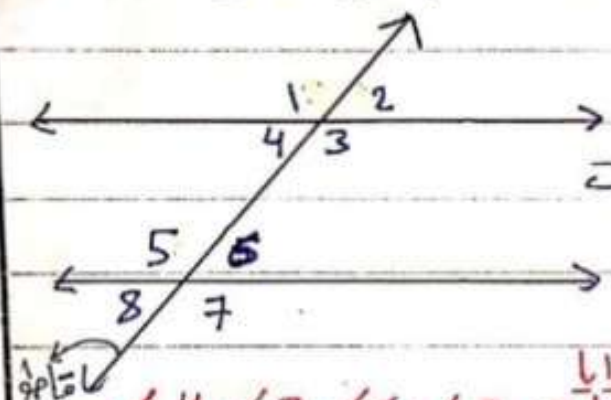
الوحدة (7)

اثبات توازي المستقيمات وتعامدها

الدرس (1)

مقدمة :- «مراجعة صف سابع»

اذا قطع مستقيم مستقيمين فيتكون مجموعه من الزوايا كما يلي :-



زوايا داخلية ∠4، ∠3، ∠6، ∠5

زوايا خارجية ∠7، ∠8، ∠1، ∠2

نفس الجهة ∠2، ∠3، ∠6، ∠7

نفس الجهة ∠1، ∠4، ∠5، ∠8

* زاويتين متناظرتين

تقعان في نفس الجهة احداهما داخلية والاخرى خارجية وغير متجاورات

«∠3، ∠7» و«∠4، ∠8»

«∠1، ∠5» و«∠2، ∠6»

* زاويتين متبادلتين داخلياً

تقعان في جهتين مختلفتين وتكون داخليتين «غير متجاورات»

«∠4، ∠6» و«∠3، ∠5»

* زاويتين متبادلتين خارجياً

تقعان في جهتين مختلفتين وتكون خارجيتان «غير متجاورات»

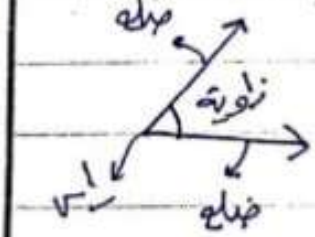
«∠1، ∠7» و«∠2، ∠8»

* زاويتين متحالفتين

تقعان في نفس الجهة وتكونا داخليتين «غير متجاورات»

«∠4، ∠5» و«∠3، ∠6»

تذكير :-



رمز الزاوية ∠

حيث تكتب الزاوية بحرف واحد وهو الرأس أو بثلاث حروف اوسطها الرأس أو نضع داخلها رقم.

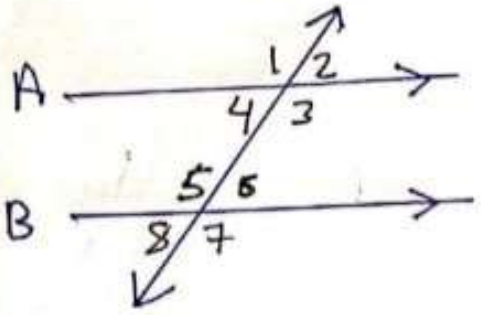
رأفت راهيم صافي

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

نظريات المستقيمين المتوازيين وأزواج الزوايا

مراجعة مفهوم

اذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين في المستوى نفسه، فان :-



① كل زاويتين متناظرتين متطابقتان

$\angle 3 \cong \angle 7$ ------

يطابق

② كل زاويتين متبادلتين داخلياً أو خارجياً متطابقتان

$\angle 3 \cong \angle 5$ -----

$A \parallel B$

③ كل زاويتين متكاملتان تكون مجموع قياسهما 180° حيث :-

$m\angle 4 + m\angle 5 = 180^\circ$

$m\angle 3 + m\angle 6 = 180^\circ$

$m\angle 4$ ⟺ (تنويه)

تقرأ :- قياس الزاوية 4

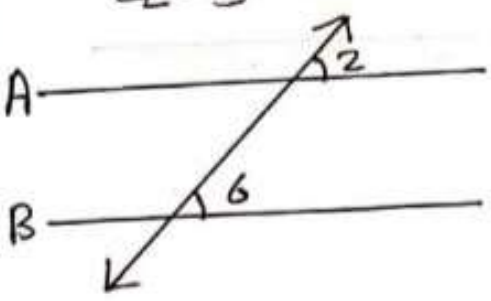
---

* سنتعلم في هذا الدرس كيفية استعمال ازواج الزوايا الناتجة عن مستقيمين يقطعهما قاطع في المستوى نفسه لاثبات توازيهما، بحيث نبحث عن زوايا متناظرة أو متبادلة متساوية أو زوايا متكاملة مجموع قياسها 180 حتى يكون المستقيمان متوازيان ((عكس المسلمة صحيح))

مسلمة

عكس مسلمة الزاويتين المتناظرتين

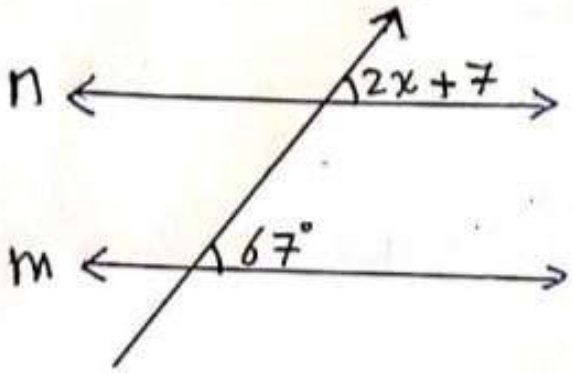
اذا قطع قاطع مستقيمين، ونتج عن تقاطعه زاويتان متناظرتان متطابقتان، فان المستقيمين متوازيان.



اذا كانت $\angle 2 \cong \angle 6$

فان $A \parallel B$

مثال :- جد متغيرة x في الشكل المجاور التي تجعل $n \parallel m$



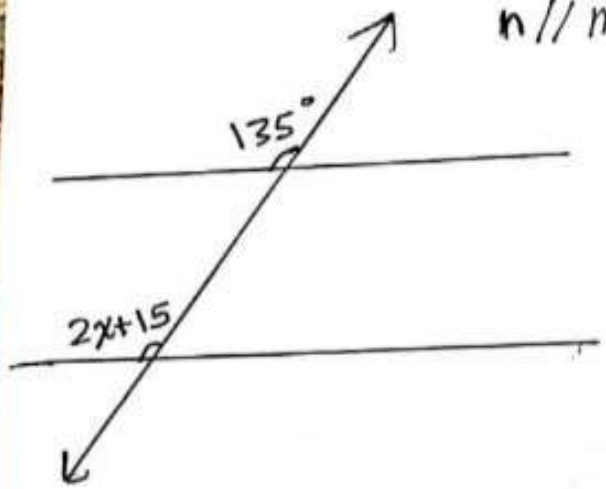
الحل :-

يكون المستقيمان متوازيين اذا كانت الزاويتان المتناظرتان متطابقتان

$$2x + 7 = 67$$
$$-7 \quad -7$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{60}{2}$$
$$x = 30^\circ$$

تحقق من فهمي

جد متغيرة x التي تجعل $n // m$



الحل :- يكون $n // m$ اذا كانت الزاويتان المتناظرتان متطابقتان

$$2x + 15 = 135$$
$$-15 \quad -15$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{120}{2}$$
$$x = 60$$

---

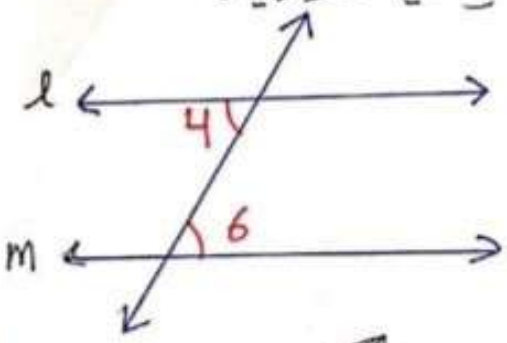
* يمكن ان تحدد ازواج الزوايا الناتجة عن مستقيمين يقطعهما قاطع في المستوى نفسه ما اذا كان المستقيمان متوازيين أم لا

نظريات

عكس نظريات المستقيمين المتوازيين وأزواج الزوايا

* عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً :-

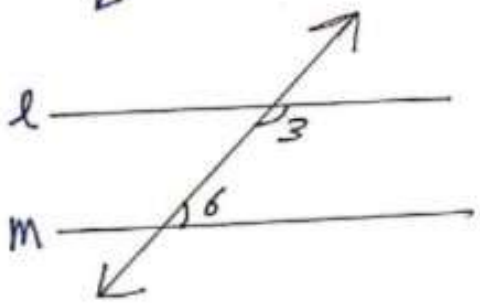
اذا قطع قاطع مستقيمين ، ونتج عن التقاطع زاويتان متبادلتان داخلياً متطابقتان فان المستقيمين متوازيان



اذا كانت $\angle 4 \cong \angle 6$ فان $l \parallel m$

* عكس نظرية الزاويتين المتحالفتين

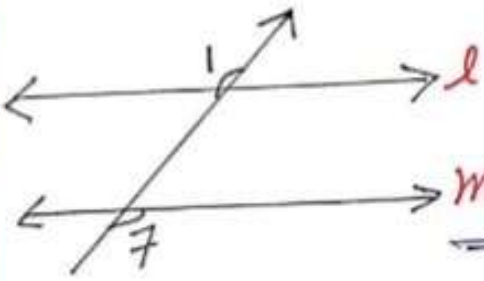
اذا قطع قاطع مستقيمين ، ونتج عن التقاطع زاويتان متحالفتان متكاملتان فان المستقيمين متوازيان



اذا كانت :-
$m\angle 3 + m\angle 6 = 180$ فان $l \parallel m$:-

* عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجياً :-

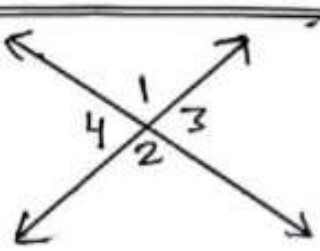
اذا قطع قاطع مستقيمين ، ونتج عن التقاطع زاويتان متبادلتان خارجياً متطابقتان فان المستقيمين متوازيان



اذا كانت :-
$\angle 7 \cong \angle 1$ فان $l \parallel m$

يمكن استعمال عكس مسلمة الزاويتين المتناظرتين لاثبات النظريات السابقة.

تذكير

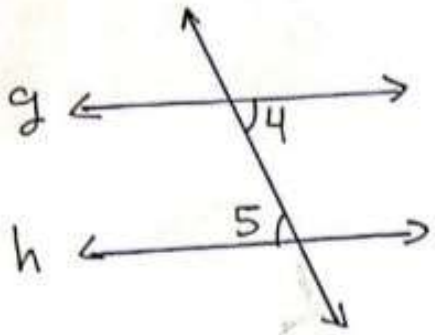


$\angle 2$ و $\angle 1$
$\angle 4$ و $\angle 3$
متقابلتين بالرأس ومتاركها متساوٍ

مثال في الشكل المجاور اذا كانت $\angle 4 \cong \angle 5$ فاثبت ان $g \parallel h$ باستعمال المخطط السهمي

استخدام مسلمة الزاويتين المتناظرتين

الحل :-



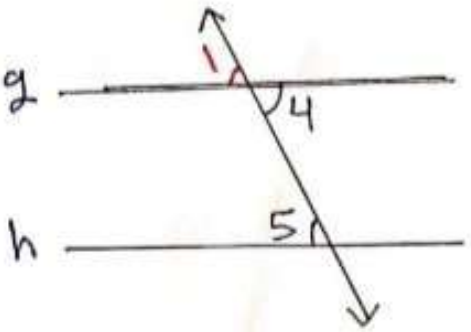
خطوة (1) :- اسمي $\angle 1$ التي تقابل بالرأس $\angle 4$

خطوة (2) :-

$\angle 4 \cong \angle 5$ (معطى)

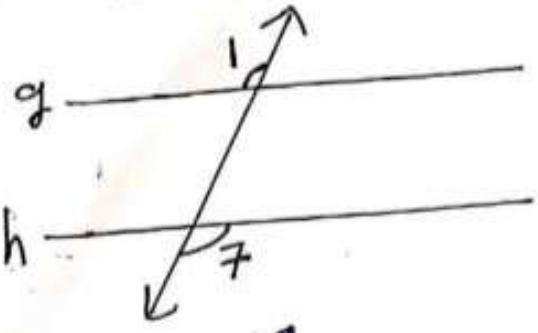
$\angle 1 \cong \angle 4$ (متقابلتان بالرأس)

$\angle 1 \cong \angle 5 \rightarrow g \parallel h$ نتيجة — عكس مسلمة الزاويتين المتناظرتين



التحقق من فهمي

في الشكل المجاور اذا كانت $\angle 1 \cong \angle 7$ فاثبت ان $g \parallel h$ باستعمال المخطط السهمي



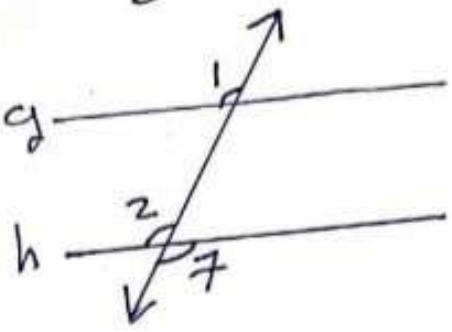
خطوة (1) :- اسمي $\angle 2$ التي تقابل بالرأس $\angle 7$

خطوة (2) :-

$\angle 1 \cong \angle 7$ (معطى)

$\angle 2 \cong \angle 7$ (تقابل بالرأس)

$\angle 1 \cong \angle 2 \rightarrow g \parallel h$ نتيجة — عكس مسلمة الزاويتين المتناظرتين

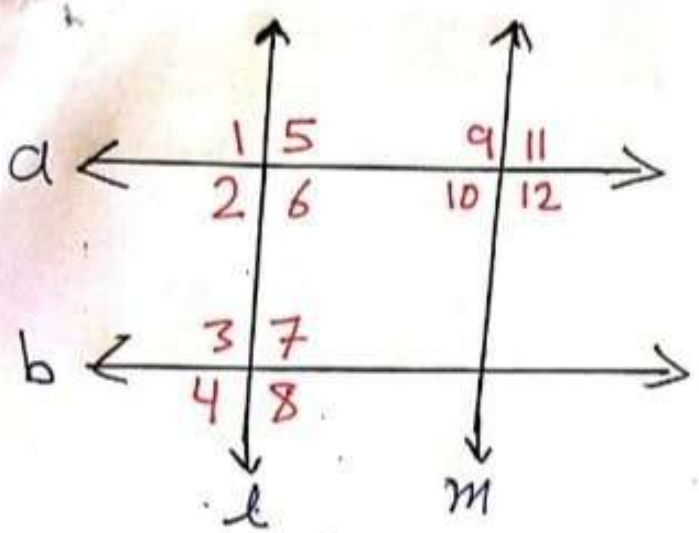


ملاحظة في الامثلة السابقة نستطيع مباشرة اثبات توازي المستقيمين وذلك بالاعتماد على ((عكس نظريات المستقيمين المتوازيين وازواج الزوايا)) حيث ان صدر تساوي لزاويتين متبادلتين أو متناظرتين او مجموع زاويتين متتاليتان $180 \Leftarrow$ مباشرة المستقيمان متوازيين

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال

هل يمكن اثبات أن أياً من مستقيمات الشكل المجاور متوازية اعتماداً على المعطيات في كل حالة:



① $\angle 1 \cong \angle 8$

الحل: $\angle 8$ و $\angle 1$ متبادلتان خارجياً بالنسبة للمستقيمين a و b وبما أن $\angle 8 \cong \angle 1$ فان $a \parallel b$ حسب عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجياً

---

② $m\angle 5 + m\angle 9 = 180°$

الحل: $\angle 9$ و $\angle 5$ متكاملتان بالنسبة للمستقيمين l و m وبما ان $m\angle 5 + m\angle 9 = 180$ فان $l \parallel m$ حسب عكس نظرية الزاويتين المتكاملتين

---

③ $\angle 7 \cong \angle 2$

التحقق من فهمي 3-3 ص

$\angle 2$ و $\angle 7$ متبادلتان داخلياً بالنسبة للمستقيمين a و b

وبما أن $\angle 7 \cong \angle 2$ فان $a \parallel b$ حسب عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً

---

④ $\angle 6 \cong \angle 12$

الحل: $\angle 12$ و $\angle 6$ متناظرتان بالنسبة للمستقيمين l و m وبما ان $\angle 12 \cong \angle 6$ فان $l \parallel m$ حسب عكس مسلمة الزاويتين المتناظرتين

---

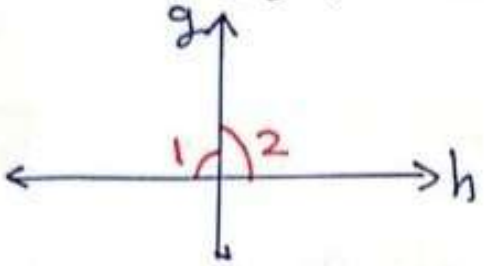
⑤ $m\angle 3 + m\angle 2 = 180$

الحل: $\angle 2$ و $\angle 3$ متكاملتان بالنسبة للمستقيمين a و b وبما أن $m\angle 3 + m\angle 2 = 180$ فان $a \parallel b$ حسب عكس نظرية الزاويتين المتكاملتين

* في ما يأتي بعض النظريات المتعلقة بالمستقيمات المتقاطعة اضافة الى نظريات خاصة تنتج حين تكون قاطع المستقيمين عموديا عليهما

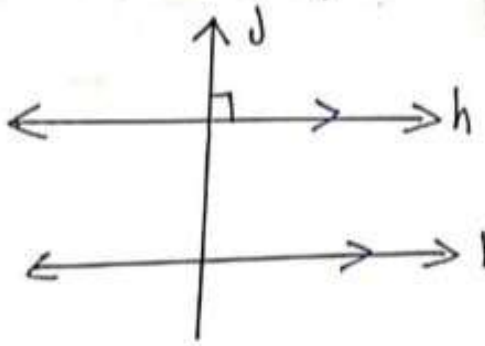
نظرية (1) * نظرية الزاويتين المتجاورتين المتطابقتين

اذا تقاطع مستقيمان لتشكيل زاويتين متجاورتين متطابقتين فان المستقيمان متعامدان



اذا كانت $\angle 1 \cong \angle 2$ فان $g \perp h$

نظرية (2) * نظرية القاطع العمودي

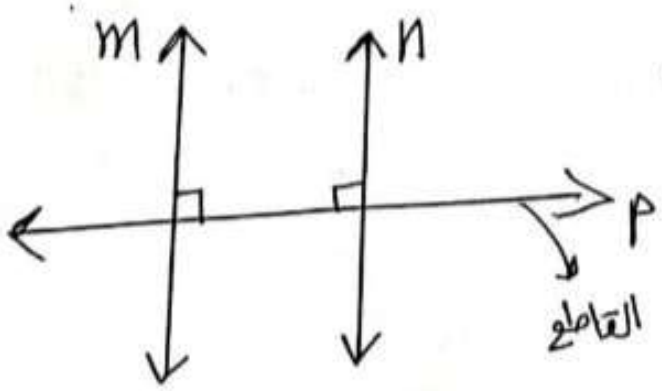


اذا كان مستقيم عموديا على احد مستقيمين متوازيين، فانه يكون عموديا على المستقيم الآخر

اذا كان $k \parallel h$ و $h \perp j$ فان $j \perp k$

نظرية (3) عكس نظرية القاطع العمودي

اذا قطع قاطع مستقيمين وكان عموديا على كل منهما فان المستقيمين متوازيان



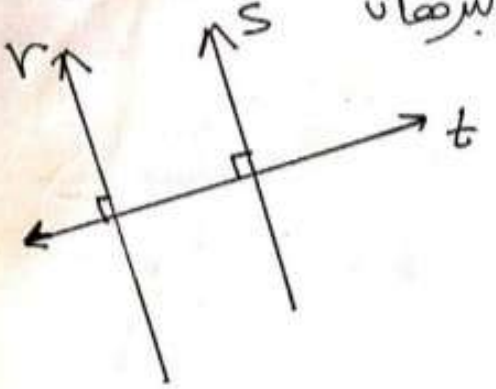
اذا كان $p \perp m$ و $p \perp n$

فان $m \parallel n$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

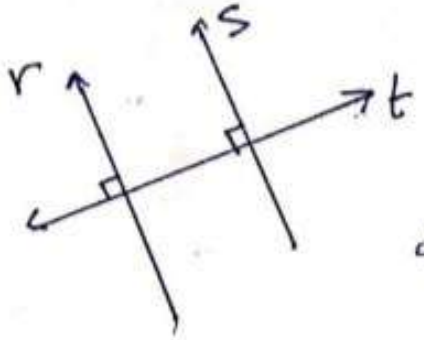
مثال استعمل المعلومات المعطاه في الشكل المجاور لاثبت ان $r \parallel s$ باستعمال البرهان ذي العمودين

اثبات النظرية (3)



الحل:-

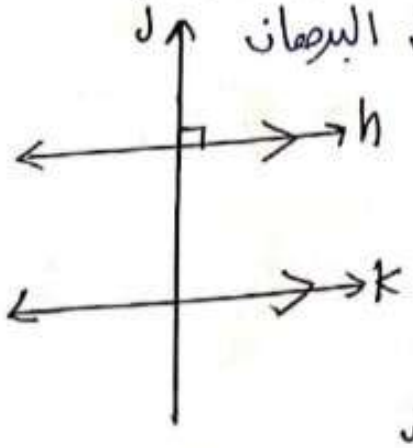
العبارات	المبررات
$\angle 1$ ، $\angle 2$ قائمتان	معطى
$\angle 2 \cong \angle 1$	الزوايا القائمة متطابقة
$r \parallel s$	عكس مسلمة الزاويتين المتناظرتين



التحقق من فهمي

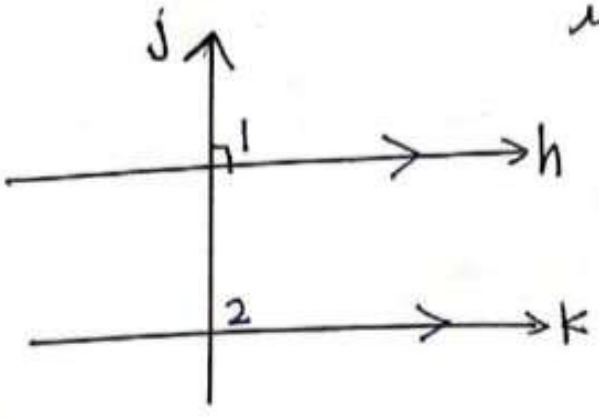
اثبات نظرية (2)

استعمل المعلومات المعطاه في الشكل المجاور لاثبت ان $j \perp k$ باستعمال البرهان ذي العمودين



العبارات	المبررات
$h \parallel k$	معطى
$\angle 1$ قائمة	معطى
$\angle 2$ قائمة	$\angle 2$ و $\angle 1$ زاويتان متناظرتان
$j \perp k$	تعريف التعامد

حل آخر



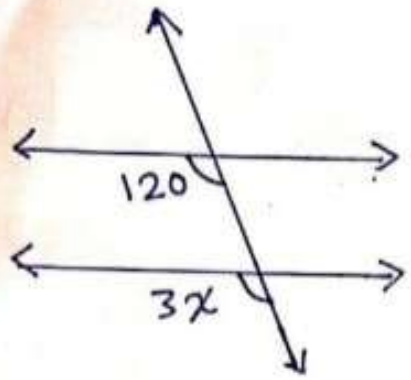
العبارات	المبررات
$\angle 1 = 90$	$j \perp h$
$\angle 1 \cong \angle 2$	$k \parallel h$
$j \perp k$	$\angle 2 = 90$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

75 ص

التدرب وحل المسائل

جد قيمة x التي تجعل $m \parallel n$ في كل مما يأتي :-

① 

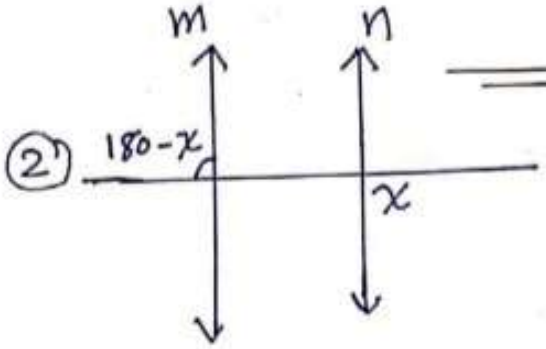
يكون المستقيمان $m \parallel n$ متوازيين اذا كانت الزاويتان المتناظرتان متطابقتين :-

نشكل معادلة $3x = 120$

حل المعادلة $\frac{3x}{3} = \frac{120}{3}$

$x = 40$

---

② 

يكون المستقيمان $m \parallel n$ متوازيين اذا كانت الزاويتان المتبادلتان خارجيا متطابقتين

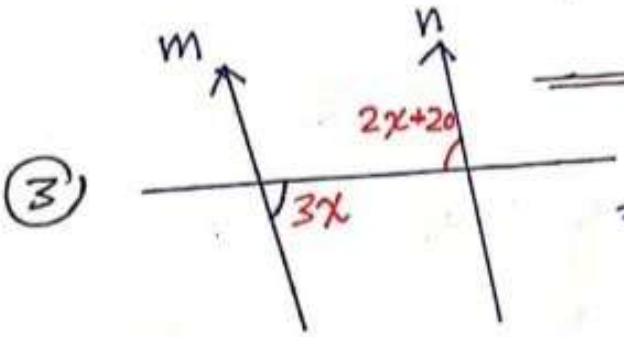
نشكل معادلة $180 - x = x$

$+x \quad +x$

$\frac{180}{2} = \frac{2x}{2}$

$x = 90°$

---

③ 

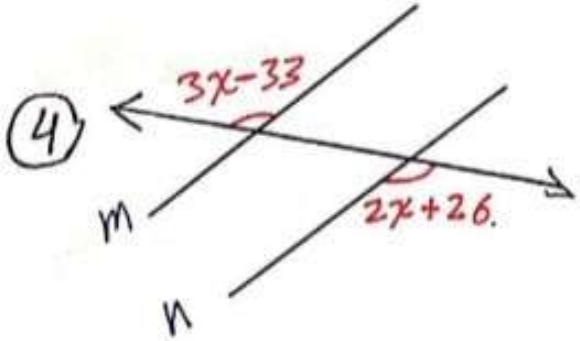
يكون المستقيمان $m \parallel n$ متوازيين اذا كانت الزاويتان المتبادلتان داخليا متطابقة

$3x = 2x + 20$

$-2x \quad -2x$

$x = 20$

---

④ 

يكون المستقيمان $m \parallel n$ متوازيين اذا كانت الزاويتان المتبادلتان خارجيا متطابقة

$3x - 33 = 2x + 26$

$-2x \quad -2x$

$x - 33 = 26$

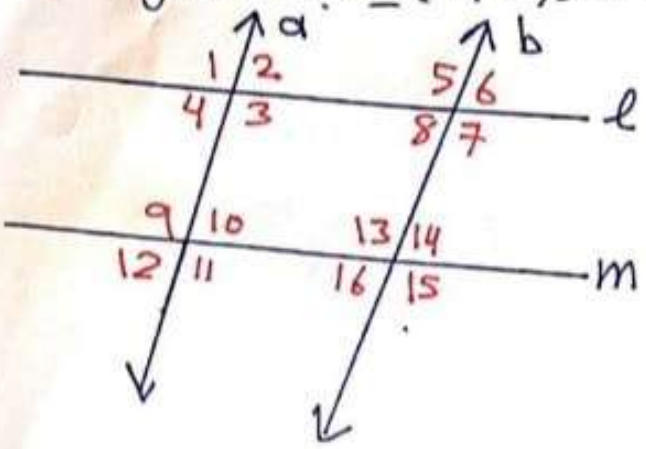
$+33 \quad +33$

$x = 59$

⑨

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

هل يمكن اثبات ان أياً من مستقيمات الشكل المجاور متوازية
اعتماداً على المعطيات في كل مما ياتي، ابرر اجابتي باستعمال
مسلمة أو نظرية



⑤ $\angle 2 \cong \angle 8$

الحل: $\angle 2$ و $\angle 8$ متبادلتان داخلياً بالنسبة للمستقيمين a و b وبما أن $\angle 2 = \angle 8$ فان $a \parallel b$

---

⑥ $\angle 9 \cong \angle 15$

الحل:- $\angle 15$ و $\angle 9$ متبادلتان خارجياً بالنسبة للمستقيمين a و b وبما ان $\angle 15 \cong \angle 9$ فان $a \parallel b$

---

⑦ $\angle 6 \cong \angle 16$

الحل:- $\angle 16$ و $\angle 6$ متبادلتان خارجياً بالنسبة للمستقيمين l و m وبما أن $\angle 16 \cong \angle 6$ فان $m \parallel l$

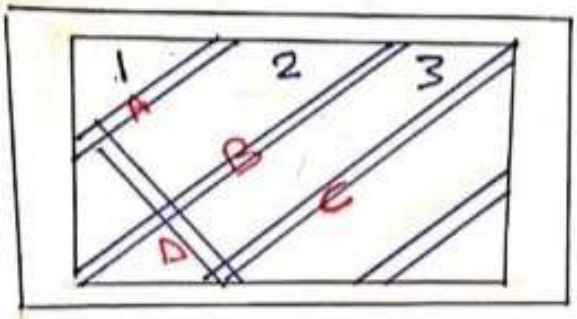
---

⑧ $m\angle 10 + m\angle 13 = 180$

الحل:- $\angle 10$ و $\angle 13$ متالفتان بالنسبة للمستقيمين a و b وبما ان $m\angle 10 + m\angle 13 = 180$ فان $a \parallel b$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

عريش خشبي :- صمم نجار عريشاً خشبياً خاصاً
بنمو النباتات المتسلقة يتكون
من قطع خشبية مرتبة بشكل قطري



(9) يحتاج النجار الى أن تكون القطع
الخشبية A و B و C متوازية
فكيف يحقق ذلك من خلال
$\angle 1$ و $\angle 2$ و $\angle 3$

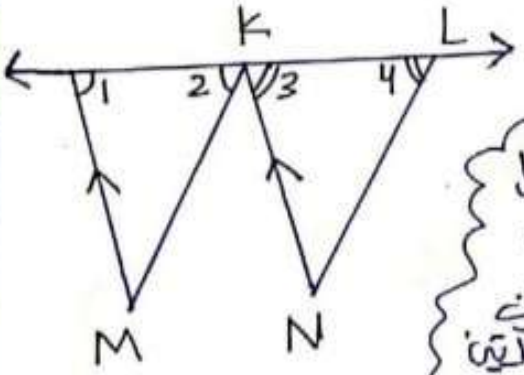
الحل :- الزوايا المتناظرة متناظرة وعليه
يصمم العريش بحيث تكون قياسات
الزوايا 1 و 2 و 3 متساوية.

(10) وصل النجار القطعة الخشبية D بحيث تكون عمودية على
القطعة الخشبية A ، فصل القطعة D عمودية على
القطعتين B و C علماً بان النجار جعل القطع الخشبية
A و B و C متوازية

الحل :-
نعم ، لان المستقيم العمودي على مستقيم يكون
عمودياً على كل المستقيمات التي توازيه
« نظرية القاطع العمودي »

---

(11) استعمل المعلومات المعطاه في الشكل الآتي ، لاثبت ان
$\overline{KM} \parallel \overline{LN}$ باستعمال البرهان ذي العمودين



الحل :-

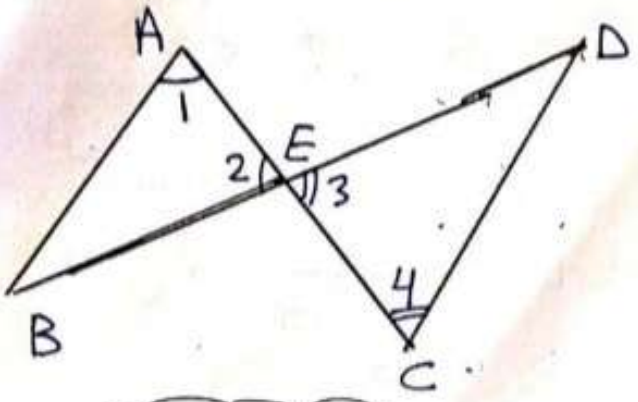
العبارات	المبررات
$JM \parallel KN$	معطى بالرسم
$\angle 3 \cong \angle 4$ ، $\angle 1 \cong \angle 2$	معطى بالرسم
$\angle 1 \cong \angle 3$	زاويتان متناظرتان
$\angle 1 \cong \angle 4$	نتيجة
$\angle 2 \cong \angle 4$	نتيجة
$\overline{KM} \parallel \overline{LN}$	$\angle 4$ و $\angle 2$ متناظرتان

فكرة الحل هو البحث عن زاويتين متناظرتين متطابقتين

(12) في الشكل الآتي، اذا كانت $\angle 1 \cong \angle 2$ ، $\angle 3 \cong \angle 4$

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ فأثبت ان

باستعمال البرهان الجبري



الحل:

$\angle 1 \cong \angle 2$ معطى

$\angle 3 \cong \angle 4$ معطى

$\angle 2 = \angle 3$ تقابل بالرأس

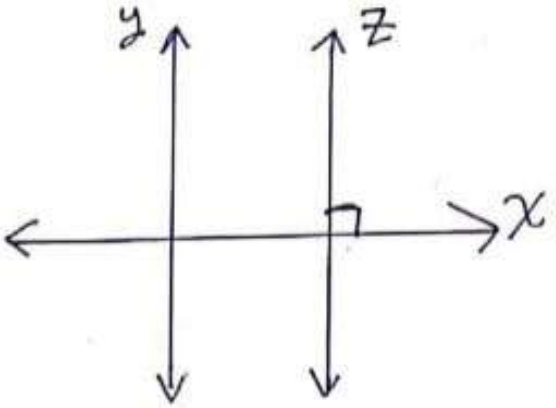
$\angle 1 \cong \angle 4$ نتيجة

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ عكس نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً

فكرة السؤال هو البحث عن زاويتين متبادلتين داخلياً متطابقتين

---

(13) الكشف الخطأ :- يقول زياد بما أن $x \perp z$ فان $y \parallel z$ في الشكل الآتي حسب نظرية عكس القاطع العمودي، اكتشف الخطأ في ما يقوله زياد واصححه.



الحل :-

الخطأ لم يعطى $x \perp y$

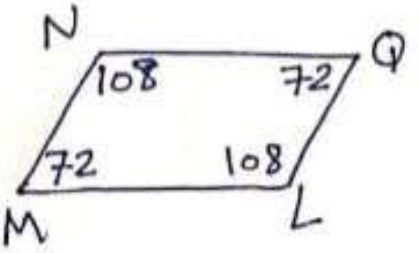
اذا اعطى هذا الشرط يكون $y \parallel z$ وحسب نظرية عكس القاطع العمودي

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تحدّ : أحدد المستقيمات المتوازية في الشكل الرباعي QLMN في كل مما يأتي مبرراً اجابتي :-

(14) $m\angle Q = 72^\circ$ ، $m\angle L = 108$ ، $m\angle M = 72$ ، $m\angle N = 108$

الحل :- رسم توضيحي فقط



نقوم بالترتيب مع أو عكس عقارب الساعة

$m\angle N + m\angle M = 180$

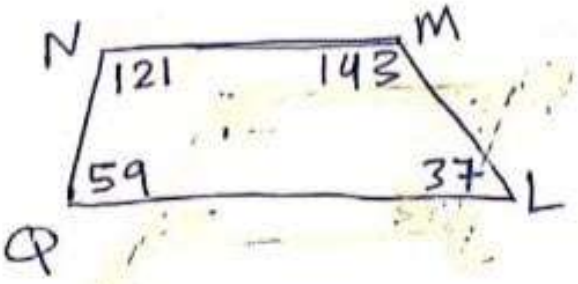
بما أن $\angle N$ ، $\angle M$ متالفتان وعليه $\overline{NQ} \parallel \overline{ML}$

وايضاً $m\angle M + m\angle L = 180$

وبما ان $\angle N$ ، $\angle m$ متالفتان وعليه $\overleftrightarrow{QL} \parallel \overleftrightarrow{NM}$

(15) $m\angle Q = 59^\circ$ ، $m\angle L = 37^\circ$ ، $m\angle M = 143$ ، $m\angle N = 121$

الحل : رسم توضيحي فقط



$m\angle Q + m\angle N = 180$

بما ان $\angle N$ ، $\angle Q$ متالفتان فعليه

$\overline{NM} \parallel \overline{QL}$

---

www.army.jo