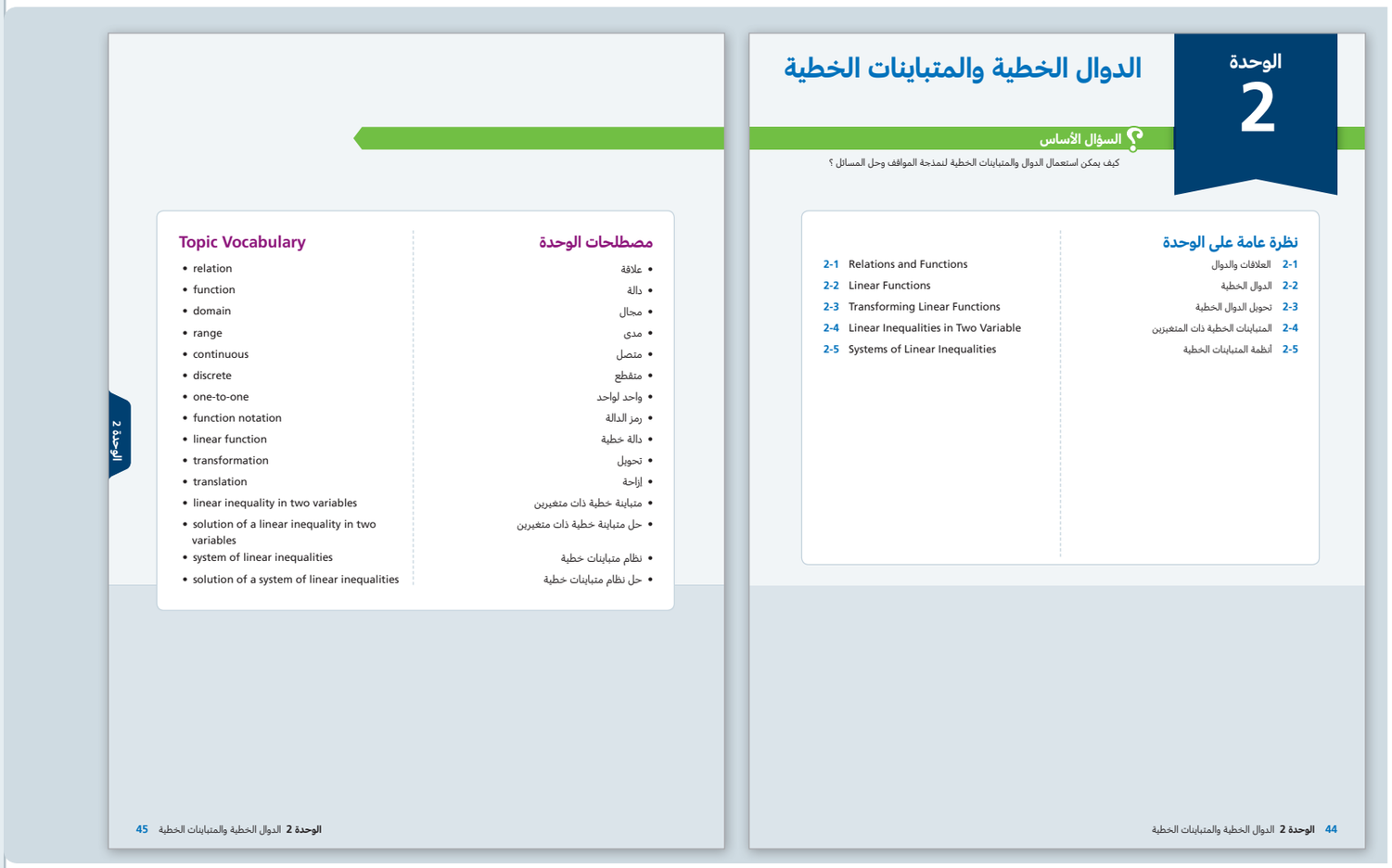
الوحدة 2
الدوال الخطية والمتباينات الخطية

مقدمة الوحدة



الوحدة
2

الدوال الخطية والمتباينات الخطية

السؤال الأساس

كيف يمكن استعمال الدوال والمتباينات الخطية لنمذجة المواقف وحل المسائل ؟

نظرة عامة على الوحدة

2-1 العلاقات والدوال
2-2 الدوال الخطية
2-3 تحويل الدوال الخطية
2-4 المتباينات الخطية ذات المتغيرين
2-5 أنظمة المتباينات الخطية

2-1 Relations and Functions
2-2 Linear Functions
2-3 Transforming Linear Functions
2-4 Linear Inequalities in Two Variable
2-5 Systems of Linear Inequalities

44 الوحدة 2 الدوال الخطية والمتباينات الخطية

الوحدة 2

مصطلحات الوحدة

- علاقة
- دالة
- مجال
- مدى
- متصل
- متقطع
- واحد لواحد
- رمز الدالة
- دالة خطية
- تحويل
- إزاحة
- متباينة خطية ذات متغيرين
- حل متباينة خطية ذات متغيرين
- نظام متباينات خطية
- حل نظام متباينات خطية

Topic Vocabulary

- relation
- function
- domain
- range
- continuous
- discrete
- one-to-one
- function notation
- linear function
- transformation
- translation
- linear inequality in two variables
- solution of a linear inequality in two variables
- system of linear inequalities
- solution of a system of linear inequalities

45 الوحدة 2 الدوال الخطية والمتباينات الخطية

السؤال الأساس للوحدة

كيف يمكن استعمال الدوال والمتباينات الخطية لنمذجة المواقف وحل المسائل ؟

ارجع إلى السؤال الأساس للوحدة أثناء دراسة الوحدة، واقرأ الملاحظات المتعلقة بالإجابة عن السؤال في صفحة 83 (مراجعة الوحدة) من دليل المعلم.

الدوال الخطية والمتباينات الخطية

مشروع STEM

نظرة عامة على المشروع

في هذا المشروع، سيقوم الطلاب بتحليل بيانات تاريخية تتعلق بكفاءة استهلاك السيارات للوقود. يمكن للطلاب المهتمين إجراء بحث عن أنواع أخرى من المركبات، مثل سيارات النقل الصغيرة أو الشاحنات.

تقديم المشروع

اعرض الموقف عبر مناقشة الاتجاهات في مجموعات بيانات وما يمكن أن يتعلمه الناس من تحليلها. يمكن استعمال الأسئلة الآتية لتوجيه النقاش.

س: اذكر بعض الأسباب التي تدفع إلى تحليل البيانات.

[قد يساعد الأداء السابق في توقع الأداء المستقبلي، كما في إحصائيات البيسبول. قد يساعد النمط الشرائي في مواسم التخفيضات متجرًا على تركيز استراتيجيته التسويقية. قد تكشف درجات الاختبارات عن أنماط في التعلم.]

س: اذكر أمثلة لبيانات تتوقع أن تتناقص بمرور الزمن.

[درجة الحرارة اليومية العليا من الصيف إلى الشتاء؛ الأزمنة القياسية في الجري من بداية موسم السباق إلى نهاية موسم السباق.]

س: اذكر أمثلة لبيانات تتوقع أن تتزايد بمرور الزمن.

[عدد السكان؛ درجة الحرارة اليومية العليا من الشتاء إلى الصيف؛ عدد مرات مشاركة عداء في سباقات الجري بمرور الزمن.]

اطلب من الطلاب قراءة المهمة التي سيُطلب منهم إنجازها.

تنفيذ المشروع

في هذه الوحدة:

- يمثّل الطلاب، في المستوى الإحدائي، البيانات التي جمعوها عن استهلاك السيارات للوقود نسبة إلى المسافات التي تقطعها.
- يستعمل الطلاب هذه البيانات لكتابة دالة خطية تنمذج الموقف.

إنهاء المشروع

قد ترغب في تخصيص يوم يتشارك فيه الطلاب تقديراتهم وتوقعاتهم.
شجّع الطلاب على توضيح خطوات عملهم بالإضافة إلى نتائجهم النهائية.

يمكنك أن تطلب من الطلاب تنفيذ المشروع في أي وقت تشاء أثناء دراسة الوحدة 2.

الدرس 2-1
العلاقات والدوال

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على :

✔ فهم أن العلاقة تمثّل دالة إذا ارتبط كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى.

✔ تحديد مجال منطقي وتمييز القيود على المجال وفقًا للسياق في مسائل من واقع الحياة.

الفهم الأساس

تمثّل العلاقة دالة إذا ارتبط كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى.

ترابط

سابقًا في هذا الصف، تمكّن الطلاب من :

- استعمال معادلات خطية لتمثيل العلاقات الخطية.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من :

- معرفة أن العلاقة تمثّل دالة إذا ارتبط كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى.
- تمييز القيود على مجال دالة خطية تبعًا للسياق في مسائل من واقع الحياة.

لاحقًا في هذه الوحدة، سيتمكّن الطلاب من :

- استعمال رمز الدالة لتمثيل قاعدة دالة، وإيجاد قيم الدوال، وكتابة دوال لنمذجة موقف من واقع الحياة.

دقة

يؤكد هذا الدرس على مزيج من الاستيعاب المفاهيمي والتطبيق.

- يفهم الطلاب أن الدالة هي علاقة بين المدخلة (المجال x) والمخرجة (المدى y) ترتبط فيها كل مدخلة بمخرجة واحدة فقط.
- يطبّق الطلاب مفهوم المجال والمدى في سياق واقع الحياة، مثل قطع الملابس وأسعارها، لتمييز القيود المنطقية على المجال.

بناء المصطلحات

المصطلحات الجديدة

العربية | الإنجليزية

- **علاقة** | *relation*
- **دالة** | *Function*
- **مجال** | *domain*
- **مدى** | *range*
- **متصل** | *continuous*
- **متقطع** | *discrete*
- **واحد لواحد** | *one-to-one*

نشاط المصطلحات

اعرض عددًا من أرقام الهواتف، كل منها مرتبط باسم صاحبه.

س: لنفترض أن نظام الهاتف يعمل بشكل جيد وطلب أحمد رقم هاتف سمير، هاتف مَن يجب أن يرن ؟

[هاتف سمير.]

كرر الخطوات أعلاه لعدد من الأسماء وأرقام الهواتف.

س: إذا طلب أحمد رقم هاتف سمير ورنّ هاتف راشد، هل يعمل نظام الهاتف بشكل جيد ؟

[كلا]

استعمل الكلمات التالية : مجال، مدى، علاقة، دالة، لوصف العلاقة بين أرقام الهاتف والهواتف التي ترن في النظام الذي يعمل بشكل جيد وفي النظام الذي لا يعمل بشكل جيد.

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يُركّز الطلاب على المعيارين :

9.3.1 يدرك مفهوم الدالة ويستعمل صيغة الدالة ويميز العلاقة التي تمثّل دالة أحادية.

9.3.2 يدرك أن الدوال يمكن تمثيلها بمخطط سهمي أو مجموعة من الأزواج المرتبة أو جداول أو تمثيلات بيانية أو كلمات أو معادلات.

معايير ممارسات الرياضيات

برّر منطقيًا بطريقة تجريدية وكمية

يحدّد الطلاب القيود على مجالّي موقفين من واقع الحياة : رسوم شحن سلعة بدلالة وزن السلعة، وقطع الملابس ودلالة تكلفتها.

ابحث عن البنية واستعملها

يلاحظ الطلاب البنية في مواقف مشابهة عندما يلاحظون أن التمثيلين البيانيين لموقفين مختلفين من واقع الحياة لهما مجالان محددان بالأعداد الكلية الموجبة لأن سياق الكلام في كلا المسألتين لا يسمح بوجود كميات سالبة.

استكشف وبرّر منطقيًّا

محور تركيز التدريس يستكشف الطلاب طرقًا مختلفة لتنظيم المقاعد في القاعة الدراسية. تساعدهم هذه البنية وهذا التنظيم في فهم العلاقات والدوال والتفكير فيهما.

قبل البدء بالحلّ طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: ماذا تلاحظ في المعلومات المعطاة في الصورة ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : يجلس الطلاب في صفين ويتكوّن كل صف من خمسة طلاب.]

أثناء الحلّ مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: ما الأشياء التي يجب أن تأخذها في الحسبان عند التفكير في عدد الصفوف وعدد المقاعد في غرفة الصف ؟

[طول وعرض الغرفة وأبعاد المقعد.]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: ارسم غرفة صف مستطيلة الشكل تتضمن طاولة حاسوب تشغل $\frac{3}{5}$ طول الجدار الخلفي وخزانة تشغل $\frac{1}{4}$ طول جدار جانبي. ثم ارسم صفوفًا من المقاعد.

[تحقق من عمل الطلاب.]

س: ما عدد الصفوف وعدد المقاعد المنطقي في غرفة الصف ؟

[قد تتنوع الإجابات، ولكن يجب أن تكون أقل من إجابات الجزء A.]

س: كيف سيبدو التمثيل البياني للعلاقة بين عدد الصفوف وعدد المقاعد ؟

[ستظهر مجموعة نقاط لا يمكن وصلها بمستقيم.]

بعد إنجاز الحلّ طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: كيف يمكنك تنظيم النتائج التي توصلت إليها ؟

[يمكنك إنشاء جدول تكتب في أحد أعمدته أعدادًا مختلفة من الصفوف، وفي العمود الآخر عدد المقاعد الإجمالي في كل صف.]

س: هل يمكنك استعمال التمثيل البياني لمستقيم لعرض النتائج التي توصلت إليها ؟ وضّح إجابتك.

[كلا؛ فالمستقيم يمثّل كل القيم الممكنة، في حين عدد المقاعد أو الصفوف لا يمكن أن يكون إلا عددًا كليًا.]

عادات التفكير استعمل مع **استكشف وبرّر منطقيًّا**

نمذج ما النماذج الأخرى التي يمكنك استعمالها لتمثيل معلومات الطلاب ؟ اختر أحد النماذج وصفه. وضّح كيف ستمثّل المعلومات.

[التمثيل بالأعمدة؛ يمكن كتابة عدد الصفوف على امتداد المحور الأفقي، وكتابة عدد المقاعد في كل صف على امتداد المحور الرأسي.]

كتاب الطالب، صفحة 47

استكشف وبرّر منطقيًا

زتبت المقاعد في قاعة دراسية في صفوف أفقية كما في الشكل أدناه.

A. ما العدد المنطقي للصفوف في القاعة الدراسية ؟ وما العدد المنطقي للمقاعد ؟

B. ابحث عن البنية ما عدد الصفوف الذي سيكون عدد مستحيل ؟ وما عدد المقاعد الذي سيكون عدد مستحيل ؟ وضّح إجابتك.

C. ما الذي تكشفه إجابتك في الجزأين A و B عن شكل التمثيل البياني الذي يربط بين عدد الصفوف وعدد المقاعد ؟

2-1
العلاقات والدوال
Relations and Functions

استطيع... تحديد ما إذا كانت العلاقة دالة أم لا.

معايير الدرس
9.3.1 و 9.3.2

المصطلحات
- علاقة relation
- دالة function
- مجال domain
- مدى range
- متصل continuous
- متقطع discrete
- واحد لواحد one-to-one

نموذج من أعمال الطلاب

A. العدد المنطقي للصفوف 3-8؛ العدد المنطقي للمقاعد 5 أمثال عدد الصفوف.

B. لا يمكن أن يكون عدد الصفوف أقل من 1؛ لا يمكن أن يكون عدد المقاعد عددًا أوليًا أو أكبر مما تستوعبه غرفة الصف. لا يمكن توزيع عدد أولي من المقاعد بالتساوي على الصفوف.

C. يتضمن التمثيل البياني النقاط (15 , 3)، (10 , 2)، (5 , 1)، وهكذا، حيث تتزايد قيمة x بمقدار 1 وتتزايد قيمة y بمقدار 5، ولا يمكن الوصل بين هذه النقاط بمستقيم.

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلم مركّز

عرّف الطلاب على مجال ومدى الدالة. ذكرهم بأنهم سبق لهم أن تعرفوا على العلاقات والدوال، موضحًا لهم أن المجال والمدى يساعدان على تحديد ما إذا كانت العلاقة تمثّل دالة أم لا.

السؤال الأساس ما الدالة ؟ وما أهمية المجال والمدى في تعريف الدالة ؟

مثال 1 معرفة المجال والمدى

ما مجال الدالة ومداها ؟

x	1	2	3	4	5
y	11	12	13	13	13

المدخلات

المخرجات

العلاقة هي مجموعة من الأزواج المرتبة. **الدالة** علاقة ترتبط فيها كل مدخلة بمخرجة واحدة فقط.
مجال الدالة هو مجموعة المدخلات. **مدى** الدالة هو مجموعة المخرجات. اصطلاحًا، المدخلات هي قيم x والمخرجات هي قيم y.

مجال هذه الدالة هو مجموعة قيم x، وهي {1 , 2 , 3 , 4 , 5}.
مدى الدالة هو مجموعة قيم y، وهي {11, 12, 13}.

حاول أن تحلّ! 1. حدّد مجال ومدى كل دالة أدناه.

a.

x	2	3	4	5	6
y	0	1	2	3	4

b.

x	−3	−1	1	3	4
y	1	3	−2	2	6

الدرس 1-2 العلاقات والدوال 47

مثال 1 معرفة المجال والمدى

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: كيف يمكنك وصف المدخلات والمخرجات المكتوبة في الجدول ؟
[تظهر كل مدخلة مرة واحد في الجدول. تظهر إحدى المخرجات عددًا من المرات.]
س: ما الطريقة الأخرى التي يمكنك من خلالها تمثيل الدالة الموضحة في الجدول ؟
[في صورة نقاط (x , y) على تمثيل بياني.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

1. a. المجال : {0, 1, 2, 3, 4}؛ المدى : {2, 3, 4, 5, 6}
b. المجال : {−2, 1, 2, 3, 6}؛ المدى : {−3, −1, 1, 3, 4}

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: ما الفرق بين المجال والمدى ؟ وضح إجابتك.
[المجال هو قيم المدخلات في علاقة ما. المدى هو قيم المخرجات في علاقة ما.
حيث تتحدّد قيم المدى تبعًا لقيم المجال.]

تنويه

يمكن استبدال كلمة مجال الدالة f بالرمز D_f وكلمة مدى الدالة f بالرمز R_f.

خطأ شائع

حاول أن تحل! 1 قد يعتقد بعض الطلاب أن قيم x هي المدى وقيم y هي المجال. ذكر الطلاب بأن قيم x هي مدخلات الدالة وقيم y هي مخرجات الدالة.

مثال 2 تحليل المجال والمدى المنطقيين

طرح أسئلة هادفة

س: ما الذي عليك التفكير فيه لتحديد المجال المنطقي لموقف ما ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : قد يكون من المنطقي استعمال الأعداد الحقيقية أو الكلية أو الصحيحة أو الكسور، وكذلك معرفة العددين الأصغر والأكبر في المجال.]

س: كيف تحدّد ما إذا كنت ستمثل موقفًا ما بيانيًا بمستقيم أم بنقاط ؟

[استعمل المستقيم عندما يتضمن المجال كل الأعداد الحقيقية في فترة ما.
استعمل النقاط عندما يمكن استعمال قيم محددة فقط، مثل الأعداد الصحيحة.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

2. a. المجال المنطقي : الأعداد الصحيحة الموجبة حيث يبدأ من جولة واحدة إلى عدد الجولات التي يلعبها اللاعب، لأن اللاعب لا يمكن أن يلعب جزءًا كسريًا أو عددًا سالبًا من الجولات.
المدى المنطقي : مضاعفات العدد 17 بما أن تكلفة كل جولة هي 17 QR، وأن كل مدخلة عدد صحيح موجب، فإن كل مخرجة ستكون 17 مضروبًا في أي عدد صحيح موجب.

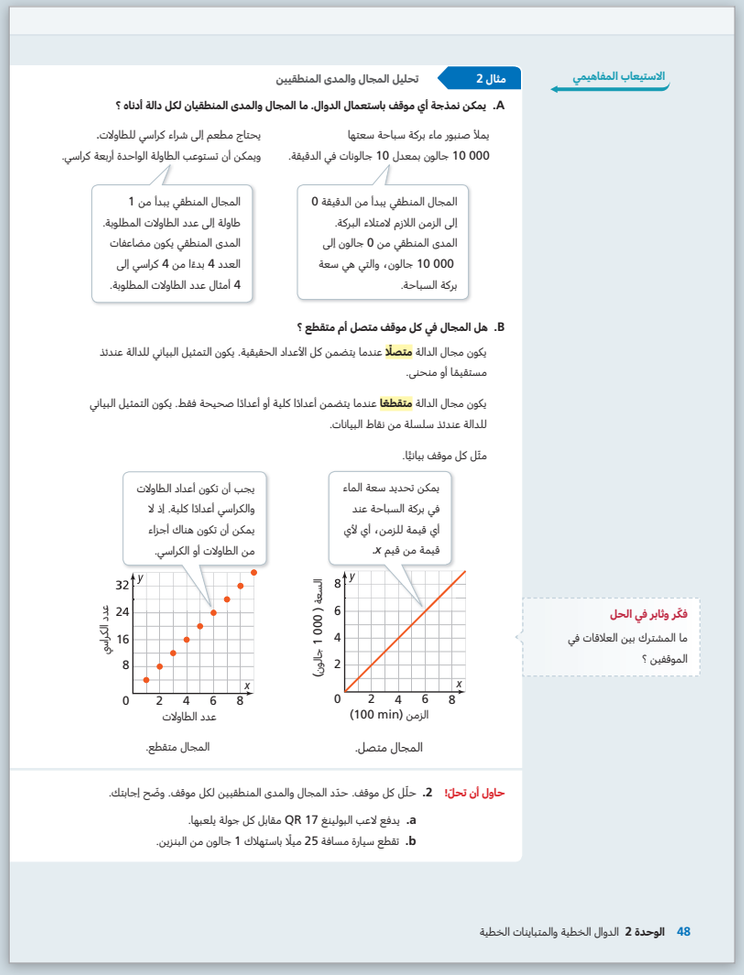
b. المجال المنطقي : كل الأعداد الحقيقية غير السالبة، لأن السيارة يمكنها قطع أي عدد حقيقي غير سالب من الأميال.
المدى المنطقي : كل الأعداد الحقيقية غير السالبة. بما أن السيارة تقطع مسافة 25 ميلًا بجالون واحد من البنزين، ويمكنها قطع أي عدد حقيقي موجب من الأميال، ستكون المخرجات 25 مضروبًا في أي عدد حقيقي غير سالب.

عادات التفكير

استعمل مع **المثالين 1 و 2**

فكّر وثابر في الحل كيف تؤثر خصائص موقف ما في مجال الدالة التي تصفه ؟

[تنظّم معاملات متغيرة كل موقف مجال الدالة التي تصفه.]



الاستيعاب المفاهيمي

مثال 2 تحليل المجال والمدى المنطقيين

A. يمكن نمذجة أي موقف باستعمال الدوال. ما المجال والمدى المنطقيان لكل دالة أدناه ؟

يملأ صنبور ماء بركة سباحة سعتها 10 000 جالون بمعدل 10 جالونات في الدقيقة.

المجال المنطقي يبدأ من الدقيقة 0 إلى الزمن اللازم لامتلاء البركة. المدى المنطقي من 0 جالون إلى 10 000 جالون، والتي هي سعة بركة السباحة.

يحتاج مطعم إلى شراء كراسي للطاولات. ويمكن أن تستوعب الطاولة الواحدة أربعة كراسي.

المجال المنطقي يبدأ من 1 طاولة إلى عدد الطاولات المطلوبة. المدى المنطقي يكون مضاعفات العدد 4 بدءًا من 4 كراسي إلى 4 أمثال عدد الطاولات المطلوبة.

B. هل المجال في كل موقف متصل أم متقطع ؟

يكون مجال الدالة **متصلًا** عندما يتضمن كل الأعداد الحقيقية. يكون التمثيل البياني للدالة عندئذ مستقيمًا أو منحنى.

يكون مجال الدالة **متقطعًا** عندما يتضمن أعدادًا كلية أو أعدادًا صحيحة فقط. يكون التمثيل البياني للدالة عندئذ سلسلة من نقاط البيانات.

مثّل كل موقف بيانيًا.

يمكن تحديد سعة الماء في بركة السباحة عند أي قيمة للزمن، أي لأي قيمة من قيم x.

يجب أن تكون أعداد الطاولات والكراسي أعدادًا كلية. إذ لا يمكن أن تكون هناك أجزاء من الطاولات أو الكراسي.

فكّر وثابر في الحل
ما المشترك بين العلاقات في الموقفين ؟

المجال متصل.

المجال متقطع.

حاول أن تحل! **2.** حلّل كل موقف. حدّد المجال والمدى المنطقيين لكل موقف. وضّح إجابتك.

a. يدفع لاعب البولينغ 17 QR مقابل كل جولة يلعبها.

b. تقطع سيارة مسافة 25 ميلًا باستهلاك 1 جالون من البنزين.

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 2 قد يجد بعض الطلاب صعوبة في تحديد المجال المنطقي لموقف من واقع الحياة.

- اطلب من الطلاب مراجعة كيفية تحديد المدخلة (المجال) والمخرجة (المدى) في مواقف من واقع الحياة. حدّد المدخلة والمخرجة لكل موقف.

س: تتقاضى شركة 40 QR مقابل غسل كل سيارة.
[المدخلة : عدد السيارات المغسولة؛ المخرجة : كمية المال المكتسب.]

س: سعر جالون واحد من البنزين 8.39 QR.
[المدخلة : عدد جالونات البنزين؛ المخرجة : كمية المال المنفق.]

س: يحتوي صندوق مشابك الورق على 100 مشبك ورق.
[المدخلة : عدد صناديق مشابك الورق؛ المخرجة : العدد الكلي لمشابك الورق.]

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 4 ساعد الطلاب في استكشاف كيفية تحديد القيود على مجال دالة ما عند قراءتهم وصفًا مكتوبًا للموقف.

س: يتتبع صاحب متجر نفقاته الشهرية مدة سنة. يربط صاحب المتجر بين ترتيب الشهر بالنسبة لبقية أشهر السنة والنفقات. ما القيود على المجال ؟
[المجال هو أعداد كلية فقط من 1 إلى 12]

س: يسجّل مرصد أحوال جوية درجة الحرارة القصوى كل يوم لمدة سنة. يربط المرصد ترتيب اليوم بالنسبة لبقية أيام السنة ودرجة الحرارة القصوى. ما القيود على المجال ؟
[المجال هو أعداد كلية فقط من 1 إلى 365]

مثال 3 تصنيف العلاقات والدوال

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: كيف يمكنك تحديد ما إذا كانت الدالة في الجزء B دالة واحد لواحد باستعمال تمثيل بياني ؟

[عيّن كل زوج من قيم المدخلات والمخرجات في مستوى إحداثي. إذا لاحظت نقطتين لهما نفس القيمة y، فإن الدالة ليست دالة واحد لواحد.]

س: هل يمكن لدالة أن تكون دالة واحد لمتعدد ؟

[كلا؛ إذا كانت العلاقة علاقة واحد لمتعدد، فإنها ليست دالة.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

3. a. لا تمثل دالة **b.** نعم تمثل دالة وهي دالة واحد لواحد

مثال 4 تحديد القيود على المجال

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: كيف يمكنك تحديد مجموعة القيم التي تمثل المدخلات ومجموعة القيم التي تمثل المخرجات من خلال النظر إلى المخطط ؟

[القيم التي إلى اليسار (وزن الطلب) ترتبط بكل القيم التي إلى اليمين (تكاليف الشحن). إذن، القيم التي إلى اليسار هي قيم المدخلات والقيم التي إلى اليمين هي قيم المخرجات.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

4. كل الأعداد في المجال يجب أن تكون أكبر من 0 وأقل من أو تساوي 200

عادات التفكير استعمل مع **المثالين 3 و 4**

استعمل الأدوات المناسبة ما مميزات استعمال مخططات سهمية عند تحليل الدوال ؟

[اقد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: إنشاء مخطط سهمي أسهل من رسم تمثيل بياني. يمكنك معرفة ما إذا كانت العلاقة دالة أم لا إذا كان سهم واحد فقط ينطلق من كل عنصر في المجال. يمكنك معرفة ما إذا كانت الدالة دالة واحد لواحد إذا كان كل سهم يشير إلى عنصر واحد فقط في المدى.]

مثال 3 تصنيف العلاقات والدوال

هل تمثّل كل علاقة أدناه دالة ؟ إذا كانت دالة، هل هي دالة واحد لواحد أم ليست دالة واحد لواحد ؟

تكون الدالة **واحد لواحد** إذا لم يرتبط عنصران من المجال بالعنصر نفسه في المدى.
عندما يرتبط عنصران أو أكثر من المجال بالعنصر نفسه في المدى، فالدالة **ليست واحد لواحد**.

A. {(1 , 2) , (5 , 6) , (7 , −1) , (8 , 0)}

العلاقة تمثل دالة لأن كل عنصر في المجال {8 , 7 , 5 , 1} يرتبط بعنصر واحد فقط في المدى {6 , 2 , 0 , −1}.

بما أن عناصر المجال لا تتشارك أي قيمة من قيم المدى، إذن الدالة واحد لواحد.

B.
1 → 17
2 → 11
3 → 10
4
5

العلاقة تمثل دالة، لأن كل عنصر من المجال يرتبط بعنصر واحد فقط من المدى.

بما أن أكثر من عنصر واحد من المجال يرتبط بعنصر واحد من المدى، فإن الدالة ليست دالة واحد لواحد.

خطأ شائع
يمكن أن يرتبط عنصران أو أكثر من مجال الدالة بعنصر واحد في المدى، لكن لا يمكن أن يرتبط عنصران أو أكثر من المدى بعنصر واحد فقط من عناصر المجال.

حاول أن تحلّ! **3.** هل تمثّل كل علاقة أدناه دالة ؟ إذا كانت دالة، هل هي دالة واحد لواحد أم ليست دالة واحد لواحد ؟

a.
−2 → 5
3 → 6
4 → 7
8

b.

مثال 4 تحديد القيود على المجال

تطبيق

يبيّن المخطط المجاور رسوم الشحن في صورة دالة لأوزان عدة طلبات عبر الإنترنت. وفقًا للموقف، ما القيود على مجال الدالة إن وجدت ؟

وزن الطلب (kg)	تكاليف الشحن (QR)
1.0	4.00
1.1	9.00
3.2	2.00
0.2	11.00
5.4	

يجب أن يكون وزن الطلب أكبر من الصفر، لذا يقتصر مجال الدالة على القيم الأكبر من الصفر.

بزر منطقيًا
فكر في العلاقة بين عناصر المجال وعناصر المدى.

حاول أن تحلّ! **4.** ينفق أحمد 200 QR على شراء الملابس شهريًا. يربط أحمد المبلغ الذي ينفقه كل شهر بعدد قطع الملابس التي يشتريها. ما القيود على المجال ؟

الدرس 1-2 العلاقات والدوال 49

تعزيز المهارات اللغوية

استعمل مع **المثال 3**

القراءة **مستوى 1** اقتراح : اطلب من الطلاب الاستماع إليك وأنت تقرأ التعاريف الآتية لكلمة دالة : فضل أو جرأة أو عنصر تابع لعنصر أو عناصر أخرى.

س: ما معنى كلمة دالة في العبارة : "له عليّ دالة" ؟

[فضل]

س: ما معنى كلمة دالة الواردة في بداية المثال 3 ؟

[عامل تابع لعامل آخر]

س: أي من عناصر الدالة تابعة للعناصر الأخرى ؟

[عناصر مدى الدالة تابعة لعناصر المجال.]

الكتابة **مستوى 2** وزّع عشوائيًا على الطلاب بطاقات تتضمّن المفردات الآتية : سبب، قلم، قطر، أخ، لبنان، نتيجة، ورقة، أخت. تحدّ الطلاب في التحدث فيما بينهم إلى أن يجد كل منهم الزميل الذي لديه بطاقة لها علاقة ببطاقته. (اكتب عددًا أكبر من البطاقات بحسب عدد الطلاب في الصف إذا لزم الأمر.)

س: ما معنى كلمة علاقة ؟

[رابط]

س: ناقش كيفية استعمال كلمة "علاقة" في هذا المثال.

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : توضح العلاقة الرابط بين مجموعتين من الأعداد.]

ملخص المفهوم العلاقات والدوال

س: ما التمثيل (التمثيلات) الأفضل لعرض الدوال المتصلة ؟ وضح إجابتك.

[التمثيل البياني هو الأفضل لعرض الدوال المتصلة.
في التمثيلات الأخرى، يجب أن تعرض بيانات كل نقاط الدالة. للدالة المتصلة عدد غير منته من النقاط، مما يعني أنه ليس بالإمكان عرض كل النقاط بشكل مستقل.]

عبّر عن **فهمك**|طبّق **فهمك**

خطأ شائع

التمرين 6 قد يعتقد بعض الطلاب أن النقطة (2 , 2) هي السبب في أن هذه العلاقة ليست دالة. شجّع الطلاب على المواءمة بين عناصر المجال وعناصر المدى، وسوف يلاحظون بعد ذلك أن العلاقة ليست دالة لأن العنصر 5 في المجال مرتبط بقيمتين مختلفتين في المدى.

الإجابات

1. الدالة هي علاقة ترتبط فيها كل مدخلة بمخرجة واحدة فقط. من المهم معرفة المجال والمدى لتحديد ما إذا كانت العلاقة دالة أم لا. كي تكون العلاقة دالة يجب أن يرتبط كل عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المدى.

2. المدى والمجال أعداد حقيقية موجبة متصلة بالإضافة إلى العدد 0؛ يمكن لكمية هطول المطر ومقدار الزمن أن يكونا كسورًا من أعداد كلية.

3. يقطعه في نقطتين : المجال يتضمن العنصر 5 والعلاقة ليست دالة.
يقطعه في نقطة واحدة : المجال يتضمن العنصر 5، في هذه الحالة يمكن للعلاقة أن تكون دالة، ولكن هذا يتوقف على النقاط الأخرى.
لا يقطعه في أي نقطة : المجال لا يتضمن العنصر 5 لكن يمكن للعلاقة أن تكون دالة. هذا يتوقف على النقاط الأخرى.

4. كل دالة علاقة، لأنه بالإمكان كتابة أي دالة في صورة مجموعة من الأزواج المرتبة. كل علاقة ليست دالة بالضرورة، لأنه يمكن لقيم مجال بعض العلاقات أن ترتبط بأكثر من قيمة في مداها.

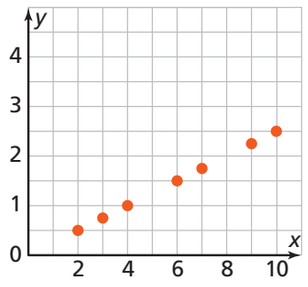
5.

x	−4	−2	−2	−1	3	3
y	−2	2	1	0	−2	1

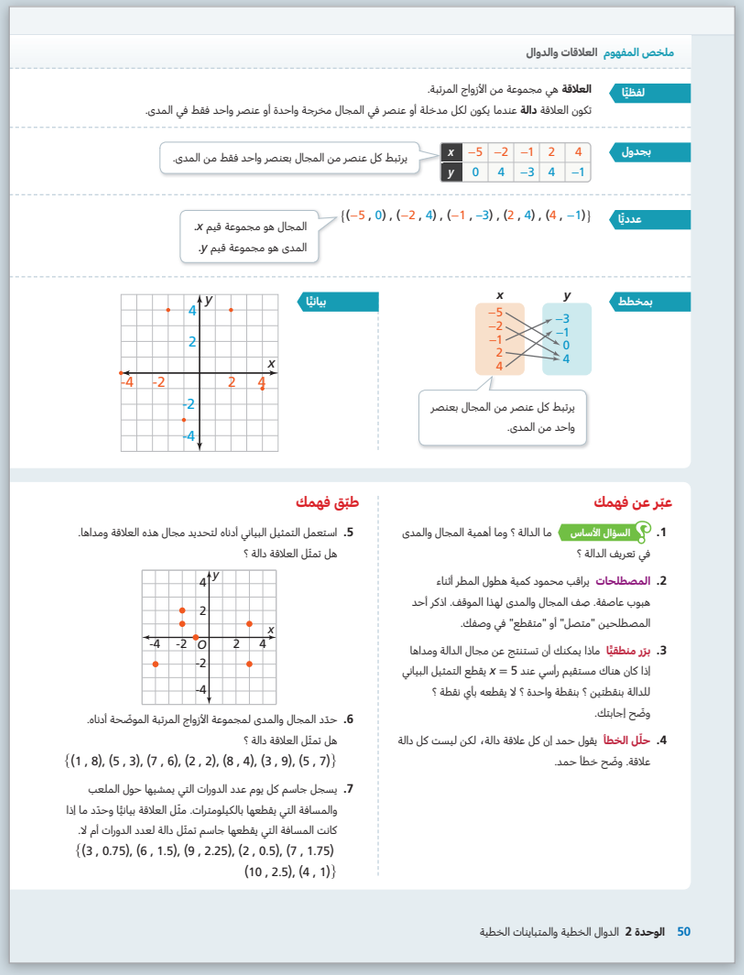
$\{(-4, -2), (-2, 2), (-2, 1), (-1, 0), (3, -2), (3, 1)\}$
المجال : $\{-4, -2, -1, 3\}$ والمدى : $\{-2, 0, 1, 2\}$ ؛ العلاقة ليست دالة.

6. المجال : $\{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$ ؛ المدى : $\{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ ؛ العلاقة ليست دالة.

7.



العلاقة تمثل دالة.



تدرَّب وحُل مسائل

دليل المهام

أساسي	متقدم
8-17, 19, 21, 23-29	8-13, 15, 17-29

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	8, 13, 14	1
2	15, 16	2
3	17-19	2
	9, 26	3
4	20-23, 28	1
	11, 25, 27	2
	10, 12, 24, 29	3

الإجابات

8. a. المجال : $3 \le x \le 1$، المدى $4 \le y \le 0$

b. المجال : $0 \le x$؛ المدى : $1 \ge y$

9. نعم يمكن تحديده؛ المجال هو {3, 4, 5, 6, 7} أي أنه يتضمن 5 قيم فقط. يتضمن المدى 6 قيم، أي يجب ربط قيمة واحدة على الأقل في المجال بأكثر من قيمة في المدى. إذن العلاقة ليست دالة.

10. يمكن أن تكون n أي قيمة باستثناء 1 و 2 و 3

11. يبين كل من التمثيل البياني والجدول أن العلاقة تمثل دالة لأنه يمكن ملاحظة ما إذا كانت أي من المدخلات مرتبطة بأكثر من مخرجة واحدة.

12. a. العلاقة لا تمثل دالة لأن قيمة واحدة من قيم المدخلات ترتبط بأكثر من قيمة من قيم المخرجات. يمكن للربط من y إلى x أن يكون دالة أو لا يكون، وذلك بالاعتماد على ما إذا كانت كل قيم y مرتبطة بأكثر من قيمة لـ x أم لا.

b. يمكن للعلاقة أن تمثل دالة أو لا، فذلك يتوقف على ما إذا كانت إحدى قيم x مرتبطة بأكثر من قيمة لـ y. لا يمكن للربط من y إلى x أن يكون دالة لأن إحدى قيم y على الأقل مرتبطة بأكثر من قيمة لـ x.

c. تمثل العلاقة دالة لأن كل مدخلة مرتبطة بمخرجة واحدة فقط. يمثل الربط من y إلى x دالة أيضًا لأن كل قيم y مرتبطة بقيمة x واحدة فقط.

13. المجال : {5, 8, 10, 12, 14}،
المدى : {6, 11}، العلاقة تمثل دالة لأن كل مدخلة مرتبطة بمخرجة واحدة فقط.

14. المجال : {A, B, C, D}،
المدى : {السد، الريان، العربي، الغرافة، الدحيل}
العلاقة لا تمثل دالة لأن المدخلة A ترتبط بأكثر من مخرجة.

15. المجال المنطقي : كل الأعداد الحقيقية الموجبة،
المدى المنطقي : 910

16. المجال المنطقي : الأعداد الكلية،
المدى المنطقي : مضاعفات العدد 150

17. المجال المنطقي : الأعداد الكلية،
المدى المنطقي : مضاعفات العدد 2000

18. دالة، واحد لواحد.

19. دالة، ليست واحد لواحد.

20. ليست دالة.

21. ليست دالة.

22. الأعداد الكلية الأصغر من أو تساوي 40،
قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة :

عدد الساعات	الأجر الأسبوعي
20	960
23	1100
28	1325
35	1690
40	2040

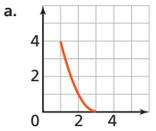
23. كل الأعداد الكلية من 10 إلى 20

تدرَّب وحُل مسائل

عزِّز فهمك

8. استعمل البنية حدّد مجال ومدى كل دالة أدناه.

a.



b.

9. ابن الحجج الرياضية إذا كان مجال العلاقة هو كل الأعداد الكلية الواقعة بين 2.5 و 7.5، ومداها يتضمن 6 قيم مختلفة، فهل يمكنك تحديد ما إذا كانت العلاقة دالة أم لا ؟ وضّح تبريرك المنطقي.

10. حلّل الخطأ طلب المعلّم من ماجد أن يذكر كل قيم n التي تجعل العلاقة أدناه دالة. أوجد خطأ ماجد وصححه.

$\{(2, 8), (6, 0), (4, 2), (2n, n)\}$

يمكن أن تكون n أي قيمة باستثناء 2 , 4 , 6

✗

11. تواصل بدقة صِف تمثيلين مختلفين يبيّن كل منهما علاقة ودالة أيضًا. وضّح إجابتك.

12. مهارات التفكير العليا يمكن وصف العلاقات التي تربط بين قيم المجال وقيم المدى إما بأنها علاقة واحد لواحد وإما بأنها ليست علاقة واحد لواحد.

a. إذا ارتبطت قيمة واحدة من قيم x بقيم متعددة من قيم y (علاقة واحد لمتعدد)، فهل تمثّل العلاقة دالة ؟ وإذا بادلنا بين قيم x و y، فهل تمثّل العلاقة دالة ؟ وضّح إجابتك.

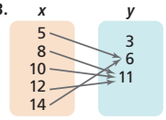
b. إذا لم تكن العلاقة علاقة واحد لواحد، فهل تمثّل العلاقة دالة ؟ وإذا بادلنا بين قيم x و y، فهل تمثّل العلاقة دالة ؟ وضّح إجابتك.

c. إذا كانت العلاقة علاقة واحد لواحد، فهل تمثّل العلاقة دالة ؟ إذا بادلنا بين قيم x و y، فهل تمثّل العلاقة دالة ؟ وضّح إجابتك.

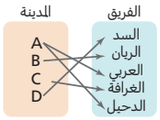
تدرَّب

في التمرينين 13 و 14، حدّد مجال كل علاقة أدناه ومداها. هل تمثّل العلاقة دالة ؟ وضّح إجابتك. انظر المثالين 1 و 3

13.



14.



في التمارين 15-17، حلّل كل موقف. حدّد المجال والمدى المنطقيين لكل موقف. انظر المثال 2

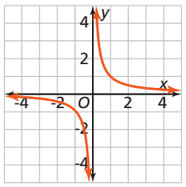
15. طائرة تطير بسرعة 910 km/h

16. سعر التذكرة لحضور حدث رياضي QR 150.

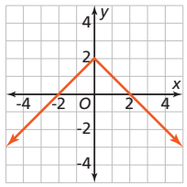
17. يستهلك شخص ما 2 000 سعرة حرارية كل يوم.

في التمارين 18-21، حدّد ما إذا كانت العلاقة دالة أم لا. إذا كانت كذلك، صنّف الدالة ما إذا كانت دالة واحد لواحد أم ليست دالة واحد لواحد. انظر المثال 3

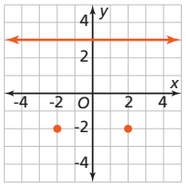
18.



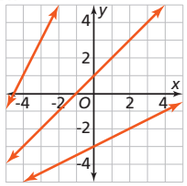
19.



20.



21.



في التمرينين 22 و 23، حدّد القيود على المجال. انظر المثال 4

22. يتقاضى حسن في عمله أجره بالساعة. قام بتصميم جدول يتضمن عدد الساعات التي يعملها كل أسبوع والمبلغ الذي تقاضاه مقابل ذلك.

23. يسبح جاسم في بركة سباحة، طولها 50 مترًا، من 10 إلى 20 مرة يوميًا، ويسجّل عدد المرات والزمن الذي تستغرقه كل مرة بالدقائق.

الإجابات

24. a. المجال : {اللغة العربية، الرياضيات، التاريخ، علم الأحياء، مختبر الأحياء}
المدى : {0, 45, 60, 90}
العلاقة تمثل دالة.

b. المجال : {اللغة العربية، الرياضيات، التاريخ، علم الأحياء، مختبر الأحياء}
المدى : {45, 60}
العلاقة تمثل دالة.

c. كلا؛ قد تتنوع الإجابات. العنصر 45 في الأسبوع 1 يتطابق مع أكثر من زمن في الأسبوع 2، أي أن زمن حصص الأسبوع 2 لا يمثل دالة لزمن الحصص في الأسبوع 1

25. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة :
{(مانعة , A) , (تحذيرية , B) , (إرشادية , D)}

26. a. المجال : $\left\{t : \frac{1}{2} \le t \le 2\right\}$،
المدى : $\{72 \le s \le 48 : s\}$ العلاقة تمثل دالة.

b. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : جدول.

الزمن (h)	السرعة (km/h)
0	48
$\frac{1}{4}$	52
$\frac{1}{2}$	56
1	64
$1\frac{1}{2}$	72

c. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : اخترت هذا النموذج لأن القطار زادت سرعته بعد نصف ساعة، ثم أصبحت سرعته ثابتة. يمكن للجدول أن يكون الطريقة الأبسط لنمذجة المعلومات.

27. a. لا
b. نعم
c. نعم
d. نعم
e. لا

28. E

29. الجزء A

التكلفة (QR)	الزمن (ساعات)
40	1
120	3
400	11
400	20

الجزء B نعم؛ التكلفة دالة للزمن لأن كل قيمة للزمن مرتبطة بقيمة واحدة فقط للتكلفة.

الجزء C كلا؛ لا يمثل الزمن دالة للتكلفة لأن قيمة التكلفة 400 ترتبط بأكثر من قيمة للزمن.

تدرّب وحُل مسائل

طبّق

24. نمذج يوضح الجدول أدناه عدد الدقائق التي يقضيها عيسى في كل حصة لمدة أسبوعين.

الحصة	الأسبوع 1 الزمن (min)	الأسبوع 2 الزمن (min)
اللغة العربية	60	60
الرياضيات	90	60
التاريخ	45	45
علم الأحياء	45	45
مختبر الأحياء	0	60

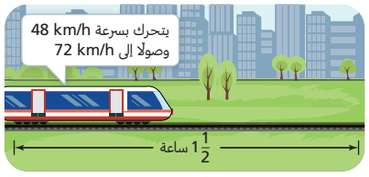
a. بالنسبة إلى حصص عيسى في الأسبوع الأول، حدّد المجال والمدى. هل تمثّل العلاقة دالة ؟ وضّح إجابتك.

b. بالنسبة إلى حصص عيسى في الأسبوع الثاني، حدّد المجال والمدى. هل تمثّل العلاقة دالة ؟ وضّح إجابتك.

c. هل زمن حصص عيسى في الأسبوع الثاني يمثّل دالة لزمن حصصه في الأسبوع الأول ؟ وضّح إجابتك.

25. فكّر وثابر في الحل إذا كانت أسماء لوحات المرور تمثّل المجال وتمثّل أنواع اللوحات (تحذيرية أو إرشادية أو مانعة) المدى، أنشئ قائمة من 3 لوحات تشكّل دالة.

26. برز منطقيًا بعد أن تحرك القطار مدة $\frac{1}{2}$ ساعة، زادت سرعته وتحرك بمعدل ثابت مدة $1\frac{1}{2}$ ساعة.



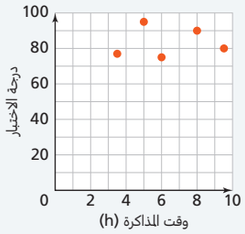
a. ما المجال ؟ وما المدى ؟

b. كيف يمكنك تمثيل العلاقة بين الزمن والسرعة ؟

c. لماذا مثّلت العلاقة بهذه الطريقة ؟

تدرّب على اختبار

27. يوضح التمثيل البياني أدناه الزمن الذي يقضيه بعض الطلاب في المذاكرة ودرجاتهم في الاختبار الأخير. حدّد ما إذا كان بالإمكان إضافة كل نقطة من نقاط البيانات الموضحة في الأجزاء من (a) إلى (e) إلى التمثيل البياني بحيث يبقى التمثيل البياني يمثّل دالة.



	نعم	لا
a. درجة أحمد 85 وذاكر 8 h	❑	❑
b. درجة منصور 97 وذاكر 9 h	❑	❑
c. درجة علي 77 وذاكر 4.5 h	❑	❑
d. درجة فيصل 80 وذاكر 7.5 h	❑	❑
e. درجة فارس 90 وذاكر 6 h	❑	❑

28. اختبار SAT/ACT بالنسبة إلى علاقة تكون فيها قيم y دالة لقيم x، حيث $y = 4$ عندما $x = 6$، أي مما يلي لا يمثّل ارتباطًا آخر ممكنًا في العلاقة ؟

Ⓐ $x = 3$ ترتبط مع $y = 2$

Ⓑ $x = 1$ ترتبط مع $y = 6$

Ⓒ $x = 0$ ترتبط مع $y = 0$

Ⓓ $x = 4$ ترتبط مع $y = 6$

Ⓔ $x = 6$ ترتبط مع $y = 2$

29. مهمة أدائية تكلفة استئجار دراجة هوائية QR 40 في الساعة، والأجرة اليومية القصوى QR 400.

الجزء A أنشئ جدولًا يوضح تكلفة استئجار الدراجة مدة ساعة واحدة و 3 ساعات و 11 ساعة و 20 ساعة.

الجزء B هل التكلفة تمثّل دالة للزمن ؟ وضّح إجابتك.

الجزء C هل الزمن يمثّل دالة للتكلفة ؟ وضّح إجابتك.

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب إثنان من أفضل الممارسات في التعليم. تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس. كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

الدرس 2-2
الدوال الخطية

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على:

- ✔ كتابة وإيجاد قيم دوال خطية باستعمال رمز الدالة.
- ✔ تمثيل دالة خطية بيانيًا وربط مجال الدالة بتمثيلها البياني.
- ✔ تفسير الدوال الممثلة بتمثيلات بيانية وجداول وأوصاف لفظية ورمز الدالة بدلالة موقف ما.

الفهم الأساس

يمكن تمثيل الدوال الخطية بعدة طرق، وذلك باستعمال الكلمات والجداول والتمثيلات البيانية والقواعد. إن رمز الدالة هو طريقة لكتابة قاعدة الدالة f.
إن مخرجة الدالة $f(x)$، تقرأ "f عند x"، تعني بأن f هي دالة للمدخلة x.

ترابط

سابقًا في هذا الصف، تمكّن الطلاب من:

- كتابة وحل معادلات خطية.
- التمييز بين العلاقات والدوال.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من:

- استعمال رمز الدالة لتمثيل الدوال الخطية.
- إيجاد قيم دوال خطية لمدخلات في مجالاتها.

لاحقًا في هذه الوحدة، سيتمكّن الطلاب من:

- تمثيل تحويلات لدوال خطية باستعمال رمز الدالة.

دقة

يركّز هذا الدرس على مجموعة متنوعة من المهارات الإجرائية والتطبيق.

- يكتب الطلاب قاعدة دالة خطية باستعمال رمز الدالة ويجدون قيمة دوال باستعمال رمز الدالة.
- يربط الطلاب مجال الدالة بالعلاقة الكمية التي تصفها. مثلًا، تحديد مجال دالة مرتبطة بالزمن للمتباينة $0 < x < 24$ لأنه يوجد 24 ساعة في اليوم الواحد.

بناء المصطلحات

مراجعة المصطلحات

العربية | الإنجليزية

- **مجال** | *domain*
- **عنصر** | *element*
- **مدى** | *range*

المصطلحات الجديدة

- **رمز الدالة** | *function notation*
- **دالة خطية** | *linear function*

نشاط المصطلحات

راجع المصطلح (دالة) على أنها قاعدة تربط كل عنصر في المجال مع عنصر واحد فقط في المدى.

اعرض على الطلاب التمثيل البياني للمستقيم $y = x + 1$.

اطلب من الطلاب استعمال التمثيل البياني لتمييز عنصر في المجال وتبيان كيفية ربطه بعنصر في المدى. بعدها بيّن للطلاب كيفية تمثيل نفس الدالة المعروضة في التمثيل البياني باستعمال رمز الدالة، أي $f(x) = x + 1$.

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يُركّز الطلاب على المعيارين:

9.3.3 يجد قيمة دالة عند قيمة في مجالها، ويكتب قاعدة دالة خطية لبيانات معطاة.

9.3.4 يمثّل بيانيًا ويحلل الدوال الخطية ويستخدمها في حل المسائل.

معايير ممارسات الرياضيات

نمذج

يستعمل الطلاب الجداول والرسومات والقواعد لتمثيل العلاقات الخطية في مواقف من واقع الحياة، مثل معرفة درجة الحرارة، والتي تتزايد بمعدل ثابت على مدى فترة زمنية تبلغ 24 ساعة.

كن دقيقًا

يفهم الطلاب معاني الرموز المستعملة في صيغة الدالة ويرون ميزة اختيار حروف تتعلق بمعنى المسألة، مثل اختيار $d(t)$ لتمثيل المسافة كدالة للزمن.

استكشف وبرّر منطقيًّا

محور تركيز التدريس يقدم الطلاب توقعات حول العدد النهائي للأحجية باستعمال الأنماط. هذا يساعد الطلاب على فهم كيفية نمذجة المعادلات أو الدوال بناء على الأنماط خلال هذا الدرس.

قبل البدء بالحلّ

طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزز التبرير المنطقي ومهارات حل المسائل

س: ماذا تلاحظ عن الأحجية ؟ ماذا تتوقع أن يحدث ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: تحتوي الأحجية على نمط، وقد يتم إنشاء نمط من الأعداد الصحيحة الأصلية والأعداد الصحيحة الناتجة.]

أثناء الحلّ

مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: ما النمط الذي تتعرف عليه من حل الأحجية ؟

[ناتج ضرب العدد الصحيح الأصلي مضروب بالعدد 2 يساوي العدد الصحيح الجديد.]

س: لماذا من المهم إيجاد نمط ؟

[يمكن أن يساعدك النمط على تحديد الأعداد التالية.]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: اكتب معادلة تمثل النمط.

[$y = 2x$، حيث يمثل x العدد الصحيح الأصلي ويمثل y العدد الصحيح الجديد.]

س: اكتب معادلة تمثل الأحجية.

[$y = \frac{9x - x}{4}$ ، حيث يمثل x العدد الصحيح الأصلي ويمثل y العدد الصحيح الجديد.]

بعد إنجاز الحلّ

طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

أدر مناقشة صفية حول أهمية الأنماط وكيف تساعد عند إجراء التوقعات.

س: كيف تمثل نمطًا أو توقعًا ؟

[يمكنك كتابة معادلة لنمذجة نمط أو توقع.]

عادات التفكير

استعمل مع **استكشف وبرّر منطقيًّا**

ابنِ الحجج الرياضية هل من الممكن إيجاد مثال مضاد ؟

[لا، لأن القاعدة صحيحة دائمًا.]

كتاب الطالب، صفحة 53

نموذج من أعمال الطلاب

A. و B.

$1 \rightarrow 2 : 1(9) - 1 = 8 , \frac{8}{4} = 2$

$2 \rightarrow 4 : 2(9) - 2 = 16 , \frac{16}{4} = 4$

$3 \rightarrow 6 : 3(9) - 3 = 24 , \frac{24}{4} = 6$

$5 \rightarrow 10 : 5(9) - 5 = 40 , \frac{40}{4} = 10$

$6 \rightarrow 12 : 6(9) - 6 = 48 , \frac{48}{4} = 12$

$-1 \rightarrow -2 : -1(9) - (-1) = -8 , \frac{-8}{4} = -2$

C. دائمًا ما يساوي العدد النهائي ضعف العدد الأصلي.

D. نعم، لأنه مهما كان العدد الذي تختاره، فإنك تضربه في ثمانية ثم تقسم الناتج على أربعة، وهي العملية التي تكافئ ضرب العدد الأصلي في اثنين.

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلم مركّز

قدّم الدوال الخطية للطلاب. ذكّر الطلاب بأنه يمكنهم تمثيل قاعدة دالة باستعمال رمز الدالة. وضّح لهم أنهم سيقومون بتحديد الدوال الخطية وإيجاد قيمها وتمثيلها بيانيًا وكتابتها في هذا الدرس.

مثال 1 إيجاد قيم دوال باستعمال رمز الدالة

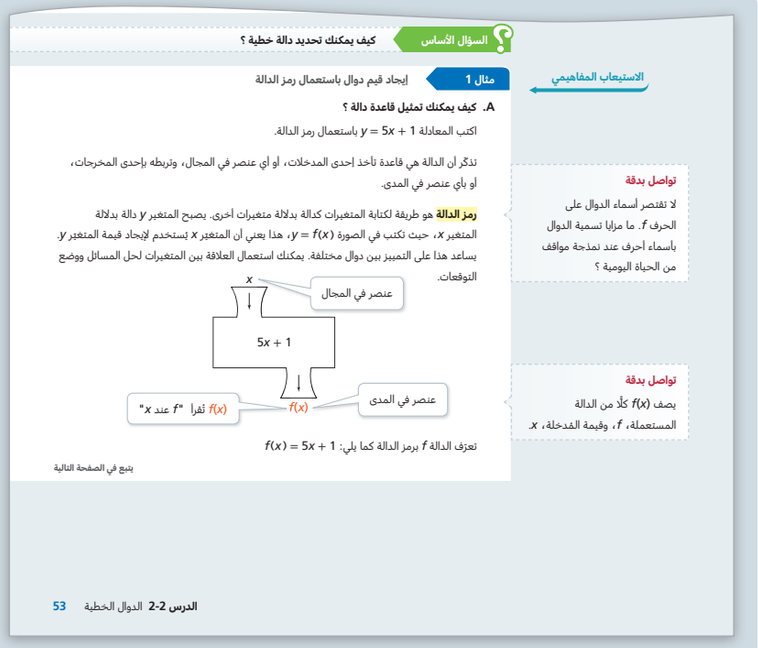
طرح أسئلة هادفة

س: متى تستعمل رمز الدالة ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: عندما تحتاج إلى كتابة متغير ما في صورة دالة لمتغير آخر.]

س: ما الطريقة الأخرى للتفكير بالمجال والمدى ؟

[عناصر المجال هي قيم x، وعناصر المدى هي قيم $f(x)$ أو قيم y.]



السؤال الأساس: كيف يمكنك تحديد دالة خطية ؟

الاستيعاب المفاهيمي

مثال 1 إيجاد قيم دوال باستعمال رمز الدالة

A. كيف يمكنك تمثيل قاعدة دالة ؟

اكتب المعادلة $y = 5x + 1$ باستعمال رمز الدالة.

تذكّر أن الدالة هي قاعدة تأخذ إحدى المدخلات، أو أي عنصر في المجال، وتربطه بإحدى المخرجات، أو بأي عنصر في المدى.

رمز الدالة هو طريقة لكتابة المتغيرات كدالة بدلالة متغيرات أخرى. يصبح المتغير y دالة بدلالة المتغير x، حيث تكتب في الصورة $f(x) = y$، هذا يعني أن المتغير x يستخدم لإيجاد قيمة المتغير y. يساعد هذا على التمييز بين دوال مختلفة. يمكنك استعمال العلاقة بين المتغيرات لحل المسائل ووضع التوقعات.

تعرّف الدالة f برمز الدالة كما يلي: $f(x) = 5x + 1$

تواصل بدقة

لا تقتصر أسماء الدوال على الحرف f. ما مزايا تسمية الدوال بأسماء أحرف عند نمذجة مواقف من الحياة اليومية ؟

تواصل بدقة

يصف $f(x)$ كلًا من الدالة المستعملة، f، وقيمة المُدخلة، x.

يتبع في الصفحة التالية

الدرس 2-2 الدوال الخطية 53

تابع مثال 1

حاول أن تحلّ! الإجابات

1. a. $g(4) = -11$
   b. $h(4) = 43$

مثال 2 كتابة قاعدة دالة خطية

طرح أسئلة هادفة

س: ما الطريقة التي يمكنك استعمالها لتحديد العلاقة بين القيم؟

[لاحظ النمط من قيمة إلى أخرى في الجدول.]

س: لماذا يمكنك استعمال صيغة الميل والمقطع لنمذجة الدالة الخطية؟

[المتغير y في صيغة الميل والمقطع يمثل مخرجة الدالة $f(x)$. لذا يمكنك كتابة $f(x) = mx + b$.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

2. a. $f(x) = 6.5x$
   b. $f(x) = 3x - 2$

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

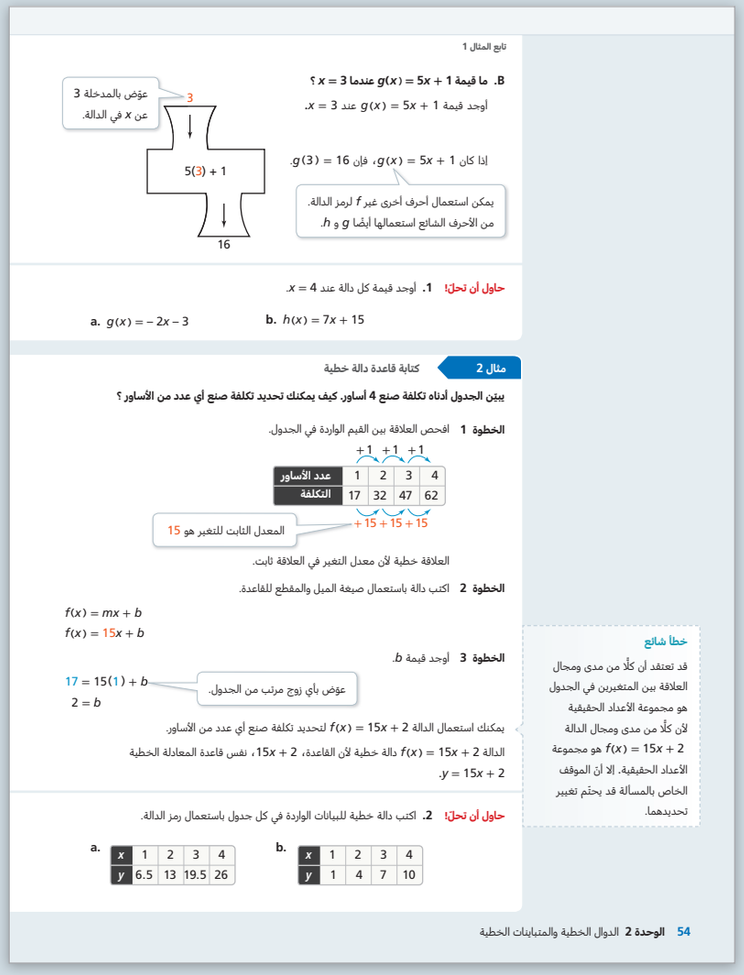
س: ماذا تلاحظ في ما يتعلق بالأنماط في الجداول والتي تساعدك على كتابة الدوال الخطية ؟

[في فقرة حاول أن تحل $2(a)$ ، تزداد القيم y بمقدار 6.5،
وفي فقرة حاول أن تحل $2(b)$، تزداد القيم y بمقدار 3]

عادات التفكير استعمل مع **المثالين 1 و 2**

ابحث عن العلاقات ماذا تكشف العلاقة بين القيم x والقيم y عن الدالة ؟

[يمكن أن تساعد العلاقة بين قيم x وقيم y في تحديد ما إذا كانت دالة ما خطية أم لا.]



تابع المثال 1

B. ما قيمة $g(x) = 5x + 1$ عندما $x = 3$ ؟

أوجد قيمة $g(x) = 5x + 1$ عند $x = 3$.

إذا كان $g(x) = 5x + 1$، فإن $g(3) = 16$.

عوّض بالمدخلة 3 عن x في الدالة.

3 → 5(3) + 1 → 16

يمكن استعمال أحرف أخرى غير f لرمز الدالة. من الأحرف الشائع استعمالها أيضًا g و h.

حاول أن تحلّ! 1. أوجد قيمة كل دالة عند $x = 4$.

a. $g(x) = -2x - 3$

b. $h(x) = 7x + 15$

مثال 2 كتابة قاعدة دالة خطية

يبين الجدول أدناه تكلفة صنع 4 أساور. كيف يمكنك تحديد تكلفة صنع أي عدد من الأساور ؟

الخطوة 1 افحص العلاقة بين القيم الواردة في الجدول.

عدد الأساور	1	2	3	4
التكلفة	17	32	47	62

+1 +1 +1

+15 +15 +15

المعدل الثابت للتغير هو 15

العلاقة خطية لأن معدل التغير في العلاقة ثابت.

الخطوة 2 اكتب دالة باستعمال صيغة الميل والمقطع للقاعدة.

$f(x) = mx + b$

$f(x) = 15x + b$

الخطوة 3 أوجد قيمة b.

$17 = 15(1) + b$ ← عوّض بأي زوج مرتب من الجدول.

$2 = b$

يمكنك استعمال الدالة $f(x) = 15x + 2$ لتحديد تكلفة صنع أي عدد من الأساور.

الدالة $f(x) = 15x + 2$ دالة خطية لأن القاعدة، $15x + 2$، نفس قاعدة المعادلة الخطية $y = 15x + 2$.

خطأ شائع

قد تعتقد أن كلًا من مدى ومجال العلاقة بين المتغيرين في الجدول هو مجموعة الأعداد الحقيقية لأن كلًا من مدى ومجال الدالة $f(x) = 15x + 2$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية. إلا أن الموقف الخاص بالمسألة قد يحتّم تغيير تحديدهما.

حاول أن تحلّ! 2. اكتب دالة خطية للبيانات الواردة في كل جدول باستعمال رمز الدالة.

a.

x	1	2	3	4
y	6.5	13	19.5	26

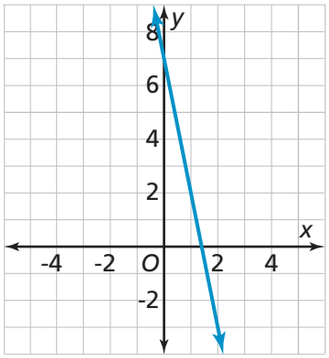
b.

x	1	2	3	4
y	1	4	7	10

54 الوحدة 2 الدوال الخطية والمتباينات الخطية

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 2 اطلب من الطلاب اكتشاف كتابة قاعدة دالة خطية استنادًا إلى تمثيلها البياني.



س: ما قاعدة الدالة التي تحدد التمثيل البياني السابق ؟

[$f(x) = -5x + 7$، اختر نقطتين من التمثيل البياني مثل $(2, 1)$ و $(-3, 2)$.
أوجد الميل بين النقطتين. استعمل الميل وإحدى النقطتين لإيجاد قيمة المقطع y.]

س: اذكر خمس قيم لكل من المجال والمدى.

[المجال = $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$؛ المدى = $\{-8, -3, 2, 7, 12\}$]

مثال 3 تحليل دالة خطية

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: ماذا يمثل العدد 0 في كل من مجال ومدى التمثيل البياني للدالة ؟

[بالنسبة للمجال، 0 يمثل الساعة 6:00 A.M، بالنسبة للمدى، يمثل 0 درجة فهرنهايت.]

س: ماذا يمثل المحور x ؟

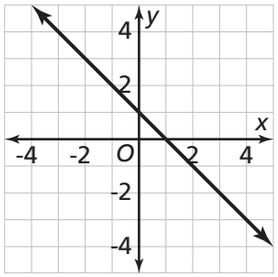
[يمثل المحور x الزمن أو عدد الساعات في اليوم.]

س: ماذا يمثل المحور y ؟

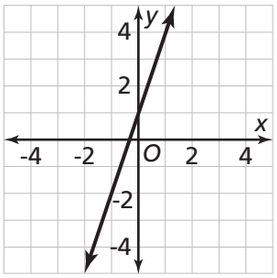
[يمثل المحور y درجة الحرارة الخارجية بالفهرنهايت.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

3. a.



b.



استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: كيف يمكنك تمثيل الدالتين بيانيًا ؟

[في الجزء a، ابدأ برسم المقطع y الذي يساوي 1، ثم تحرك وحدة واحدة إلى الأسفل و وحدة واحدة إلى اليمين من المقطع y لتعيين نقطة ثانية، ثم ارسم مستقيمًا يمر بالنقطتين.

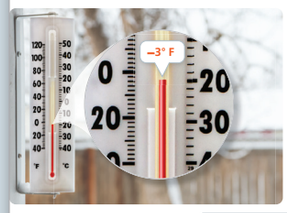
في الجزء b، ابدأ برسم المقطع y الذي يساوي 1، ثم تحرك 3 وحدات إلى الأعلى و وحدة واحدة إلى اليمين من المقطع y لتعيين نقطة ثانية، ثم ارسم مستقيمًا يمر بالنقطتين.]

خطأ شائع

حاول أن تحل 3a قد يمثل بعض الطلاب $y = x + 1$ بيانيًا لأنهم ينسون مراعاة إشارة الميل. اطلب من الطلاب أن يفكروا في ما إذا يجب أن تكون الدالة متزايدة أو متناقصة عندما يكون الميل سالبًا. ثم اطلب منهم التحقق لمعرفة ما إذا كانت التمثيلات البيانية التي رسموها تشير إلى الاتجاه الذي يدعم إجابتهم أم لا.

تطبيق

مثال 3 تحليل دالة خطية



A. يسجّل سامي درجة الحرارة الخارجية في إحدى المدن الباردة. عند الساعة 6:00 a.m. كانت الحرارة 3°F−، ثم بدأت تزداد بمعدل 2°F كل ساعة خلال الساعات الست اللاحقة. افترض أن الحرارة تستمر بالارتفاع بنفس المعدل، أوجد درجة الحرارة عند الساعة 2:00 p.m.

الخطوة 1 اكتب دالة تنمذج الموقف.

ارتفاع بمقدار 2°F كل ساعة.

درجة الحرارة عند الساعة 6:00 a.m.

$f(x) = 2x - 3$

الخطوة 2 مثّل هذه الدالة بيانيًا.

استعمل صيغة الميل والمقطع لتمثيل الدالة بيانيًا.

المدى لهذه الدالة هو مجموعة درجات الحرارة المنطقية والتي هي أكبر من 3−

الخطوة 3 أوجد قيمة y عند $x = 8$ (حيث 8 عدد الساعات المنقضية من الساعة 6:00 a.m. الى الساعة 2:00 p.m.)

$y = 2(8) - 3$

$= 13$

إذا واصلت درجة الحرارة ارتفاعها بالمعدل نفسه، فسوف تبلغ 13°F عند الساعة 2:00 p.m.

التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2x - 3$ هو خط مستقيم. **الدالة الخطية** هي دالة تمثيلها البياني خط مستقيم.

نمذج

ما الذي يجعل الدالة نموذجًا جيدًا على مجال معطى ؟

B. هل استعمال الدالة الخطية يمثّل واقعيًا درجة الحرارة للمجال $0 < x < 24$ ؟ وضّح إجابتك.

التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2x - 3$ له ميل يساوي 2، ويمثّل ارتفاعًا في درجة الحرارة بمقدار 2°F كل ساعة. إلا أن درجة الحرارة لن تواصل ارتفاعها على الأرجح بعد الغروب. بالتالي، الدالة الخطية واقعية لجزء من اليوم فقط.

حاول أن تحلّ

3. مثّل كل دالة أدناه بيانيًا.

a. $f(x) = -x + 1$ **b.** $g(x) = 3x + 1$

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 3 يواجه بعض الطلاب صعوبات في فهم مجال ومدى الدالة الخطية ورسم تمثيل لها. اطلب من الطلاب التدرّب على إيجاد مدى الدالة عندما يكون مجالها معلومًا، والتدرب كذلك على رسم تمثيلها البياني.

س: أوجد مدى للدالة $f(x) = -2x + 4$، علمًا أن مجالها هو $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

[$\{-2, 0, 2, 4, 6, 8\}$]

س: مثل f بيانيًا باستعمال المقطعين x و y.

[تحقق من عمل الطلاب. يجب أن يكون التمثيل البياني خطًا مستقيمًا يمرّ بالنقاط $(4, 0)$ و $(0, 2)$.]

مثال 4 استعمال الدوال الخطية لحل المسائل

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: كيف يرتبط المجال والمدى بالتمثيل البياني ؟

[يتمثل المجال بالمحور t مع عرض الزمن بالدقائق. يتم تمثيل المدى بالمحور $d(t)$ والذي يوضح عدد الأميال انطلاقًا من قاعدة الجبل.]

س: كيف يساعدك النموذج الخطي على إيجاد قيمة دالة ما في زمن معين ؟

[يمكنك استعمال التمثيل البياني لإيجاد المسافة التي يبعدها المصعد الهوائي عن قاعدة الجبل في زمن معين.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

4. تبقى الدالة $d(t)$ تربط المسافة المقطوعة من قاعدة الجبل بعدد الدقائق التي يقطعها المصعد الكهربائي. ستكون المعادلة $d(t) = \frac{1}{15}t + 0.5$. تبقى نقطة بداية التمثيل البياني، أي $(0, 0.5)$، نفسها، ولكن لن يكون للمستقيم نفس حدة الانحدار. سيتغير المجال من $\{t : 0 \le t \le 15\}$ إلى $\{t : 0 \le t \le 22.5\}$.

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: كيف يمكنك وصف أي تغيير قد يحدث للمجال والمدى، دون إجراء أي عمليات حسابية ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : بما أن المصعد الهوائي يتحرك ببطء أكبر، فسيستغرق الوصول إلى القمة زمنًا أطول، وبالتالي سيزداد المجال ليشمل مقدارًا أطول من الزمن. لن تتغير المسافة من قاعدة الجبل إلى قمة المصعد الهوائي، وبالتالي سيبقى المدى كما هو.]

استعمل مع **المثالين 3 و 4**

عادات التفكير

برر منطقيًا كيف ترتبط المعادلة الخطية بالدالة الخطية ؟

[يمكن نمذجة الدالة الخطية بمعادلة خطية.]

تطبيق

مثال 4 استعمال الدوال الخطية لحل المسائل

ينطلق مصعد هوائي من ارتفاع يبعد عن قاعدة الجبل مسافة 0.5 km ويكمل طريقه صعودًا بسرعة ثابتة. كم يبعد المصعد الهوائي عن قاعدة الجبل بعد مرور 10 min ؟

ضع ◀ اكتب دالة خطية لتمثيل المسافة التي سيقطعها المصعد الهوائي من قاعدة الجبل.

ليكن t = الزمن بالدقائق.

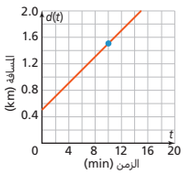
$$\frac{6 \text{ km}}{\text{h}} \times \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}} = \frac{0.1 \text{ km}}{\text{min}}$$

سرعة المصعد معطاة بعدد الكيلومترات المقطوعة في الساعة، لذا عليك تحويل السرعة إلى عدد الكيلومترات المقطوعة في الدقيقة.

المسافة من القاعدة = الزمن المستغرق في الصعود × معدل سرعة المصعد + المسافة المقطوعة

$$d(t) = 0.1 \times t + 0.5$$

احسب ◀ مثّل المسافة التي تفصل المصعد عن قاعدة الجبل في أي وقت بالدالة الخطية $d(t) = 0.1t + 0.5$.



أوجد قيمة الدالة عند $t = 10$.

$$d(10) = 0.1(10) + 0.5$$
$$= 1 + 0.5$$
$$= 1.5$$

فسّر ◀ بعد 10 دقائق يكون المصعد الهوائي قد قطع 1.5 km من ارتفاع سفح الجبل.

حاول أن تحلّ! **4.** في المثال 4، كيف تتغير الدالة والتمثيل البياني والمعادلة إذا كانت سرعة المصعد الهوائي 4 km/h ؟ ما تأثير ذلك في المجال ؟

56 **الوحدة 2** الدوال الخطية والمتباينات الخطية

تعزيز المهارات اللغوية

استعمل مع **المثال 4**

الاستماع **مستوى 1** قبل عرض المثال على الطلاب، اقرأ الفقرة الأولى جهرًا. خلال استماع الطلاب، اطلب إليهم الإشارة إلى عبارة غير مألوفة بالنسبة إليهم.

[مصعد هوائي]

س: ما معنى مصعد هوائي ؟

[مصعد ينقلك إلى أعلى الجبل]

س: من يستعمله عادة ؟

[المتزلجون]

س: ما المسافة التي يجب أن تقطعها في الجبل حتى تصل إلى المصعد الهوائي ؟

[0.5 mi]

الكتابة **مستوى 2** اطلب من الطلاب دراسة كلمة قاعدة. أطوِ قطعة ورق إلى أربعة أرباع واكتب كلمة قاعدة في مركز الورقة. اطلب من الطلاب كتابة تعريفين مختلفين للكلمة على جزئين من الورقة. في الجزئين الآخرين، اطلب منهم رسم صورة لكيفية استعمال الكلمة في المثال، وصورة لكيفية استعمال الكلمة بطريقة رياضية.

س: ما المسافة التي تمثلها القاعدة في المسألة ؟

[0 mi]

التحدث **مستوى 3** اطلب من الطلاب قراءة نص المسألة ودراسة التوضيحات الموجودة في الصورة.

س: ما وحدات القياس التي تلاحظها في نص المسألة والصورة ؟

[أميال، دقائق، أميال في الساعة.]

س: ما أهمية ملاحظة وحدات القياس الموجودة في المسألة ؟

[لحل المسألة، على وحدات القياس أن تكون موحدة. في هذه الحالة، يجب تحويل أميال بالساعة إلى أميال بالدقيقة لأن t معطاة بوحدة زمن بالدقيقة.]

ملخص المفهوم الدوال الخطية

س: ما وجه العلاقة بين المجال والمدى بالدالة الخطية ؟

[المجال هو قيم المدخلة والمدى هو قيم المخرجة للدالة الخطية.]

س: ما بعض الطرائق التي يمكن من خلالها تمثيل الدوال الخطية ؟

[الكلمات والقواعد والجداول والتمثيلات البيانية.]

عبّر عن **فهمك**|طبّق **فهمك**

خطأ شائع

التمرين 6 قد ينسى بعض الطلاب توزيع اشارة السالب على حدّي المقدار $(x - 2)$. اطلب من الطلاب مقارنة $f(6) = -6 - 2$ و $f(6) = -(6 - 2)$ لتوضيح الدالة التي عليهم احتسابها.

الإجابات

1. الدالة الخطية هي دالة، تمثيلها البياني مستقيم أو يقع على طول مستقيم، ويمكن كتابتها بالصيغة $y = mx + b$، حيث m و b عددان ثابتان.

2. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : يمكن نمذجة حركة شخص يركض بمعدل ثابت بدالة خطية. لا يمكن نمذجة حركة مجموعة من الاشخاص يركضون بسرعات مختلفة بدالة خطية.

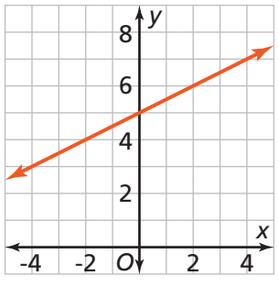
3. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : يمكن تمثيل الدالة الخطية بالكلمات والقواعد والجداول والرسوم البيانية. المعادلة الخطية هي معادلة من الدرجة الأولى تتضمن متغيرين.

4. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : لم تحول نجلاء الدقائق إلى ساعات بشكل صحيح. يجب أن تكون الدالة مكتوبة في الصورة $f(x) = 20x$.

5. $f(2) = 5, f(6) = 21$

6. $f(2) = 0, f(6) = -4$

7.



8. $f(t) = 15t + 61$, 3.91 m

ملخص المفهوم تمثيلات الدالة الخطية

لفظيًا: يمكن تمثيل الدوال الخطية بالكلمات أو القواعد أو الجداول أو الرسوم البيانية. يدل رمز الدالة على اسم الدالة ومتغير المدخلة.

جبريًا: $f(x) = -2x + 1$ — "f عند x"

بجدول: يبيّن الجدول مجال الدالة ومداها.

x	−2	−1	0	1	2
f(x)	5	3	1	−1	−3

بيانيًا: التمثيل البياني للدالة $f(x) = -2x + 1$ هو التمثيل البياني للمعادلة الخطية $y = -2x + 1$.

عبّر عن فهمك

1. السؤال الأساس كيف يمكنك تحديد دالة خطية ؟
2. تواصل بدقة أعط مثالًا من الحياة اليومية على دالة خطية وأخرى غير خطية. وضّح إجابتك.
3. المصطلحات ما الفرق بين الدالة الخطية والمعادلة الخطية ؟
4. حلّل الخطأ تبلغ تكلفة استعمال إحدى الألعاب في مدينة الألعاب 4 QR لكل 12 دقيقة. كتبت نجلاء دالة للتكلفة في الساعة بهذا الشكل $f(x) = 3x$. أوجد خطأ نجلاء وصحّحه.

طبّق فهمك

في التمرينين 5 و 6، أوجد قيمة كل دالة عند $x = 2$ و $x = 6$.

5. $f(x) = 4x - 3$ 6. $f(x) = -(x - 2)$

7. ارسم تمثيلًا بيانيًا للدالة $f(x) = \frac{1}{2}x + 5$.

8. ما الدالة التي تمثّل ارتفاع منظار الأفق عند الزمن t ؟ إذا وصل المنظار إلى أقصى ارتفاع له بعد الصعود لمدة 22 ثانية، أوجد أقصى ارتفاع له بالأمتار.

الدرس 2-2 الدوال الخطية 57

تدرَّب وحُل مسائل

دليل المهام

أساسي	متقدم
9-21, 23, 25, 27-34	9-13, 15, 17, 19-34

تحليل التمارين

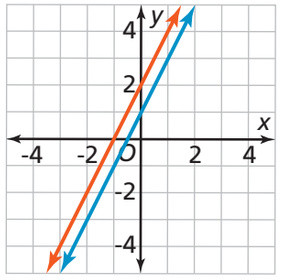
المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	13-18	1
	33	2
2	19-21, 32	1
	12, 30	3
3	22-27	1
	9	2
	10	3
4	29, 31, 34	2
	11, 28	3

9. a. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

b. $\frac{1}{3}$

10. a. يجب أن يكون مدى $h(x)$ أكبر من مدى $g(x)$ بمقدار 1

b.



المدى على المجال $0 < x < 5$ هو
$1 < y < 11$ للدالة $g(x)$
و $2 < y < 12$ للدالة $h(x)$.

11. a. QR 8, $\frac{5}{16}$ lb, $\frac{7}{16}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{11}{16}$, $\frac{13}{16}$

b. $\frac{5}{16} \times$ QR 8 = QR 2.5 ؛ كلا، تكلفة الوعاء لا تتغير. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: إذا كان وزن سلطة البطاطس 7, 9, 11, 13 oz، فإن تكلفة الوعاء سوف تبقى $\frac{5}{16} \times$ QR 8 = QR 2.5

12. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة: الخطأ هو في إيجاد المقطع y عبر إيجاد y عندما $x = 1$. الحل هو عند $x = 0$، فإن $y = 10 - 9$، أي $y = 1$
لذا $y = 9x + 1$

13. $f(5) = 21$

14. $f(5) = -12$

15. $f(5) = 20$

16. $f(5) = -0.5$

17. $f(5) = -9$

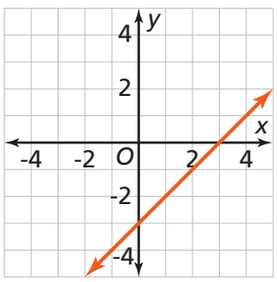
18. $f(5) = 4$

19. $y = 5x - 1$

20. $y = -2.5x + 4$

21. $y = -\frac{3}{2}x - 1$

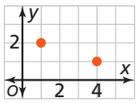
22.



تدرَّب وحُل مسائل

عزِّز فهمك

9. استعمل البنية النقطتان المبيّنتان على الرسم البياني معطاتان بالدالة f.



a. استعمل النقطتين لإيجاد المعادلة التي تمثّل الدالة f.

b. أوجد $f(6)$.

10. مهارات التفكير العليا لنأخذ الدالتين $g(x) = 2x + 1$ و $h(x) = 2x + 2$ على المجال $0 < x < 5$

a. من دون إيجاد قيمة الدالتين أو رسمهما بيانيًا، كيف يمكننا المقارنة بين مدى كل منهما ؟

b. مثّل الدالتين بيانيًا وصِف مدى كل منهما في المجال المعطى.

11. فكّر وثابر في الحل يستطيع الزبائن في متجر للأطعمة الصحية شراء كمية غير محدودة من سلطة البطاطس. لا يدفع الزبون مقابل وزن الوعاء.

a. يوضّح الجدول أدناه وزن الوعاء مع الطعام وتكلفته.
إذا كان 1 oz = 0.0625 lb، أوجد سعر 1 lb من سلطة البطاطس. أوجد وزن الوعاء بالباوند.
أوجد وزن الوعاء وسلطة البطاطس بالباوند.

الوزن (oz)	5	7	9	11	13
التكلفة (QR)	■	1	2	3	4

b. إذا كان المتجر يحاسب الزبون على وزن الوعاء، أوجد المبلغ الذي سيدفعه الزبون مقابل الوعاء. هل تكلفة الوعاء ثابتة أم أنها تختلف باختلاف كمية سلطة البطاطس المشتراة ؟
وضّح إجابتك.

12. حلّل الخطأ بيّن خطأ خالد عند إيجاده قاعدة الدالة للبيانات الواردة في الجدول أدناه، ثم صحّح هذا الخطأ.

x	1	2	3	4
y	10	19	28	37

كلما ازداد x بمقدار 1، يزداد y بمقدار 9.
عندما يكون $x = 1$، فإن $y = 10$،
إذن، $y = 9x + 10$.

تدرَّب

في التمارين 13-18، أوجد قيمة $f(5)$ لكل دالة. انظر المثال 1

13. $f(x) = 6 + 3x$

14. $f(x) = -2(x + 1)$

15. $f(a) = 3(a + 2) - 1$

16. $f(h) = -\frac{h}{10}$

17. $f(m) = 1 - 4\left(\frac{m}{2}\right)$

18. $f(m) = 2(m - 3)$

في التمارين 19-21، اكتب دالة خطية للبيانات الواردة في كل جدول. انظر المثال 2

19.

x	0	1	2	3	4
y	−1	4	9	14	19

20.

x	0	1	2	3	4
y	4	1.5	−1	−3.5	−6

21.

x	−2	−1	0	1	2
y	2	$\frac{1}{2}$	−1	$-2\frac{1}{2}$	−4

في التمارين 22-25، ارسم تمثيلًا بيانيًا لكل دالة خطية. انظر المثال 3

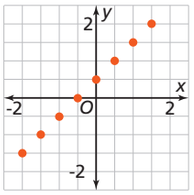
22. $g(x) = x - 3$

23. $h(x) = 3 - x$

24. $f(x) = \frac{1}{2}(x - 1)$

25. $f(x) = 0.75(10 - x) + 1$

استعمل التمثيل البياني أدناه لحلّ التمرينين 26 و 27. انظر المثال 3



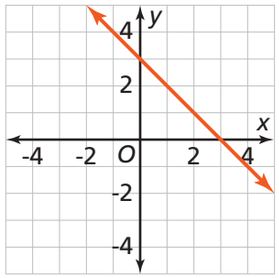
26. هل الدالة المبيّنة دالة خطية ؟ وضّح إجابتك.

27. حدّد مجال الدالة ومداها.

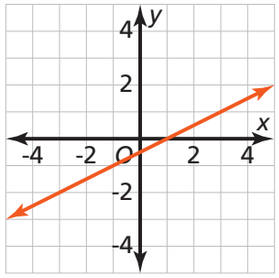
28. تريد ريم شراء سلك معدني لصنع سياج طوله 20 m يحيط بمنطقة مستطيلة الشكل. استعمل الصيغة $2(l + w) = 20$ لكتابة دالة للطول، بدلالة العرض.
مثّل الدالة بيانيًا. ما المجال المنطقي للموقف ؟
وضّح إجابتك. انظر المثال 4

الإجابات

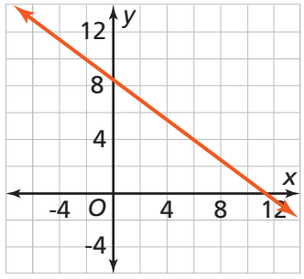
23.



24.



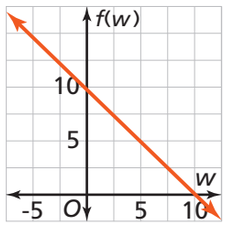
25.



26. نعم، عند زيادة مقدارها وحدة واحدة في قيم x، تزداد قيم y بمعدل ثابت. أيضًا، بالإمكان وصل نقاط التمثيل البياني بمستقيم. إذن، الدالة المبيَّنة خطية.

27. المجال: $\{-2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5\}$
المدى: $\{-1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 2\}$

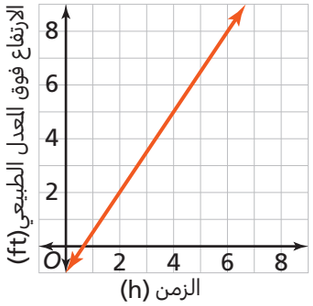
28. $f(w) = -w + 10$



المجال: $0 < w < 10$، كل قيمة خارج الفترة تعني أن الطول أو العرض كان سالبًا أو يساوي الصفر وهذا ليس ممكنًا.

الإجابات

29. a. $f(t) = -1 + 1.5\,t$



b. كلا. أعلى ارتفاع للمياه، بعد h 5، هو
$f(5) = -1 + 1.5(5) = 6.5$ ft

30. a. $f(t) = 60t + 30$

$f(t) = mt + b$

$m = \dfrac{(120 - 90)}{(1.5 - 1)} = 60$

$f(0.5) = 60(0.5) + b = 60$

$b = 30$

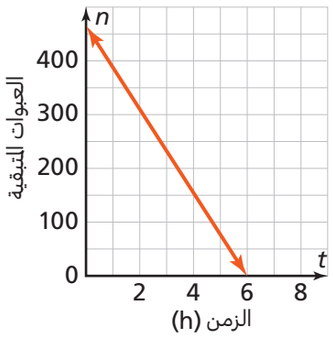
المجال هو $\{x: 0.5 \le x\}$.

b. QR 675

$f(4.25) = 30 + 60(4.25) = 285$

التكلفة الإجمالية تساوي مجموع رسوم العمل مقابل 4 h و 15 min وتكلفة قطع الغيار: 675 = 390 + 285

31. a. المجال: $\{t : 0 \le t \le 5.96\}$
المدى: $\{n : 0 \le n \le 465\}$



b. باع جميع عبوات المياه في الساعة 3:58 P.M تقريبًا لأن العبوات تنفد بعد مرور 5.96 h بعد الساعة 10:00 A.M، يتم بيع 78 عبوة في الساعة ويفتح المتجر أبوابه لمدة 7.5 ساعات، أي يجب أن يكون لديهم على الأقل 585 = 78(7.5) عبوة مياه في بداية يوم العمل التالي.

34. الجزء A

$c(n) = 5\,250 + 54n,\ r(n) = 159n$

اطرح التكلفة من الربح:

$p(n) = 159n - (5\,250 + 54n)$

$= 105n - 5\,250$

تدرّب وحُل مسائل

طبّق

29. نمذج يقيس المقياس المبيّن في الصورة أدناه مستوى ارتفاع مياه النهر مقارنةً بالوسط الحسابي لمستواها. أشار المقياس في البداية إلى أنّ مستوى المياه أقل بمقدار 1 ft من وسط مستواها البالغ 10 ft ثم بدأت المياه بالارتفاع بمعدل ثابت مقداره 1.5 ft في الساعة.

a. مثّل الدالة الخطية بيانيًا لتبيّن التغيير الذي يحدث في مستوى المياه بمرور الزمن.

b. هل سيصل مستوى مياه النهر إلى 7 ft فوق المعدل الطبيعي بعد 5 ساعات ؟ وضّح إجابتك.

30. استعمل البنية يتقاضى صاحب ورشة تصليح سيارات من عملائه مقابل ساعات الخدمة الأجور التالية. تتم محاسبة العملاء مقابل خدمة نصف ساعة على الأقل.

ورشة تصليح السيارات					
الساعات	0.5	1	1.5	2	2.5
رسوم العمل (QR)	60	90	120	150	180

a. اكتب دالة خطية للبيانات الواردة في الجدول.

b. استغرق إصلاح إحدى السيارات 4 h و 15 min وتطلب دفع QR 390 مقابل قطع الغيار. أوجد التكلفة الإجمالية.

31. بزر منطقيًا يفتح متجر أبوابه في أحد المعارض من الساعة 10:00 a.m. إلى الساعة 5:30 p.m. ولديه 465 عبوة مياه للبيع. يبلغ متوسط المبيعات 1.3 عبوة مياه في الدقيقة.

a. مثّل بيانيًا عدد العبوات المتبقية بدلالة عدد الساعات. أوجد المجال والمدى.

b. بهذا المعدل، في أي وقت ستُباع جميع عبوات المياه ؟ ما عدد عبوات المياه المطلوبة في بداية اليوم التالي ؟ وضّح إجابتك.

تدرّب على اختبار

32. فكّر في الدالة $f(x) = 3(x - 1) - 0.4(9 - x)$.

صِل كل مقدار بقيمته المكافئة.

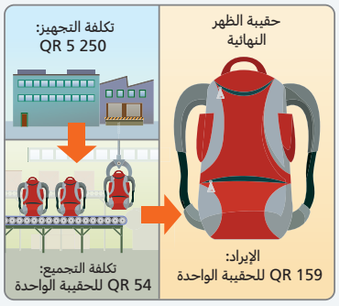
I. $f(2) + f(4)$	A. 3.4
II. $f(5)$	B. 3.6
III. $f(7) - f(6)$	C. 7.2
IV. $f(3)$	D. 10.4

33. اختبار SAT/ACT اكتب دالة خطية بالاستناد إلى بيانات الجدول. أي من النقاط أدناه ليست جزءًا من الدالة ؟

x	$f(x)$
0	180
1	174
2	168
3	162
4	156

Ⓐ (12 , 108)
Ⓑ (30 , 0)
Ⓒ (−15 , 270)
Ⓓ (21 , 54)
Ⓔ (9 , 120)

34. مهمة أدائية يحسب جابر تكاليف وأرباح مشروعه التجاري المتمثل في إنتاج n من حقائب الظهر للنزهات البرية. تتمثل أرباح جابر في العائد مطروحة منه النفقات.

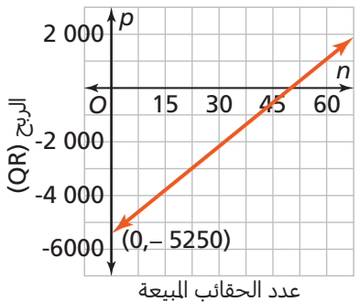


الجزء A اكتب دالة تمثّل الربح الذي سيحققه جابر من بيع n حقيبة من حقائب الظهر.

الجزء B مثّل دالة الربح بيانيًا. أوجد المجال المنطقي لهذه الدالة لعام واحد إذا كان عائده يتراوح بين QR 4 000 و QR 30 000 ؟ هل الدالة متقطعة أم متصلة ؟ وضّح إجابتك.

الجزء C كم ستبلغ أرباحه إذا باع 43 حقيبة ظهر ؟ وضّح إجابتك.

الجزء B



المجال: $\{n : 25 \le n \le 189\}$، دالة العائد هي $r(n) = 159n$.

إذن، إذا كان يبيع بين QR 4000 و QR 30 000، فإن عدد الحقائب التي يبيعها هو $\frac{4\,000}{159} < n < \frac{30\,000}{159}$ أو $25 < n < 189$ تقريبًا.
المدى: $\{p : -5250 \le p \le 14\,595\}$،
المجال هو $25 < n < 189$، إذن، المدى المنطقي لدالة الربح هو
$105(25) - 5\,250 < p < 105(189) - 5\,250$،
أو $-2\,625 < p < 14\,595$
$p(150) = 105(150) - 5250 = 10500$
الدالة متقطعة لأن المجال يتألف من أعداد كلية.

الجزء C

إذا باع 43 حقيبة، سيكون ربحه سالبًا لأن
$p(43) = \text{QR } 105(43) - \text{QR } 5\,250 = -\text{QR } 735$

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب إثنان من أفضل الممارسات في التعليم.
تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس.
كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

ملاحظات

الدرس 2-3

تحويل الدوال الخطية

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على:

- ✔ تمثيل تحويلات الدوال الخطية بيانيًا عن طريق ضرب أو جمع قيم محددة من k إلى مدخلة أو مخرجة دالة.
- ✔ تفسير الخصائص الأساسية للتمثيل البياني لدالة خطية واستعمالها لكتابة الدالة التي يمثّلها التمثيل البياني.

الفهم الأساس

يعمل تحويل الدالة على نقل كل نقطة في التمثيل البياني الخاص بها إلى موقع جديد. تؤدي إضافة k إلى مخرجة الدالة إلى إزاحة رأسية، وتؤدي إضافة k إلى مدخلة الدالة إلى إزاحة أفقية.
ضرب مخرجة الدالة في $k > 1$ يسبب تمددًا رأسيًا، ويؤدي ضرب مدخلة الدالة في $k > 1$ إلى تضيُّق أفقي.

ترابط

سابقًا في هذه الوحدة، تمكّن الطلاب من:

- استعمال صيغة الدالة لتمثيل الدوال الخطية.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من:

- تحديد تأثير k على التمثيل البياني لدالة خطية عن طريق استبدال $f(x)$ بالمقادير $f(kx)$, $kf(x)$, $f(x + k)$, $f(x) + k$ لقيم محددة من k.

لاحقًا في هذه الوحدة، سيتمكّن الطلاب من:

- تحديد العلاقة بين الدوال الخطية.

دقة

يركّز هذا الدرس على الاستيعاب المفاهيمي والمهارة الإجرائية.

- يفهم الطلاب أن استبدال $f(x)$ بالمقدار $f(x) + k$ أو بالمقدار $f(x + k)$ يؤدي إلى إزاحة رأسية أو أفقية فيما ينتج عن كل من $kf(x)$ أو $f(kx)$ تمدد أو تضيُّق.
- يستعمل الطلاب تمثيلًا بيانيًا لكتابة دالة خطية هي تحويل لدالة أخرى.

بناء المصطلحات

مراجعة المصطلحات

العربية | **الإنجليزية**

- **أفقي** | *horizontal*
- **رأسي** | *vertical*

المصطلحات الجديدة

- **تحويل** | *transformation*
- **إزاحة** | *translation*

نشاط المصطلحات

اطلب من الطلاب استذكار مفهوم التحويلات من دروس الهندسة. ناقش أنواع التحويلات التي يتذكرونها. [الانعكاس والدوران والإزاحة] ركز على مصطلح الإزاحة واطلب من الطلاب التفكير في كيفية تطبيق هذا التحويل الخاص على التمثيل البياني للدالة الخطية.
اطلب من الطلاب إكمال النشاط التالي.

1. إزاحة كل نقطة من التمثيل البياني إلى اليسار أو إلى اليمين تمثّل _____.
[إزاحة أفقية]

2. إزاحة كل نقطة من التمثيل البياني إلى أعلى أو إلى أسفل تمثّل _____.
[إزاحة رأسية]

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يُركّز الطلاب على المعيار:

9.3.5 يمثّل بيانيًا صورة دالة خطية تحت تأثير تحويلات هندسية، ويصف تأثير التحويلات الهندسية على الدالة.

معايير ممارسات الرياضيات

ابحث عن البنية واستعملها

يبحث الطلاب عن البنية الكلية والأنماط في الرياضيات عندما يدركون أنه عندما تكون k موجبة، فإن إزاحة التمثيل البياني للدالة يكون إلى الأعلى مقدار k من الوحدات، وعندما تكون k سالبة، تكون إزاحة التمثيل البياني إلى الأسفل مقدار k من الوحدات.

ابحث وعبّر عن الانتظام في التبرير باستعمال التكرار

يُجري الطلاب تعميمات عندما يدركون أن ضرب مخرجة دالة خطية f في k يُمدد / يضيّق تمثيلها البياني رأسيًا.

انقد واشرح

محور تركيز التدريس يستكشف الطلاب كيف ترتبط التمثيلات البيانية والمعادلات لمستقيمين. هذا النشاط يهيئ الطلاب لتعلّم تحويلات الدوال الخطية.

قبل البدء بالحلّ

طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: ماذا تلاحظ بالتمثيل البياني للمستقيمين ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : المستقيمان متوازيان.]

أثناء الحلّ

مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: ما العلاقة بين نقطة على المستقيم f ونقطة لها نفس الإحداثي x على المستقيم g ؟

[الإحداثي y على المستقيم g أكبر بمقدار وحدتين.]

س: ما وجه الشبه و الإختلاف بين معادلتَي المستقيمين ؟

[للمعادلتين نفس الميل، المقطع y مختلف.]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: انسخ التمثيلين البيانيين f و g. أضف التمثيل البياني للدالة $h(x) = 2x - 1$.
صِف أوجه المقارنة بين h وكل من f و g.

[تحقق من التمثيلات البيانية للطلاب. المقطع y للدالة h أصغر بوحدتين من المقطع y للدالة f وأصغر بأربع وحدات من المقطع y للدالة g. المقطع x للدالة h يقع على بعد وحدة واحدة إلى يمين المقطع x للدالة f ويقع على بعد وحدتين إلى يمين المقطع x للدالة g.]

بعد إنجاز الحلّ

طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: كيف تكتب معادلة الدالة n إذا كانت n تمثّل إزاحة للدالة g بمقدار 3 وحدات إلى الأعلى ؟

[$n(x) = 2x + 6$، كل قيمة y تُزاح 3 وحدات إلى الأعلى:
$n(x) = (2x + 3) + 3$]

س: كيف تتغير قيم x من g إلى n بالنسبة إلى قيم y المناظرة لها ؟

[قيم x للدالة n هي إزاحة بمقدار 1.5 وحدة إلى يسار قيم x للدالة g عندما تكون قيم y للدالتين n و g هي نفسها.
مثال على ذلك: إذا كان $x = 2.5$، فإن $g(2.5) = 8$، وإذا كان $x = 1$،
فإن $n(1) = 8$]

س: هل تعتقد أنه يمكن كتابة معادلة مكافئة لمعادلة الدالة n تصف إزاحة الدالة g إلى اليسار ؟

[نعم، أضف 1.5 إلى الإحداثي x في الدالة g.
إذن، $n(x) = 2(x + 1.5) + 3 = 2x + 6$.]

عادات التفكير استعمل مع **انقد واشرح**

عمّم هل تنطبق نفس الحجج الرياضية على معادلات أزواج أخرى من المستقيمات المتوازية ؟

[لا، لا تنطبق هذه القاعدة على زوج من المستقيمات المتوازية الأفقية أو الرأسية.]

كتاب الطالب، صفحة 61

2-3
تحويل الدوال الخطية
Transforming Linear Functions

أستطيع... تحويل الدوال الخطية.

معايير الدرس
9.3.5

المصطلحات
- تحويل transformation
- إزاحة translation

تطبيق

مثال 1 الإزاحات الرأسية للدوال الخطية

سَجّل موقعا اثنين من صغار السلاحف البحرية وهما يزحفان على رمال الشاطئ، بنفس السرعة، نحو البحر. لكن السلحفاة A بدأت متقدمة بمسافة 2 ft عن نقطة انطلاق السلحفاة B.

السؤال الأساس
كيف يؤثر تعديل المدخلة أو المخرجة لقاعدة دالة خطية على تحويل تمثيلها البياني ؟

انقد واشرح

يقول عبدالله إن التمثيل البياني للدالة g هو نفس التمثيل البياني للدالة f بعد تحريك كل النقاط رأسيًا. في حين يقول حمد إن التمثيل البياني للدالة g هو نفس التمثيل البياني للدالة f بعد تحريك كل النقاط أفقيًا.

A. أعطِ حجة تدعم صحة قول عبدالله.

B. أعطِ حجة تدعم صحة قول حمد.

C. ابحث عن العلاقات ما الذي تعرفه عن المعادلات الخطية يمكن أن يدعم صحة قول أي منهما ؟

نموذج من أعمال الطلاب

A. المقطع y للدالة f أقل بوحدتين من المقطع y للدالة g.

B. المقطع x للدالة f يبعد وحدة واحدة إلى اليمين من المقطع x للدالة g.

C. يمكن كتابة المعادلات الخطية المتكافئة بطرق مختلفة، لذلك من الممكن أن يؤدي تحويل أفقي للدالة f وتحويل رأسي للدالة f إلى معادلة مكافئة لمعادلة الدالة g.

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلم مركّز

قدّم للطلاب مفهوم تحويلات الدوال الخطية. وضّح لهم أن الثابت k المضاف إلى مدخلة أو مخرجة الدالة يؤدي إلى إزاحة التمثيل البياني للدالة أفقيًّا أو رأسيًّا. ضرب مدخلة أو مخرجة الدالة في ثابت يؤدي إلى تضيُّق التمثيل البياني للدالة أو تمدده.

مثال 1 الإزاحات الرأسية للدوال الخطية

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: ماذا تعني إضافة الثابت k إلى مخرجة الدالة ؟

[يُضاف الثابت إلى قيمة y للدالة الأصلية.]

س: كيف تصف الإزاحة الرأسية مقدار وحدتين لموقع السلحفاة A على الشاطئ مقارنة بموقع السلحفاة B ؟

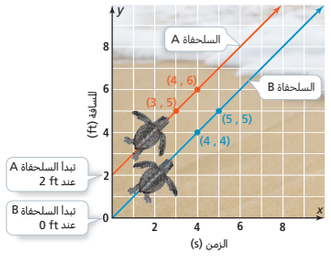
[سوف تكون السلحفاة A أقرب دائمًا إلى الماء بمترين مقارنةً بالسلحفاة B.]

تطبيق

مثال 1 الإزاحات الرأسية للدوال الخطية

سُجّل موقعا اثنين من صغار السلاحف البحرية وهما يزحفان على رمال الشاطئ، بنفس السرعة، نحو البحر. لكن السلحفاة A بدأت متقدمة بمسافة 2 ft عن نقطة انطلاق السلحفاة B.

A. أوجد الدالة التي تمثل موقع كل سلحفاة أثناء زحفها نحو البحر



أوجد سرعة كل سلحفاة بإيجاد ميل كل مستقيم.

السلحفاة A: $m = \frac{6-2}{4-0} = 1$ السلحفاة B: $m = \frac{5-0}{5-0} = 1$

إذن، كلتا السلحفاتين تتحركان بسرعة 1 ft/s

تمثل الدالة $f(x) = x$ المسافة التي اجتازتها السلحفاة B من نقطة انطلاقها،

وتمثل الدالة $g(x) = x + 2$ المسافة التي اجتازتها السلحفاة A من نقطة انطلاقها.

يتبع في الصفحة التالية

تابع المثال 1

حاول أن تحلّ! الإجابات

1. **a.** إزاحة 3 وحدات إلى الأسفل.
   b. إزاحة 1.5وحدة إلى الأعلى.

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

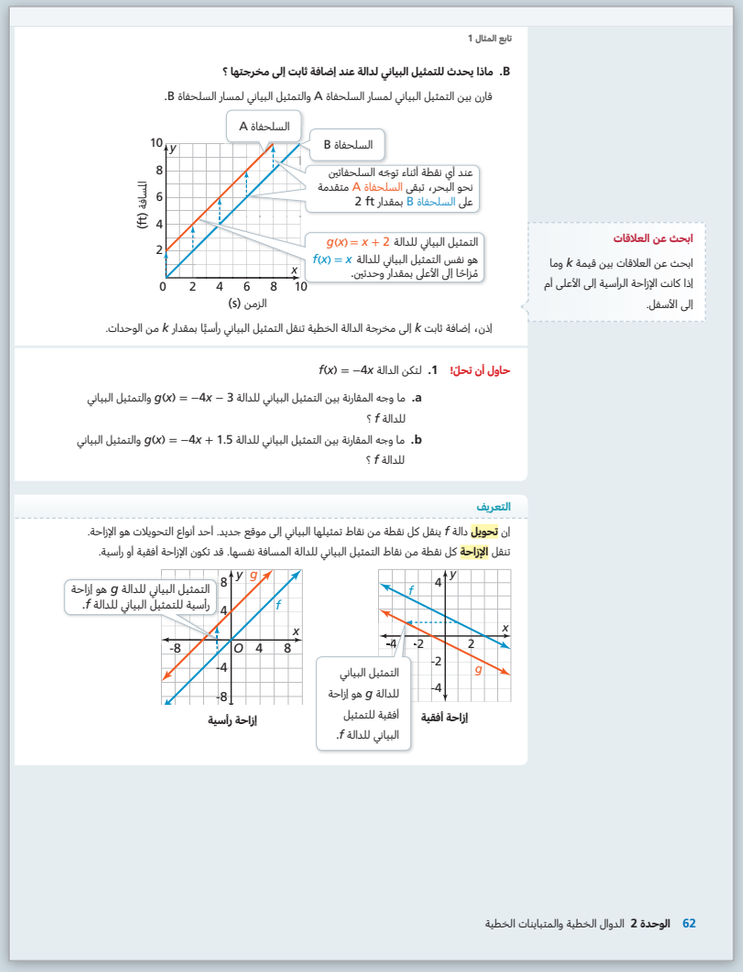
س: هل الميل السالب للدالة f يغير اتجاه إزاحة الدالة g ؟
[لا، قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : الميل السالب لا يغير اتجاه الإزاحة. يعتمد الاتجاه كليًا على إشارة k.]

تعريف

طرح أسئلة هادفة

س: ما وجه الشبه بين الإزاحات الرأسية والإزاحات الأفقية ؟ ما وجه الاختلاف ؟
[كلاهما ينتج مستقيمات موازية للمستقيم الأصلي، ولكن تأتي النتائج من أنواع مختلفة من الحركة.]

س: هل يمكنك تحديد ما إذا كان للمستقيم إزاحة رأسية أم أفقية بمجرد النظر إلى التمثيل البياني ؟
[لا، يمكن اعتبار المستقيم نفسه إما إزاحة رأسية أو أفقية لمستقيم معيّن اعتمادًا على صيغة معادلة الإزاحة.]



تابع المثال 1

B. ماذا يحدث للتمثيل البياني لدالة عند إضافة ثابت إلى مخرجتها ؟

قارن بين التمثيل البياني لمسار السلحفاة A والتمثيل البياني لمسار السلحفاة B.

إذن، إضافة ثابت k إلى مخرجة الدالة الخطية تنقل التمثيل البياني رأسيًا بمقدار k من الوحدات.

ابحث عن العلاقات
ابحث عن العلاقات بين قيمة k وما إذا كانت الإزاحة الرأسية إلى الأعلى أم إلى الأسفل.

حاول أن تحلّ! **1.** لتكن الدالة $f(x) = -4x$

a. ما وجه المقارنة بين التمثيل البياني للدالة $g(x) = -4x - 3$ والتمثيل البياني للدالة f ؟

b. ما وجه المقارنة بين التمثيل البياني للدالة $g(x) = -4x + 1.5$ والتمثيل البياني للدالة f ؟

التعريف

إن **تحويل** دالة f ينقل كل نقطة من نقاط تمثيلها البياني إلى موقع جديد. أحد أنواع التحويلات هو الإزاحة.
تنقل **الإزاحة** كل نقطة من نقاط التمثيل البياني للدالة المسافة نفسها. قد تكون الإزاحة أفقية أو رأسية.

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 1 استعمل هذا النشاط لتبسيط المثال إلى خطوات ذات صعوبة متصاعدة.

- لكل من السلحفاتين A و B، اكتب معادلة بصيغة الميل والمقطع تنمذج مسارها.

1. معادلة مسار السلحفاة B [$y = x$]
2. معادلة مسار السلحفاة A [$y = x + 2$]

س: ما وجه الشبه في المعادلتين ؟
[لديهما نفس الميل.]

س: ما وجه الاختلاف بين المعادلتين ؟
[المقطعان y فيهما مختلفان.]

س: ماذا يعني أن المقطع y لمعادلة مسار السلحفاة A يساوي 2 بينما المقطع y لمعادلة مسار السلحفاة B يساوي 0 ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : تبدأ السلحفاة A من موقع أقرب إلى الماء بمترين مقارنة بالموقع الذي تبدأ منه السلحفاة B.]

س: ماذا يعني أن كلا المستقيمين لهما نفس الميل ؟
[تتحرك كلتا السلحفاتين بنفس السرعة.]

س: إذا كانت كلتا السلحفاتين تتحرك بنفس السرعة، فماذا تعرف عن المسافة بين السلحفاتين ؟
[المسافة بين السلحفاتين ثابتة.]

مثال 2 الإزاحات الأفقية للدوال الخطية

بناء الطلاقة الإجرائية من الاستيعاب المفاهيمي

س: ماذا تلاحظ عن قيم $f(x)$ و $g(x)$ ؟

[بالنسبة لقيم x المتناظرة، فإن قيمة $g(x)$ تساوي 10 وحدات أكثر من قيمة $f(x)$.]

س: ماذا تعني إضافة ثابت إلى مدخلة الدالة ؟

[يُضاف الثابت إلى x قبل حساب قيمة الدالة.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

2. a. نحصل على الدالة g بإزاحة الدالة f بمقدار 4 وحدات إلى اليمين

b. نحصل على الدالة g بإزاحة الدالة f بمقدار 9.5 وحدات إلى اليسار

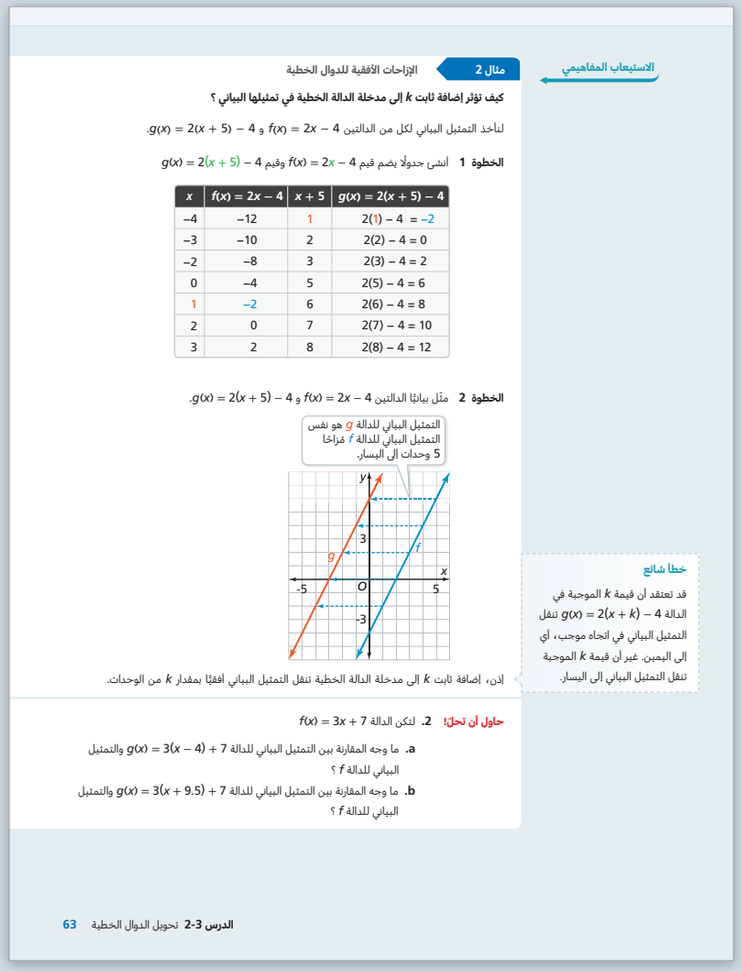
عادات التفكير استعمل مع **المثالين 1 و 2**

استعمل الأدوات المناسبة كيف يساعدك النظر إلى جدول القيم في فهم الإزاحات ؟

[إذا قارنت قيم y للدالة الأصلية مع قيم y للدالة المحولة، يمكنك تحديد التحويل الذي تم إجراؤه.]

خطأ شائع

حاول أن تحل! 2 قد يعتقد بعض الطلاب أنه عند إضافة عدد موجب إلى مدخلة المعادلة، فإن التمثيل البياني للمستقيم يجب أن يُزاح إلى اليمين. إذا كان k موجبًا، فإن قيمة y تزداد ويُزاح التمثيل البياني للدالة إلى اليسار.



الاستيعاب المفاهيمي

مثال 2 الإزاحات الأفقية للدوال الخطية

كيف تؤثر إضافة ثابت k إلى مدخلة الدالة الخطية في تمثيلها البياني ؟

لتأخذ التمثيل البياني لكل من الدالتين $f(x) = 2x - 4$ و $g(x) = 2(x + 5) - 4$.

الخطوة 1 أنشئ جدولًا يضم قيم $f(x) = 2x - 4$ وقيم $g(x) = 2(x + 5) - 4$

x	$f(x) = 2x - 4$	$x + 5$	$g(x) = 2(x + 5) - 4$
−4	−12	1	2(1) − 4 = −2
−3	−10	2	2(2) − 4 = 0
−2	−8	3	2(3) − 4 = 2
0	−4	5	2(5) − 4 = 6
1	−2	6	2(6) − 4 = 8
2	0	7	2(7) − 4 = 10
3	2	8	2(8) − 4 = 12

الخطوة 2 مثّل بيانيًا الدالتين $f(x) = 2x - 4$ و $g(x) = 2(x + 5) - 4$.

التمثيل البياني للدالة g هو نفس التمثيل البياني للدالة f مُزاحًا 5 وحدات إلى اليسار.

إذن، إضافة ثابت k إلى مدخلة الدالة الخطية تنقل التمثيل البياني أفقيًا بمقدار k من الوحدات.

خطأ شائع

قد تعتقد أن قيمة k الموجبة في الدالة $g(x) = 2(x + k) - 4$ تنقل التمثيل البياني في اتجاه موجب، أي إلى اليمين. غير أن قيمة k الموجبة تنقل التمثيل البياني إلى اليسار.

حاول أن تحل! 2. لتكن الدالة $f(x) = 3x + 7$

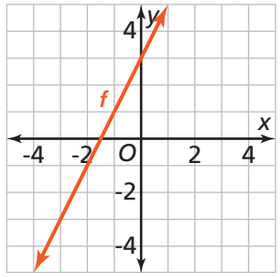
a. ما وجه المقارنة بين التمثيل البياني للدالة $g(x) = 3(x - 4) + 7$ والتمثيل البياني للدالة f ؟

b. ما وجه المقارنة بين التمثيل البياني للدالة $g(x) = 3(x + 9.5) + 7$ والتمثيل البياني للدالة f ؟

الدرس 3-2 تحويل الدوال الخطية 63

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 3 اطرح أمام الطلاب تحديًا تطلب فيه منهم كتابة معادلة لتحويل محدّد.



س: كيف يمكنك تحويل f لتحصل على مستقيم متعامد على f ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : قم بإجراء تمدد أو تضيّق للمستقيم حول أحد المقطعين x و y.]

س: اكتب الدالة والتحويل الرأسي للدالة.

[الدالة : $f(x) = 2x + 3$، التحويل : $g(x) = -\frac{1}{4} f(x)$ أو $g(x) = f\left(-\frac{1}{4} x\right)$.]

مثال 3 تمدد وتضيّق الدوال الخطية

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

الجزء A

س: ما أوجه الشبه بين التمثيلين البيانيين للدالتين h و f ؟ ما أوجه الاختلاف ؟
[لهما نفس المقطع x، ولكن يختلفان بالميل والمقطع y.]

س: عندما تكون قيمة الدالة g مكافئة لناتج ضرب الدالة f في الثابت k، هل يكون للتمثيلين البيانيين للدالتين f و g دائمًا نفس المقطع x ؟
[نعم، قيمة y المناظرة للمقطع x في الدالة f تساوي 0، بغض النظر عن قيمة k، $0(k) = 0$]

س: ما الذي يعنيه القول إنّ المقطع y يتم تغييره بمعامل مقداره 4 ؟
[المقطع y للدالة f يساوي 1، لذا، المقطع y للدالة g يساوي 1×4 أو 4]

الجزء B

س: ما أوجه الشبه بين التمثيلين البيانيين للدالتين h و f ؟ ما أوجه الاختلاف ؟
[لهما نفس المقطع y، ولكن يختلفان في الميل والمقطع x.]

س: عندما تكون قيمة الدالة g مكافئة لناتج ضرب مدخلة الدالة f في الثابت k هل يكون للتمثيلين البيانيين دائمًا نفس المقطع y ؟
[نعم، قيمة x المناظرة للمقطع y في الدالة f تساوي 0، بغض النظر عن قيمة k، $0(k) + 1 = 1$]

س: ما الذي يعنيه القول إن الميل يتغير بمعامل مقداره 3 ؟
[ميل الدالة f يساوي 1، لذا فإن ميل الدالة g يساوي ناتج ضرب 3 في 1، أي يساوي 3]

حاول أن تحلّ! الإجابات

3. a. هو تضيُّق رأسي، مع تغيير الميل والمقطع y بمعامل مقداره 0.25
b. هو تمدد أفقي، مع تغيير الميل بمعامل مقداره 0.5

مثال 3 تمدد وتضيّق الدوال الخطية

A. كيف يؤثر ضرب مخرجة دالة خطية في ثابت على تمثيلها البياني ؟

قارن بين التمثيل البياني للدالة $f(x) = x + 1$ والتمثيل البياني للدالة $g(x) = 4(x + 1)$.

x	$f(x) = x + 1$	$g(x) = 4(x + 1)$
−3	−2	−8
−2	−1	−4
−1	0	0
0	1	4
1	2	8

التمثيل البياني للدالة g هو تمدد رأسي للتمثيل البياني للدالة f بمعامل يساوي 4، وتتغير قيمة كل من الميل والمقطع y بمقدار نفس المعامل.
يؤثر ضرب مخرجة دالة خطية f في عدد حقيقي k في تمثيلها البياني رأسيًا.
إذا كان $|k| > 1$، يكون تحويل التمثيل البياني **تمددًا رأسيًا**.
إذا كان $0 < |k| < 1$، يكون التمثيل البياني **تضيّقًا رأسيًا**.

عمم
هل صحيح دائمًا أنه لأي دالة خطية f، فإن التمثيل البياني لكل من الدالتين f و kf يختلفان في قيمة المقطع y ؟

B. كيف يؤثر ضرب مدخلة دالة خطية في ثابت على تمثيلها البياني ؟

قارن بين التمثيل البياني للدالة $f(x) = x + 1$ والتمثيل البياني للدالة $g(x) = (3x) + 1$.

x	$f(x) = x + 1$	$g(x) = (3x) + 1$
0	1	1
1	2	4
2	3	7
3	4	10
6	7	19

التمثيل البياني للدالة g هو تضيّق أفقي للتمثيل البياني للدالة f بمعامل يساوي 3 (لكل قيمة y، فإن قيمة x للنقطة التي تقع على التمثيل البياني للدالة g تساوي $\frac{1}{3}$ قيمة x لنظيرتها على التمثيل البياني للدالة f)، ويتغير الميل بمقدار نفس المعامل، لكن المقطع y لا يتغير.
يؤثر ضرب مدخلة دالة خطية f في عدد حقيقي k في تمثيلها البياني أفقيًا.
إذا كان $|k| > 1$، يكون تحويل التمثيل البياني **تضيّقًا أفقيًا**.
إذا كان $0 < |k| < 1$، يكون تحويل التمثيل البياني **تمددًا أفقيًا**.

حاول أن تحلّ! **3.** لتكن الدالة $f(x) = x - 2$

a. ما وجه المقارنة بين التمثيل البياني للدالة $g(x) = 0.25(x - 2)$ والتمثيل البياني للدالة f ؟

b. ما وجه المقارنة بين التمثيل البياني للدالة $g(x) = 0.5x - 2$ والتمثيل البياني للدالة f ؟

64 الوحدة 2 الدوال الخطية والمتباينات الخطية

تعزيز المهارات اللغوية

استعمل مع **المثال 3**

القراءة **مستوى 1** إقرأ المثال وراجع معاني المصطلحات مدخلة ومخرجة وتمدد لمساعدة الطلاب على فهم المثال.

س: ما العلاقة بين المصطلحين مدخلة ومخرجة ؟
[المدخلات هي قيم يتم تعويضها في دالة عن x للحصول على مخرجة $f(x)$.]

س: أعط مرادفاً وضداً لكلمة تمدد.
[مطّ، زمٌّ.]

س: أعط مرادفاً وضداً لكلمة تضيّق.
[ضغط، توسُّع.]

الكتابة **مستوى 2** اعرض على السبورة جدولاً من صفّين وعمودين.

	kx	$kf(x)$
$k < 1$	تمدد أفقي	تضيّق رأسي
$k > 1$	تضيّق أفقي	تمدد رأسي

إملأ خلايا الجدول بعبارات تضيّق رأسي، تضيّق أفقي، تمدد رأسي، تمدد أفقي. ثم اطلب من الطلاب استعمال الجدول السابق لكتابة إجابات الأسئلة الآتية.

س: $f(x) = 3x + 4$ و $g(x) = 3\left(\frac{1}{4}x\right) + 4$، ما نوع التحويل g ؟
[تمدد أفقي.]

س: $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ و $h(x) = 5\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$، ما نوع التحويل h ؟
[تمدد رأسي.]

التحدث **مستوى 3** في الجزء B من المثال 3، انظر إلى الجملة التي تبدأ ب "التمثيل البياني للدالة g". اطلب من الطلاب تبادل الأدوار في توضيح كيفية رؤية التغير في الميل (وعدم التغير في المقطع y) في التمثيل البياني وفي المعادلة.

س: ما المعامل k في المثال ؟
[3]

س: استعمل التمثيل البياني لتوضيح كيفية تغير الميل بالمعامل.
[ميل الدالة f هو التغير وحدة واحدة إلى الأعلى ثم وحدة واحدة إلى اليمين. أما ميل الدالة g هو التغير 3 وحدات إلى الأعلى ثم وحدة واحدة إلى اليمين. إذن، ينحدر ميل الدالة g بمقدار ثلاث أمثال ميل الدالة f.]

س: استعمل المعادلة لتوضح أن المقطع y لا يتغير.
[إن ضرب أي عدد بالعدد 0 يساوي 0، لذا فإن ضرب x بالعدد 3 يعطي 0 عندما يساوي x العدد 0]

ملخص المفهوم تحويلات الدوال الخطية

س: لماذا يكون k دائمًا أكبر من الصفر في أمثلة التمدد والتضيّق ؟

[إذا كان k أصغر من الصفر، فإن الضرب في قيمة سالبة يغير ميل المستقيم.]

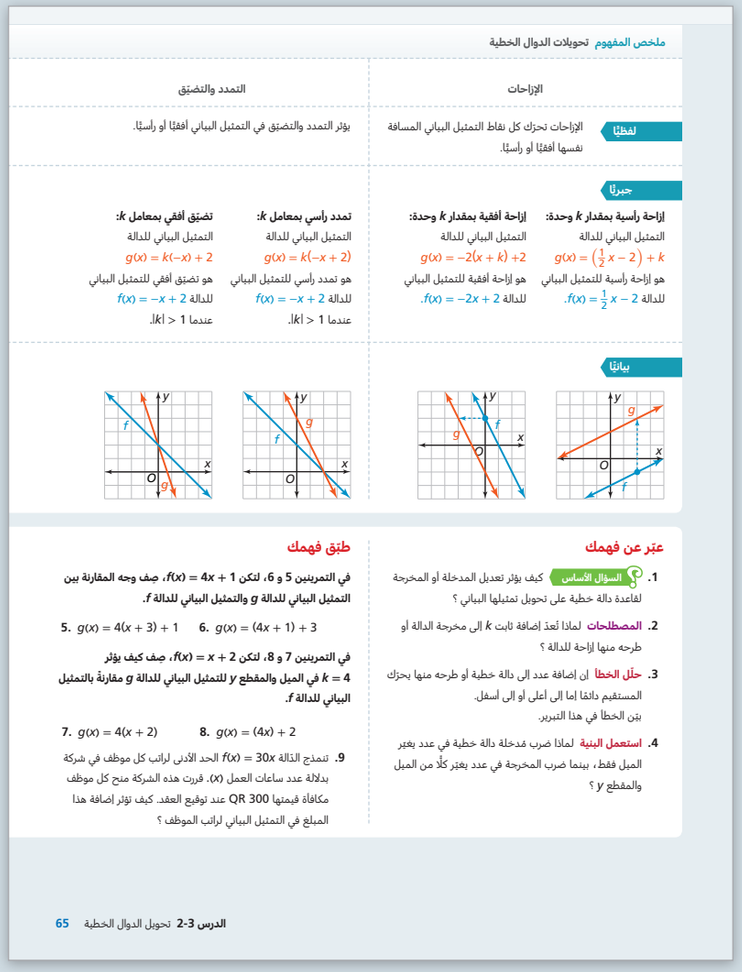
عبّر عن **فهمك**|طبّق **فهمك**

خطأ شائع

التمرين 7 قد يشير بعض الطلاب إلى أن التمثيلات البيانية لها نفس المقطع y. ذكّر الطلاب بأنه عندما يتم ضرب المخرجة في k فإن المقاطع x تبقى هي نفسها، ولكن يتم تغيير المقطع y بالمعامل k.

الإجابات

1. يساعدك تحديد التحويلات لدالة خطية على تحديد مقدار إزاحة التمثيل البياني للمستقيم أفقيًا أو رأسيًا وما إذا كان الميل والمقطع y للتمثيل البياني سيتغير أم لا.
2. المستقيم له نفس الميل، أُزيح فقط رأسيًا أو أفقيًا.
3. عند إضافة عدد إلى المعادلة $y = f(x)$، فإنه يتم إزاحة المستقيم رأسيًا، ولكن عندما تتم إضافة عدد إلى x، فإنه يتم إزاحة المستقيم أفقيًا.
4. يغيّر ضرب مخرجة دالة خطية في الثابت k كل من الميل والمقطع y لأنه يتم ضرب كل من الحد x والحد الثابت في k. عند ضرب المدخلة في الثابت k فإنه يتم فقط ضرب الحد x في k، لذا فإن المقطع y لا يتغير.
5. إزاحة الدالة f بمقدار 3 وحدات إلى اليسار لنحصل على الدالة g.
6. إزاحة الدالة f بمقدار 3 وحدات إلى الأعلى لنحصل على الدالة g.
7. يتم تغيير الميل والمقطع y بمعامل مقداره 4
8. يتم تغيير الميل بمعامل مقداره 4، ولا يتغير المقطع y.
9. يتم إزاحة التمثيل البياني إلى الأعلى 300 وحدة.



ملخص المفهوم تحويلات الدوال الخطية

	الإزاحات	التمدد والتضيّق
لفظيًا	الإزاحات تحرك كل نقاط التمثيل البياني المسافة نفسها أفقيًا أو رأسيًا.	يؤثر التمدد والتضيّق في التمثيل البياني أفقيًا أو رأسيًا.
جبريًا	**إزاحة رأسية بمقدار k وحدة:** التمثيل البياني للدالة $g(x) = \left(\frac{1}{2}x - 2\right) + k$ هو إزاحة رأسية للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$. **إزاحة أفقية بمقدار k وحدة:** التمثيل البياني للدالة $g(x) = -2(x + k) + 2$ هو إزاحة أفقية للتمثيل البياني للدالة $f(x) = -2x + 2$.	**تمدد رأسي بمعامل k:** التمثيل البياني للدالة $g(x) = k(-x + 2)$ هو تمدد رأسي للتمثيل البياني للدالة $f(x) = -x + 2$ عندما $\|k\| > 1$. **تضيّق أفقي بمعامل k:** التمثيل البياني للدالة $g(x) = k(-x) + 2$ هو تضيّق أفقي للتمثيل البياني للدالة $f(x) = -x + 2$ عندما $\|k\| < 1$.
بيانيًا		

عبّر عن فهمك

1. **السؤال الأساس** كيف يؤثر تعديل المدخلة أو المخرجة لقاعدة دالة خطية على تحويل تمثيلها البياني ؟
2. **المصطلحات** لماذا تُعدّ إضافة ثابت k إلى مخرجة الدالة أو طرحه منها إزاحة للدالة ؟
3. **حلّل الخطأ** إن إضافة عدد إلى دالة خطية أو طرحه منها يحرك المستقيم دائمًا إما إلى أعلى أو إلى أسفل. بيّن الخطأ في هذا التبرير.
4. **استعمل البنية** لماذا ضرب مُدخلة دالة خطية في عدد يغير الميل فقط، بينما ضرب المخرجة في عدد يغيّر كلًّا من الميل والمقطع y ؟

طبّق فهمك

في التمرينين 5 و 6، لتكن $f(x) = 4x + 1$، صِف وجه المقارنة بين التمثيل البياني للدالة g والتمثيل البياني للدالة f.

5. $g(x) = 4(x + 3) + 1$
6. $g(x) = (4x + 1) + 3$

في التمرينين 7 و 8، لتكن $f(x) = x + 2$، صِف كيف يؤثر $k = 4$ في الميل والمقطع y للتمثيل البياني للدالة g مقارنةً بالتمثيل البياني للدالة f.

7. $g(x) = 4(x + 2)$
8. $g(x) = (4x) + 2$
9. تنمذج الدالة $f(x) = 30x$ الحد الأدنى لراتب كل موظف في شركة بدلالة عدد ساعات العمل (x). قررت هذه الشركة منح كل موظف مكافأة قيمتها 300 QR عند توقيع العقد. كيف تؤثر إضافة هذا المبلغ في التمثيل البياني لراتب الموظف ؟

الدرس 2-3 تحويل الدوال الخطية 65

تدرَّب وحُل مسائل

دليل المهام

أساسي	متقدم
10–24, 26, 28, 30–37	10–16, 19–21, 23–37

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	11, 15, 16, 27, 29, 35	1
	14	3
2	17, 18, 28, 30	1
	12, 33	2
3	19–26, 31, 32, 36, 37	1
	10, 13	2
	14, 34	3

الإجابات

10. التحويل هو تمدد رأسي معامله 4؛ $4f(x)$

11. لا تغير الإزاحات ميل المستقيم، لذلك يكون المستقيم الأصلي والمستقيم الذي تمّت إزاحته متوازيين دائمًا.

12. رسم الطالب g إلى اليسار من f مقدار 4 وحدات. يجب عليه أن يرسم g إلى اليمين من f مقدار 4 وحدات.

13. $h(x) = 2x - 6$, $h(x)$ تساوي $f(4x - 6)$.

14.

	الدالة	الوصف	التحويل
a.	$2x - 4$	التمثيل البياني للدالة f تمت إزاحته بمقدار 5 وحدات إلى الأسفل.	$f(x) - 5$
b.	$\frac{1}{3}x + 6$	التمثيل البياني للدالة g تمت إزاحته بمقدار 4 وحدات إلى الأعلى.	$g(x) + 4$
c.	$x + 6$	تم تغيير التمثيل البياني للدالة g مع الميل والمقطع y بمعامل تمدد رأسي مقداره 3	$3g(x)$
d.	$x + \frac{1}{2}$	تم تغيير التمثيل البياني للدالة f مع الميل والمقطع y بمعامل تضيق رأسي مقداره $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}f(x)$

15. 8 وحدات إلى الأعلى

16. 4 وحدات إلى الأسفل

17. 10 وحدات إلى اليسار

18. وحدة واحدة إلى اليمين

19. تمدد أفقي بمعامل مقداره 0.1

20. تمدد رأسي بمعامل مقداره 5

21. تضيُّق أفقي بمعامل مقداره 2

22. تمدد رأسي بمعامل مقداره 8

23. يتغيّر الميل والمقطع y بمعامل مقداره 3

24. يتغير الميل بمعامل مقداره 0.5، لم يتغير المقطع y.

25. يتغير الميل والمقطع y بمعامل مقداره $\frac{1}{6}$

26. يتغيّر الميل بمعامل مقداره $\frac{1}{8}$ ، لم يتغير المقطع y.

27. لم يتغيّر الميل، ينقص المقطع y مقدار 3 وحدات.

28. لم يتغيّر الميل، يزداد المقطع y وحدة واحدة.

29. $k = 3$، إزاحة رأسيّة إلى الأعلى.

30. $k = 3$، إزاحة أفقية إلى جهة اليمين.

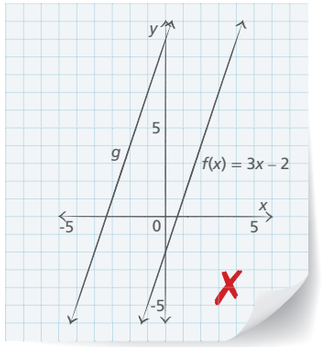
تدرَّب وحُل مسائل

عزِّز فهمك

10. برِّر منطقيًّا صِف تحويل الدالة $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$ الذي يجعل الميل يساوي 2 والمقطع y يكون 8 −.

11. ابحث عن العلاقات لماذا تنتج عن إزاحات التمثيلات البيانية للدوال الخطية مستقيمات متوازية ؟

12. حلّل الخطأ رسم طالب التمثيل البياني للدالة $f(x) = 3x - 2$، ثم رسم في نفس المستوى الإحداثي التمثيل البياني للدالة g التي هي تحويل للدالة f وذلك بطرح 4 من مدخلة f.
بيّن خطأ الطالب في رسمه التمثيل البياني للدالة g وصحّحه.



13. ابحث عن العلاقات لتكن الدالة $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$، افترض أنك طرحت 6 من مدخلة f لإنشاء دالة جديدة g، ثم ضربت مدخلة g في 4 لإنشاء دالة h. أوجد المعادلة التي تمثّل h.

14. استعمل البنية صِف كل تحويل، ثم اكتب معادلة دالة التحويل.

$f(x) = 2x + 1$ $\quad$ $g(x) = \frac{1}{3}x + 2$

	التحويل	الوصف	الدالة
a.	$f(x) - 5$		
b.	$g(x) + 4$		
c.	$3g(x)$		
d.	$\frac{1}{2}f(x)$		

تدرَّب

في التمارين 15-22، لتكن $f(x) = 3x + 5$، صِف كيف تقارن بين التمثيل البياني للدالة g والتمثيل البياني للدالة f. انظر الأمثلة 1 و 2 و 3

15. $g(x) = (3x + 5) + 8$ $\quad$ **16.** $g(x) = (3x + 5) - 4$

17. $g(x) = 3(x + 10) + 5$ $\quad$ **18.** $g(x) = 3(x - 1) + 5$

19. $g(x) = 3(0.1x) + 5$ $\quad$ **20.** $g(x) = 5(3x + 5)$

21. $g(x) = 3(2x) + 5$ $\quad$ **22.** $g(x) = 8(3x + 5)$

في التمارين 23-28، لتكن $f(x) = 2x + 3$، صِف كيف تؤثر قيمة k على الميل والمقطع y للتمثيل البياني للدالة g مقارنةً بالتمثيل البياني للدالة f. انظر المثال 3

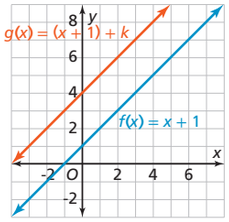
23. $g(x) = 3(2x + 3)$ $\quad$ **24.** $g(x) = 2(0.5x) + 3$

25. $g(x) = \frac{1}{6}(2x + 3)$ $\quad$ **26.** $g(x) = 2\left(\frac{1}{8}\right)x + 3$

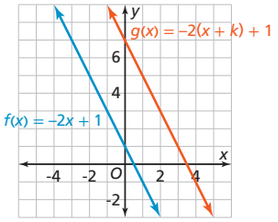
27. $g(x) = (2x + 3) - 3$ $\quad$ **28.** $g(x) = 2(x + 0.5) + 3$

في التمرينين 29 و 30، أوجد قيمة k في الدالة g. ثم صِف التمثيل البياني للدالة g باعتبارها تحويلًا للتمثيل البياني للدالة f.

29.



30.



الإجابات

31. a. $f(x) = 160x + 400$,
$g(x) = 320x + 400$

b. ميل g يساوي ضعف ميل f، والمقطع y في g هو نفس المقطع y في f.

32. كلاهما إجابته صحيحة؛
بما أن $m = 1$، فإن $g(x) = x + b + k$.
بالتجميع نجد أن $g(x) = (x + k) + b$.
أي أننا نحصل على الإجابة نفسها.

33. a. إزاحة إلى الأسفل.
b. إزاحة إلى اليمين.
c. يتغيّر الميل ويصبح موجبًا والمقطع y بمعامل مقداره k.
d. يصبح الميل موجبًا.

34. A

35. B

36. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : استعمل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(7 , 1)$ و $(1 , 2.5)$. معادلة هذا المستقيم هي $y = -4x + 11$.

المعادلة	التحويل
$y = -4x + 6$	إزاحة 5 وحدات إلى الأسفل
$y = -12x + 33$	تمدد رأسي بمعامل مقداره 3
$y = -4x + 3$	نموذج إجابة: إزاحة 8 وحدات إلى الأسفل

تدرَّب وحُل مسائل

طبّق

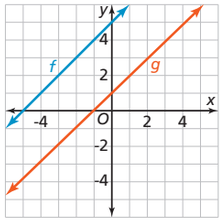
31. روابط في الرياضيات التكلفة الإجمالية لاستئجار جرار زراعي لفترة زمنية بالساعات تساوي قيمة استئجاره لهذه الفترة مضافًا إليها مبلغًا للتأمين قدره 400 QR.

32. .

a. تمثّل الدالة f التكلفة الإجمالية لاستئجار الجرار. وتمثل الدالة g التكلفة إذا تمت مضاعفة الإيجار في الساعة. اكتب كلتا الدالتين.

b. ما وجه المقارنة بين الميل والمقطع y للتمثيل البياني للدالة g والميل والمقطع y للتمثيل البياني للدالة f ؟

33. ابن الحجج الرياضية قال جابر إن التمثيل البياني للدالة g أدناه يمثّل إزاحة رأسية للدالة $f(x) = x + 1$ بمقدار 4 وحدات. في حين قال صالح إن التمثيل البياني للدالة g يمثل إزاحة أفقية للدالة f بمقدار 4 وحدات. أيهما على صواب ؟ وضّح إجابتك.



34. مهارات التفكير العليا التمثيل البياني لدالة خطية f له ميل سالب. صِف تأثير كل تحويل مما يلي في التمثيل البياني للدالة إذا كانت قيمة $k < 0$.

a. إضافة k إلى مخرجات f
b. إضافة k إلى مدخلات f
c. ضرب مخرجات f في k
d. ضرب مدخلات f في k

تدرَّب على اختبار

35. كيف نتج التمثيل البياني للدالة $g(x) = \frac{2}{5}x + 6$ من تحوّل التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{2}{5}x$ ؟

Ⓐ تحرك 6 وحدات إلى الأعلى

Ⓑ تحرك 6 وحدات إلى الأسفل

Ⓒ تحرك 6 وحدات إلى اليسار

Ⓓ تحرك 6 وحدات إلى اليمين

36. اختبار SAT/ACT أيّ من العبارات التالية تصف أوجه الاختلاف بين التمثيل البياني للدالة f والتمثيل البياني لمخرجة الدالة f مضروبة في 3 ؟

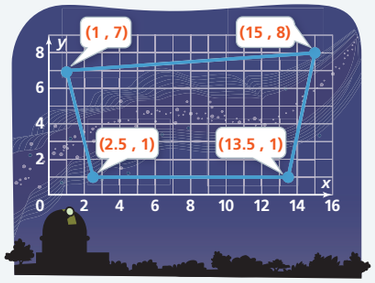
Ⓐ يتغير الميل بمعامل يساوي 3، ولا يتغير المقطع y

Ⓑ يتغير الميل والمقطع y بمعامل يساوي 3

Ⓒ لا يتغير الميل، ويتغير المقطع y بمعامل يساوي 3

Ⓓ الميل والمقطع y لا يتغيران.

36. مهمة أدائية يستعمل أعضاء نادي العلوم التحويلات على شبكات الإحداثيات لتتبع حركة الكوكبات النجمية في السماء.
اختر ضلعًا من أضلاع الكوكبة النجمية الموضّحة أدناه ثم حدّد سلسلة من التحويلات تريد تطبيقها على هذا الضلع لتحريكه.



انسخ الجدول وأكمله لتسجيل التحويلات ودوال هذه التحويلات.

الدالة	التحويل

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب إثنان من أفضل الممارسات في التعليم.
تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس.
كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

الدرس 2-4

المتباينات الخطية ذات المتغيرين

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على:

✔ تمثيل حلول متباينات خطية ذات متغيرين بيانيًا.

✔ تمثيل قيود المتباينات وتفسير الحلول كخيارات قابلة أو غير قابلة للتطبيق في سياق النمذجة.

الفهم الأساس

يوضح التمثيل البياني للمتباينة ذات متغيرين الحلول في صورة نصف مستوى يقع فوق المستقيم الحدودي أو تحته. يكون المستقيم الحدودي جزءًا من الحل عندما يكون رمز المتباينة ≤ أو ≥ ولا يكون جزءًا من الحل عندما يكون رمز المتباينة < أو >.

ترابط

في الوحدة السابقة، تمكّن الطلاب من:

- استعمال صيغة الميل والمقطع لتمثيل معادلة خطية بيانيًا.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من:

- تمثيل متباينات خطية ذات متغيرين بيانيًا لمساعدتهم على تحديد حلول المتباينة.

لاحقًا في هذه الوحدة، سيتمكّن الطلاب من:

- حل أنظمة متباينات خطية.

دقة

يؤكد هذا الدرس على مزيج من الاستيعاب المفاهيمي والتطبيق.

- يفهم الطلاب أن حل المتباينة هو نصف مستوى، وأن الحل يتضمن المستقيم الحدودي أو لا يتضمنه بحسب رمز المتباينة المستعمل.
- يمثل الطلاب المتباينات بيانيًا لإيجاد الحلول لمسائل الربح وتفسير الحل في السياق.

بناء المصطلحات

مراجعة المصطلحات

العربية | **الإنجليزية**

- **معادلة خطية ذات متغيرين** | *linear equation in two variables*

المصطلحات الجديدة

- **متباينة خطية ذات متغيرين** | *linear inequality in two variables*
- **حل متباينة ذات متغيرين** | *solution of an inequality in two variables*

نشاط المصطلحات

راجع المصطلح "معادلة خطية ذات متغيرين"، واطلب إلى الطلاب إعطاء مثال عليه، ثم اطلب إليهم استبدال رمز المعادلة برمز المتباينة. وضّح لهم أن المعادلة قد أصبحت الآن متباينة خطية ذات متغيرين. اطلب إلى الطلاب تصنيف كل مما يأتي إلى معادلة خطية بمتغير واحد، أو معادلة خطية ذات متغيرين، أو متباينة خطية بمتغير واحد، أو متباينة خطية ذات متغيرين.

$x + 2 = 10$ [**معادلة خطية بمتغير واحد**]

$y > 2x + 3$ [**متباينة خطية ذات متغيرين**]

$3x - 5 = y$ [**معادلة خطية ذات متغيرين**]

$x - 10 < 3$ [**متباينة خطية بمتغير واحد**]

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يُركّز الطلاب على المعيار:

9.2.4 يمثّل بيانيًا منطقة الحل لمتباينة خطية، ومنطقة الحل لمتباينات خطية آنية.

تطبيق ممارسات الرياضيات

ابحث عن البنية واستعملها

يرى الطلاب أن التمثيل البياني للمتباينة يتألف من مستقيم ونصف مستوى يقع فوق المستقيم أو تحته.

ابحث وعبّر عن الانتظام في التبرير باستعمال التكرار

يلاحظ الطلاب البنية في وضعيات مشابهة عندما يميزون أن التظليل يقع فوق المستقيم عندما يكون رمز المتباينات < أو ≥ وتحت المستقيم عندما يكون رمز المتباينات > أو ≤.

نمذج وناقش

محور تركيز التدريس يتعرف الطلاب على استعمال المتباينات الخطية لنمذجة حلول للمسائل. يساعد ذلك في تحضير الطلاب على تعلم كيفية حل متباينات خطية ذات متغيرين باستعمال التمثيلات البيانية.

قبل البدء بالحلّ

طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: ماذا تعرف من المعلومات المعطاة ؟

[الارتفاع الأقصى للمقطورة مع حمولتها وارتفاع المقطورة من دون الحمولة.]

أثناء الحلّ

مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: كيف يمكن أن يكون للمسألة أكثر من حل ؟

[أبعاد حمولات المقطورة لا تكون متساوية دائمًا. هناك أكثر من ارتفاع ممكن طالما أنه أقل من 2.65 m]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: ماذا يمكن أن تفعل بنموذجك لتبيّن عددًا من الحلول الممكنة ؟

[مثّل المتباينة بيانيًا في مستوى إحداثي.]

بعد إنجاز الحلّ

طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: هل يمكنك استعمال نفس نوع النموذج في حال كانت لديك قيمتان مجهولتان ؟

[نعم ؛ يمكنك استعمال المتباينات لإيجاد حلول متباينات ذات المتغيرين. القيم x والقيم y التي تحقق المتباينة الخطية ستكون حلاً للمسألة. غالبًا ما تستعمل طريقة التمثيل البياني لإيجاد هذه الحلول.]

استعمل مع **نمذج وناقش**

عادات التفكير

فكّر وثابر في الحل إذا نُقلت الحمولة إلى مقطورة مسطحة أخرى ارتفاعها الأقصى 3.5 m كم يجب أن يكون ارتفاع المقطورة المسطحة الجديدة لئلا يتعدى ارتفاع المقطورة والحمولة معًا الارتفاع الكلي ؟

[**يجب أن يكون الارتفاع أصغر من أو يساوي 3.5 m**]

كتاب الطالب، صفحة 69

2-4

المتباينات الخطية ذات المتغيرين

Linear Inequalities in Two Variables

استطيع... تمثيل حلول متباينة خطية ذات متغيرين بيانيًا.

معايير الدرس

9.2.4

المصطلحات

- متباينة خطية ذات متغيرين linear inequality in two variables

نمذج وناقش

يبلغ الارتفاع الأقصى المسموح به لمقطورة مسطحة مع حمولتها 4 أمتار و 15 سنتيمترًا، تبيّن الصورة المجاورة ارتفاع المقطورة من دون الحمولة.
فما الارتفاعات الممكنة لحمولة المقطورة ؟

1.5 m

A. ما نوع النموذج الذي يمكن أن يمثّل هذا الموقف ؟ وضّح إجابتك.

B. هل بإمكان النموذج الذي اخترته أن يوضّح كل الارتفاعات الممكنة للحمولة دون تجاوز الارتفاع الأقصى المسموح به ؟ وضّح إجابتك.

C. **بزر منطقيًا** فسّر حلول النموذج. ما عدد هذه الحلول ؟ وضّح إجابتك.

نموذج من أعمال الطلاب

A. يمكن استعمال متباينة لنمذجة الحالة لأن هناك عدة ارتفاعات ممكنة لحمولة المقطورة.

B. كلا، تعطي المتباينة الواحدة كل الارتفاعات الممكنة من دون حد أقصى.

C. يمكن أن يبلغ ارتفاع حمولة المقطورة 2.65 أمتار؛ وبالتالي عدد الحمولات الممكنة غير منتهٍ؛ أي قياس أصغر من أو يساوي 2.65 أمتار؛ يحقق المتباينة.

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلم مركّز

عرّف الطلاب على كيفية رسم التمثيلات البيانية للمتباينات الخطية ذات المتغيرين.
ذكرهم أن التمثيل البياني لمستقيم حدودي لمتباينة يشبه التمثيل البياني لمعادلة مستقيم.
يساعد ذلك الطلاب على فهم كيفية تمثيل متباينة خطية بيانيًا بهدف تحديد حلول المتباينة.

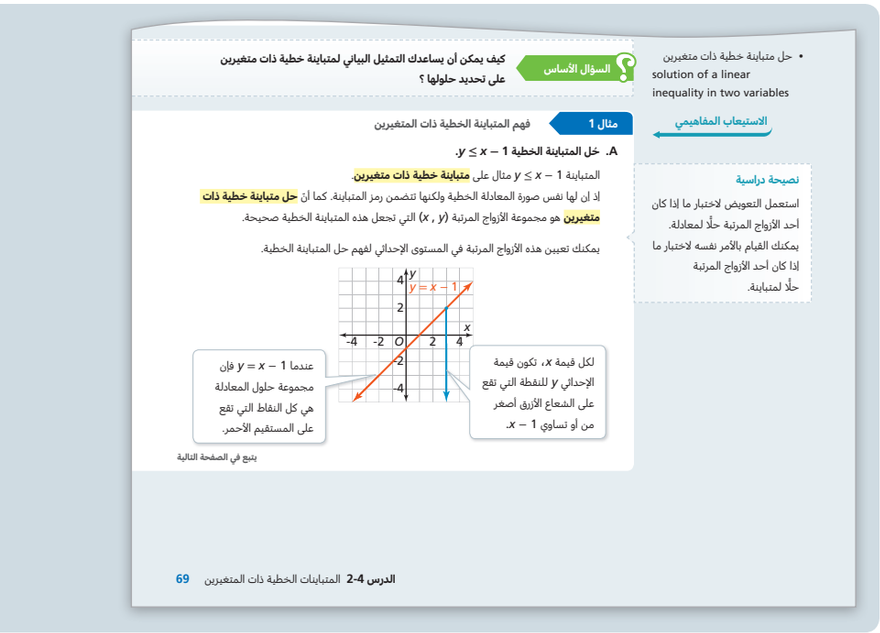
مثال 1 فهم المتباينة الخطية ذات المتغيرين

طرح أسئلة هادفة

الجزء A

س: ما أوجه الاختلاف بين التمثيلين البيانيين للمتباينتين الخطيتين في الجزئين A و B ؟
[يحتوي التمثيل البياني في الجزء A على مستقيم متصل مع تظليل نصف المستوى الواقع تحت المستقيم، في حين يحتوي التمثيل البياني في الجزء B على مستقيم متقطع مع تظليل النصف الواقع فوق المستقيم.]

س: ماذا تعرف عن حلول المتباينة الخطية من التمثيل البياني في الجزء A ؟
[يتضمن نصف المستوى المظلل والمستقيم المتصل كل النقاط التي تشكل حلولًا للمتباينة الخطية.]



• حل متباينة خطية ذات متغيرين
solution of a linear inequality in two variables

الاستيعاب المفاهيمي

نصيحة دراسية
استعمل التعويض لاختبار ما إذا كان أحد الأزواج المرتبة حلًا لمعادلة.
يمكنك القيام بالأمر نفسه لاختبار ما إذا كان أحد الأزواج المرتبة حلًا لمتباينة.

السؤال الأساس
كيف يمكن أن يساعدك التمثيل البياني لمتباينة خطية ذات متغيرين على تحديد حلولها ؟

مثال 1 فهم المتباينة الخطية ذات المتغيرين

A. حل المتباينة الخطية $y \leq x - 1$.

المتباينة $y \leq x - 1$ مثال على **متباينة خطية ذات متغيرين**.
إذ إن لها نفس صورة المعادلة الخطية ولكنها تتضمن رمز المتباينة. كما أن **حل متباينة خطية ذات متغيرين** هو مجموعة الأزواج المرتبة (x, y) التي تجعل هذه المتباينة الخطية صحيحة.

يمكنك تعيين هذه الأزواج المرتبة في المستوى الإحداثي لفهم حل المتباينة الخطية.

عندما $y = x - 1$ فإن مجموعة حلول المعادلة هي كل النقاط التي تقع على المستقيم الأحمر.

لكل قيمة x، تكون قيمة الإحداثي y للنقطة التي تقع على الشعاع الأزرق أصغر من أو تساوي $x - 1$.

يتبع في الصفحة التالية

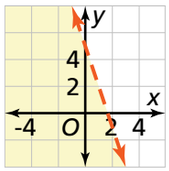
تابع المثال 1

الجزء B

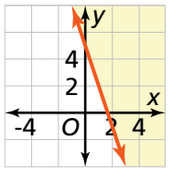
س: ماذا تعرف عن حلول المتباينة الخطية من التمثيل البياني في الجزء B ؟

[يتضمن نصف المستوى المظلل كل النقاط التي تشكل حلولًا للمتباينة الخطية. حلول المتباينة الخطية لا تتضمن النقاط الواقعة على المستقيم المتقطع.]

حاول أن تحلّ! الإجابات



1. a. كل النقاط في المنطقة الواقعة تحت المستقيم المتقطع الذي مقطعه y هو 5 وميله -3



b. كل النقاط الواقعة على المستقيم المتصل الذي مقطعه y هو 5 وميله -3 وكل النقاط الواقعة في المنطقة التي فوقه.

خطأ شائع

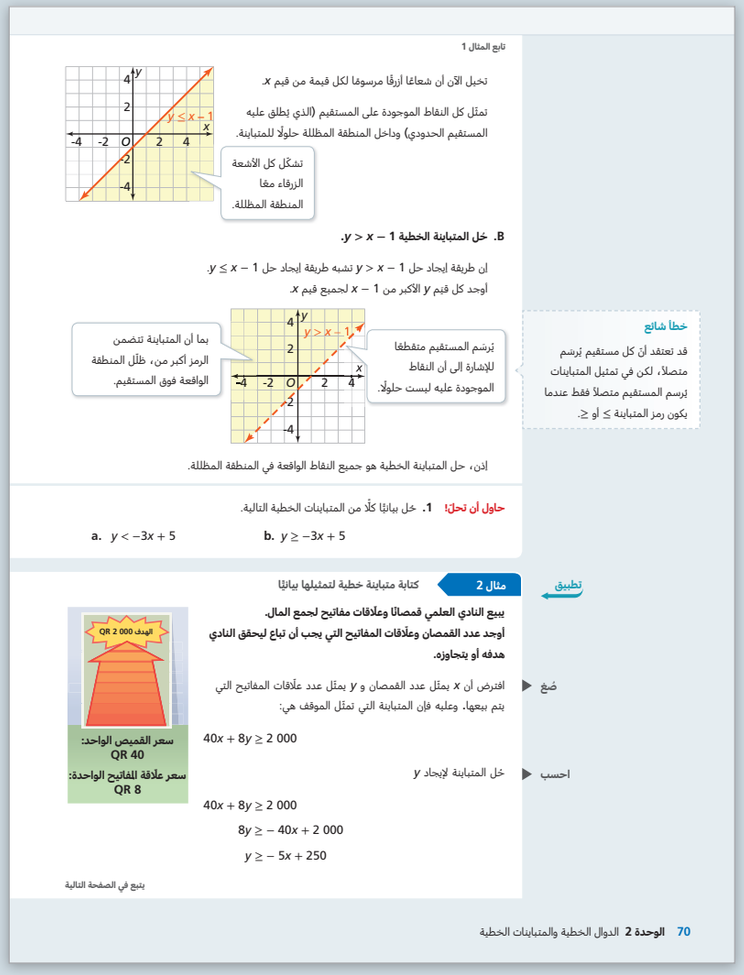
حاول أن تحل! 1 قد يعتقد بعض الطلاب أن كل الأزواج المرتبة الواقعة على المستقيم الحدودي هي حلول للمتباينة دائمًا. ذكرهم بأن الأزواج المرتبة الواقعة على المستقيم الحدودي لا تكون حلولًا للمتباينة الخطية إلا إذا كان رمز المتباينة الخطية المستعمل هو ≤ أو ≥، أي إن المستقيم الحدودي متصل.

مثال 2 كتابة متباينة خطية لتمثيلها بيانيًّا

طرح أسئلة هادفة

س: ماذا يمثل المقطعان x و y ؟

[عندما لا يبيع النادي العلمي أي قميص، يجب أن يبيع 250 علاقة مفاتيح على الأقل. وعندما لا يبيع أي علاقة مفاتيح، يجب أن يبيع 50 قميصًا على الأقل.]



تابع المثال 1

تخيل الآن أن شعاعًا أزرقًا مرسومًا لكل قيمة من قيم x.

تمثّل كل النقاط الموجودة على المستقيم (الذي يُطلق عليه المستقيم الحدودي) وداخل المنطقة المظللة حلولًا للمتباينة.

تشكّل كل الأشعة الزرقاء معًا المنطقة المظللة.

B. حل المتباينة الخطية $y > x - 1$.

إن طريقة إيجاد حل $y > x - 1$ تشبه طريقة إيجاد حل $y \leq x - 1$.

أوجد كل قيم y الأكبر من $x - 1$ لجميع قيم x.

بما أن المتباينة تتضمن الرمز أكبر من، ظلّل المنطقة الواقعة فوق المستقيم.

ارسم المستقيم متقطعًا للإشارة إلى أن النقاط الموجودة عليه ليست حلولًا.

خطأ شائع

قد تعتقد أنّ كل مستقيم يُرسم متصلًا، لكن في تمثيل المتباينات يُرسم المستقيم متصلًا فقط عندما يكون رمز المتباينة ≤ أو ≥.

إذن، حل المتباينة الخطية هو جميع النقاط الواقعة في المنطقة المظللة.

حاول أن تحل! **1.** حل بيانيًا كلًّا من المتباينات الخطية التالية.

a. $y < -3x + 5$ **b.** $y \geq -3x + 5$

تطبيق **مثال 2** كتابة متباينة خطية لتمثيلها بيانيًا

يبيع النادي العلمي قمصانًا وعلّاقات مفاتيح لجمع المال.
أوجد عدد القمصان وعلّاقات المفاتيح التي يجب أن تباع ليحقق النادي هدفه أو يتجاوزه.

الهدف QR 2 000

سعر القميص الواحد: QR 40

سعر علّاقة المفاتيح الواحدة: QR 8

ضع ◀ افترض أن x يمثّل عدد القمصان و y يمثّل عدد علّاقات المفاتيح التي يتم بيعها. وعليه فإن المتباينة التي تمثّل الموقف هي:

$40x + 8y \geq 2\,000$

احسب ◀ حل المتباينة لإيجاد y

$40x + 8y \geq 2\,000$

$8y \geq -40x + 2\,000$

$y \geq -5x + 250$

يتبع في الصفحة التالية

70 الوحدة 2 الدوال الخطية والمتباينات الخطية

استعمل مع **المثالين 1 و 2**

عادات التفكير

فكّر وثابر في الحل ما وجه الشبه والاختلاف بين التمثيل البياني للمتباينة $y < 3x$ والتمثيل البياني للمتباينة $y \geq 3x$ ؟

[للتمثيلان البيانيان نفس المستقيم الحدودي. التمثيل البياني للمتباينة $y < 3x$ متقطع ومظلل تحت المستقيم، بينما التمثيل البياني للمتباينة $y \geq 3x$ متصل ومظلل فوق المستقيم.]

تعزيز المهارات اللغوية

استعمل مع **المثال 2**

القراءة **مستوى 1** اطلب إلى الطلاب قراءة الجملة الأولى في نص مسألة المثال 2 مع التركيز على عبارة "جمع المال" والإشارة إليها أثناء القراءة.

س: ماذا قد يتبادر إلى ذهنك عند سماعك كلمة "جمع" ؟
[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : عملية حسابية بين عددين أو أكثر.]

س: ما المفاتيح التي تساعدك على تصور معنى "جمع المال" في سياق المسالة ؟ [يبيع النادي سلعًا لجمع المال.]

س: ما معنى كلمة "جمع المال" في هذا السياق ؟
[كسب المال.]

التحدث **مستوى 2** اطلب إلى الطلاب مناقشة المصطلح "مستقيم حدودي" ضمن مجموعات صغيرة.

س: ماذا يتبادر إلى ذهنك عادة عندما تسمع كلمتي "مستقيم حدودي" ؟ [قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : مستقيم مرسوم على خريطة يفصل الولايات أو الدول.]

س: ما المشترك في إجاباتكم ؟ [تتضمن حدودًا.]

س: كيف يساعدك ذلك على فهم كيفية استعمال المستقيم الحدودي في سياق المثال ؟
[يفصل المستقيم الحدودي النقاط التي هي جزء من الحل عن النقاط التي ليست جزءًا من الحل.]

الكتابة **مستوى 3** قد لا يفهم الطلاب معنى المفردتين "يتجاوز" و"استبعاد". اطلب إليهم كتابة معنى يتجاوز (يتخطى أو يتعدى الحدود) واستبعاد (إغلاق أو ابتعاد) في دفاترهم، ثم اطلب إليهم الإجابة على الأسئلة الآتية كتابة.

س: لماذا يريد النادي العلمي تجاوز هدفه ؟
[للحصول على أموال أكثر.]

س: أعط مثالين عن زوجين مرتبين يمكن أن يتم استبعادهما من الحل.
[أي زوج مرتب لا يحقق هدف النادي أو يتضمن عددًا سالبًا من القمصان أو من علاقات المفاتيح.]

تابع المثال 2

حاول أن تحلّ! الإجابات

2. كلا؛ سيجمع QR 840 فقط.

مثال 3 كتابة متباينة خطية من تمثيلها البياني

طرح أسئلة هادفة

س: ماذا سيتغير في المتباينة الخطية إذا كانت المنطقة المظللة تقع تحت المستقيم الحدودي ؟

[سيتغير رمز المتباينة الخطية من ≥ إلى ≤] .

س: كيف تحدد رمز المتباينة عند كتابة متباينة خطية من تمثيل بياني ؟

[استعمل ≥ أو ≤ عندما يكون المستقيم الحدودي متصلًا.
استعمل > أو < عندما يكون المستقيم الحدودي متقطعًا.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

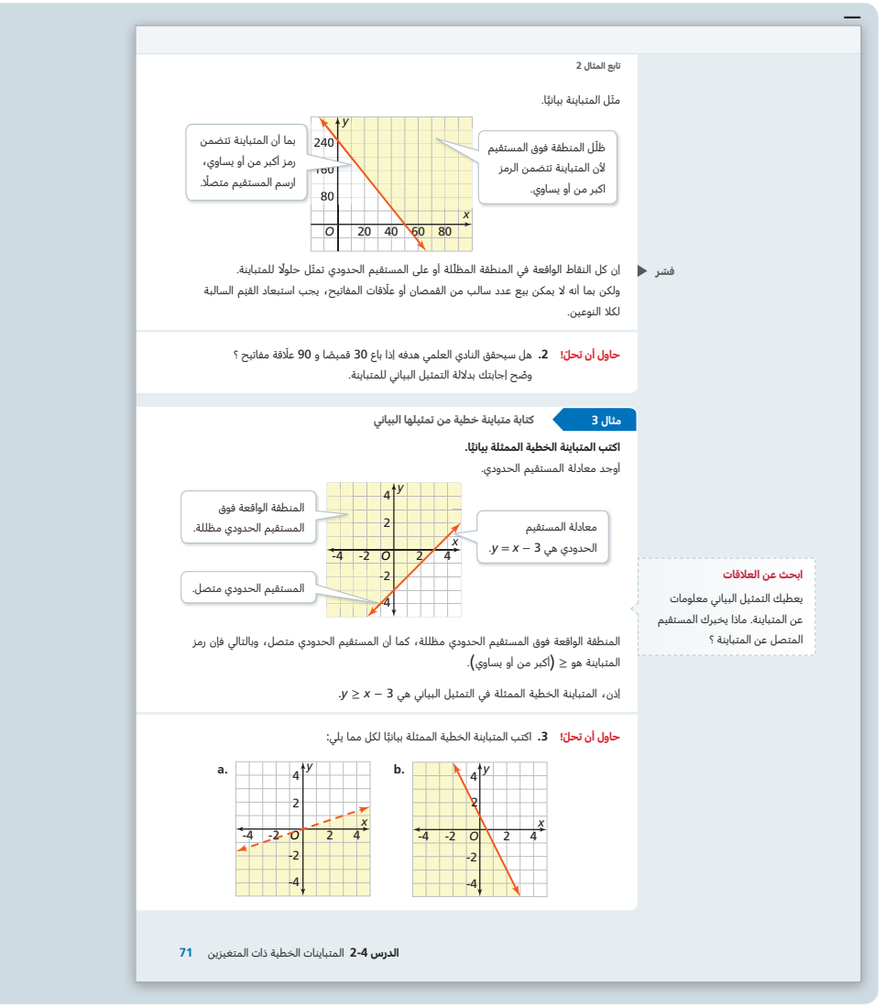
3. **a.** $y < \frac{1}{3}x$ **b.** $y \leq -2x + 1$

استعمل مع **المثالين 3 و 4**

عادات التفكير

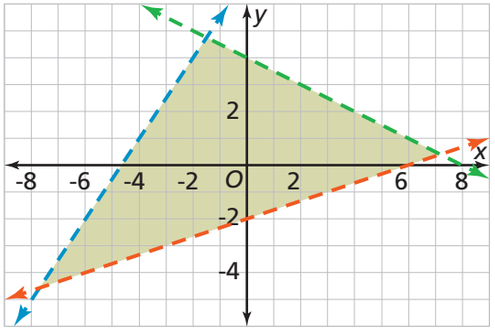
استعمل الأدوات المناسبة اذكر طريقتين يمكن التحقق من خلالهما مما إذا كانت نقطة معينة هي ضمن حل متباينة خطية أو لا.

[عوض الإحداثيين x و y في المتباينة الخطية لتتحقق ما إذا كانت تعطي عبارة صحيحة أم لا. عيّن النقطة على التمثيل البياني للمتباينة الخطية وتحقق مما إذا كانت تقع في المنطقة المظللة أم لا.]



الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 3 تحدّ الطلاب في كتابة متباينات تشكّل مثلثًا عند تمثيلها في نفس المستوى الإحداثي.



س: ما المتباينات الخطية التي تشكّل محيط المثلث ؟

[$y < \frac{3}{2}x + 7$, $y < -\frac{1}{2}x + 4$, $y > \frac{1}{3}x - 2$]

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 4 قد يجد بعض الطلاب صعوبة في فهم كيفية تمثيل متباينة خطية بمتغير واحد بيانيًا في المستوى الإحداثي. اطلب إليهم التدرب باستعمال الأزواج المرتبة لاكتشاف المتباينات من التمثيلات البيانية.

س: اذكر متباينة خطية تحتوي حلولها الأزواج المرتبة الآتية:
(6 , −2), (10 , −4), (6 , −6), (4 , −8), (−10 , −10) والأزواج المرتبة الآتية ليست حلولًا لها: (12 , −1), (10 , 0), (6 , 5). ثم مثّل المتباينة بيانيًا.

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : التمثيل البياني للمتباينة هو مستقيم رأسي متصل معادلته $x = -2$ مع تظليل المنطقة الواقعة إلى يسار المستقيم الحدودي.]

س: كيف اكتشفت المتباينة ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : كل قيم y تبدو مناسبة، لكن قيم x يجب أن تكون أصغر من أو تساوي −2]

مثال 4 المتباينات الخطية ذات المتغير الواحد في المستوى الإحداثي

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: ما وجه المقارنة بين التمثيلات البيانية على خط الأعداد والتمثيلات البيانية في المستوى الإحداثي عندما تكون هناك قيمة مجهولة واحدة ؟

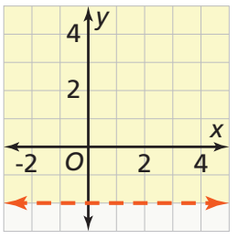
[توجد في كلا التمثيلين البيانيين أجزاء مظللة وأجزاء غير مظللة. عند حل المتباينة الخطية لإيجاد قيمة x يكون خط الأعداد أفقيًا، في حين يكون المستقيم الحدودي في المستوى الإحداثي رأسيًا. عند حل المتباينة الخطية لإيجاد y يكون خط الأعداد رأسيًا في حين يكون المستقيم الحدودي في المستوى الإحداثي أفقيًا.]

س: ما وجه الشبه بين الدائرة المغلقة والمستقيم المتصل ؟ وبين الدائرة المفتوحة والمستقيم المتقطع ؟

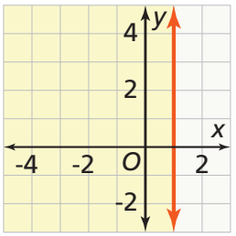
[النقاط في الدائرة المغلقة والمستقيم المتصل هي جزء من الحل. النقاط على الدائرة المفتوحة والمستقيم المتقطع ليست جزءًا من الحل.]

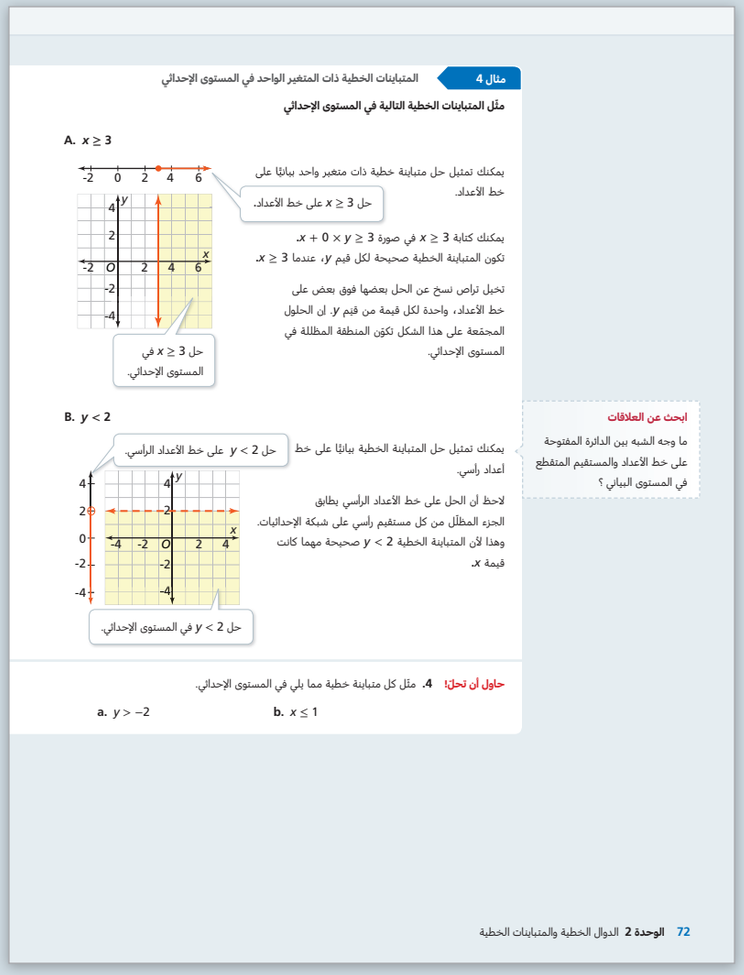
حاول أن تحلّ! الإجابات

4. **a.**



b.





مثال 4 المتباينات الخطية ذات المتغير الواحد في المستوى الإحداثي

مثّل المتباينات الخطية التالية في المستوى الإحداثي

A. $x \geq 3$

يمكنك تمثيل حل متباينة خطية ذات متغير واحد بيانيًا على خط الأعداد.

حل $x \geq 3$ على خط الأعداد.

يمكنك كتابة $x \geq 3$ في صورة $x + 0 \times y \geq 3$. تكون المتباينة الخطية صحيحة لكل قيم y، عندما $x \geq 3$.

تخيل تراص نسخ عن الحل بعضها فوق بعض على خط الأعداد، واحدة لكل قيمة من قيم y. إن الحلول المجمّعة على هذا الشكل تكون المنطقة المظللة في المستوى الإحداثي.

حل $x \geq 3$ في المستوى الإحداثي.

B. $y < 2$

يمكنك تمثيل حل المتباينة الخطية بيانيًا على خط أعداد رأسي.

حل $y < 2$ على خط الأعداد الرأسي.

لاحظ أن الحل على خط الأعداد الرأسي يطابق الجزء المظلّل من كل مستقيم رأسي على شبكة الإحداثيات. وهذا لأن المتباينة الخطية $y < 2$ صحيحة مهما كانت قيمة x.

حل $y < 2$ في المستوى الإحداثي.

ابحث عن العلاقات

ما وجه الشبه بين الدائرة المفتوحة على خط الأعداد والمستقيم المتقطع في المستوى البياني ؟

حاول أن تحلّ! **4.** مثّل كل متباينة خطية مما يلي في المستوى الإحداثي.

a. $y > -2$ **b.** $x \leq 1$

72 **الوحدة 2** الدوال الخطية والمتباينات الخطية

ملخص المفهوم المتباينات الخطية ذات المتغيرين

س: ما الفرق بين التمثيلين البيانيين ومتباينتيهما الخطيتين ؟

[$y \geq -\frac{2}{3}x + 1$ تعني أن y أكبر من أو يساوي $-\frac{2}{3}x + 1$ ، أي أن المستقيم الحدودي للتمثيل البياني متصل والتظليل فوقه.

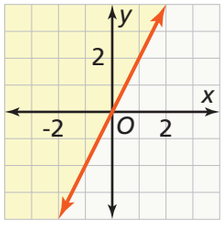
$y < -\frac{2}{3}x + 1$ تعني أن y أصغر من $-\frac{2}{3}x + 1$ ، أي أن المستقيم الحدودي للتمثيل البياني متقطع والتظليل تحته.]

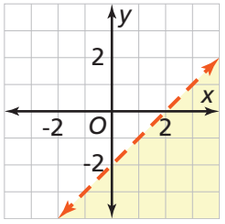
عبّر عن **فهمك** | طبّق **فهمك**

خطأ شائع

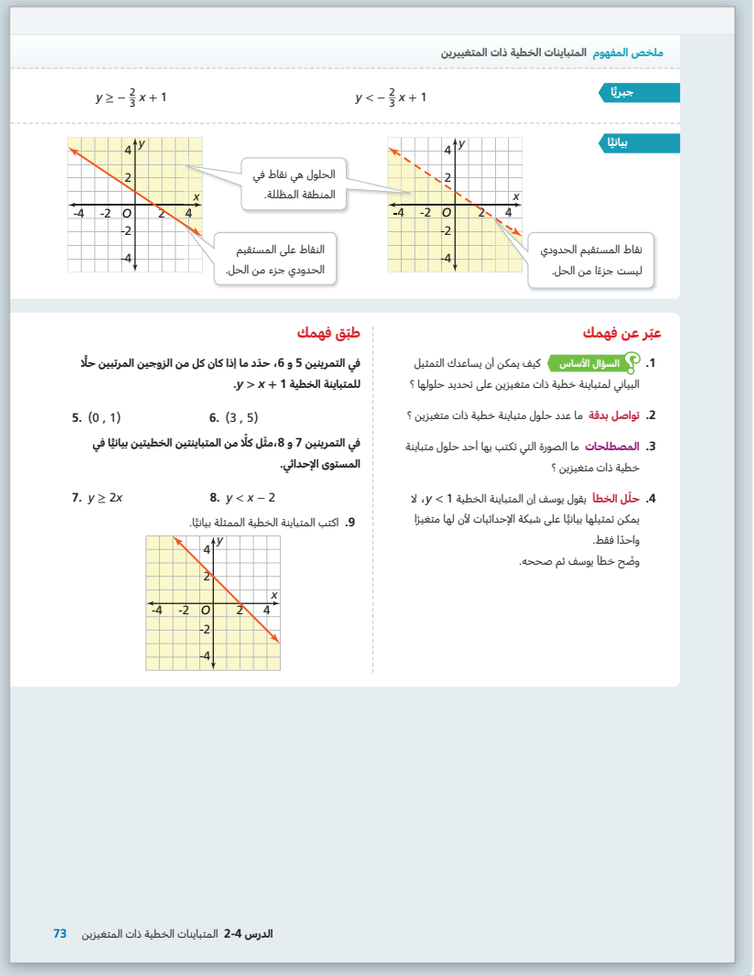
التمرين 5 قد يقول بعض الطلاب إن الزوج المرتب $(1 , 0)$ هو أحد حلول المتباينة لأن قيمة y في الزوج المرتب تساوي $x + 1$. ذكرهم بأن ذلك صحيح عندما يتضمن رمز المتباينة رمز المساواة $(\leq)$ وهذا يعني أن النقطة $(1 , 0)$ تقع على المستقيم الحدودي.

الإجابات

1. المنطقة المظلّلة مع أي نقطة على المستقيم المتصل يحتوي على كل حلول المتباينة الخطية.
2. عدد لانهائي من الحلول.
3. زوج مرتب (x , y)
4. يمكن تمثيل $y < 1$ على شبكة إحداثيات. ارسم المستقيم الأفقي المنقّط (غير متصل) $y = 1$ ثم ظلّل المنطقة الموجودة تحت هذا المستقيم.
5. لا
6. نعم
7. 

8. 

9. $y \leq -x + 2$



ملخص المفهوم المتباينات الخطية ذات المتغيرين

جبريًا

$y < -\frac{2}{3}x + 1$ $y \geq -\frac{2}{3}x + 1$

بيانيًا

عبّر عن فهمك

1. السؤال الأساس كيف يمكن أن يساعدك التمثيل البياني لمتباينة خطية ذات متغيرين على تحديد حلولها ؟
2. تواصل بدقة ما عدد حلول متباينة خطية ذات متغيرين ؟
3. المصطلحات ما الصورة التي تكتب بها أحد حلول متباينة خطية ذات متغيرين ؟
4. حلّل الخطأ يقول يوسف إن المتباينة الخطية $y < 1$، لا يمكن تمثيلها بيانيًا على شبكة الإحداثيات لأن لها متغيرًا واحدًا فقط.
وضّح خطأ يوسف ثم صححه.

طبّق فهمك

في التمرينين 5 و 6، حدّد ما إذا كان كل من الزوجين المرتبين حلًا للمتباينة الخطية $y > x + 1$.

5. $(0 , 1)$ 6. $(3 , 5)$

في التمرينين 7 و 8، مثّل كلًا من المتباينتين الخطيتين بيانيًا في المستوى الإحداثي.

7. $y \geq 2x$ 8. $y < x - 2$
9. اكتب المتباينة الخطية الممثلة بيانيًا.

الدرس 4-2 المتباينات الخطية ذات المتغيرين 73

تدرَّب وحُل مسائل

دليل المهام

أساسي	متقدم
10-25, 28-33	10-21, 24-33

تحليل التمارين

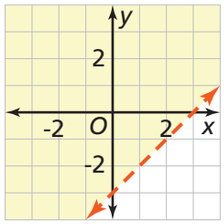
المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	16–19, 31	1
	11, 15	2
2	20, 21	1
	10, 28, 30, 33	2
	12, 29	3
3	24–27, 32	1
	13	2
4	22, 23	1
	14	2

الإجابات

10. كلتاهما؛ حيث يمكن استعمال المتباينة الخطية الأولى للتمثيل البياني، أما المتباينة الخطية الثانية يمكن اعادة كتابتها فتصبح المتباينة الخطية الأولى. التمثيل البياني في الرسم يمثل المتباينتين الخطيتين.

11. اعتقد راشد أن المتباينة الخطية $1 \leq 1$ ليست صحيحة. والحقيقة أن $1 \leq 1$ هي صحيحة لأن الرمز $\leq$ يعني اصغر من أو يساوي وبالتالي العدد 1 هو أصغر أو يساوي العدد 1. إذن $(1 , 1)$ هو حل للمتباينة الخطية.

12. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : التمثيل البياني للمتباينة الخطية $x < y + 3$ هو نفسه التمثيل البياني للمتباينة الخطية $y > x - 3$. المتباينة الخطية $y > x + 3$ والمتباينة السابقة لهما مستقيم حدودي غير متصل ميله 1 المستقيم الحدودي للمتباينة الخطية $y > x - 3$ يمر بالنقطة $(0 , -3)$ وكذلك المستقيم الحدودي للمتباينة الخطية $y < x + 3$ يمر بالنقطة $(0 , 3)$. منطقة الحل للمتباينة الخطية $y > x - 3$ تقع فوق المستقيم الحدودي ومنطقة الحل للمتباينة الخطية $y < x + 3$ تقع تحت المستقيم الحدودي.

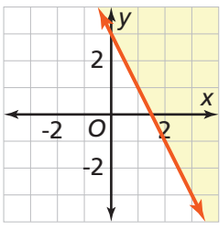


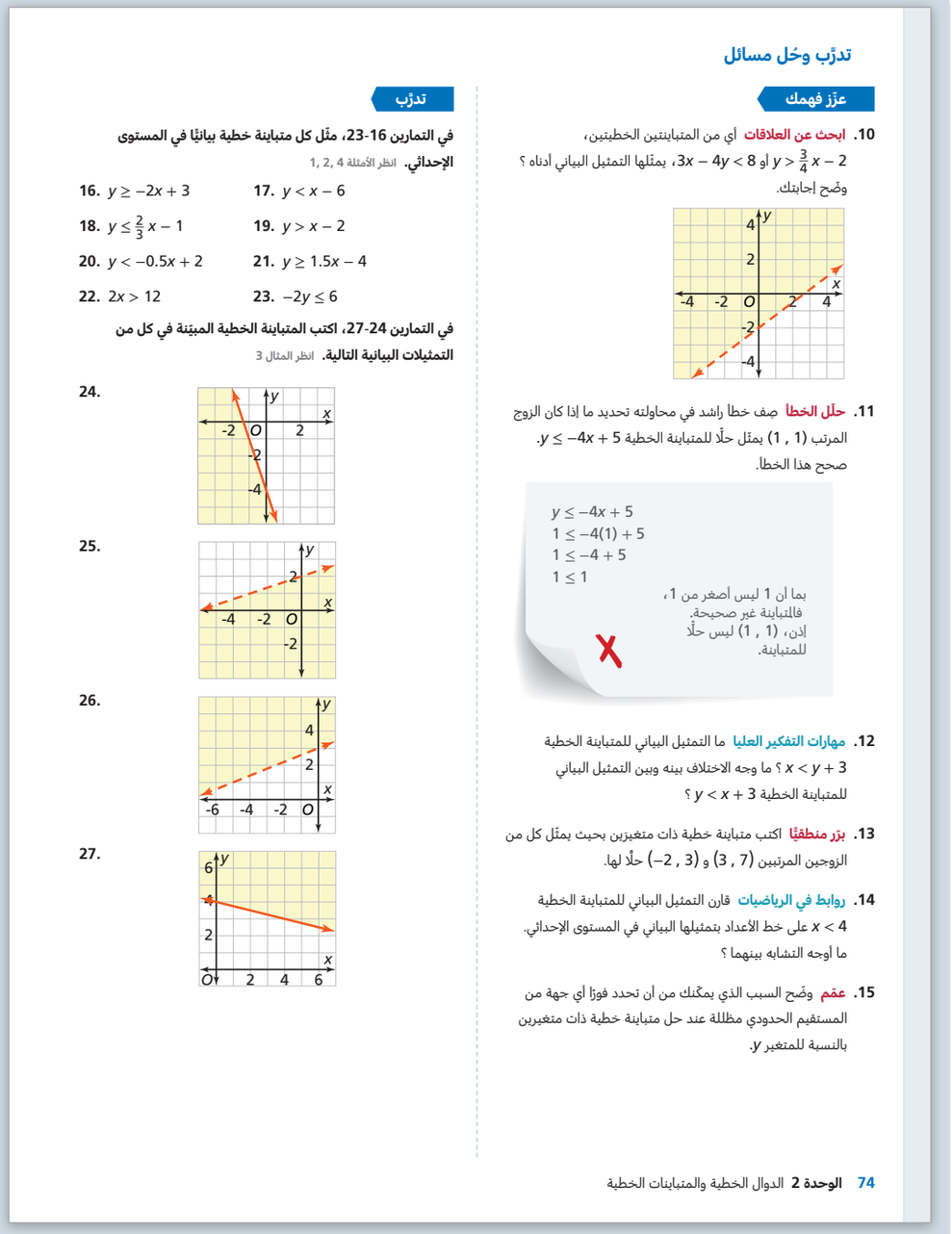
13. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : $y \geq \frac{4}{5}x + \frac{23}{5}$

14. التمثيل البياني للمتباينة الخطية بمتغير واحد $x < 4$ على خط الأعداد هو دائرة فارغة عند العدد 4 وسهم موجه ناحية اليسار. التمثيل البياني لمتباينة خطية ذات متغيرين حيث $x < 4$ هو مستقيم رأسي غير متصل عند $x = 4$ مع تظليل نصف المستوى الذي إلى يسار المستقيم.

15. عند حل متباينة لإيجاد y ، يمكن تحديد المستقيم الحدودي باستعمال المعادلة الناتجة عن استبدال رمز المساواة برمز المتباينة الخطية. ثم استعمل رمز المتباينة الخطية لتحديد ما اذا كانت قيم y يجب أن تكون أكبر أم أصغر من المستقيم الحدودي. قيم y الأكبر تقع فوق المستقيم، وقيم y الأصغر تقع تحت المستقيم الحدودي.

16.





تدرَّب وحُل مسائل

عزّز فهمك

10. ابحث عن العلاقات أي من المتباينتين الخطيتين، $y > \frac{3}{4}x - 2$ أو $3x - 4y < 8$، يمثّلها التمثيل البياني أدناه ؟ وضّح إجابتك.

11. حلّل الخطأ صِف خطأ راشد في محاولته تحديد ما إذا كان الزوج المرتب $(1 , 1)$ يمثل حلًا للمتباينة الخطية $y \leq -4x + 5$. صحح هذا الخطأ.

$y \leq -4x + 5$
$1 \leq -4(1) + 5$
$1 \leq -4 + 5$
$1 \leq 1$

بما أن 1 ليس أصغر من 1، فالمتباينة غير صحيحة. إذن، $(1 , 1)$ ليس حلًا للمتباينة.

12. مهارات التفكير العليا ما التمثيل البياني للمتباينة الخطية $x < y + 3$ ؟ ما وجه الاختلاف بينه وبين التمثيل البياني للمتباينة الخطية $y < x + 3$ ؟

13. برّر منطقيًا اكتب متباينة خطية ذات متغيرين بحيث يمثّل كل من الزوجين المرتبين $(7 , 3)$ و $(3 , -2)$ حلًا لها.

14. روابط في الرياضيات قارن التمثيل البياني للمتباينة الخطية $x < 4$ على خط الأعداد بتمثيلها البياني في المستوى الإحداثي. ما أوجه التشابه بينهما ؟

15. عمّم وضّح السبب الذي يمكّنك من أن تحدد فورًا أي جهة من المستقيم الحدودي مظللة عند حل متباينة خطية ذات متغيرين بالنسبة للمتغير y.

تدرَّب

في التمارين 16-23، مثّل كل متباينة خطية بيانيًا في المستوى الإحداثي. انظر الأمثلة 1, 2, 4

16. $y \geq -2x + 3$ **17.** $y < x - 6$

18. $y \leq \frac{2}{3}x - 1$ **19.** $y > x - 2$

20. $y < -0.5x + 2$ **21.** $y \geq 1.5x - 4$

22. $2x > 12$ **23.** $-2y \leq 6$

في التمارين 24-27، اكتب المتباينة الخطية المبيّنة في كل من التمثيلات البيانية التالية. انظر المثال 3

24.

25.

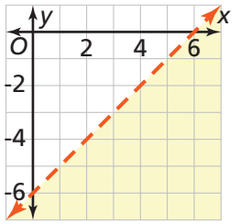
26.

27.

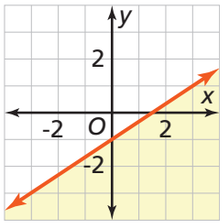
74 الوحدة 2 الدوال الخطية والمتباينات الخطية

الإجابات

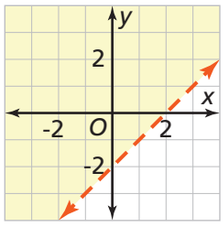
17.



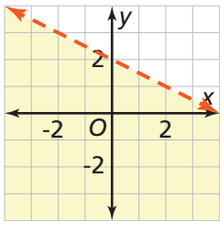
18.



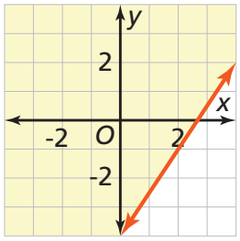
19.



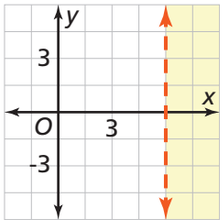
20.



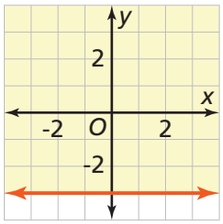
21.



22.



23.



24. $y \leq -3x - 4$

25. $y < \frac{1}{3}x + 2$

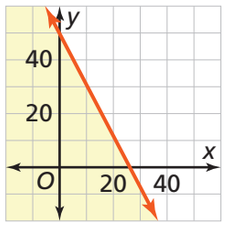
26. $y > \frac{2}{5}x + 3$

27. $y < -\frac{1}{4}x + 4$

الإجابات

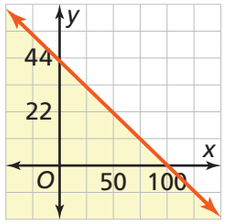
28. a. $69x + 36y \leq 1\,800$ أو $23x + 12y \leq 600$

b.

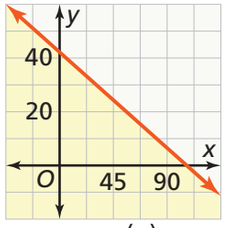


c. 11 أو أقل.

29. a. $25x + 60y \leq 2\,500$

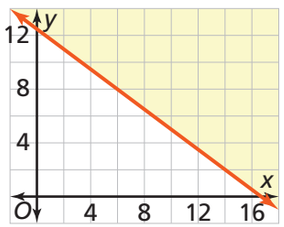


b. $25x + 60y \leq 2320$



c. التمثيل البياني في الجزء (b) تحرك إلى الأسفل 3 وحدات. تحرك المقطع y من $41.\overline{6}$ الى $38.\overline{6}$، كما تحرك المقطع x من 100 الى 92.8، عندما يكون الشخص في المصعد، يكون عدد الحلول الممكنة في الربع الأول أقل منه في حال لم يكن الشخص في المصعد.

30. $6x + 8y \geq 100$؛ نعم.



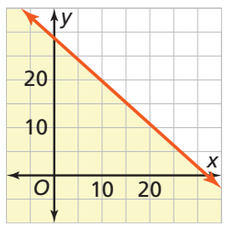
31.

	نعم	لا
a. (2 , 15)	☑	☐
b. (–3 , –15)	☑	☐
c. (0 , –3)	☐	☑
d. (1 , 5)	☑	☐

32. C

33. الجزء A $3.6x + 4y \leq 115$

الجزء B



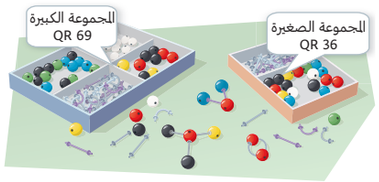
كلما تزايد عدد الصور المخزنة، فإن عدد الفيديوهات يتناقص.

الجزء C لا. بالرغم من أنه يمكن اعتبار إضافة عدد سالب من الصور بمثابة حذف للصور، إلا أن التمثيل البياني لا يوفر نموذجًا جيدا، لأنه يسمح فقط حذف أو إضافة لكل نوع من العناصر.
لا يتضمن التمثيل البياني امكانية حذف بعض الصور أو إضافة بعض الصور ولا يتضمن أيضا حذف بعض الفيديوهات أو إضافة بعضها.

تدرّب وحُل مسائل

طبّق

28. فكّر وثابر في الحل جمعت إحدى المدارس مبلغًا وقدره 1 800 QR لشراء مجموعة من نماذج الجزيئات يستخدمها الطلاب في المختبر لإنشاء نماذجهم.



a. اكتب متباينة خطية ذات متغيرين تمثّل أعداد مجموعات النماذج من كل نوع، والتي يمكن للمدرسة شراؤها.

b. مثّل هذه المتباينة بيانيًا.

c. افترض أن المدرسة قرّرت شراء 20 مجموعة من المجموعات الكبيرة. أوجد عدد المجموعات الصغيرة التي تستطيع المدرسة تحمّل تكاليفها.

29. نمذج يمكن لمصعد شحن نقل حمولة كتلتها الأقصى 2 500 باوند، أحد الأشخاص كتلته 180 باوند ويريد استعمال المصعد لنقل مجموعة من الصناديق. بعض هذه الصناديق كتلة كل منها 25 باوند والبعض الآخر كتلته 60 باوند.

a. اكتب المتباينة الخطية التي تمثّل الحمولة الإجمالية للمصعد من الصناديق في رحلة واحدة دون وجود الشخص معهم ثم مثّلها بيانيًا.

b. اكتب المتباينة الخطية التي تمثّل الحمولة الإجمالية للمصعد من الصناديق إذا كان الشخص موجودًا معهم. ثم مثّل هذه المتباينة بيانيًا.

c. قارن بين التمثيلين البيانيين للمتباينتين.

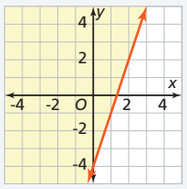
30. فكّر وثابر في الحل يقيم فريق كرة القدم في المدرسة حفلًا لنهاية الموسم الرياضي. يحتاج الفريق إلى إعداد مقاعد لمنة شخص على الأقل ويخطط لاستخدام نوعي طاولات مختلفي الأحجام. يمكن أن يجلس إلى الطاولة الصغيرة 6 اشخاص والى الطاولة الكبيرة 8 اشخاص. اكتب متباينة خطية تمثّل عدد الطاولات التي يحتاجها الفريق من كل نوع، ثم مثّل المتباينة بيانيًا. إذا كان في المدرسة 5 طاولات صغيرة و 9 طاولات كبيرة، فهل تكون كافية للمدعوين ؟

تدرّب على اختبار

31. اختر نعم أو لا لتحديد ما إذا كان كل زوج مرتب حلًا للمتباينة الخطية $y > 7x - 3$.

	نعم	لا
a. (2 , 15)	☐	☐
b. (–3 , –15)	☐	☐
c. (0 , –3)	☐	☐
d. (1 , 5)	☐	☐

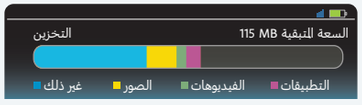
32. اختبار SAT/ACT ما المتباينة الخطية التي يمثّلها التمثيل البياني أدناه ؟



Ⓐ $y > 3x - 4$ Ⓑ $y > 4x - 3$

Ⓒ $y \geq 3x - 4$ Ⓓ $y \geq 4x - 3$

33. مهمة أدائية بقي في أحد الهواتف مقدار معيّن من السعة للتخزين. تستخدم الصورة ما متوسطه 3.6 MB من السعة فيما يستخدم الفيديو ما متوسطه 4 MB من السعة.



الجزء A اكتب متباينة خطية لتمثيل عدد الصور الإضافية x وعدد الفيديوهات الإضافية y التي يمكن للهاتف تخزينها.

الجزء B مثّل المتباينة بيانيًا. صِف مدى تأثير عدد الصور المخزنة في الهاتف على عدد الفيديوهات التي يمكن تخزينها.

الجزء C هل سيكون التمثيل البياني للمتباينة خارج الربع الأول منطقيًا ؟ وضّح إجابتك.

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم.
تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس.
كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

الدرس 2-5

أنظمة المتباينات الخطية

نظرة عامة على الدرس

تركيز

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على:

✔ تمثيل حل مجموعة من نظام متباينات خطية ذات متغيرين بيانيًا.

✔ تفسير حلول متباينات خطية في سياق منمذج.

الفهم الأساس

يمكن حل أنظمة المتباينات الخطية باستعمال التمثيل البياني. حل نظام متباينات هو تقاطع أنصاف المستويات المقابلة لكل متباينة، مع استبعاد المستقيمات الحدودية في حال لم يتضمن رمز المتباينة إشارة المساواة.

ترابط

سابقًا في هذه الوحدة، تمكّن الطلاب من:

- إنشاء متباينات خطية ذات متغيرين وحلها وتمثيلها بيانيًا.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من:

- إنشاء أنظمة متباينات خطية ذات متغيرين وحلها وتمثيلها بيانيًا.

لاحقًا في المرحلة الثانوية، سيتمكّن الطلاب من:

- حل أنظمة متباينات خطية وتربيعية ذات متغيرين أو أكثر واستعمال البرمجة الخطية لتحديد القيمتين الصغرى والعظمى الممكنتين عندما تمثل المتباينات قيودًا في مسألة من واقع الحياة.

دقة

يؤكد هذا الدرس على مزيج من المهارة الإجرائية والطلاقة والتطبيق.

- يمثل الطلاب متباينتين خطيتين بيانيًا في نفس مستوى ويحددون الحل في صورة تقاطع أنصاف المستويات المقابلة لكل متباينة.
- يطبق الطلاب ما يعرفونه عن أنظمة المتباينات لتحديد مدى القيم التي تحقق متطلبات كل من التكلفة العظمى والكمية الصغرى.

بناء المصطلحات

مراجعة المصطلحات

العربية | **الإنجليزية**

- **نصف مستوى** | *half plane*
- **تقاطع** | *intersection*
- **مستوى** | *plane*

المصطلحات الجديدة

- **نظام متباينات خطية** | *system of linear inequalities*
- **حل نظام متباينات خطية** | *solution of a system of linear inequalities*

نشاط المصطلحات

راجع المصطلحات "تقاطع" و"مستوى" و"نصف مستوى". وضّح للطلاب أن حل نظام معادلات هو تقاطع المستقيمات وأن حل نظام متباينات هو تقاطع المستويات. اعرض على الطلاب تمثيلًا بيانيًا لنظام متباينات واطلب إليهم تحديد أنصاف المستويات، ثم تحديد تقاطع أنصاف المستويات.

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير المحتوى

في هذا الدرس، يُركّز الطلاب على المعيار:

9.2.4 يمثّل بيانيًا منطقة الحل لمتباينة خطية، ومنطقة الحل لمتباينات خطية آنية.

تطبيق ممارسات الرياضيات

نمذج

يفسّر الطلاب نتائج موقف رياضي عندما يحدون الرابط بين التمثيل البياني لحل ما وسياق زجاجات الماء والقبعات، ويفهمون أن القيم الموجبة وحدها لها معنى.

أبحث عن البنية واستعملها

يلاحظ الطلاب أن التمثيل البياني مكوّن من أجزاء متعددة، بما فيها المستقيم الفاصل وأنصاف المستوى، والتي يمكن استعمالها لكتابة نظام متباينات.

استكشف وبرّر منطقيًّا

محور تركيز التدريس يستكشف الطلاب مدى فهمهم لحلول المتباينات الخطية. يقودهم ذلك إلى تمثيل نظام متباينات خطية بيانيًا وفهم حلوله وماذا تمثل.

قبل البدء بالحلّ

طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: عند تمثيل متباينتين بيانيًا في مستوى إحداثي، ماذا قد يحدث عندما تقوم بتظليل المناطق التي تشتمل على حلول كلتا المتباينتين ؟

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : قد تتداخل مناطق الحل أو تتشارك في بعض النقاط.]

أثناء الحلّ

مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البنّاء في تعلم الرياضيات

س: ما العلاقة بين النقاط المختلفة التي اخترتها ومستقيم المتباينة ؟

[إذا كانت النقطة التي اخترتها فوق المستقيم، ستكون قيمة y أكبر من قاعدة الدالة. إذا كانت النقطة التي اخترتها تحت المستقيم، ستكون قيمة y أصغر من قاعدة الدالة.]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: ارسم مستقيمًا آخر في المستوى الإحداثي عند $y = 4$. كيف يمكنك وصف المساحة المحصورة بين المستقيمات الثلاثة ؟

[المساحة المحصورة هي منطقة تداخل بين المنطقة الواقعة تحت المستقيم $y = 4$ والمنطقة الواقعة فوق المستقيم $y = x - 1$ والمنطقة الواقعة فوق المستقيم $y = -2x + 4$.]

بعد إنجاز الحلّ

طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

وجّه الطلاب إلى مناقشة كيف أن المناطق المتداخلة الناتجة عن التمثيلات البيانية للمتباينات الخطية في نفس المستوى الإحداثي تتضمن حلول نظام المتباينات.

س: كيف يمكنك أن تصف بشكل أكثر تحديدًا المناطق الناتجة عن تقاطع مستقيمين حدوديين لمتباينتين ؟

[بما أن المنطقة تقع بين مستقيمين حدوديين، يتم وصفها بموقعها بدلالة هذين المستقيمين.]

وضّح للطلاب عملية تمثيل متباينتين في مستوى إحداثي بيانيًا، وأعطهم الفرصة للتحقق من نتائج نصفي مستويين مظللين.

عادات التفكير استعمل مع **استكشف وبرّر منطقيًا**

برّر منطقيًا هل تعدّ النقاط على المستقيم جزءًا من المناطق الأربعة المبيّنة في الجزء C ؟ وضح إجابتك.

[كلا؛ النقاط على المستقيم هي النقاط حيث $y = x - 1$ أو $y = -2x + 4$. لا تحقق هذه القيم المتباينتين اللتين تعرّفان المناطق الأربع.]

كتاب الطالب، صفحة 77

2-5
أنظمة المتباينات الخطية
Systems of Linear Inequalities

أستطيع... تمثيل نظام متباينات خطية بيانيًا وحله.

معايير الدرس
9.2.4

المصطلحات
- نظام متباينات خطية system of linear inequalities
- حل نظام متباينات خطية solution of a system of linear inequalities

الاستيعاب المفاهيمي

استكشف وبرّر منطقيًا

بيّن التمثيل البياني المجاور المعادلتين $y = x - 1$ و $y = -2x + 4$.

A. اختر نقاطًا فوق المستقيم $y = x - 1$ وأخرى تحته. أي النقاط تُعد حلًا للمتباينة $y > x - 1$ ؟ وأيها تُعد حلًا للمتباينة $y < x - 1$ ؟

B. اختر نقاطًا فوق المستقيم $y = -2x + 4$ وأخرى تحته. أي النقاط تُعد حلًا للمتباينة $y > -2x + 4$ ؟ وأيها تُعد حلًا للمتباينة $y < -2x + 4$ ؟

C. **ابحث عن العلاقات** يقسم المستقيمان المستوى الإحداثي إلى أربع مناطق. كيف تصف كل منطقة بدلالة المتباينات في الجزأين A و B ؟

السؤال الأساس: كيف يرتبط التمثيل البياني لنظام متباينات خطية وحلول هذا النظام ؟

مثال 1: تمثيل نظام متباينات خطية بيانيًا

حل أنظمة المتباينات الخطية التالية بيانيًا.

نموذج من أعمال الطلاب

A. النقاط التي فوق المستقيم هي حلول المتباينة $y > x - 1$. النقاط التي تحت المستقيم هي حلول المتباينة $y < x - 1$.

B. النقاط التي فوق المستقيم هي حلول المتباينة $y > -2x + 1$. النقاط التي تحت المستقيم هي حلول المتباينة $y < -2x + 1$.

C. يمكنك وصف كل منطقة من المناطق الأربع بزوج من المتباينات.

$y > -2x + 1$ و $y > x - 1$

$y < -2x + 1$ و $y > x - 1$

$y > -2x + 1$ و $y < x - 1$

$y < -2x + 1$ و $y < x - 1$

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلم مركّز

وضّح للطلاب أن التمثيل البياني لنظام متباينات هو طريقة لتحليل مجموعة الحلول بصريًا. ذكرهم بأن كل مستقيم يرسمونه هو مستقيم حدودي وأن عليهم تحديد ما إذا كانت إحداثيات المستقيم متضمّنة في مجموعة الحلول أم لا، وذلك بحسب الرموز المستعملة في المتباينة. يمكن إيجاد حل النظام عندما تحقق النقاط التي تعدّ حلولًا لكلتا المتباينتين.

مثال 1 تمثيل نظام متباينات خطية بيانيًّا

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

الجزء A

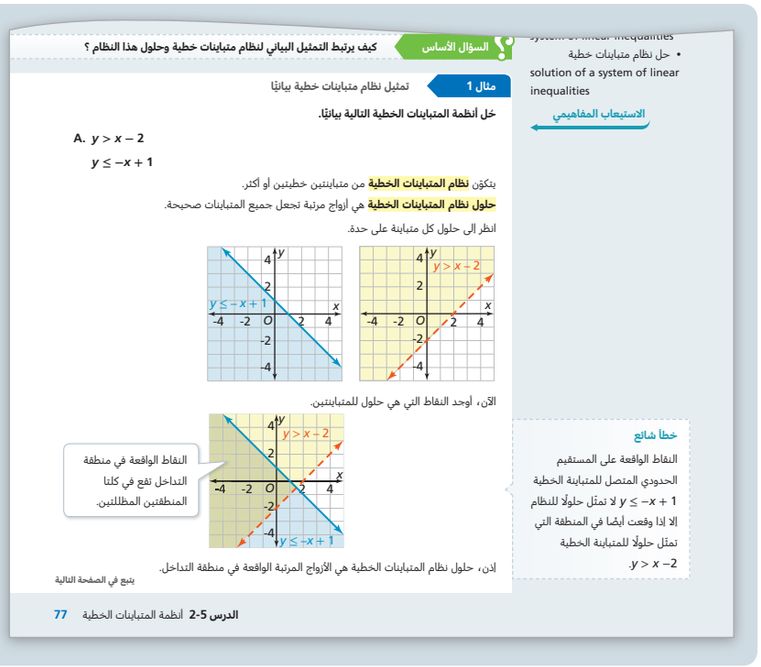
س: كيف يمكنك التحقق من أن المنطقة المظللة في كل تمثيل بياني هي الحل الصحيح للمتباينة التي يمثّلها ؟

[إذا كانت المنطقة المظللة تمثل مجموعة الحلول الصحيحة، فإن النقاط في هذه المنطقة ستحقق المتباينة جبريًا.]

الجزء B

س: أنظمة المعادلات الخطية التي تتضمن مستقيمات متوازية لا تكون لها حلول دائمًا. هل يصح ذلك على أنظمة المتباينات الخطية أيضًا ؟

[كلا؛ يمكن أن يكون لنظام متباينات خطية يتضمن مستقيمات متوازية حل. يعتمد الحل على رمز المتباينة ومناطق التداخل المظللة.]



السؤال الأساس: كيف يرتبط التمثيل البياني لنظام متباينات خطية وحلول هذا النظام ؟

مثال 1: تمثيل نظام متباينات خطية بيانيًا

حل أنظمة المتباينات الخطية التالية بيانيًا.

A. $y > x - 2$

$y \leq -x + 1$

يتكوّن **نظام المتباينات الخطية** من متباينتين خطيتين أو أكثر.

حلول نظام المتباينات الخطية هي أزواج مرتبة تجعل جميع المتباينات صحيحة.

انظر إلى حلول كل متباينة على حدة.

الآن، أوجد النقاط التي هي حلول للمتباينتين.

النقاط الواقعة في منطقة التداخل تقع في كلتا المنطقتين المظللتين.

إذن، حلول نظام المتباينات الخطية هي الأزواج المرتبة الواقعة في منطقة التداخل.

يتبع في الصفحة التالية

• حل نظام متباينات خطية
solution of a system of linear inequalities

الاستيعاب المفاهيمي

خطأ شائع

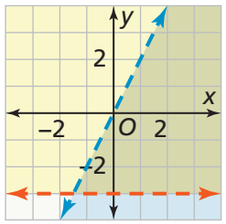
النقاط الواقعة على المستقيم الحدودي المتصل للمتباينة الخطية $y \leq -x + 1$ لا تمثل حلولًا للنظام إلا إذا وقعت أيضًا في المنطقة التي تمثل حلولًا للمتباينة الخطية $y > x - 2$.

الدرس 5-2 انظمة المتباينات الخطية 77

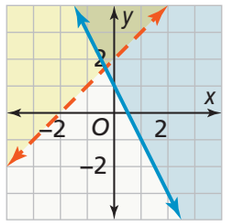
تابع المثال 1

حاول أن تحلّ! الإجابات

1. a.



b.



مثال 2 كتابة نظام متباينات خطية من تمثيل بياني

طرح أسئلة هادفة

س: ماذا تلاحظ بشأن المتباينات الخطية الموضّحة في التمثيل البياني ؟

[المستقيم الحدودي الأحمر متقطع والمنطقة المظللة تقع تحت المستقيم؛ المستقيم الحدودي الأزرق متصل والمنطقة المظللة تقع فوق المستقيم.]

س: كيف تكتب متباينة خطية إذا كانت المنطقة المظللة فوق المستقيم الحدودي أو تحته ؟

[إذا كانت المنطقة المظللة فوق المستقيم الحدودي، تكون كل مخرجات المتباينة y أكبر من القاعدة. إذا كانت المنطقة المظللة تحت المستقيم الحدودي، تكون كل مخرجات المتباينة y أصغر من القاعدة.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

2. a. $y \geq 3x + 2$
$y \leq x - 2$

b. $y > -2x$
$y \leq \frac{1}{2}x - 4$

استعمل مع **المثالين 1 و 2**

عادات التفكير

استعمل الأدوات المناسبة ما شكل التمثيل البياني لنظام متباينات خطية لا حلول له ؟

[مستقيمان متوازيان، حيث التظليل عند كل مستقيم يقع في الجهة المعاكسة للمستقيم الآخر ولا يوجد تداخل في التظليل.]

تابع المثال 1

B. $y \geq -x + 2$
$y < -x - 2$

مثّل المتباينتين بيانيًا.

بما أن ميلَي المستقيمين الحدوديين متساويان والمقطعين y مختلفان، فإن المستقيمين متوازيان ولا يتقاطعان. وبما أن التمثيلين البيانيين للمتباينتين لا يتداخلان، لذا ليس هناك حل لنظام المتباينات هذا.

حاول أن تحلّ! **1.** مثّل بيانيًا كل نظام من أنظمة المتباينات الخطية.

a. $y < 2x$
$y > -3$

b. $y \geq -2x + 1$
$y > x + 2$

مثال 2 كتابة نظام متباينات خطية من تمثيل بياني

اكتب نظام المتباينات الخطية الموضّح في التمثيل البياني المجاور.

استعمل البنية

ما المعلومات التي يمكنك الحصول عليها من التمثيلات البيانية للمستقيمات ؟ ما المعلومات التي يمكنك الحصول عليها من المنطقة المظللة في التمثيل البياني ؟

اكتب معادلة كل مستقيم باستعمال الميل والمقطع y.

ميل المستقيم الحدودي الأحمر يساوي 2 والمقطع y يساوي 3

ميل المستقيم الحدودي الأزرق يساوي -1 والمقطع y يساوي 4

تقع حلول النظام أسفل المستقيم المتقطع الأحمر، لذا فإن إحدى المتباينات الخطية هي $y < 2x + 3$.

تقع حلول النظام أعلى المستقيم الأزرق المتصل، لذا فإن المتباينة الخطية الأخرى هي $y \geq -x + 4$.

إذن، يبيّن التمثيل البياني نظام المتباينات الخطية : $y < 2x + 3$ و $y \geq -x + 4$.

يتبع في الصفحة التالية

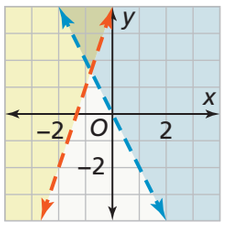
78 الوحدة 2 الدوال الخطية والمتباينات الخطية

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

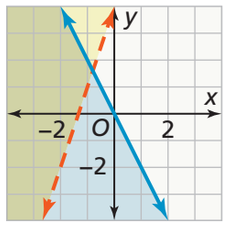
استعمل مع المثال 2 قد يجد بعض الطلاب صعوبة في كتابة نظام متباينات خطية من تمثيل بياني. اطلب إليهم التدرب على كتابة نظام متباينات خطية من تمثيل بياني.

- ما نظام المعادلات المعروض في كل تمثيل بياني ؟

A.



B.



س: ماذا تلاحظ على المستقيمين الحدوديين ؟

[المستقيمان الحدوديان متماثلان، لكن المستقيم الأزرق في التمثيل البياني B متصل في حين أنه في التمثيل البياني A متقطع.]

س: ما الذي يحدد الرمز المستعمل لكتابة كل متباينة خطية ؟

[يتحدد الرمز المستعمل من خلال المنطقة المظللة فوق (< أو ≥) أو تحت (> أو ≤) المستقيم، علمًا بأن اتجاه قراءة المتباينة الخطية يكون من اليسار إلى اليمين.]

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 3 اطلب إلى الطلاب استكشاف مجموعات خاصة من الحلول لأنظمة متباينات خطية مختلفة.

- مثل النظام الآتي بيانيًا.
$x < -1$ ؛ $y > 3$
- أضف التمثيل البياني للمتباينة أدناه إلى التمثيل البياني لنظام المتباينات الخطية.
$y > -x + 2$

س: ما تأثير المتباينة الخطية الجديدة على مجموعة حلول النظام ؟

[شطرت (قصّت إلى نصفين) المتباينة الجديدة مجموعة الإحداثيات التي كانت موجودة في النظام الأول.]

س: هل المستقيمات الحدودية في التمثيل البياني متصلة أم متقطعة ؟

[كل المستقيمات الحدودية متقطعة لأن رموز المتباينات الخطية هي إما > وإما <.]

تابع المثال 2

خطأ شائع

حاول أن تحل! 2 قد يرتبك بعض الطلاب في تحديد الرمز الذي يجب استعماله في كتابة المتباينة الخطية. اطلب إليهم التفكير في ما إذا كانت النقاط الواقعة على المستقيم الحدودي تشكّل حلولًا للمتباينة الخطية (متصل أم متقطع) وفي الجهة التي تم تظليلها من المستقيم الحدودي (فوق أم تحت).

مثال 3 استعمال نظام متباينات خطية

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: كيف تكتب المتباينتين لتمثيل النظام ؟

[اكتب متباينة خطية تصف عدد عبوات المياه x وعدد أزواج الجوارب y؛ اكتب متباينة خطية أخرى تصف القيمة المطبقة على كل من x و y.]

س: هل يمكن اعتبار كل مجموعة الحل المتمثلة بمنطقة التداخل المظللة حلًا مقبولًا ؟

[كلا؛ يقطع المستقيمان الحدوديان المحور x، حيث يصبح عدد السلع المشتراة سالبًا، وهو أمر غير ممكن.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

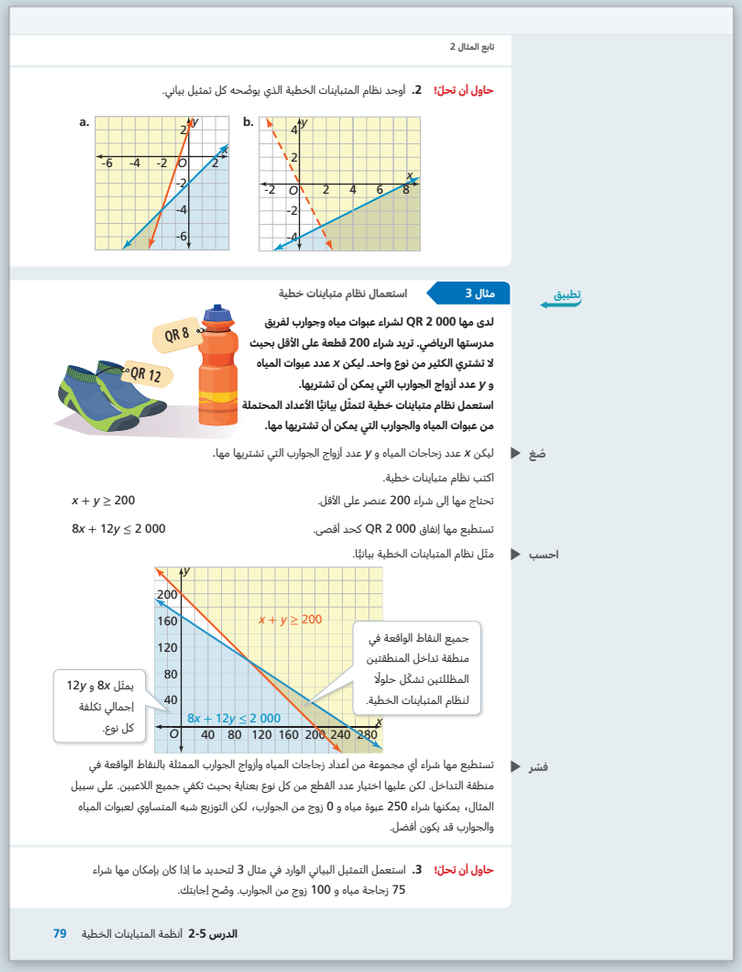
3. نعم؛ يعدّ الزوج المرتب $(100, 75)$ حلًا للمتباينتين لأنه يقع في منطقة التداخل المظللة.

استعمل مع **المثال 3**

عادات التفكير

عمّم ماذا تمثل المنطقة المظللة وغير المتداخلة ؟

[أجزاء من التمثيل البياني التي هي حلول لإحدى المتباينتين وليست حلولًا للمتباينة الخطية الثانية.]



تابع المثال 2

حاول أن تحل! 2. أوجد نظام المتباينات الخطية الذي يوضّحه كل تمثيل بياني.

a. b.

تطبيق

مثال 3 استعمال نظام متباينات خطية

لدى مها QR 2 000 لشراء عبوات مياه وجوارب لفريق مدرستها الرياضي. تريد شراء 200 قطعة على الأقل بحيث لا تشتري الكثير من نوع واحد. ليكن x عدد عبوات المياه و y عدد أزواج الجوارب التي يمكن أن تشتريها.

استعمل نظام متباينات خطية لتمثّل بيانيًا الأعداد المحتملة من عبوات المياه والجوارب التي يمكن أن تشتريها مها.

QR 8 QR 12

ضع ليكن x عدد زجاجات المياه و y عدد أزواج الجوارب التي تشتريها مها.

اكتب نظام متباينات خطية.

تحتاج مها إلى شراء 200 عنصر على الأقل. $x + y \geq 200$

تستطيع مها إنفاق QR 2 000 كحد أقصى. $8x + 12y \leq 2\,000$

احسب مثّل نظام المتباينات الخطية بيانيًا.

$x + y \geq 200$

$8x + 12y \leq 2\,000$

جميع النقاط الواقعة في منطقة تداخل المنطقتين المظللتين تشكّل حلولًا لنظام المتباينات الخطية.

يمثل $8x$ و $12y$ إجمالي تكلفة كل نوع.

فسّر تستطيع مها شراء أي مجموعة من أعداد زجاجات المياه وأزواج الجوارب الممثلة بالنقاط الواقعة في منطقة التداخل. لكن عليها اختيار عدد القطع من كل نوع بعناية بحيث تكفي جميع اللاعبين. على سبيل المثال، يمكنها شراء 250 عبوة مياه و 0 زوج من الجوارب، لكن التوزيع شبه المتساوي لعبوات المياه والجوارب قد يكون أفضل.

حاول أن تحل! 3. استعمل التمثيل البياني الوارد في مثال 3 لتحديد ما إذا كان بإمكان مها شراء 75 زجاجة مياه و 100 زوج من الجوارب. وضّح إجابتك.

الدرس 5-2 أنظمة المتباينات الخطية 79

تعزيز المهارات اللغوية (استعمل مع **المثال 3**)

الكتابة **مستوى 2** اطلب إلى الطلاب كتابة إجابات للأسئلة الآتية في دفاترهم، وذلك للربط بين فهمهم لخاصية التوزيع ومعنى كلمة "توزيع".

س: اكتب مثالًا على خاصية التوزيع. وضّح كيف يوضّح مثالك معنى "توزيع".

[قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : $5(x - 9) = 5x - 45$؛ يتم توزيع العدد 5 (باستعمال الضرب)، أو توزيعه بالتساوي على الحدين داخل القوسين.]

س: كيف استُعملت كلمة "توزيع" في المثال ؟

[بالرغم من أنه من المستحسن شراء العدد نفسه من كل نوع، إلا أن مها غير ملزمة بذلك.]

القراءة **مستوى 3** اطلب إلى الطلاب قراءة المثال حتى نهاية الجزء المتعلق بفقرة "صغ". الفت انتباه الطلاب إلى جملة "200 قطعة على الأقل" في نص المسألة وعند كتابة نظام المتباينات. اطلب إلى الطلاب إعادة قراءة الجملة الأولى.

س: هل تنص الجملة الأولى الواردة في نص المسألة على أن مها تستطيع إنفاق QR 2 000 كحد أقصى ؟

[كلا.]

س: عند كتابة نظام المتباينات، لماذا تم تحويل الجملة "لدى مها QR 2 000 لشراء" إلى "تستطيع مها إنفاق QR 2 000 كحد أقصى" ؟

[إذا كان لدى مها QR 2 000 لشراء سلع يعني أنها لا تستطيع إنفاق أكثر من ذلك. لذا يمكنها إنفاق QR 2 000 كحد أقصى.]

س: كيف تحول العبارتين "على الأقل" و"حد أقصى" إلى رموز جبرية ؟

["حد أقصى": $\leq$; "على الأقل": $\geq$]

ملخص المفهوم أنظمة المتباينات الخطية

س: كيف يساعد التمثيل البياني لنظام متباينات خطية عند إيجاد حلول النظام ؟

[يعطي التمثيل البياني تمثيلاً بصريًا لكل النقاط التي تحقق كل المتباينات في النظام.]

عبّر عن **فهمك**|طبّق **فهمك**

خطأ شائع

التمرين 7 قد يجد بعض الطلاب صعوبة في تمثيل المستقيم الحدودي بيانيًا عندما يكون معطى في الصورة $y = n$ أو الصورة $x = m$. ذكرهم بأن المستقيم الحدودي $y = n$ هو مستقيم أفقي يقطع المحور y وبأن المستقيم $x = m$ هو مستقيم رأسي يقطع المحور x.

الإجابات

1. المنطقة المظللة المتداخلة تحوي كافة الحلول الممكنة لنظام المتباينات الخطية.

2. (1 ,0) ليست حلا للمتباينة الخطية $y > 2x + 1$ إذن (1 ,0) ليست حلا لنظام المتباينات الخطية. هذه النقطة موجودة على المستقيم الحدودي للمتباينة $y > 2x + 1$ ولكن المستقيم الحدودي هو منقط (غير متصل) والنقاط التي تنتمي اليه ليست جزءًا من الحل.

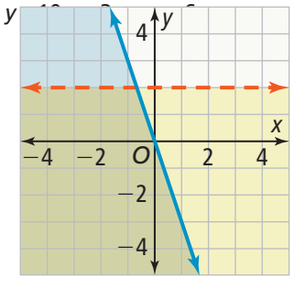
3. على الأقل متباينتين خطيتين.

4. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : الأفضل بواسطة التمثيل البياني. من السهولة استعمال التمثيل البياني لأن كل الحلول تبدو واضحة. أما محاولة وصف الحلول لنظام المتباينات الخطية لفظيًا فهو عمل معقد كثيرًا.

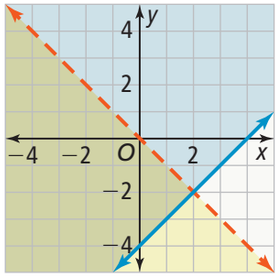
5. $y = 8x + 1$; $y = -3x + 4$

6. y

7.



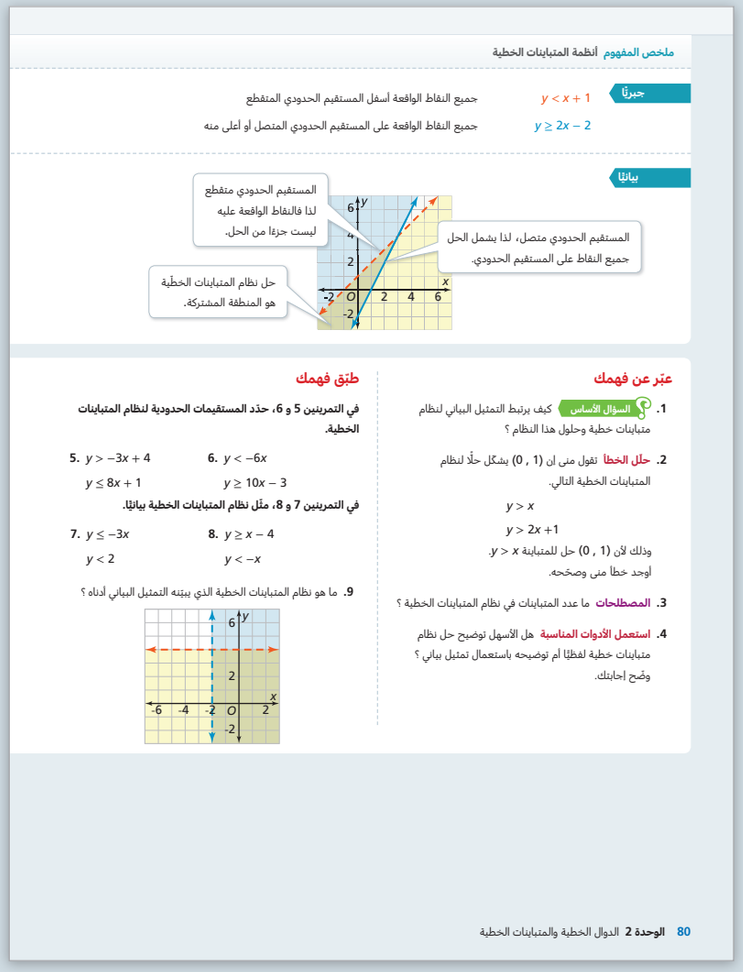
8.



9. $y < 4$
$x > -2$

10. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : وضعية من واقع الحياة لها عدة قيود من الأفضل توصيفها بنظام متباينات خطية. أما الوضعية من واقع الحياة التي لها قيدًا واحدًا فمن الأفضل توصيفها بمتباينة خطية واحدة.

11. استعمل أحمد الرمز الخطأ عند كتابة المتباينة الخطية الثانية إذن بدلا من $y < -2x + 2$ يجب كتابته $y > -2x + 2$



ملخص المفهوم أنظمة المتباينات الخطية

جبريًا

$y < x + 1$ جميع النقاط الواقعة أسفل المستقيم الحدودي المتقطع

$y \geq 2x - 2$ جميع النقاط الواقعة على المستقيم الحدودي المتصل أو أعلى منه

بيانيًا

المستقيم الحدودي متقطع لذا فالنقاط الواقعة عليه ليست جزءًا من الحل.

المستقيم الحدودي متصل، لذا يشمل الحل جميع النقاط على المستقيم الحدودي.

حل نظام المتباينات الخطية هو المنطقة المشتركة.

عبّر عن فهمك

1. السؤال الأساس كيف يرتبط التمثيل البياني لنظام متباينات خطية وحلول هذا النظام ؟
2. حلل الخطأ تقول منى ان (1 , 0) يشكل حلًا لنظام المتباينات الخطية التالي.
$y > x$
$y > 2x + 1$
وذلك لأن (1 , 0) حل للمتباينة $y > x$.
أوجد خطأ منى وصححه.
3. المصطلحات ما عدد المتباينات في نظام المتباينات الخطية ؟
4. استعمل الأدوات المناسبة هل الأسهل توضيح حل نظام متباينات خطية لفظيًا أم توضيحه باستعمال تمثيل بياني ؟ وضّح إجابتك.

طبّق فهمك

في التمرينين 5 و 6، حدد المستقيمات الحدودية لنظام المتباينات الخطية.

5. $y > -3x + 4$
$y \leq 8x + 1$

6. $y < -6x$
$y \geq 10x - 3$

في التمرينين 7 و 8، مثل نظام المتباينات الخطية بيانيًا.

7. $y \leq -3x$
$y < 2$

8. $y \geq x - 4$
$y < -x$

9. ما هو نظام المتباينات الخطية الذي يمثله التمثيل البياني أدناه ؟

80 الوحدة 2 الدوال الخطية والمتباينات الخطية

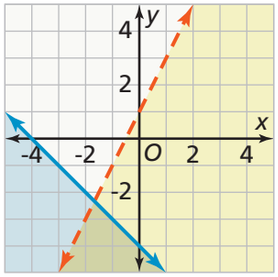
12. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : كل نظام من المتباينتين الخطيتين يكون مشابهًا لنظام المعادلتين الخطيتين لأن حلولها تتحدد من حيث تتقاطع التمثيلات البيانية للمعادلتين أو من حيث تتداخل مناطق الحلول للمتباينتين الخطيتين. يوجد عدد لانهائي من الحلول إذا كانت المعادلتان في نظام واحد متكافئتين. يمكن أن يوجد عدد لانهائي من الحلول إذا كانت المتباينتان في نظام واحد متكافئتين أو غير متكافئتين.

13. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : تبين هذه المتباينات الخطية أن كل قيم x و y يجب أن تساوي 0 أو تكون موجبة، لذا تكون حدود الحلول في الربع الأول. إذن يجب إضافة $x \geq 0$ و $y \geq 0$

14. نعم يمكن ذلك. النظام: $y > x + 2$, $y < x - 2$, $y < x - 4$ ليس له حلول نظرًا لعدم وجود منطقة تتداخل فيها المستويات الثلاثة.

15. نعم. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : $y \leq 3$; $x \geq 1$; $x \leq 3$

16.



تدرَّب وحُل مسائل

دليل المهام

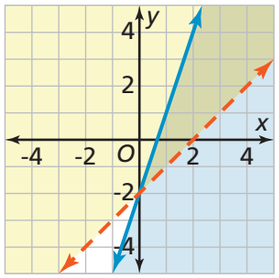
أساسي	متقدم
10-25, 28, 30, 32-37	10-15, 20-37

تحليل التمارين

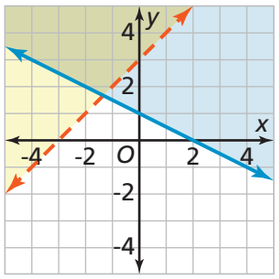
المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	16-27, 35	1
	37	2
2	28-30	1
	11	3
	38	4
3	10	1
	32-34	2
	13-14	3

الإجابات

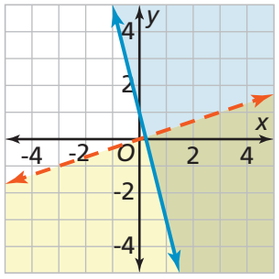
17.



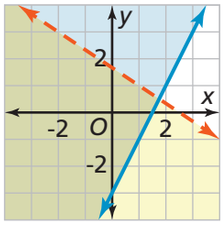
18.



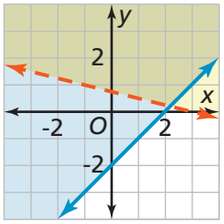
19.



20.



21.

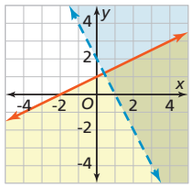


تدرَّب وحُل مسائل

عزِّز فهمك

10. ابحث عن العلاقات ما الفرق بين موقفين من الحياة اليومية أحدهما الوصف الأفضل له يكون باستعمال نظام متباينات خطية والآخر الوصف الأفضل له يكون باستعمال متباينة خطية واحدة ؟

11. حلّل الخطأ أوجد خطأ أحمد عند كتابة نظام المتباينات الخطية الممثّل في التمثيل البياني أدناه، ثم صحّح هذا الخطأ.



معادلة المستقيم الحدودي الأحمر هي $y = 0.5x + 1$
بما أن الخط متصل، نستعمل ≥ أو ≤.
معادلة المستقيم الحدودي الأزرق هي $y = -2x + 2$
بما أن المستقيم متقطع، نستعمل < أو >.

$y \leq 0.5x + 1$
$y < -2x + 2$

12. روابط في الرياضيات ما وجه الشبه والاختلاف بين نظام من متباينتين خطيتين في متغيرين ونظام من معادلتين خطيتين في متغيرين ؟

13. برِّر منطقيًّا في مثال 3، ليس للمتباينة الخطية معنى إلا في الربع الأول فقط. ما المتباينتان الخطيتان اللتان يمكنك إضافتهما إلى النظام لتبيّن ذلك ؟ وضّح إجابتك.

14. مهارات التفكير العليا هل يمكنك كتابة نظام من ثلاث المتباينتان الخطيتان ليس له حل ؟ وضّح إجابتك.

15. برِّر منطقيًّا هل يمكن أن تكوّن حلول نظام متباينات خطية منطقة مستطيلة الشكل ؟ إن كان ذلك ممكنًا، أعطِ مثالًا.

تدرَّب

في التمارين 16-27، مثّل نظام المتباينات الخطية بيانيًا.

انظر المثالين 1 و 3

16. $y < 2x + 1$
$y \leq -x - 4$

17. $y \leq 3x - 2$
$y > x - 2$

18. $y \geq -\frac{1}{2}x + 1$
$y > x + 3$

19. $y < \frac{1}{3}x$
$y \geq -4x + 1$

20. $2x + 3y < 5$
$y \geq 2x - 3$

21. $x + 4y > 3$
$x - y \leq 2$

22. $y > 0.3x + 2$
$y < -0.2x + 1$

23. $y \leq 0.25x - 4$
$y \geq -x - 3$

24. $y < -2x - 5$
$4x - y < 3$

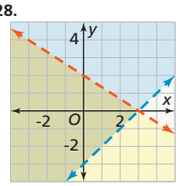
25. $-6x + 4y \geq 8$
$y < -x - 1$

26. $x > 1$
$y < 2x - 3$
$y > x$

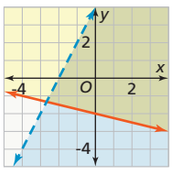
27. $y \leq -3x$
$y > -x - 2$
$y > 2$

في التمارين 28-31، أوجد نظام المتباينات الخطية المبيّن أدناه في كل تمثيل بياني. انظر المثالين 2 و 3

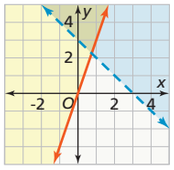
28.



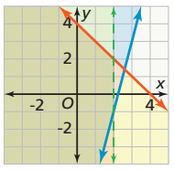
29.



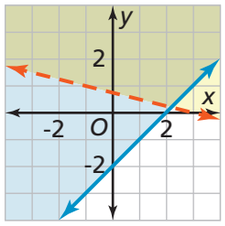
30.



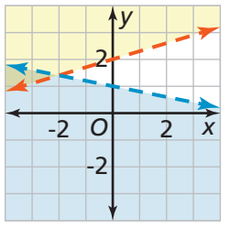
31.



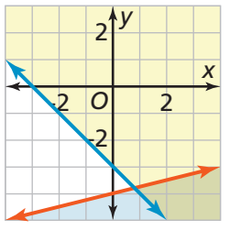
21.



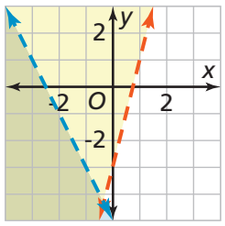
22.



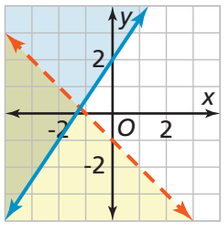
23.



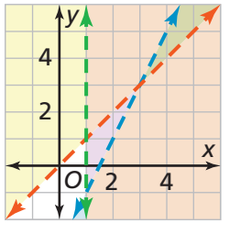
24.



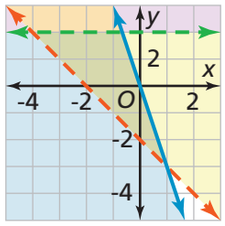
25.



26.



27.



28. $y < -\frac{2x}{3} + 2$
$y > x - 3$

29. $y < 2x + 4$
$y \geq -\left(\frac{1}{4}\right)x - 2$

30. $y \geq 3x$
$y > -x + 3$

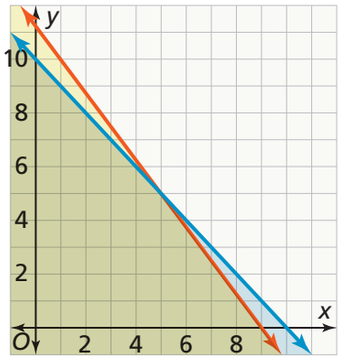
31. $y \leq -x + 4$
$y \geq 4x - 9$
$x < 2$

الإجابات

32. $x + y \le 10$

$5x + 4y \le 45$

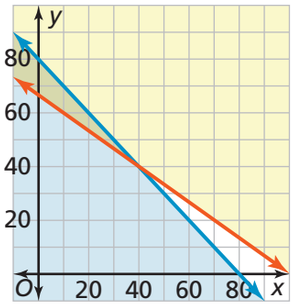
- 4 تذاكر من القسم A و 6 تذاكر من القسم B.
- 5 تذاكر من القسم A و 5 تذاكر من القسم B.
- 2 تذاكر من القسم A و 8 تذاكر من القسم B.



33. $x + y \le 80$

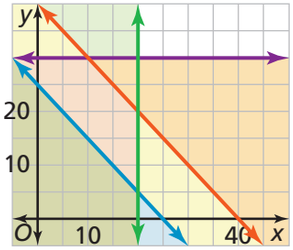
$2x + 3y \ge 200$ أو $40x + 60y \ge 4000$

أقل عدد من ساعات العمل 0 ساعة كعامل في البناء مع $66\frac{2}{3}$ ساعة كحارس ليلي.



34. $x + y \le 40$
$x \le 20$
$y \le 30$
$x + y \ge 25$

مع تعريف نظام المتباينات الخطية من خلال متباينة إضافية $x \ge y$ وهذا يقلل عدد الحلول الممكنة.



35. التمثيلان البيانيان لفاطمة ولمنال هما غير صحيحين. الخطوط الحدودية للمتباينتين الخطيتين في النظام المعطى لكل منهما ميل موجب، ولكن أحد المستقيمين الحدوديين يبيّن أن له ميلًا سالبًا.

36. $y > -x + 2$
$y \ge 4x$

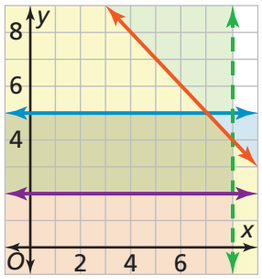
37. C

38. **الجزء A** نظام المتباينات الخطية: $x + y \le 12$

$y \ge 2$, $x < 8$

$y \le 5$

الجزء B نعم. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : تبيّن صورة الساعة أن بإمكان ناصر الجري بين 2 ساعة و 5 ساعات كل أسبوع ضمنًا. القيمة الصغرى لساعات الجري أسبوعيًا هي 2 ساعة.



تدرَّب وحُل مسائل

طبّق

32. **فكّر وناقش في الحل** تريد مجموعة مكوّنة من 10 أشخاص على الأكثر شراء تشكيلة من التذاكر لمقاعد في القسم A والقسم B لحضور مباراة في كرة القدم، على ألا تزيد تكلفة التذاكر عن QR 450.

مثّل بيانيًا نظام المتباينات الخطية الذي يمثّل تشكيلة التذاكر التي يمكن لهذه المجموعة شراءها.

اذكر ثلاث تشكيلات ممكنة تستطيع المجموعة شراءها.

33. **نمذج** يتقاضى راشد QR 40 في الساعة من عمله في البناء نهارًا و QR 60 في الساعة من عمله حارسًا ليليًا. هدف راشد هو تحصيل QR 4 000 على الأقل في نهاية الشهر شرط ألا يعمل أكثر من 80 ساعة. اكتب نظام متباينات خطية ذات متغيرين يمثّل عدد الساعات التي يمكن أن يعملها راشد في كل مهنة لتحقيق هدفه. مثّل هذا النظام بيانيًا ثم أوجد أقل عدد من الساعات يمكن أن يعملها راشد ويحقق هدفه في الوقت نفسه.

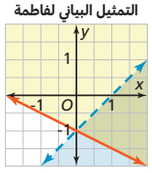
34. **فكّر وناقش في الحل** تخيط خديجة قبعات وأوشحة لبيعها في معرض فني. يمكنها صنع 20 قبعة و 30 وشاحًا كحد أقصى قبل حلول موعد افتتاح المعرض، ولكن لا يمكنها صنع أكثر من 40 قطعة في الإجمال. اكتب نظام متباينات خطية يبيّن الأعداد الممكنة من القبعات والأوشحة التي يمكن أن تحضرها خديجة إلى المعرض إذا أرادت إحضار 25 قطعة على الأقل، ومثّل هذا النظام بيانيًا. كيف تتغير الحلول إذا صنعت خديجة قبعات أكثر من الأوشحة ؟ وضّح إجابتك.

35. **ابن الحجج الرياضية** مثّلت كل من فاطمة ومنال نظام المتباينات الخطية التالي بيانيًا.

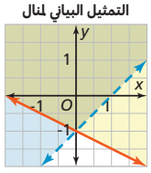
$y \ge \frac{1}{2}x - 1$
$x - y > 1$

أي تمثيل بياني هو الصحيح ؟ وضّح إجابتك.

التمثيل البياني لفاطمة

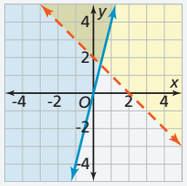


التمثيل البياني لمنال



تدرَّب على اختبار

استعمل التمثيل البياني التالي لحل التمرينين 36 و 37



36. املأ الفراغات لإكمال نظام المتباينات الخطية الموضّح في التمثيل البياني.

y ___ $-x +$ ___

y ___ $4x$

37. **اختبار SAT/ACT** أي مما يلي حل لنظام المتباينات الخطية الموضّح في التمثيل البياني ؟

Ⓐ (3 , 2)　　Ⓑ (−3 , 2)

Ⓒ (−1 , 4)　　Ⓓ (1 , −4)

38. **مهمة أدائية** وضع ناصر جدولًا أسبوعيًا لممارسة رياضتي الجري والسباحة. لكن لا يمكنه تخصيص أكثر من 12 ساعة في الأسبوع لممارسة الرياضة. يوضّح الشكل أدناه مقادير الزمن التي يريد قضاءها في ممارسة الجري والسباحة.

الجزء A اكتب نظام متباينات خطية لتمثيل هذا الموقف.

الجزء B مثّل نظام المتباينات بيانيًا. هل هناك حد أدنى لعدد الساعات التي يجب أن يقضيها ناصر في الجري ؟ وضّح إجابتك.

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم. تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس. كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليمًا متمايزًا يستفيد منه الطلاب، كلّ بحسب مستواه.

سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

الدوال الخطية والمتباينات الخطية

مراجعة الوحدة

تقديم السؤال الأساس

كيف يمكن استعمال الدوال والمتباينات الخطية لنمذجة المواقف وحل المسائل ؟

عند كتابة الطلاب للإجابة على السؤال الأساس، شجعهم على تضمينها أمثلة تدعمها. ابحث عن الحقائق الآتية عند مناقشة الإجابات.

- تصف الدالة علاقة، بحيث ترتبط كل قيمة مدخلة بقيمة مخرجة واحدة فقط.
- عندما يكون ناتج قسمة التغير في قيمة y على التغير في قيمة x ثابتًا، تكون الدالة خطية ويكون تمثيلها البياني مستقيمًا.
- يمكن استعمال الدوال الخطية لتوقع قيمة متغير واحد كالمسافة، بمعلومية قيمة متغير آخر كالزمن.
- تبين أنظمة المتباينات الخطية مجال قيم المتغيرات للحل.

الإجابات

2. نظام متباينات خطية

3. المتباينة الخطية ذات المتغيرين

4. حل نظام متباينات خطية

5. الدالة الخطية

6. المجال: $\{0, 2, 4, 5\}$؛ المدى: $\{1, 3, 4\}$؛ العلاقة دالة لأن لكل مدخلة مخرجة واحدة فقط.

7. المجال: $\{4, 0, 2, -1, -5\}$؛ المدى: $\{3, -2, 0, 2, -5\}$؛ العلاقة دالة لأن لكل مدخلة مخرجة واحدة فقط.

8. لا يمكن أن تكون كل الأعداد الحقيقية مجالاً منطقيًا لأن عدد مللترات المياه لا يمكن أن يكون عددًا سالبًا.

9. لا يمكن أن تكون كل الأعداد الحقيقية مجالًا منطقيًّا لأن عدد الصفحات المطبوعة لا يمكن أن يكون عددًا سالبًا.

10. القيود على المجال: أن يكون أكبر من الصفر وأقل من ارتفاع منطقي ما.

11. القيود على المجال: أن يكون أكبر من الصفر وأقل من قيمة السيارة الجديدة.

الوحدة 2

مراجعة الوحدة

السؤال الأساس للوحدة

1. كيف يمكن استعمال الدوال والمتباينات الخطية لنمذجة المواقف وحل المسائل ؟

مراجعة المصطلحات

اختر المصطلح الصحيح لإكمال كل جملة.

- الدالة الخطية
- حل نظام متباينات خطية
- المتباينة الخطية ذات المتغيرين
- نظام متباينات خطية

2. يتكون _____ من متباينتين خطيتين أو أكثر.
3. _____ هي متباينة لها نفس صورة المعادلة الخطية ولكنها تتضمن رمز متباينة بديلًا عن رمز المساواة.
4. _____ هو مجموعة الأزواج المرتبة التي تجعل جميع المتباينات صحيحة.
5. تُمثل _____ بيانيًا بمستقيم.

مراجعة المفاهيم والمهارات

الدرس 2-1 العلاقات والدوال

مراجعة سريعة

الدالة هي علاقة ترتبط فيها مدخلة أو عنصر في المجال بمخرجة واحدة أو بعنصر واحد فقط في المدى.

مثال

حدّد المجال والمدى لمجموعة الأزواج المرتبة الموضّحة أدناه. هل تمثّل الأزواج المرتّبة دالة ؟ برّر إجابتك.

x	−2	0	3	5	9
y	−3.5	−1.5	1.5	3.5	7.5

المجال هو {9, 5, 3, 0, −2}.

المدى هو {7.5, 3.5, 1.5, −1.5, −3.5}.

يرتبط كل عنصر من المجال بعنصر واحد فقط من المدى، لذا فإن الأزواج المرتّبة تمثّل دالة.

تدرّب وحلّ مسائل

في التمرينين 6 و 7، حدّد المجال والمدى لكل علاقة أدناه. هل تمثّل العلاقة دالة ؟ وضّح إجابتك.

6. {(4 , 1), (2 , 3), (0 , 4), (5 , 3)}

7.

x	−1	−5	4	0	2
y	−5	−2	0	3	2

برز منطقيًا في التمرينين 8 و 9، هل يتضمن المجال المنطقي كل الأعداد الحقيقية ؟ وضّح إجابتك.

8. شرب شخص n مللتر من زجاجة مياه غازية سعتها 590 مللتر.

9. طبعت طابعة p من الصفحات بمعدل 25 صفحة في الدقيقة.

ابن الحجج الرياضية في التمرينين 10 و 11، ما القيود على المجال، إن وجدت ؟ برّر إجابتك.

10. أقلعت طائرة وظلّت ترتفع بسرعة 1000 ft/min مدة m دقيقة إلى أن بلغت ارتفاع المسار المقرر لها.

11. تتناقص قيمة سيارة ثمنها d ريال بنسبة 10% تقريبًا كل سنة.

الوحدة 2 مراجعة الوحدة 83

مراجعة الوحدة 2

الإجابات

12. {−9, −5, −1, 3, 7}

13. {18, 12, 6, 0, −6}

14. تسعيرة الصفحة الواحدة 300 QR؛ مقدار المبلغ الثابت 140 QR.

15. $y = 340(5.5) + 720 = \text{QR } 2\,590$

16. إزاحة وحدتين إلى الأسفل.

17. إزاحة 5 وحدات إلى الأعلى.

18. التمثيل البياني للدالة g هو إزاحة التمثيل البياني للدالة f بمقدار 3 وحدات إلى اليمين.

19. التمثيل البياني للدالة g هو تمدد رأسي للدالة f بمعامل تمدد يساوي 2.

20. تتضاعف كل قيمة.

21. $g(x) = 160x + 320$

الدرس 2-2 الدوال الخطية

مراجعة سريعة

الدالة الخطية هي دالة تمثيلها البياني خط مستقيم، وتمثّل علاقة خطية بين متغيرين. تكتب الدالة الخطية بمعلومية **رمز الدالة**: $f(x) = mx + b$ و $f(x)$ تقرأ "f عند x".

مثال

تفرض شركة سيارات أجرة مبلغًا أوليًا قيمته 14 QR يضاف إليه 3.50 QR عن كل ميل تقطعه السيارة. اكتب دالة خطية يمكن استعمالها لتحديد تكلفة رحلة مسافتها x ميل. أوجد تكلفة رحلة مسافتها 4 أميال.

لتكن d مسافة الرحلة.

المبلغ الأولي + تكلفة الميل × المسافة = تكلفة الرحلة

$f(d) = 3.50d + 14$

استعمل الدالة لإيجاد تكلفة رحلة بسيارة الأجرة مسافتها 4 miles.

$f(4) = (3.50)(4) + 14$

$= 28$

إذن، تكلفة رحلة بسيارة الأجرة مسافتها 4 أميال هي 28 QR.

تدرّب وحل مسائل

في التمرينين 12 و 13، أوجد قيمة الدالة عند كل عنصر من عناصر المجال {4, 2, 0, −2, −4}.

12. $f(x) = 2x - 1$ **13.** $f(t) = -3(t - 2)$

14. فكّر وناقش في الحل تسعّر شركة للتصميم الجرافيكي المشاريع التي تنفذها على أساس التكلفة لكل صفحة بالإضافة إلى مبلغ ثابت تتقاضاه الشركة مقابل إجراءات إعداد المشروع. بيّن الجدول أدناه إيرادات الشركة الناتجة عن تنفيذ مشاريعها الأربعة الأخيرة. أوجد تسعيرة الصفحة الواحدة ومقدار المبلغ الثابت.

التكلفة (QR)	740	1 340	1 940	2 540
عدد الصفحات	2	4	6	8

15. استعمل البنية يعمل أحمد في صيانة الحواسيب ويتقاضى أجره بالساعة كما يبيّن الجدول أدناه. اكتب دالة خطية للبيانات الواردة في الجدول. إذا استغرقت صيانة أحد الحواسيب 5.5 ساعة وكانت تكلفة قطع الغيار 720 QR، أوجد التكلفة الإجمالية.

عدد الساعات	1	1.5	2	2.5
الأجرة (QR)	340	510	680	850

الدرس 2-3 تحويل الدوال الخطية

مراجعة سريعة

ان **تحويل** دالة خطية f ينقل كل نقطة من تمثيلها البياني إلى موقع جديد. تحرك **الإزاحات** كل نقاط التمثيل البياني المسافة نفسها أفقيًا أو رأسيًا أو كلاهما. يؤثر **التمدد والتضيّق** في التمثيلات البيانية أفقيًا أو رأسيًا.

مثال

لدينا الدالة $f(x) = 2x - 1$. إذا كانت $g(x) = (2x - 1) + 3$، قارن بين التمثيل البياني للدالة g والتمثيل البياني للدالة f.

التمثيل البياني للدالة g هو إزاحة للتمثيل البياني للدالة f بمقدار 3 وحدات إلى الأعلى.

تدرّب وحل مسائل

في التمرينين 16 و 17، إذا كانت لدينا الدالة $f(x) = x$، كيف تؤثر إضافة ثابت إلى مَخرجة الدالة f على تمثيلها البياني ؟

16. $f(x) = x - 2$ **17.** $f(x) = x + 5$

في التمرينين 18 و 19، إذا كانت لدينا الدالة $f(x) = 4x - 5$، قارن بين التمثيل البياني للدالة g و التمثيل البياني للدالة f.

18. $g(x) = 4(x - 3) - 5$ **19.** $g(x) = 2(4x - 5)$

20. بزر منطقيًا إذا كانت لدينا الدالة $f(x) = -3x + 9$، كيف يؤثر ضرب مَخرجة الدالة f في 2 على الميل والمقطع y للتمثيل البياني ؟

21. نمذج يتقاضى مركز الخدمات في أحد الفنادق مبلغ 160 QR في الساعة مقابل استئجار حاسوب بالإضافة إلى تأمين الزامي مقداره 260 QR. يمكن نمذجة التكلفة الإجمالية لاستئجار حاسوب بالدالة الخطية $f(x) = 160x + 260$. كيف تتغير المعادلة إذا قرّر المركز زيادة مبلغ التأمين بمقدار 60 QR ؟

84 الوحدة 2 الدوال الخطية والمتباينات الخطية

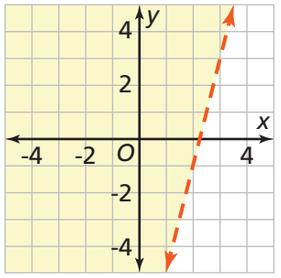
الإجابات

22. نعم

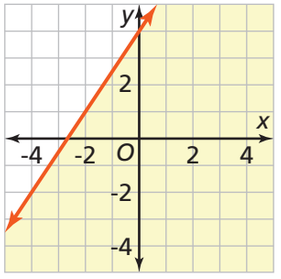
23. كلا

24. نعم

25.

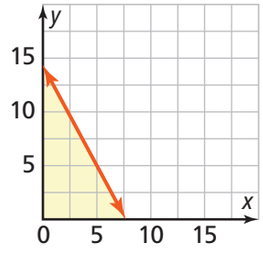


26.

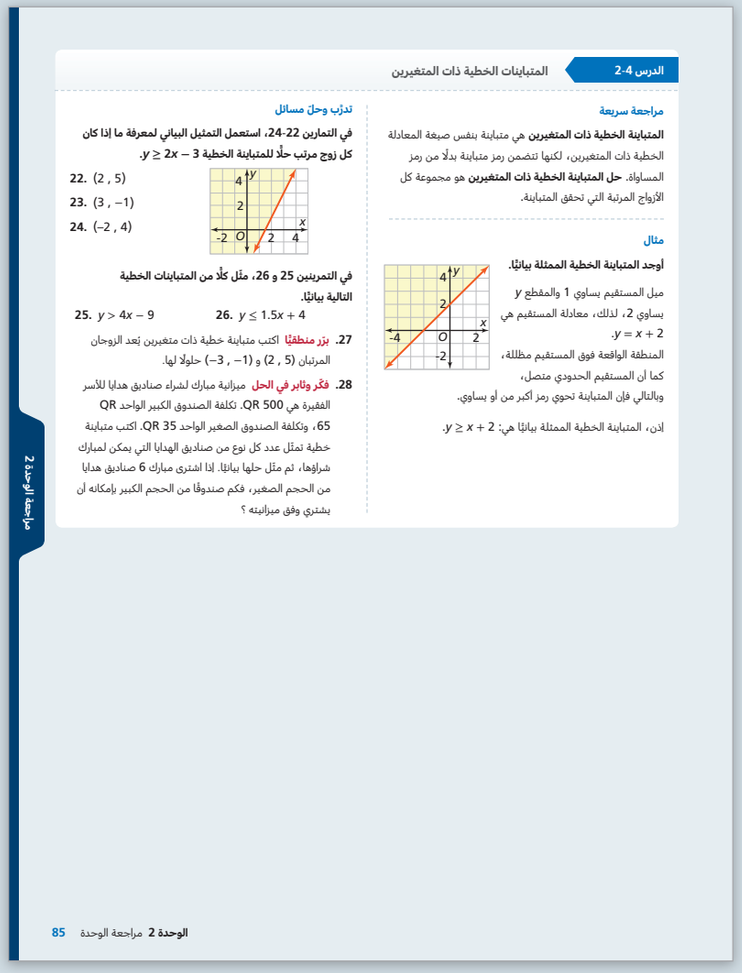


27. قد تتنوع الإجابات. نموذج إجابة : $y < x + 4$

28. $65x + 35y \leq 500$



4 صناديق هدايا من الحجم الكبير



الدرس 2-4 المتباينات الخطية ذات المتغيرين

مراجعة سريعة

المتباينة الخطية ذات المتغيرين هي متباينة بنفس صيغة المعادلة الخطية ذات المتغيرين، لكنها تتضمن رمز متباينة بدلًا من رمز المساواة. **حل المتباينة الخطية ذات المتغيرين** هو مجموعة كل الأزواج المرتبة التي تحقق المتباينة.

مثال

أوجد المتباينة الخطية الممثلة بيانيًا.

ميل المستقيم يساوي 1 والمقطع y يساوي 2، لذلك، معادلة المستقيم هي $y = x + 2$.
المنطقة الواقعة فوق المستقيم مظللة، كما أن المستقيم الحدودي متصل، وبالتالي فإن المتباينة تحوي رمز أكبر من أو يساوي.

إذن، المتباينة الخطية الممثلة بيانيًا هي: $y \geq x + 2$.

تدرّب وحلّ مسائل

في التمارين 22-24، استعمل التمثيل البياني لمعرفة ما إذا كان كل زوج مرتب حلًا للمتباينة الخطية $y \geq 2x - 3$.

22. (2 , 5)

23. (3 , −1)

24. (−2 , 4)

في التمرينين 25 و 26، مثّل كلًا من المتباينات الخطية التالية بيانيًا.

25. $y > 4x - 9$

26. $y \leq 1.5x + 4$

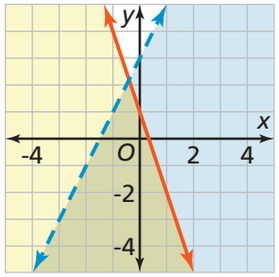
27. برز منطقيًا اكتب متباينة خطية ذات متغيرين يُعد الزوجان المرتبان (5 , 2) و (−1 , −3) حلولًا لها.

28. فكّر وثابر في الحل ميزانية مبارك لشراء صناديق هدايا للأسر الفقيرة هي 500 QR. تكلفة الصندوق الكبير الواحد QR 65، وتكلفة الصندوق الصغير الواحد 35 QR. اكتب متباينة خطية تمثّل عدد كل نوع من صناديق الهدايا التي يمكن لمبارك شراؤها، ثم مثّل حلها بيانيًا. إذا اشترى مبارك 6 صناديق هدايا من الحجم الصغير، فكم صندوقًا من الحجم الكبير بإمكانه أن يشتري وفق ميزانيته ؟

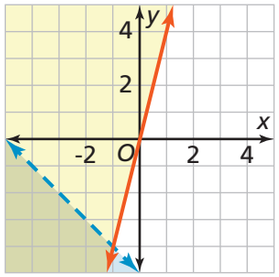
مراجعة الوحدة 2

الإجابات

29.

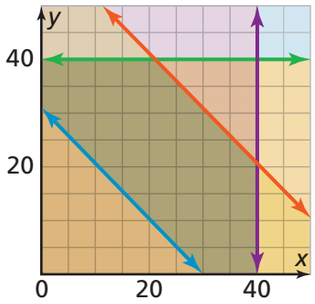


30.

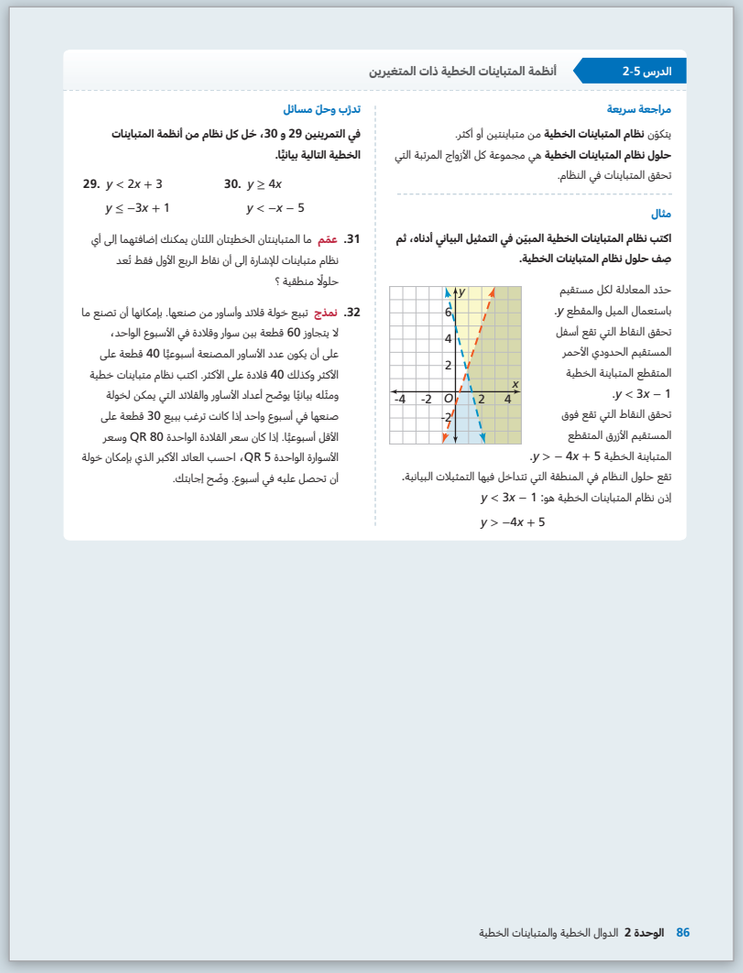


31. $x \geq 0, y \geq 0$

32.
$x + y \leq 60$
$x + y \geq 30$
$x \geq 0$
$x \leq 40$
$y \geq 0$
$y \leq 40$



العائد الأكبر عندما تبيع خولة 40 قلادة و 20 سوارًا، أي 900 QR



الدرس 2-5 أنظمة المتباينات الخطية ذات المتغيرين

مراجعة سريعة

يتكوّن **نظام المتباينات الخطية** من متباينتين أو أكثر.

حلول نظام المتباينات الخطية هي مجموعة كل الأزواج المرتبة التي تحقق المتباينات في النظام.

مثال

اكتب نظام المتباينات الخطية المبيّن في التمثيل البياني أدناه، ثم صِف حلول نظام المتباينات الخطية.

حدّد المعادلة لكل مستقيم باستعمال الميل والمقطع y.

تحقق النقاط التي تقع أسفل المستقيم الحدودي الأحمر المتقطع المتباينة الخطية $y < 3x - 1$.

تحقق النقاط التي تقع فوق المستقيم الأزرق المتقطع المتباينة الخطية $y > -4x + 5$.

تقع حلول النظام في المنطقة التي تتداخل فيها التمثيلات البيانية.

إذن نظام المتباينات الخطية هو: $y < 3x - 1$

$y > -4x + 5$

تدرّب وحلّ مسائل

في التمرينين 29 و 30، حُل كل نظام من أنظمة المتباينات الخطية التالية بيانيًا.

29. $y < 2x + 3$
$y \leq -3x + 1$

30. $y \geq 4x$
$y < -x - 5$

31. عدم ما المتباينتان الخطيتان اللتان يمكنك إضافتهما إلى أي نظام متباينات للإشارة إلى أن نقاط الربع الأول فقط تُعد حلولًا منطقية ؟

32. نمذج تبيع خولة قلائد وأساور من صنعها. بإمكانها أن تصنع ما لا يتجاوز 60 قطعة بين سوار وقلادة في الأسبوع الواحد، على أن يكون عدد الأساور المصنعة أسبوعيًا 40 قطعة على الأكثر وكذلك 40 قلادة على الأكثر. اكتب نظام متباينات خطية ومثّله بيانيًا يوضح أعداد الأساور والقلائد التي يمكن لخولة صنعها في أسبوع واحد إذا كانت ترغب ببيع 30 قطعة على الأقل أسبوعيًا. إذا كان سعر القلادة الواحدة 80 QR وسعر الأسورة الواحدة 5 QR، احسب العائد الأكبر الذي بإمكان خولة أن تحصل عليه في أسبوع. وضّح إجابتك.

86 الوحدة 2 الدوال الخطية والمتباينات الخطية