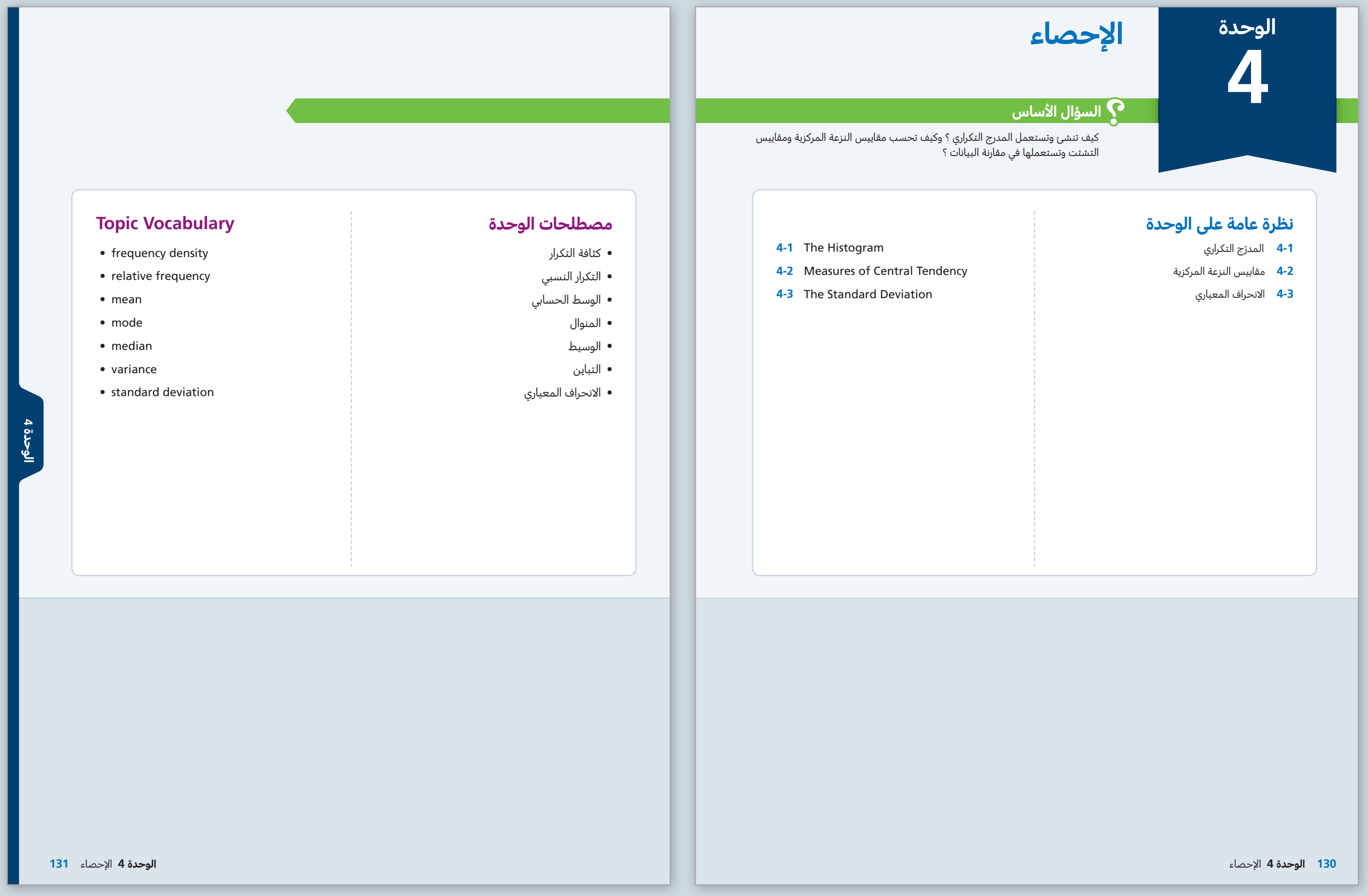
الوحدة 4
الإحصاء

مقدمة الوحدة



الوحدة
4
الإحصاء

السؤال الأساس
كيف تنشئ وتستعمل المدرج التكراري ؟ وكيف تحسب مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت وتستعملها في مقارنة البيانات ؟

نظرة عامة على الوحدة

- 4-1 المدرج التكراري
- 4-2 مقاييس النزعة المركزية
- 4-3 الانحراف المعياري

- 4-1 The Histogram
- 4-2 Measures of Central Tendency
- 4-3 The Standard Deviation

مصطلحات الوحدة

- كثافة التكرار
- التكرار النسبي
- الوسط الحسابي
- المنوال
- الوسيط
- التباين
- الانحراف المعياري

Topic Vocabulary

- frequency density
- relative frequency
- mean
- mode
- median
- variance
- standard deviation

الوحدة 4

130 الوحدة 4 الإحصاء

131 الإحصاء الوحدة 4

السؤال الأساس للوحدة

كيف ننشئ ونستعمل المدرج التكراري ؟ وكيف تحسب مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت وتستعملها في مقارنة البيانات ؟

ارجع إلى السؤال الأساس للوحدة أثناء دراسة الوحدة، واقرأ الملاحظات المتعلقة بالإجابة عن السؤال في صفحة 165 (مراجعة الوحدة) من دليل المعلم.

مشروع STEM

نظرة عامة على المشروع

في هذا المشروع، يتعلم الطلاب بعض الطرائق التي يستطيع أن يحسب بها الأشخاص معدل استهلاكهم للطاقة في منازلهم، ويقدمون اقتراحات لترشيد هذا الاستهلاك.

تقديم المشروع

ناقش التغيّرات التي تؤثر بشكل بارز على استهلاك الطاقة مثل المناخ المحلي وتعاقب فصول السنة. إذ يتزايد استهلاك الطاقة مع اختلاف درجات الحرارة وذلك حسب الحاجة إلى التدفئة أو التبريد.

قد تتنوع المناقشات تبعًا للمنطقة التي تعيش فيها.

يمكن استعمال الأسئلة الواردة أدناه لإدارة النقاش.

س: أيّ من الأجهزة الموجودة في منزلك تظن أنها الأكثر استهلاكًا للطاقة ؟ وضّح إجابتك.
[ابحث عن الإجابات المنطقية.]

س: إذا طُلب منك التخلي عن أحد الأجهزة المستهلكة للطاقة، عن أيّ جهاز تختار أن تتخلى: المكنسة الكهربائية، آلة الغسيل، آلة تجفيف الغسيل ؟ وضّح إجابتك.
[قد تتنوع الإجابات.]

س: لأي سبب قد يعمد الناس للحدّ من استهلاكهم للطاقة ؟
[لأسباب مالية أو تتعلق بالموارد العالمية.]

اطلب من الطلاب الاطلاع على المهمة التي سيطلب منهم إنجازها.

تنفيذ المشروع

يمكن أن يعمل الطلاب في ثنائيات أو ضمن مجموعات حسب رغبتهم.

إنهاء المشروع

قد ترغب بتحديد يوم يتشارك فيه الطلاب استبياناتهم المنجزة وتمثيلاتهم البيانية الموضحة وتحليلاتهم. شجّعهم على توضيح الخطوات التي اتّبعوها في تنفيذ المشروع إضافة إلى النتائج التي توصلوا إليها.

يمكنك الطلب من الطلاب تنفيذ المشروع في أي وقت تشاء أثناء دراسة الوحدة 4.

الدرس 4-1

المدرّج التكراري

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على:

✔ رسم المدرج التكراري لفئات غير متساوية من بيانات مجمعة واستعماله لاستنباط استدلالات واستخلاص نتائج.

✔ رسم المدرج التكراري النسبي لفئات متساوية واستعماله لاستخلاص نتائج.

الفهم الأساس

ينشىء الطلاب المدرج التكراري لفئات غير متساوية، ويحسبون كثافة التكرار لهذا النوع من المدرجات التكرارية. كما ينشئون جدول التكرار النسبي ويرسمون المدرج التكراري النسبي.

ترابط

في الصفوف السابقة، تمكّن الطلاب من:

- إنشاء المدرج التكراري لفئات متساوية.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من:

- تكوين جدول الكثافة التكرارية باستعمال الصيغة: كثافة التكرار $= \frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول هذه الفئة}}$
- إنشاء المدرج التكراري لفئات غير متساوية مستعملًا جدول الكثافة التكرارية.
- تفسير المدرج التكراري لفئات غير متساوية لإيجاد تكرار الفئات باستعمال الصيغة: كثافة التكرار $= \frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول هذه الفئة}}$
- تفسير المدرج التكراري لفئات غير متساوية لاستنباط استدلالات واستخلاص نتائج.
- إنشاء جدول التكرار النسبي باستعمال الصيغة: التكرار النسبي $= \frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{مجموع التكرارات}}$
- رسم المدرج التكراري النسبي.
- تفسير المدرج التكراري النسبي لفئات متساوية واستعماله لاستخلاص نتائج.

لاحقًا في الصف العاشر، سيتمكّن الطلاب من:

- رسم المنحنى التكراري التراكمي واستعماله لاستخلاص نتائج.

دقة

يؤكد هذا الدرس على الدمج بين الاستيعاب المفاهيمي والتطبيق.

- يدرك الطلاب أنه لا يمكن استعمال مفهوم التكرار لمقارنة فئات بأطوال غير متساوية.
- يدرك الطلاب أنه يجب عليهم حساب كثافة التكرار لمقارنة الفئات عندما تكون أطوالها غير متساوية.
- يدرك الطلاب أن المدرج التكراري لا يتيح لهم تحديد النسبة التي تمثلها كل فئة.
- يدرك الطلاب أن المدرج التكراري النسبي يبيّن نسبة تكرار كل فئة مقارنة بمجموع التكرارات.

بناء المصطلحات

العربية | الإنجليزية

مراجعة المصطلحات

- **مدرّج تكراري** | *histogram*
- **فئة** | *interval*

المصطلحات الجديدة

- **كثافة التكرار** | *frequency density*
- **التكرار النسبي** | *relative frequency*

نشاط المصطلحات

- تعلم الطلاب في الصفوف السابقة كيفية إنشاء مدرج تكراري لفئات متساوية، حيث يمثل y تكرار الفئة الذي يقاس بحساب ارتفاع عمود كل فئة. لكن عندما تكون الفئات غير متساوية، لا يمكن للمحور y أن يمثل تكرار الفئة بسبب اختلاف أطوال الفئات.
  قدم للطلاب مصطلح "كثافة التكرار" الذي يبيّن تكرار الفئة من خلال حساب مساحة عمود كل فئة.
  يساعد المدرج التكراري في المقارنة بين الفئات من خلال قراءة تكرار كل فئة، لكنه لا يبيّن نسبة تكرار كل فئة إلى مجموع تكرارات الفئات.
  قدم للطلاب مصطلح "التكرار النسبي" الذي يبيّن تكرار كل فئة نسبةً إلى مجموع تكرارات الفئات.
- اطلب من الطلاب ملء الفراغ في كل جملة بالمصطلح المناسب من بين المصطلحات التالية: التكرار، كثافة التكرار، التكرار النسبي.

a. عندما يحتوي الجدول التكراري على فئات غير متساوية، نستعمل ________ لإنشاء المدرج التكراري. [**كثافة التكرار**]

b. عندما نريد تبيان نسبة تكرار كل فئة من البيانات إلى مجموع تكرارات فئات البيانات، نجد ________ [**التكرار النسبي**]

c. عندما يحتوي الجدول التكراري على فئات متساوية، نستعمل ________ لإنشاء المدرج التكراري. [**التكرار**]

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يُركّز الطلاب على المعيارين:

9.8.1 يفهم المصطلحات التالية: كثافة التكرار والتكرار النسبي، والتوزيع التكراري النسبي.

9.8.2 يرسم مدرجات تكرارية ذات فئات غير متساوية لبيانات مجمعة ويستعملها لاستنباط استدلالات واستخلاص نتائج.

معايير ممارسات الرياضيات

برّر منطقيًا بطريقة تجريدية وكمية

يستعمل الطلاب مهارة الاستدلال لاستنتاج معلومات عند قراءة وتفسير مدرج تكراري لفئات غير متساوية. يستعمل الطلاب كثافة تكرار كل فئة وطولها لحساب تكرار هذه الفئة. كما يستعملون كثافة تكرارات عدد من الفئات المتلاصقة وأطوالها لحساب تكراراتها، أو يستعملون كثافة تكرارات جميع الفئات وأطوالها لحساب مجموع تكرارات الفئات كلها. جميع هذه التكرارات التي يحسبها الطلاب تُمثل معلومات غير صريحة في المدرج التكراري. يستعمل الطلاب مهارة الاستدلال كذلك عند قراءة وتفسير المدرج التكراري النسبي، ويدركون أن التكرار النسبي لكل فئة يُمثل نسبة تكرار هذه الفئة إلى مجموع التكرارات، ويستنتجون من ذلك أن مجموع التكرارات النسبية لجميع الفئات يجب أن يساوي 1

استكشف وبرّر منطقيًّا

محور تركيز التدريس يستعمل الطلاب البيانات الممثلة في المدرج التكراري لتحديد الأسئلة التي يمكن الإجابة عنها والجهة المعنية بالإجابة عن هذه الأسئلة. كما يستعمل الطلاب معرفتهم السابقة عن النسبة والنسبة المئوية لإيجاد عدد الطلاب الذين تتراوح أسعار تذاكرهم بين QR 40 و QR 55.

يهيئ هذا الاستكشاف الفرصة للطلاب لتمثيل البيانات باستعمال مدرجات تكرارية لفئات غير متساوية الطول على المحور x وذلك باستعمال كثافة التكرار أو التكرار النسبي على المحور y.

قبل البدء بالحلّ — طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: ما المعطيات التي يوفرها التمثيل البياني ؟

[فئات متساوية الطول على المحور x وطول كل منها 5 حيث تبدأ بالسعر QR 25 وتنتهي بالسعر QR 70، وتمثل أسعار تذاكر الدخول إلى صالات المسرح. كما يبيّن المحور y تكرار كل فئة أي عدد الطلاب الذين اشتروا التذاكر. يبين ارتفاع كل عمود من الأعمدة عدد الطلاب الذين اشتروا التذاكر من كل فئة من الأسعار.]

أثناء الحلّ — مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: ما المعلومات التي يمكنك استنتاجها من شكل المدرج التكراري ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : عدد الطلاب الذين اشتروا التذاكر صغير عند الطرفين وكبير في الوسط باستثناء عدده عند الفئة 60-55]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: هل يمكن استعمال فئات أخرى لعرض هذه البيانات ؟ كيف سيبدو شكل المدرج التكراري الجديد ؟ ارسم المدرج التكراري باستعمال الفئات الجديدة.

[نعم، يمكن استعمال فئات متساوية طول كل منها QR 10.
ستكون أنماط ارتفاعات الأعمدة متشابهة، لذا، يبقى شكل المدرج التكراري هو نفسه.
راجع التمثيلات البيانية للطلاب.]

بعد إنجاز الحلّ — طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: ما النتيجة التي يمكن الحصول عليها من المدرج التكراري ؟

[العدد الأكبر من الطلاب اشتروا التذاكر التي تتراوح أسعارها بين QR 40 و QR 55 علمًا أن 18 طالبًا اشتروا تذاكر تتراوح أسعارها بين QR 60 و QR 65.]

كتاب الطالب، صفحة 133

4-1
المدرّج التكراري
The Histogram

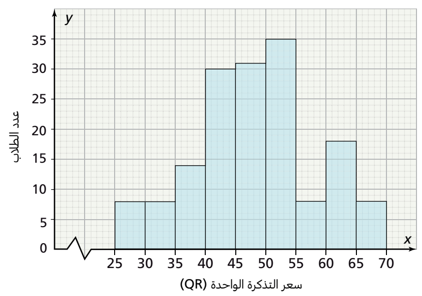
أستطيع...
- رسم المدرّج التكراري لفئات غير متساوية من بيانات مجمعة واستعماله لاستنباط استدلالات واستخلاص نتائج.
- رسم المدرّج التكراري النسبي لفئات متساوية واستعماله.

معايير الدرس
9.8.1 و 9.8.2

المصطلحات
- كثافة التكرار frequency density
- التكرار النسبي relative frequency

استكشف وبرّر منطقيًّا

عند سؤال الطلاب في بعض المدارس الثانوية عن سعر تذاكر الدخول إلى صالات المسرح، كانت النتائج كما يلخصها المدرج التكراري أدناه:



A. ما الأسئلة التي يمكن الإجابة عنها باستعمال البيانات الموجودة في المدرّج التكراري ؟

B. من الذي قد يكون مهتمًا بالإجابة عن هذه الأسئلة ؟ وضّح إجابتك.

C. **استعمل البنية** أوجد النسبة المئوية لعدد الطلاب الذين تتراوح أسعار تذاكرهم بين QR 40 و QR 55.

نموذج من أعمال الطلاب

A. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : ما وسيط أسعار تذاكر الدخول إلى صالات المسرح ؟ ما مدى أسعار تذاكر الدخول إلى صالات المسرح ؟ ما منوال أسعار الدخول إلى صالات المسرح ؟ ما متوسط أسعار الدخول إلى صالات المسرح ؟

B. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : الهيئات الرقابية على الأسعار في مؤسسات الدولة ومديرو المدارس والطلاب وأولياء أمورهم. جميع هؤلاء قد يكونون مهتمين بالإجابة عن هذه الأسئلة.

C. العدد الإجمالي للطلاب:

$8 + 8 + 14 + 30 + 31 + 35 + 8 + 18 + 8 = 160$

عدد الطلاب الذين تتراوح أسعار تذاكرهم بين QR 40 و QR 55:

$30 + 31 + 35 = 96$

النسبة المئوية: $\frac{96}{160} \times 100 = 60\%$

إذن، 60% من الطلاب اشتروا تذاكر الدخول التي تتراوح أسعارها بين QR 40 و QR 55.

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلم مركّز

تعلم الطلاب سابقًا التمثيل البياني بالأعمدة والمدرج التكراري لفئات متساوية الطول،
وسيتعلمون الآن كيفية رسم مدرج تكراري لفئات غير متساوية الطول باستعمال كثافة التكرار،
وكيفية رسم مدرج تكراري لفئات متساوية الطول باستعمال التكرار النسبي،
واستنباط استدلالات واستخلاص نتائج من هذه الرسوم، وتفسيرها.


السؤال الأساس **كيف تنشئ مدرّجًا تكراريًّا وكيف تستعمله لاستنباط استدلالات واستخلاص نتائج وتفسيرها ؟**

المفهوم **كثافة التكرار والمدرج التكراري**

- **كثافة التكرار** لفئة ما هي ناتج قسمة تكرار الفئة على طولها.

$$\text{كثافة التكرار} = \frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول هذه الفئة}}$$

- المدرّج التكراري الذي يمثّل جدولًا تكراريًّا ذا فئات مختلفة الطول هو تمثيل بياني بأعمدة متلاصقة، قاعدة كل عمود فيه تساوي إحدى الفئات وارتفاعه يساوي كثافة التكرار لهذه الفئة.

الدرس 1-4 المدرّج التكراري 133

مثال 1 المدرّج التكراري لفئات غير متساوية

طرح أسئلة هادفة

س: ماذا تلاحظ في جدول الكثافة التكرارية ؟
[أطوال الفئات غير متساوية.]

س: كيف نوجد أطوال هذه الفئات ؟
[نطرح الحد الأدنى للفئة من الحد الأعلى للفئة.]

س: ماذا تمثل الأعداد على المحور y ؟
[كثافة التكرار]

الاستيعاب المفاهيمي

مثال 1 المدرّج التكراري لفئات غير متساوية

يمثّل الجدول أدناه كتل طلاب الصف العاشر في إحدى المدارس بالكيلوجرام.

الفئات	56 - 60	60 - 62	62 - 68	68 - 76	76 - 78
التكرار f	4	10	18	8	4

إرشاد
الفئة 60 - 56 تعني $56 \le x < 60$
لأنها بيانات متصلة.

A. كوّن جدول الكثافة التكرارية.

يتم تكوين جدول الكثافة التكرارية بإضافة عمودَي طول الفئة وكثافة التكرار.

الفئات	التكرار f	طول الفئة	كثافة التكرار = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول هذه الفئة}}$
56 - 60	4	4	$\frac{4}{4} = 1$
60 - 62	10	2	$\frac{10}{2} = 5$
62 - 68	18	6	$\frac{18}{6} = 3$
68 - 76	8	8	$\frac{8}{8} = 1$
76 - 78	4	2	$\frac{4}{2} = 2$

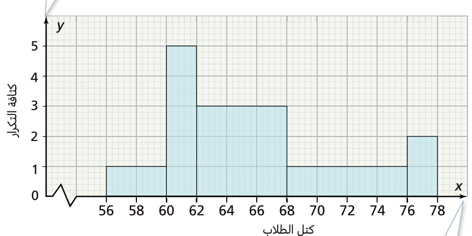
تذكر
طول الفئة
= الحد الأعلى – الحد الأدنى
فمثلًا طول الفئة (60 - 56) يساوي
$60 - 56 = 4$

B. أنشئ المدرّج التكراري.

ارسم محورين متعامدين، بحيث يمثّل المحور الأفقي الفئات والمحور الرأسي كثافة التكرار، واختر تدريجًا مناسبًا على المحور الأفقي وتدريجًا مناسبًا على المحور الرأسي.

ارسم أعمدة المدرّج التكراري على أن تمثّل قاعدة كل عمود إحدى الفئات ويمثّل ارتفاعه كثافة التكرار لهذه الفئة.

يتم التدريج على المحور y بأعداد صحيحة متتالية تمثّل قيم كثافة التكرار في الجدول، تبدأ بالعدد 1 وتنتهي بالعدد 5 وذلك لأن قيم كثافة التكرار محصورة بين 0 و 6



يتم التدريج على المحور x ابتداءً من الحد الأدنى للفئة الأولى (56) مع أعداد زوجية متتالية.

يتبع في الصفحة التالية

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 1 قد يجد الطلاب صعوبة في كتابة أطوال الفئات غير المتساوية على المحور x. لمساعدتهم في تخطي هذه الصعوبة اطرح عليهم الأسئلة التالية لنأخذ الفئات في المثال 1 و نجيب عن الأسئلة التالية :

س: ما الحد الأعلى للفئة 60 - 56 ؟ ما الحد الأدنى ؟
[60 ؛ 56]

س: ما الفرق بين الحدين بالنسبة للفئة 60 - 56 ؟
[$60 - 56 = 4$]

س: ماذا يمثل الفرق بين الحدين ؟
[طول الفئة]

س: أنشئ جدولًا للحد الأعلى والحد الأدنى وطول الفئة (الفرق بين الحدين) لجميع الفئات.

الفئة	الحد الأدنى	الحد الأعلى	طول الفئة (الفرق بين الحدين)
56 - 60	56	60	4
60 - 62	60	62	2
62 - 68	62	68	6
68 - 76	68	76	8
76 - 78	76	78	2

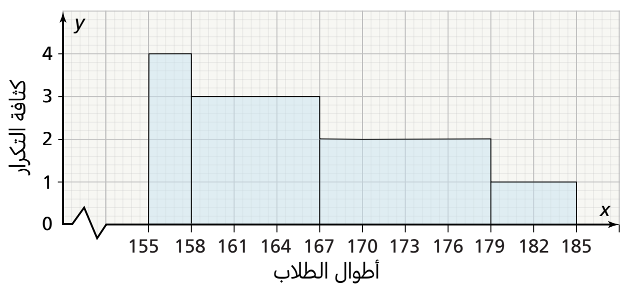
تابع المثال 1

حاول أن تحلّ! الإجابات

1. **a.** جدول الكثافة التكرارية:

كثافة التكرار	طول الفئة	التكرار f	الفئات
$\frac{12}{3} = 4$	3	12	155 - 158
$\frac{27}{9} = 3$	9	27	158 - 167
$\frac{24}{12} = 2$	12	24	167 - 179
$\frac{6}{6} = 1$	6	6	179 - 185

b. المدرج التكراري:



مثال 2 قراءة البيانات واستخلاص النتائج من المدرج التكراري

طرح أسئلة هادفة

س: ما صيغة مساحة المستطيل ؟
[مساحة المستطيل = الطول × العرض]

س: ما شكل كل عمود في المدرج التكراري ؟
[مستطيل، ويمثل ضلعه الأفقي طول الفئة، ويمثل ضلعه الرأسي كثافة تكرار الفئة.]

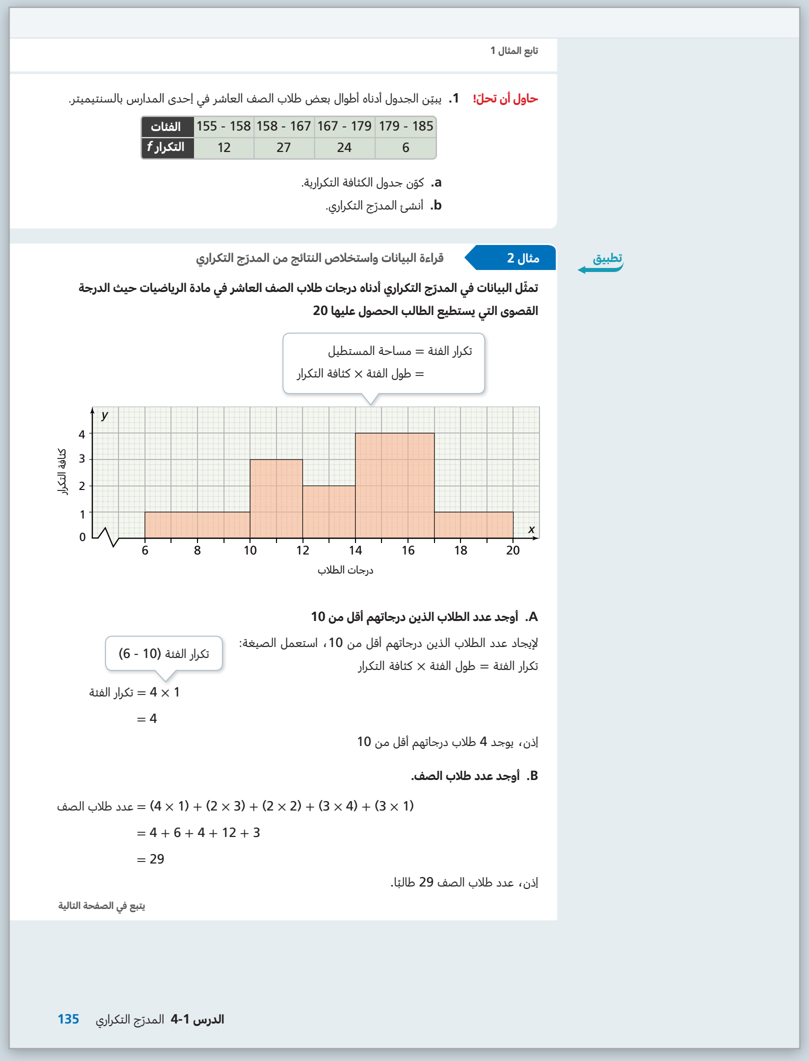
س: ما تكرار كل فئة ؟

تكرار الفئة	طول الفئة	الفئة
$4 \times 1 = 4$	4	6 - 10
$2 \times 3 = 6$	2	10 - 12
$2 \times 2 = 4$	2	12 - 14
$3 \times 4 = 12$	3	14 - 17
$3 \times 1 = 3$	3	17 - 20

س: ما المضاعف المشترك الأصغر لأطوال الفئات ؟
[العدد 1، لأن أطوال الفئات هي 2 و 3 و 4]

س: ما الهدف من استعمال المدرج التكراري ؟
[قراءة البيانات واستخلاص نتائج كعدد الناجحين وعدد الراسبين، وعدد الطلاب في أعلى سلم ترتيب الدرجات، وعدد الطلاب في أسفل سلم ترتيب الدرجات.]

تطبيق


تابع المثال 1

حاول أن تحلّ! **1.** يبيّن الجدول أدناه أطوال بعض طلاب الصف العاشر في إحدى المدارس بالسنتيميتر.

الفئات	155 - 158	158 - 167	167 - 179	179 - 185
التكرار f	12	27	24	6

a. كوّن جدول الكثافة التكرارية.
b. أنشئ المدرّج التكراري.

مثال 2 قراءة البيانات واستخلاص النتائج من المدرّج التكراري

تمثّل البيانات في المدرّج التكراري أدناه درجات طلاب الصف العاشر في مادة الرياضيات حيث الدرجة القصوى التي يستطيع الطالب الحصول عليها 20

A. **أوجد عدد الطلاب الذين درجاتهم أقل من 10**

لإيجاد عدد الطلاب الذين درجاتهم أقل من 10، استعمل الصيغة:
تكرار الفئة = طول الفئة × كثافة التكرار

تكرار الفئة (10 - 6)

تكرار الفئة $= 4 \times 1$
$= 4$

إذن، يوجد 4 طلاب درجاتهم أقل من 10

B. **أوجد عدد طلاب الصف.**

عدد طلاب الصف $= (4 \times 1) + (2 \times 3) + (2 \times 2) + (3 \times 4) + (3 \times 1)$
$= 4 + 6 + 4 + 12 + 3$
$= 29$

إذن، عدد طلاب الصف 29 طالبًا.

يتبع في الصفحة التالية

تابع المثال 2

حاول أن تحلّ! الإجابات

2. **a.** عدد الأعضاء الذين تقل أعمارهم عن 12 سنة : $2 \times 27 = 54$

b. عدد أعضاء النادي :

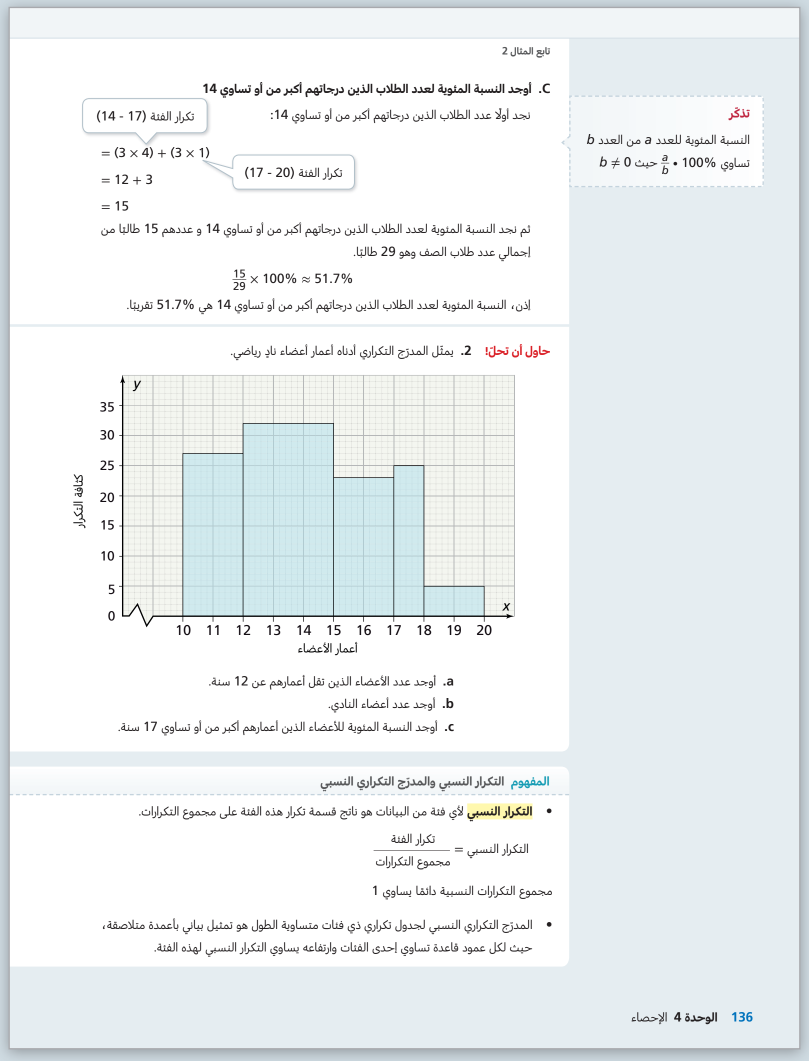
$(2 \times 27) + (3 \times 32) + (2 \times 23) + (1 \times 25) + (2 \times 5) = 231$

c. عدد أعضاء النادي الذين أعمارهم أكبر من أو تساوي 17 سنة :

$(1 \times 25) + (2 \times 5) = 35$

النسبة المئوية لهؤلاء الأعضاء :

$\frac{35}{231} \times 100\% = 15.\overline{15}\%$



تابع المثال 2

C. **أوجد النسبة المئوية لعدد الطلاب الذين درجاتهم أكبر من أو تساوي 14**

نجد أولًا عدد الطلاب الذين درجاتهم أكبر من أو تساوي 14:

تكرار الفئة (14 - 17)

$= (3 \times 4) + (3 \times 1)$

تكرار الفئة (17 - 20)

$= 12 + 3$

$= 15$

ثم نجد النسبة المئوية لعدد الطلاب الذين درجاتهم أكبر من أو تساوي 14 و عددهم 15 طالبًا من إجمالي عدد طلاب الصف وهو 29 طالبًا.

$\frac{15}{29} \times 100\% \approx 51.7\%$

إذن، النسبة المئوية لعدد الطلاب الذين درجاتهم أكبر من أو تساوي 14 هي 51.7% تقريبًا.

تذكّر

النسبة المئوية للعدد a من العدد b تساوي $100\% \cdot \frac{a}{b}$ حيث $b \neq 0$

حاول أن تحلّ! **2.** يمثّل المدرّج التكراري أدناه أعمار أعضاء نادٍ رياضي.

a. أوجد عدد الأعضاء الذين تقل أعمارهم عن 12 سنة.

b. أوجد عدد أعضاء النادي.

c. أوجد النسبة المئوية للأعضاء الذين أعمارهم أكبر من أو تساوي 17 سنة.

المفهوم **التكرار النسبي والمدرّج التكراري النسبي**

- **التكرار النسبي** لأي فئة من البيانات هو ناتج قسمة تكرار هذه الفئة على مجموع التكرارات.

  التكرار النسبي = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{مجموع التكرارات}}$

  مجموع التكرارات النسبية دائمًا يساوي 1

- المدرّج التكراري النسبي لجدول تكراري ذي فئات متساوية الطول هو تمثيل بياني بأعمدة متلاصقة، حيث لكل عمود قاعدة تساوي إحدى الفئات وارتفاعه يساوي التكرار النسبي لهذه الفئة.

136 **الوحدة 4** الإحصاء

تعزيز المهارات اللغوية استعمل مع **المثالين 2 و 4**

القراءة **مستوى 1** اطلب من الطلاب التمعن في أسئلة وحلول الأجزاء A, B, C في المثالين 2 و 4 وسؤال الجزء D في المثال 4

في المثال (2)

س: ماذا يمثل كل عمود في المدرج التكراري ؟

[مستطيل، حيث إن قاعدته إحدى الفئات من درجات طلاب الصف العاشر في مادة الرياضيات وارتفاعه كثافة التكرار المناظر لهذه الفئة.]

س: هل جميع الفئات متساوية الطول ؟ وضّح اجابتك.

[كلّا، الأطوال على الترتيب هي 4 , 2 , 2 , 3 , 3]

في المثال (4)

س: ماذا يمثل كل عمود في المدرج التكراري ؟

[مستطيل، حيث إن قاعدته إحدى الفئات من أوقات زيارة 200 شخص إلى محمية "خور العديد" وارتفاعه التكرار النسبي المناظر لهذه الفئة.]

س: هل جميع الفئات متساوية الطول ؟ وضّح اجابتك.

[نعم، طول كل فئة يساوي ساعة واحدة.]

الكتابة **مستوى 2** **في المثال (2)** اطلب من الطلاب قراءة أسئلة الأجزاء A, B, C وكتابة تعريف كل مما يلي:

- كثافة التكرار
- مساحة المستطيل
- تكرار الفئة
- النسبة المئوية

ثم اطلب من الطلاب أن يرسم كل منهم في دفتره مدرجًا تكراريًا يتضمن بيانات تمثل موقفًا من واقع الحياة، مبينًا الفئات على المحور x وماذا تمثل، وكثافة التكرار على المحور y، ثم كتابة أسئلة مشابهة لأسئلة الأجزاء A, B, C والإجابة عنها.

في المثال (4) اطلب من الطلاب قراءة الأجزاء A, B, C, D وكتابة تعريف كل مما يلي:

- التكرار النسبي
- المدرج التكراري النسبي

ثم اطلب من كل طالب أن يرسم في دفتره مدرجًا تكراريًا يتضمن بيانات تمثل موقفًا من واقع الحياة، مبينًا الفئات على المحور x وماذا تمثل، ومبينًا التكرار النسبي على المحور y، ثم كتابة أسئلة مشابهة لأسئلة A, B, C, D والإجابة عنها.

التحدث **مستوى 3** قسّم الطلاب إلى مجموعات صغيرة، واطلب منهم مناقشة كيفية قراءة البيانات، واستخلاص نتائج من المدرج التكراري والمدرج التكراري النسبي.

س: ما القاعدة التي تربط بين تكرار الفئة وطولها في المدرج التكراري ؟

[تكرار الفئة = طول الفئة × كثافة التكرار]

س: ما القاعدة التي تربط بين تكرار الفئة والتكرار النسبي في المدرج التكراري النسبي ؟

[تكرار الفئة = التكرار النسبي × مجموع التكرارات]

س: هل هناك فرق بين القاعدتين ؟ وضّح اجابتك.

[نعم، يساعد إيجاد تكرار كل فئة على إيجاد مجموع التكرارات، وذلك من خلال قراءة المدرج التكراري. بينما نستعمل في قراءة المدرج التكراري النسبي مجموع التكرارات لإيجاد تكرار كل فئة.]

مثال 3 المدرج التكراري النسبي

طرح أسئلة هادفة

س: ماذا تساوي نسبة عدد إلى عدد آخر ؟
[تساوي كسرًا عشريًا يساوي قسمة ذلك العدد على العدد الآخر.]

س: ما هو التكرار النسبي ؟
[هو كسر عشري يساوي ناتج قسمة تكرار إحدى الفئات على مجموع التكرارات.]

س: ما أهمية معرفة مجموع التكرارات في المدرج التكراري النسبي ؟
[معرفة مجموع التكرارات تفيد في إيجاد نسبة تكرار كل فئة من الفئات المتساوية الطول.]

مثال 3 المدرّج التكراري النسبي

تمثّل البيانات في الجدول أدناه أطوال 50 طالبًا إلى أقرب سنتمتر.

الفئات	158 - 162	162 - 166	166 - 170	170 - 174	174 - 178
التكرار f	8	13	15	9	5

A. كوّن جدول التكرار النسبي.

الفئات	التكرار f	التكرار النسبي = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{مجموع التكرارات}}$
158 - 162	8	0.16
162 - 166	13	0.26
166 - 170	15	0.30
170 - 174	9	0.18
174 - 178	5	0.10
المجموع	50	1

$\frac{8}{50} = 0.16$

$\frac{13}{50} = 0.26$

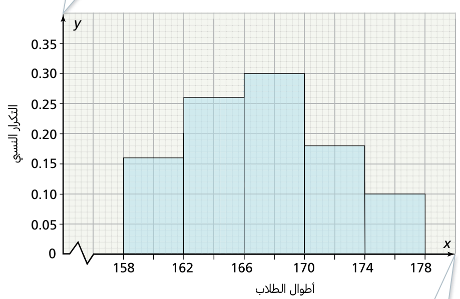
مجموع التكرارات النسبية دائمًا يساوي 1

مساعدة رياضية
يُستعمل التكرار النسبي في الجدول ذي الفئات المتساوية الطول.

B. مثّل البيانات باستعمال المدرّج التكراري النسبي.

ارسم محورين متعامدين بحيث يمثّل المحور الأفقي الفئات والمحور الرأسي التكرار النسبي، واختر تدريجًا مناسبًا على المحور الأفقي وتدريجًا مناسبًا على المحور الرأسي.
ارسم أعمدة المدرّج التكراري النسبي على أن تمثّل قاعدة كل عمود إحدى الفئات ويمثّل ارتفاعه التكرار النسبي لهذه الفئة.

لإيجاد التدريج على المحور y نختار كسورًا عشرية بما يناسب التكرارات النسبية في الجدول التكراري النسبي.



يتم التدريج على المحور x بحسب الأطوال المتساوية للفئات ابتداءً من الحد الأدنى للفئة الأولى (158) وينتهي عند الحد الأعلى للفئة الأخيرة (178)

يتبع في الصفحة التالية

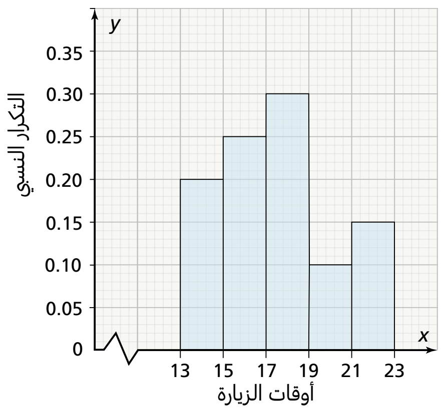
تابع المثال 3

حاول أن تحلّ! الإجابات

.3 **.a** جدول التكرار النسبي :

الفئات	التكرار f	التكرار النسبي $= \frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{مجموع التكرارات}}$
13 - 15	40	$\frac{40}{200} = 0.2$
15 - 17	50	$\frac{50}{200} = 0.25$
17 - 19	60	$\frac{60}{200} = 0.3$
19 - 21	20	$\frac{20}{200} = 0.1$
21 - 23	30	$\frac{30}{200} = 0.15$
المجموع	200	1

.b المدرج التكراري النسبي :



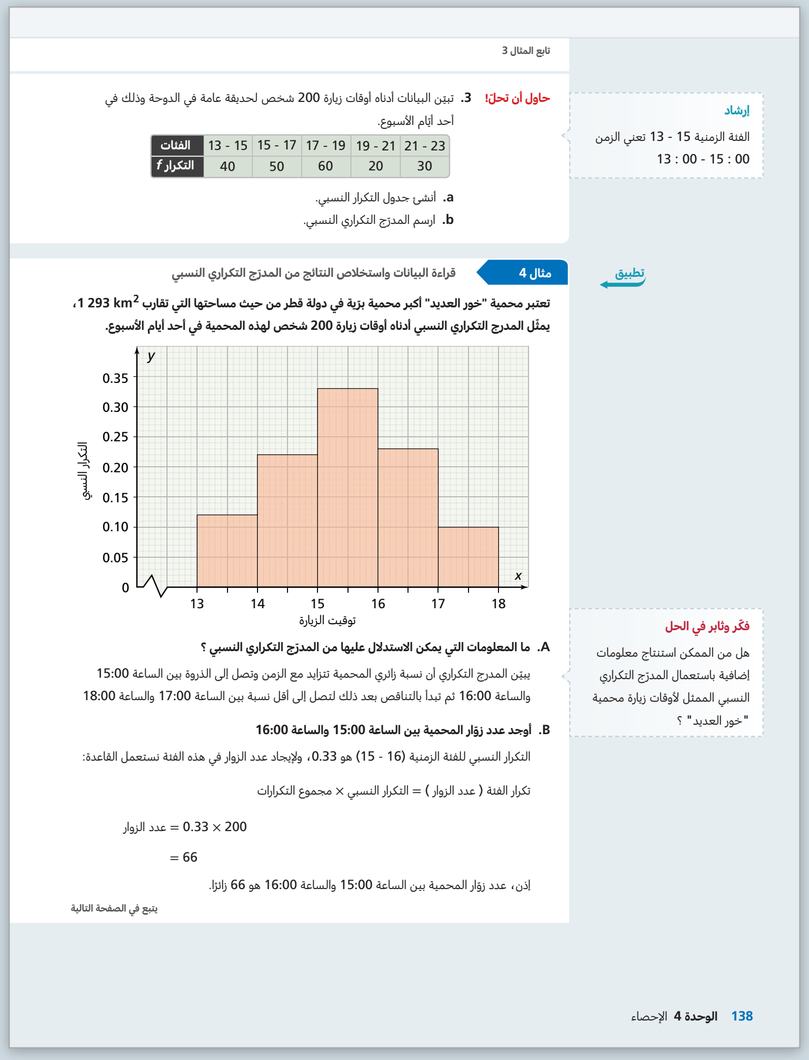
مثال 4 قراءة البيانات واستخلاص النتائج من المدرّج التكراري النسبي

طرح أسئلة هادفة

س: ماذا تمثل الكسور العشرية على المحور y ؟
[نسب تكرار كل فئة.]

س: كيف توجد تكرار كل فئة في المدرج التكراري النسبي ؟
[تكرار الفئة = التكرار النسبي × مجموع التكرارات.]

س: ما فائدة استعمال المدرج التكراري النسبي ؟
[يساعد المدرج التكراري النسبي على تكوين فكرة واضحة عن البيانات لإعطاء توصيات ونصائح أو لاتخاذ قرارات مناسبة.]


تابع المثال 3

حاول أن تحلّ! **.3** تبيّن البيانات أدناه أوقات زيارة 200 شخص لحديقة عامة في الدوحة وذلك في أحد أيّام الأسبوع.

الفئات	13 - 15	15 - 17	17 - 19	19 - 21	21 - 23
التكرار f	40	50	60	20	30

.a أنشئ جدول التكرار النسبي.
.b ارسم المدرّج التكراري النسبي.

إرشاد
الفئة الزمنية 15 - 13 تعني الزمن 13 : 00 - 15 : 00

تطبيق

مثال 4 قراءة البيانات واستخلاص النتائج من المدرّج التكراري النسبي

تعتبر محمية "خور العديد" أكبر محمية برّية في دولة قطر من حيث مساحتها التي تقارب $1\ 293\ km^2$، يمثّل المدرج التكراري النسبي أدناه أوقات زيارة 200 شخص لهذه المحمية في أحد أيام الأسبوع.

.A **ما المعلومات التي يمكن الاستدلال عليها من المدرّج التكراري النسبي ؟**
يبيّن المدرج التكراري أن نسبة زائري المحمية تتزايد مع الزمن وتصل إلى الذروة بين الساعة 15:00 والساعة 16:00 ثم تبدأ بالتناقص بعد ذلك لتصل إلى أقل نسبة بين الساعة 17:00 والساعة 18:00

.B **أوجد عدد زوّار المحمية بين الساعة 15:00 والساعة 16:00**
التكرار النسبي للفئة الزمنية (16 - 15) هو 0.33، ولإيجاد عدد الزوار في هذه الفئة نستعمل القاعدة:

تكرار الفئة (عدد الزوار) = التكرار النسبي × مجموع التكرارات

عدد الزوار $= 0.33 \times 200$
$= 66$

إذن، عدد زوّار المحمية بين الساعة 15:00 والساعة 16:00 هو 66 زائرًا.

فكّر وثابر في الحل
هل من الممكن استنتاج معلومات إضافية باستعمال المدرّج التكراري النسبي الممثل لأوقات زيارة محمية "خور العديد" ؟

يتبع في الصفحة التالية

تابع المثال 4

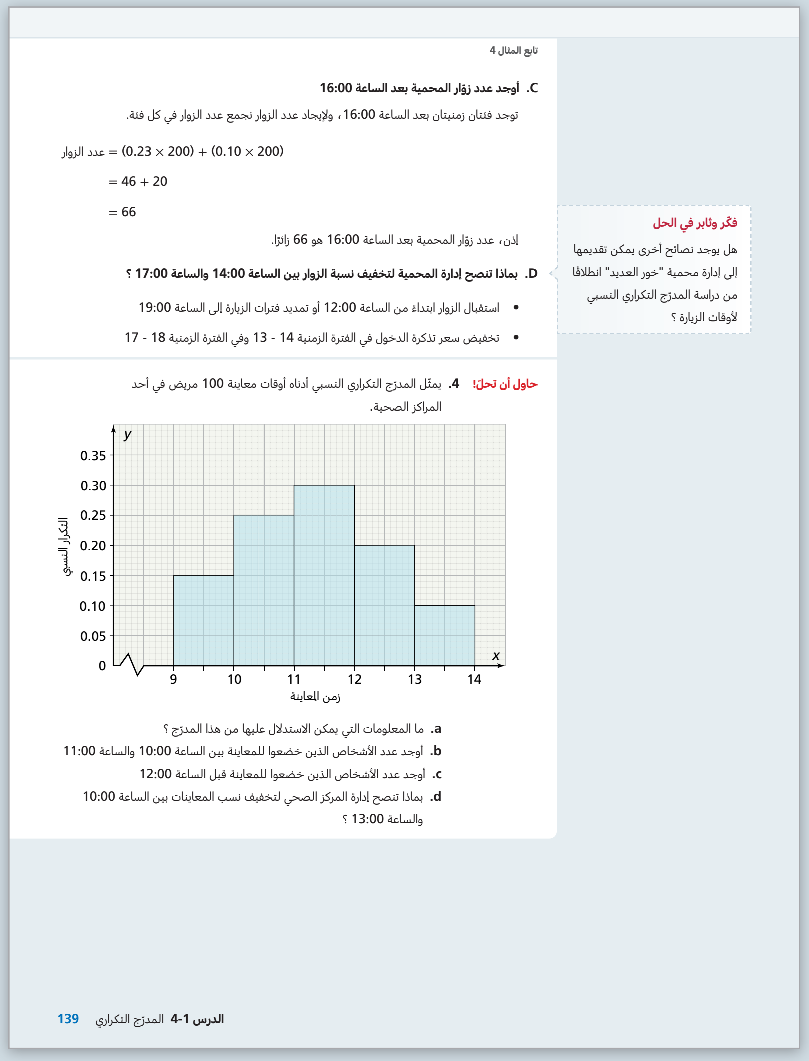
حاول أن تحلّ! الإجابات

4. a. يبيّن المدرج التكراري النسبي أن عدد المرضى يتزايد من الساعة 9 صباحًا حتى الساعة 12 ظهرًا، ويبدأ بالتناقص بعد ذلك.

b. $0.25 \times 100 = 25$

c. $0.15 \times 100 + 0.25 \times 100 + 0.30 \times 100 = 70$

d. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : استقبال المرضى ابتداءً من الساعة 8:00 أو تمديد فترات استقبال المرضى إلى الساعة 15:00، أو تخفيض تعرفة المعاينة في الفترة الزمنية 10 - 9 وفي الفترة الزمنية 14 - 13


تابع المثال 4

C. أوجد عدد زوّار المحمية بعد الساعة 16:00

توجد فئتان زمنيتان بعد الساعة 16:00، ولإيجاد عدد الزوار نجمع عدد الزوار في كل فئة.

عدد الزوار $= (0.23 \times 200) + (0.10 \times 200)$

$= 46 + 20$

$= 66$

إذن، عدد زوّار المحمية بعد الساعة 16:00 هو 66 زائرًا.

D. بماذا تنصح إدارة المحمية لتخفيف نسبة الزوار بين الساعة 14:00 والساعة 17:00 ؟

- استقبال الزوار ابتداءً من الساعة 12:00 أو تمديد فترات الزيارة إلى الساعة 19:00
- تخفيض سعر تذكرة الدخول في الفترة الزمنية 14 - 13 وفي الفترة الزمنية 18 - 17

فكّر وثابر في الحل

هل يوجد نصائح أخرى يمكن تقديمها إلى إدارة محمية "خور العديد" انطلاقًا من دراسة المدرّج التكراري النسبي لأوقات الزيارة ؟

حاول أن تحلّ! 4. يمثّل المدرّج التكراري النسبي أدناه أوقات معاينة 100 مريض في أحد المراكز الصحية.

a. ما المعلومات التي يمكن الاستدلال عليها من هذا المدرّج ؟

b. أوجد عدد الأشخاص الذين خضعوا للمعاينة بين الساعة 10:00 والساعة 11:00

c. أوجد عدد الأشخاص الذين خضعوا للمعاينة قبل الساعة 12:00

d. بماذا تنصح إدارة المركز الصحي لتخفيف نسب المعاينات بين الساعة 10:00 والساعة 13:00 ؟

الدرس 1-4 المدرّج التكراري 139

ملخص المفهوم المدرج التكراري

س: ما فائدة استعمال المدرج التكراري ؟

[استخلاص نتائج تتعلق بالبيانات المجمعة.]

س: ما فائدة استعمال المدرج التكراري النسبي ؟

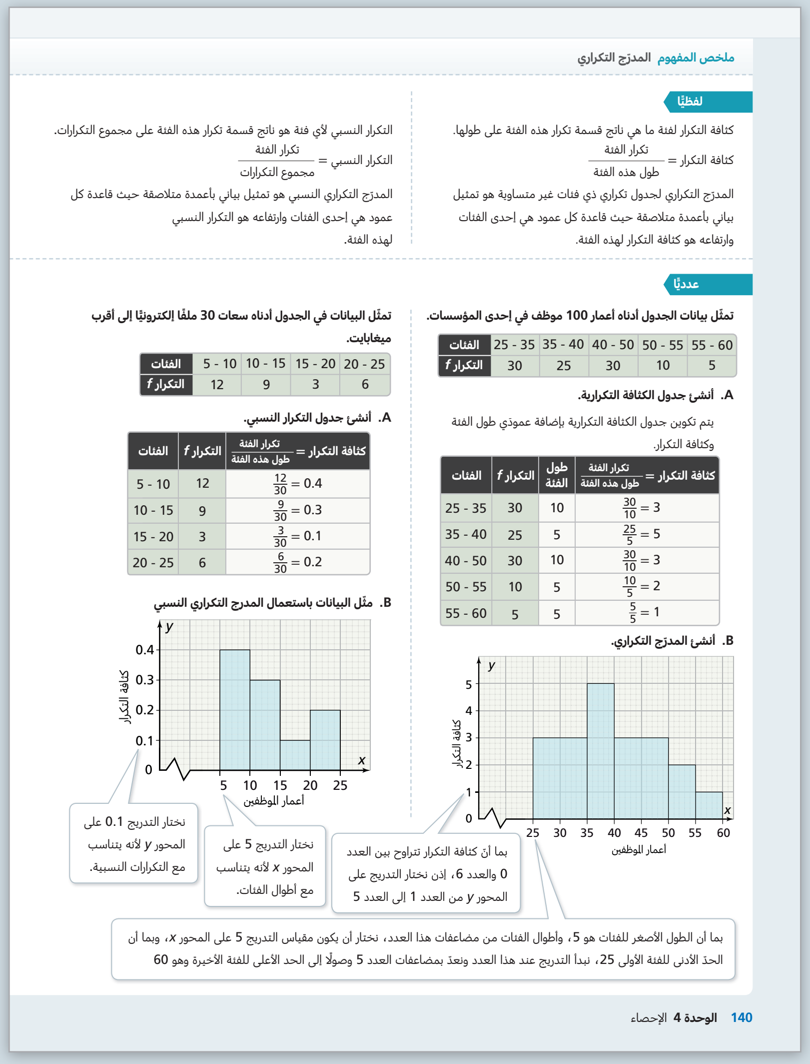
[استخلاص نتائج ومعلومات تساعد على اتخاذ القرارات وتقديم التوصيات.]

س: ما القاعدة التي تُستعمل لإنشاء المدرج التكراري ؟

[كثافة التكرار = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول هذه الفئة}}$]

س: ما القاعدة التي تُستعمل لإنشاء المدرج التكراري النسبي ؟

[التكرار النسبي = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{مجموع التكرارات}}$]



ملخص المفهوم المدرّج التكراري

لفظيًّا

كثافة التكرار لفئة ما هي ناتج قسمة تكرار هذه الفئة على طولها.

كثافة التكرار = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول هذه الفئة}}$

المدرّج التكراري لجدول تكراري ذي فئات غير متساوية هو تمثيل بياني بأعمدة متلاصقة حيث قاعدة كل عمود هي إحدى الفئات وارتفاعه هو كثافة التكرار لهذه الفئة.

التكرار النسبي لأي فئة هو ناتج قسمة تكرار هذه الفئة على مجموع التكرارات.

التكرار النسبي = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{مجموع التكرارات}}$

المدرّج التكراري النسبي هو تمثيل بياني بأعمدة متلاصقة حيث قاعدة كل عمود هي إحدى الفئات وارتفاعه هو التكرار النسبي لهذه الفئة.

عدديًّا

تمثّل بيانات الجدول أدناه أعمار 100 موظف في إحدى المؤسسات.

الفئات	25 - 35	35 - 40	40 - 50	50 - 55	55 - 60
التكرار f	30	25	30	10	5

A. أنشئ جدول الكثافة التكرارية.

يتم تكوين جدول الكثافة التكرارية بإضافة عمودَي طول الفئة وكثافة التكرار.

الفئات	التكرار f	طول الفئة	كثافة التكرار = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول هذه الفئة}}$
25 - 35	30	10	$\frac{30}{10} = 3$
35 - 40	25	5	$\frac{25}{5} = 5$
40 - 50	30	10	$\frac{30}{10} = 3$
50 - 55	10	5	$\frac{10}{5} = 2$
55 - 60	5	5	$\frac{5}{5} = 1$

B. أنشئ المدرّج التكراري.

تمثّل البيانات في الجدول أدناه سعات 30 ملفًا إلكترونيًا إلى أقرب ميغابايت.

الفئات	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25
التكرار f	12	9	3	6

A. أنشئ جدول التكرار النسبي.

الفئات	التكرار f	كثافة التكرار = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول هذه الفئة}}$
5 - 10	12	$\frac{12}{30} = 0.4$
10 - 15	9	$\frac{9}{30} = 0.3$
15 - 20	3	$\frac{3}{30} = 0.1$
20 - 25	6	$\frac{6}{30} = 0.2$

B. مثّل البيانات باستعمال المدرج التكراري النسبي

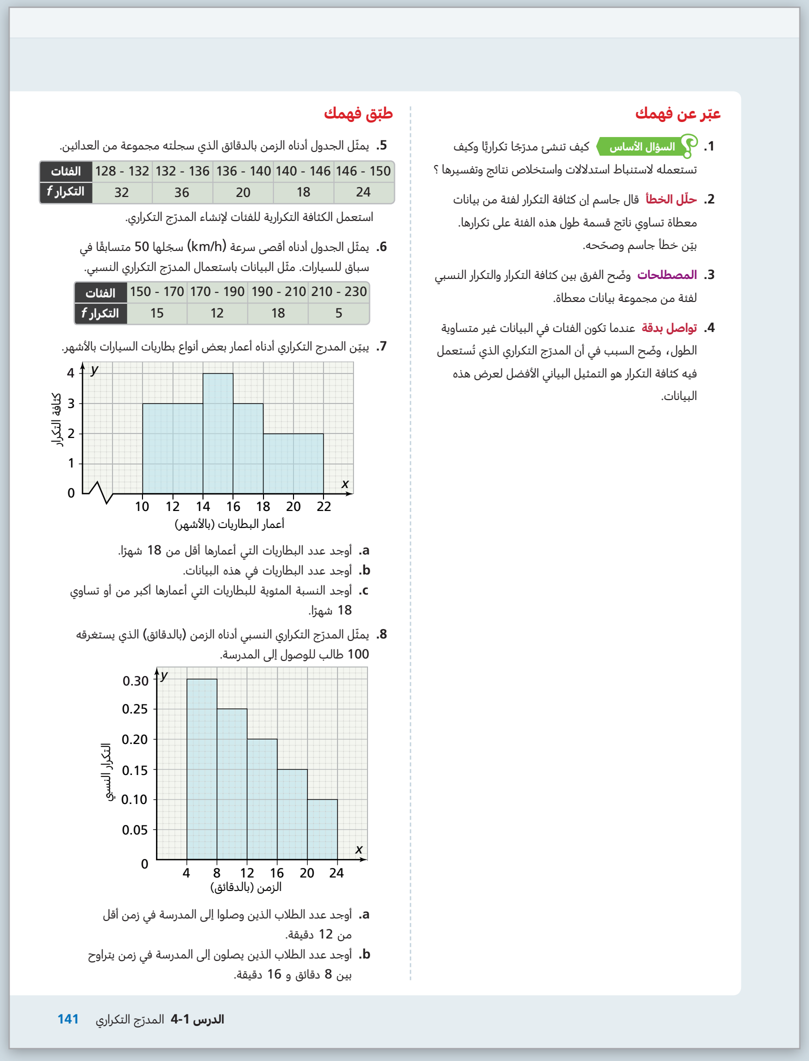
140 الوحدة 4 الإحصاء

عبّر عن فهمك|طبّق فهمك

خطأ شائع

التمرين 5 قد يخطئ الطلاب في إيجاد كثافة التكرار فيوجدون ناتج قسمة تكرار كل فئة على طول الفئة الأولى. ذكّر الطلاب أنه يجب عليهم ملاحظة طول كل فئة، والحرص على دقة استعمال القاعدة التالية: كثافة التكرار = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول هذه الفئة}}$.

التمرين 6 قد يخطئ الطلاب في إيجاد التكرار النسبي لكل فئة فيوجدون ناتج قسمة طول الفئة على تكرار هذه الفئة. ذكّر الطلاب أن قاعدة التكرار النسبي هي : التكرار النسبي = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{مجموع التكرارات}}$


عبّر عن فهمك

1. السؤال الأساس كيف تنشئ مدرّجًا تكراريًّا وكيف تستعمله لاستنباط استدلالات واستخلاص نتائج وتفسيرها ؟
2. حلّل الخطأ قال جاسم إن كثافة التكرار لفئة من بيانات معطاة تساوي ناتج قسمة طول هذه الفئة على تكرارها. بيّن خطأ جاسم وصحّحه.
3. المصطلحات وضّح الفرق بين كثافة التكرار والتكرار النسبي لفئة من مجموعة بيانات معطاة.
4. تواصل بدقة عندما تكون الفئات في البيانات غير متساوية الطول، وضّح السبب في أن المدرّج التكراري الذي تُستعمل فيه كثافة التكرار هو التمثيل البياني الأفضل لعرض هذه البيانات.

طبّق فهمك

5. يمثّل الجدول أدناه الزمن بالدقائق الذي سجلته مجموعة من العدائين.

الفئات	128 - 132	132 - 136	136 - 140	140 - 146	146 - 150
التكرار f	32	36	20	18	24

استعمل الكثافة التكرارية للفئات لإنشاء المدرّج التكراري.

6. يمثّل الجدول أدناه أقصى سرعة (km/h) سجّلها 50 متسابقًا في سباق للسيارات. مثّل البيانات باستعمال المدرّج التكراري النسبي.

الفئات	150 - 170	170 - 190	190 - 210	210 - 230
التكرار f	15	12	18	5

7. يبيّن المدرج التكراري أدناه أعمار بعض أنواع بطاريات السيارات بالأشهر.

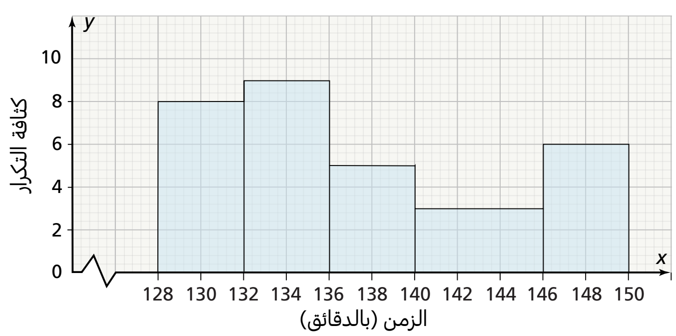
a. أوجد عدد البطاريات التي أعمارها أقل من 18 شهرًا.
b. أوجد عدد البطاريات في هذه البيانات.
c. أوجد النسبة المئوية للبطاريات التي أعمارها أكبر من أو تساوي 18 شهرًا.

8. يمثّل المدرّج التكراري النسبي أدناه الزمن (بالدقائق) الذي يستغرقه 100 طالب للوصول إلى المدرسة.

a. أوجد عدد الطلاب الذين وصلوا إلى المدرسة في زمن أقل من 12 دقيقة.
b. أوجد عدد الطلاب الذين يصلون إلى المدرسة في زمن يتراوح بين 8 دقائق و 16 دقيقة.

الدرس 1-4 المدرّج التكراري 141

المدرج التكراري :



الإجابات

1. إذا كانت الفئات غير متساوية، نمثل البيانات في المدرج التكراري باستعمال القاعدة : كثافة التكرار = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول هذه الفئة}}$. لكن إذا كانت الفئات متساوية الطول، عندها نمثل البيانات في المدرج التكراري النسبي باستعمال القاعدة :
التكرار النسبي = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{مجموع التكرارات}}$
في الحالتين يجب أن نقرأ أعمدة المدرج التي تمثل البيانات جيدًا لاستنباط استدلالات واستخلاص نتائج يساعدنا تفسيرها على اتخاذ القرارات وتقديم النصائح والتوصيات.

2. استعمل جاسم القاعدة بطريقة معكوسة، والصحيح أن كثافة التكرار = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول هذه الفئة}}$

3. في البيانات التي فئاتها غير متساوية الطول نستعمل القاعدة :
كثافة التكرار = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول هذه الفئة}}$، وذلك لإنشاء مدرج تكراري، بحيث نكتب الأعداد المناظرة لكثافة التكرار على المحور y. أما في البيانات التي فئاتها متساوية الطول فنستعمل القاعدة: التكرار النسبي = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{مجموع التكرارات}}$، وذلك لإنشاء مدرج تكراري نسبي، بحيث تكون الأعداد المناظرة لكثافة التكرار أعدادًا صحيحة موجبة، والأعداد المناظرة للتكرار النسبي كسورًا عشرية موجبة.

4. تساعد قاعدة كثافة التكرار على إيجاد مجموع التكرارات إذا كان لدينا مدرج تكراري يمثل بيانات معطاة فئاتها غير متساوية الطول، وذلك باستعمال القاعدة :
تكرار الفئة = كثافة التكرار × طول هذه الفئة.
كما يمكن إيجاد مجموع تكرارات لعدد من الفئات واستخلاص النسبة المئوية لهذه التكرارات. أما إذا كانت الفئات متساوية الطول ولدينا مجموع التكرارات، فإن المدرج التكراري النسبي هو الأفضل لتمثيل هذه البيانات.

5. أنشئ جدول كثافة التكرار :

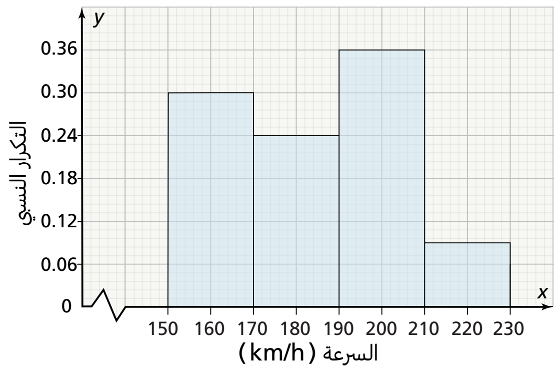
الفئات	التكرار f	طول الفئة	كثافة التكرار
128 - 132	32	4	8
132 - 136	36	4	9
136 - 140	20	4	5
140 - 146	18	6	3
146 - 150	24	4	6

الإجابات

.6 أنشئ جدول كثافة التكرار النسبي :

الفئات	التكرار f	التكرار النسبي $= \frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{مجموع التكرارات}}$
150 - 170	15	$\frac{15}{50} = 0.3$
170 - 190	12	$\frac{12}{50} = 0.24$
190 - 210	18	$\frac{18}{50} = 0.36$
210 - 230	5	$\frac{5}{50} = 0.1$
المجموع	50	1

المدرج التكراري النسبي :



.7 **a.** عدد البطاريات التي أعمارها أقل من 18 شهرًا :

$(4 \times 3) + (2 \times 4) + (2 \times 3) = 12 + 8 + 6 = 26$

b. العدد الكلي للبطاريات :

$(4 \times 3) + (2 \times 4) + (2 \times 3) + (4 \times 2) = 12 + 8 + 6 + 8 = 34$

c. عدد البطاريات التي أعمارها أكبر من أو تساوي 18 شهرًا :

$4 \times 2 = 8$

النسبة المئوية : $\frac{8}{34} \times 100\% \approx 23.53\%$

.8 **a.** عدد الطلاب الذين وصلوا إلى المدرسة في أقل من 12 دقيقة :

$(0.3 \times 100) + (0.25 \times 100) = 30 + 25 = 55$

b. عدد الطلاب الذين يصلون إلى المدرسة في زمن يتراوح بين 8 دقائق و 16 دقيقة :

$(0.25 \times 100) + (0.2 \times 100) = 25 + 20 = 45$

تدرّب وحُل مسائل

دليل المهام

أساسي	متقدم
9-20	9-20

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	9, 13	1
	20	3
2	14	2
	17	3
3	12, 15	1
	10, 11	2
4	16	2
	18, 19	3

الإجابات

9. **a.** جدول الكثافة التكرارية

الفئات	كثافة التكرار	طول الفئة	التكرار f
24 - 26	7	2	14
26 - 30	5	4	20
30 - 32	3	2	6
32 - 36	4	4	16
36 - 38	2	2	4

b. عدد الموظفين في المؤسسة :

$14 + 20 + 6 + 16 + 4 = 60$

10. استعمل علي قاعدة غير صحيحة لإيجاد التكرار النسبي، فقد أوجد ناتج قسمة طول الفئة على تكرار هذه الفئة.
الإجابة الصحيحة هي :

الفئات	التكرار f	التكرار النسبي $= \frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{مجموع التكرارات}}$
160 - 165	50	$\frac{50}{95} \approx 0.53$
165 - 170	25	$\frac{25}{95} \approx 0.26$
170 - 175	20	$\frac{20}{95} \approx 0.21$
المجموع	95	1

11. **a.** مجموع التكرارات النسبية يساوي 1،

$0.35 + 0.30 + 0.25 + x = 1$

$x = 0.1$

b. ليكن z مجموع عدد الطلاب :

$0.25z = 20$

$z = 80$

إذن، مجموع عدد الطلاب هو 80

c. $28 + 24 + 20 + y = 80$

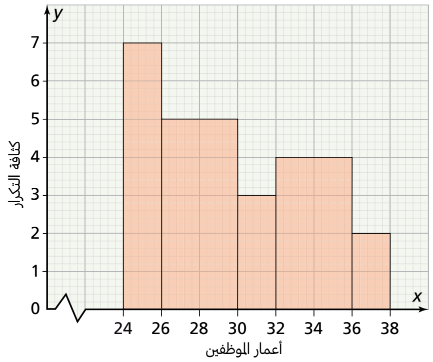
$y = 8$

إذن، تكرار الفئة 65 - 60 هو 8

تدرّب وحُل مسائل

عزّز فهمك

9. **فكّر وثابر في الحل** يمثّل المدرّج التكراري أدناه أعمار موظفي إحدى المؤسسات.



a. كوّن جدول الكثافة التكرارية.

b. أوجد عدد الموظفين في المؤسسة.

10. **حلّل الخطأ** يبيّن الجدول أدناه أطوال مجموعة من الأشخاص بالسنتمترات.

الفئات	160 - 165	165 - 170	170 - 175
التكرار f	50	25	20

كوّن الجدول التكراري النسبي. حلّ علي السؤال بإكمال الجدول وإيجاد التكرار النسبي لكل فئة كما يلي:

الفئات	التكرار f	التكرار النسبي
160 - 165	50	$\frac{5}{50} = 0.1$
165 - 170	25	$\frac{5}{25} = 0.2$
170 - 175	20	$\frac{5}{20} = 0.25$

بيّن خطأ علي وصححه.

11. **روابط في الرياضيات** يبيّن الجدول أدناه فئات الكتل والتكرار والتكرار النسبي لمجموعة من الطلبة بالكيلوجرام حيث y يمثّل تكرار الفئة 65 - 60 و x يمثّل تكرارها النسبي.

الفئات	التكرار f	التكرار النسبي
45 - 50	28	0.35
50 - 55	24	0.30
55 - 60	20	0.25
60 - 65	y	x

a. أوجد قيمة x

b. أوجد مجموع عدد الطلبة.

c. أوجد تكرار الفئة 65 - 60

12. **تواصل بدقة** يبيّن الجدول أدناه كتل 100 ثمرة تفاح بالجرام.

الفئات	150 - 160	160 - 170	170 - 180	180 - 190
التكرار f	25	35	25	15

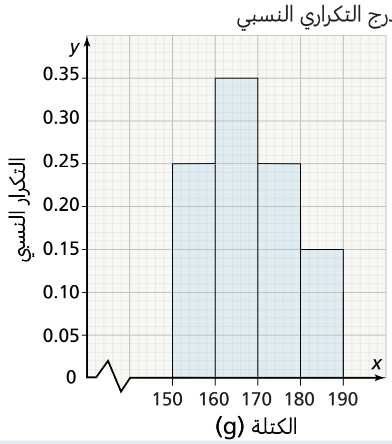
a. كوّن جدول التكرار النسبي.

b. أنشئ المدرّج التكراري النسبي.

12. **a.** جدول التكرار النسبي

الفئات	التكرار f	التكرار النسبي
150 - 160	25	$\frac{25}{100} = 0.25$
160 - 170	35	$\frac{35}{100} = 0.35$
170 - 180	25	$\frac{25}{100} = 0.25$
180 - 190	15	$\frac{15}{100} = 0.15$
المجموع	100	1

b. المدرج التكراري النسبي

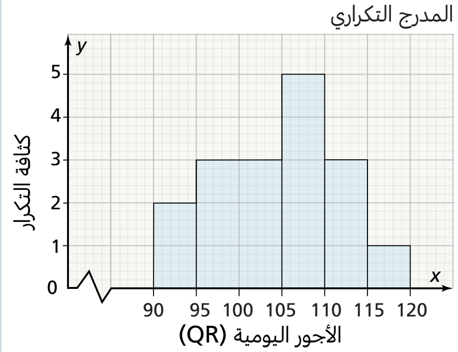


الإجابات

13. **a.** جدول الكثافة التكرارية

كثافة التكرار	طول الفئة	التكرار f	الفئات
$\frac{10}{5} = 2$	5	10	90 - 95
$\frac{30}{10} = 3$	10	30	95 - 105
$\frac{25}{5} = 5$	5	25	105 - 110
$\frac{15}{5} = 3$	5	15	110 - 115
$\frac{5}{5} = 1$	5	5	115 - 120

b. المدرج التكراري



14. **a.** عدد الأشخاص الذين تبرعوا بمبلغ أقل من QR 380:

$(10 \times 2) + (20 \times 7) = 20 + 140$

$= 160$

b. العدد الإجمالي للأشخاص :

$(10 \times 2) + (20 \times 7) + (10 \times 4)$

$= 20 + 140 + 40$

$= 200$

c. عدد الأشخاص الذين تبرعوا بمبلغ أكبر من QR 360

$(20 \times 7) + (10 \times 4)$

$= 140 + 40$

$= 180$

النسبة المئوية:

$\frac{180}{200} \times 100\% = 90\%$

15. **a.** جدول التكرار النسبي

التكرار النسبي	التكرار f	الفئات
$\frac{18}{60} = 0.30$	18	7 - 10
$\frac{12}{60} = 0.20$	12	10 - 13
$\frac{15}{60} = 0.25$	15	13 - 16
$\frac{9}{60} = 0.15$	9	16 - 19
$\frac{6}{60} = 0.10$	6	19 - 22
1	60	المجموع

تدرّب وحُل مسائل

تدرّب

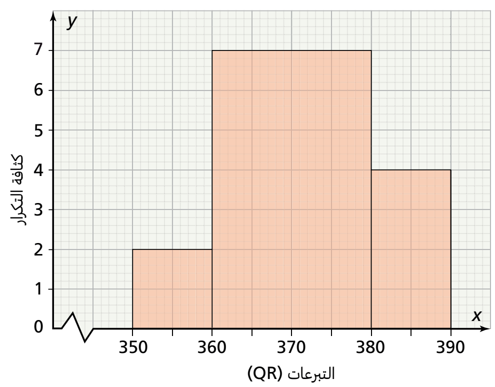
13. تمثل البيانات في الجدول أدناه الأجور اليومية للعمال في أحد المصانع بالريال القطري. انظر المثال 1

الفئات	90 - 95	95 - 105	105 - 110	110 - 115	115 - 120
التكرار f	10	30	25	15	5

a. كوّن جدول الكثافة التكرارية.

b. أنشئ المدرج التكراري.

14. تمثل البيانات في المدرج التكراري أدناه المبالغ بالريال القطري التي تبرع بها عدد من الأشخاص لصالح مؤسسة اجتماعية. انظر المثال 2



a. أوجد عدد الأشخاص الذين تبرعوا بمبلغ أقل من QR 380.

b. أوجد العدد الإجمالي للأشخاص الذين ساهموا بالتبرعات.

c. أوجد النسبة المئوية للمتبرعين الذين قدموا مبالغ أكبر من QR 360.

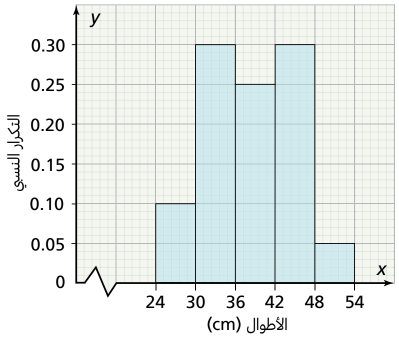
15. تمثل البيانات في الجدول أدناه كتل 60 طفلاً (بالكيلوجرامات). انظر المثال 3

الفئات	7 - 10	10 - 13	13 - 16	16 - 19	19 - 22
التكرار f	18	12	15	9	6

a. كوّن الجدول التكراري النسبي.

b. أنشئ المدرج التكراري النسبي.

16. يمثل المدرج التكراري النسبي أدناه أطوال 60 طفلاً حديثي الولادة في شهر واحد في أحد المستشفيات إلى أقرب سنتمتر. انظر المثال 4

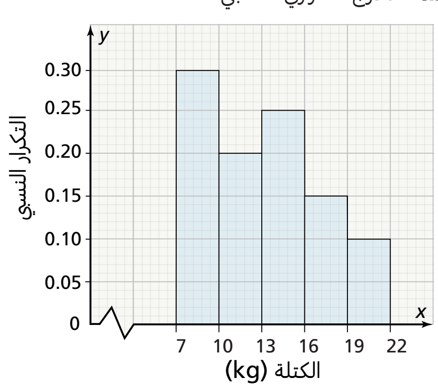


a. ما المعلومات التي تستطيع الاستدلال عليها من المدرج التكراري النسبي ؟

b. أوجد عدد الأطفال في كل من الفئات التالية: 42 - 48, 36 - 42, 30 - 36

c. أوجد عدد الأطفال الذين أطوالهم أقل من 36 cm

b. المدرج التكراري النسبي



16. **a.** يبيّن المدرج التكراري النسبي أن أكثرية الأطفال تتراوح أطوالهم بين 30 cm و 48 cm ويقل تكرار الفئات التي بين 24 cm و 30 cm والتي بين 48 cm و 54 cm

b. عدد الأطفال في الفئة (36 - 30) :

$60 \times 0.30 = 18$

عدد الأطفال في الفئة (42 - 36) :

$60 \times 0.25 = 15$

عدد الأطفال في الفئة (48 - 42) :

$60 \times 0.30 = 18$

c. عدد الأطفال الذين أطوالهم أقل من 36 cm :

$60 \times 0.1 + 60 \times 0.3 = 24$

الإجابات

17. **a.** عدد الأشخاص الذين تقع كتلهم في الفئة 70 - 66 :

$4 \times 4 = 16$

b. عدد الأشخاص الذين كتلهم أكبر من أو تساوي 66 kg :

$(4 \times 4) + (4 \times 2)$

$= 16 + 8$

$= 24$

c. 74-70؛ 8

d. عدد الأشخاص الذين كتلهم أقل من 70 kg :

$(4 \times 3) + (2 \times 6) + (4 \times 4)$

$= 12 + 12 + 16$

$= 40$

العدد الإجمالي للأشخاص :

$(4 \times 3) + (2 \times 6) + (4 \times 4) + (4 \times 2)$

$= 12 + 12 + 16 + 8$

$= 48$

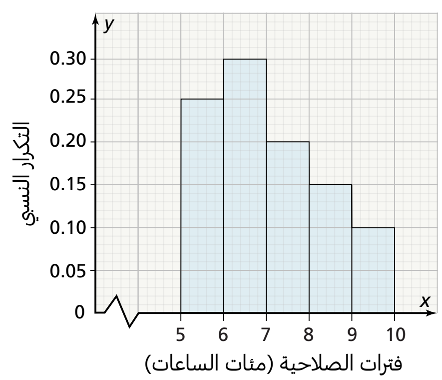
النسبة المئوية : $\frac{40}{48} \times 100\% = 83.\overline{3}\%$

إذن، كلام إدارة النادي صحيح.

18. **a.** جدول التكرار النسبي :

الفئات	التكرار f	التكرار النسبي
5 - 6	30	$\frac{30}{120} = 0.25$
6 - 7	36	$\frac{36}{120} = 0.30$
7 - 8	24	$\frac{24}{120} = 0.20$
8 - 9	18	$\frac{18}{120} = 0.15$
9 - 10	12	$\frac{12}{120} = 0.10$
المجموع	120	1

المدرج التكراري النسبي :



b. نسبة الأنابيب التي أعمارها أكبر من أو تساوي 700 ساعة :

$0.2 + 0.15 + 0.1 = 0.45$

النسبة المئوية : $0.45 \times 100\% = 45\%$

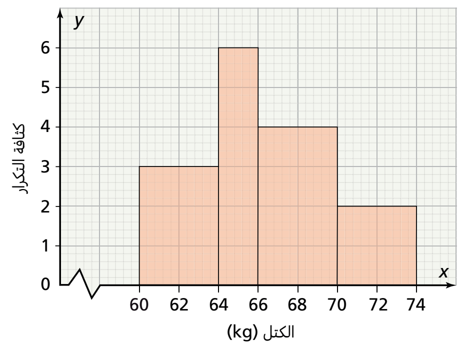
هذه النسبة المئوية أصغر من 50%،

لذا، لا أوافق على ادعاء صاحب المصنع.

تدرّب وحُل مسائل

طبّق

17. **برّر منطقيًا** يعرض المدرج التكراري أدناه كتل عدد من الأشخاص في أحد نوادي اللياقة البدنية، بعد خضوعهم لبرنامج تخفيض الكتلة.



a. ما عدد الأشخاص الذين تقع كتلهم في الفئة 70 - 66 ؟ وضّح إجابتك.

b. ما عدد الأشخاص الذين كتلهم أكبر من أو تساوي 66 kg ؟ وضّح إجابتك.

c. أي فئة كتلها الأقل تكرارًا ؟ أوجد التكرار لهذه الفئة.

d. تقول إدارة النادي إن نسبة المشتركين في البرنامج الذين أصبحت كتلهم أقل من 70 kg تساوي أكثر من 80%، تحقق من صحة الادعاء.

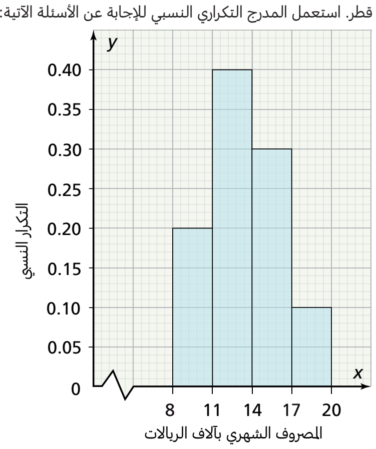
18. **ابن الحجرر الرياضية** يبيّن الجدول أدناه مدة صلاحية 120 أنبوبًا إلكترونيًا بمئات الساعات تم اختبارها في أحد المصانع.

الفئات	5 - 6	6 - 7	7 - 8	8 - 9	9 - 10
التكرار f	30	36	24	18	12

a. ارسم المدرج التكراري النسبي.

b. يدعي صاحب المصنع إن النسبة المئوية للأنابيب التي أعمارها أكبر من أو تساوي 700 ساعة تزيد عن 50% هل توافق على هذا الادعاء ؟ وضّح إجابتك.

19. **فكّر وثابر في الحل** يعرض المدرج التكراري النسبي أدناه معدّل المصروف الشهري (بآلاف الريالات القطرية) لأربعين عائلة في دولة قطر. استعمل المدرج التكراري النسبي للإجابة عن الأسئلة الآتية:



a. ما المعلومات التي يمكن استنتاجها من المدرج التكراري النسبي ؟

b. أوجد عدد العائلات التي مصروفها الشهري يقع في الفئة 14 - 11

c. أوجد عدد العائلات التي مصروفها الشهري أقل من أو يساوي QR 14 000.

d. أوجد النسبة المئوية للعائلات التي معدل مصروفها الشهري أكثر من أو يساوي QR 11 000.

e. أي فئة نسبة معدل المصروف الشهري فيها هي الأصغر ؟ أوجد التكرار لهذه الفئة.

20. **مهارات التفكير العليا** يبيّن الجدول التكراري أدناه زمن انتظار 100 زبون بالدقائق أمام صندوق المحاسبة في أحد المتاجر.

الفئات	0 - 4	4 - 10	10 - 12	12 - 16	16 - 18
التكرار f	24	30	22	16	8

a. كوّن جدول الكثافة التكرارية.

b. أنشىء المدرج التكراري.

c. أعد كتابة الجدول التكراري باستعمال فئات غير متساوية الطول. ثم ارسم مدرجًا تكراريًا يمثّل الجدول التكراري الجديد.

19. **a.** بالنظر إلى الأعمدة في المدرج التكراري النسبي نلاحظ أن أكبر نسبة من عدد العائلات، وهي 0.40، يتراوح معدّل مصروفها الشهري بين QR 11000 و QR 14 000.

ثم تتناقص هذه النسبة لنجد أن 0.10 من عدد العائلات يتراوح معدّل مصروفها الشهري بين QR 17 000 و QR 20 000.

نلاحظ أيضًا أن النسبة الأكبر من عدد العائلات وهي $0.30 + 0.40 = 0.70$ يتراوح معدّل مصروفها الشهري بين QR 11 000 و QR 17 000

b. عدد العائلات التي يقع معدّل مصروفها الشهري في الفئة 14 - 11 هو : $0.40 \times 40 = 16$

الإجابات

تابع السؤال 19

c. عدد العائلات التي معدّل مصروفها الشهري أقل من أو يساوي QR 14 000 :

$(0.40 \times 40) + (0.20 \times 40)$

$= 16 + 8$

$= 24$

d. نسبة العائلات التي معدّل مصروفها الشهري أكثر من QR 11 000 :

$0.4 + 0.3 + 0.1 = 0.8$

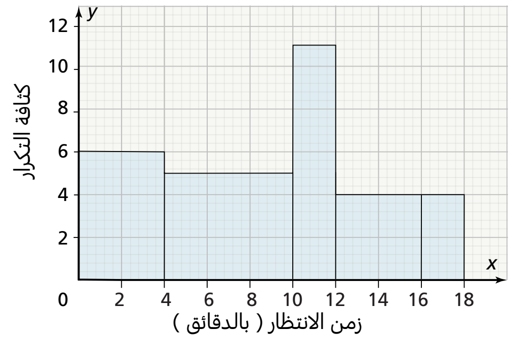
النسبة المئوية : $0.8 \times 100\% = 80\%$

e. الفئة 20-17 ؛ نسبتها 0.1 وعدد العائلات فيها يساوي $0.10 \times 40 = 4$ وهو تكرار هذه الفئة.

20. **a.** جدول الكثافة التكرارية :

الفئات	التكرار f	طول الفئة	كثافة التكرار
0 - 4	24	4	$\frac{24}{4} = 6$
4 - 10	30	6	$\frac{30}{6} = 5$
10 - 12	22	2	$\frac{22}{2} = 11$
12 - 16	16	4	$\frac{16}{4} = 4$
16 - 18	8	2	$\frac{8}{2} = 4$

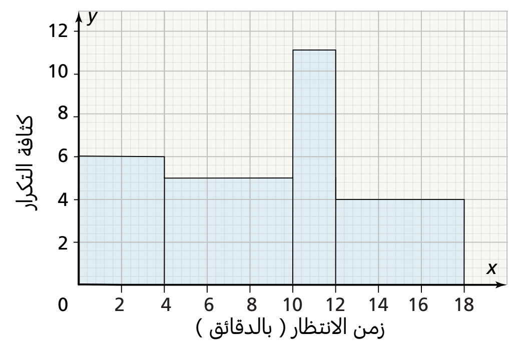
b. المدرج التكراري



c. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة :

الفئات	التكرار f	طول الفئة	كثافة التكرار
0 - 4	24	4	$\frac{24}{4} = 6$
4 - 10	30	6	$\frac{30}{6} = 5$
10 - 12	22	2	$\frac{22}{2} = 11$
12 - 18	24	6	$\frac{24}{6} = 4$

المدرج التكراري الجديد :



الإجابات

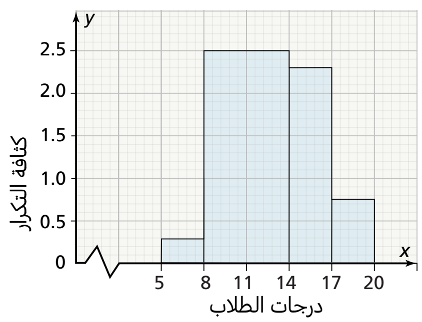
21. C

23. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة :

الجزء A الجدول التكراري :

الفئات	التكرار f	طول الفئة	كثافة التكرار
5 - 8	1	3	$\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$
8 - 14	15	6	$\frac{15}{6} = 2.5$
14 - 17	7	3	$\frac{7}{3} = 2.\overline{3}$
17 - 20	4	3	$\frac{4}{3} = 0.75$

الجزء B



تدرّب وحُل مسائل

تدرّب على اختبار

.21 إذا كانت كثافة التكرار للفئة 14 - 10 تساوي 3 فإن تكرار هذه الفئة يساوي:

A. 3 **B.** 4

C. 12 **D.** 14

.22 **اختبار SAT/ACT** في جدول تكراري نسبي مجموع تكراراته 40، إذا كان التكرار النسبي لفئة يساوي 0.25 فإن تكرار هذه الفئة يساوي:

Ⓐ 6 Ⓑ 10

Ⓒ 40 Ⓓ 160

.23 **مهمة أدائية** في ما يلي درجات 27 طالبًا في اختبار درجته العظمى 20:

7, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12,
13, 14, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 17, 17, 18, 19

الجزء A نظم هذه الدرجات في جدول تكراري مكوّن من 4 فئات غير متساوية الطول، على أن تكون من مضاعفات العدد 3

الجزء B مثّل هذه البيانات باستعمال المدرج التكراري.

الدرس 1-4 المدرج التكراري 145

الخطوة 4 | التقويم والتمايز

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم. تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس. كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

الدرس 2-4
مقاييس النزعة المركزية

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على :

✔ حساب مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابي والوسيط والمنوال) لجدول تكراري بسيط.

الفهم الأساس

يحسب الطلاب الوسط الحسابي لجدول تكراري بسيط، ويستعملون مفهوم الوسط الحسابي لمقارنة جدولين تكراريين بسيطين. كما يحسب الطلاب المنوال والوسيط لجدول تكراري بسيط.

ترابط

في الصفوف السابقة، تمكّن الطلاب من :

- حساب الوسط الحسابي والوسيط والمنوال لمجموعة من البيانات.
- إنشاء جدول تكراري.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من :

- حساب الوسط الحسابي لجدول تكراري بسيط باستعمال الصيغة $\frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f}$
- استعمال الوسط الحسابي لمقارنة جدولين تكراريين واستخلاص نتائج.
- حساب الوسيط لجدول تكراري بسيط، حيث عدد التكرارات (n) فردي، بإيجاد رتبة الوسيط باستعمال الصيغة $\frac{n+1}{2}$
- حساب الوسيط لجدول تكراري بسيط، حيث عدد التكرارات (n) زوجي، بإيجاد الوسط الحسابي للقيمتين اللتين رتبتهما $\frac{n}{2}$ و $\frac{n}{2}+1$
- حساب المنوال لجدول تكراري بسيط، حيث يمثل المنوال القيمة أو القيم الأكثر شيوعًا أو الأكثر تكرارًا في مجموعة البيانات.

دقة

يؤكد هذا الدرس على الدمج بين الاستيعاب المفاهيمي والتطبيق.

- يدرك الطلاب أن استعمال تكرارات البيانات يجعل عملية حساب مقاييس النزعة المركزية أسهل.
- يدرك الطلاب أن مقاييس النزعة المركزية تستعمل لتمثيل البيانات بقيمة محددة تميل إليها جميع البيانات.

بناء المصطلحات

مراجعة المصطلحات

العربية | الإنجليزية

- **جدول تكراري بسيط** | *simple frequency table*

المصطلحات الجديدة

- **الوسط الحسابي** | *mean*
- **الوسيط** | *median*
- **المنوال** | *mode*

نشاط المصطلحات

تعلم الطلاب سابقًا كيفية حساب الوسط الحسابي والوسيط والمنوال لمجموعة من البيانات، وتعلموا كذلك كيفية إنشاء جدول تكراري.
قدّم للطلاب مصطلح "جدول تكراري بسيط" الذي يبين تكرار كل قيمة من قيم البيانات. اكتب البيانات التالية على السبورة :

70, 80, 80, 65, 70, 65, 70, 70, 80, 85

تمثل هذه البيانات درجات 10 طلاب في مادة الرياضيات.

اطلب من الطلاب ملء الجدول التكراري التالي بهذه البيانات :

الدرجة	التكرار

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يُركّز الطلاب على المعيار :

9.8.3 يحسب مقاييس النزعة المركزية لجداول تكرارية بسيطة.

معايير ممارسات الرياضيات

برّر منطقيًا بطريقة تجريدية وكمية

يستعمل الطلاب التبرير المنطقي ومقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابي، الوسيط، المنوال) لمقارنة مجموعتين من البيانات تمثلان موقفين من واقع الحياة لاستخلاص نتائج وتحديد مجموعة البيانات التي تمثّل الموقف الحياتي بشكل أفضل. كما يستعمل الطلاب التبرير المنطقي لتحديد كيف تتأثر مقاييس النزعة المركزية عند إضافة قيم جديدة إلى مجموعة بيانات.

انقد واشرح

محور تركيز التدريس يستعمل الطلاب معرفتهم السابقة لتحليل ونقد الطرائق الملائمة لتحديد كيفية إيجاد الوسط الحسابي لقيم مفردة من بيانات معطاة. يساعدهم ذلك على اختيار العمليات الحسابية الأفضل لإيجاد الإجابة.

قبل البدء بالحلّ — طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: ما البيانات المعطاة، وماذا تمثل ؟
[درجات طلاب أحد الصفوف في مادة الرياضيات، حيث الدرجة العظمى 100، وهي بيانات متقطعة أو منفصلة.]

س: كيف يمكنك إيجاد الوسط الحسابي $\bar{x}$ لهذه الدرجات ؟
[بحساب ناتج قسمة مجموع درجات الطلاب على عدد الطلاب، وهي القاعدة الأساس لإيجاد الوسط الحسابي لمجموعة من الأعداد.]

أثناء الحل — مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: هل استعمل عبد اللّه وخالد نفس القاعدة لإيجاد الوسط الحسابي ؟
[نعم، لقد استعملا نفس القاعدة، لكنهما أجريا العمليات الحسابية بطريقتين مختلفتين.]

س: كيف تختلف طريقة خالد في إجراء العمليات الحسابية عن طريقة عبد اللّه ؟
[استعمل خالد عملية الجمع المتكرر بين الأعداد المتساوية وربطها بعملية الضرب بدلًا من عملية الجمع التي استعملها عبد اللّه، كالتالي :
$3 \times 70 = 70 + 70 + 70$ و $4 \times 75 = 75 + 75 + 75 + 75$
وأخيرًا، $3 \times 80 = 80 + 80 + 80$]

س: هل حصلا على نفس النتيجة ؟
[نعم. الوسط الحسابي في الحالتين يساوي 75]

س: لماذا استعمل خالد عملية الضرب ؟
[لاحظ خالد أن الدرجة 70 تتكرر 3 مرات والدرجة 75 تتكرر 4 مرات والدرجة 80 تتكرر 3 مرات.]

س: هل مفهوم التكرار الذي استعمله خالد جعل حساب الوسط الحسابي أسهل ؟
[نعم]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: هل هناك طريقة أخرى لحساب الوسط الحسابي لهذه الدرجات غير طريقتي عبد اللّه وخالد ؟
[نعم، باستعمال مضاعفات العدد 10 حيث $150 = 75 + 75$

$$\bar{x} = \frac{10(6 + 3 \times 7 + 2 \times 15 + 3 \times 8 + 9)}{12} = \frac{10(6 + 21 + 30 + 24 + 9)}{12}$$
$$= \frac{10 \times 90}{12} = \frac{900}{12} = 75$$

بعد إنجاز الحلّ — طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: هل يمكن دائمًا استعمال طريقة خالد، أي استعمال عملية الجمع المتكرر بين الأعداد المتساوية، لإيجاد الوسط الحسابي لأعداد معطاة ؟
[لا، فليس بالضرورة أن تكون الأعداد المعطاة في البيانات مكونة من مجموعات جزئية لأعداد متساوية، إذ يمكن أن تكون جميعها أعدادًا مختلفة بعضها عن بعض.]

كتاب الطالب، صفحة 146

4-2
مقاييس النزعة المركزية
Measures of Central Tendency

أستطيع... إيجاد مقاييس النزعة المركزية لجدول تكراري بسيط.

معيار الدرس
9.8.3

المصطلحات
- الوسط الحسابي mean
- المنوال mode
- الوسيط median

انقد واشرح

عرض المعلّم درجات طلاب أحد صفوفه، وعددهم 12 طالبًا في اختبار مادة الرياضيات. وكانت كما يلي:

60, 70, 70, 70, 75, 75, 75, 75, 80, 80, 80, 90

ثم طلب إيجاد الوسط الحسابي لهذه الدرجات.

وكانت إجابة كل من عبدالله وخالد عن هذا السؤال كما يلي:

إجابة عبداللّه
الوسط الحسابي للدرجات هو:
$$\bar{x} = \frac{60 + 70 + 70 + 70 + 75 + 75 + 75 + 75 + 80 + 80 + 80 + 90}{12}$$
$$\bar{x} = 75$$
إذن، الوسط الحسابي لدرجات الصف هو 75

إجابة خالد
$$\bar{x} = \frac{60 + (3 \times 70) + (4 \times 75) + (3 \times 80) + 90}{12}$$
$$\bar{x} = 75$$

A. وضّح لماذا لم تختلف الإجابتان ؟

B. **برّر منطقيًّا** أي الطريقتين تفضّل ؟ ولماذا ؟

نموذج من أعمال الطلاب

A. لقد استعمل خالد وعبد الله نفس القاعدة لإيجاد الوسط الحسابي لدرجات الطلاب، فكلاهما قسم مجموع درجات الطلاب على عدد الطلاب، لذا، حصلا على نفس النتيجة وهي 75 درجة، لكن المختلف في طريقة خالد هو أنه ربط عملية الجمع المتكررة للأعداد المتساوية بعملية الضرب وذلك عند جمع الدرجات في بسط الكسر.

B. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : طريقة خالد لأنها أسرع من طريقة عبد اللّه، فهي تختصر العمليات الحسابية.

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلم مركّز

تعلم الطلاب سابقًا كيفية تجميع البيانات وفرزها باستعمال جداول تكرارية وتمثيلها بيانيًا لقراءتها ومقارنتها ودراسة التباين بينها. يتعرّف الطلاب في هذا الدرس على مقاييس النزعة المركزية التي تساعدهم على تحليل البيانات واتخاذ قرارات مناسبة وصحيحة إلى حد ما، وهي :

الوسط الحسابي، ويستعمل مؤشرًا لقيم البيانات صعودًا نحو القيمة العظمى أو نزولًا نحو القيمة الصغرى،

و**المنوال**، ويستعمل مؤشرًا للقيم الأكثر تكرارًا في البيانات،

الوسيط الذي يشير إلى القيمة التي تقسم قيم البيانات إلى فئتين متساويتين في العدد بعد ترتيب قيم البيانات تصاعديًا أو تنازليًا.

السؤال الأساس كيف تحسب مقاييس النزعة المركزية لجدول تكراري بسيط ؟

مقياس **النزعة المركزية** لمجموعة بيانات هو قيمة تتجمّع حولها قيم البيانات. وتُستعمل مقاييس **النزعة المركزية**، وهي أكثر من مقياس واحد، لتحليل بيانات إحصائية وإعطاء فكرة بسيطة عنها، كإيجاد متوسط الرواتب في شركة ما (**الوسط الحسابي**) أو السلعة الأكثر مبيعًا (**المنوال**) أو السن الذي يقسم النزلاء في أحد الفنادق إلى فئتين متساويتين في العدد بعد ترتيب الأعمار تصاعديًا أو تنازليًا. (**الوسيط**)

المفهوم الوسط الحسابي - لجدول تكراري بسيط

لفظيًا: الوسط الحسابي ($\bar{x}$) هو مجموع ناتج ضرب كل قيمة في تكرارها مقسومًا على مجموع التكرارات.

بالرموز: $\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f}$

حيث:

x: قيم البيانات

f: التكرار

إرشاد

يُستعمل الرمز $\sum$ للتعبير عن المجموع.

انتبه!

$x\sum f \neq \sum(x \cdot f)$

146 الوحدة 4 الإحصاء

مثال 1 الوسط الحسابي لجدول تكراري بسيط


الاستيعاب المفاهيمي

مثال 1 الوسط الحسابي لجدول تكراري بسيط

يمثّل الجدول المجاور أعمار طلاب مشاركين في أولمبياد الرياضيات.

أوجد الوسط الحسابي لهذه الأعمار.

العمر x	التكرار f
14	4
15	6
16	5
17	2

الخطوة 1 بناءً على صيغة الوسط الحسابي أكمل الجدول بإضافة عمود ثالث $(x \cdot f)$ يبيّن ناتج ضرب كل قيمة (العمر) في تكراره.

العمر x	التكرار f	$x \cdot f$
14	4	56
15	6	90
16	5	80
17	2	34
المجموع	17	260

14×4

الخطوة 2 أوجد الوسط الحسابي.

قانون الوسط الحسابي $\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f}$

عوّض $= \frac{260}{17}$

بسّط ≈ 15.3

إذن، الوسط الحسابي لأعمار الطلاب المشاركين في أولمبياد الرياضيات يساوي 15.3 سنة تقريبًا.

حاول أن تحلّ! **1.** يمثّل الجدول المجاور أطوال طلاب الصف العاشر بالسنتمتر في إحدى المدارس.
أوجد الوسط الحسابي لهذه الأطوال.

الطول (cm)	التكرار f
160	3
165	6
168	5
170	4

147 الدرس 2-4 مقاييس النزعة المركزية

طرح أسئلة هادفة

س: ماذا يمثل الجدول التكراري ؟
[يمثّل العمود الأيسر العمر x لكل طالب من الطلاب المشاركين في أولمبياد الرياضيات، ويمثّل العمود الأيمن التكرار f لكل عمر من أعمار الطلاب.]

س: ماذا تعني كلمة "تكرار" ؟
[تشير كلمة "تكرار" إلى عدد الطلاب الذين لهم نفس العمر.]

س: متى يستعمل الرمز $\sum$ ؟
[$\sum(x \cdot f)$ هو مجموع نواتج ضرب القيم في تكراراتها.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

1. أنشئ جدولًا تكراريًا مع إضافة $(x \cdot f)$

الطول x (cm)	التكرار f	$x \cdot f$
160	3	480
165	6	990
168	5	840
170	4	680
المجموع	18	2990

الوسط الحسابي لأطوال الطلاب : $\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f} = \frac{2990}{18} \approx 166$

إذن، الوسط الحسابي لأطوال الطلاب يساوي 166 cm تقريبًا.

استنباط الدليل على تفكير الطلاب و استعماله

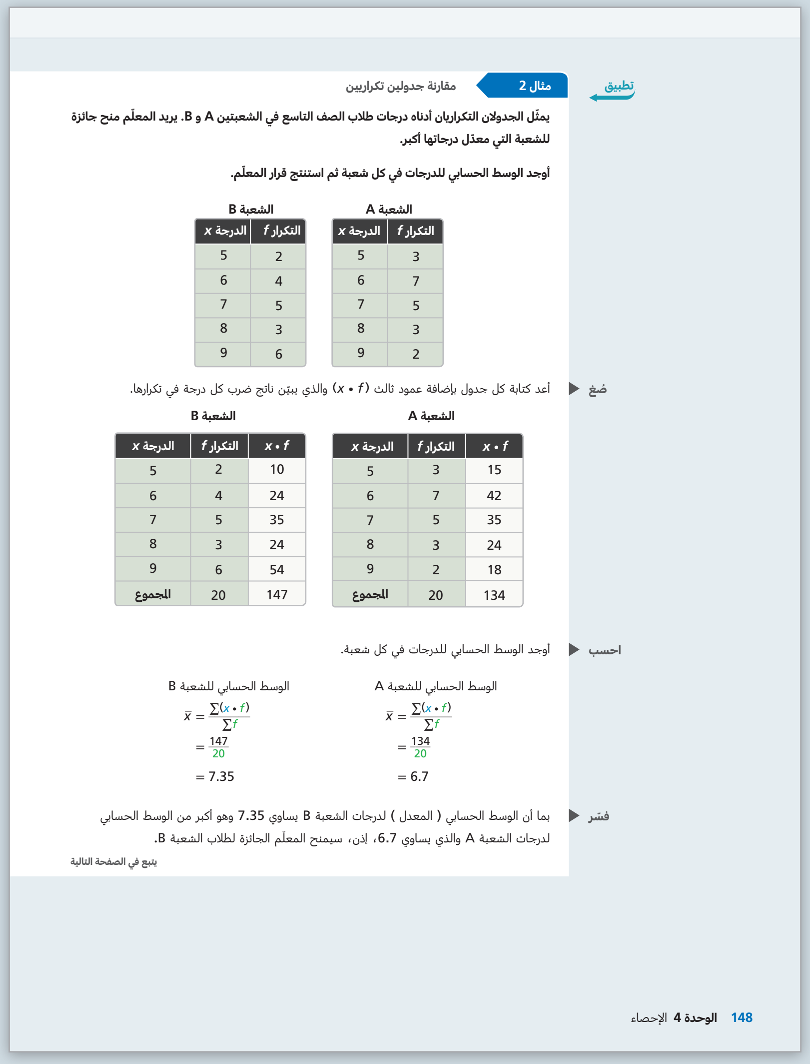
س: كيف نوجد الوسط الحسابي لهذه الأطوال ؟
[نقوم بعملية ضرب طول كل فئة بتكرارها، ثم نجمع نواتج الضرب هذه، ونقسمها على عدد الطلاب.]

مثال 2 مقارنة جدولين تكراريين

طرح أسئلة هادفة

س: ما أهمية استعمال الوسط الحسابي ومتى نحتاج إليه ؟
[إذا كان لدينا جدولان تكراريان أو أكثر نحتاج إلى إيجاد الوسط الحسابي لكل جدول ومقارنتهما ببعضهما البعض لمقارنة قيم البيانات واتخاذ القرارات المناسبة.]

س: لماذا الوسط الحسابي هو المقياس المناسب للمقارنة بين الشعبتين ؟
[لأنه لا توجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات لذلك من الأفضل هنا استعمال الوسط الحسابي و لأن الوسط الحسابي لكل شعبة يمثل درجات الطلاب لهذه الشعبة، وبالتالي فإن الشعبة التي يكون الوسط الحسابي لدرجات طلابها أكبر، تكون درجات طلابها أفضل.]



تطبيق

مثال 2 مقارنة جدولين تكراريين

يمثّل الجدولان التكراريان أدناه درجات طلاب الصف التاسع في الشعبتين A و B. يريد المعلّم منح جائزة للشعبة التي معدّل درجاتها أكبر.

أوجد الوسط الحسابي للدرجات في كل شعبة ثم استنتج قرار المعلّم.

الشعبة A

الدرجة x	التكرار f
5	3
6	7
7	5
8	3
9	2

الشعبة B

الدرجة x	التكرار f
5	2
6	4
7	5
8	3
9	6

صُغ ◀ أعد كتابة كل جدول بإضافة عمود ثالث $(x \cdot f)$ والذي يبيّن ناتج ضرب كل درجة في تكرارها.

الشعبة A

الدرجة x	التكرار f	$x \cdot f$
5	3	15
6	7	42
7	5	35
8	3	24
9	2	18
المجموع	20	134

الشعبة B

الدرجة x	التكرار f	$x \cdot f$
5	2	10
6	4	24
7	5	35
8	3	24
9	6	54
المجموع	20	147

احسب ◀ أوجد الوسط الحسابي للدرجات في كل شعبة.

الوسط الحسابي للشعبة A

$$\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f} = \frac{134}{20} = 6.7$$

الوسط الحسابي للشعبة B

$$\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f} = \frac{147}{20} = 7.35$$

فسّر ◀ بما أن الوسط الحسابي (المعدل) لدرجات الشعبة B يساوي 7.35 وهو أكبر من الوسط الحسابي لدرجات الشعبة A والذي يساوي 6.7، إذن، سيمنح المعلّم الجائزة لطلاب الشعبة B.

يتبع في الصفحة التالية

تعزيز المهارات اللغوية استعمل مع المثالين 2 و 3

القراءة مستوى 1 اطلب من الطلاب قراءة السؤال في المثال 2

س: ما معنى " معدّل " الدرجات ؟ [يُستعمل " معدل " الدرجات أحيانًا بدلًا من " الوسط الحسابي " للدرجات.]

س: ما الذي سوف يعتمده المعلم لتحديد الشعبة التي يمنحها الجائزة ؟ [مقارنة الوسط الحسابي لدرجات الطلاب لتحديد القيمة الأكبر واتخاذ القرار المناسب.]

اطلب من الطلاب قراءة الأسئلة في المثال 3

س: ما معنى كل من " التكرار الأكبر " و " الأكثر تكرارًا " ؟
[التكرار الأكبر تعني القيمة الأكبر في عمود التكرارات، والأكثر تكرارًا تعني القيمة التي تقابل التكرار الأكبر أو أكبر تكرار.]

س: كيف تجد وسيط البيانات الذي يتضمن عددًا فرديًا n من القيم ؟ [إذا كان عدد القيم n فرديًا، فإن الوسيط يساوي القيمة التي تقابل الرتبة $\frac{n+1}{2}$. إذا كان عدد القيم n زوجيًا، فإن الوسيط يساوي الوسط الحسابي للقيمتين اللتين لهما الرتبتان $\frac{n}{2}$ و $\frac{n}{2}+1$]

الكتابة مستوى 2 اطلب من الطلاب قراءة المثالين 2 و 3 ثم اكتب تعريفًا لكل ما يلي :

- الوسط الحسابي
- المنوال
- الوسيط

اعرض جدولًا تكراريًا يبيّن قيمًا من بيانات محددة x والتكرار f المقابل لكل x وناتج الضرب $x \cdot f$ ، ثم أوجد الوسط الحسابي والمنوال والوسيط لهذه البيانات.

التحدث مستوى 3 اطلب من الطلاب العمل ضمن مجموعات صغيرة لمناقشة الفرق بين الوسط الحسابي والوسيط لقيم بيانات معطاة.

س: هل يمثّل الوسط الحسابي قيمة يقل عنها 50% من قيم البيانات ؟ أعطِ مثالًا لتبرير إجابتك.
[لا؛ الوسط الحسابي بصورة عامة لا يمثل قيمة يقل عنها 50% من قيم البيانات. مثال على ذلك : 1, 3, 4, 5, 6 هي بيانات وسطها الحسابي يساوي 4
يوجد عددان أصغر من 4 والنسبة المئوية لهما $\frac{2}{5} \times 100\% = 40\%$ وهي نسبة أقل من 50%]

تابع المثال 2

حاول أن تحلّ! الإجابات

.2 أنشئ جدولًا تكراريًا مع إضافة $(x \cdot f)$ لكل جدول.

جدول فيصل

العدد x	التكرار f	$x \cdot f$
1	3	3
2	1	2
3	3	9
4	3	12
5	4	20
6	6	36
المجموع	20	82

الوسط الحسابي لرميات فيصل : $\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f} = \frac{82}{20} = 4.1$

جدول سعيد

العدد x	التكرار f	$x \cdot f$
1	2	2
2	3	6
3	5	15
4	4	16
5	4	20
6	2	12
المجموع	20	71

الوسط الحسابي لرميات سعيد : $\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f} = \frac{71}{20} = 3.55$

بما أن : $3.55 < 4.1$، إذن، فيصل هو الفائز في هذه المباراة.

مثال 3 الوسيط والمنوال لجدول تكراري بسيط

طرح أسئلة هادفة

س: كيف تجد المنوال من جدول تكراري بسيط ؟

[من قراءة عمود التكرار f. القيمة التي تقابل التكرار الأكبر هي المنوال.]

س: هل لبعض البيانات أكثر من منوال ؟

[نعم، إذا وجدت في جدول تكراري f أعداد متساوية وأكبر من بقية الأعداد، فإن كل قيمة من قيم البيانات التي تقابل عددًا من هذه الأعداد تعد منوالًا.]

س: هل يمكن أن لا يكون هناك منوال لبعض البيانات ؟

[نعم. عندما تكون جميع التكرارات أعدادًا متساوية.]

س: كيف تجد الوسيط لبيانات معطاة تتضمن n من القيم ؟

[أولًا رتّب البيانات في الجدول تصاعديًا أو تنازليًا، وسوف نعتمد هنا الترتيب التصاعدي، ثم أوجد التكرار التراكمي التصاعدي عن طريق إضافة كل تكرار من الجدول التكراري إلى مجموع القيم السابقة. إذا كان n عددًا فرديًا، تكون رتبة الوسيط $\frac{n}{2}$ ، ويكون الوسيط القيمة المقابلة لهذه الرتبة الواقعة في عمود التكرار التراكمي. وإذا كان n عددًا زوجيًا، يكون الوسيط الوسط الحسابي للقيمتين المقابلتين للتكرارين التراكميين $\frac{n}{2}$ و $\frac{n}{2} + 1$.]

تابع المثال 2

حاول أن تحلّ! **.2** اشترك كل من فيصل وسعيد في مباراة لرمي مكعّب مرقّم من 1 إلى 6 عشرين مرة وتم تسجيل النتائج في الجدولين أدناه. تقتضي قواعد اللعبة بأن يفوز اللاعب الذي يحصل على وسط حسابي أكبر بجائزة. أوجد الوسط الحسابي لنتائج كل من فيصل وسعيد وقرّر من سيكون الفائز.

جدول فيصل

العدد x	التكرار f
1	3
2	1
3	3
4	3
5	4
6	6

جدول سعيد

العدد x	التكرار f
1	2
2	3
3	5
4	4
5	4
6	2

المفهوم الوسيط- المنوال

المنوال هو القيمة أو القيم الأكثر شيوعًا أو تكرارًا في مجموعة البيانات.

الوسيط هو القيمة التي يقل عنها 50% من البيانات.

لتحديد الوسيط في جدولٍ تكراري بسيط يتم احتساب مجموع التكرارات $(\sum f)$:

إذا كان $\sum f$ عددًا فرديًا n، فإن الوسيط يساوي القيمة التي ترتيبها $\frac{n+1}{2}$

إذا كان $\sum f$ عددًا زوجيًا n، فإن الوسيط يساوي الوسط الحسابي للقيمتين اللتين ترتيبهما $\frac{n}{2}$ و $\frac{n}{2} + 1$

إرشاد

الوسيط هو القيمة التي تتوسط البيانات بعد ترتيبها تصاعديًا أو تنازليًا.

تطبيق

مثال 3 الوسيط والمنوال لجدول تكراري بسيط

.A كتب عادل 57 كلمة يتراوح عدد أحرفها من 3 إلى 6 حروف، وقد سجّلها في الجدول المجاور. أوجد المنوال والوسيط لبيانات هذا الجدول.

عدد أحرف الكلمة	التكرار f
3	12
4	16
5	17
6	12

الخطوة 1 أوجد المنوال.

بما أن المنوال هو القيمة التي لها التكرار الأكبر، فإن المنوال هو القيمة 5 لأن لها التكرار الأكبر وهو 17

الخطوة 2 أوجد الوسيط.

بما أن عدد القيم 57 وهو عدد فردي فإن رتبة الوسيط هي

$$\frac{n+1}{2} = \frac{57+1}{2}$$
$$= 29$$

أي إن الوسيط هو طول الكلمة التي تقابل الرتبة 29، وبما أنه عند الرتبة 29 طول الكلمة 5 أحرف، إذن، الوسيط يساوي 5

إرشاد

إذا كانت جميع القيم لها نفس التكرار فإنه لا يوجد منوال.

يتبع في الصفحة التالية


تابع المثال 3

B. يمثّل الجدول التالي أطوال 54 قلم تلوين لأقرب سنتمتر. أوجد المنوال والوسيط لبيانات هذا الجدول.

التكرار f	الطول x
13	6
14	8
14	10
13	12

الخطوة 1 أوجد المنوال.
لاحظ من الجدول أن الطولين 8 و 10 لهما نفس التكرار 14 وهو الأكبر.
وهكذا فإن لهذا الجدول منوالين وهما 8 و 10

الخطوة 2 بما أن عدد القيم 54 وهو عدد زوجي، فإن الوسيط يساوي الوسط الحسابي للقيمتين اللتين ترتيبهما $\frac{n}{2}$ و $\frac{n}{2}+1$ ، أي متوسط القيمتين اللتين ترتيبهما 27 و 28، بما أنه في الرتبة 27 طول القلم 8 cm وفي الرتبة 28 طول القلم 10 cm ، فإن، الوسيط يساوي الوسط الحسابي للطولين 8 cm و 10 cm:

$$\text{الوسيط} = \frac{8+10}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

إذن، الوسيط يساوي 9 cm

حاول أن تحلّ! 3. a. يمثّل الجدول المجاور كتل 51 طفلًا حديثي الولادة لأقرب كيلوجرام. أوجد المنوال والوسيط لبيانات هذا الجدول.

التكرار f	الكتلة x
11	2.5
14	3
13	3.5
13	4

b. يمثّل الجدول المجاور عدد صفحات 60 قصة قصيرة. أوجد المنوال والوسيط لبيانات هذا الجدول.

تكرار f	عدد الصفحات x
12	15
18	20
16	25
14	30

150 الوحدة 4 الإحصاء

تابع المثال 3

حاول أن تحلّ! الإجابات

3. a. نستنتج من الجدول أن المنوال هو القيمة المقابلة لأكبر تكرار، وهو العدد 14، وبالتالي فإن المنوال يساوي 3 kg
مجموع التكرارات يساوي 51 وهو عدد فردي.
لإيجاد الوسيط أنشئ جدول التكرار التراكمي التصاعدي :

التكرار التراكمي التصاعدي	التكرار f	الكتلة x
11	11	2.5
25	14	3
38	13	3.5
51	13	4

بما أن مجموع التكرارات يساوي 51 وهو عدد فردي، تكون رتبة الوسيط : $\frac{(51+1)}{2} = 26$. يقع التكرار التراكمي 26 بين التكرارين التراكميين 25 و 38، إذن يكون الوسيط القيمة المقابلة للتكرار التراكمي 38 أي 3.5 kg
إذن، الوسيط يساوي 3.5 kg

b. نستنتج من الجدول أن المنوال هو القيمة المقابلة للعدد 18 لأنه التكرار الأكبر. وبالتالي فإن المنوال يساوي 20 صفحة.
لإيجاد الوسيط أنشئ جدول التكرار التراكمي التصاعدي :

التكرار التراكمي التصاعدي	التكرار f	عدد الصفحات x
12	12	15
30	18	20
46	16	25
60	14	30

بما أن مجموع التكرارات يساوي 60 وهو عدد زوجي، لذا لإيجاد الوسيط نجد القيمة المقابلة للرتبة $30 = \frac{60}{2}$ من الجدول التكراري التراكمي وهي 20، ثم نجد القيمة المقابلة للرتبة $31 = 1 + \frac{60}{2}$ والتي تقع بين التكرارين التراكميين 30 و 46 فتكون القيمة المقابلة لهذه الرتبة هي 25 لأنها تقابل التكرار التراكمي 46، ثم نحسب الوسط الحسابي للعددين 20 و 25 : $22.5 = \frac{(25+20)}{2}$.
إذن، الوسيط يساوي 22.5 صفحة.

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 3 قد يجد الطلاب صعوبة في تحديد المنوال أو الوسيط لبيانات معطاة في جدول تكراري بسيط. لمساعدتهم على تخطّي هذه الصعوبة، اعرض أمامهم المثال التالي :

التكرار f	الطول (cm)
3	166
5	168
6	172
2	178

أوجد المنوال والوسيط للبيانات المعطاة في الجدول التكراري البسيط الذي يبيّن أطوال بعض الطلاب مقربة إلى أقرب سنتمتر.

س: كيف تجد المنوال لهذه البيانات ؟ [التكرار الأكبر في الجدول هو 6 ويقابل الطول 172 cm، إذن، المنوال هو 172 cm]

س: كيف تجد الوسيط لهذه البيانات ؟ [نرتب أولًا هذه البيانات تصاعديًا أو تنازليًا. على سبيل المثال، نرتبها تصاعديا كما يلي :
166, 166, 166, 168, 168, 168, 168, 168, 172, 172, 172, 172, 172, 172, 178, 178
عدد القيم يساوي 16 وهو عدد زوجي.
- القيمة المقابلة للرتبة $8 = \frac{16}{2}$ تساوي 168 cm
- القيمة المقابلة للرتبة $9 = 1 + \frac{16}{2}$ تساوي 172 cm

$170 = \frac{168+172}{2}$. إذن، وسيط أطوال الطلاب يساوي 170 cm
وضّح للطلاب أن المنوال والوسيط عددان في قيم البيانات لا في التكرارات.]

ملخص المفهوم مقاييس النزعة المركزية

س: متى نحتاج إلى إيجاد مقاييس النزعة المركزية لبيانات معطاة في جداول تكرارية بسيطة ؟

[عندما نكون بحاجة إلى تحليل هذه البيانات ومقارنتها لاتخاذ قرارات محددة.]

خطأ شائع

a. قد يخطئ الطلاب في إيجاد الوسط الحسابي لجدول تكراري بسيط فلا يكملون الجدول بإضافة العمود $(x \cdot f)$ لإيجاد $\sum(x \cdot f)$ و $\sum f$ ثم استعمال القانون : $\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f}$ بل باستعمال القانون $\bar{x} = \frac{\sum x}{\sum f}$.

أرشدهم إلى ضرورة إكمال الجدول بإضافة العمود الذي يتضمن $(x \cdot f)$.

b. قد يخطئ الطلاب في إيجاد الوسيط فيعتقدون أن رتبة الوسيط هي قيمته. اعرض أمامهم أمثلة بسيطة على بيانات مرتبة تصاعديًا أو تنازليًا، واطلب منهم إيجاد رتبة الوسيط والقيمة المقابلة لهذه الرتبة في البيانات.

c. أخبر الطلاب أن المنوال هو القيمة المقابلة لأكبر تكرار في البيانات، وليس قيمة التكرار الأكبر.

ملخص المفهوم مقاييس النزعة المركزية

	الوسط الحسابي	المنوال	الوسيط
لفظيًا	الوسط الحسابي لجدول تكراري بسيط هو مجموع ناتج ضرب كل قيمة في تكرارها مقسومًا على مجموع التكرارات.	هو القيمة أو القيم الأكثر تكرارًا.	• الوسيط هو القيمة التي يقل عنها 50% من البيانات. • لتحديد الوسيط في جدول تكراري بسيط يتم احتساب مجموع التكرارات $\sum f$: إذا كان $\sum f$ عددًا فرديًا n، فإن الوسيط هو القيمة التي ترتيبها $\frac{n+1}{2}$ إذا كان $\sum f$ عددًا زوجيًا n، فإن الوسيط يساوي الوسط الحسابي للقيمتين اللتين ترتيبهما $\frac{n}{2}$ و $\frac{n}{2}+1$

بالرموز

$$\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f}$$

حيث:

x: قيم البيانات

f: تكرار كل قيمة

عدديًا

يمثّل الجدول المجاور أسعار بعض السلع بالريال القطري في متجر للأدوات الكهربائية. أوجد الوسط الحسابي لهذه الأسعار.

السعر x	تكرار f
50	3
70	8
100	6
120	4

الخطوة 1 أعد كتابة الجدول بإضافة عمود ثالث $(x \cdot f)$ الذي يوضّح ناتج ضرب كل سعر في تكراره.

السعر x	التكرار f	$x \cdot f$
50	3	150
70	8	560
100	6	600
120	4	480
المجموع	21	1 790

الخطوة 2 أوجد الوسط الحسابي.

قانون الوسط الحسابي $\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f}$

عوّض $= \frac{1\,790}{21}$

بسّط ≈ 85.2

إذن، متوسط سعر السلعة الواحدة في هذا المتجر يساوي QR 85.2 تقريبًا.

الدرس 4-2 مقاييس النزعة المركزية 151

عبّر عن فهمك|طبّق فهمك

الإجابات

.1 الوسط الحسابي هو $\bar{x} = \dfrac{\sum(x \cdot f)}{\sum f}$ حيث يمثل x قيم البيانات، ويمثل f التكرار، ويمثل $\sum(x \cdot f)$ مجموع نواتج ضرب x في f، و يمثل $\sum f$ مجموع التكرارات.
المنوال هو القيمة المقابلة لأكبر تكرار في مجموعة البيانات.
الوسيط هو القيمة المقابلة للرتبة $\dfrac{n+1}{2}$ في الجدول التكراري التراكمي التصاعدي في مجموعة البيانات إذا كان مجموع التكرارات n عددًا فرديًا، ويساوي الوسط الحسابي للقيمتين المقابلتين للرتبتين $\dfrac{n}{2}$ و $\dfrac{n}{2} + 1$ في الجدول التكراري التراكمي التصاعدي إذا كان مجموع التكرارات عددًا زوجيًا.

.2 قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة :

القيمة x	التكرار f	$x \cdot f$
6	2	12
9	3	27
15	3	45
18	2	36
المجموع	10	120

في الجدول أعلاه،

- الوسط الحسابي : $\bar{x} = \dfrac{120}{10} = 12$

القيمة x	التكرار f	التكرار التراكمي التصاعدي
6	2	2
9	3	5
15	3	8
18	2	10

- بما أن مجموع التكرارات يساوي 10 وهو عدد زوجي، نحسب أولًا $\dfrac{n}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$ والقيمة المقابلة للتكرار 5 في الجدول التكراري التراكمي تساوي 9

ثم نحسب $\dfrac{n}{2} + 1 = 6$ ، والقيمة المقابلة للتكرار 6 في الجدول التكراري التراكمي تساوي 15

فيكون الوسيط : $\dfrac{9+15}{2} = 12$

إذن، الوسيط يساوي 12

ومنه: الوسط الحسابي = الوسيط = 12

.3 لنأخذ الجدول التكراري التالي :

القيمة x	التكرار f	$x \cdot f$
x_1	f_1	$x_1 \cdot f_1$
x_2	f_2	$x_2 \cdot f_x$
•	•	•
•	•	•
x_n	f_n	$x_n \cdot f_n$

المعطيات هي: الوسط الحسابي :

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \ldots + x_n \cdot f_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n} = \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f} = 40$$

عبّر عن فهمك

.1 السؤال الأساس كيف تحسب مقاييس النزعة المركزية لجدول تكراري بسيط ؟

.2 المصطلحات أنشئ جدولًا تكراريًّا بسيطًا يتساوى فيه الوسط الحسابي مع الوسيط.

.3 برّر منطقيًّا إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة بيانات هو 40 وأضفتَ العدد 3 إلى كل قيمة من قيمها، فكم يصبح وسطها الحسابي ؟

.4 حلّل الخطأ طلب الأستاذ من طلابه إيجاد الوسط الحسابي للجدول التكراري أدناه.

القيمة x	التكرار f
10	1
15	4
20	5
25	2

في ما يلي إجابة إبراهيم عن هذا السؤال.

$$\bar{x} = \frac{10+15+20+25}{4} = 17.5$$

✗

أوجد خطأ إبراهيم وصححه.

.5 برّر منطقيًّا هل يمكن وجود أكثر من منوال في الجدول التكراري ؟ وضّح إجابتك.

طبّق فهمك

.6 أوجد كلًّا من الوسط الحسابي والمنوال لبيانات الجدول التكراري أدناه.

القيمة x	التكرار f
4	2
6	5
7	4
10	3

.7 أوجد كلًّا من الوسط الحسابي والوسيط لبيانات الجدول التكراري أدناه.

القيمة x	التكرار f
5	6
10	5
15	4
20	5

.8 يمثّل الجدول أدناه قيم مبالغ مالية بالريال القطري كانت بحوزة مجموعة من الطلاب في رحلة مدرسية.

القيمة x	التكرار f
20	4
25	6
30	3
40	2

.a أوجد الوسط الحسابي لبيانات هذا الجدول.
.b كم سيصبح الوسط الحسابي إذا أنفق كل طالب QR 10 ؟ وضّح إجابتك.

.9 يقول سعيد إن الوسيط والمنوال لبيانات الجدول أدناه متساويان. هل هو على صواب ؟ وضّح إجابتك.

القيمة x	التكرار f
2	4
5	6
8	5
10	4

152 الوحدة 4 الإحصاء

إذا أضفنا العدد 3 إلى كل القيم يصبح الوسط الحسابي :

$$\frac{(x_1+3)f_1 + (x_2+3)f_2 + \ldots + (x_n+3)f_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n}$$
$$= \frac{(x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \ldots + x_n \cdot f_n) + 3(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n} = \frac{\sum(x \cdot f) + 3\sum f}{\sum f}$$
$$= \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f} + \frac{3\sum f}{\sum f} = 40 + 3 = 43$$

إذن، يصبح الوسط الحسابي 43

.4 أوجد إبراهيم الوسط الحسابي باستعمال مجموع قيم البيانات، ثم قسم هذا المجموع على عدد القيم، وهذا خطأ. فالقيمة في البسط نحصل عليها بجمع نواتج ضرب كل القيم في تكراراتها، والقيمة في المقام هي مجموع التكرارات.

القيمة x	التكرار f	$x \cdot f$
10	1	10
15	4	60
20	5	100
25	2	50
المجموع	12	220

الإجابة الصحيحة :

الوسط الحسابي : $\dfrac{\sum(x \cdot f)}{\sum f} = \dfrac{220}{12} = 18.\overline{3}$

الإجابات

5. قد تكون للبيانات أكثر من منوال. مثال على ذلك :

القيمة x	التكرار f
7	3
10	5
15	2
17	5

للبيانات في الجدول التكراري أعلاه منوالان هما 10 و 17 لأن لهما نفس التكرار، 5، وهو التكرار الأكبر.

6.

القيمة x	التكرار f	$x \cdot f$
4	2	8
6	5	30
7	4	28
10	3	30
المجموع	14	96

الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f} = \frac{96}{14} \approx 6.86$

المنوال يساوي 6 لأنه يقابل التكرار الأكبر وهو العدد 5

7.

القيمة x	التكرار f	$x \cdot f$	التكرار التراكمي التصاعدي
5	6	30	6
10	5	50	11
15	4	60	15
20	5	100	20
المجموع	20	240	

الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f} = \frac{240}{20} = 12$

الوسيط : بما أن مجموع التكرارات 20 وهو عدد زوجي، لذا، نجد القيمة المقابلة للرتبة $\frac{20}{2} = 10$ من الجدول التكراري التراكمي والتي تقع بين التكرارين التراكميين 6 و 11 فتكون القيمة المقابلة لهذه الرتبة هي 10 لأنها تقابل التكرار التراكمي 11، ثم نجد القيمة المقابلة للرتبة $\frac{20}{2} + 1 = 11$ ، فتكون القيمة من الجدول التكراري التراكمي تساوي 10 أيضًا.

وبالتالي، الوسيط يساوي : $\frac{10 + 10}{2} = 10$

8. **a.**

القيمة x	التكرار f	$x \cdot f$
20	4	80
25	6	150
30	3	90
40	2	80
المجموع	15	400

الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f} = \frac{400}{15} \approx 26.7$

إذن، الوسط الحسابي يساوي QR 26.7.

b. إذا أنفق كل طالب QR 10 يصبح الجدول التكراري كما يلي :

القيمة x	التكرار f	$x \cdot f$
10	4	40
15	6	90
20	3	60
30	2	60
المجموع	15	250

الوسط الحسابي يساوي : $\bar{x} = \frac{250}{15} \approx 16.7$

إذن، الوسط الحسابي يساوي QR 16.7

9. المنوال لهذه البيانات هو القيمة 5 المقابلة لأكبر تكرار 6 ، مجموع التكرارات يساوي 19 والقيمة المقابلة للرتبة $10 = \frac{19+1}{2}$ تساوي 5 أيضًا، إذن سعيد على صواب.

تدرّب وحُل مسائل

دليل المهام

أساسي	متقدم
10-23	10-23

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	14	1
	10, 12, 18, 22	2
	23	3
2	15	1
	20	3
3	16, 17, 21	1
	11, 13, 19	3

الإجابات

10. نوجد نظامًا من معادلتين بمتغيرين.

$x + 8 + 7 + y = 25$

$\bar{x} = \dfrac{(1 \cdot x) + (2 \times 8) + (3 \times 7) + (4 \cdot y)}{25} = 2.6$

إذن، $x + y = 10$

$x + 4y = 28$

بالحل نجد أن: $x = 4$ و $y = 6$

11. يصبح لدينا الجدول التالي :

التكرار التراكمي	$x \cdot f$	التكرار f	القيمة x
1	2	1	2
3	20	2	10
7	60	4	15
12	100	5	20
15	75	3	25
16	40	1	40
	297	16	المجموع

بما أن مجموع التكرارات 16 وهو عدد زوجي، لذا لإيجاد الوسيط نجد القيمة المقابلة للرتبة $8 = \frac{16}{2}$ من الجدول التكراري التراكمي والتي تقع بين التكرارين التراكميين 7 و 12 فتكون القيمة المقابلة لهذه الرتبة هي 20 لأنها تقابل التكرار التراكمي 12، ثم نجد القيمة المقابلة للرتبة $9 = 1 + \frac{16}{2}$ والتي تقع بين التكرارين التراكميين 7 و 12 فتكون القيمة المقابلة لهذه الرتبة هي القيمة المقابلة للتكرار التراكمي 12 وهي 20، ثم نحسب الوسط الحسابي للعددين 20 و 20 : وبالتالي الوسيط هو $20 = \frac{(20 + 20)}{2}$

- المنوال يبقى هو نفسه : 20
- الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{297}{16} = 18.5625$

إذن، الوسط الحسابي يتغير.

تدرّب وحُل مسائل

عزّز فهمك

10. **روابط في الرياضيات** يمثّل الجدول التالي كتل 25 دجاجة بالكيلوجرام في مزرعة سالم. إذا كان متوسط كتل هذه الدجاجات يساوي 2.6 kg، أوجد قيمة كل من x و y.

تكرار	الكتلة (kg)
x	1
8	2
7	3
y	4

11. **برّر منطقيًّا** أنشأ عبدالرحمن الجدول التكراري التالي:
أوجَد عبدالرحمن مقاييس النزعة المركزية كما يلي:
الوسيط 20، المنوال 20، الوسط الحسابي 18.2، ثم أضاف إلى هذا الجدول القيمتين 2 و 40 مع تكرار 1 لكل منهما.
أي المقاييس يتأثر: الوسيط أو المنوال أو الوسط الحسابي ؟ وضّح إجابتك.

التكرار f	القيمة x
2	10
4	15
5	20
3	25

12. **ابنِ الحجج الرياضية** يقول يوسف إن الوسط الحسابي لبيانات الجدول التكراري المجاور يساوي 20، بيّن خطأ يوسف من دون إجراء أي عمليات حسابية.

التكرار f	القيمة x
4	8
5	10
2	14
9	20

13. **مهارات التفكير العليا**

a. حدّد القيمة التي تمثّل وسيط بيانات الجدول أدناه حيث إن القيم مرتبة تصاعديًّا.

b. أوجد قيمة a التي تجعل الوسيط مساويًا للوسط الحسابي.

التكرار f	القيمة x
3	16
4	a
6	20
2	30

تدرّب

14. يمثّل الجدول أدناه أسعار عدد من الآلات الحاسبة بالريال القطري والمتوافرة في إحدى المكتبات. أوجد الوسط الحسابي لهذه الأسعار. انظر المثال 1

التكرار f	السعر x
4	40
3	50
5	60
2	70

15. يمثّل الجدولان أدناه المسافة بالكيلومتر التي قطعتها مجموعتان من هواة الركض. تحصل المجموعة التي قطعت متوسط مسافة أكبر على ميدالية. أوجد الوسط الحسابي للمسافة التي قطعتها كل مجموعة ثم حدّد المجموعة الفائزة. انظر المثال 2

التكرار f	المسافة x
3	10
5	15
5	20
7	25

التكرار f	المسافة x
8	10
6	15
4	20
2	25

16. يمثّل الجدول أدناه نتائج 55 طالبًا في اختبار مادة العلوم. أوجد منوال ووسيط هذه الدرجات. انظر المثال 3

التكرار f	الدرجة x
12	70
16	75
14	80
13	90

17. يمثّل الجدول أدناه أطوال 58 حبلًا في أحد المتاجر لأقرب متر. أوجد منوال ووسيط هذه الأطوال. انظر المثال 3

التكرار f	الطول x
12	6
16	7
14	10
16	12

12. الوسط الحسابي هو قيمة من البيانات المعطاة تكون دائمًا أكبر من القيمة الصغرى وأصغر من القيمة العظمى في هذه البيانات، وبالتالي لا يمكن أن يكون الوسط الحسابي 20 لأنه القيمة العظمى في البيانات.

13. **a.** مجموع التكرارات يساوي 15 وهو عدد فردي.

إذن، رتبة الوسيط هي $8 = \frac{15 + 1}{2}$ وبالتالي الوسيط هو القيمة المقابلة للرتبة 8 وهي 20

b. الوسط الحسابي :

$\bar{x} = \dfrac{(16 \times 3) + (4 \times a) + (20 \times 6) + (30 \times 2)}{15}$

إذا كان الوسيط يساوي الوسط الحسابي نحصل على المعادلة التالية : $\frac{228 + 4a}{15} = 20$

ومنه : $a = 18$

الإجابات

14. أكمل الجدول التكراري بإضافة عمود ثالث يمثل $(x \cdot f)$.

السعر x (QR)	التكرار f	$x \cdot f$
40	4	160
50	3	150
60	5	300
70	2	140
المجموع	14	750

الوسط الحسابي للأسعار : $\bar{x} = \frac{750}{14} \approx 53.57$

15. نكمل الجدولين :

المجموعة الأولى

المسافة x	التكرار f	$x \cdot f$
10	3	30
15	5	75
20	5	100
25	7	175
المجموع	20	380

الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{380}{20} = 19$

المجموعة الثانية

المسافة x	التكرار f	$x \cdot f$
10	8	80
15	6	90
20	4	80
25	2	50
المجموع	20	300

الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{300}{20} = 15$

بما أن $15 < 19$، فإن المجموعة الأولى هي التي سوف تحصل على ميدالية.

16. بما أن 16 هو التكرار الأكبر، فإن المنوال هو الدرجة 75

القيمة x	التكرار f	التكرار التراكمي التصاعدي
70	12	12
75	16	28
80	14	42
90	13	55

بما أن مجموع التكرارات 55 وهو عدد فردي، تكون رتبة الوسيط : $\frac{(55+1)}{2} = 28$ ، فيكون الوسيط القيمة المقابلة للتكرار التراكمي 28 أي 75

إذن الوسيط هو القيمة المقابلة للرتبة 28، أي الدرجة 75، في البيانات.

17. بما أن 16 هو التكرار الأكبر و يقابل كل من الطول 7 m والطول 12 m، إذن، للبيانات منوالان هما الطول 7 m والطول 12 m

القيمة x	التكرار f	التكرار التراكمي التصاعدي
6	12	12
7	16	28
10	14	42
12	16	58

بما أن مجموع التكرارات 58 وهو عدد زوجي، لذا لإيجاد الوسيط نجد القيمة المقابلة للرتبة $\frac{58}{2} = 29$ من الجدول التكراري التراكمي والتي تقع بين التكرارين التراكميين 28 و 42 فتكون القيمة المقابلة لهذه الرتبة هي 10 لأنها تقابل التكرار التراكمي 42، ثم نجد القيمة المقابلة للرتبة $\frac{58}{2} + 1 = 30$ والتي تقع بين التكرارين التراكميين 28 و 42 فتكون القيمة المقابلة لهذه الرتبة هي القيمة المقابلة للتكرار التراكمي 42 وهي 10، ثم نحسب الوسط الحسابي للعددين 10 و 10 : وبالتالي الوسيط هو $\frac{(10+10)}{2} = 10$

إذن، الوسيط هو الطول 10 m

الإجابات

18. a. أكمل الجدول التكراري :

السعر x (QR)	التكرار f	$x \cdot f$
300	6	1 800
400	12	4 800
500	10	5 000
600	4	2 400
المجموع	32	14 000

الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{14\ 000}{32} = 437.5$

هذا يعني أن الوسط الحسابي لسعر بيع الحذاء أو معدل المبيع للأحذية في هذا الشهر يساوي QR 437.5

b. أكمل الجدول التكراري الجديد :

السعر x (QR)	التكرار f	$x \cdot f$
300	6	1 800
400	24	9 600
500	20	10 000
600	4	2 400
المجموع	54	23 800

الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{23\ 800}{54} \approx 440.74$

إذن الوسط الحسابي الجديد لمبيعات الأحذية هو QR 440.74

19. a. أكمل الجدول التكراري :

الطول x (cm)	التكرار f	$x \cdot f$
5	4	20
10	6	60
12	5	60
20	5	100
المجموع	20	240

الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{240}{20} = 12$

إذن، الوسط الحسابي لهذا الجدول هو 12 cm

b. أكمل الجدول الجديد، ثم اكتب معادلة تمثل الوسط الحسابي.

الطول x (cm)	التكرار f	$x \cdot f$
5	a	$5a$
10	6	60
12	5	60
20	5	100
المجموع	$16 + a$	$220 + 5a$

الوسط الحسابي الجديد : $\frac{220 + 5a}{16 + a} = 10$

نستنتج أن $a = 12$.

إذن، العدد الجديد للشرائط التي طولها 5 cm هو 12

طبّق

18. نمذج يمثّل الجدول التالي عدد الأحذية المبيعة في أحد المتاجر بحسب أسعارها في أحد الأشهر.

السعر QA	التكرار f
300	6
400	12
500	10
600	4

a. أوجد الوسط الحسابي لهذا الجدول وفسّر معناه.

b. أجرى صاحب المحل تنزيلات في الشهر التالي، فتضاعفت مبيعات الأحذية ذات السعرين 400 و 500 فيما بقيت مبيعات الأحذية ذات السعرين 300 و 600 كما هي. أوجد الوسط الحسابي الجديد.

19. فكّر وثابر في الحل يمثّل الجدول التالي الأطوال بالسنتمتر لبعض الشرائط الملوّنة لدى ليلى.

الطول	التكرار f
5	4
10	6
12	5
20	5

a. أوجد الوسط الحسابي لهذا الجدول.

b. تغيّر عدد الشرائط التي طول كل منها 5 cm فيما بقي عدد الشرائط الباقية كما هو وأصبح الوسط الحسابي الجديد يساوي 10 cm.

أوجد عدد الشرائط الجديد التي طولها يساوي 5 cm

c. تقول ليلى إن قيم الوسط الحسابي والوسيط والمنوال متساوية في بيانات الجدول الجديد. هل هي على صواب ؟ وضّح إجابتك.

20. ابنِ الحجج الرياضية يمثّل الجدولان أدناه توزيع الأعضاء في ناديين مختلفين بحسب أعمارهم.

نادي A

العمر x	التكرار f
15	4
18	10
20	10
25	8

نادي B

العمر x	التكرار f
16	3
19	9
21	11
24	9

a. أوجد الوسط الحسابي لبيانات كل نادٍ ثمّ فسّر معناه.

b. هل يمكنك استعمال إجابتك في (a) كي توجد الوسط الحسابي لبيانات الناديين معًا ؟

c. أنشئ جدولًا تكراريًّا لبيانات أعضاء الناديين معًا ثم تحقق من إجابتك في (b).

تدرّب على اختبار

21. اختر كل ما يصح حول الجدول التكراري أدناه:

القيمة x	التكرار f
10	5
15	6
20	8
25	6

A. الوسط الحسابي 20 ومجموع التكرارات 30

B. الوسط الحسابي 18 ومجموع التكرارات 25

C. الوسط الحسابي 18 والمنوال 20

D. الوسط الحسابي 25 والوسيط 20

22. اختبار SAT/ACT أوجد قيمة x التي تجعل الوسط الحسابي للجدول التالي يساوي 9

القيمة x	التكرار f
5	4
8	3
10	x
12	5

Ⓐ 4

Ⓑ 5

Ⓒ 6

Ⓓ 8

23. مهمة أدائية أجرى الأستاذ أحمد اختبارًا للرياضيات لطلاب أحد الصفوف وعددهم 20 طالبًا، وكانت الدرجات متدنية إلى حد ما. أعاد الأستاذ أحمد توزيع أسس التصحيح فازدادت درجة كل طالب بمعدل 5 نقاط وأصبح الوسط الحسابي لكل الدرجات 72، بناءً للتوزيع الجديد، نال 20% من طلاب الصف الدرجة 80 فيما نال ضعف هؤلاء الدرجة 70 وكان عدد الذين نالوا الدرجة 65 يساوي 3 أضعاف عدد الذين نالوا الدرجة 85

الجزء A أنشئ جدولًا تكراريًّا يمثّل التوزيع الجديد، ثمّ استنتج الجدول التكراري الأصلي.

الجزء B تبيّن أنه يوجد خطأ في احتساب درجات نصف الطلاب الذين نالوا الدرجة 70 في التصحيح الجديد إذ إن كلًّا منهم يستحق الدرجة 75

صحّح الجدول التكراري وكذلك الوسط الحسابي.

154 الوحدة 4 الإحصاء

c. الوسط الحسابي يساوي 10 cm

المنوال يساوي 5 cm

القيمة x	التكرار f	التكرار التراكمي التصاعدي
5	4	4
10	6	10
12	5	15
20	5	20

بيما أن مجموع التكرارات 20 وهو عدد زوجي، لذا لإيجاد الوسيط نجد القيمة المقابلة للرتبة $\frac{20}{2} = 10$ من الجدول التكراري التراكمي، فتكون القيمة المقابلة لهذه الرتبة هي القيمة المقابلة لها وهي 10، ثم نجد القيمة المقابلة للرتبة $\frac{20}{2} + 1 = 11$ والتي تقع بين التكرارين التراكميين 10 و 15 فتكون القيمة المقابلة لهذه الرتبة هي القيمة المقابلة للتكرار التراكمي 15 وهي 12، ثم نحسب الوسط الحسابي للعددين 10 و 12 : وبالتالي الوسيط هو $\frac{(10 + 12)}{2} = 11$

إذن، يتساوى الوسط الحسابي والوسيط فقط.

إذن، ليلى ليست على صواب، لأن القيم الثلاثة، الوسط الحسابي والوسيط والمنوال غير متساوية.

الإجابات

20. **a.** أكمل الجدولين.

النادي A

العمر x	التكرار f	$x \cdot f$
15	4	60
18	10	180
20	10	200
25	8	200
المجموع	32	640

الوسط الحسابي لأعمار أعضاء النادي A :
$\bar{x} = \frac{640}{32} = 20$

النادي B

العمر x	التكرار f	$x \cdot f$
16	3	48
19	9	171
21	11	231
24	9	216
المجموع	32	666

الوسط الحسابي لأعمار أعضاء النادي B :
$\bar{x} = \frac{666}{32} = 20.8125$
أو 20 سنة و 296 يومًا تقريبًا.
بما أن $20 < 20.8125$، فإن في المتوسط، أعضاء النادي B أكبر عمرًا من أعضاء النادي A.

b. يمكن إيجاد الوسط الحسابي لأعمار أعضاء الناديين كما يلي : $\bar{x} = \frac{20 + 20.8125}{2} = 20.40625$
أو 20 سنة و 148 يومًا تقريبًا.

c. الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{1306}{64} = 20.40625$
أو 20 سنة و 148 يومًا تقريبًا، وهو نفس إجابة الجزء (b)

الناديان معًا

العمر x	التكرار f	$x \cdot f$
15	4	60
16	3	48
18	10	180
19	9	171
20	10	200
21	11	231
24	9	216
25	8	200
المجموع	64	1306

21. B, C

23. الجزء A

الجدول التكراري بعد إضافة 5 درجات

الدرجات x	التكرار f	$x \cdot f$
65	6	390
70	8	560
80	4	320
85	2	170
المجموع	20	1440

الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{1\,440}{20} = 72$
إذن، الوسط الحسابي هو الدرجة 72

الجدول التكراري الأصلي

الدرجات x	التكرار f	$x \cdot f$
60	6	360
65	8	520
75	4	300
80	2	160
المجموع	20	1340

الوسط الحسابي الأصلي : $\bar{x} = \frac{1\,340}{20} = 67$

الجزء B

الجدول التكراري الصحيح

الدرجات x	التكرار f	$x \cdot f$
65	6	390
70	4	280
75	4	300
80	4	320
85	2	170
المجموع	20	1460

الوسط الحسابي بعد تصحيح الخطأ :
$\bar{x} = \frac{1\,460}{20} = 73$

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم. تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس. كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

ملاحظات

الدرس 3-4
الانحراف المعياري

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على :

✔ تمييز التباين والانحراف المعياري كمقياسين من مقاييس التشتت.

✔ حساب التباين والانحراف المعياري لمجموعة بيانات.

✔ حساب التباين والانحراف المعياري لبيانات في جدول تكراري بسيط.

الفهم الأساس

يحسب الطلاب التباين والانحراف المعياري لمجموعة بيانات مفردة ولبيانات في جدول تكراري بسيط، ويستعملون مفهوم الانحراف المعياري لمقارنة جدولين تكراريين بسيطين.

ترابط

في الصفوف السابقة، تمكّن الطلاب من :

- تمييز المدى الزُبيعي والانحراف المطلق كمقياسين من مقاييس التشتت.
- حساب المدى الزُبيعي (IQR) ووسط الانحراف المطلق (MAD) لمجموعة بيانات.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من :

- حساب التباين لمجموعة بيانات باستعمال الصيغة $\sigma^2 = \frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}$
- حساب الانحراف المعياري لمجموعة بيانات باستعمال الصيغة $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}}$
- حساب التباين لمجموعة بيانات في جدول تكراري بسيط باستعمال الصيغة $\sigma^2 = \frac{\Sigma\left[f \bullet (x-\bar{x})^2\right]}{\Sigma f}$
- حساب التباين لمجموعة بيانات في جدول تكراري بسيط باستعمال الصيغة $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma\left[f \bullet (x-\bar{x})^2\right]}{\Sigma f}}$
- مقارنة مجموعتي بيانات واستخلاص نتائج من خلال احتساب الانحراف المعياري لكل مجموعة بيانات وتفسيره.

دقة

يؤكد هذا الدرس على الدمج بين الاستيعاب المفاهيمي والتطبيق.

- يوسع الطلاب فهمهم لمقاييس التشتت باستعمال الانحراف المعياري والتباين. يدرك الطلاب أن الانحراف المعياري والتباين مقياسين من مقاييس التشتت التي تقيس درجة تشتت البيانات عن وسطها الحسابي.

بناء المصطلحات

مراجعة المصطلحات

العربية | الإنجليزية

- **المدى الزُبيعي** | *Interquartile Range (IQR)*
- **وسط الانحراف المطلق** | *Mean Absolute Deviation (MAD)*

المصطلحات الجديدة

- **التباين** | *Variance*
- **الانحراف المعياري** | *Standard deviation*

نشاط المصطلحات

- تعلم الطلاب سابقًا كيفية حساب مقياسين من مقاييس التشتت هما: المدى الزُبيعي ووسط الانحراف المطلق، اللذان يقيسان درجة تشتت البيانات، أي يقيسان مدى اقتراب أو ابتعاد قيم البيانات عن الوسط الحسابي. قدّم للطلاب المصطلحين "الانحراف المعياري" و "التباين" على أنهما مقياسان آخران من مقاييس التشتت، لكنهما يقيسان تشتت البيانات بدقة أعلى من مقياسي "وسط الانحراف المطلق" و "المدى الزُبيعي".
- اطلب من الطلاب وصل كل مصطلح أدناه بنوع المقياس المرتبط به:
  - الوسط الحسابي
  - الانحراف المعياري
  - الوسيط
  - التباين
  - وسط الانحراف المطلق
  - مقاييس النزعة المركزية
  - مقاييس التشتت

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يُركّز الطلاب على المعيار:

9.8.4 يحسب مقاييس التشتت لبيانات مفردة وجداول تكرارية بسيطة.

معايير ممارسات الرياضيات

برّر منطقيًا بطريقة تجريدية وكمية

يستعمل الطلاب التبرير المنطقي ومقاييس التشتت (الانحراف المعياري والتباين) لمقارنة مجموعتين من البيانات تمثلان موقفين من واقع الحياة لاستخلاص نتائج وتحديد مجموعة البيانات التي تُمثل الموقف الحياتي بشكل أفضل. فكلما ازدادت قيمة الانحراف المعياري، ازداد تشتت البيانات، وبالتالي تباعدت القيم عن وسطها الحسابي. كلما تناقصت قيمة الانحراف المعياري، قلّ تشتت البيانات، وبالتالي تقاربت البيانات، ويمثل هذا الأمر موقفًا أفضل من الموقف الذي قيمة انحراف بياناته المعيارية كبيرة.

انقد واشرح

محور تركيز التدريس يستعمل الطلاب معرفتهم السابقة بإيجاد الوسط الحسابي لقيم بيانات معطاة، والاستفادة من هذا الوسط الحسابي لإيجاد مقياس آخر يوفر إمكانية أفضل لتحليل هذه البيانات ومقارنتها، وهو الانحراف المعياري.

يساعد الانحراف المعياري الطلاب على دراسة تشتت قيم البيانات من حيث قربها من الوسط الحسابي أو بعدها عنه، وعلى المقارنة بين مجموعتين من البيانات لاتخاذ قرارات مناسبة.

قبل البدء بالحلّ — طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: ما المعطيات المبيّنة في كل جدول ؟
[درجات الاختبارات القصيرة لكل من يوسف وشقيقه فارس في مادة الرياضيات خلال هذا العام، حيث الدرجة العظمى 10]

س: ما الذي يجب عليك إيجاده في الجدولين التكراريين ؟
[الوسط الحسابي لدرجات كل من يوسف وفارس ثم المقارنة بينهما.]

س: ما الفائدة من إيجاد الوسط الحسابي لدرجات كل من يوسف وفارس ؟
[مقارنة نتائج الأخوين في الاختبارات القصيرة لمادة الرياضيات خلال هذا العام.]

س: هل يساعد إيجاد الوسط الحسابي في تحديد مدى تقارب الدرجات منه أو تباعدها عنه ؟
[كلّا، الوسط الحسابي مقياس يساعد على تكوين صورة عن المعدل العام للبيانات وعلى المقارنة بين مجموعتين من البيانات أو أكثر. لذا، من الضروري إيجاد مقاييس أخرى لمقارنة البيانات لمعرفة مدى تقارب أو تباعد هذه البيانات عن الوسط الحسابي.]

أثناء الحلّ — مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: كيف تجد الوسط الحسابي لدرجات كل من الطالبَين ؟
[من خلال إضافة عمود إلى كل جدول يتضمن ناتج الضرب $x \cdot f$، ثم تطبيق القانون $\bar{x} = \frac{\Sigma(x \cdot f)}{\Sigma f}$ الذي تعلمه الطلاب في الدرس السابق.]

س: ماذا تستنتج من مقارنة الوسطين الحسابيين اللذين حسبتهما ؟
[يشير الوسط الحسابي الأكبر إلى أن أداء فارس في الاختبارات القصيرة في مادة الرياضيات أفضل بقليل من أداء يوسف.]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: اعرض أمام الطلاب جدولًا مشابهًا للجدولين السابقين يتضمن درجات اختبارات قصيرة لطالب آخر، ثم اسألهم: كيف يمكن المقارنة بين درجات الطلاب الثلاثة ؟
[من خلال إضافة عمود إلى الجدول الجديد يتضمن ناتج الضرب $x \cdot f$، ثم إيجاد الوسط الحسابي لدرجات الطالب الثالث. يدل الوسط الحسابي الأكبر على الدرجات الأفضل.]

بعد إنجاز الحلّ — طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: هل يساعد الوسط الحسابي على معرفة مدى تقارب قيم البيانات منه أو تباعدها عنه ؟
[كلّا، لا يشير إيجاد الوسط الحسابي إلى مدى تقارب قيم البيانات منه أو تباعدها عنه. الوسط الحسابي مقياس مركزي يعبّر عن نزعة محددة للبيانات ولا يعبّر عن تشتتها. فإذا كان أقرب إلى القيمة العظمى تعدّ البيانات جيدة، وإذا كان أقرب إلى القيمة الصغرى تعدّ البيانات سيئة.]

كتاب الطالب، صفحة 155

4-3
الانحراف المعياري
The Standard Deviation

أستطيع... إيجاد الانحراف المعياري واستعماله لمقارنة مجموعتين من البيانات.

معيار الدرس
9.8.4

المصطلحات
- التباين variance
- الانحراف المعياري standard deviation

انقد واشرح

يمثّل الجدولان أدناه درجات الاختبارات القصيرة لكل من يوسف وشقيقه فارس في اختبار الرياضيات خلال هذا العام.

درجات يوسف

الدرجة x	التكرار f
4	1
6	3
8	5
10	2

درجات فارس

الدرجة x	التكرار f
6	1
7	4
8	3
9	2

A. أوجد الوسط الحسابي لدرجات كل من يوسف وفارس. قارن الوسطين.

B. **برّر منطقيًا** قارن بين درجات كل من يوسف وفارس في اختبار الرياضيات والوسط الحسابي لدرجاتهما. درجات أي منهما أقرب إلى الوسط الحسابي لدرجاته ؟

السؤال الأساس كيف تحسب الانحراف المعياري وتستعمله في مقارنة مجموعتَي بيانات ؟

تبيّن **مقاييس التشتت** مدى تباعد البيانات بعضها عن بعض. ومن أشهر **مقاييس التشتت** **التباين والانحراف المعياري**، والتي تقيس مدى اقتراب أو ابتعاد قيم البيانات عن الوسط الحسابي.

نموذج من أعمال الطلاب

A. درجات يوسف

الدرجة x	التكرار f	$x \cdot f$
4	1	4
6	3	18
8	5	40
10	2	20
المجموع	11	82

الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{82}{11} = 7.\overline{45}$

درجات فارس

الدرجة x	التكرار f	$x \cdot f$
6	1	6
7	4	28
8	3	24
9	2	18
المجموع	10	76

الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{76}{10} = 7.6$

بما أن الوسط الحسابي لدرجات فارس يساوي 7.6 وهو أكبر من الوسط الحسابي لدرجات يوسف $7.\overline{45}$، إذن متوسط درجات فارس أفضل من متوسط درجات يوسف.

B. درجات فارس أقرب إلى الوسط الحسابي، لأن الوسط الحسابي لدرجات فارس هو 7.6 ودرجاته هي: 9 ,9 ,8 ,8 ,8 ,7 ,7 ,7 ,7 ,6، نلاحظ أن درجات فارس قريبة من الوسط الحسابي 7.6، بينما الوسط الحسابي لدرجات يوسف هو $7.\overline{45}$ ودرجاته هي: 10 ,10 ,8 ,8 ,8 ,8 ,8 ,6 ,6 ,6 ,4، نلاحظ أن الدرجتين 4 و 10 بعيدتان عن الوسط الحسابي.

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلم مركّز

لقد تعلم الطلاب قراءة البيانات ووصفها باستعمال التمثيلات البيانات، وتعلموا كذلك كيفية تحليلها ومقارنتها باستعمال مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابي والمنوال والوسيط)، وهم بحاجة الآن إلى مقاييس أكثر دقة، مثل الانحراف المعياري، لتحديد تشتت قيم البيانات ومقارنتها.

إن مقياس التباين يقيس مدى انحراف كل قيمة من قيم البيانات عن الوسط الحسابي لهذه القيم. يتمثل انحراف كل قيمة عن الوسط الحسابي بالمقدار الجبري: $(x - \bar{x})$
حيث x يمثل القيمة و $\bar{x}$ يمثل الوسط الحسابي لقيم البيانات.
لإيجاد التباين يجب احتساب الوسط الحسابي لهذه الانحرافات. وبما أن الوسط الحسابي لقيم البيانات يُمثل نقطة الميزان، فإن مجموع الانحرافات الأكبر من الوسط الحسابي لقيم البيانات يساوي مجموع الانحرافات الأصغر منه، وبالتالي فإن مجموع جميع الانحرافات يساوي الصفر. لذلك، يجب تربيع هذه الإنحرافات لإيجاد التباين.

- الانحراف المعياري
standard deviation

السؤال الأساس كيف تحسب الانحراف المعياري وتستعمله في مقارنة مجموعتَي بيانات ؟

تبيّن **مقاييس التشتت** مدى تباعد البيانات بعضها عن بعض. ومن أشهر **مقاييس التشتت** **التباين والانحراف المعياري**، والتي تقيس مدى اقتراب أو ابتعاد قيم البيانات عن الوسط الحسابي.

المفهوم التباين والانحراف المعياري لمجموعة من القيم

لفظيًّا: التباين (σ^2): هو الوسط الحسابي لمجموع مربعات الفرق بين قيم مجموعة البيانات ووسطها الحسابي.

بالرموز:
$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}$$

حيث:
x: القيم
$\bar{x}$: الوسط الحسابي
n: عدد القيم

لفظيًّا: الانحراف المعياري (σ): هو الجذر التربيعي للتباين.

بالرموز:
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}}$$

تدل قيمة الانحراف المعياري على معدل تباعد القيم عن وسطها الحسابي، وكلما قلّت قيمته كانت البيانات أكثر تقاربًا بعضها من بعض.

الدرس 3-4 الانحراف المعياري 155

مثال 1 التباين والانحراف المعياري لمجموعة من القيم

طرح أسئلة هادفة

س: ما المعطيات المبيّنة في الجدول ؟

[عدد السيارات المبيعة خلال خمسة أسابيع]

س: ما المطلوب إيجاده ؟

[التباين والانحراف المعياري]

س: ما العلاقة بين التباين والانحراف المعياري ؟

[الانحراف المعياري يساوي الجذر التربيعي الموجب للتباين.]

س: كيف توجد الانحراف المعياري ؟

[الانحراف المعياري هو $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{n}}$ حيث يمثل n عدد القيم.]

س: لماذا يتم تربيع انحرافات القيم عن الوسط الحسابي عند إيجاد الانحراف المعياري ؟

[لأن مجموع الانحرافات للقيم عن الوسط الحسابي يساوي الصفر دائمًا.]

الاستيعاب المفاهيمي

مثال 1 التباين والانحراف المعياري لمجموعة من القيم

يمثّل الجدول المجاور عدد السيارات التي باعها موظف المبيعات في خمسة أسابيع.

أوجد التباين والانحراف المعياري لبيانات هذه المبيعات.

مبيعات السيارات

الأسبوع	العدد (x)
الأول	25
الثاني	18
الثالث	12
الرابع	10
الخامس	10

تذكر
الوسط الحسابي لمجموعة قيم هو:
$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$
حيث n: عدد القيم.

الخطوة 1 أوجد الوسط الحسابي.

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{25 + 18 + 12 + 10 + 10}{5} = \frac{75}{5} = 15$$

إرشاد
قد تكون $x - \bar{x}$ سالبة لكن مربّعها موجب.

الخطوة 2 بناءً على صيغة التباين $\sigma^2 = \frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n}$، أكمل الجدول بإضافة العمودين $(x - \bar{x})$ و $(x - \bar{x})^2$ على الترتيب.

25 – 15

10^2

الأسبوع	العدد (x)	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
الأول	25	10	100
الثاني	18	3	9
الثالث	12	−3	9
الرابع	10	−5	25
الخامس	10	−5	25
المجموع			168

خطأ شائع
تذكر بأن تُربّع الفرق بين كل قيمة والوسط، وإلا سيكون مجموع الفروق صفرًا.

الخطوة 3 أوجد التباين.

قانون التباين $\sigma^2 = \frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n}$

عوّض $= \frac{168}{5}$

بسّط $= 33.6$

إذن، التباين هو 33.6

الخطوة 4 أوجد الانحراف المعياري.

قانون الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

عوّض $\sigma^2 = 33.6$ $= \sqrt{33.6}$

بسّط ≈ 5.8

إذن، الانحراف المعياري لهذه البيانات هو 5.8 تقريبًا.

يتبع في الصفحة التالية

تابع المثال 1

حاول أن تحلّ! الإجابات

.1 • الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{12 + 14 + 16 + 17 + 16}{5} = 15$

الأسبوع	العدد x	$(x - \bar{x})$	$(x - \bar{x})^2$
الأول	12	-3	9
الثاني	14	-1	1
الثالث	16	1	1
الرابع	17	2	4
الخامس	16	1	1
المجموع			16

• التباين : $\sigma^2 = \frac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{n} = \frac{16}{5} = 3.2$

• الانحراف المعياري : $\sigma = \sqrt{3.2} \approx 1.8$

إذن، التباين يساوي 3.2 و الانحراف المعياري يساوي 1.8 تقريبًا.

مثال 2 التباين والانحراف المعياري لجدول تكرار بسيط

طرح أسئلة هادفة

س: كيف توجد الوسط الحسابي لجدول تكراري بسيط ؟

[من خلال إضافة عمود إلى الجدول التكراري يتضمن ناتج الضرب $x \cdot f$
ثم استعمال القانون $\bar{x} = \frac{\Sigma(x \cdot f)}{\Sigma f}$]

س: في الخطوة الثانية، ماذا تلاحظ بالنسبة لمجموع ناتج ضرب التكرارات في الانحرافات ؟ ولماذا تم إنشاء العمود الأخير ؟

[مجموع ناتج ضرب التكرارات في الانحرافات يساوي الصفر؛ لإيجاد مجموع نواتج ضرب التكرارات في مربع الانحرافات، ومن ثم قسمتها على مجموع التكرارات لإيجاد التباين.]

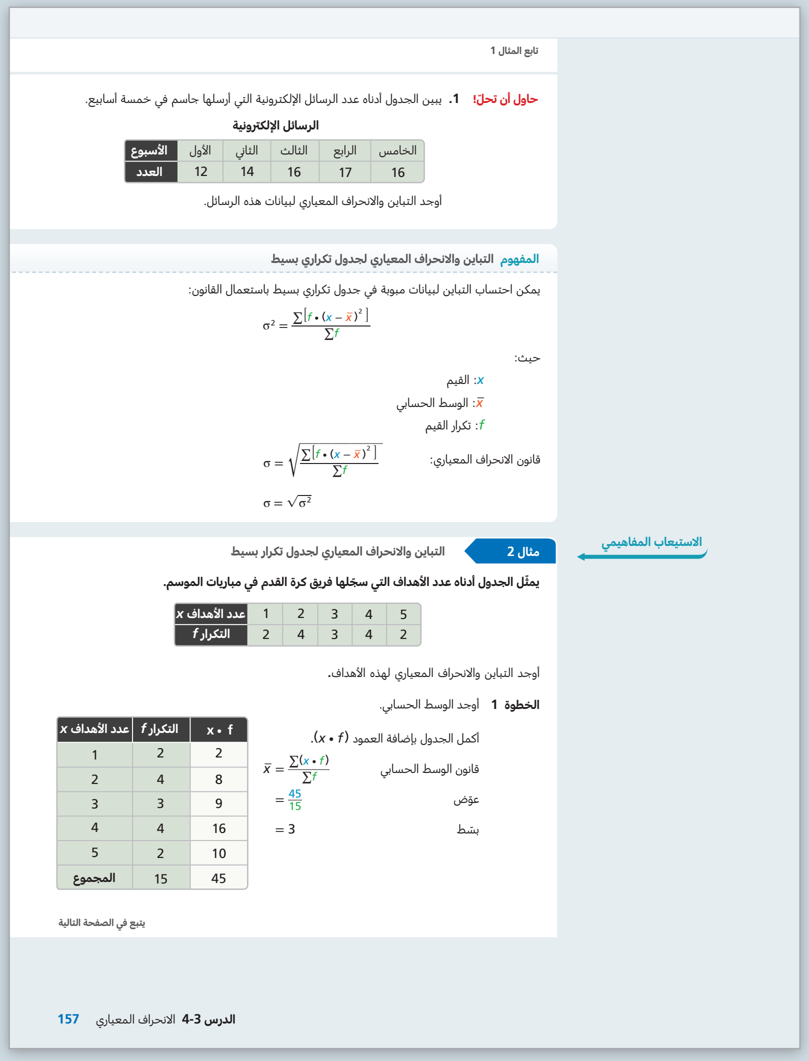
س: كيف يرتبط التباين لمجموعة من القيم بالتباين لجدول تكراري بسيط ؟

[التباين لمجموعة من القيم و التباين لجدول تكراري بسيط هو الوسط الحسابي لمجموع مربعات الفرق بين قيم مجموعة البيانات و وسطها الحسابي. لذلك لإيجاد التباين لمجموعة القيم فإننا نقسم مجموع مربعات الفرق بين القيم و وسطها الحسابي على عدد القيم. ولكن لإيجاد التباين لجدول تكراري بسيط، فإننا نجد مجموع ناتج ضرب مربع الفرق بين كل قيمة والوسط الحسابي للبيانات في تكرارها، ثم نقسمه على مجموع التكرارات.]

س: كيف توجد الانحراف المعياري لجدول تكراري بسيط ؟

[من خلال إضافة ثلاثة أعمدة إلى الجدول التكراري : الأول يتضمن المقدار $(x - \bar{x})$ والثاني يتضمن المقدار $(x - \bar{x})^2$ والثالث يتضمن $f \cdot (x - \bar{x})^2$ على الترتيب.

ثم استعمال القانون $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma[f \cdot (x - \bar{x})^2]}{\Sigma f}}$ لإيجاد الانحراف المعياري.]



تابع المثال 1

حاول أن تحلّ! **.1** يبين الجدول أدناه عدد الرسائل الإلكترونية التي أرسلها جاسم في خمسة أسابيع.

الرسائل الإلكترونية

الأسبوع	الأول	الثاني	الثالث	الرابع	الخامس
العدد	12	14	16	17	16

أوجد التباين والانحراف المعياري لبيانات هذه الرسائل.

المفهوم التباين والانحراف المعياري لجدول تكراري بسيط

يمكن احتساب التباين لبيانات مبوبة في جدول تكراري بسيط باستعمال القانون:

$$\sigma^2 = \frac{\sum[f \cdot (x - \bar{x})^2]}{\sum f}$$

حيث:

x: القيم

$\bar{x}$: الوسط الحسابي

f: تكرار القيم

قانون الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum[f \cdot (x - \bar{x})^2]}{\sum f}}$

$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

الاستيعاب المفاهيمي

مثال 2 التباين والانحراف المعياري لجدول تكرار بسيط

يمثّل الجدول أدناه عدد الأهداف التي سجّلها فريق كرة القدم في مباريات الموسم.

عدد الأهداف x	1	2	3	4	5
التكرار f	2	4	3	4	2

أوجد التباين والانحراف المعياري لهذه الأهداف.

الخطوة 1 أوجد الوسط الحسابي.

أكمل الجدول بإضافة العمود $(x \cdot f)$.

قانون الوسط الحسابي $\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f}$

عوّض $= \frac{45}{15}$

بسّط $= 3$

عدد الأهداف x	التكرار f	$x \cdot f$
1	2	2
2	4	8
3	3	9
4	4	16
5	2	10
المجموع	15	45

يتبع في الصفحة التالية

تابع المثال 2

حاول أن تحلّ! الإجابات

.2

العدد x	التكرار f	$x \cdot f$
0	3	0
1	3	3
2	4	8
4	3	12
5	1	5
المجموع	14	28

- الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{28}{14} = 2$

إذن، الوسط الحسابي لأهداف هذا الفريق يساوي 2

- التباين والانحراف المعياري

الأهداف x	التكرار f	$(x - \bar{x})$	$(x - \bar{x})^2$	$f \cdot (x - \bar{x})^2$
0	3	−2	4	12
1	3	−1	1	3
2	4	0	0	0
4	3	2	4	12
5	1	3	9	9
المجموع	14			36

- التباين : $\sigma^2 = \frac{36}{14} \approx 2.571$
- الانحراف المعياري : $\sigma = \sqrt{2.571} \approx 1.6$

إذن، التباين يساوي 2.571 تقريبًا و الانحراف المعياري للأهداف يساوي 1.6 تقريبًا.

تابع المثال 2

الخطوة 2 أكمل الجدول.

بناءً على قانون التباين، أكمل الجدول بإضافة الأعمدة $(x - \bar{x})$ و $(x - \bar{x})^2$ و $f \cdot (x - \bar{x})^2$ على الترتيب.

$(-2)^2$

x	f	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$f \cdot (x - \bar{x})^2$
1	2	−2	4	8
2	4	−1	1	4
3	3	0	0	0
4	4	1	1	4
5	2	2	4	8
المجموع	15			24

2×4

الخطوة 3 أوجد التباين.

قانون التباين $\sigma^2 = \frac{\sum[f \cdot (x - \bar{x})^2]}{\sum f}$

عوّض $= \frac{24}{15}$

بسّط $= 1.6$

إذن، التباين للأهداف التي سجّلها فريق كرة القدم يساوي 1.6

الخطوة 4 أوجد الانحراف المعياري.

قانون الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

عوّض $\sigma^2 = 1.6$ $= \sqrt{1.6}$

بسّط ≈ 1.3

إذن، الانحراف المعياري للأهداف التي سجّلها فريق كرة القدم يساوي 1.3 تقريبًا.

حاول أن تحلّ! **2.** يمثّل الجدول أدناه الأهداف التي سجّلها فريق آخر في الموسم.

الأهداف x	0	1	2	4	5
التكرار f	3	3	4	3	1

أوجد التباين والانحراف المعياري لهذه الأهداف.

تعزيز المهارات اللغوية استعمل مع المثالين 2 و 3

القراءة **مستوى 1** اطلب من الطلاب قراءة مقدمة كل من المثالين (2) و (3)

س: في المثال 2، على ماذا يدل التعبير "جدول تكراري بسيط" ؟

[قيم البيانات أعداد صحيحة موجبة، مثل عدد أهداف فريق كرة قدم في أحد المواسم أو عدد الرسائل الإلكترونية في عدة أسابيع.]

س: في المثال 3، على ماذا يدل التعبير "بيانات مفردة" ؟

[قيم البيانات غير المدرجة في الجدول التكراري، مثل درجات الاختبار في عدد من الأسابيع أو عدد الرسائل الإلكترونية المرسلة في عدد من الأيام، وليست لها تكرارات.]

الكتابة **مستوى 2** في المثالين 2، و 3، اطلب من الطلاب قراءة الجداول جيدًا، ثم كتابة تعريف لكل مما يلي باستعمال مفرداتهم الخاصة.

- $(x - \bar{x})$
- $(x - \bar{x})^2$
- $f \cdot (x - \bar{x})^2$
- التباين
- الانحراف المعياري

اكتب في دفترك مثالين: الأول يتضمن جدولًا تكراريًا بسيطًا والثاني يتضمن بيانات مفردة، ثم أوجد التباين والانحراف المعياري لكل مجموعة من هذه البيانات.

التحدث **مستوى 3** اطلب من الطلاب العمل ضمن مجموعات صغيرة لمراجعة النتيجة في المثال 3 والتركيز على أهمية المقياس الجديد عند مقارنة مجموعتين من البيانات.

س: هل ساعد إيجاد الوسط الحسابي على مقارنة مجموعتي البيانات ؟

[كلّا، الوسط الحسابي للمجموعتين هو نفسه، 7، وبالتالي لا يمكن المقارنة بين درجات صالح وخالد.]

س: ما المقياس الأفضل لإجراء المقارنة الصحيحة ؟

[الانحراف المعياري ، فهو يشير إلى مدى تقارب قيم البيانات من الوسط الحسابي أو ابتعادها عنه.]

مثال 3 مقارنة الانحراف المعياري لمجموعتي بيانات مفردة

طرح أسئلة هادفة

س: ما الفرق بين الجدول التكراري البسيط والبيانات المفردة ؟

[نستعمل في الجدول التكراري البسيط أعدادًا صحيحة موجبة تمثل قيم البيانات، ولكل قيمة تكرار يقابلها. أما البيانات المفردة فعناصرها متقطعة، مثل الأسابيع أو الدرجات أو غير ذلك، تقابلها متغيرات وهي أعداد صحيحة موجبة وليست لها تكرارات.]

س: ما الفرق بين قانون الوسط الحسابي لجدول تكراري بسيط وقانون الوسط الحسابي لبيانات مفردة ؟

[في الجدول التكراري البسيط، الوسط الحسابي يساوي : $\bar{x} = \frac{\Sigma(x \bullet f)}{\Sigma f}$.

أما في البيانات المفردة، الوسط الحسابي يساوي : $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$ حيث n عدد المفردات و x المتغير المقابل لكل مفردة.]

س: ما الفرق بين قانون التباين لجدول تكراري بسيط وقانون التباين لبيانات مفردة ؟

[في الجدول التكراري البسيط، التباين يساوي : $\sigma^2 = \frac{\Sigma[f \bullet (x - \bar{x})^2]}{\Sigma f}$.

أما في البيانات المفردة فإن التباين يساوي : $\sigma^2 = \frac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{n}$]

مثال 3 مقارنة الانحراف المعياري لمجموعتي بيانات مفردة

تمثّل البيانات أدناه درجات كل من صالح وخالد في خمسة اختبارات في مادة الرياضيّات.

درجات صالح: 9 ,9 ,7 ,5 ,5

درجات خالد: 10 ,10 ,8 ,4 ,3

أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لدرجات كل من صالح وخالد ثمّ استعملهما لمقارنة أدائهما.

الخطوة 1 أوجد الوسط الحسابي لدرجات صالح وخالد.

	صالح	خالد
قانون الوسط الحسابي	$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$	$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$
عوّض	$= \frac{5+5+7+9+9}{5}$	$= \frac{3+4+8+10+10}{5}$
بسّط	$= \frac{35}{5}$	$= \frac{35}{5}$
	$= 7$	$= 7$

إذن، حصل كل من صالح وخالد على نفس الوسط الحسابي للدرجات وهو 7. مما يعني أنهما حققا نفس معدّل الأداء.

الخطوة 2 أنشئ جدولين لدرجات كل من صالح وخالد.
أكمل كل جدول بإضافة العمودين $(x - \bar{x})$ و $(x - \bar{x})^2$ على الترتيب.

صالح

الاختبار	الدرجة (x)	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
الأول	5	−2	4
الثاني	5	−2	4
الثالث	7	0	0
الرابع	9	2	4
الخامس	9	2	4
المجموع			16

خالد

الاختبار	الدرجة (x)	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
الأول	3	−4	16
الثاني	4	−3	9
الثالث	8	1	1
الرابع	10	3	9
الخامس	10	3	9
المجموع			44

الخطوة 3 أوجد التباين لدرجات كل من صالح وخالد.

	صالح	خالد
قانون التباين	$\sigma^2 = \frac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{n}$	$\sigma^2 = \frac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{n}$
عوّض	$= \frac{16}{5}$	$= \frac{44}{5}$
بسّط	$= 3.2$	$= 8.8$

يتبع في الصفحة التالية

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 3 قد يجد الطلاب صعوبة في تحديد المتغير x في البيانات المفردة.
الفت انتباههم إلى أن المفردة لا تمثل متغيرًا، بل الأعداد المقابلة لكل مفردة هي المتغيرات.
اطرح عليهم الأسئلة التالية:

س: ما عدد أيام الدراسة في الأسبوع ؟

[نموذج إجابة: خمسة أيام]

س: كم ساعة تحتاج لإنجاز الواجبات المنزلية ؟

[من اليوم الأول إلى اليوم الخامس على الترتيب: 4 ,2 ,4 ,3 ,2]

س: كيف تنشئ جدولًا لهذه البيانات، وما هو المتغير ؟

اليوم	الأول	الثاني	الثالث	الرابع	الخامس
عدد الساعات	4	2	4	3	2

[المتغير هو عدد الساعات المطلوبة لإنجاز الواجبات المنزلية.]

تابع المثال 3

حاول أن تحلّ! الإجابات

3. الوسط الحسابي :

يوسف	سعيد
$\bar{x} = \frac{3+4+6+8+9}{5} = \frac{30}{5} = 6$	$\bar{x} = \frac{5+4+4+12+10}{5} = \frac{35}{5} = 7$
إذن، الوسط الحسابي ليوسف 6 km	إذن، الوسط الحسابي لسعيد 7 km

إذن، معدّل المسافات التي قطعها سعيد خلال الأيام الخمسة أكبر من معدّل المسافات التي قطعها يوسف في الفترة الزمنية نفسها $7 > 6$

الانحراف المعياري :

يوسف

المسافة	الطول x (km)	$(x - \bar{x})$	$(x - \bar{x})^2$
الأولى	3	−3	9
الثانية	4	−2	4
الثالثة	6	0	0
الرابعة	8	2	4
الخامسة	9	3	9
المجموع	30		26

التباين للمسافات التي قطعها يوسف : $\sigma^2 = \frac{26}{5} = 5.2$

الانحراف المعياري : $\sigma = \sqrt{5.2} \approx 2.3$

إذن، الانحراف المعياري للمسافات التي قطعها يوسف يساوي 2.3 تقريبًا.

سعيد

المسافة	الطول x (km)	$(x - \bar{x})$	$(x - \bar{x})^2$
الأولى	5	−2	4
الثانية	4	−3	9
الثالثة	4	−3	9
الرابعة	12	5	25
الخامسة	10	3	9
المجموع	35		56

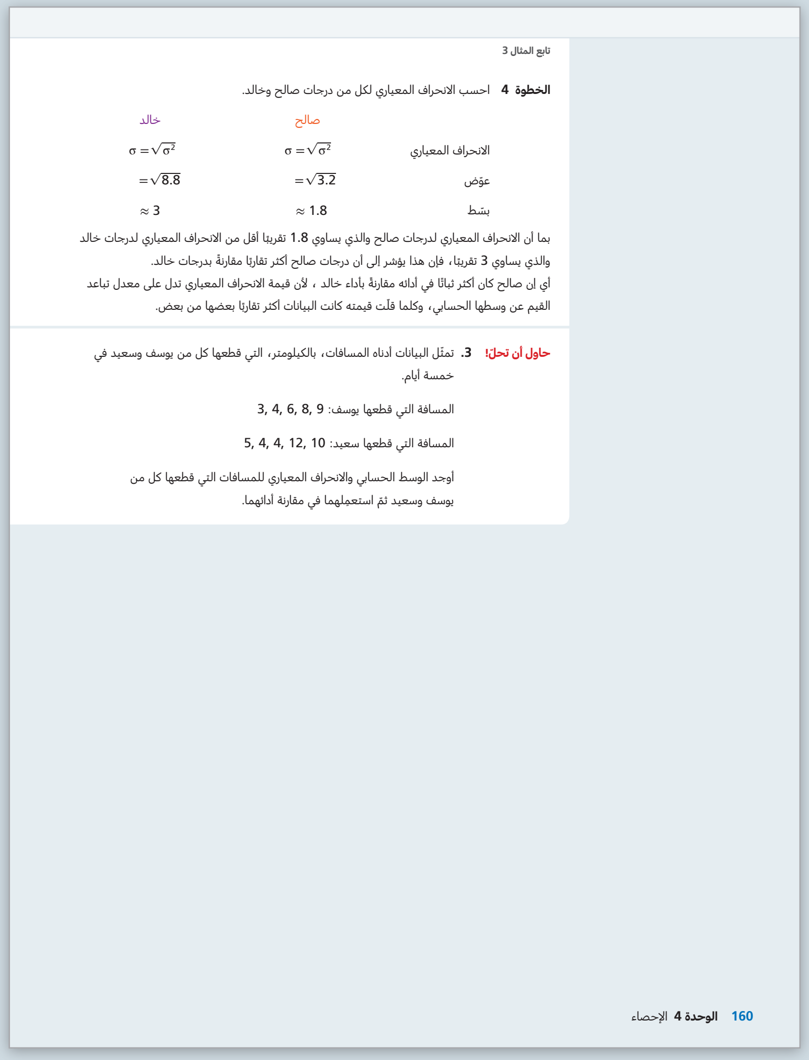
التباين للمسافات التي قطعها سعيد : $\sigma^2 = \frac{56}{5} = 11.2$

الانحراف المعياري : $\sigma = \sqrt{11.2} \approx 3.35$

إذن، الانحراف المعياري للمسافات التي قطعها سعيد يساوي 3.35 تقريبًا.

الانحراف المعياري للمسافات التي قطعها يوسف أصغر من الانحراف المعياري للمسافات التي قطعها سعيد $(2.3 < 3.35)$، إذن المسافات التي قطعها يوسف يوميًا أقل تشتتًا وأكثر ثباتًا، وأقرب إلى الوسط الحسابي.

صحيح أن سعيد قطع عمومًا عددًا أكبر من الكيلومترات يوميًا ، لكنّ يوسف أبدى ثباتًا أكبر في أدائه اليومي.



تابع المثال 3

الخطوة 4 احسب الانحراف المعياري لكل من درجات صالح وخالد.

	صالح	خالد
الانحراف المعياري	$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$	$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$
عوّض	$= \sqrt{3.2}$	$= \sqrt{8.8}$
بسّط	≈ 1.8	≈ 3

بما أن الانحراف المعياري لدرجات صالح والذي يساوي 1.8 تقريبًا أقل من الانحراف المعياري لدرجات خالد والذي يساوي 3 تقريبًا، فإن هذا يؤشر إلى أن درجات صالح أكثر تقاربًا مقارنةً بدرجات خالد.
أي إن صالح كان أكثر ثباتًا في أدائه مقارنةً بأداء خالد ، لأن قيمة الانحراف المعياري تدل على معدل تباعد القيم عن وسطها الحسابي، وكلما قلّت قيمته كانت البيانات أكثر تقاربًا بعضها من بعض.

حاول أن تحلّ! **3.** تمثّل البيانات أدناه المسافات، بالكيلومتر، التي قطعها كل من يوسف وسعيد في خمسة أيام.

المسافة التي قطعها يوسف: 3, 4, 6, 8, 9

المسافة التي قطعها سعيد: 5, 4, 4, 12, 10

أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للمسافات التي قطعها كل من يوسف وسعيد ثمّ استعمِلهما في مقارنة أدائهما.

الوحدة 4 الإحصاء 160

ملخص المفهوم الانحراف المعياري

س: متى نوجد الانحراف المعياري ؟

[من المهم جدًا إيجاد قيمة الانحراف المعياري لمعرفة مدى قرب قيم البيانات من وسطها الحسابي أو بعدها عنه، فهذا يساعد على اتخاذ قرارات صحيحة باستعمال التحليل والمقارنة.]

عبّر عن فهمك|طبّق فهمك

الإجابات

1. نوجد أولًا التباين الذي يساوي الوسط الحسابي لمجموع مربعات الفرق بين قيم البيانات ووسطها الحسابي، ثم نوجد الجذر التربيعي الموجب للتباين فنحصل على الانحراف المعياري.

- قيمة الانحراف المعياري لجدول تكراري بسيط تساوي : $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma\left[f \bullet (x - \bar{x})^2\right]}{\Sigma f}}$
- قيمة الانحراف المعياري لمجموعة بيانات مفردة تساوي : $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{n}}$

2. لا يمكن للتباين أن يساوي الصفر، لأنه يمثل مجموع مربعات الفرق بين قيم البيانات والوسط الحسابي لهذه البيانات مقسومًا على مجموع التكرارات، ولأن مربع كل عدد هو عدد موجب.

3. الانحراف المعياري يقيس مدى تشتت قيم البيانات من حيث قربها من الوسط الحسابي أو بعدها عنه، وليس مدى تشتتها عن الوسيط كما قالت مريم.

4. راجع عمل الطلاب.

5. سالم مخطئ، لأن التباين هو مجموع المربعات في البسط. والإجابة الصحيحة هي أن التباين يساوي :

$$\sigma^2 = \frac{(-3.2)^2 + (-1.2)^2 + (-0.2)^2 + (1.8)^2 + (2.8)^2}{5}$$
$$= \frac{10.24 + 1.44 + 0.04 + 3.24 + 7.84}{5} = 4.56$$

ملخص المفهوم الانحراف المعياري

لفظيًا **التباين** هو الوسط الحسابي لمجموع مربعات الفرق بين قيم مجموعة البيانات ووسطها الحسابي ويُرمز له بالرمز σ^2
الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين.

جبريًا

	قيم مفردة	جدول تكراري بسيط
التباين:	$\sigma^2 = \frac{\sum(x - \bar{x})^2}{n}$	$\sigma^2 = \frac{\sum\left[f \bullet (x - \bar{x})^2\right]}{\sum f}$
الانحراف المعياري:	$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$	

حيث: x: القيم n: عدد القيم $\bar{x}$: الوسط الحسابي f: التكرار

عدديًا **يمثّل الجدول المجاور عدد الأهداف التي سجّلها فريق كرة القدم في 10 مباريات. أوجد التباين و والانحراف المعياري لعدد الأهداف المسجلة.**

عدد الأهداف x	التكرار f
3	4
4	3
5	2
6	1

الخطوة 1 أوجد الوسط الحسابي.

أكمل الجدول بإضافة العمود $(x \bullet f)$.

عدد الأهداف x	التكرار f	$x \bullet f$
3	4	12
4	3	12
5	2	10
6	1	6
المجموع	10	40

قانون الوسط الحسابي $\bar{x} = \frac{\sum(x \bullet f)}{\sum f}$

عوّض $= \frac{40}{10}$

بسّط $= 4$

الخطوة 2 أكمل الجدول.

بناءً على قانون التباين أكمل الجدول بإضافة الأعمدة $(x - \bar{x})$ و $(x - \bar{x})^2$ و $f \bullet (x - \bar{x})^2$ على الترتيب.

x	f	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$f \bullet (x - \bar{x})^2$
3	4	−1	1	4
4	3	0	0	0
5	2	1	1	2
6	1	2	4	4
المجموع	10			10

الخطوة 3 أوجد التباين.

قانون التباين $\sigma^2 = \frac{\sum\left[f \bullet (x - \bar{x})^2\right]}{\sum f}$

عوّض $= \frac{10}{10}$

بسّط $= 1$

إذن، التباين للأهداف التي سجّلها فريق كرة القدم يساوي 1

الخطوة 4 أوجد الانحراف المعياري

الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

عوّض $\sigma^2 = 1$ $= \sqrt{1}$

بسّط $= 1$

إذن، الانحراف المعياري للأهداف التي سجّلها فريق كرة القدم يساوي 1

الدرس 3-4 الانحراف المعياري 161

خطأ شائع

التمرين 6 قد يخطئ بعض الطلاب عند محاولتهم إيجاد التباين والانحراف المعياري، فينشئون جدولًا غير مكتمل ولا يضم القيم $(x - \bar{x})^2$، وبالتالي يجدون أن التباين هو $0 = \frac{2 + 0 + (-1) + (-2) + (-3) + 4}{6} = \sigma^2$ والانحراف المعياري في هذه الحالة يساوي: $\sigma = \sqrt{0} = 0$، وهذا خطأ، لأن قيمة σ^2 تساوي:

$$\sigma^2 = \frac{(2)^2 + 0^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + (-3)^2 + (4)^2}{6} = \frac{34}{6}$$

الإجابات

.6 التباين يساوي : $\sigma^2 = \frac{(4)^2 + (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + (0)^2 + (2)^2}{6} = \frac{34}{6} = 5.\bar{6}$.

الانحراف المعياري يساوي : $\sigma = \sqrt{5.\bar{6}} \approx 2.39$.

.7 على فرض أن الوسط الحسابي لمجموعة بيانات يساوي : $\frac{\Sigma(f \bullet x)}{\Sigma f} = a$

إذا أضفنا العدد 10 إلى كل القيم يصبح الوسط الحسابي :

$$\frac{\Sigma[f_1(x_1 + 10) + f_2(x_2 + 10) + \dots + f_n(x_n + 10)]}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

$$= \frac{\Sigma[(f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_nx_n) + 10(f_1 + f_2 + \dots + f_n)]}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

$$= \frac{\Sigma(f \bullet x) + 10\,\Sigma f}{\Sigma f} = \frac{\Sigma(f \bullet x)}{\Sigma f} + \frac{10\,\Sigma f}{\Sigma f} = a + 10$$

إذن، قيمة الوسط الحسابي تزداد بمقدار 10

ننشئ جدول التباين الجديد بعد إضافة 10 إلى كل القيم، علمًا أن التباين قبل هذه الإضافة هو : $\sigma^2 = \frac{\Sigma[f \bullet (x - \bar{x})^2]}{\Sigma f}$

المتغير x	التكرار f	$(x - \bar{x})$	$(x - \bar{x})^2$
$x_1 + 10$	f_1	$(x_1 + 10) - (a + 10)$	$(x_1 - a)^2$
$x_2 + 10$	f_2	$(x_2 + 10) - (a + 10)$	$(x_2 - a)^2$
$x_n + 10$	f_n	$(x_n + 10) - (a + 10)$	$(x_n - a)^2$

نلاحظ أن قيمة التباين لا تتغير، وبالتالي لا تتغير قيمة الانحراف المعياري التي تساوي :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma[f \bullet (x - \bar{x})^2]}{\Sigma f}}$$

.8 **.a** الوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{2 + 3 + 5 + 6 + 9}{5} = \frac{25}{5} = 5$

.b

العائلة	عدد الأفراد x	$(x - \bar{x})$	$(x - \bar{x})^2$
الأولى	9	4	16
الثانية	6	1	1
الثالثة	5	0	0
الرابعة	3	−2	4
الخامسة	2	−3	9
المجموع			30

التباين : $\sigma^2 = \frac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{n} = \frac{30}{5} = 6$

.c الانحراف المعياري : $\sigma = \sqrt{6} \approx 2.45$

عبّر عن فهمك

.1 السؤال الأساس كيف تحسب الانحراف المعياري وتستعمله في مقارنة مجموعتي بيانات ؟

.2 **تواصل بدقة** هل يمكن للتباين في مجموعة بيانات أن يساوي الصفر ؟ وضّح إجابتك.

.3 **حلّل الخطأ** قالت مريم إن الانحراف المعياري يقيس مدى تشتت أو تباعد القيم في مجموعة بيانات عن الوسيط. بيّن خطأ مريم ثم صححه.

.4 **المصطلحات** اكتب بأسلوبك الخاص تعريف التباين لمجموعة بيانات.

.5 **برّر منطقيًّا** تمثّل مجموعة البيانات التالية درجات الحرارة خلال 5 أيام في إحدى المناطق الباردة:

$-8, -6, -5, -3, -2$

يقول سالم بما أن جميع البيانات سالبة، فإن تباين هذه البيانات هو أيضًا سالب. هل توافق سالم في رأيه ؟ برّر إجابتك.

.6 **ابحث عن العلاقات** فيما يلي انحرافات 6 قيم عن وسطها الحسابي أي $(x - \bar{x})$: $4, -3, -2, -1, 0, 2$

أوجد التباين والانحراف المعياري لهذه البيانات.

.7 **استعمل البنية** إذا أضفت 10 إلى كل قيمة في مجموعة بيانات، ما التغير الذي يطرأ على كل من الوسط الحسابي والانحراف المعياري ؟

طبّق فهمك

.8 تمثّل البيانات التالية عدد أفراد خمس عائلات: $2, 3, 5, 6, 9$

.a أوجد الوسط الحسابي.

.b أوجد التباين.

.c أوجد الانحراف المعياري.

.9 يمثّل الجدول التالي أسعار أكياس الذرة في أحد المتاجر بالريال القطري.

السعر x	10	15	20	30	40
التكرار f	5	4	4	5	2

.a أوجد الوسط الحسابي.

.b أكمل الجدول التالي ثمّ أوجد التباين والانحراف المعياري.

x	f	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$f \bullet (x - \bar{x})^2$
10	5			
15	4			
20	4			
30	5			
40	2			
المجموع	20			

162 الوحدة 4 الإحصاء

.9 **.a** الوسط الحسابي :

$$\bar{x} = \frac{(10 \times 5) + (15 \times 4) + (20 \times 4) + (30 \times 5) + (40 \times 2)}{5 + 4 + 4 + 5 + 2}$$

$$= \frac{420}{20} = 21$$

إذن، الوسط الحسابي للأسعار يساوي : QR 21

.b

x	التكرار f	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$f \bullet (x - \bar{x})^2$
10	5	−11	121	605
15	4	−6	36	144
20	4	−1	1	4
30	5	9	81	405
40	2	19	361	722
المجموع	20			1 880

التباين : $\sigma^2 = \frac{\Sigma[f \bullet (x - \bar{x})^2]}{\Sigma f} = \frac{1\,880}{20} = 94$

الانحراف المعياري : $\sigma = \sqrt{94} \approx 9.7$

تدرّب وحُل مسائل

دليل المهام

أساسي	متقدم
10 - 23	10 - 23

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	15, 21, 22	1
	10, 11	2
2	16	1
	13, 14, 19, 20	3
3	17, 18	2
	12, 23	3

الإجابات

10. a. الوسط الحسابي :

$$\bar{x} = \frac{a + 2a + 3a + 4a + 5a}{5} = \frac{15a}{5} = 3a$$

b. التباين :

$$\sigma^2 = \frac{(-2a)^2 + (-a)^2 + (0)^2 + (a)^2 + (2a)^2}{5}$$

$$8 = \frac{10a^2}{5}$$

$$4 = a^2$$

$$2 = \pm a$$

إذن، $a = 2$ لأنها عدد صحيح موجب.

11. الوسط الحسابي صحيح ، لكن يوسف لم يأخذ مربع كل فرق من المقادير $(x - \bar{x})$، لذا، فإن كلًّا من التباين والانحراف المعياري يساوي الصفر.

التباين الصحيح هو :

$$\sigma^2 = \frac{(-4)^2 + (-3)^2 + (-1)^2 + (1)^2 + (2)^2 + (5)^2}{6} = \frac{56}{6} = 9.\overline{3}$$

والانحراف المعياري الصحيح هو :

$$\sigma \approx 3.055$$

12. a. الوسط الحسابي لمجموعة البيانات A :

$$\bar{x} = \frac{2 + 5 + 6 + 10 + 12}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

التباين لمجموعة البيانات A :

$$\sigma^2 = \frac{(-5)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + (3)^2 + (5)^2}{5}$$

$$\sigma^2 = 12.8$$

الانحراف المعياري لمجموعة البيانات A :

$$\sigma \approx 3.6$$

تدرّب وحل مسائل

عزّز فهمك

10. روابط في الرياضيات

a. أوجد بدلالة a الوسط الحسابي لمجموعة البيانات:
$a, 2a, 3a, 4a, 5a$ حيث a عدد صحيح موجب.

b. أوجد قيمة a إذا كان تباين هذه المجموعة يساوي 8

11. حلّل الخطأ طلب الأستاذ من يوسف إيجاد الانحراف المعياري لمجموعة البيانات التالية: 1, 2, 4, 6 , 7, 10

وكان حلّه كما يلي:

x	$x - \bar{x}$
1	-4
2	-3
4	-1
6	1
7	2
10	5
المجموع 30	0

$$\bar{x} = \frac{30}{6} = 5$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})}{n} = \frac{0}{6} = 0$$

وبالتالي $\sigma = \sqrt{0} = 0$

✗

بيّن خطأ يوسف وصححه.

12. فكّر وثابر في الحل

a. أوجد الانحراف المعياري لمجموعة البيانات
A: 2, 5, 6, 10, 12

b. يقول سعيد إن مجموعة البيانات B: 3, 3, 3, 13, 13 لها نفس الوسط الحسابي للمجموعة A لكن المجموعتين تختلفان في الانحراف المعياري. هل هو على صواب ؟ وضّح إجابتك.

13. مهارات التفكير العليا كتب عادل المجموعة التالية:
$1, a, 7, a, 10$ حيث a عدد صحيح موجب وقال:
إذا كان الوسط الحسابي لهذه المجموعة هو a، فما هو تبيانها ؟

14. برّر منطقيًّا

a. أوجد الانحراف المعياري لمجموعة البيانات: 8 ,4 ,4 ,2 ,2

b. كيف يتغيّر الانحراف المعياري إذا تمّ استبدال العدد 8 بالعدد 18، وضّح إجابتك.

تدرّب

15. تمثّل مجموعة البيانات أدناه عدد الأصداف التي جمعها محمود خلال 5 أيام في الأسبوع الماضي.

A: 6, 8, 9, 10, 12

أوجد التباين والانحراف المعياري لهذه المجموعة. انظر المثال 1

16. يمثّل الجدول أدناه المسافة بالكيلومتر التي قطعها عبدالله على مدى عدّة أيام من الشهر. انظر المثال 2

المسافات المقطوعة

المسافة x	3	4	5	8	9
التكرار f	5	3	4	3	1

أوجد التباين والانحراف المعياري لهذه المسافات.

17. تمثّل مجموعتي البيانات أدناه عدد ساعات النوم لكل من عبد الرحمن ونواف على مدى عدّة أيام من أحد الأشهر.
انظر المثال 3

عدد ساعات نوم عبد الرحمن	عدد ساعات نوم نواف
5, 7, 7, 6, 9, 8	6, 7, 7, 7, 8, 7

أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لساعات نوم كل من عبد الرحمن ونواف ثم استعملهما لمقارنة زمن نومهما.

b. الوسط الحسابي لمجموعة البيانات B :

$$\bar{x} = \frac{3 + 3 + 3 + 13 + 13}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

إذن، للمجموعتين نفس الوسط الحسابي ويساوي 7

التباين لمجموعة البيانات B :

$$\sigma^2 = \frac{(-4)^2 + (-4)^2 + (-4)^2 + (6)^2 + (6)^2}{5} = \frac{120}{5} = 24$$

الانحراف المعياري

$$\sigma \approx 4.9$$

إذن، المجموعتان تختلفان في الانحراف المعياري، وسعيد على صواب.

الإجابات

13. لإيجاد التباين ننشئ الجدول التالي حيث الوسط الحسابي يساوي a

القيم x	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$
1	$1-a$	$(1-a)^2$
a	0	0
7	$7-a$	$(7-a)^2$
a	0	0
10	$10-a$	$(10-a)^2$

التباين :

$$\sigma^2 = \frac{(1-a)^2+(7-a)^2+(10-a)^2}{5}$$
$$= \frac{3(a^2-12a+50)}{5}$$
$$= 0.6(a^2-12a+50)$$

14. **a.** الوسط الحسابي :

$$\bar{x} = \frac{2+2+4+4+8}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

الترتيب	القيم x	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$
الأولى	2	− 2	4
الثاني	2	− 2	4
الثالث	4	0	0
الرابع	4	0	0
الخامس	8	4	16
المجموع			24

التباين :

$$\sigma^2 = \frac{24}{5} = 4.8$$
$$\sigma = \sqrt{4.8} \approx 2.2$$

الانحراف المعياري الأول يساوي : 2.2 تقريبًا

b. يصبح الوسط الحسابي :

$$\bar{x} = \frac{2+2+4+4+18}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

الترتيب	القيم x	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$
الأولى	2	− 4	16
الثاني	2	− 4	16
الثالث	4	− 2	4
الرابع	4	− 2	4
الخامس	18	12	144
المجموع			184

التباين :

$$\sigma^2 = \frac{184}{5} = 36.8$$

الانحراف المعياري الثاني يساوي : 6.066 تقريبًا

بما أن $2.2 < 6.066$ و $\frac{6.066}{2.2} \approx 2.75$، فإن الانحراف المعياري الثاني أكبر من الانحراف المعياري الأول ويساوي 3 أمثاله تقريبًا.

15. الوسط الحسابي :

$$\bar{x} = \frac{6+8+9+10+12}{5} = \frac{45}{5} = 9$$

التباين :

$$\sigma^2 = \frac{(-3)^2+(-1)^2+(0)^2+(1)^2+(3)^2}{5} = 4$$

الانحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{4} = 2$$

16. الوسط الحسابي للمسافات المقطوعة :

$$\bar{x} = \frac{(3\times5)+(4\times3)+(5\times4)+(8\times3)+(9\times1)}{16} = \frac{80}{16} = 5$$

إذن، الوسط الحسابي يساوي 5 km

المسافة x	التكرار f	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$	$f\cdot(x-\bar{x})^2$
3	5	− 2	4	20
4	3	− 1	1	3
5	4	0	0	0
8	3	3	9	27
9	1	4	16	16
المجموع	16			66

التباين :

$$\sigma^2 = \frac{66}{16} = 4.125$$

الانحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{4.125} \approx 2$$

17. الوسط الحسابي لساعات نوم عبدالرحمن :

$$\bar{x} = \frac{5+7+7+6+9+8}{6} = \frac{42}{6} = 7$$

الوسط الحسابي لساعات نوم نواف :

$$\bar{x} = \frac{6+7+7+7+8+7}{6} = \frac{42}{6} = 7$$

لساعات نوم كل من عبدالرحمن ونواف نفس الوسط الحسابي، 7، لذا، لا يمكن المقارنة باستعمال الوسط الحسابي، وبالتالي نوجد الانحراف المعياري علمًا أن البيانات مفردة.

عبد الرحمن

اليوم	عدد الساعات x	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$
الأول	5	− 2	4
الثاني	7	0	0
الثالث	7	0	0
الرابع	6	− 1	1
الخامس	9	2	4
السادس	8	1	1
المجموع			10

التباين :

$$\sigma^2 = \frac{10}{6} = 1.\bar{6}$$

الانحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{1.\bar{6}} \approx 1.3$$

نواف

اليوم	عدد الساعات x	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$
الأول	6	− 1	1
الثاني	7	0	0
الثالث	7	0	0
الرابع	7	0	0
الخامس	8	1	1
السادس	7	0	0
المجموع			2

التباين :

$$\sigma^2 = \frac{2}{6} = 0.\bar{3}$$

الانحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{0.\bar{3}} \approx 0.6$$

بما أن الانحراف المعياري لساعات نوم نواف أصغر من الانحراف المعياري لساعات نوم عبدالرحمن $(0.6 < 1.3)$، فإن ساعات نوم نواف أكثر ثباتًا وأكثر تقاربًا من الوسط الحسابي.

الإجابات

18. a. الوسط الحسابي لدرجات الشعبة B :

$$\overline{x} = \frac{(60 \times 5) + (70 \times 2) + (80 \times 2) + (90 \times 6)}{5 + 2 + 2 + 6}$$

$$= \frac{1\,140}{15} = 76$$

جدول إيجاد التباين لدرجات الشعبة B

الدرجة x	التكرار f	$x - \overline{x}$	$(x - \overline{x})^2$	$f \bullet (x - \overline{x})^2$
60	5	– 16	256	1 280
70	2	– 6	36	72
80	2	4	16	32
90	6	14	196	1 176
المجموع	15			2 560

التباين :

$$\sigma^2 = \frac{2560}{15} = 170.\overline{6}$$

الانحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{170.\overline{6}} \approx 13.06$$

للشعبتين A و B نفس الوسط الحسابي ويساوي 76 لكن الانحراف المعياري لدرجات الشعبة A أصغر من الانحراف المعياري لدرجات الشعبة B (9.5 < 13.06)

b. كان أداء الشعبة A أفضل من أداء الشعبة B لأن الانحراف المعياري لدرجات الشعبة A يشير إلى أن درجات الطلاب أكثر تقاربًا من وسطها الحسابي وأكثر انسجامًا من درجات طلاب الشعبة B.

19. a.

عدد الأزهار x	12	17	18	19	20
التكرار f	2	2	3	2	1

الوسط الحسابي لعدد الأزهار بعد استعمال السماد :

$$\overline{x} = \frac{(12 \times 2) + (17 \times 2) + (18 \times 3) + (19 \times 2) + (20 \times 1)}{2 + 2 + 3 + 2 + 1}$$

$$= \frac{170}{10}$$

$$= 17$$

إذن، الوسط الحسابي لعدد الأزهار بعد استعمال السماد هو 17 زهرة.

عدد الأزهار x	عدد الأشجار f	$x - \overline{x}$	$(x - \overline{x})^2$	$f \bullet (x - \overline{x})^2$
12	2	– 5	25	50
17	2	0	0	0
18	3	1	1	3
19	2	2	4	8
20	1	3	9	9
المجموع	10			70

التباين :

$$\sigma^2 = \frac{70}{10} = 7$$

الانحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{7} \approx 2.6$$

إذن، الانحراف المعياري لعدد الأزهار بعد استعمال السماد يساوي 2.6 تقريبًا.

b. لقد ازداد الوسط الحسابي لعدد الأزهار من 14 إلى 17، وكذلك ازداد الانحراف المعياري من 2 إلى 2.6، وهذا يدل على أن عدد الأزهار ازداد و أصبح أكثر تشتتًا عن وسطها الحسابي.

تدرّب وحُل مسائل

طبّق

18. **نمذج** أجرت المعلّمة آمنة اختبارًا للرياضيات في الشعبتين A و B من الصف التاسع. إذا كان الوسط الحسابي لدرجات الطلاب في الشعبة A يساوي 76 والانحراف المعياري يساوي 9.5 وكان الجدول أدناه يمثّل درجات الشعبة B:

درجات الشعبة B

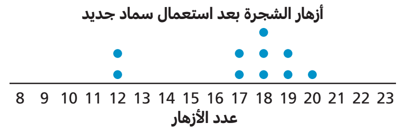
الدرجة x	60	70	80	90
التكرار f	5	2	2	6

a. أوجِد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للدرجات في الشعبة B، ثمّ قارنهما مع الوسط الحسابي والانحراف المعياري للدرجات في الشعبة A.

b. أي الشعبتين كان أداؤها أفضل في الاختبار وأيهما كانت نتائج طلابها أكثر تجانسًا ؟ وضّح إجابتك.

19. **فكّر وثابر في الحل** كان لدى سميرة العام الماضي عشر شجيرات على كل منها ما متوسطه 14 زهرة مع انحراف معياري قيمته 2. يعرض التمثيل بالنقاط أدناه عدد الأزهار على نفس الشجيرات بعد استعمال سماد جديد.

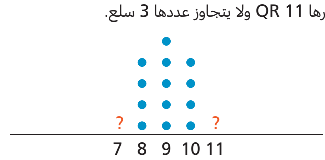
أزهار الشجرة بعد استعمال سماد جديد



a. أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للأزهار بعد استعمال السماد.

b. ما الاستنتاجات التي يمكنك استخلاصها حول هذا السماد وعدد الأزهار.

20. **مهارات التفكير العليا** يبيّن التمثيل بالنقاط أدناه أسعار بعض السلع بالريال القطري التي اشتراها سالم الشهر الماضي. علمًا أن عدد السلع التي سعرها QR 7 يساوي عدد السلع التي سعرها QR 11 ولا يتجاوز عددها 3 سلع.



a. ما الأعداد الممكنة للسلع التي أسعارها QR 7 أو QR 11 ؟

b. إذا كان عدد السلع التي سعرها QR 7 عدد زوجي غير الصفر، فما هو الانحراف المعياري لأسعار هذه السلع ؟

تدرّب على اختبار

21. أيّ مما يلي يمثّل تباين مجموعة البيانات التالية 9 ,2 ,5 ,3 ,1 ؟

A. 0

B. 8

C. 20

D. 40

22. **اختبار AT/ACT** إذا كان التباين لمجموعة مكوّنة من 8 قيم يساوي 144، فما هو الانحراف المعياري لهذه القيم ؟

Ⓐ 4　　Ⓑ 8

Ⓒ 12　　Ⓓ لا شيء مما سبق

23. **مهمة أدائية** يعرض الجدول أدناه عدد ساعات التدريبات الرياضية لمجموعة مكونة من 6 أشخاص خلال أسبوعين.

ساعات تدريب الاسبوع الثاني	ساعات تدريب الاسبوع الأول
6	2
7	4
7	4
9	9
10	10
9	7

الجزء A أوجد الوسط الحسابي لساعات التدريب لكل أسبوع. ماذا تستنتج ؟

الجزء B أوجد التباين والانحراف المعياري لساعات التدريب لكل أسبوع،ثم فسّر النتيجة.

الجزء C يقول فارس: " لو زادت ساعات التدريب في الأسبوع الأول ساعتين يوميًا، فإن ذلك سيؤدي إلى تقارب الحسابين الوسطيين للأسبوعين، لكن الانحراف المعياري للأسبوع الأول سيكون أكبر بكثير من الانحراف المعياري للأسبوع الثاني". هل توافقه الرأي ؟ وضّح إجابتك.

20. a. 3 سلع أو 2 أو 1 أو صفر سلعة.

b. عدد السلع التي أسعار كل منها QR 7 أو QR 11 يجب أن يساوي 2 لأنه عدد زوجي غير الصفر.

أسعار السلع x (QR)	7	8	9	10	11
التكرار f	2	4	5	4	2

الوسط الحسابي :

$$\overline{x} = \frac{(7 \times 2) + (8 \times 4) + (9 \times 5) + (10 \times 4) + (11 \times 2)}{2 + 4 + 5 + 4 + 2}$$

$$= \frac{153}{17} = 9$$

أسعار السلع x	التكرار f	$x - \overline{x}$	$(x - \overline{x})^2$	$f \bullet (x - \overline{x})^2$
7	2	– 2	4	8
8	4	– 1	1	4
9	5	0	0	0
10	4	1	1	4
11	2	2	4	8
المجموع	17			24

التباين لأسعار السلع : $\sigma^2 = \frac{24}{17} \approx 1.4$

الانحراف المعياري : $\sigma \approx \sqrt{1.4} = 1.2$

إذن، الانحراف المعياري لأسعار السلع يساوي 1.2 تقريبًا.

الإجابات

21. B

23. **الجزء A** الوسط الحسابي لساعات التدريب في الأسبوع الأول :

$$\bar{x} = \frac{2+4+4+9+10+7}{6} = \frac{36}{6} = 6$$

الوسط الحسابي لساعات التدريب في الأسبوع الثاني :

$$\bar{x} = \frac{6+7+7+9+10+9}{6} = \frac{48}{6} = 8$$

إذن، الوسط الحسابي لساعات التدريب في الأسبوع الأول أصغر من الوسط الحسابي لساعات التدريب في الأسبوع الثاني $(6 < 8)$

الجزء B في الأسبوع الأول

الأشخاص	ساعات التدريب x	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
الأول	2	– 4	16
الثاني	4	– 2	4
الثالث	4	– 2	4
الرابع	9	3	9
الخامس	10	4	16
السادس	7	1	1
المجموع			50

التباين :

$$\sigma^2 = \frac{50}{6} = 8.\bar{3}$$

الانحراف المعياري لساعات التدريب في الأسبوع الأول :

$$\sigma = \sqrt{8.\bar{3}} \approx 2.9$$

في الأسبوع الثاني

الأشخاص	ساعات التدريب x	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
الأول	6	– 2	4
الثاني	7	– 1	1
الثالث	7	– 1	1
الرابع	9	1	1
الخامس	10	2	4
السادس	9	1	1
المجموع			12

التباين :

$$\sigma^2 = \frac{12}{6} = 2$$

الانحراف المعياري لساعات التدريب في الأسبوع الثاني :

$$\sigma = \sqrt{2} \approx 1.4$$

يشير الانحراف المعياري في الأسبوع الثاني إلى أن أداء الأشخاص في التدريب أفضل من أدائهم في الأسبوع الأول، فساعات التدريب في الأسبوع الثاني أقل تباعدًا عن الوسط الحسابي.

الجزء C نوجد الوسط الحسابي الجديد بعد إضافة ساعتين إلى ساعات التدريب في كل يوم من الأسبوع الأول : $\bar{x} = 8$

إذن، يصبح الوسط الحسابي لساعات التدريب في الأسبوعين هو نفسه أي 8 ساعات.

التباين :

$$\sigma^2 = \frac{50}{6} \approx 8.\bar{3}$$

الانحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{8.\bar{3}} \approx 2.9$$

تغير الوسط الحسابي من 6 ساعات إلى 8 ساعات وأصبح مساويًا تمامًا للوسط الحسابي لساعات التدريب في الأسبوع الثاني، لكن الانحراف المعياري لم يتغير قط، لذلك لا أوافق على ما قاله فارس.

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم.
تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس.
كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

ملاحظات

الوحدة 4
الإحصاء

مراجعة الوحدة

تقديم السؤال الأساس

كيف ننشئ ونستعمل المدرج التكراري ؟ وكيف تحسب مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت وتستعملها في مقارنة البيانات ؟

بعد إجابة الطلاب عن السؤال الأساس، شجّعهم على إدراج أمثلة تدعم إجاباتهم. حفّزهم على البحث عن النقاط الآتية أثناء مناقشة الإجابات.

- يمكن للمدرج التكراري أن يساعد على إيجاد النسبة المئوية لفئات معينة من بيانات كمية وذلك باستعمال القانون :
  تكرار الفئة = كثافة التكرار × طول هذه الفئة. ذلك يساعد على تحليل البيانات بطريقة علمية.
- يوفّر المدرج التكراري النسبي فرصة للطلاب كي يستدلوا على معلومات هم بحاجة إليها من البيانات ذات فئات متساوية الطول. كما أنه يساعد على إعطاء نصائح وتوصيات يستفيد منها الإحصائيون ويبنون عليها، إذ أنه يوفر مقارنة سهلة بين الفئات عبر عرض المنحنى (الاتجاه) الذي تتخذه تكرارات هذه الفئات.
- من المهم جدًّا توجيه الطلاب إلى قراءة ودراسة المدرج التكراري والمدرج التكراري النسبي بتمعن وانتباه، للإحاطة بالفروقات بين المدرج التكراري ذي الفئات غير متساوية الطول والمدرج التكراري النسبي ذي الفئات متساوية الطول.
- مقاييس النزعة المركزية لقيم البيانات وهي الوسط الحسابي والوسيط والمنوال لا تشير بصورة دقيقة إلى تحليل البيانات ووصفها. المقياس الأكثر استعمالاً في المقارنة بين قيم البيانات هو الوسط الحسابي علمًا أنه مقياس لا يساعد على قياس تشتت قيم البيانات ولا على وصفها.
- مقاييس التشتت متعددة ولكن في هذه الوحدة يتعامل الطلاب مع التباين والانحراف المعياري لدراسة تقارب قيم البيانات مع الوسط الحسابي أو بعدها عنه. كما أن الانحراف المعياري يساعد على المقارنة بين عدة قيم لبيانات معطاة، ويعطي نتائج أفضل في المقارنة من استعمال الوسط الحسابي.

الإجابات

2. التباين

3. كثافة التكرار

4. الوسيط

5. الانحراف المعياري

6. المنوال

7. الوسط الحسابي

الوحدة 4

مراجعة الوحدة

السؤال الأساس للوحدة

1. كيف تنشئ وتستعمل المدرج التكراري ؟ وكيف تحسب مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت وتستعملها في مقارنة البيانات ؟

مراجعة المصطلحات

اختر المصطلح الصحيح لإكمال كل جملة.

2. ______ هو الوسط الحسابي لمجموع مربعات الفرق بين قيم البيانات ووسطها الحسابي.

3. ______ لفئة هو ناتج قسمة تكرار الفئة على طولها.

4. القيمة التي يقل عنها 50% من البيانات تدعى ______.

5. ______ هو الجذر التربيعي للتباين.

6. ______ هو القيمة، أو القيم، الأكثر شيوعًا أو تكرارًا في مجموعة بيانات.

7. ______ هو مجموع ناتج ضرب كل قيمة في تكرارها مقسومًا على مجموع التكرارات.

- كثافة التكرار
- التكرار النسبي
- الوسط الحسابي
- التباين
- الوسيط
- الانحراف المعياري
- المنوال

مراجعة المفاهيم والمهارات

الدرس 1-4 المدرج التكراري

مراجعة سريعة

كثافة التكرار = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول هذه الفئة}}$

التكرار النسبي = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{مجموع التكرارات}}$

المدرج التكراري للجداول التكرارية ذات الفئات غير المتساوية الطول هو تمثيل بياني بأعمدة متلاصقة، حيث لكل عمود قاعدة تساوي إحدى الفئات وارتفاعه يساوي كثافة التكرار لهذه الفئة.

المدرج التكراري النسبي لجدول تكراري ذي فئات متساوية الطول هو تمثيل بياني بأعمدة متلاصقة، حيث لكل عمود قاعدة تساوي إحدى الفئات وارتفاعه يساوي التكرار النسبي لهذه الفئة.

مراجعة الوحدة 4

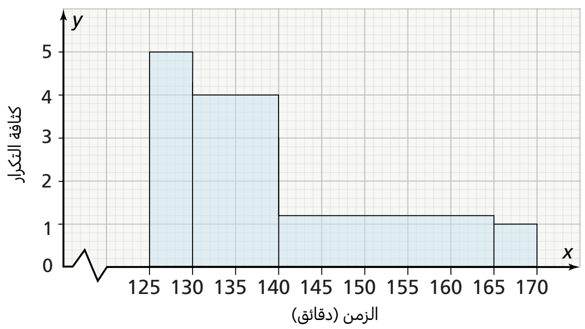
165 **الوحدة 4** مراجعة الوحدة

الإجابات

8. a. جدول الكثافة التكرارية :

الفئات	125-130	130-140	140-165	165-170
التكرار f	25	40	30	5
كثافة التكرار	$\frac{25}{5} = 5$	$\frac{40}{10} = 4$	$\frac{30}{25} = 1.2$	$\frac{5}{5} = 1$

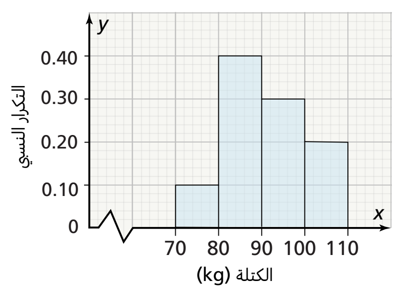
b. المدرج التكراري :



9. a. جدول التكرار النسبي :

الفئات	التكرار f	التكرار النسبي
70 - 80	4	$\frac{4}{40} = 0.10$
80 - 90	16	$\frac{16}{40} = 0.40$
90 - 100	12	$\frac{12}{40} = 0.30$
100 - 110	8	$\frac{8}{40} = 0.20$
المجموع	40	1.00

b. المدرج التكراري :



10. a. عدد اللاعبين : $4 \times 3 = 12$

b. العدد الإجمالي للاعبين المشاركين :

$$(4 \times 3) + (4 \times 6) + (2 \times 4) + (4 \times 2) = 52$$

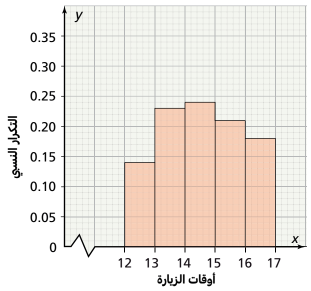
c. عدد اللاعبين الذين كانت مسافة رميتهم للكرة أكثر من أو تساوي 52 m :

$$(2 \times 4) + (4 \times 2) = 16$$

النسبة المئوية : $\frac{16}{52} \times 100\% \approx 30.8\%$

مثال

يمثّل المدرج التكراري النسبي أدناه أوقات زيارة 400 شخص لمعرض للسيارات الكلاسيكية في أحد أيام الأسبوع.



A. أوجد عدد زوّار المعرض بين الساعة 14:00 والساعة 15:00

التكرار النسبي للفئة الزمنية (15 - 14) هو 0.24، ولإيجاد عدد الزوار في هذه الفئة نستعمل القاعدة:

تكرار الفئة (عدد الزوار) = التكرار النسبي × مجموع التكرارات

عدد الزوار $= 0.24 \times 400$

$= 96$

إذن، عدد زوّار المعرض في الفترة الزمنية 15 - 14 يساوي 96 زائرًا.

B. أوجد عدد زوّار المعرض بعد الساعة 15:00

توجد فئتان زمنيتان بعد الساعة 15:00،
ولإيجاد عدد الزوار نجمع عدد الزوار في كل فئة.

عدد الزوار في الفئة 16 - 17

عدد الزوار في الفئة 15 - 16

عدد الزوار $= (0.21 \times 400) + (0.18 \times 400)$

$= 84 + 72$

$= 156$

إذن، عدد الزوار بعد الساعة 15:00 يساوي 156 زائرًا.

تدرّب وحلّ مسائل

8. يبيّن الجدول أدناه الزمن بالدقائق الذي سجله عدد من العدائين في أحد السباقات.

الفئات	125-130	130-140	140-165	165-170
التكرار f	25	40	30	5

a. كوّن جدول الكثافة التكرارية.

b. أنشئ المدرّج التكراري.

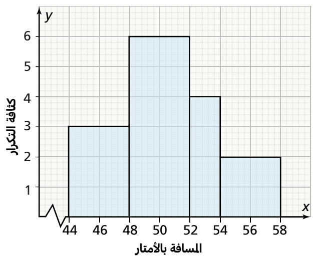
9. يبيّن الجدول أدناه كتل 40 عجلًا إلى أقرب كيلوجرام.

الفئات	70 - 80	80 - 90	90 - 100	100 - 110
التكرار f	4	16	12	8

a. كوّن الجدول التكراري النسبي.

b. أنشئ المدرج التكراري النسبي.

10. فكّر وثابر في الحل يمثّل المدرّج التكراري أدناه المسافات بالمتر لعدد من اللاعبين قاموا برمي الكرة في لعبة البيسبول.



a. أوجد عدد اللاعبين الذين كانت مسافات رمياتهم أقل من 48 m

b. أوجد عدد اللاعبين الذين شاركوا في لعبة البيسبول.

c. أوجد النسبة المئوية للاعبين الذين كانت مسافة رميتهم للكرة أكثر من أو تساوي 52 m

166 **الوحدة 4** الإحصاء

مراجعة الوحدة

الإجابات

11. كوّن جدول التكرار :

عدد الدفاتر x	التكرار f	$x \cdot f$
2	3	6
4	4	16
6	3	18
8	5	40
المجموع	15	80

الوسط الحسابي لعدد الدفاتر : $\bar{x} = \frac{80}{15} \approx 5.3$

إذن، الوسط الحسابي لعدد الدفاتر يساوي 5 تقريبًا

12. المنوال يساوي 4

13. نوجد أولًا التكرار التراكمي التصاعدي

عدد القصص x	التكرار f	التكرار التراكمي التصاعدي
4	7	7
7	12	19
10	10	29
12	9	38

مجموع التكرارات : $7 + 12 + 10 + 9 = 38$

وهو عدد زوجي لذا نوجد القيمة المقابلة للرتبة : $\frac{38}{2} = 19$ فتكون 7،

ثم نوجد القيمة المقابلة للرتبة : $\frac{38}{2} + 1 = 19 + 1 = 20$ فتكون 10،

الوسط الحسابي للقيمتين 7 و 10 هو : $\frac{7 + 10}{2} = 8.5$

إذن، الوسيط لعدد القصص التي تمت قراءتها يساوي 9 قصص تقريبًا.

14. كوّن جدول التكرار :

الكتب	التكرار f	$x \cdot f$
4	3	12
5	7	35
6	7	42
7	4	28
8	5	40
المجموع	26	157

الوسط الحسابي لعدد القصص : $x = \frac{157}{26} = 6.03$

إذن، الوسط الحسابي لعدد القصص يساوي 6 تقريبًا.

مراجعة سريعة

الوسط الحسابي: $\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f}$

حيث:

x: القيم

f: التكرار

- **المنوال** هو القيمة، أو القيم، الأكثر تكرارًا في جدول بيانات.
- **الوسيط** هو القيمة التي يقل عنها 50% من البيانات.
- إذا كان $\sum f$ عددًا فرديًا n، فإن الوسيط يساوي القيمة التي ترتيبها $\frac{n+1}{2}$
- إذا كان $\sum f$ عددًا زوجيًا n، فإن الوسيط يساوي الوسط الحسابي للقيمتين اللتين ترتيبهما $\frac{n}{2}$ و $\frac{n}{2} + 1$.

مثال

يمثّل الجدول أدناه عدد الأقلام التي بحوزة طلاب الصف التاسع في إحدى المدارس.

عدد الأقلام x	2	4	5	6	7
التكرار f	1	6	4	3	3

أوجد الوسط الحسابي لعدد الأقلام.

الخطوة 1 أكمل الجدول بإضافة عمود ثالث $(x \cdot f)$

عدد الأقلام x	التكرار f	$x \cdot f$
2	1	2
4	6	24
5	4	20
6	3	18
7	3	21
المجموع	17	85

الخطوة 2 أوجد الوسط الحسابي.

قانون الوسط الحسابي $\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{\sum f}$

عوّض $= \frac{85}{17}$

بسّط $= 5$

الوسط الحسابي يساوي 5

إذن، متوسّط عدد الأقلام لدى كل طالب يساوي 5 أقلام.

تدرّب وحلّ مسائل

11. يمثّل الجدول أدناه عدد الدفاتر لدى مجموعة من الطلاب.

عدد الدفاتر x	2	4	6	8
التكرار f	3	4	3	5

أوجد الوسط الحسابي لعدد الدفاتر.

12. يمثّل الجدول أدناه عدد أطفال مجموعة من العائلات.

عدد الأطفال x	2	3	4	5	6
التكرار f	2	5	8	3	3

أوجد منوال هذا الجدول.

13. يمثّل الجدول أدناه عدد القصص التي قرأتها مجموعة من الطلاب المشاركين في مسابقة المطالعة المدرسية.

عدد القصص x	4	7	10	12
التكرار f	7	12	10	9

أوجد الوسيط لهذا الجدول.

14. يمثّل الجدول أدناه عدد الكتب التي طالعتها مجموعة من الطلاب.

عدد الكتب x	4	5	6	7	8
التكرار f	3	7	7	4	5

أوجد الوسط الحسابي لعدد القصص.

15. **فكّر وثابر في الحل** يمثّل الجدول أدناه الكتل، بالجرام، لبعض المجوهرات لدى ليلى.

الكتلة x	20	30	50	80	100
التكرار f	3	4	6	4	3

a. أوجد الوسيط والوسط الحسابي لهذا الجدول.

b. إذا اشترت ليلى قطعة مجوهرات كتلتها 55 g، فهل يتغير الوسط الحسابي لكتل مجوهراتها ؟ برّر إجابتك.

مراجعة الوحدة

الإجابات

.15 **.a** لإيجاد الوسيط نحسب أولًا مجموع التكرارات :

$3 + 4 + 6 + 4 + 3 = 20$

الكتلة x	التكرار f	التكرار التراكمي التصاعدي
20	3	3
30	4	7
50	6	13
80	4	17
100	3	20

القيمة المقابلة للرتبة $10 = \frac{20}{2}$ هي 50

القيمة المقابلة للرتبة $11 = \frac{20}{2} + 1$ هي أيضًا 50

الوسيط : $50 = \frac{50 + 50}{2}$

لإيجاد الوسط الحسابي نكمل جدول التكرار :

الكتلة x	التكرار f	$x \cdot f$
20	3	60
30	4	120
50	6	300
80	4	320
100	3	300
المجموع	20	1 100

الوسط الحسابي : $55 = \frac{1\,100}{20}$

.b لن يتغير الوسط الحسابي لكتل مجوهراتها لأن الوسط الحسابي لكتل مجوهراتها يساوي 55 g وكتلة قطعة المجوهرات التي اشترتها تساوي 55 g

فيكون الوسط الحسابي : $55 = \frac{1\,100 + 55}{21}$

مراجعة الوحدة

الإجابات

16. **a.** الوسط الحسابي :

$$\frac{3+7+10+12+18+16}{6} = \frac{66}{6} = 11$$

إذن، الوسط الحسابي لعدد الأيام الممطرة هو 11 يومًا.

b. المدرج التكراري :

الأشهر	عدد الأيام (x)	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
الأول	3	−8	64
الثاني	7	−4	16
الثالث	10	−1	1
الرابع	12	1	1
الخامس	18	7	49
السادس	16	5	25
المجموع			156

التباين : $\sigma^2 = \frac{156}{6} = 26$

الانحراف المعياري : $\sigma = \sqrt{26} \approx 5.1$

17. الوسط الحسابي : $\frac{(2\times1)+(3\times6)+(4\times5)+(5\times4)+(6\times2)}{18} = 4$

عدد الكراسي x	التكرار f	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$f \cdot (x - \bar{x})^2$
2	1	−2	4	4
3	6	−1	1	6
4	5	0	0	0
5	4	1	1	4
6	2	2	4	8
المجموع	18			22

التباين : $\sigma^2 = \frac{22}{18} = 1.\overline{2}$

الانحراف المعياري : $\sigma = \sqrt{1.\overline{2}} \approx 1.1$

18. **a.** الوسط الحسابي في الأسبوع الأول : $\frac{2+4+3+2+5}{5} = \frac{16}{5} = 3.2$

الوسط الحسابي في الأسبوع الثاني : $\frac{5+5+3+2+5}{5} = \frac{20}{5} = 4$

الدرس 4-3 مقاييس النزعة المركزية

مراجعة سريعة

التباين هو الوسط الحسابي لمربعات الفرق بين قيم البيانات ووسطها الحسابي ويُرمز له بالرمز σ^2.

الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين ويُرمز له بالرمز σ.

	قيم مفردة	جدول تكراري بسيط
التباين:	$\sigma^2 = \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}$	$\sigma^2 = \frac{\sum\left[f \cdot (x-\bar{x})^2\right]}{\sum f}$
الانحراف المعياري:	$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$	

حيث: x: القيم، n: عدد القيم، $\bar{x}$: الوسط الحسابي، f: التكرار

مثال

في ما يلي المسافات التي قطعتها مجموعة من السبّاحين في البحر بالكيلومتر:

18, 20, 22, 23, 25, 30

أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذه البيانات.

الخطوة 1 أوجد الوسط الحسابي.

قانون الوسط الحسابي $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$

عوّض $= \frac{18+20+22+23+25+30}{6}$

بسّط $= \frac{138}{6}$

$= 23$

الخطوة 2 أكمل الجدول بإضافة الأعمدة $(x - \bar{x})$ و $(x - \bar{x})^2$ على الترتيب.

المسافة (x)	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
18	−5	25
20	−3	9
22	−1	1
23	0	0
25	2	4
30	7	49
المجموع		88

الخطوة 3 أوجد التباين

قانون التباين $\sigma^2 = \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}$

عوّض $= \frac{88}{6}$

بسّط ≈ 14.7

الخطوة 4 أوجد الانحراف المعياري

قانون الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

عوّض $\sigma^2 = 14.7$ $= \sqrt{14.7}$

بسّط ≈ 3.8

إذن، الانحراف المعياري لهذه المجموعة من البيانات يساوي 3.8 تقريبًا.

تدرّب وحلّ مسائل

16. تمثّل البيانات أدناه عدد الأيام الممطرة في أحد البلدان في 6 أشهر.

3, 7, 10, 12, 18, 16

a. أوجد الوسط الحسابي لعدد الأيام الممطرة.

b. أوجد التباين والانحراف المعياري لعدد الأيام الممطرة.

17. يمثّل الجدول أدناه عدد الكراسي في 18 غرفة مختلفة. أوجد التباين والانحراف المعياري لأعداد الكراسي.

عدد الكراسي	التكرار
2	1
3	6
4	5
5	4
6	2

18. **فكّر وثابر في الحل** تمثّل المجموعتان أدناه الزمن بالساعات الذي أمضاه عبدالرحمن في ممارسة بعض الأنشطة المختلفة في أسبوعين مختلفين.

	الاسبوع 1	الاسبوع 2
تمارين رياضية	2	5
مطالعة	4	5
سباحة	3	3
ركوب خيل	2	2
مشي	5	5

a. أوجد الوسط الحسابي لزمن هذه الأنشطة في كل من الأسبوعين.

b. أوجد الانحراف المعياري لزمن هذه الأنشطة في كل من الأسبوعين.

c. استعمل نتائج السؤالين a و b لتحدّد الأسبوع الذي كان فيه زمن الأنشطة أكثر تجانسًا.

168 الوحدة 4 الإحصاء

b. جدول التباين لأنشطة الأسبوع الأول :

الأنشطة	الزمن x (ساعة)	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
تمارين رياضية	2	−1.2	1.44
مطالعة	4	0.8	0.64
سباحة	3	−0.2	0.04
ركوب الخيل	2	−1.2	1.44
مشي	5	1.8	3.24
المجموع			6.8

التباين : $\sigma^2 = \frac{6.8}{5} = 1.36$

الانحراف المعياري : $\sigma = \sqrt{1.36} \approx 1.17$

الإجابات

تابع السؤال 18

جدول التباين لأنشطة الأسبوع الثاني :

الأنشطة	الزمن x (ساعة)	$x - \overline{x}$	$(x - \overline{x})^2$
تمارين رياضية	5	1	1
مطالعة	5	1	1
سباحة	3	-1	1
ركوب الخيل	2	-2	4
مشي	5	1	1
المجموع			8

التباين : $\sigma^2 = \frac{8}{5} = 1.6$

الانحراف المعياري : $\sigma = \sqrt{1.6} \approx 1.26$

c. بما أن الانحراف المعياري لزمن الأنشطة في الأسبوع الأول أصغر من الانحراف المعياري لزمن الأنشطة في الأسبوع الثاني $(1.17 < 1.26)$، فإن زمن الأنشطة في الأسبوع الأول كان أكثر ثباتًا وتجانسًا.