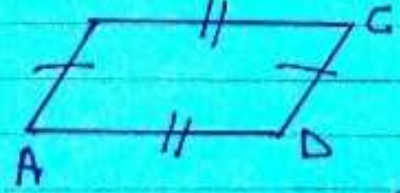
الدرس (3) — الوحدة (7)

تمييز متوازي الأضلاع

تعلمت في الدرس السابق نظريات حول خصائصها متوازي الاضلاع وسأتعلم في هذا الدرس عكس هذه النظريات، بحيث يمكن تحديد ما اذا كان الشكل الرباعي متوازي اضلاع أم لا اذا كانت اضلاعه وزواياه واقطاره لها خصائص معينة

مفهوم أساسي * عكس نظرية الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع *

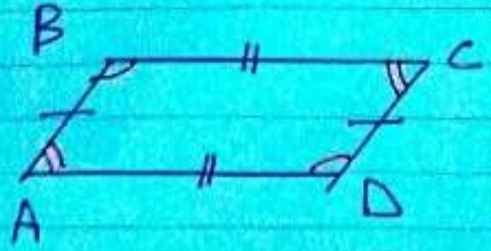
اذا كان كل ضلعين متقابلين متطابقين في الشكل الرباعي، فان الشكل الرباعي متوازي اضلاع



اذا كان $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ ، $\overline{BC} \cong \overline{AD}$
فان ABCD متوازي اضلاع

* عكس نظرية الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع *

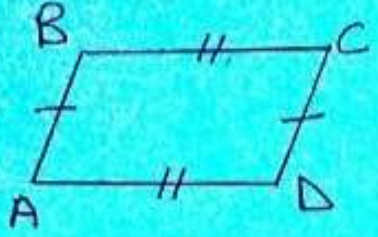
اذا كانت كل زاويتين متقابلتين متطابقتان في الشكل الرباعي فان الشكل الرباعي متوازي اضلاع.



اذا كان $\angle A \cong \angle C$ ، $\angle B \cong \angle D$
فان الشكل الرباعي ABCD متوازي اضلاع

برهان النظرية « عكس نظرية الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع »

في الشكل المجاور، اذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ و $\overline{BC} \cong \overline{AD}$
فاثبت ان ABCD متوازي أضلاع باستعمال البرهان ذي العمودين



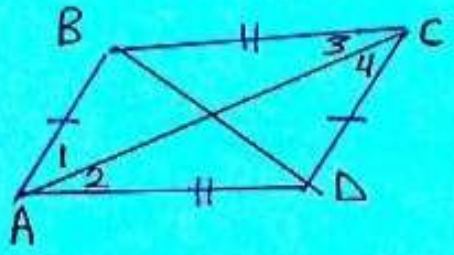
اخطط للبرهان باتباع الخطوات الآتية

خطوة (1) :- ارسم القطر $\overline{AC}$ لينتج $\triangle ABC$ و $\triangle CDA$

خطوة (2) :- استعمل حالة تطابق مثلثين تلازم اضلاع (SSS) لاثبت ان

$\triangle ABC \cong \triangle CDA$

خطوة (3) :- استعمل الزوايا المتبادلة داخلياً، لاثبت ان الاضلاع المتقابلة متوازية

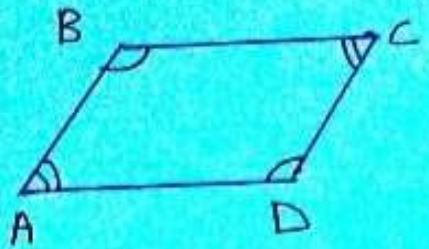


رانيت صافي
٠٧٨٥٨٢٤٤٦٤

العبارات	المبررات
1) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{BC} \cong DA$	1) معطى
2) $\overline{AC}$	2) ضلع مشترك
3) $\triangle ABC \cong \triangle CDA$	3) SSS
4) $\angle 1 \cong \angle 4$, $\angle 3 \cong \angle 2$	4) زوايا متناظرة في مثلثين متطابقين
5) $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$ و $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$	5) عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً
6) ABCD متوازي اضلاع	6) تعريف متوازي الاضلاع

التحقق من فهمك 1
ص 85

في الشكل المجاور، اذا كان $\angle A \cong \angle C$ ، $\angle B \cong \angle D$
فاثبت ان ABCD متوازي اضلاع



اثبات عكس نظرية الزوايا المتقابلة في متوازي اضلاع

الحل:-

$\angle A \cong \angle C$
$\angle B = \angle D$ معطى

تكون مجموع زوايا الشكل الرباعي 360

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360$$

نقسم على 2

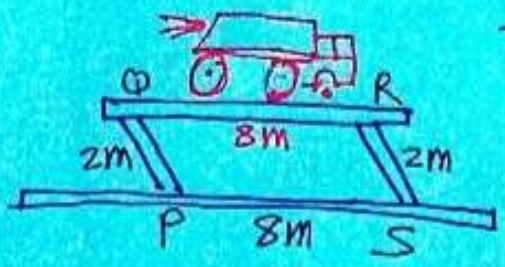
$$2m\angle A + 2m\angle B = 360$$
$$m\angle A + m\angle B = 180$$

وعليه $\angle A$ و $\angle B$ متكاملتان ومجموع قياسهما 180
وحسب عكس نظرية التكامل فان $BC \parallel AD$

وبالمثل نتبع نفس الطريقة حيث نستبدل $m\angle C$ بـ $m\angle A$
واستبدل $m\angle D$ بـ $m\angle B$ ونتج $\angle C$ و $\angle D$ متكاملتان ومجموع قياسهما 180 وحسب عكس نظرية التكامل فان $AB \parallel CD$ وعليه الشكل الرباعي متوازي اضلاع

مسائل من الحياة

مثال رافعة :- يبين الشكل المجاور رافعة للمركبات الصغيرة



① هل الشكل الرباعي QRSP متوازي اضلاع

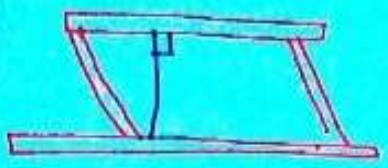
الحل:- بما أن كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي QRSP متطابقان، فانه متوازي اضلاع

② هل الشاحنة موازية للأرض ؟ برر اجابتي

الحل :- بما أن $\overline{QR} \parallel \overline{PS}$ متوازي اضلاع ، فان $\overline{QR} \parallel \overline{PS}$
وبما أن $\overline{QR}$ يمثل العتبة التي تستقر عليها الشاحنة ، و $\overline{PS}$ يقع على الارض فان الشاحنة موازية للارض

التحقق من فهمي
86
ص ١

③ ما أقصى ارتفاع يمكن ان تدفع الرافعة الشاحنة اليه ؟ برر اجابتي



الحل :- لان الضلع المقابل $2\ m$
$2m$ طوله PQ

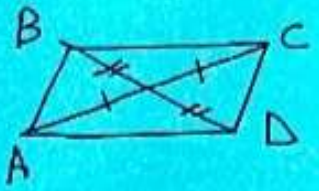
---

* عكس نظرية قطري متوازي الاضلاع *

مفهوم اساسي

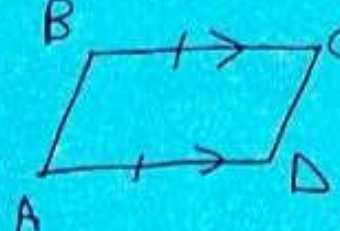
اذا كان قطرا شكل رباعي ينصف كل منهما ، فان الشكل الرباعي متوازي اضلاع

اذا كان $\overline{AC}$ ، $\overline{BD}$ ينصف كل منهما الآخر فان ABCD متوازي اضلاع



* نظرية الاضلاع المتوازية والمتقابلة *

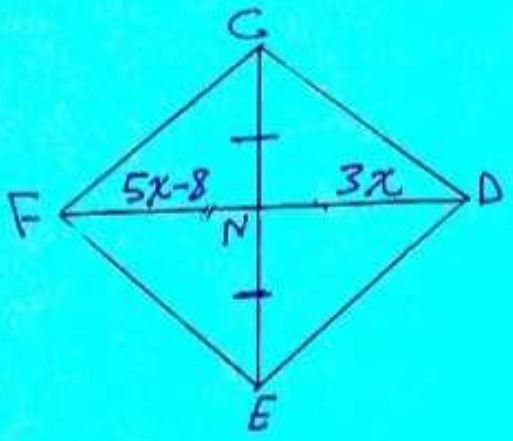
اذا توازى وتطابق ضلعان متقابلان في شكل رباعي ، فان الشكل الرباعي متوازي اضلاع



اذا كان $\overline{BC} \cong \overline{AD}$ ، $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$
فان ABCD متوازي اضلاع

* يمكن استعمال شروط متوازي الأضلاع لإيجاد القيم المجهولة التي تجعل الشكل الرباعي متوازي أضلاع

مثال جد قيمة x التي تجعل الشكل الرباعي FCDE المجاور متوازي أضلاع



الحل: بناءً على كون قطري متوازي الأضلاع ينصفان بعضهما، وبما أنه معطى في الشكل $\overline{CN} \cong \overline{EN}$، فإن قيمة x هي التي تجعل $\overline{FN} \cong \overline{DN}$

$FN = DN$

$5x - 8 = 3x$ تكوين المعادلة

حل المعادلة

$5x - 8 = 3x$

$-3x \quad -3x$

$2x - 8 = 0$

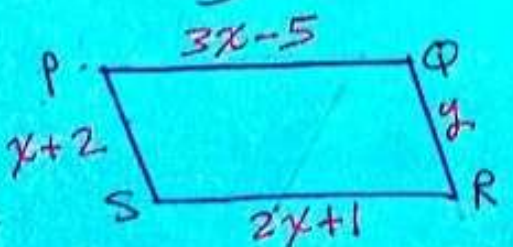
$+8 \quad +8$

$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$

$x = 4$

جد قيمتي x و y اللتين تجعلان الشكل الرباعي PQRS المجاور متوازي أضلاع

التحقق من الحل صفحة 87



الحل: بما أن x و y اللتين تجعلان كل ضلعين متقابلين متطابقتين

حساب x

$PQ = SR$

$3x - 5 = 2x + 1$

$-2x \quad -2x$

$x - 5 = 1$

$+5 \quad +5$

$x = 6$

حساب y

$QR = PS$

$y = x + 2$ عوض $x = 6$

$y = 6 + 2$

$y = 8$

ملخص المفهوم

* طرائق اثبات ان الشكل الرباعي متوازي اضلاع *

يكون الشكل الرباعي متوازي اضلاع اذا حقق واحداً من الشروط الآتية:

1) اذا كان كل ضلعين متقابلين منه متوازيين «التعريف»

2) اذا كان كل ضلعين متقابلين منه متطابقين «عكس نظرية الاضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع»

3) اذا كانت كل زاويتين متقابلتين منه متطابقتين «عكس نظرية الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع»

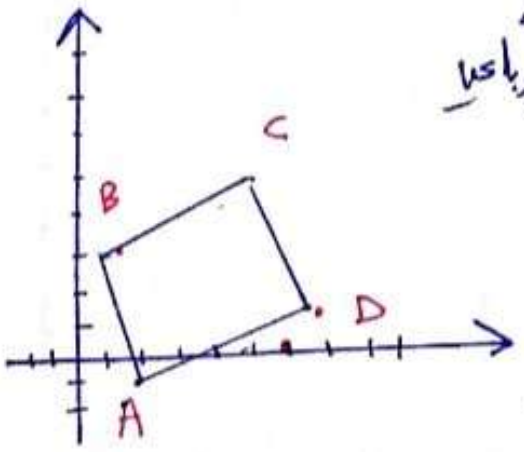
4) اذا كان قطراه ينصف كل منهما الآخر «عكس نظرية قطري متوازي الأضلاع»

5) اذا كان منه ضلعان متقابلان متوازيان ومتطابقان «نظرية اضلاع المتوازية والمتطابقة»

---

* يمكن استعمال الميل لتحديد ما اذا كان الشكل الرباعي في المستوى الاحداثي متوازي اضلاع أم لا

مثال أثبت ان $D(7,1)$ و $C(6,5)$ و $B(1,3)$ و $A(2,-1)$ تمثل متوازي أضلاع



خطوة (1): امثل الشكل الرباعي في المستوى الاحداثي

خطوة (2): جد ميل كل ضلع منا ضلاع الشكل الرباعي حسب القانون $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

ميل $\overline{AB}$: $m=\frac{3-(-1)}{1-2}=-4$

ميل $\overline{CD}$: $m=\frac{1-5}{7-6}=-4$

ميل $\overline{BC}$: $m=\frac{5-3}{6-1}=\frac{2}{5}$

ميل $\overline{DA}$: $m=\frac{-1-1}{2-7}=\frac{2}{5}$

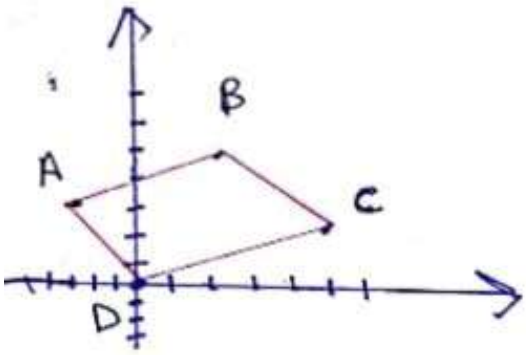
∴

خطوة (3): نقارن ميل كل ضلعين متقابلين

بما ان كل ضلعين متقابلين لهما الميل نفسه فهما متوازيان وعليه الشكل متوازي اضلاع «التعريف»

التحقق من فهمك ص 88

أثبت ان $A(-3,3)$ و $B(2,5)$ و $C(5,2)$ و $D(0,0)$ تمثل رؤوس متوازي اضلاع.



الحل:- ميل $\overline{AB}$ $\therefore m = \frac{5-3}{2+3} = \frac{2}{5}$

ميل $\overline{BC}$ $\therefore m = \frac{2-5}{5-2} = \frac{-3}{3} = -1$

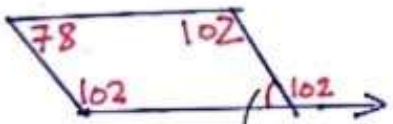
ميل $\overline{CD}$ $\therefore m = \frac{0-2}{0-5} = \frac{2}{5}$

ميل $\overline{DA}$ $\therefore m = \frac{3-0}{-3-0} = -1$

بما أن كل ضلعين متقابلين لهما الميل نفسه، فعليه كل ضلعين متقابلين متوازيين، اذن الشكل الرباعي ABCD متوازي اضلاع

التدرب وحل المسائل ص 88

أبين ما اذا كان كل شكل من الاشكال الرباعية الآتية متوازي اضلاع أم لا، مبررا اجابتي

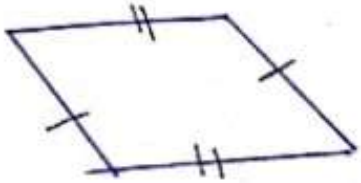
① 

وبما أن $180 - 102 = 78$

كل زاويتين متقابلتين متطابقتين وعليه متوازي اضلاع

« عكس نظرية الزوايا المتقابلة في متوازي الاضلاع »

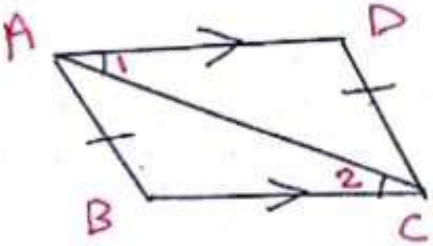
---

② 

كل ضلعين متقابلين متطابقين وعليه متوازي اضلاع

« عكس نظرية اضلاع المتقابلة في متوازي الاضلاع »

---

③ 

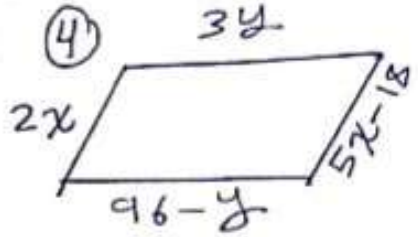
توجد زاويتان في وضع تبادل متطابقتين وعليه $\angle 1 \cong \angle 2$ فان $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ وبما انهما متطابقتين $AB \cong CD$ وعليه الشكل متوازي اضلاع

« نظرية اضلاع المتوازي والمتطابقة »

د. أفنست صافي ٠٧٨٥٨٢٤٤٦٣

جد قيمة x و y اللتين تجعلان كل شكل رباعي مما يأتي متوازي اضلاع

④



الحل :- كل ضلعين متقابلين متطابقان :-

$3y = 96 - y$

$+y \quad +y$

$\frac{4y}{4} = \frac{96}{4}$

$\boxed{y = 24}$

$5x - 18 = 2x$

$-2x \quad -2x$

$3x - 18 = 0$

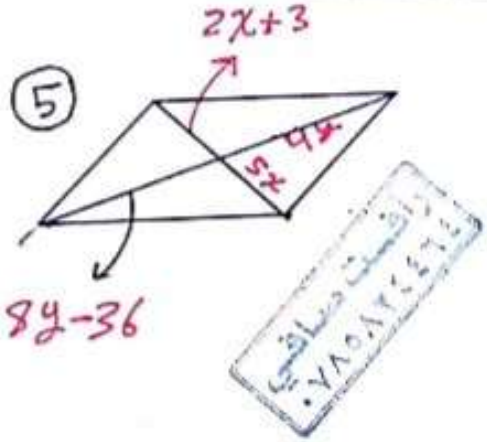
$+18 \quad +18$

$\frac{3x}{3} = \frac{18}{3}$

$\boxed{x = 6}$

---

⑤



الحل :- اضلاع لمتقابلة تتطابق كل منهما الآخر

$5x = 2x + 3$

$-2x \quad -2x$

$\frac{3x}{3} = \frac{3}{3}$

$\boxed{x = 1}$

$8y - 36 = 4y$

$-4y \quad -4y$

$4y - 36 = 0$

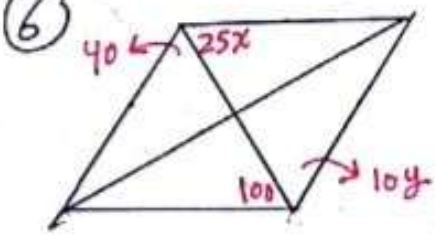
$+36 \quad +36$

$\frac{4y}{4} = \frac{36}{4}$

$\boxed{y = 9}$

---

⑥



الحل :- الزوايا المتبادلة متطابقة ليصبح الشكل متوازي اضلاع

$\frac{40}{10} = \frac{10y}{10}$

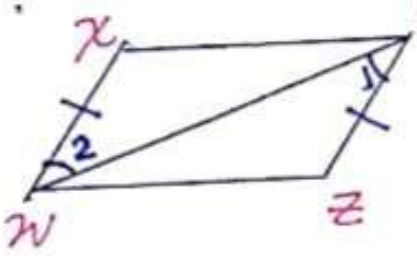
$\boxed{y = 4}$

$\frac{25x}{25} = \frac{100}{25}$

$\boxed{x = 4}$

⑦ استعمل المعلومات المعطاه في الشكل الآتي لكتابة برهان لهما لاثبت ان الشكل الرباعي XYZW متوازي اضلاع

الحل :-



$\angle XWY \cong \angle ZYW$ معطى → $\overline{WX} \parallel \overline{YZ}$ زاويتان متبادلتان داخليا

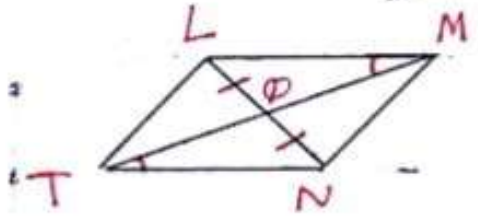
$\overline{WX} \cong \overline{YZ}$ معطى

→ XYZW متوازي اضلاع

نظرية المتوازي الاضلاع والمتطابقة

---

⑧ استعمل المعلومات المعطاه في الشكل الآتي لكتابة برهان لهما لاثبت ان الشكل الرباعي LMNT متوازي اضلاع



$\overline{LQ} \cong \overline{NQ}$ معطى

$\angle LMQ \cong \angle NTQ$ معطى

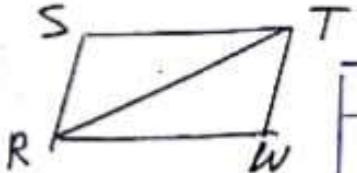
$\angle LQM \cong \angle NQT$ متقابلتان بالراس

→ $\Delta NQT \cong \Delta LQM$ AAS → $\overline{TQ} \cong \overline{MQ}$ ضلعان متناظران في مثلثين متطابقين → LMNT متوازي اضلاع

شكل رباعي قطراه ينصف كل منهما الآخر

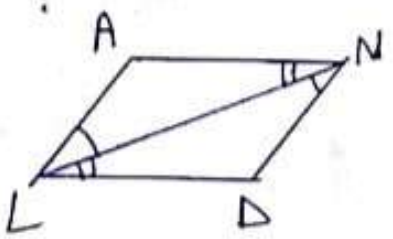
---

⑨ في الشكل الآتي واذا كان $\Delta TRS \cong \Delta RTW$ فأثبت ان RSTW متوازي اضلاع باستعمال البرهان ذي العمودين



العبارات	المبررات
$\Delta TRS \cong \Delta RTW$	معطى
$\angle STR \cong \angle WRT$	زاويتان متناظرتان في مثلثين متطابقين
$\overline{ST} \parallel \overline{RW}$	الزاويتان $\angle WRT$ و $\angle STR$ متطابقتان ومتبادلتان داخليا
$\overline{ST} \cong \overline{RW}$	ضلعان متناظران في مثلثين متطابقين
ABCD متوازي اضلاع	شكل رباعي فيه ضلعان متقابلان متطابقان ومتوازيان

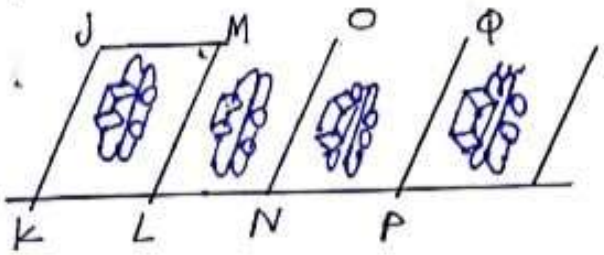
(١٥) استعمل المعلومات المعطاة في الشكل الآتي لكتابة برهان ذي العمودين على أن الشكل الرباعي ANDL متوازي أضلاع.



العبارات	المبررات
$\angle ANL \cong \angle DLN$	معطى
$\overline{AN} \parallel \overline{DL}$	الزاويتان $\angle ANL$ و $\angle DLN$ متطابقتان ومتبادلتان داخلياً
$\angle ALN \cong \angle DNL$	معطى
$\overline{AL} \parallel \overline{DN}$	الزاويتان $\angle ALN$ و $\angle DNL$ متطابقتان ومتبادلتان داخلياً
ANDL متوازي أضلاع	تعريف متوازي الأضلاع

(١٥) موقف سيارات :- يبين الشكل المجاور موقفاً للسيارات. اذا كان

$m\angle JKL = 60$ ، $JK = LM = 7m$ و $KL = JM = 3m$



(١١) هل الجزء من الموقف JKLM متوازي أضلاع ؟ برر اجابتي

الحل: نعم ، لأن كل ضلعين متقابلين متطابقين

(عكس نظرية الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع)

(١٢) جد كلاً من $m\angle KLM$ ، $m\angle KJM$ ، $m\angle JML$

الحل:

$m\angle KLM = 180 - 60 = 120$ لأن $\angle KLM$ ، $\angle JKL$ في وضع تحالف

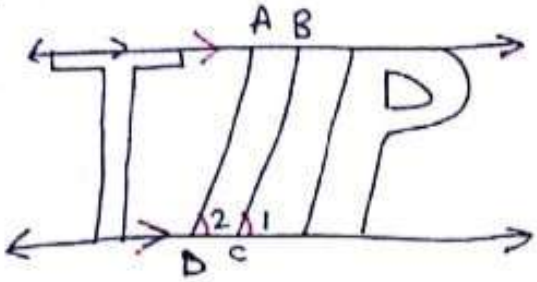
$m\angle KJM = 120$ لأن $\angle KJM$ تقابل $\angle KLM$ وهما متطابقتان

$m\angle JML = 60$ لأن تقابل الزاوية $\angle JKL$

(١٣) هل $\overline{JK} \parallel \overline{PO}$ ؟ برر اجابتي

الحل: لا نستطيع الحكم على استقامتهما لعدم توفر كافي من البيانات

حاسوب :- تصحح معالجات نصوص حاسوبية عدة كتابة الكلمة بالخط العادي أو الخط المائل ، هل حرف I متوازي أضلاع



الحل :- نعم هو كذلك .

$\overline{CD} \parallel \overline{AB}$ معطى

$\angle 1 \cong \angle 2$ معطى وهما في وضع تناظر

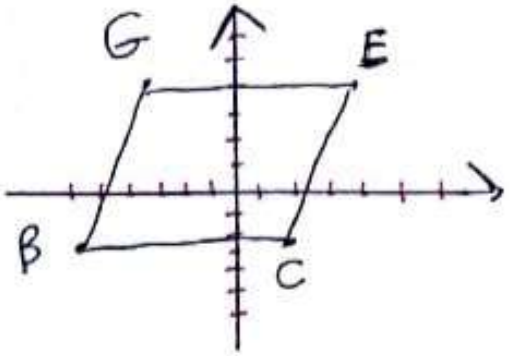
$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ∴

(عكس مسلمة التناظر (التناظرين))

وعليه كل ضلعين متقابلين متوازيين فان حرف I متوازي أضلاع (تعريف)

امثل في المستوى الاحداثي الشكل الرباعي المعطاه احداثيات رؤوسه في ما يأتي ، واجد ما اذا كان متوازي أضلاع أم لا .

(15) $B(-6,-3)$ ، $C(2,-3)$ ، $E(4,4)$ ، $G(-4,4)$



الحل :- نجد ميل كل ضلعين متقابلين

الضلع $\overline{GE}$ ∴ $m = \frac{4-4}{-4-4} = 0$

الضلع $\overline{BC}$ ∴ $m = \frac{-3-(-3)}{2-(-6)} = 0$

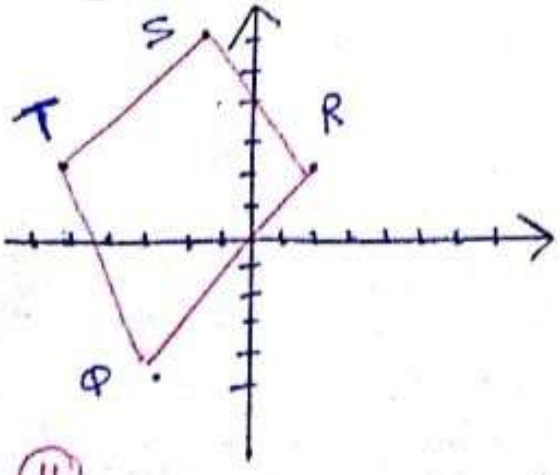
الضلع $\overline{GB}$ ∴ $m = \frac{4+3}{-4+6} = \frac{7}{2}$

الضلع $\overline{EC}$ $m = \frac{4+3}{4-2} = \frac{7}{2}$

كل ضلعين متقابلين متوازيان ، الشكل متوازي أضلاع

---

(16) $Q(-3,-6)$ ، $R(2,2)$ ، $S(-1,6)$ ، $T(-5,2)$

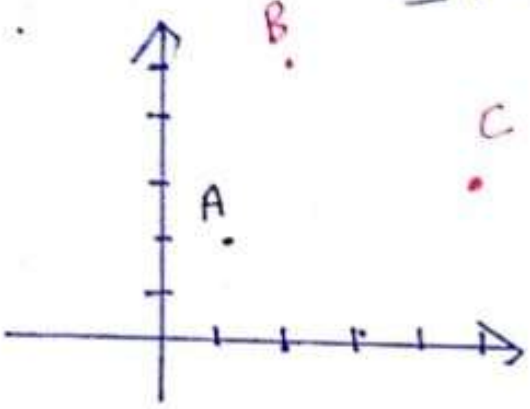


الضلع $\overline{TS}$ ∴ $m = \frac{2-6}{-5+1} = 1$

$\overline{QR}$ ∴ $m = \frac{2+6}{2+3} = \frac{8}{5}$

هنا الضلعان المتقابلان غير متوازيان وعليه الشكل لا يمثل متوازي أضلاع

تدريب :- تمثل النقاط A, B, C في المستوى الاحداثي المجاور رؤوس شكل رباعي، جد احداثيات النقطة الرابعة في كل من الحالات الآتية، مبرراً اجابتي



(17) النقطة D حيث ABCD متوازي اضلاع

الحل:- نلاحظ انه اذا اردنا الوصول من B الى A فاننا ننزل 3 وحدات للاسفل ووحدة لليسار، وبالمثل نفعل عند C وتكون النقطة D احداثياتها (4,0)

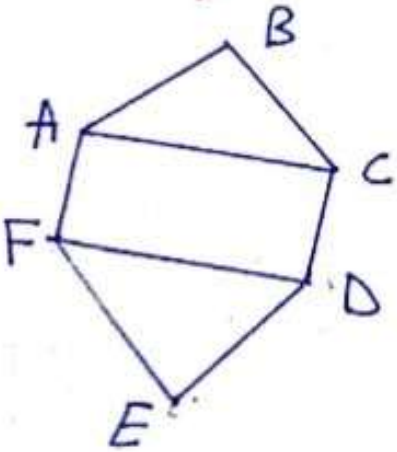
« التحرك من A تعكس عقارب الساعة »

(18) النقطة E حيث ABEC متوازي اضلاع

الحل: هنا عند التحرك من A الى B - يجب التحرك للاعلى ليصبح الشكل متوازي اضلاع، حيث من A الى B تحركنا خطوه لليمين و 3 خطوات للاعلى وبالمثل نفعل من النقطة C وتكون النقطة D احداثياتها (6,6)

---

(19) أثبت ان الشكل الرباعي FACD متوازي اضلاع علماً بان ABCDEF سداسي منتظم



الحل:

$\overline{FA} \cong \overline{DC}$ « اضلاع متقابلة في متوازي اضلاع »

في $\triangle ABC$ ، $\triangle FED$:

$\overline{AB} \cong \overline{FE}$ اضلاع في منتظم

$\overline{BC} \cong \overline{ED}$ اضلاع متقابلة

$\angle B \cong \angle E$ وزوايا متقابلة

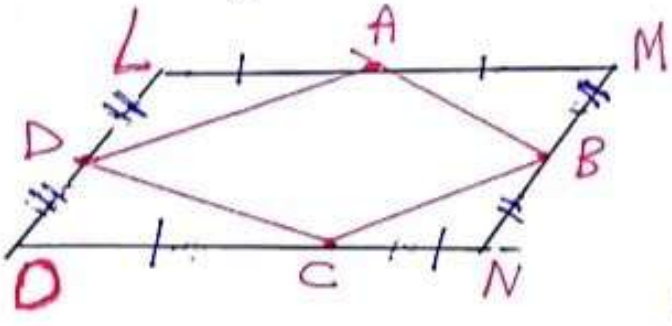
وعليه المثلثان متطابقان وعليه :

$AC \cong FD$ « ضلعان متقابلان في مثلثين متطابقين »

بما ان كل ضلعين متقابلين متطابقين فان الشكل الرباعي FACD متوازي اضلاع.

« عكس نظرية اضلاع المتقابلة في متوازي اضلاع »

(20) تحدٍّ :- بين الشكل المجاور متوازي الاضلاع LMNO
وتمثل النقاط A و B و C و D منتصفات اضلاعه
أثبت ان الشكل ABCD متوازي اضلاع



الحل :- بما أن LMNO متوازي
اضلاع فان كل ضلعين متقابلين
متطابقان وبما ان A و B و C و D
منتصفات اضلاع فان :-

$\overline{LA} \cong \overline{AM} \cong \overline{OC} \cong \overline{CN}$

$\overline{LD} \cong \overline{DO} \cong \overline{MB} \cong \overline{BN}$

نظائر بعد المثلثان $\triangle AMB$ و $\triangle ODC$

$\overline{AM} \cong \overline{OC}$

$\overline{MB} \cong \overline{OD}$

$\angle M = \angle O$ متقابلتين في متوازي اضلاع

وعليه المثلثان متطابقان SAS

وينتج ان $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ ضلعان متناظران في مثلثان متطابقين

وبالمثل نظائر بعد المثلثان $\triangle CNB$ و $\triangle DLA$

وينتج $\overline{DA} \cong \overline{CD}$

وبما ان الشكل الرباعي ABCD فيه كل ضلعين
متقابلين متطابقين وعليه الشكل الرباعي متوازي اضلاع
« عكس نظرية الاضلاع المتقابلة في متوازي الاضلاع »

www.army.jo