) = 1$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 77

أَجِدُ مشتقةَ كلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ:

19 $f(x) = 1-2x$

الحل:

$$f'(x) = -2$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 77

أَجِدُ مشتقةَ كلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ:

20 $f(x) = 4-5x^2 + x^3$

الحل:

$$f'(x) = -10x + 3x^2$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 77

أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ القيمِ العظمى والقيمِ الصغرى لكلٍّ
منَ الاقتراناتِ الآتيةِ (إنْ وُجِدَتْ):

21 $f(x) = 17$

الحل:

$$f'(x) = 0$$

لا يوجد

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 77

أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ القيمِ العظمى والقيمِ الصغرى لكلٍّ
منَ الاقتراناتِ الآتيةِ (إنْ وُجِدَتْ):

22 $f(x) = 5x + 4$

الحل:

$$f'(x) = 5$$

لا يوجد

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 77

أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ القيمِ العظمى والقيمِ الصغرى لكلٍّ
منَ الاقتراناتِ الآتيةِ (إنْ وُجِدَتْ):

23 $f(x) = x^2 - 5x + 6$

الحل:

$$f'(x) = 2x - 5$$

$$2x - 5 = 0$$
$$x = \frac{5}{2}$$

$$\xleftarrow[\frac{5}{2}]{- - - - + + + +} \rightarrow$$

صغرى محلية $f\left(\frac{5}{2}\right)$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 77

أستعملُ المشتقةَ لإيجادِ القيمِ العظمى والقيمِ الصغرى لكلٍّ
منَ الاقتراناتِ الآتيةِ (إنْ وُجِدَتْ):

24 $f(x)=2x^3-4x^2+2x+1$

الحل:

$$f'(x) = 6x^2 - 8x + 2$$

$$6x^2 - 8x + 2 = 0$$
$$2(3x^2 - 4x + 1) = 0$$
$$2(3x - 1)(x - 1) = 0$$
$$x = \frac{1}{3} \; or \; x = 1$$

$$+ + + + - - - - + + + +$$
$$\frac{1}{3} \qquad 1$$

صغرى محلية $f(1)$

عظمى محلية $f\left(\frac{1}{3}\right)$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 77

25 تُمثِّلُ العلاقةُ $d(t) = 0.6t^3 - 1.5t - 0.9$ المسافةَ (بالمترِ) التي يقطعُها جسمٌ مُتحرِّكٌ، حيثُ t الزمنُ بالثانيةِ.

ما الزمنُ الذي تساوي عندَهُ السرعةُ 14.7m/s؟

الحل:

$$v(t) = 1.8\,t^2 - 1.5$$
$$14.7 = 1.8\,t^2 - 1.5$$
$$14.7 + 1.5 = 1.8\,t^2$$
$$16.2 = 1.8\,t^2$$
$$t^2 = \frac{16.2}{1.8} = 9$$

$$t = 3$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 77

26 أَجِـدُ قيمةَ الثابتِ k إذا كانَ للاقترانِ $f(x) = kx - x^3$ نقطةٌ حرجةٌ عندما $x = -1$

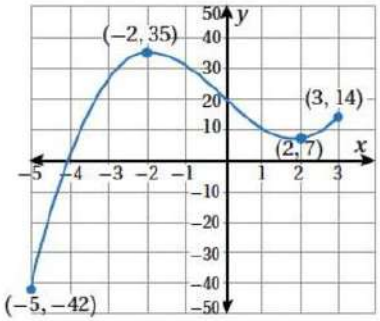
الحل:

$$f'(x) = k - 3x^2$$
$$f'(-1) = 0$$

$$0 = k - 3$$
$$k = 3$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 77

اعتمادًا على التمثيلِ البيانيِّ الآتي:



27 أُحدِّدُ الفترةَ (الفتراتِ) التي يكونُ عندها ميلُ المنحنى موجبًا.

28 أُحدِّدُ الفترةَ (الفتراتِ) التي يكونُ عندها ميلُ المنحنى سالبًا.

29 أُحدِّدُ النقطــةَ (النقاطَ) التي يكونُ عندها ميلُ المنحنى صفرًا.

الحل:

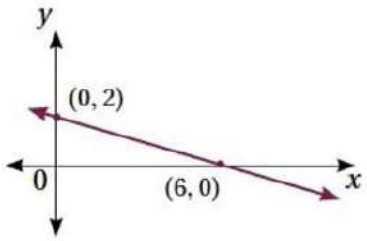
$(-5,-2),(2,3)$

$(-2,2)$

$x = -2 \; and \; x = 2$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 77

30 إذا كانَ المستقيمُ في الشكلِ المجاورِ هوَ منحنى الاقترانِ $f(x)$، فأَجِدُ $f'(x)$.



الحل:

$$f'(x) = \frac{2-0}{0-6} = \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3}$$

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 77

أضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

31 جميعُ قيمِ x التي عندها قيمٌ عظمى أوْ قيمٌ صغرى محلية للاقترانِ $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 15$ هيَ:

a) $-1, 0, 1$ b) $-1, 0$

c) $0, 1$ d) $-1, 1$

الحل:

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2$$
$$15x^4 - 15x^2 = 0$$
$$15x^2(x^2 - 1) = 0$$
$$15x^2(x - 1)(x + 1) = 0$$
$$x = 0, 1, -1$$

$$+ + + + - - - - + + + +$$
$$\longleftarrow \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad \longrightarrow$$

الجواب: d

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 77

أضعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصحيحةِ في ما يأتي:

32 عددُ النقاطِ الحرجةِ للاقترانِ $f(x) = (x-3)^2$ هوَ:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

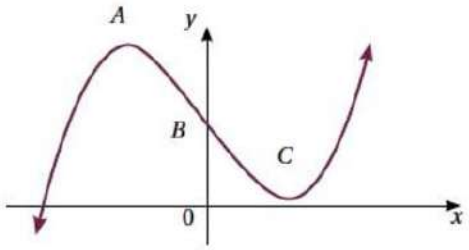
الحل:

$$f(x) = x^2 - 6x + 9$$
$$f'(x) = 2x - 6$$

الجواب: b

رياضيات العاشر: كتاب الطالب الوحدة السادسة الدرس: اختبارُ نهايةِ الوحدةِ الصفحة: 77

يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ منحنى الاقترانِ $f(x) = x^3 - 12x + 17$ الذي لهُ قيمةٌ عظمى عندَ النقطةِ A، وقيمةٌ صغرى عندَ النقطةِ C، ويقطعُ محورَ y عندَ النقطةِ B:



33 أَجِدُ $f'(x)$.

34 أَجِدُ ميلَ منحنى الاقترانِ $f(x)$ عندَ النقطةِ B.

35 أَجِدُ إحداثيَّيْ كلٍّ منَ النقطتيْنِ A وَ C.

الحل:

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

$$f'(0) = -12$$

$$3x^2 - 12 = 0$$
$$3(x^2 - 4) = 0$$
$$x = 2, -2$$
$$A = \big(-2, f(2)\big), B = (2, f(2))$$

صقر الجنوب
منتديات