الشرح الوافي

في الرياضيات

الصف التاسع / الفصل الأول

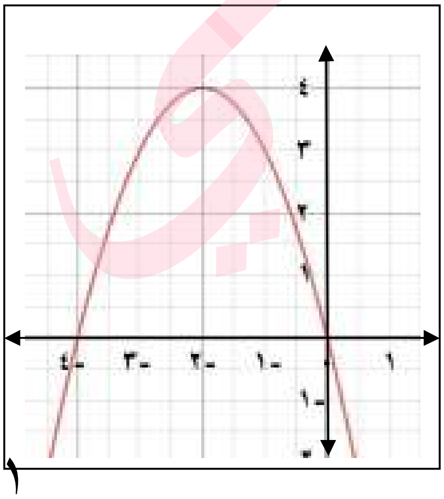
الوحدة الثالثة

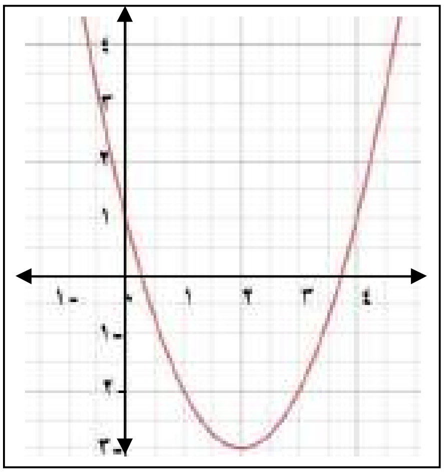
الاقتران التربيعي

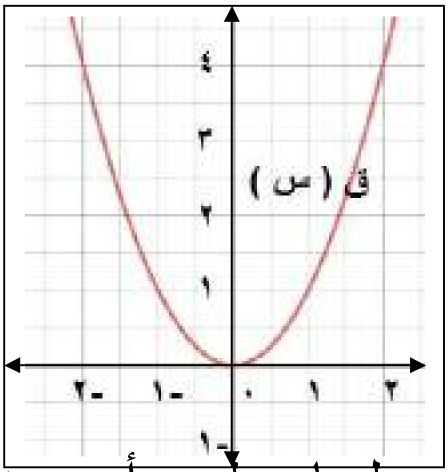
إعداد

الأستاذ : سليمان دلدوم أبو هبه

٠٧٩٥٠٠٠٥٧٣







الوحدة الثالثة	الاقتران التربيعي
٣ - ١	الاقتران التربيعي ورسم منحناه
٣ - ٢	أصفار الاقتران التربيعي
٣ - ٣	حل المعادلة التربيعية بيانياً
٣ - ٤	حل المعادلة التربيعية بالتحليل إلى العوامل
٣ - ٥	حل المعادلة التربيعية بإكمال المربع
٣ - ٦	حل المعادلة التربيعية بالقانون العام
مراجعة	
اختبار ذاتي	
الصورة القياسية للاقتران التربيعي	
كتابة الاقتران التربيعي بدلالة صفريه	
حل معادلة كسرية تؤول إلى معادلة تربيعية	

الاقتران التربيعي

- **الصيغ التي يكتب بها الاقتران التربيعي**

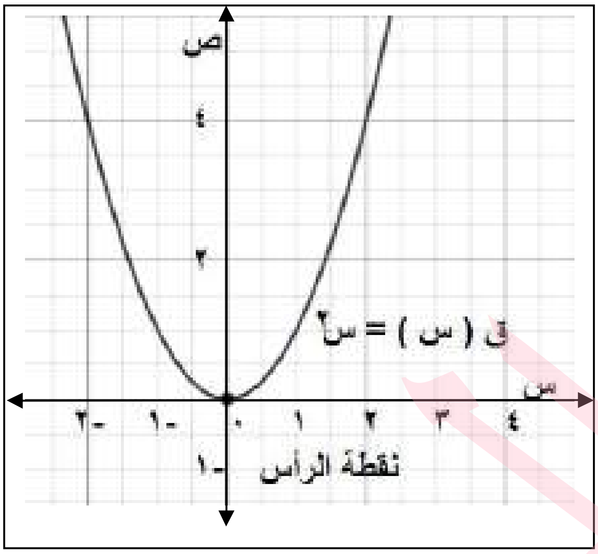
١) الصورة العامة : $ق(س) = أس^{٢} + بس + جـ \leftarrow أ \neq ٠$

٢) الصورة القياسية : $ق(س) = أ(س - د)^{٢} + هـ \leftarrow أ \neq ٠$

٣) $ق(س) = أ(س - م)(س - ن) \leftarrow أ \neq ٠ :$ م ، ن **الإحداثي السيني لنقط تقاطع منحنى الاقتران مع محور السينات**

- **لكن في البداية لنتعرف على الاقتران الإمام** $ق(س) = س^{٢}$

يسمى الاقتران $ق(س) = س^{٢}$ **بالاقتران الإمام للاقترانات التربيعية ، ومن ميزاته :**



١) منحنى الاقتران يمثل قطع مكافئ مفتوح للأعلى

٢) لا يوجد قيم سالبة لـ $ص = ق(س)$

٣) منحنى الاقتران متماثل حول محور السينات

فمثلاً عند س = ٢ ← ص = ٤

عند س = -٢ ← ص = ٤

٤) لمنحنى الاقتران نقطة مرجع أو نقطة رأس عند (٠ ، ٠)

٥) يمكن رسم منحنى الاقتران دون استخدام جدول

وسوف نتعرف لاحقا على أهمية الاقتران الإمام في رسم الاقترانات التربيعية

- **لاحظ في كل صيغ الاقتران التربيعي أن العامل المشترك بينها هو العدد الحقيقي** $أ \neq ٠$.

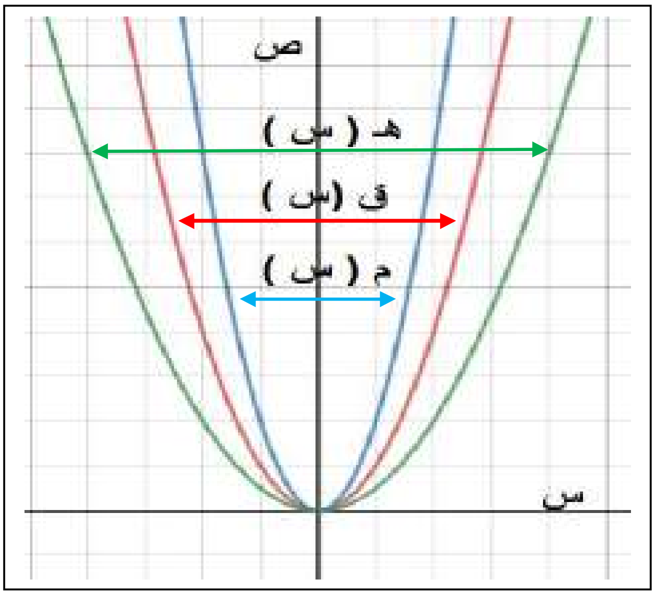
معامل $س^{٢}$ $(أ \neq ٠)$ **، في كل الصيغ السابقة تتحكم في درجة توسع (تضيق) منحنى الاقتران التربيعي ، وكذلك متى يكون الاقتران مفتوح للأعلى أو للأسفل كما يلي :**

١) $أ > ٠$ **المنحنى مفتوح للأعلى**  ، $أ < ٠$ **المنحنى مفتوح للأسفل** 

٢) إذا كان $-١ < أ < ١ \leftarrow (|أ| < ١)$ **، فإن منحنى الاقتران يكون أوسع من منحنى الاقتران الإمام** $ق(س) = س^{٢}$ **(يوجد توسع في فتحة الاقتران** $\longleftrightarrow$ **)**

٣) إذا كان أ ≻ −١ أو أ ≺ ١ ← (|أ| ≺ ١)، فإن منحنى الاقتران يكون أضيق من منحنى الاقتران الإمام ن(س) = س^٢ (يوجد تضيق في فتحة الاقتران ⟵ ⟶)

- **الشكل المجاور يبين توسع وتضيق الاقتران التربيعي بالنسبة للاقتران الإمام حيث :**



- ن(س) = س^٢ **الاقتران الإمام**

- م(س) = أس^٢ ← |أ| ≺ ١

- هـ(س) = أس^٢ ← |أ| ≻ ١

لقد تم شرح الاقتران التربيعي بصوره المختلفة ، بحيث كان :

القسم الأول : مخصص لطلبة الصف التاسع حسب الكتاب المقرر (الصورة العامة)

القسم الثاني : مخصص لشرح الاقتران التربيعي بالصورة القياسية

القسم الثالث : مخصص لشرح الاقتران التربيعي بدلالة صفري الاقتران

القسم الرابع : مخصص لحل معادلات كسرية تؤول إلى معادلات تربيعية

٣ ــ ١ الاقتران التربيعي ورسم منحناه

مراجعة :

- **العلاقة** : العلاقة من أ إلى ب : هي مجموعة الأزواج المرتبة (س،ص) التي مساقطها الأولى س تنتمي إلى المجموعة أ ، ومساقطها الثانية ص تنتمي إلى المجموعة ب .
- **الاقتران** : هو علاقة تربط بين مسقطيها س (المجال) و ص (المدى) ؛ بحيث يرتبط كل عن عنصر في المجال بصورة واحدة فقط في المدى .
- **الاقتران الخطي** : هو الاقتران الذي يكتب على الصورة $ق(س) = أس + ب$ حيث أ ، ب عددان حقيقيان ، $أ \neq ٠$.

سؤال : أي من الاقترانات الآتية اقتران خطي ؟

أ) $ق(س) = ٤س - ٧$ ب) $هـ(س) = ٢س - ٤$ جـ) $ل(س) = ٤س^{٢} + ٧س + ٢$

الحل :

لاحظ أنه في الاقترانين ق(س) ، هـ(س) العبارة المرتبطة في كل اقتران عبارة خطية ، لذلك فإن الاقترانين اقترانيين خطيين ، بينما في الاقتران ل(س) العبارة المرتبطة في الاقتران عبارة تربيعية ، مثل هذا الاقتران يسمى اقتراناً تربيعياً .

تعريف (١)

إذا كان $ق : ح \longrightarrow ح$ ، حيث $ق(س) = أس^{٢} + ب س + جـ$ ، وكانت أ ، ب ، جـ أعداداً حقيقية $أ \neq ٠$ ، فإن الاقتران ق يسمى اقتراناً تربيعياً ، ويسمى العدد أ معامل $س^{٢}$ ، ويسمى العدد ب معامل س ويسمى العدد جـ الحد المطلق ، وبتعبير عام تسمى أ ، ب ، جـ معاملات الاقتران التربيعي ق ، ومجال ق هو مجموعة الأعداد الحقيقية ح ، ومداه مجموعة صور المجال .

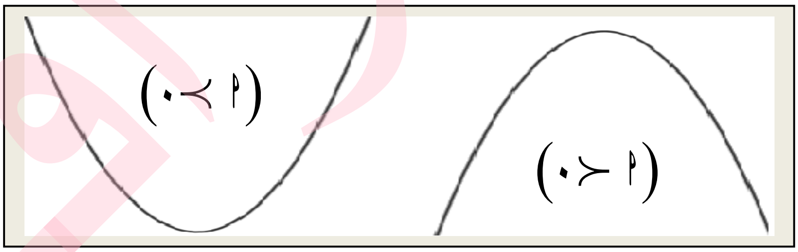
مثال (١) : شامل مثال (٣ – ١) + تدريب (٣ – ١)كتاب مدرسي ص٨٣

أي من الاقترانات الآتية اقتران تربيعي ؟ ثم اكتب معاملات الاقتران إذا كان تربيعي

الاقتران	تربيعي	ليس تربيعي	معامل $س^{٢}$	معامل س	الحد المطلق	السبب
$ق(س) = س^{٢} + ٣س + ٧$	✓		١	٣	٧	
$هـ(س) = ٢س - س^{٢}$ $هـ(س) = - س^{٢} + ٢س$	✓		-١	٢	٠	
$ع(س) = س + ٤$		✓				لا يمكن كتابته عل الصورة العامة للاقتران التربيعي
$د(س) = ٣س^{٣} + ٩س^{٢} + ١$		✓				لا يمكن كتابته عل الصورة العامة للاقتران التربيعي
$ق(س) = ٢س^{٢}$	✓		٢	٠	٠	
$هـ(س) = س^{\frac{١}{٢}} - س^{٢}، س \succ ٠$		✓				لا يمكن كتابته عل الصورة العامة للاقتران التربيعي
$ك(س) = س^{٢} - ٥س + \frac{١}{٢}$	✓		١	-٥	$\frac{١}{٢}$	

:: التمثيل البياني للاقتران التربيعي :

١) عند تمثيل منحنى الاقتران التربيعي بيانياً نحصل على أحد المنحنيات التالية :



مفتوح للأعلى مفتوح للأسفل

٢) من خلال تعريف (١) العدد الحقيقي أ (معامل $س^{٢}$) ، حيث أ ≠ ٠ ، إما أن يكون موجباً (أ ≻ ٠) ، أو سالباً (أ ≺ ٠) ، وأهمية إشارة معامل $س^{٢}$ أنها تحدد هل منحنى الاقتران ق مفتوح للأعلى أو للأسفل . (الشكل أعلاه)

٣) في الشكل المجاور النقطة

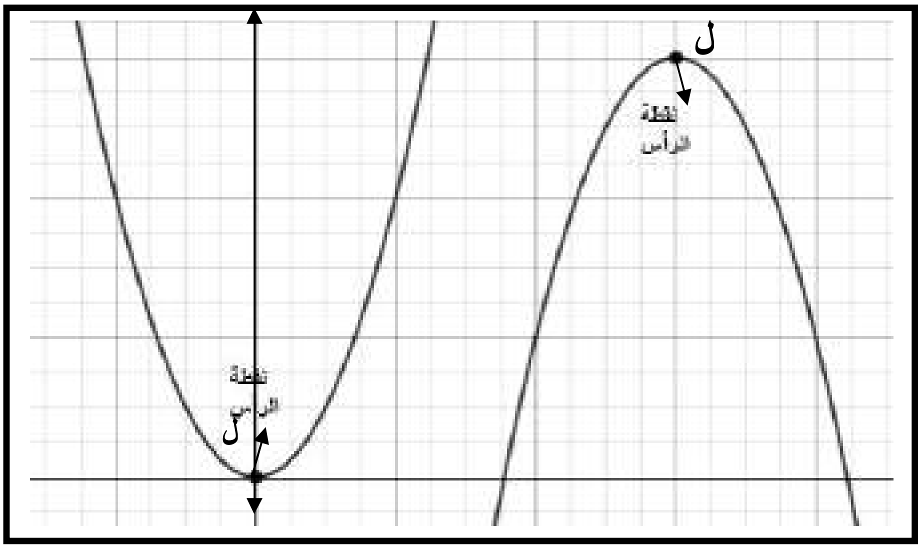
ل تسمى رأس الاقتران

وإحداثيات هذه النقطة

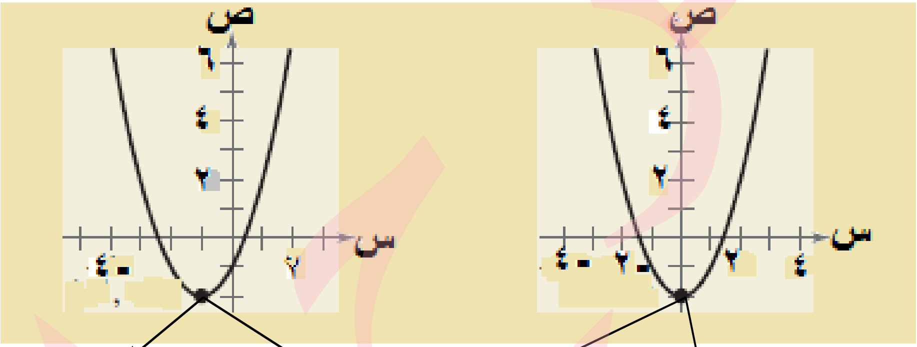
$$\left(\frac{-ب}{٢أ} ، ق\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$$

حيث أ معامل $(س^{٢})$ ،

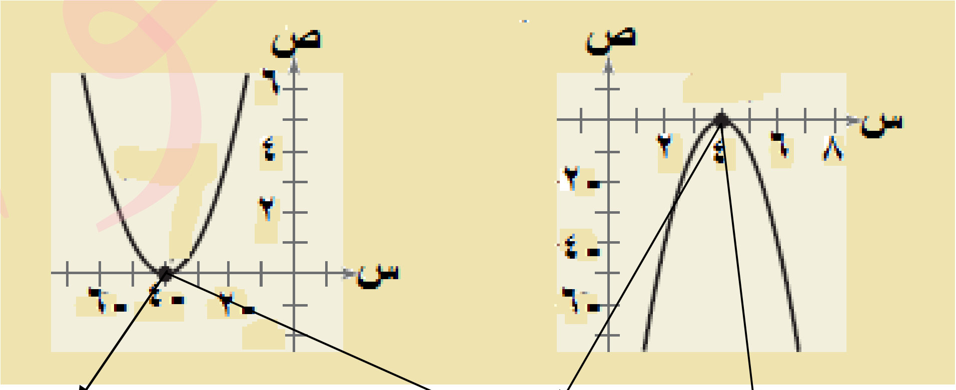
ب معامل (س)



مثال (٢) في الأشكال التالية اكتب إحداثيات نقطة رأس الاقتران :



الحل : (٠ ، -٢)   نقطة الرأس   (-١ ، -٢)



الحل : (٤ ، ٠)   نقطة الرأس   (-٤ ، ٠)

مثال (٣) : لكل من الاقترانات التربيعية التالية جد إحداثيات نقطة الرأس :

أ) $ن(س) = ٢س^{٢} + ٤س + ٣$ ب) $هـ(س) = -٢س^{٢} - ٦س$

جـ) $ل(س) = س^{٢} + ٤س - ١$ د) $ن(س) = س^{٢} + ٣$

الحل : أ) $ن(س) = ٢س^{٢} + ٤س + ٣$

أ (معامل $س^{٢}$) = ٢ ،، ب (معامل س) = ٤ ،،، جـ = (الحد المطلق (الثابت)) = ٣

إحداثيات نقطة الرأس $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، ن\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$

- الإحداثي السيني لنقطة الرأس ← $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٤}{٢ \times ٢} = \frac{-٤}{٤} = -١$
- الإحداثي الصادي لنقطة الرأس $ن\left(\frac{-ب}{٢أ}\right) = ن(-١)$ نعوض في قاعدة الاقتران

$ن(-١) = ٢(-١)^{٢} + ٤(-١) + ٣$

$= ٢ \times ١ + -٤ + ٣ = ٢ + -٤ + ٣ = ١$

- إذاً إحداثيات نقطة الرأس $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، ن\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right) = (-١ ، ١)$

ب) $هـ(س) = -٢س^{٢} - ٦س$

أ (معامل $س^{٢}$) = -٢ ،، ب (معامل س) = -٦ ،،، جـ = (الحد المطلق (الثابت)) = ٠

إحداثيات نقطة الرأس $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، هـ\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$

- الإحداثي السيني لنقطة الرأس ← $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-(-٦)}{٢ \times -٢} = \frac{٦}{-٤} = \frac{-٣}{٢}$
- الإحداثي الصادي لنقطة الرأس $هـ\left(\frac{-ب}{٢أ}\right) = هـ\left(\frac{-٣}{٢}\right)$ نعوض في قاعدة الاقتران

$هـ\left(\frac{-٣}{٢}\right) = -٢\left(\frac{-٣}{٢}\right)^{٢} - ٦\left(\frac{-٣}{٢}\right)$

$= -٢ \times \frac{٩}{٤} + \frac{١٨}{٢} = \frac{-٩}{٢} + \frac{١٨}{٢} = \frac{٩}{٢} = ٤و٥$

إذاً إحداثيات نقطة الرأس $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، هـ\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right) = (-١و٥ ، ٤و٥)$

جـ) $ل(س) = س^{٢} + ٤س - ١$

الحل :

أ (معامل س^{٢}) = ١ ،، ب (معامل س) = ٤ ،،، جـ = (الحد المطلق (الثابت)) = -١

إحداثيات نقطة الرأس $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، ل\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$

- **الإحداثي السيني لنقطة الرأس ←** $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٤}{٢\times١} = \frac{-٤}{٢} = -٢$
- **الإحداثي الصادي لنقطة الرأس** $ل\left(\frac{-ب}{٢أ}\right) = ل(-٢)$ **نعوض في قاعدة الاقتران**

$ل(-٢) = (-٢)^{٢} + ٤(-٢) - ١$
$= ٤ - ٨ - ١ = -٥$

- **إذاً إحداثيات نقطة الرأس** $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، ل\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right) = (-٢ ، -٥)$

د) $ق(س) = س^{٢} + ٣$

الحل :

أ (معامل س^{٢}) = ١ ،، ب (معامل س) = ٠ ،،، جـ = (الحد المطلق (الثابت)) = ٣

إحداثيات نقطة الرأس $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، ق\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$

- **الإحداثي السيني لنقطة الرأس ←** $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{٠}{٢\times١} = \frac{٠}{٢} = ٠$
- **الإحداثي الصادي لنقطة الرأس** $ق\left(\frac{-ب}{٢أ}\right) = ق(٠)$ **نعوض في قاعدة الاقتران**

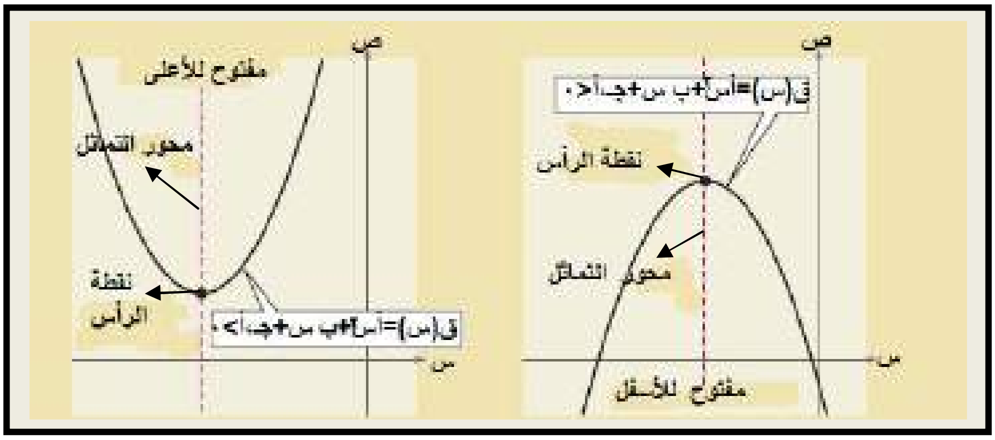
$ق(٠) = (٠)^{٢} + ٣$
$= ٠ + ٣ = ٣$

- **إذاً إحداثيات نقطة الرأس** $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، ق\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right) = (٠ ، ٣)$

٤) محور التماثل : هو المستقيم المار بنقطة الرأس لمنحنى الاقتران موازياً لمحور الصادات ،

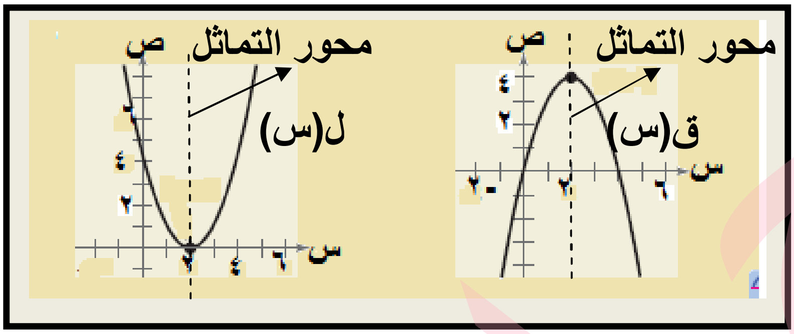
ومعادلته : س = الإحداثي السيني لنقطة الرأس ، رمزاً ← $\boxed{س = \frac{-ب}{٢أ}}$

الشكل المجاور يوضح موقع محور التماثل في منحنى الاقتران التربيعي



مثال (٤) :

في الشكل المجاور الذي يمثل منحنى كل من الاقترانين ق ، ل ، جد معادلة محور التماثل لكل منهما ،



الحل :

- **نقطة رأس منحنى الاقتران ق (س) : (٢ ، ٤) ، وبما أن معادلة محور التماثل هي :**

  س = الإحداثي السيني لنقطة الرأس ← $\boxed{س = ٢}$

- **نقطة رأس منحنى الاقتران ل (س) : (٢ ، ٠) ، وبما أن معادلة محور التماثل هي :**

  س = الإحداثي السيني لنقطة الرأس ← $\boxed{س = ٢}$

مثال (٥) :   في المثال (٣) : جد معادلة محور التماثل لكل اقتران :

الحل :   أ) $ق(س) = ٢س^{٢} + ٤س + ٣$

أ (معامل س²) = ٢ ،، ب (معامل س) = ٤ ،،، جـ = (الحد المطلق (الثابت)) = ٣

- **الإحداثي السيني لنقطة الرأس ←** $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٤}{٢×٢} = \frac{-٤}{٤} = -١$

- **معادلة محور التماثل : ←** $\boxed{س = -١}$

ب) $هـ(س) = -٢س^{٢} - ٦س$

أ (معامل س ^{٢}) = -٢ ،، ب (معامل س) = -٦ ،،، جـ = (الحد المطلق (الثابت)) = ٠

- **الإحداثي السيني لنقطة الرأس** ← $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-(-٦)}{٢\times -٢} = \frac{٦}{-٤} = \frac{-٣}{٢}$
- **معادلة محور التماثل :** ← $\boxed{س = \frac{-٣}{٢}}$

جـ) $ل(س) = س^{٢} + ٤س - ١$

أ (معامل س ^{٢}) = ١ ،، ب (معامل س) = ٤ ،،، جـ = (الحد المطلق (الثابت)) = -١

- **الإحداثي السيني لنقطة الرأس** ← $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٤}{٢\times ١} = \frac{-٤}{٢} = -٢$
- **معادلة محور التماثل :** ← $\boxed{س = -٢}$
- د) $ق(س) = س^{٢} + ٣$
- **أ (معامل س ^{٢}) = ١ ،، ب (معامل س) = ٠ ،،، جـ = (الحد المطلق (الثابت)) = ٣**
- **الإحداثي السيني لنقطة الرأس** ← $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{٠}{٢\times ١} = \frac{٠}{٢} = ٠$
- **معادلة محور التماثل :** ← $\boxed{س = ٠}$

٥) القيمة الصغرى والعظمى للاقتران التربيعي

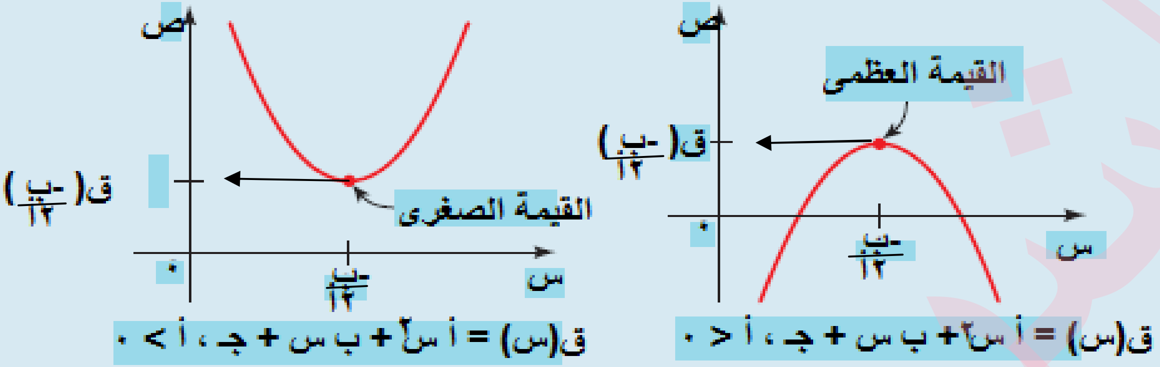
$ق(س) = أس^{٢} + ب س + جـ$ ، **ونقطة رأسه** $\left(\frac{-ب}{أ} ، ق\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$

- **إذا كانت** $\boxed{أ > ٠}$ **، فإن للاقتران ق قيمة صغرى عند** $\boxed{س = \frac{-ب}{٢أ}}$ **وهي** $ق\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)$
- **إذا كانت** $\boxed{أ < ٠}$ **، فإن للاقتران ق قيمة عظمى عند** $\boxed{س = \frac{-ب}{٢أ}}$ **وهي** $ق\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)$

لاحظ أن القيمة الصغرى والعظمى للاقتران هي الإحداثي الصادي لنقطة الرأس

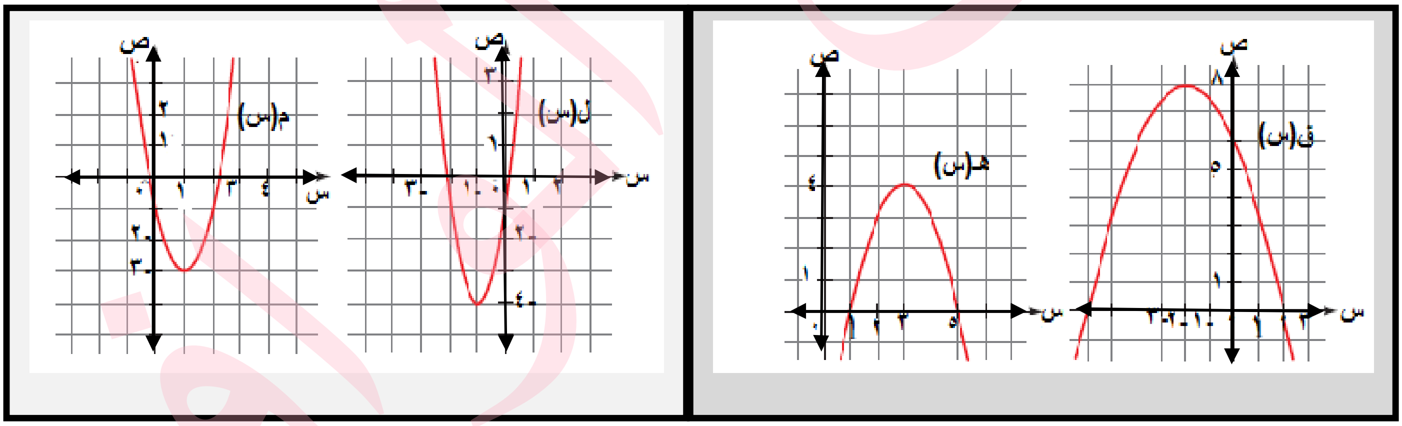
أنظر الشكل التالي :

- إذا كانت $\boxed{أ > ٠}$ ، فإن للاقتران ق قيمة صغرى عند $\boxed{س = \frac{-ب}{٢أ}}$ وهي ق$\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)$
- إذا كانت $\boxed{أ < ٠}$ ، فإن للاقتران ق قيمة عظمى عند $\boxed{س = \frac{-ب}{٢أ}}$ وهي ق$\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)$



مثال (٦) :

يبين الشكل منحنيات أربعة اقترانات تربيعية ، جد نقطة الرأس لكل اقتران ثم بين هل للاقتران قيمة عظمى أم صغرى ثم حدد هذه القيمة :



الحل :

- الاقتران ق (س) : نقطة الرأس (-٢ ، ٨) ، قيمة عظمى ومقدارها ٨
- الاقتران هـ (س) : نقطة الرأس (٣ ، ٤) ، قيمة عظمى ومقدارها ٤
- الاقتران ل(س) : نقطة الرأس (-١ ، -٤) ، قيمة صغرى ومقدارها -٤
- الاقتران م (س) : نقطة الرأس (١ ، -٣) ، قيمة صغرى ومقدارها -٣

مثال (٧) :

جد القيمة العظمى أو الصغرى لكل من الاقترانات التربيعية التالية :

أ) $ن(س) = ٢س^{٢} + ٤س - ١$ ب) $هـ(س) = ٣ - ٤س - س^{٢}$

جـ) $ل(س) = \frac{١}{٢}س^{٢} + ٢س - ٦$ د) $ك(س) = ٢س(٤ - س) + ٧$

الحل :

أ) $ن(س) = ٢س^{٢} + ٤س - ١$

أ (معامل س^{٢}) = ٢ ،، ب (معامل س) = ٤ ،،، جـ = (الحد المطلق (الثابت)) = -١

إحداثيات نقطة الرأس $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، ن\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$

- **الإحداثي السيني لنقطة الرأس** ← $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٤}{٢ \times ٢} = \frac{-٤}{٤} = -١$
- **الإحداثي الصادي لنقطة الرأس** $ن\left(\frac{-ب}{٢أ}\right) = ن(-١)$ **نعوض في قاعدة الاقتران**

$$ن(-١) = ٢(-١)^{٢} + ٤(-١) - ١ \leftarrow ن(-١) = ٢ - ٤ - ١ = -٣$$

- **إذاً إحداثيات نقطة الرأس** $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، ن\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right) = (-١ ، -٣)$
- **وبما أن معامل س^{٢} أكبر من صفر** $\left(\boxed{أ \succ ٠}\right)$ **، إذاً منحنى الاقتران مفتوح للأعلى ، له قيمة صغرى عند س = -١ ، وهي - ٣ (الإحداثي الصادي لنقطة الرأس) .**

ب) $هـ(س) = ٣ - ٤س - س^{٢}$

نكتب الاقتران على الصورة العامة $هـ(س) = -س^{٢} - ٤س + ٣$

أ (معامل س^{٢}) = -١ ،، ب (معامل س) = -٤ ،،، جـ = (الحد المطلق (الثابت)) = ٣

- **الإحداثي السيني لنقطة الرأس** ← $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-(-٤)}{٢ \times -١} = \frac{٤}{-٢} = -٢$

- **الإحداثي الصادي لنقطة الرأس** $هـ\left(\frac{-ب}{٢أ}\right) = هـ(-٢)$ **نعوض في قاعدة الاقتران**

$$هـ(-٢) = -(-٢)^{٢} - ٤(-٢) + ٣ \leftarrow هـ(-٢) = -٤ + ٨ + ٣ = ٧$$

- **إذاً إحداثيات نقطة الرأس** $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، هـ\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right) = (-٢ ، ٧)$

- **وبما أن معامل س ^{٢} أصغر من صفر** $\left(\boxed{أ < ٠}\right)$ **، إذا منحنى الاقتران مفتوح للأسفل ، له قيمة عظمى عند س = -٢ ، وهي ٧ (الإحداثي الصادي لنقطة الرأس) .**

جـ) $ل(س) = \frac{١}{٢}س^{٢} + ٢س - ٦$

أ (معامل س ^{٢}) = $\frac{١}{٢}$ ،، ب (معامل س) = ٢ ،،، جـ = (الحد المطلق (الثابت)) = -٦

إحداثيات نقطة الرأس $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، ل\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$

- **الإحداثي السيني لنقطة الرأس** $\leftarrow \frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٢}{٢ \times \frac{١}{٢}} = \frac{-٢}{١} = -٢$

- **الإحداثي الصادي لنقطة الرأس** $ل\left(\frac{-ب}{٢أ}\right) = ل(-٢)$ **نعوض في قاعدة الاقتران**

$$ل(-٢) = \frac{١}{٢}(-٢)^{٢} + ٢(-٢) - ٦ \leftarrow ل(-٢) = ٢ - ٤ - ٦ = -٨$$

- **إذاً إحداثيات نقطة الرأس** $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، ل\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right) = (-٢ ، -٨)$

- **وبما أن معامل س ^{٢} أكبر من صفر** $\left(\boxed{أ > ٠}\right)$ **، إذا منحنى الاقتران مفتوح للأعلى ، له قيمة صغرى عند س = -٢ ، وهي - ٨ (الإحداثي الصادي لنقطة الرأس) .**

ى) $ك(س) = ٢س(٤ - س) + ٧$

نكتب الاقتران على الصورة العامة $ك(س) = ٨س - ٢س^{٢} + ٧ \leftarrow \boxed{ك(س) = -٢س^{٢} + ٨س + ٧}$

أ (معامل س^{٢}) = -٢ ،، ب (معامل س) = ٨ ،،، جـ = (الحد المطلق (الثابت)) = ٧

- **الإحداثي السيني لنقطة الرأس** $\leftarrow \frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٨}{٢ \times -٢} = \frac{-٨}{-٤} = ٢$

- **الإحداثي الصادي لنقطة الرأس** $ك\left(\frac{-ب}{٢أ}\right) = ك(٢)$ **نعوض في قاعدة الاقتران**

$ك(٢) = -٢(٢)^{٢} + ٨(٢) + ٧ \leftarrow ك(٢) = -٨ + ١٦ + ٧ = ١٥$

- **إذاً إحداثيات نقطة الرأس** $\left(\frac{-ب}{٢أ} ، ك\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right) = (٢ ، ١٥)$

- **وبما أن معامل س^{٢} أصغر من صفر** $\left(\boxed{أ < ٠}\right)$ **، إذا منحنى الاقتران مفتوح للأسفل ، له قيمة عظمى عند س = ٢ ، وهي ١٥ (الإحداثي الصادي لنقطة الرأس) .**

٦) مجال ومدى الاقتران التربيعي

- **مجال الاقتران التربيعي هو مجموعة الأعداد الحقيقية ح ، أو كفترة** $(-\infty ، \infty)$ **.**

أو هي مجموعة قيم س التي يمكن التعويض بها في قاعدة الاقتران ، وهي تمثل محور السينات أو مجموعة جزئية منه (حسب ما يحدد السؤال)

- **مدى الاقتران التربيعي : هي مجموعة صور المجال**

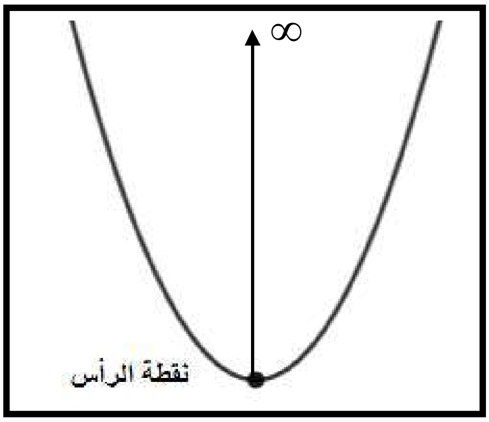
أو قيم ص الناتجة من تعويض قيم س في قاعدة الاقتران التربيعي ، والشكل التالي يوضح العلاقة بين عناصر المجال وعناصر المدى

عناصر المجال (قيم س) ←

← عناصر المدى (قيم ص)

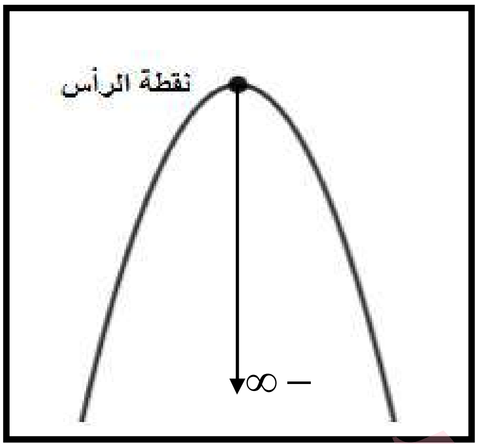
- **كيف نجد مدى الاقتران التربيعي :**

أولاً : بيانياً



:: إذا كان منحنى الاقتران مفتوح للأعلى (الشكل المجاور) فإن أقل قيمة يصل إليها منحنى الاقتران هي الإحداثي الصادي لنقطة الرأس ، لذلك فإن مدى الاقتران هو من أقل قيمة (الصغرى) إلى ما لانهاية ورمزاً :

$$\text{ص} \in \left[\text{ن}\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}}\right) ، \infty\right) \quad \text{أو مدى الاقتران} = \left\{\text{ص} : \text{ص} \geq \text{ن}\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}}\right)\right\}$$



:: إذا كان منحنى الاقتران مفتوح للأسفل (الشكل المجاور) فإن أعلى قيمة يصل إليها الاقتران هي الإحداثي الصادي لنقطة الرأس ، لذلك فإن مدى الاقتران هو من سالب ما لانهاية إلى أكبر قيمة (العظمى) ورمزاً :

$$\text{ص} \in \left(-\infty ، \text{ن}\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}}\right)\right] \quad \text{أو مدى الاقتران} = \left\{\text{ص} : \text{ص} \leq \text{ن}\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}}\right)\right\}$$

ثانياً : إذا علمت قاعدة الاقتران :

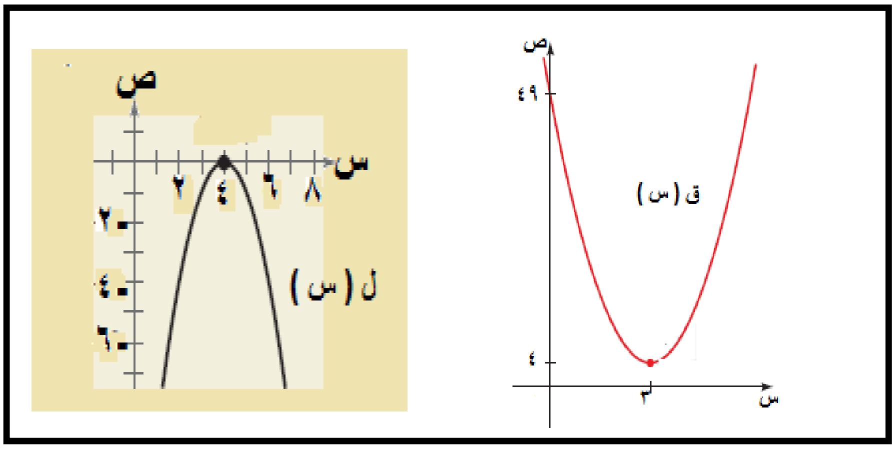
:: إذا كان معامل س ^{٢} أصغر من صفر $\left(\boxed{\text{أ} < ٠}\right)$ ، إذا منحنى الاقتران مفتوح للأسفل نجد إحداثي نقطة الرأس كما تعلنا ثم نجد المدى

$$\text{ص} \in \left(-\infty ، \text{ن}\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}}\right)\right] \quad \text{أو مدى الاقتران} = \left\{\text{ص} : \text{ص} \leq \text{ن}\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}}\right)\right\}$$

:: إذا كان معامل س ^{٢} أكبر من صفر $\left(\boxed{\text{أ} > ٠}\right)$ ، إذا منحنى الاقتران مفتوح للأعلى نجد إحداثي نقطة الرأس كما تعلنا ثم نجد المدى

$$\text{ص} \in \left[\text{ن}\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}}\right) ، \infty\right) \quad \text{أو مدى الاقتران} = \left\{\text{ص} : \text{ص} \geq \text{ن}\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}}\right)\right\}$$

مثال (٨) :



اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى كل من الاقترانين ق ، ل جد مدى كل منهما .

الحل :

- **الاقتران ق (س) : إحداثيات نقطة الرأس (٣ ، ٤) ، ومفتوح للأعلى ، إذا :**

مدى ق (س) = {ص : ص ≥ ٤}

- **الاقتران ل (س) : إحداثيات نقطة الرأس (٤ ، ٠) ، ومفتوح للأسفل ، إذا :**

مدى ل (س) = {ص : ص ≤ ٠}

مثال (٩) : جد مدى كل من الاقترانات التالية :

أ) $ن(س) = س^{٢} - ٢س + ٣$

ب) $هـ(س) = -س^{٢} + ٦س + ٤$

جـ) $ل(س) = ٣س^{٢} + ٦س$

د) $ك(س) = ٣س^{٢} + ٦س - ٢$

الحل :

أ) $ن(س) = س^{٢} - ٢س + ٣ \leftarrow\leftarrow\leftarrow$ أ = ١ ، ب = −٢ ، جـ = ٣

$\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-(-٢)}{٢ \times ١} = \frac{٢}{٢} = ١$ الإحداثي السيني لنقطة الرأس

$ن(١) = ١ - ٢ + ٣ = ٢$ الإحداثي الصادي لنقطة الرأس ← (١ ، ٢) نقطة الرأس

وبما أن $\left(\boxed{أ > ٠}\right)$ **، منحنى الاقتران مفتوح للأعلى ، له قيمة صغرى عند س = ١ وهي ٢**

إذا مدى ق = {ص : ص ≥ ٢}

ب) هـ(س) = −س^٢ + ٦س + ٤ ←←← أ = −١ ، ب = ٦ ، جـ = ٤

$\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} = \frac{-٦}{٢\times -١} = \frac{-٦}{-٢} = ٣$ الإحداثي السيني لنقطة الرأس

هـ(٣) = −٩ + ١٨ + ٤ = ١٣ الإحداثي الصادي لنقطة الرأس ← (٣ ، ١٣) نقطة الرأس

وبما أن ($\boxed{\text{أ} < ٠}$) ، منحنى الاقتران مفتوح للأسفل ، له قيمة عظمى عند س = ٣ وهي ١٣

إذا مدى هـ = {ص : ص ≤ ١٣}

جـ) ل(س) = ٣س^٢ + ٦س ←←← أ = ٣ ، ب = ٦ ، جـ = ٠

$\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} = \frac{-٦}{٢\times ٣} = \frac{-٦}{٦} = -١$ الإحداثي السيني لنقطة الرأس

ل(−١) = ٣ − ٦ = −٣ الإحداثي الصادي لنقطة الرأس ← (−١ ، −٣) نقطة الرأس

وبما أن ($\boxed{\text{أ} > ٠}$) ، منحنى الاقتران مفتوح للأعلى ، له قيمة صغرى عند س = -١ وهي -٣

إذا مدى ل = {ص : ص ≥ −٣}

د) ك(س) = −٣س^٢ + ٦س − ٢ ←←← أ = −٣ ، ب = ٦ ، جـ = −٢

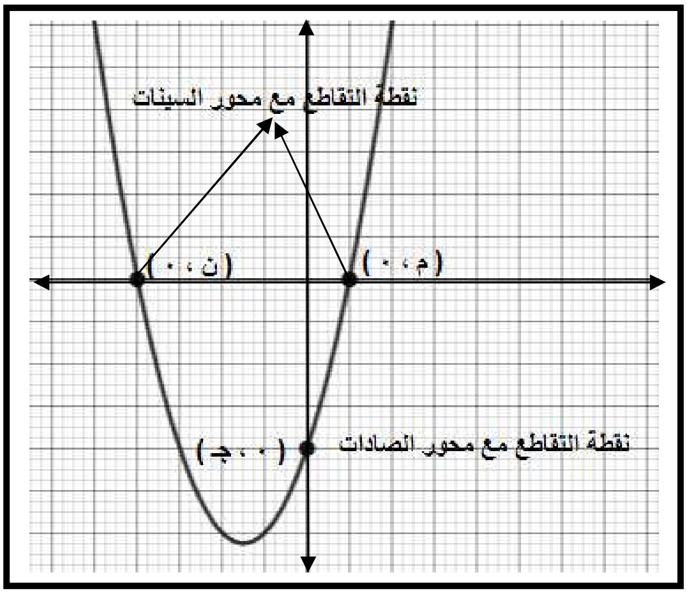
$\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} = \frac{-٦}{٢\times -٣} = \frac{-٦}{-٦} = ١$ الإحداثي السيني لنقطة الرأس

ك(١) = −٣ + ٦ − ٢ = ١ الإحداثي الصادي لنقطة الرأس ← (١ ، ١) نقطة الرأس

وبما أن ($\boxed{\text{أ} < ٠}$) ، منحنى الاقتران مفتوح للأسفل ، له قيمة عظمى عند س = ١ وهي ١

إذا مدى ك = {ص : ص ≤ ١}

٧) نقاط تقاطع منحنى الاقتران التربيعي مع المحورين

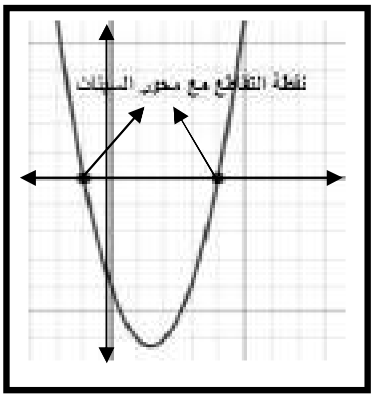


الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران التربيعي مبيناً عليه نقط تقاطع منحنى الاقتران التربيعي مع المحورين السيني والصادي .

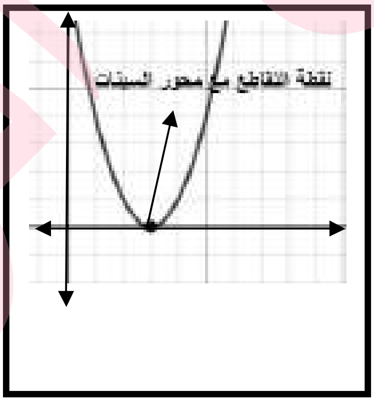
- النقطة (٠ ، جـ) نقطة تقاطع منحنى الاقتران مع محور الصادات .
- النقطتين (م ، ٠) ، (ن ، ٠) نقطتي تقاطع منحنى الاقتران مع محور السينات

::: ملاحظات مهمة جداً :

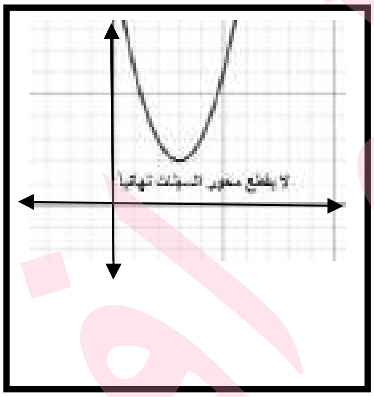
- منحنى الاقتران التربيعي دائما يقطع محور الصادات وإحداثيات نقطة التقاطع هي (٠ ، جـ) حيث جـ الحد المطلق في الاقتران التربيعي (بشرط مجاله مجموعة الأعداد الحقيقية ح) .
- منحنى الاقتران التربيعي يقطع محور السينات في نقطتين على الأكثر (أي يمكن أن يقطعه في نقطتين ، أو نقطة واحدة ، أو لا يقطعه نهائياً) والأشكال التالية توضح ذلك .



يقطع محور السينات في نقطتين



يقطع محور السينات في نقطة واحدة فقط



لا يقطع محور السينات نهائياً

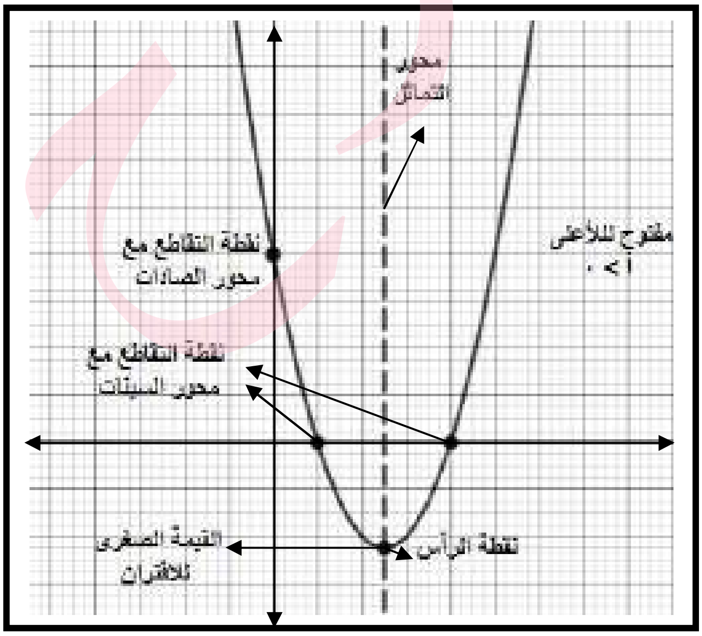
- في هذا الدرس سوف نجد نقط تقاطع منحنى الاقتران التربيعي مع محور السينات (إن وجدت) بيانياً
- لإيجاد نقطة تقاطع منحنى الاقتران التربيعي مع محور الصادات إذا علمت قاعدته ، نعوض الصفر بدل كل س في قاعدة الاقتران ، فنجد الناتج يساوي الحد المطلق ← ق(٠) = جـ ← (٠ ، جـ) نقطة التقاطع مع محور الصادات .

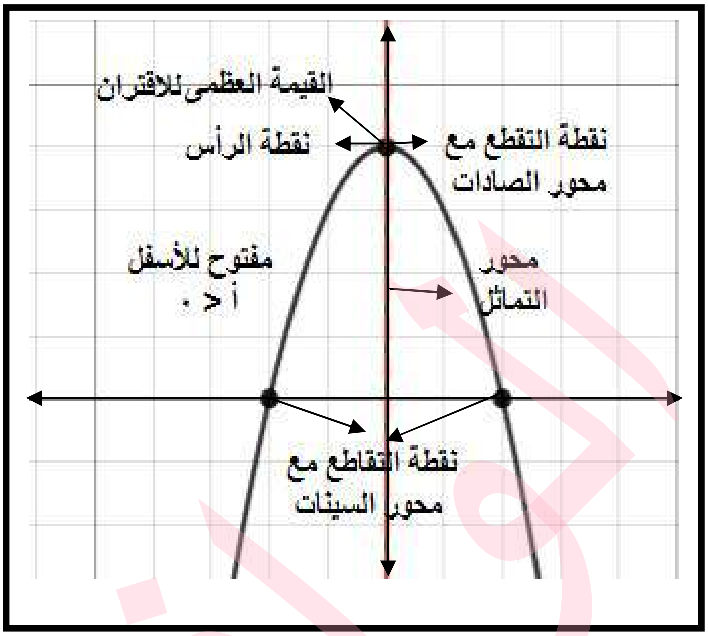
ملخص أولي لما سبق :

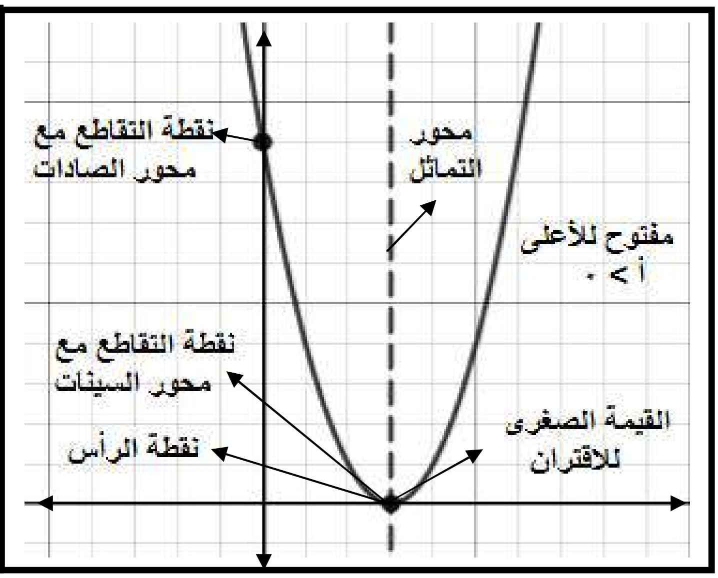
- الصورة العامة للاقتران التربيعي ق(س) = أس^{٢} + ب س+جـ

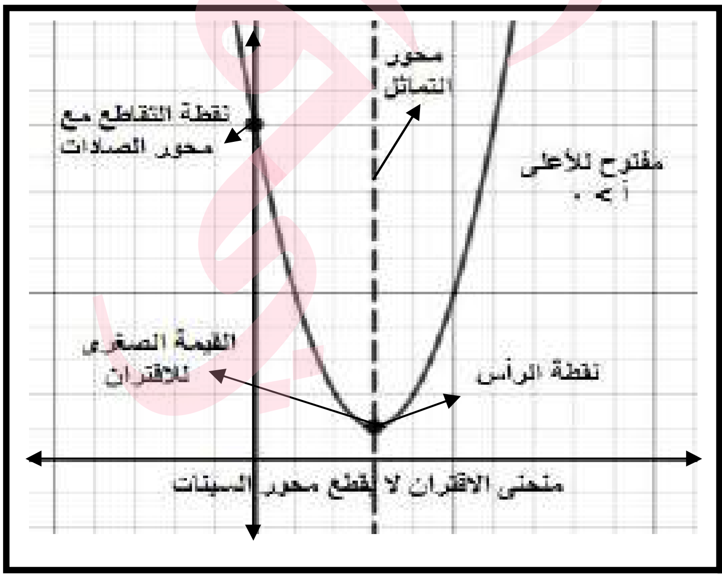
أ	نقطة الرأس	معادلة محور التماثل	قيمة عظمى أو صغرى	فتحة المنحنى	المدى
أ ≻ ٠	$\left(\frac{-ب}{٢أ}، ق\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$	س = $\frac{-ب}{٢أ}$	صغرى	للأعلى	ص ≤ ق$\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)$
أ ≺ ٠	$\left(\frac{-ب}{٢أ}، ق\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)\right)$	س = $\frac{-ب}{٢أ}$	عظمى	للأسفل	ص ≥ ق$\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)$

- بيانياً :









الآن ننتقل إلى التمثيل البياني لمنحنى الاقتران التربيعي على المستوى الإحداثي

- **من الطرق المستخدمة في تمثيل الاقتران التربيعي بيانياً :**

١) طريقة الجدول **٢) استخدام برامج للرسم مثل برنامج إكسل أو غيره**

١) طريقة الجدول

- **نجد الإحداثي السيني لنقطة الرأس $\frac{-ب}{٢أ}$ ، ثم نجد إحداثي نقطة الرأس**
- **ننشئ جدول يتكون من ٨ أعمدة وصفين كما يلي :**

نقطة الرأس

س				$\frac{-ب}{٢أ}$			
ق (س)				$ن\left(\frac{-ب}{٢أ}\right)$			

- **نعبئ خانات قيم س في أعداد أقل من $\frac{-ب}{٢أ}$ على يمينها ، وأعداد أكبر منها على يسارها**
- **نعوض قيم س في قاعدة الاقتران لإيجاد قيم ص = ق (س)**
- **نعين النقاط الناتجة من الخطوة السابقة عل المستوى الإحداثي ثم نصل بينها بخط منحن**

مثال (١٠) : شامل مثال (٣ – ٣) ص٨٦

ارسم منحنى كلاً من الاقترانات التربيعية التالية في المستوى الإحداثي

أ) $ن(س) = س^{٢} - ٤س + ١$

ب) $هـ(س) = -س^{٢} + ٦س + ٤$

جـ) $ل(س) = س^{٢} - ٢س + ٣$

الحل :

أ) $ق(س) = س^{٢} - ٤س + ١ \leftarrow\leftarrow\leftarrow أ = ١$ ، $ب = -٤$ ، $جـ = ١$ **(كتاب مدرسي ص٨٦)**

- $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-(-٤)}{٢ \times ١} = \frac{٤}{٢} = ٢$ **الإحداثي السيني لنقطة الرأس ، معادلة محور التماثل** $س = ٢$
- $ق(٢) = (٢)^{٢} - ٤ \times ٢ + ١ = -٣$ **الإحداثي الصادي لنقطة الرأس ، $(٢، -٣)$ نقطة الرأس**
- **الجدول**

س	١-	٠	١	٢	٣	٤	٥
ص=ق(س)	٦	١	٢-	٣-	٢-	١	٦

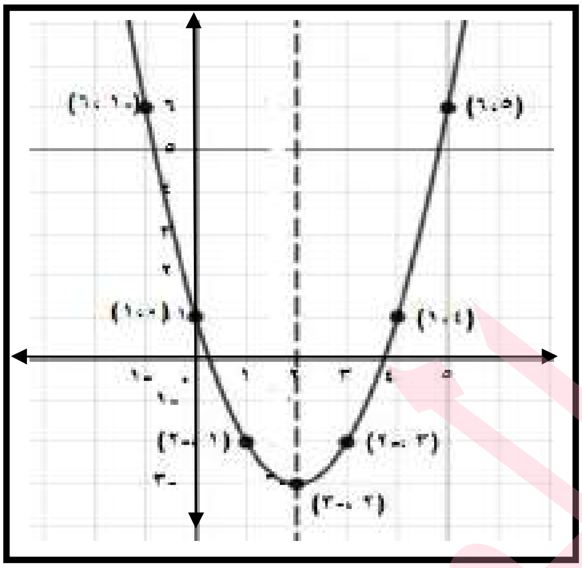
- **نجد قيم ص**

$ق(١) = ١ - ٤ + ١ = -٢$ ، $ق(٣) = ٩ - ١٢ + ١ = -٢$

$ق(٠) = ٠ - ٠ + ١ = ١$ ، $ق(٤) = ١٦ - ١٦ + ١ = ١$

$ق(-١) = ١ + ٤ + ١ = ٦$ ، $ق(٥) = ٢٥ - ٢٠ + ١ = ٦$

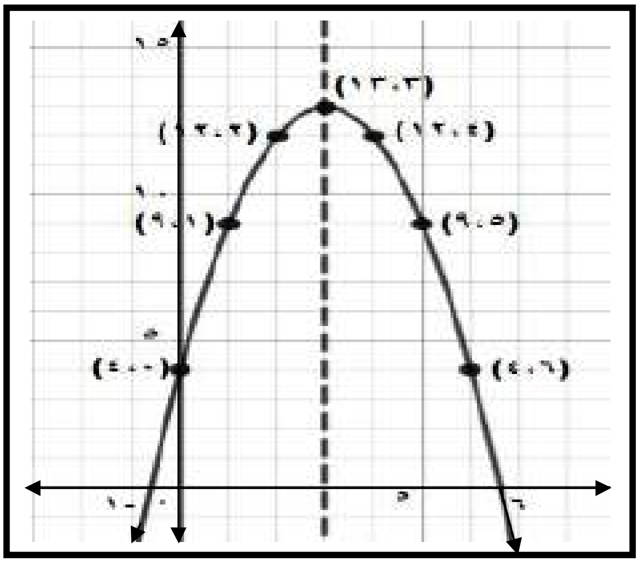
- **نعين النقاط على المستوى الإحداثي ، ثم نصل بينها بخط منحن ، كما في الشكل المجاور .**



ب) $هـ(س) = -س^{٢} + ٦س + ٤ \leftarrow\leftarrow\leftarrow أ = -١$ ، $ب = ٦$ ، $جـ = ٤$

- $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٦}{٢ \times -١} = \frac{-٦}{-٢} = ٣$ **الإحداثي السيني لنقطة الرأس ، معادلة محور التماثل** $س = ٣$
- $هـ(٣) = -٩ + ١٨ + ٤ = ١٣$ **الإحداثي الصادي لنقطة الرأس ، $(٢، -٣)$ نقطة الرأس**
- **الجدول**

س	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
ص=هـ(س)	٤	٩	١٢	١٣	١٢	٩	٤



- **نجد قيم ص**

هـ(٠)=٠−٠+٤=٤   هـ(٦)=−٣٦+٣٦+٤=٤

هـ(١)=−١+٦+٤=٩   هـ(٥)=−٢٥+٣٠+٤=٩

هـ(٢)=−٤+١٢+٤=١٢   هـ(٤)=−١٦+٢٤+٤=١٢

- **نعين النقاط على المستوى الإحداثي ، ثم نصل بينها بخط منحن ، كما في الشكل المجاور .**

جـ) ل(س) = س^{٢} − ٢س + ٣ ←←← أ = ١ ، ب = −٢ ، جـ = ٣

- $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-(-٢)}{٢\times ١} = \frac{٢}{٢} = ١$ **الإحداثي السيني لنقطة الرأس ، معادلة محور التماثل** س = ١
- ل(١) = ١ − ٢ + ٣ = ٢ **الإحداثي الصادي لنقطة الرأس ،** (١،٢) **نقطة الرأس**
- **الجدول**

س	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
ص=ق(س)	١١	٦	٣	٢	٣	٦	١١

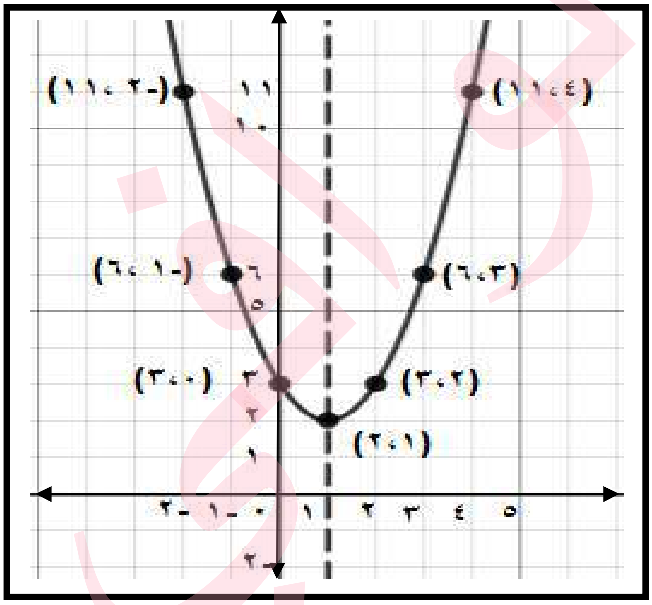
- **نجد قيم ص**

ل(−٢)=٤+٤+٣=١١   ل(٤)=١٦−٨+٣=١١

ل(−١)=١+٢+٣=٦   ل(٣)=٩−٦+٣=٦

ل(٠)=٠−٠+٣=٣   ل(٢)=٤−٤+٣=٣

- **نعين النقاط على المستوى الإحداثي ، ثم نصل بينها بخط منحن ، كما في الشكل المجاور .**



٢) استخدام برامج الرسم

نختار أي برنامج للرسم مثل : برنامج إكسل ، ديسموس ، جيوجبرا ، fx-draw ، ٠٠٠

حل تدريب (٣ ــ ٢) ص٨٨

ارسم منحنى الاقتران التربيعي ق(س) = س^{٢} + ٤س − ٥

الحل : تم استخدام برنامج ديسموس في الرسم

ق(س) = س^{٢} + ٤س − ٥ ⟵⟵⟵ أ = ١ ، ب = ٤ ، جـ = −٥

- $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٤}{٢ \times ١} = \frac{-٤}{٢}$ = −٢ الإحداثي السيني لنقطة الرأس ، معادلة محور التماثل س = −٢
- ق(−٢) = ٤ − ٨ − ٥ = −٩ الإحداثي الصادي لنقطة الرأس ، (−٢،−٩) نقطة الرأس
- الجدول

س	-٥	-٤	-٣	-٢	-١	٠	١
ص=ق(س)	٠	-٥	-٨	-٩	-٨	-٥	٠

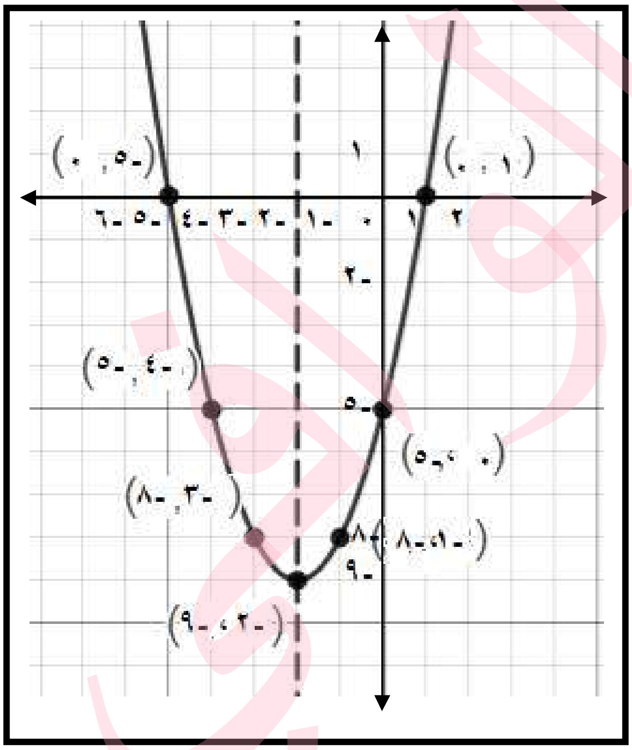
- نجد قيم ص

ق(−٥)=٢٥−٢٠−٥=٠ ق(١)=١+٤−٥=٠

ق(−٤)=١٦−١٦−٥=−٥ ق(٠)=٠+٠−٥=−٥

ق(−٣)=٩−١٢−٥=−٨ ق(−١)=١−٤−٥=−٨

- نعين النقاط على المستوى الإحداثي ، ثم نصل بينها بخط منحن ، كما في الشكل المجاور ٠



حل تدريب (٣ ـ ٣) ص٨٨

إذا كان ق اقتراناً تربيعياً ، حيث $ق(س) = س^{٢} + ٢س$

أ) هل منحنى الاقتران ق مفتوح إلى الأعلى أم إلى الأسفل ؟

ب) هل للاقتران ق قيمة صغرى أم قيمة عظمى ؟ جدها

جـ) ما مدى الاقتران ق ؟

الحل :

الجواب في الأفرع الثلاثة يعتمد على إشارة معامل $س^{٢}$ $\leftarrow$ $أ = ١ \succ ٠$ (موجبة)

أ) مفتوح إلى الأعلى $\longleftarrow$ إشارة معامل $س^{٢}$ $\leftarrow$ $أ = ١ \succ ٠$ (موجبة)

ب) قيمة صغرى

$\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٢}{٢} = -١ \leftarrow ق(-١) = ١ - ٢ = -١$ القيمة الصغرى

جـ) مدى الاقتران ق $= \{ص : ص \geq -١\}$

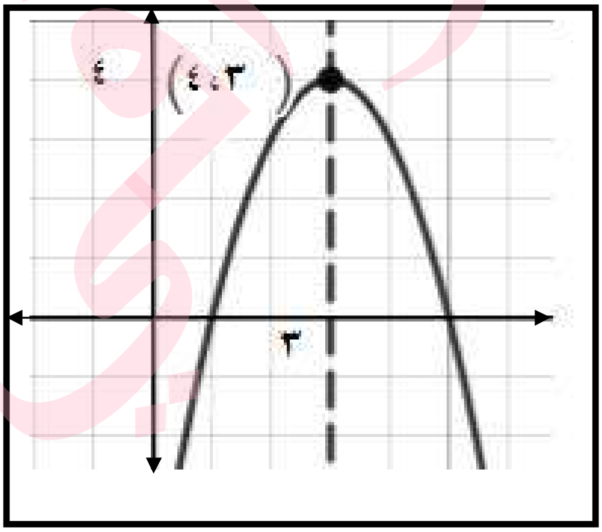
حل تدريب (٣ ـ ٤) ص٨٩

إذا كان ق اقتراناً تربيعياً ، قيمته العظمى تساوي ٤ ومعادلة محور تماثله هي س = ٣ ، ارسم رسماً تقريبياً لمنحنى الاقتران ق .

الحل :

بما أن للاقتران قيمة عظمى وتساوي ٤، إذاً :

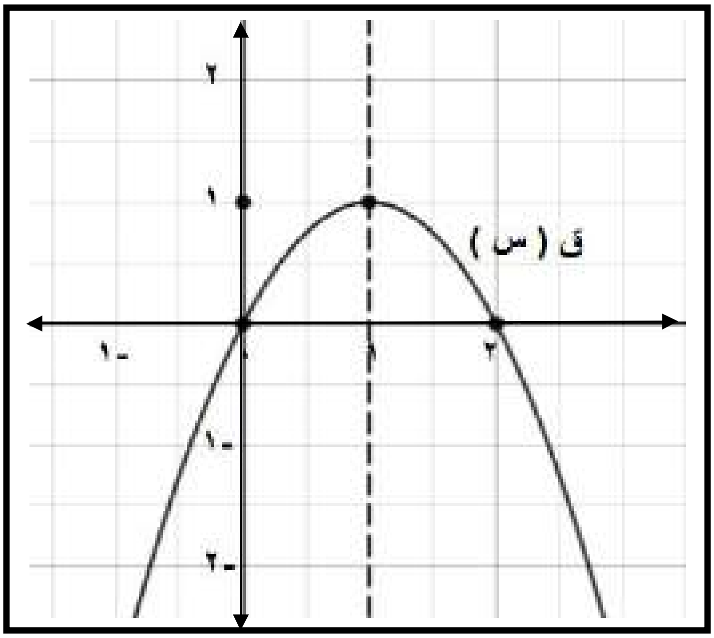
- الاقتران مفتوح إلى الأسفل
- نقطة الرأس (٣ ، ٤)



حل تدريب (٣ ـ ٥) ص٨٩

استخدم الآلة الراسمة لرسم منحنى الاقتران التربيعي : $ق(س) = ٢س - س^{٢}$.

معتمداً على الرسم جد إحداثيي نقطة الرأس ، ومعادلة محور التماثل ، والقيمة العظمى للاقتران ق .



الحل :

- نقطة الرأس (١ ، ١)
- معادلة محور التماثل : $س = ١$
- القيمة العظمى : ١
- مدى الاقتران ق = $\{ص : ص \leq ١\}$

حل تدريب (٣ ـ ٦) ص٩٠

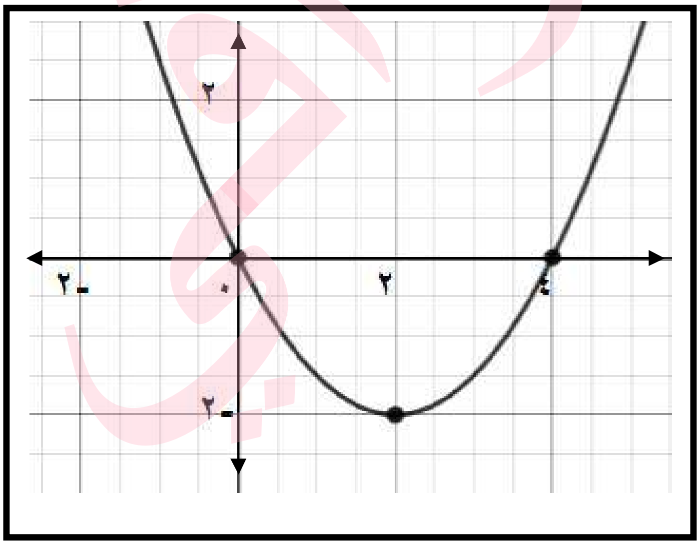
إذا كان $ق(س) = \frac{١}{٢}س^{٢} - ٢س$

أ) استعمل برنامج إكسل في رسم منحنى الاقتران ق .

ب) ما النقط التي يقطع عندها المنحنى محور السينات ؟

جـ) ما النقطة التي يقطع عندها المنحنى محور الصادات ؟

الحل :



أ) الشكل المجاور

ب) نقط التقاطع مع محور السينات

(٠ ، ٠) ، (٤ ، ٠)

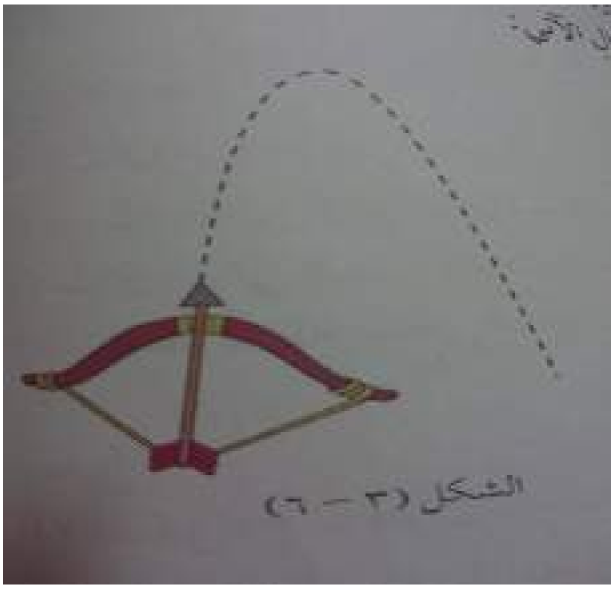
جـ) نقطة التقاطع مع محور الصادات

(٠ ، ٠)

أمثلة حياتية على الاقتران التربيعي

مثال (١١) : مثال (٣ – ٦) كتاب مدرسي ص٩٠

في لعبة الرماية استخدم عز الدين قوساً لقذف سهم إلى الأعلى بسرعة ابتدائية قدرها ٤٠ متراً / ثانية وفق العلاقة $ل = ٤٠ن - ٥ن^{٢}$ ، حيث ن الزمن بالثواني ، ل الارتفاع بالأمتار ، ما أقصى ارتفاع يمكن أن يصله السهم ؟ الشكل المجاور .



الحل :

لاحظ أن العلاقة التي يسير فيها السهم تمثل اقتران تربيعي ، نكتب العلاقة بالصورة العامة :

$ل(ن) = -٥ن^{٢} + ٤٠ن \leftarrow\leftarrow\leftarrow أ = -٥ ، ب = ٤٠ ، جـ = ٠$

أقصى ارتفاع يصله السهم يمثل القيمة العظمى للاقتران حيث $أ < ٠$.

$ن = \frac{-ب}{٢أ} = \frac{-٤٠}{٢\times -٥} = ٤ث$ **، يصل السهم إلى أقصى ارتفاع بعد مرور ٤ ثوان من قذفه**

أقصى ارتفاع $\leftarrow ل(٤) = -٥ \times ١٦ + ٤٠ \times ٤ \leftarrow ل(٤) = -٨٠ + ١٦٠ = ٨٠$ **متراً**

حل تمارين ومسائل ص٩١

١) أي من الاقترانات الآتية اقتران تربيعي ؟

أ) $ق(س) = س^{\frac{١}{٢}} + س ، س > ٠$

ليس اقتران تربيعي ، حيث لا يمكن كتابته على الصورة العامة للاقتران التربيعي .

ب) $هـ(س) = س(س - ١) + ٥$

$هـ(س) = س^{٢} - س + ٥$ **اقتران تربيعي**

جـ) ل(س) = ٢س + ١ **ليس اقتران تربيعي**

د) هـ(س) = س^{٢} (٣ − س^{٢}) + س + ٤

هـ(س) = −س^{٤} + ٣س^{٢} + س + ٤ **ليس اقتران تربيعي**

٢) ما معادلة محور تماثل الاقتران التربيعي ق(س) = س^{٢} + ٢٥و٠ + س

الحل : نكتب الاقتران على الصورة العامة

ق(س) = س^{٢} + س + ٢٥و٠ ⟵⟵ أ = ١ ، ب = ١ ، جـ = ٢٥و٠

معادلة محور التماثل : $س = \frac{-ب}{٢أ} = \frac{-١}{٢\times١} = \frac{-١}{٢} \leftarrow \boxed{س = \frac{-١}{٢}}$

٣) ما مجال ومدى الاقتران التربيعي ق(س) = ١ − س^{٢}

الحل : نكتب الاقتران على الصورة العامة

ق(س) = −س^{٢} + ١ ⟵⟵⟵ أ = −١ ، ب = ٠ ، جـ = ١

- **مجاله : مجموعة الأعداد الحقيقية** ح ، أو (−∞ ، ∞)
- **الإحداثي السيني لنقطة الرأس :** $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{٠}{٢\times-١} = ٠$

الإحداثي الصادي لنقطة الرأس : ق(٠) = ٠ − ١ = ١ ⟵⟵ (٠ ، ١) **نقطة الرأس**

وبما أن معامل س^{٢} **إشارته سالبة** (أ < ٠) ، **إذاً مدى ق** = {ص : ص ≤ ١}

٤) إذا كان ق : ح ⟵ ح : حيث ق(س) = س^{٢} − ٥س + ٤ **فجد** ق(−٢) ، ق(١) ، ق(٤)

الحل :

قيم س	ق(س) = س^{٢} − ٥س + ٤	(س ، ص)
−٢	ق(−٢) = (−٢)^{٢} − ٥× −٢ + ٤ = ١٨	(−٢ ، ١٨)
١	ق(١) = (١)^{٢} − ٥×١ + ٤ = ٠	(١ ، ٠)
٤	ق(٤) = (٤)^{٢} − ٥×٤ + ٤ = ٠	(٤ ، ٠)

٥) جد معادلة محور التماثل ، ورأس المنحنى ، والقيمة العظمى أو القيمة الصغرى ، والمجال ، والمدى لكل من الاقترانات الآتية :

أ) ٯ(س) = س^{٢} + ٦س − ٧ ب) و(س) = ٢س − س^{٢} + ٤ جـ) هـ(س) = س^{٢}

الحل : المجال لكل الاقترانات هو مجموعة الأعداد الحقيقية ح

الاقتران	أ	ب	جـ	معادلة محور التماثل	رأس المنحنى	عظمى أو صغرى	المدى
ٯ(س) = س^{٢}+٦س−٧	١	٦	-٧	س = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{-٦}{٢×١}$ = −٣	ٯ(−٣) = ٩ − ١٨ − ٧ = −١٦ ← (−٣، −١٦)	-١٦ صغرى	ص ≥ −١٦
و(س) = −س^{٢}+٢س+٤	-١	٢	٤	س = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{-٢}{٢×-١}$ = ١	و(١) = −١ + ٢ + ٤ = ٥ ← (١، ٥)	٥ عظمى	ص ≤ ٥
هـ(س) = س^{٢}	١	٠	٠	س = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{٠}{٢×١}$ = ٠	هـ(٠) = ٠ ← (٠،٠)	٠ صغرى	ص ≥ ٠

٦) ارسم منحنى الاقترانات الآتية :

أ) ٯ(س) = (س + ٢)^{٢} − ١ ب) هـ(س) = س^{٢} − ٢س + ٤

الحل : الطريقة الأولى (المعتمدة للصف التاسع)

أ) ٯ(س) = (س + ٢)^{٢} − ١ **: نكتب قاعدة الاقتران على الصورة العامة**

ٯ(س) = س^{٢} + ٤س + ٤ − ١ ← ٯ(س) = س^{٢} + ٤س + ٣

ٯ(س) = س^{٢} + ٤س + ٣ ←←← أ = ١ ، ب = ٤ ، جـ = ٣

- $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{-٤}{٢×١}$ = $\frac{-٤}{٢}$ = −٢ **الإحداثي السيني لنقطة الرأس ، معادلة محور التماثل** س = −٢
- ٯ(−٢) = ٤ − ٨ + ٣ = −١ **الإحداثي الصادي لنقطة الرأس ،** (−٢، −٩) **نقطة الرأس**
- **الجدول**

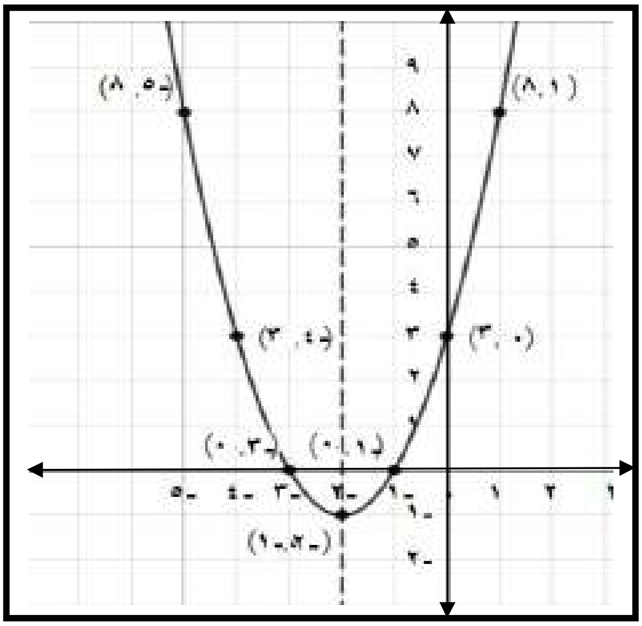
س	٥-	٤-	٣-	٢-	١-	٠	١
ص=ق(س)	٨	٣	٠	١-	٠	٣	٨

- نجد قيم ص

ق(−٥)=٢٥−٢٠+٣=٨   ق(١)=١+٤+٣=٨

ق(−٤)=١٦−١٦+٣=٣   ق(٠)=٠+٠+٣=٣

ق(−٣)=٩−١٢+٣=٠   ق(−١)=١−٤+٣=٠

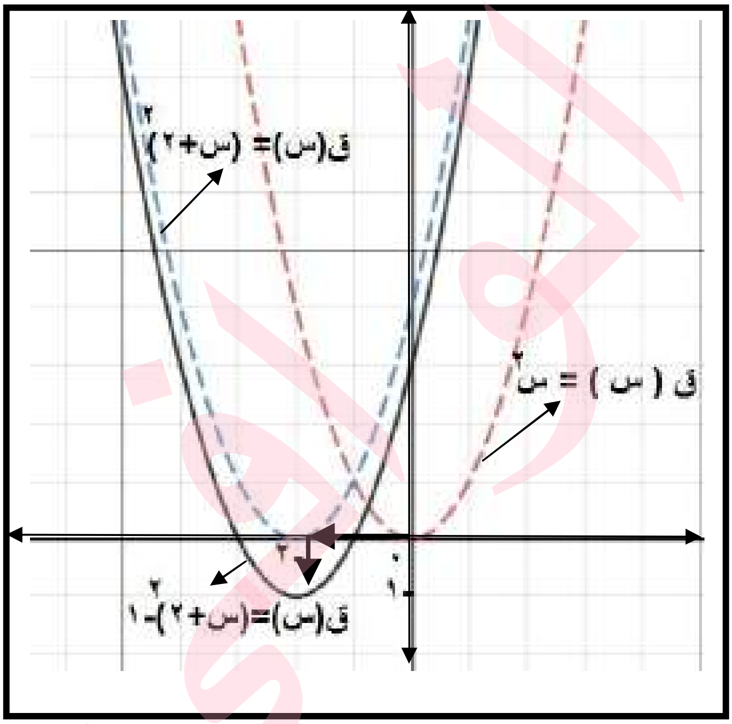


- نعين النقاط على المستوى الإحداثي ، ثم نصل بينها بخط منحن ، كما في الشكل المجاور .

الطريقة الثانية : فرع أ فقط

طريقة الانسحاب الأفقي والعمودي لمنحنى الاقتران التربيعي الإمام ق(س) = س^{٢}

خطوات الرسم (الشكل المجاور)



- نرسم الاقتران الإمام ق(س) = س^{٢}
- نسحب منحنى الاقتران الإمام وحدتين لليسار ← ق(س) = (س + ٢)^{٢}
- نسحب منحنى الاقتران الناتج من الخطوة السابقة وحدة واحدة إلى الأسفل

← ق(س) = (س + ٢)^{٢} − ١

ملاحظة : الاقتران ق في هذا السؤال كتب على الصورة القياسية (تشرح في نهاية الوحدة)

الصورة القياسية للاقتران التربيعي ← ق(س) = أ (س − م)^{٢} + ك

ب) هـ(س) = س^{٢} − ٢س + ٤ ←←← أ = ١ ، ب = −٢ ، جـ = ٤

- $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-(-٢)}{٢\times١} = \frac{٢}{٢} = ١$ الإحداثي السيني لنقطة الرأس ، معادلة محور التماثل س = ١
- هـ(١) = ١ − ٢ + ٤ = ٣ الإحداثي الصادي لنقطة الرأس ، (١ ، ٣) نقطة الرأس

س	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤
ص=هـ(س)	١٢	٧	٤	٣	٤	٧	١٢

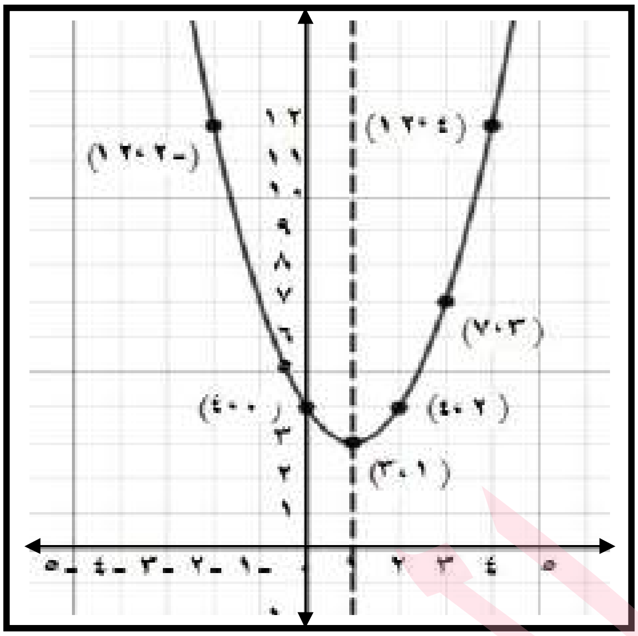
- **نجد قيم ص**

هـ(−٢)=٤+٤+٤=١٢ هـ(٤)=١٦−٨+٤=١٢

هـ(−١)=٦−٢+٤=٧ هـ(٣)=٩−٦+٤=٧

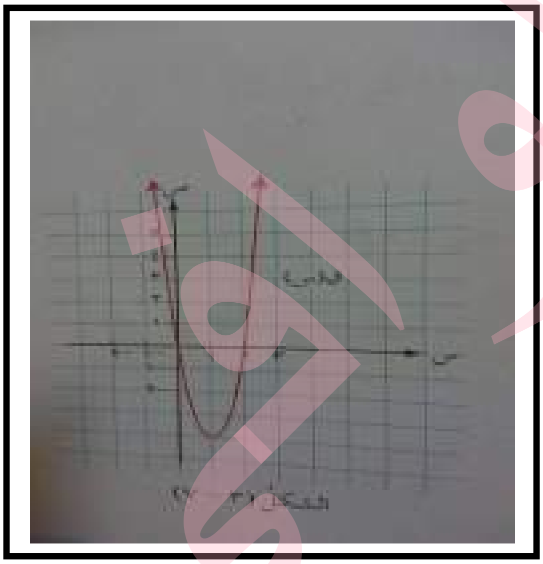
هـ(٠)=٠−٠+٤=٤ هـ(٢)=٤−٤+٤=٤

- **نعين النقاط على المستوى الإحداثي ، ثم نصل بينها بخط منحن ، كما في الشكل المجاور .**



٧) يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران التربيعي ق ،

اكتب قاعدة الاقتران معتمداً على الرسم .



الحل : ق(س) = أس^{٢} + ب س + جـ

لإيجاد قاعدة الاقتران ، نجد قيم أ ، ب ، جـ

الاقتران يقطع محور الصادات في النقطة (٠ ، ٠) ← $\boxed{جـ = ٠}$ ...(١)

معادلة محور التماثل س = ١ = $\frac{-ب}{٢أ}$ ← $\boxed{ب = -٢أ}$ ...(٢)

(١ ، −٤) **نقطة رأس المنحنى** ق(١) = −٤ ← $\boxed{أ+ب+جـ = -٤}$ ...(٣)

وبتعويض المعادلتين (١)،(٢) في معادلة (٣) أ − ٢أ + ٠ = −٤ ← $\boxed{أ = ٤}$

وبتعويض قيمة أ في م (٢) ← $\boxed{ب = -٨}$ **منها قاعدة الاقتران** $\boxed{ق(س) = ٤س^{٢} - ٨س}$

٨) إذا علمت أن منحنى الاقتران التربيعي ق يقطع محور السينات عندما س = –٢ ، س = ٢ ، ويمر بالنقطة (١ ، –٣) ، جد قاعدة الاقتران ق ، ثم ارسم منحناه مستخدما برنامج إكسل .

الحل :

قاعدة الاقتران ق(س) = أس^{٢} + ب س + جـ

منحنى الاقتران يقطع محور السينات في النقطتين (–٢ ، ٠) ، (٢ ، ٠) ، إذاً :

معادلة محور التماثل س = $\frac{-\text{ب}}{\text{٢أ}} = \frac{-٢+٢}{٢} = ٠ \leftarrow \boxed{\text{ب} = ٠}$

تصبح قاعدة الاقتران ق(س) = أ س^{٢} + جـ ، وبتعويض النقطتين (١ ، –٣) ، (٢ ، ٠)

(١ ، –٣) ← ق(١) = –٣ ← أ + جـ = –٣ ....(١)

(٢ ، ٠) ← ق(٢) = ٠ ← ٤أ + جـ = ٠ .....(٢)

وبحل المعادلتين (١) ، (٢) بطريقة الحذف أو التعويض نجد أن $\boxed{\text{أ} = ١ ، \text{ب} = -٤}$

إذاً قاعدة الاقتران هي : ق(س) = س^{٢} – ٤

٩) قذف جسيم إلى أعلى وفق العلاقة : ف(ن) = ٨٠ن – ٥ن^{٢} ، حيث ف : الارتفاع بالأمتار ، ن : الزمن بالثواني ، جد أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم .

الحل :

قاعدة العلاقة بالصورة العامة : ف(ن) = –٥ن^{٢} + ٨٠ن ← أ = –٥ ، ب = ٨٠ ، جـ = ٠

أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم هو الإحداثي الصادي لنقطة الرأس

الإحداثي السيني لنقطة الرأس $\frac{-\text{ب}}{\text{٢أ}} = \frac{-٨٠}{٢\times -٥} = \frac{٨٠}{١٠} = ٨$ث الزمن اللازم للوصول إلى أقصى ارتفاع

أقصى ارتفاع : ف(٨) = –٥×٦٤ + ٨٠×٨ ← ف(٨) = –٣٢٠ + ٦٤٠ = ٣٢٠ متراً .

١٠) جد العددين اللذين مجموعهما ٤٠ ، وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن ٠

الحل :

نفرض : العدد الأول س ⟵ العدد الثاني ٤٠ − س ،،، حاصل الضرب م

حاصل ضرب العددين = العدد الأول × العدد الثاني ⟵⟵ $\text{م} = \text{س}(\text{٤٠} - \text{س})$

$\text{م}(\text{س}) = -\text{س}^{\text{٢}} + \text{٤٠س}$ ⟵⟵ أ = −١ ، ب = ٤٠ ، جـ = ٠

معادلة محور التماثل $\text{س} = \frac{-\text{ب}}{\text{٢أ}} = \frac{-\text{٤٠}}{\text{٢}\times-\text{١}} = \frac{-\text{٤٠}}{-\text{٢}} = \text{٢٠} \leftarrow \boxed{\text{س} = \text{٢٠}}$

بما أن معامل $\text{س}^{\text{٢}} < \text{٠}$ **، يكون للاقتران قيمة عظمى عند** س = ٢٠ **العدد الأول**

إذاً العددان هما ٢٠ ، ٢٠

١١) اتفقت شركة استيراد وتصدير مع أحد المصانع على استيراد نوع من الماكنات ، بشرط أن يكون مقدار ما تربحه الشركة (ق) (مقدراً بآلاف الدنانير) مرتبطاً مع الزمن اللازم للاستيراد (ن) (مقدراً بالأسابيع) حسب العلاقة $\text{ق}(\text{ن}) = \text{٤ن} - \text{ن}^{\text{٢}}$ **، ما الزمن اللازم لتحصل الشركة على أكبر ربح ممكن ؟**

الحل :

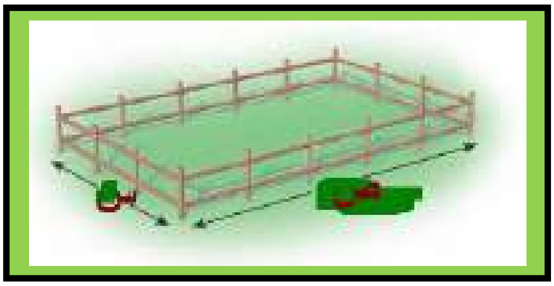
العلاقة $\text{ق}(\text{ن}) = \text{٤ن} - \text{ن}^{\text{٢}}$ **هي اقتران تربيعي تربط ما بين الربح والزمن ، لذلك تحصل الشركة على أكبر ربح عندما يكون لهذا الاقتران قيمة عظمى ٠**

بما أن معامل $\text{ن}^{\text{٢}} < \text{٠}$ **، تحصل الشركة على أكبر ربح عندما :**

$\text{ن} = \frac{-\text{ب}}{\text{٢أ}} = \frac{-\text{٤}}{\text{٢}\times-\text{١}} = \frac{-\text{٤}}{-\text{٢}} = \text{٢} \leftarrow \boxed{\text{س} = \text{٢}}$ أسبوع

١٢) حل المسألة الواردة في بداية الدرس ٠

يملك أحمد سياجاً طوله ٢٠ م ، ينوي عمل حظيرة بهذا السياج على شكل مستطيل ، ما أبعاد الحظيرة بحيث تكون مساحتها أكبر ما يمكن ؟



الحل :

- **نفرض بعدي الحظيرة س ،، ص**
- **محيط الحظيرة ٢٠**

$\leftarrow \text{٢س} + \text{٢ص} = \text{٢٠} \leftarrow \boxed{\text{س} + \text{ص} = \text{١٠}} \ldots (\text{١})$

- **نفرض مساحة الحظيرة م** $\leftarrow \text{م} = \text{س ص} \quad \ldots (\text{٢})$
- **من معادلة (١)** $\boxed{\text{ص} = \text{١٠} - \text{س}}$ **تعوض في معادلة (٢)**

$\text{م} = \text{س} \, (\text{١٠} - \text{س}) \leftarrow \boxed{\text{م}(\text{س}) = -\text{س}^{\text{٢}} + \text{١٠س}}$ **اقتران تربيعي**

بما أن معامل س $^{\text{٢}}$ $\prec$ **٠ ، يكون للاقتران قيمة عظمى عند** $\text{س} = \frac{-\text{ب}}{\text{٢أ}} = \frac{-\text{١٠}}{\text{٢} \times -\text{١}} = \text{٥}$

إذاً البعد الأول : س = ٥ متر ،، البعد الثاني ص = ١٠ ـ ٥ ← ص = ٥ متر

مثال (١٢) : للفائدة

الشكل المجاور ، يمثل نافذة مصممة على شكل نصف دائرة تعلو مستطيل ، إذا علمت أن محيط النافذة ١٦ قدم ، اكتب مساحة الدائرة على صورة اقتران تربيعي بدلالة س .

تذكر :

محيط الدائرة $= \text{٢}\pi\text{نو}$

مساحة الدائرة $= \pi\text{نو}^{\text{٢}}$

الحل :

أبعاد المستطيل س ، ص ،،،، نصف قطر الدائرة $= \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س}$

محيط المستطيل $= \text{س} + \text{٢ص}$ **(لماذا؟) ،،، محيط نصف الدائرة** $= \frac{\text{١}}{\text{٢}}\left(\text{٢}\pi \times \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س}\right) = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\pi\text{س}$

محيط المستطيل + محيط نصف الدائرة = محيط النافذة

$\text{س} + \text{٢ص} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}\pi\text{س} = \text{١٦} \leftarrow \text{٢س} + \text{٤ص} + \pi\text{س} = \text{٣٢} \leftarrow \boxed{\text{٤ص} + (\text{٢} + \pi)\text{س} = \text{٣٢}} \ldots (\text{١})$

- **مساحة المستطيل** $= س\ ص$ ،، **مساحة نصف الدائرة** $= \frac{١}{٢}\left(\pi \times \left(\frac{١}{٢} س\right)^{٢}\right) = \frac{١}{١٦}\pi س^{٢}$

مساحة النافذة (م) = مساحة المستطيل + مساحة نصف الدائرة

$$م = س ص + \frac{١}{١٦}\pi س^{٢} \ldots\ldots (٢)$$

لكن من معادلة (١) $٤ص + (٢ + \pi) س = ٣٢ \leftarrow ص = ٨ - \left(\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\pi\right) س$

وبالتعويض في معادلة (٢) : نجد مساحة النافذة بدلالة س

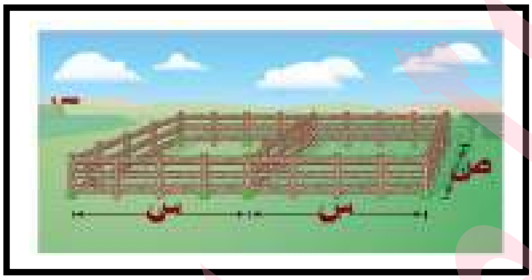
$$م = س\left(٨ - \left(\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\pi\right) س\right) + \frac{١}{١٦}\pi س^{٢}$$

$$= ٨س - \frac{١}{٢} س^{٢} - \frac{١}{٢}\pi س^{٢} + \frac{١}{١٦}\pi س^{٢}$$

$$= ٨س - \frac{١}{٢} س^{٢} - \frac{٧}{١٦}\pi س^{٢}$$

$$= ٨س - \left(\frac{١٥ + \pi}{١٦}\right) س^{٢}$$

سؤال (١) :



يمتلك أبو فوزي 200 متراً من السياج ، ينوي

عمل حظيرتين بهذا السياج (الشكل)

١) اكتب مساحة الحظيرتين كاقتران تربيعي بدلالة س .

٢) جد أبعاد كل حظيرة لتكون مساحة كل منهما أكبر ما يمكن

سؤال (٢) :

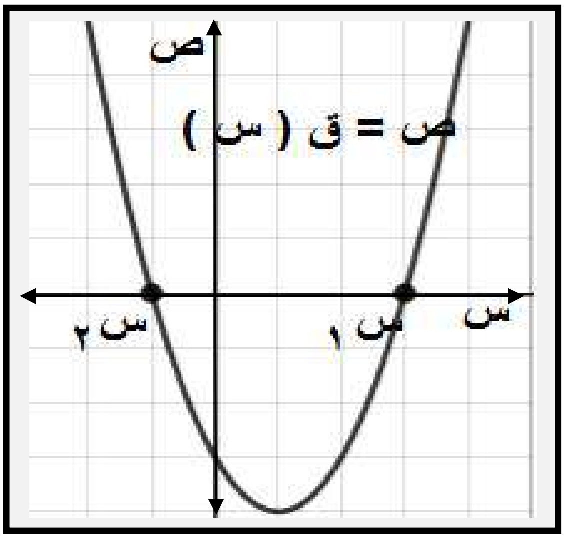
لشركة تجارية إذا كان الإيراد (د) (بالدينار) مرتبطا مع سعر سلعة (س) (بالدينار) تبيعها ،حسب العلاقة التالية:

د (س) = - ١٢ س٢ + ١٥٠ س

١)جد الإيراد إذا كان سعر السلعة : ٤ دينار ، ٦ دينار ، ٨ دينار

٢)جد سعر السلعة التي يكون عندها الإيراد أكبر ما يمكن

٣ – ٢ أصفار الاقتران التربيعي



- **يمثل الشكل المجاور منحنى الاقتران التربيعي ق (س)**

لاحظ أن منحنى الاقتران يقطع محور السينات عند

$س = س_{١}$ ، $س = س_{٢}$ ، وهذا يعني أن الإحداثي

الصادي لكلا النقطتين يساوي صفراً ، أي أن :

$ق(س_{١}) = ٠$ ، $ق(س_{٢}) = ٠$

يسمى العددان $س_{١}$ ، $س_{٢}$ <u>أصفار الاقتران التربيعي</u>

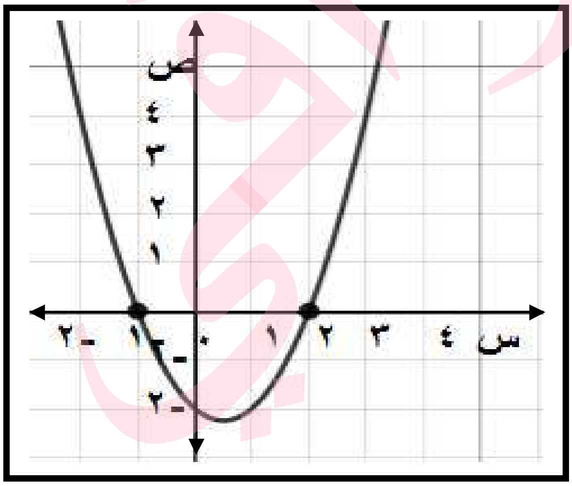
تعريف

- **إذا كان ق اقتراناً تربيعياً ، فإن الإحداثي السيني لنقط تقاطع منحنى الاقتران مع محور السينات تمثل أصفار هذا الاقتران .**
- **أي أن العدد $س_{١}$ يسمى صفراً للاقتران ق إذا كان ق ($س_{١}$) =٠ ، حيث $س_{١}$ عدد حقيقي**

مثال (١٣) : مثال (٣ – ٧) كتاب مدرسي ص٩٣

ارسم منحنى الاقتران $ق(س) = س^{٢} - س - ٢$ ، ثم اعتمد على الرسم في إيجاد أصفاره .

الحل :



من الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق (س)

لاحظ أن منحى الاقتران ق (س) يقطع محور السينات

في النقطتين $(-١ ، ٠)$ ، $(٢ ، ٠)$ ، وبما أن أصفار

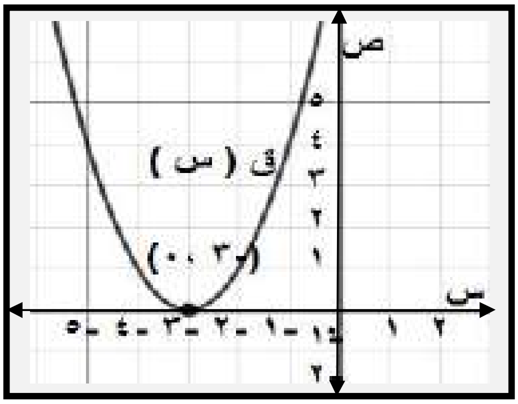
الاقتران هي الإحداثي السيني لنقط تقاطع منحنى الاقتران

إذاً صفري الاقتران هما $(س = -١)$ ، $(س = ٢)$

مثال (١٤) :

ارسم منحنى الاقتران $ن(س) = س^{٢} + ٦س + ٩$ ، ثم اعتمد على الرسم في إيجاد أصفاره ٠

الحل :



من الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق (س)

لاحظ أن منحى الاقتران ق (س) يقطع محور السينات

في النقطة (– ٣ ، ٠) ، وبما أن أصفار الاقتران هي

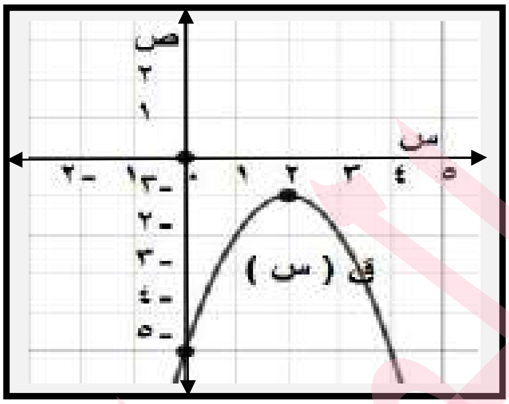
هي الإحداثي السيني لنقط تقاطع منحنى الاقتران إذاً صفر

الاقتران هو (س = – ٣)

مثال (١٤) :

ارسم منحنى الاقتران $ن(س) = -س^{٢} + ٤س - ٥$ ، ثم اعتمد على الرسم في إيجاد أصفاره ٠

الحل :



لاحظ من الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران

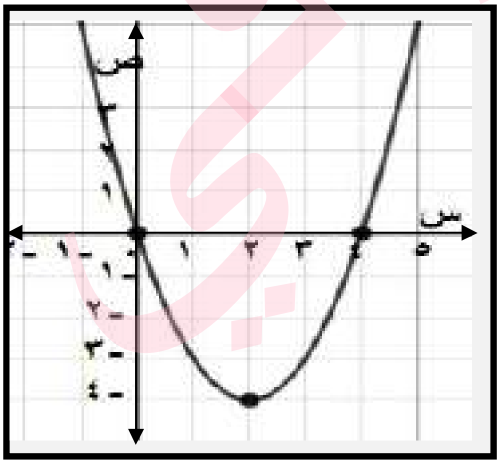
ق (س) أن منحنى الاقتران لا يقطع محور السينات

نهائياً ، لذلك فإنه لا يوجد أصفار للاقتران ٠

حل تدريب (٣ – ٧) ص ٩٤

ارسم منحنى الاقتران ق بيانياً ، حيث $ن(س) = س^{٢} - ٤س$ ، ثم اعتمد على الرسم في إيجاد أصفار الاقتران ق ٠

الحل :



من الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق (س)

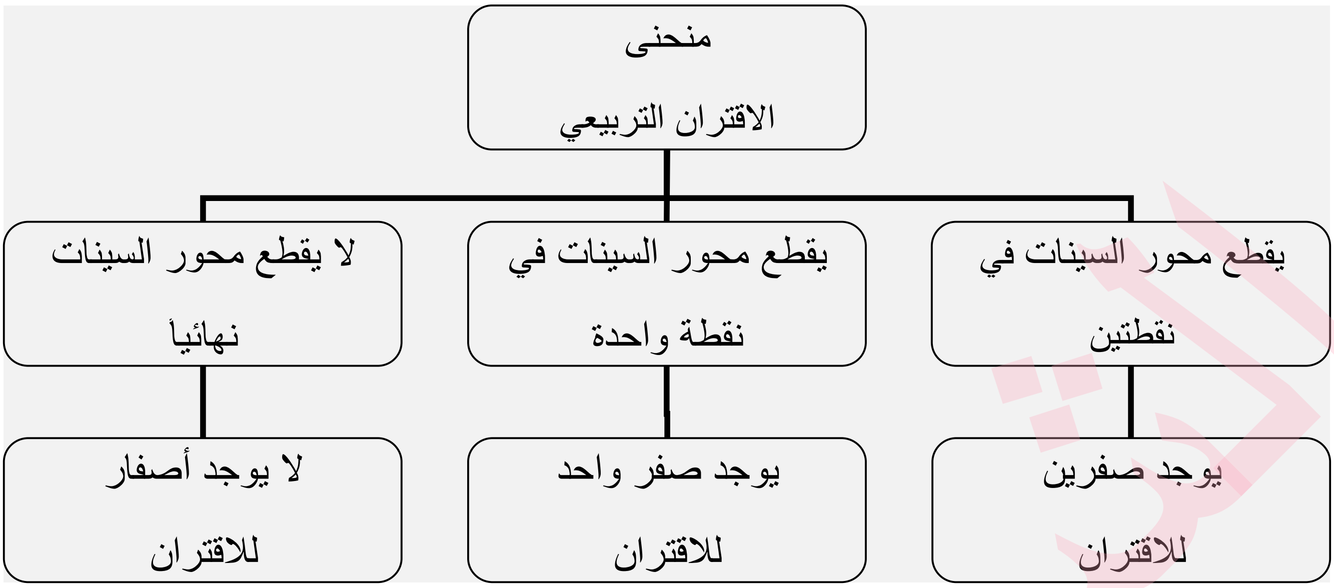
لاحظ أن منحى الاقتران ق (س) يقطع محور السينات

في النقطتين (٠ ، ٠) ، (٤ ، ٠) ، وبما أن أصفار

الاقتران هي الإحداثي السيني لنقط تقاطع منحنى الاقتران

إذاً صفري الاقتران هما (س = ٠) ، (س = ٤)

لاحظ من خلال الأمثلة السابقة



مثال (١٥) :

أي من الأعداد ٢ ، ٠ ، −١ ، −٨ ، ٨ يعتبر صفراً للاقتران $ق(س) = س^{٢} - ٧س - ٨$:

الحل : نعوض كل عدد في قاعدة الاقتران ، والعدد الذي ناتج تعويضه = ٠ ، يعتبر صفراً للاقتران

العدد	الاقتران $ق(س) = س^{٢} - ٧س - ٨$	الحكم
٢	$ق(٢) = ٤ - ١٤ - ٨ = -١٨$	ليس صفراً للاقتران
٠	$ق(٠) = -٠ - ٠ - ٨ = -٨$	ليس صفراً للاقتران
-١	$ق(-١) = ١ + ٧ - ٨ = ٠$	صفراً للاقتران
-٨	$ق(-٨) = ٦٤ + ٥٦ - ٨ = ١١٢$	ليس صفراً للاقتران
٨	$ق(-٨) = ٦٤ - ٥٦ - ٨ = ٠$	صفراً للاقتران

حل تدريب (٣ – ٨) ص ٩٤

إذا علمت أن العدد (٧) هو صفراً للاقتران ق : $ق(س) = أس^{٢} - ٤س - ٢١$ ، أوجد قيمة الثابت أ ؟

الحل : ٧ صفراً للاقتران ← $ق(٧) = ٠$ ،، نعوض ٧ في قاعدة الاقتران ق

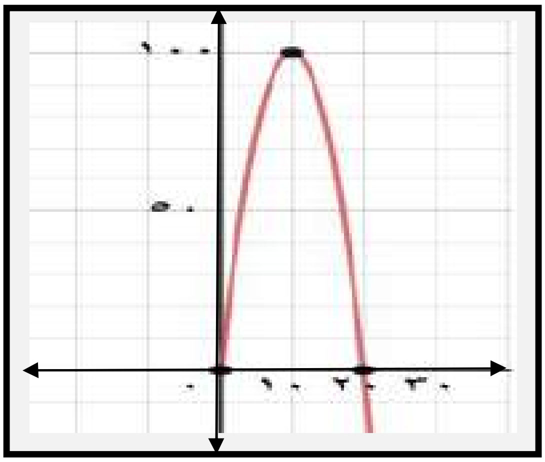
$$ق(٧) = أ(٧)^{٢} - ٤(٧) - ٢١ = ٠ \leftarrow ٤٩أ - ٢٨ - ٢١ = ٠$$

$$٤٩أ - ٤٩ = ٠ \leftarrow ٤٩أ = ٤٩ \leftarrow \boxed{أ = ١}$$

حل تدريب (٣ – ٩) ص٩٥

يبيع مربي دواجن (س) بيضة يومياً ، إذا كان الربح الذي سيحصل عليه عند بيعها ممثلاً في العلاقة : $ص = ٤٠س - س^{٢}$ (قرشاً) ، استخدم برنامج إكسل لمعرفة عدد البيض اللازم بيعه ليكون الربح صفراً ، وما عدد البيض اللازم بيعه لتحقيق أكبر ربح ممكن ؟ وما مقدار الربح آنذاك ؟

الحل : باستخدام برنامج ديسموس



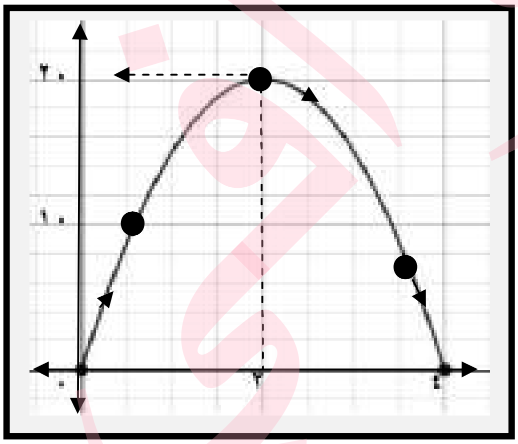
- **بما أن عدد البيض لا يمكن أن يكون سالباً ، فإن مجال العلاقة هو س ≥ ٠**
- **من خلال الرسم تلاحظ أن الربح يساوي صفراً عندما س = ٢٠ ،، عند س = ٠ لم يبع أي بيضة**
- **لتحقيق أكبر ربح يجب عليه بيع ١٠ بيضات ، ويكون مقدار الربح ١٠٠ قرشاً ٠**

مثال (١٦) :

قذفت كرة إلى الأعلى من سطح الأرض بسرعة ابتدائية مقدارها ٢٠ م/ ث ، فإذا كان ارتفاع الكرة (ف) بالأمتار بعد (ن) ثانية معطى وفقاً للقاعدة ف : $ف(ن) = ٢٠ن - ٥ن^{٢}$

- **متى تعود الكرة إلى سطح الأرض ؟**
- **ما أقصى ارتفاع ممكن أن تصله الكرة ؟**

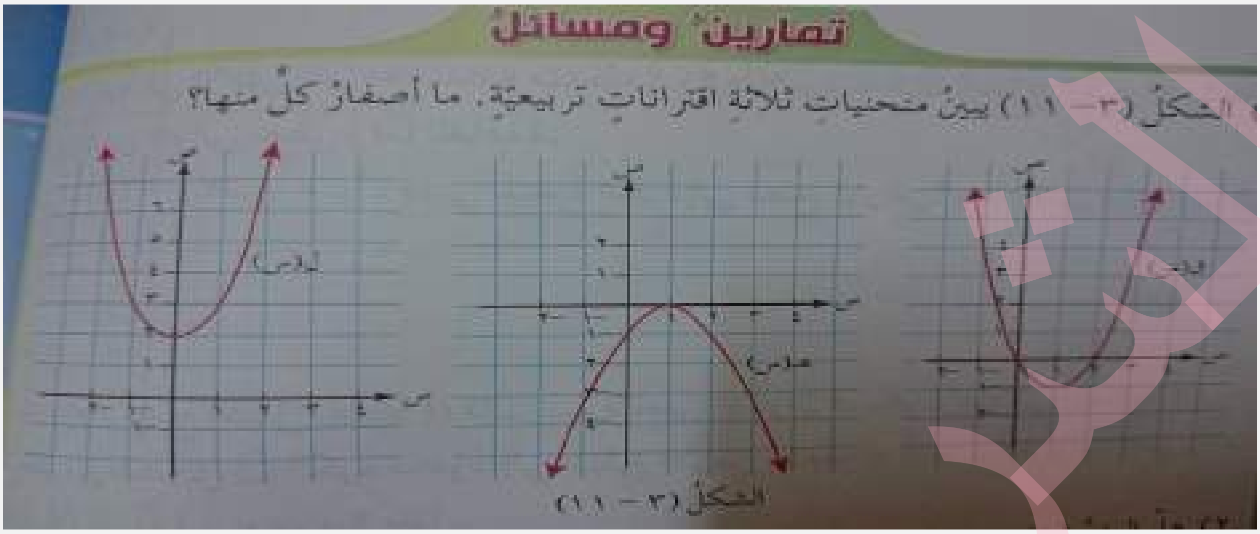
الحل :



- **الشكل المجاور يمثل منحنى العلاقة بين الزمن ومسار الكرة ٠**
- **لاحظ أن الكرة تعود إلى سطح الأرض بعد مرور ٤ ثوان**
- **أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة هو بعد مرور ثانيتين ويساوي ٢٠ متراً ٠**

حل تمارين ومسائل ص٩٦

١) الشكل يبين منحنيات ثلاثة اقترانات تربيعية ، ما أصفار كل منها ؟



تمارين ومسائل

١) الشكل (٣−١١) يبين منحنيات ثلاثة اقترانات تربيعية. ما أصفار كلٍّ منها؟

الشكل (٣−١١)

الحل : (س = ٠) ، (س = ٢)   (س = ١)   **لا يوجد**

٢) هل العدد (١) صفر للاقتران ق : ق (س) = ٥س^{٢} + س − ٦ ؟ **برر إجابتك ؟**

الحل :

نجد ق(١) ← ق (١) = ٥(١)^{٢} + ١ − ٦ = ٥ + ١ − ٦ = ٠

وبما أن ق(١) = ٠ ، **إذاً العدد (١) صفر للاقتران .**

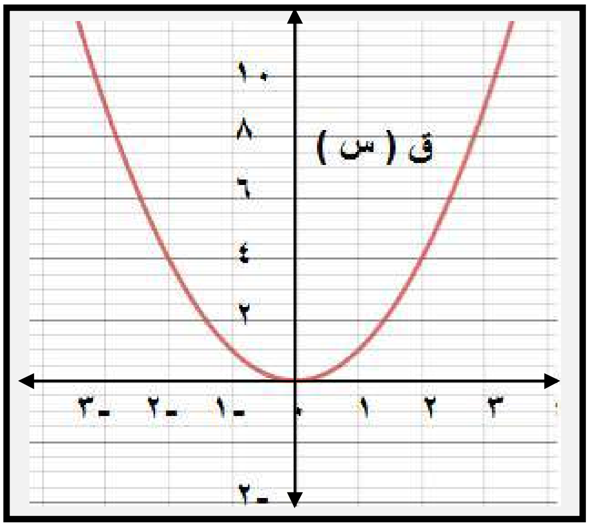
٣) ارسم منحنى الاقترانات التالية ، ثم جد أصفار كل منها :

أ) ق (س) = س^{٢} ب) ه(س) = س − $\frac{١}{٢}$س^{٢} جـ) ق(س) = ٤ + س^{٢} − ٤س

الحل :

أ) ق (س) = س^{٢} ←←← أ = ١ ، ب = ٠ ، جـ = ٠

- $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{٠}{٢}$ = ٠ ←← ق(٠) = (٠)^{٢} = ٠ ← (٠ ، ٠) **نقطة الرأس للمنحنى**



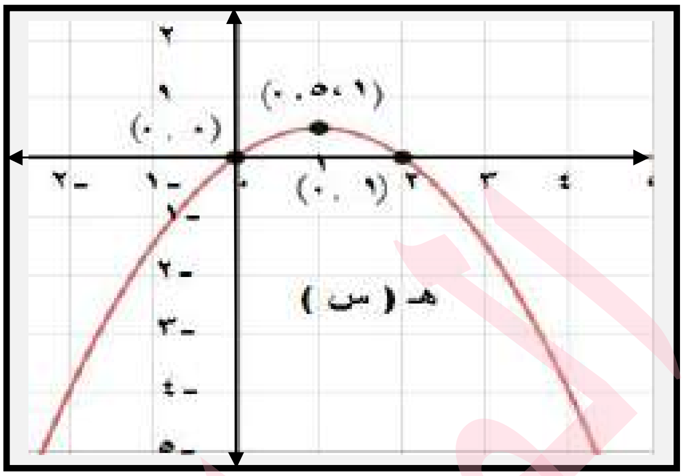
س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣
ص = ق (س)	٩	٤	١	٠	١	٤	٩

صفر الاقتران (س = ٠)

ب) هـ(س) = $-\frac{١}{٢}$س^{٢} + س ← ← ← ا = $\frac{١}{٢}$ ، ب = ١ ، جـ = ٠

$\frac{-ب}{٢ا}$ = $\frac{-١}{٢ \times \frac{-١}{٢}}$ = ١ ← ← ن(١) = $\frac{-١}{٢}$(١)^{٢} + ١ = ٠و٥ ← (١ ، ٠و٥) **نقطة الرأس للمنحنى**

س	ص = $\frac{-١}{٢}$ س ^{٢} + س	(س ، ص)
-٢	$\frac{-١}{٢}$ × ٤ + -٢ = -٤	(-٢ ، -٤)
-١	$\frac{-١}{٢}$ × ١ + -١ = -١و٥	(-١ ، -١و٥)
٠	$\frac{-١}{٢}$ × ٠ + ٠ = ٠	(٠ ، ٠)
١	$\frac{-١}{٢}$ × ١ + ١ = ٠و٥	(١ ، ٠و٥)
٢	$\frac{-١}{٢}$ × ٤ + ٢ = ٠	(٢ ، ٠)
٣	$\frac{-١}{٢}$ × ٩ + ٣ = -١و٥	(٣ ، -١و٥)
٤	$\frac{-١}{٢}$ × ١٦ + ٤ = -٤	(٤ ، -٤)



صفري الاقتران (س = ٠) ، (س = ٢)

٤) إذا كان العدد ٢ صفراً للاقتران ن (س) = اس^{٢} + ب س + ٦ ، وكان ن (١) = ٢ ، فجد قيمة كل من العددين الحقيقين ا ، ب

الحل :

- **لاحظ أنه يوجد مجهولان هما ا ، ب لذلك يجب أن يكون لدينا معادلتان لإيجاد قيمة كل منهما .**
- **في السؤال يوجد لدينا معلومتان نستطيع من خلالهما تكوين المعادلتين :**

المعلومة الأولى : العدد ٢ صفراً للاقتران ن (٢) = ٠ ، ومن خلال تعويض العدد ٢ في قاعدة الاقتران : ن (٢) = ٠ ← ٤ا + ٢ب + ٦ = ٠ ← $\underbrace{\text{٤ا + ٢ب = -٦}}_{\div ٢}$ ← $\boxed{\text{٢ا + ب = -٣}}$ ....(١)

المعلومة الثانية : ن (١) = ٢ نعوض العدد ١ في قاعدة الاقتران ق

ن (١) = ٢ ← أ + ب + ٦ = ٢ ← $\boxed{\text{أ + ب = −٤}}$ . . . .(٢)

وبحل المعادلتين (١) ، (٢) ، باستخدام طريقة الحذف أو التعويض (نستخدم الحذف)

{ ٢أ + ب = −٣ ، −١ × (أ + ب = −٤) } ← { ٢أ + ب = −٣ ، −أ − ب = ٤ } $\xrightarrow{\text{م١ + م٢}}$ $\boxed{\text{أ = ١}}$

وبتعويض قيمة أ **في معادلة (٢)** ← ١ + ب = −٤ ← $\boxed{\text{ب = −٥}}$

إذاً قيمة كل من العددين الحقيقين أ ، ب هما : (أ = ١) ، (ب = −٥)

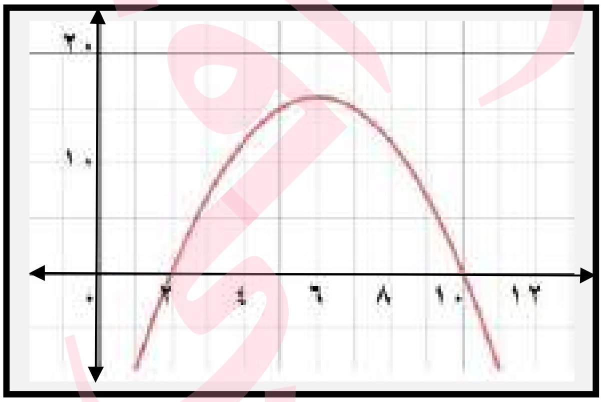
٥) يتغير بعدا مستطيل ، بحيث يبقى محيطه ٢٤ سم ، جد طوله عندما تصبح مساحته ٢٠ سم٢ .

الحل :

- **نفرض بعدي المستطيل : الطول = س ،، العرض = ص**
- **محيط المستطيل = ٢٤** ← $\underbrace{\text{٢س + ٢ص = ٢٤}}_{\text{÷٢}}$ ← س + ص = ١٢ ← $\boxed{\text{ص = ١٢ − س}}$ . . . .(١)
- **المساحة (م) = ٢٠** ← م = س ص ← $\boxed{\text{م = س ص = ٢٠}}$ . . . .(٢)
- **وبتعويض معادلة ١ في معادلة ٢ وكتابة الاقتران بدلالة س**

م(س) = س (١٢ − س) − ٢٠ ← $\boxed{\text{م(س) = −س}^{٢}\text{ + ١٢س − ٢٠}}$

- **نمثل الاقتران بيانياً**



لاحظ أن منحنى الاقتران يقطع محور السينات عند

س = ١٠ ،، س = ٢

- **عند س = ١٠ ← ص = ٢**
- **عند س = ٢ ← ص = ١٠**

وبما أن الطول أكبر من العرض إذاً : الطول س = ١٠ سم .

٦) أضيف مربع العدد الموجب س إلى العدد ٢٥ وطرح من الناتج ١٠ أمثال س ، وكان ناتج الطرح صفراً ، كيف يمكنك معرفة قيمة س ؟

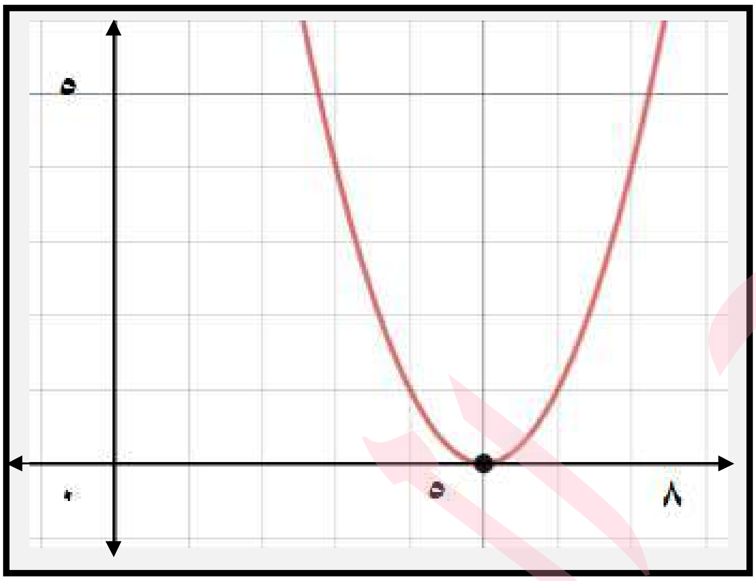
الحل :

العدد س ⟵ مربع العدد س = $س^{٢}$ ،، ١٠ أمثال س = ١٠ س

نكتب المعادلة لفظاً :

مربع العدد س + ٢٥ – ١٠ س = ٠ ← $س^{٢} - ١٠س + ٢٥ = ٠$

نفرض أن $ق(س) = س^{٢} - ١٠س + ٢٥$ ونمثل الاقتران بيانياً ، نقطة تقاطع منحناه مع محور السينات هي قيمة س المطلوبة .



لاحظ أن منحنى الاقتران يقطع محور السينات عند س = ٥

إذاً قيمة س هي ٥

٣ ـ ٣ حل المعادلة التربيعية بيانياً

::: المعادلة الخطية بمتغير واحد :

الصورة العامة : ← أ س + ب = ٠ ، أ ≠ ٠

تعلمت في الصفوف السابقة على المعادلة الخطية بمتغير واحد وطريقة إيجاد حل هذه المعادلة جبرياً

والمقصود بحل المعادلة : هو إيجاد قيمة (قيم) المتغير الذي يجعل المعادلة صائبة باستخدام الطرق الجبرية أو التمثيل البياني

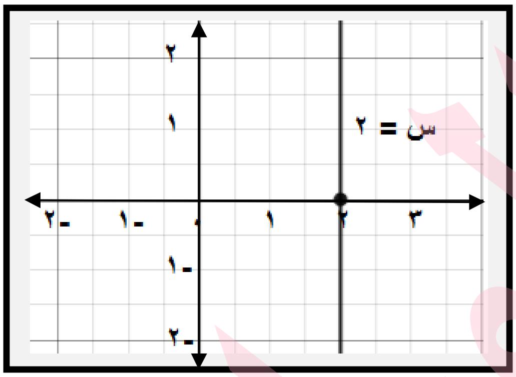
مثال (١٧) :

حل المعادلة ٢ س + ٣ = ٧ جبرياً ثم مثل الحل بيانيا :

الحل :

الطريقة الجبرية : نجعل المتغيرات في جهة والأعداد في الجهة الثانية باستخدام خصائص المساواة

$$\text{٢ س} + \underset{-٣}{٣} = \underset{-٣}{٧} \leftarrow \text{٢ س} = ٤ \leftarrow \frac{١}{٢} \times \text{٢ س} = ٤ \times \frac{١}{٢} \leftarrow \boxed{\text{س} = ٢}$$



لاحظ أن التمثيل البياني لحل المعادلة هو عبارة عن خط مستقيم

موازٍ لمحور الصادات ، ويقطع محور السينات عند س = ٢

في هذا الدرس سوف نتعرف على معادلة بمتغير واحد من الدرجة الثانية

لاحظ المعادلة ← $\text{س}^{٢} - \text{١٠ س} + ٢٥ = ٠$ تتكون من متغير واحد (س) وأعلى أس فيها ٢

تسمى مثل هذه المعادلة **معادلة تربيعية**

تعريف

- الصورة العامة للمعادلة التربيعية في متغير واحد هي $\text{أ س}^{٢} + \text{ب س} + \text{جـ} = ٠$
- حيث أ ≠ ٠ ، ويسمى العدد $\text{س}_{١}$ حلاً أو جذراً للمعادلة إذا كان $\text{أ س}_{١}^{٢} + \text{ب س}_{١} + \text{جـ} = ٠$

- **الصورة العامة للاقتران التربيعي :** ← $ق(س) = أس^{٢} + ب س + ج$

تسمى المعادلة ← $أس^{٢} + ب س + ج = ٠$ **المعادلة المرافقة للاقتران ق**

- **من طرق حل المعادلة التربيعية الحل البياني كما يلي :**

١) كتابة قاعدة الاقتران التربيعي بالصورة العامة الذي تكون هذه المعادلة مرافقة له .

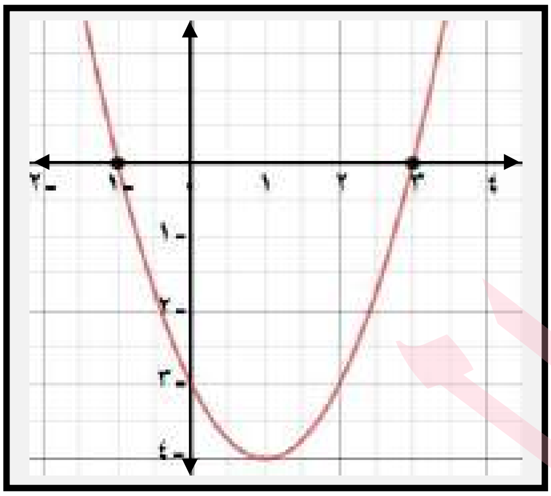
٢) رسم منحنى الاقتران التربيعي على المستوى الإحداثي .

٣) تحديد أصفار الاقتران التربيعي (إن وجدت) ، فتكون هذه الأصفار جذورا (حلاً) للمعادلة التربيعية .

مثال (١٨) : (٣ ـ ١٠) كتاب مدرسي

حل المعادلة التربيعية $س^{٢} - ٢س - ٣ = ٠$ **بالرسم**

الحل :



ليكن $ق(س) = س^{٢} - ٢س - ٣$ **، نمثل الاقتران بيانياً**

لاحظ من الشكل المجاور أن منحنى الاقتران ق يقطع محور السينات عند س = -١ ، س = ٣ ، وبناءً على ذلك

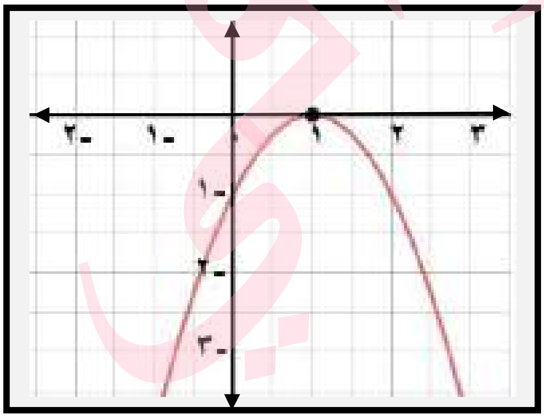
فإن للاقتران صفرين هما س = -١ ، س = ٣

فيكون س = -١ ، س = ٣ هما حلان (جذران) للمعادلة

إذاً مجموعة حل المعادلة $= \{ -١ ، ٣ \}$

<u>حل تدريب (٣ ـ ١٠) ص٩٩</u>

حل المعادلة التربيعية $٢س - س^{٢} - ١ = ٠$ **بالرسم**



الحل : نكتب المعادلة بالصورة العامة $- س^{٢} + ٢س - ١ = ٠$

نفرض $هـ(س) = - س^{٢} + ٢س - ١$

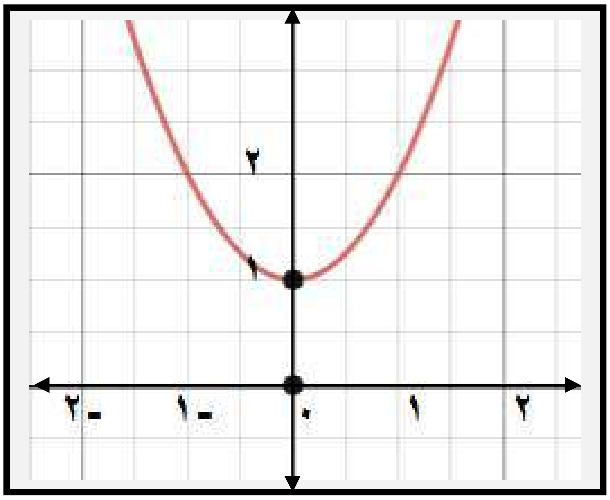
لاحظ من الرسم أن س = ١ ، هي صفر الاقتران هـ

يكون س = ١ هو حل (جذر) للمعادلة

إذاً مجموعة حل المعادلة $= \{ ١ \}$

مثال (١٩) :

حل المعادلة التربيعية $\text{س}^{٢}+١=٠$ بالرسم



الحل :

ليكن ل (س) = $\text{س}^{٢}+١$

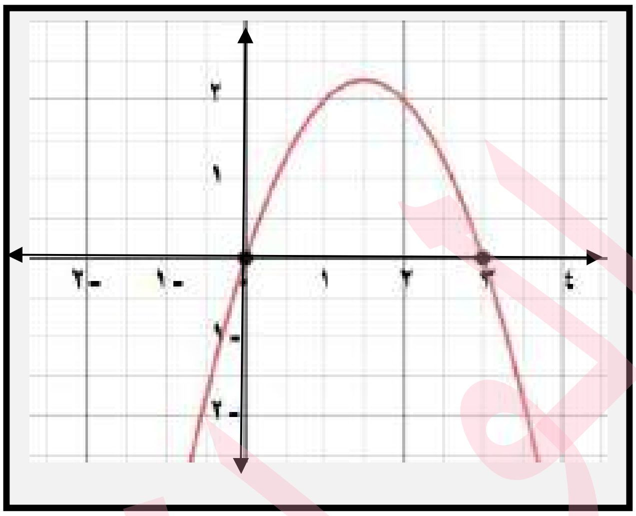
لاحظ أن منحنى الاقتران لا يقطع محور السينات

لذلك فإنه لا يوجد أصفار للاقتران ، فيكون لا يوجد

حل للمعادلة المرافقة للاقتران

إذاً مجموعة حل المعادلة = { } أو = ∅

مثال (٢٠) : (٣ – ١١) كتاب مدرسي



يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران التربيعي ق

جد حل المعادلة ق (س) = ٠ ، معتمداً على الشكل

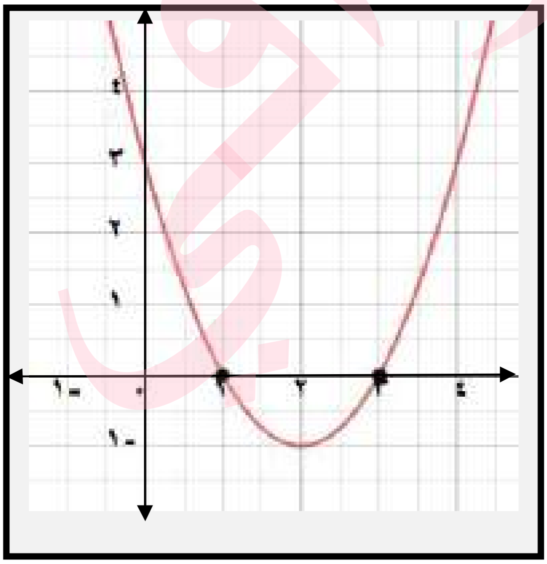
الحل :

أصفار الاقتران س= ٠ ، س = ٣

فيكون س= ٠ ، س = ٣ جذرا المعادلة المرافقة

إذاً مجموعة حل المعادلة = { ٠ ، ٣ }

حل تدريب (٣ – ١١) ص٩٩



يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران التربيعي ل

جد جذري المعادلة التربيعية المرافقة للاقتران ل

الحل :

من الرسم أصفار الاقتران س = ١ ، س = ٣

يكون جذرا المعادلة المرافقة س = ١ ، س = ٣

إذاً مجموعة حل المعادلة = { ١ ، ٣ }

إيجاد نقط التقاطع بين منحنيين

يتقاطع منحنى الاقتران ق مع منحنى الاقتران ل إذا كان ق (س) = ل (س)

وبشكل عام :

يتقاطع منحنيين الاقترانين ق ، ل عند النقطة (أ ، ب) **، إذا كان** (ق(أ) = ل(أ) = ب)

::: كيف نجد نقطة التقاطع بين منحنى اقترانين مثل ق ، ل :

١) نضع ق (س) = ل (س)

٢) نصفر المعادلة الناتجة من الخطوة السابقة لتصبح على الصورة ← أس^{٢} + ب س + جـ = ٠

٣) نفرض ك(س) = أس^{٢} + ب س + جـ **ثم نمثله بيانياً على المستوى الإحداثي**

٤) نحدد أصفار الاقتران ك (إن وجدت) ، التي هي نفسها جذور المعادلة المرافقة

٥) جذور المعادلة المرافقة = الإحداثي السني لنقط التقاطع

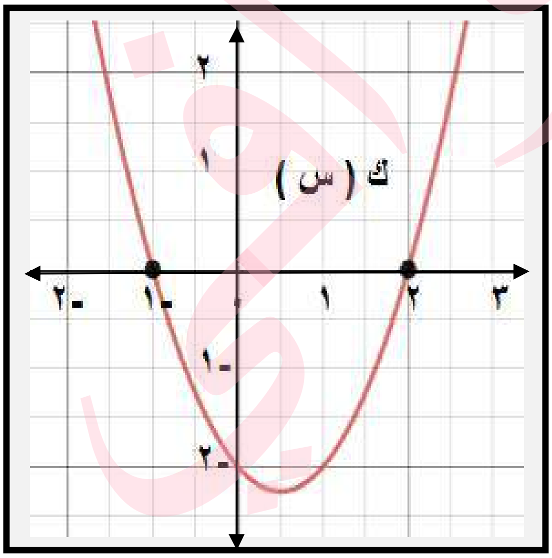
٦) لإيجاد نقط التقاطع (س ، ص) ، نعوض قيمة س في أي اقتران لإيجاد قيمة ص

مثال (٢١) :

جد نقطة (نقاط) تقاطع منحنى الاقتران ل (س) = س^{٢} + ١ **مع منحنى الاقتران** هـ (س) = س + ٣

الحل :

- ل (س) = هـ (س) ← س^{٢} + ١ = س + ٣ ← س^{٢} − س − ٢ = ٠ **نصفر المعادلة**



- **ليكن** ك (س) = س^{٢} − س − ٢
- **لاحظ من الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ك**

  أن جذور المعادلة المرافقة للاقتران ق هي عند

  س = ـ ١ ، س = ٢
- **إذاً نقط تقاطع المنحنيين هي :**

(−١ ، ق(−١)) $\xrightarrow{ق(−١)=(−١)^{٢}+١=٢}$ (−١ ، ٢)

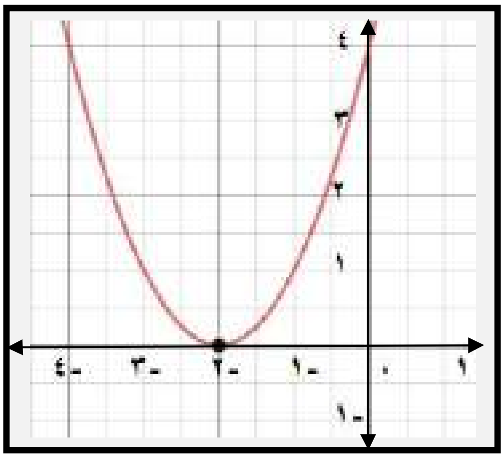
(٢ ، ق(٢)) $\xrightarrow{ق(٢)=(٢)^{٢}+١=٥}$ (٢ ، ٥)

مثال (٢٢) :

جد نقطة (نقاط) تقاطع منحنى الاقتران ل (س) = ٢س^{٢} + ٥س − ٥ **مع منحنى الاقتران** ن (س) = س^{٢} + س − ٩

الحل :

- ل (س) = ن (س) ← ٢س^{٢} + ٥س − ٥ = س^{٢} + س − ٩ ← س^{٢} + ٤س + ٤ = ٠
- **ليكن** ك (س) = س^{٢} − س − ٢
- **لاحظ من الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ك أن جذور المعادلة المرافقة للاقتران ق هي عند س = -٢**



- **إذاً نقط تقاطع المنحنيين هي :**

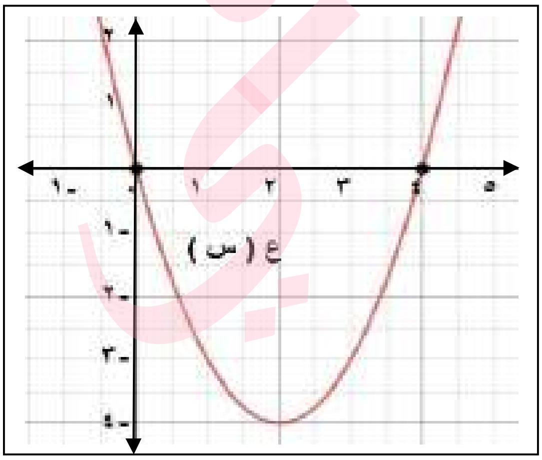
(−٢ ، ل (−٢)) $\xrightarrow[=٨−١٠−٥=−٧]{ل(−٢)=٢(−٢)^{٢}+٥(−٢)−٥=\downarrow}$ (−٢ ، −٧)

حل تدريب (٣ – ١٢) ص ١٠٠

جد نقطة (نقاط) تقاطع منحنى الاقتران ن (س) = س^{٢} **مع منحنى الاقتران** ل (س) = ٨س − س^{٢}

الحل :

- ن (س) = ل (س) ← س^{٢} = ٨س − س^{٢} ← $\underbrace{٢س^{٢} − ٨س = ٠}_{÷٢}$ ← س^{٢} − ٤س = ٠
- **ليكن** ع (س) = س^{٢} − ٤س
- **لاحظ من الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ك أن جذور المعادلة المرافقة للاقتران ع س= ٠ ، س = ٤**



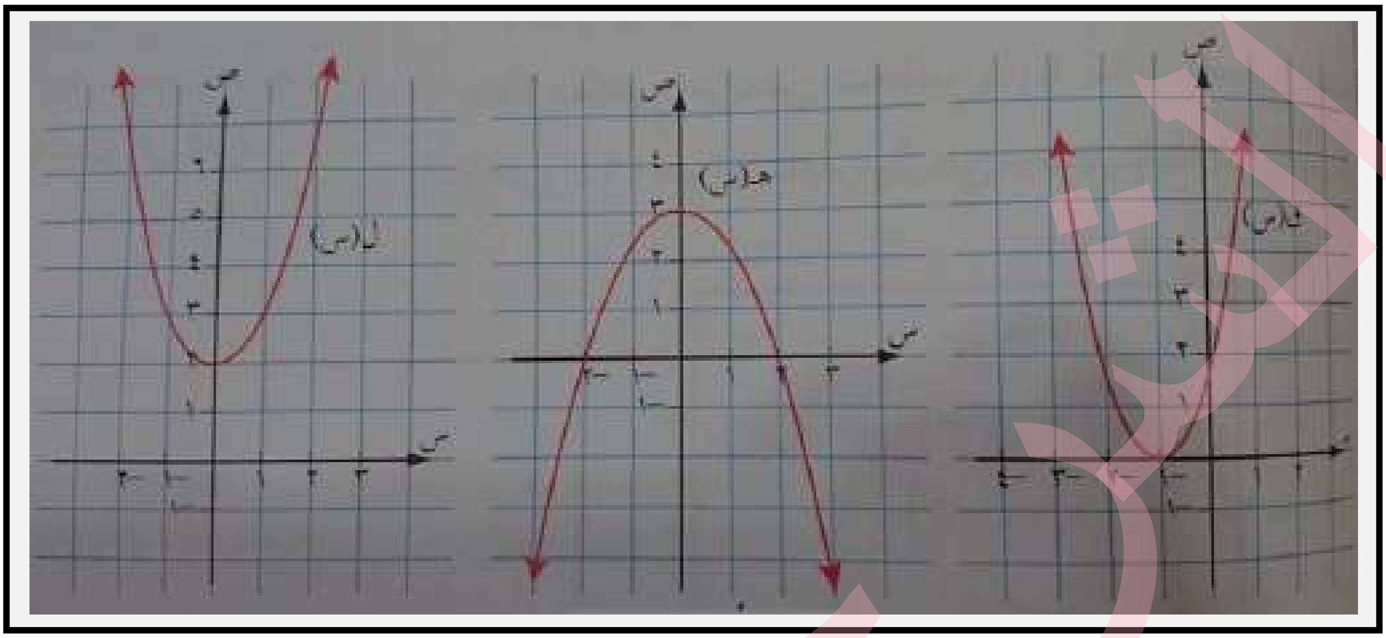
- **إذاً نقط تقاطع المنحنيين هي :**

(٠ ، ن (٠)) $\xrightarrow{ن(٠)=(٠)^{٢}=٠}$ (٠ ، ٠)

(٤ ، ن (٤)) $\xrightarrow{ن(٤)=(٤)^{٢}=١٦}$ (٤ ، ١٦)

حل تمارين ومسائل ص١٠١

١) يبين الشكل رسم منحنى الاقترانات التربيعية ق ، هـ ـ ل على الترتيب ، جد جذور المعادلة المرافقة لكل منهما .



الحل : س = -١ س = -٢ ، س = ٢ لا يوجد

٢) إذا قطع منحنى الاقتران التربيعي ق محور السينات عندما س = -١ ، س = ٥ ، فما جذور المعادلة التربيعية المرافقة للاقتران ق ؟

الحل :

س = -١ ، س = ٥ أصفار الاقتران ق ، هي نفسها جذور المعادلة التربيعية المرافقة للاقتران ق

٣) حل المعادلات الآتية مستخدماً برنامج إكسل :

أ) $٢س^{٢} + ٣س + ٤ = ٠$ ب) $٢ - ٢س - س^{٢} = ٠$

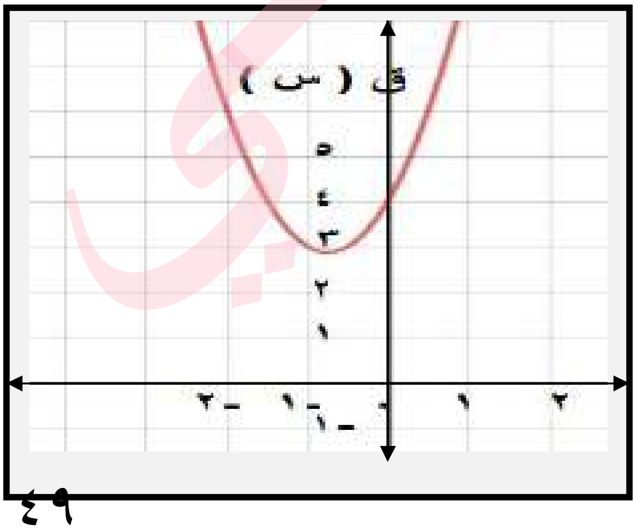
جـ) $س^{٢} - س + ٢٥و٠ = ٠$ د) $(س - ٢)^{٢} = ٠$

الحل : أ) $٢س^{٢} + ٣س + ٤ = ٠$

ليكن $ن(س) = ٢س^{٢} + ٣س + ٤$

لاحظ في الشكل المجاور أن منحنى الاقتران لا يقطع محور السينات

إذاً مجموعة حل المعادلة = { } أو = ∅



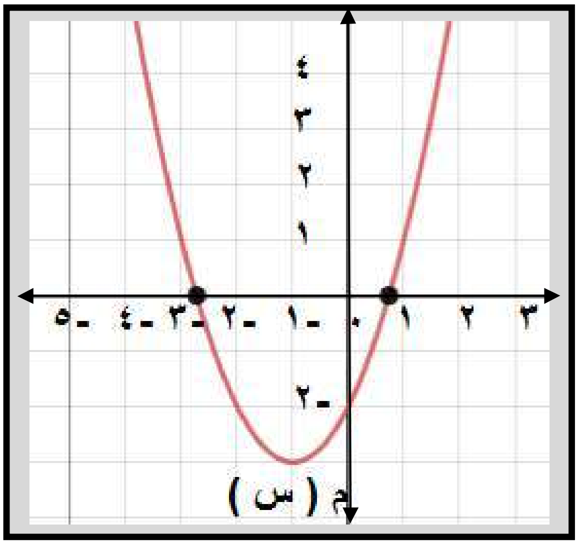
ب) ٢ – ٢س – س^{٢} = ٠

نعيد كتابة المعادلة على الصورة س^{٢} + ٢س – ٢ = ٠

ليكن م (س) = س^{٢} + ٢ س – ٢

لاحظ من الشكل المجاور أن منحنى الاقتران م يقطع محور السينات (تقريبا) عندما س = ٧و٠ ، س = –٧و٢ .

إذاً مجموعة حل المعادلة = { –٧و٢ ، ٧و٠ }

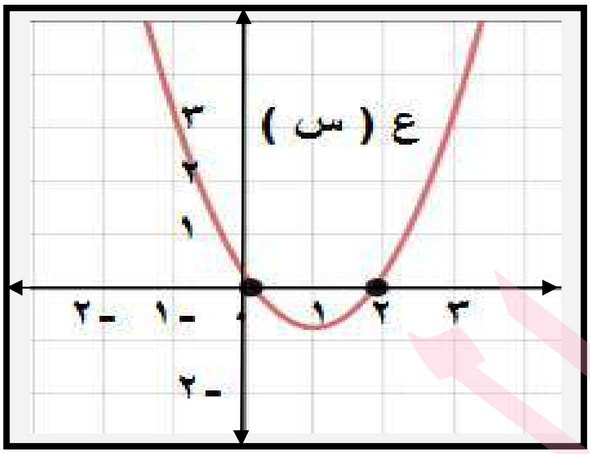


ج) س^{٢} – س + ٢٥و٠ = ٠ (يمكن تبسيط المعادلة والتخلص من الفاصلة العشرية)

ليكن ع(س) = س^{٢} – س + ٢٥و٠

لاحظ من الشكل المجاور أن منحنى الاقتران م يقطع محور السينات (تقريبا) عندما س = ١و٠ ، س = ٩و١ .

إذاً مجموعة حل المعادلة = { ٩و١ ، ١و٠ }



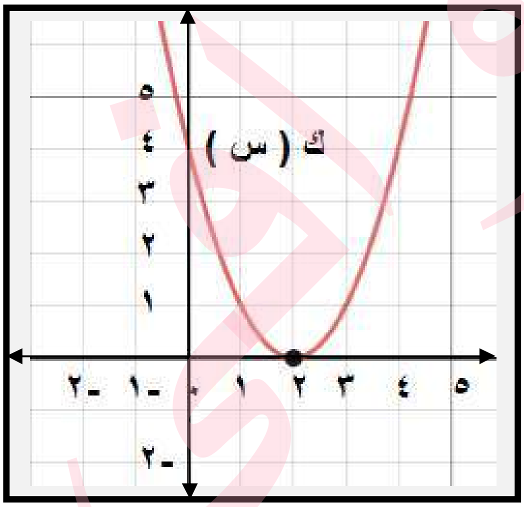
د) (س – ٢)^{٢} = ٠ نكتب المعادلة على الصورة العامة

(س – ٢)^{٢} = ٠ ← س^{٢} – ٤س + ٤ = ٠

ليكن ك(س) = س^{٢} – ٤س + ٤

لاحظ من الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ك أنه يقطع محور السينات عند س = ٢

إذاً مجموعة حل المعادلة = { س = ٢ }

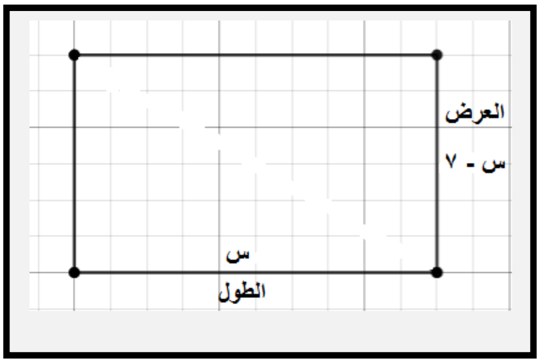


ملاحظة : في نهاية الوحدة إن شاء الله نتعلم طرق أخرى للرسم من خلال الصورة القياسية

٤) يزيد طول مستطيل عن عرضه بمقدار ٧ سم ، إذا علمت أن مساحة المستطيل ٦٠ سم٢ ، جد كلاً من طوله وعرضه .

الحل :

- **نفرض طول المستطيل س ⟵ العرض (س - ٧) : أنظر الشكل**



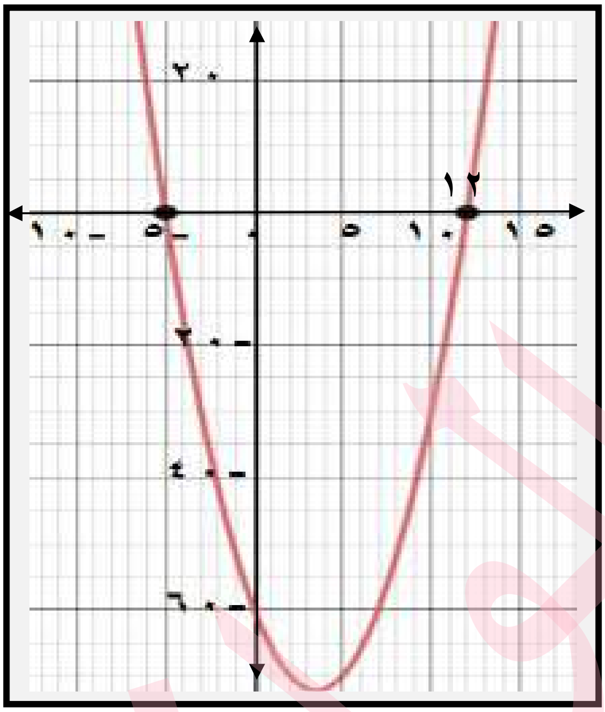
- **مساحة المستطيل (م) = الطول × العرض**

م = س (س − ٧) ⟵ س (س − ٧) = ٦٠

- **نكتب المعادلة في الخطوة السابقة على الصورة العامة**

س (س − ٧) = ٦٠ ⟵ س^{٢} − ٧س = ٦٠

س^{٢} − ٧س − ٦٠ = ٠



- **ليكن ق (س) = س^{٢} − ٧س − ٦٠**

- **لاحظ من الشكل المجاور أن منحنى الاقتران ق**

يقطع محور السينات عندما س = −٥ ، س = ١٢

إذاً مجموعة حل المعادلة = { −٥ ، ١٢ }

- **لكن بما أننا نتعامل مع أطوال إذاً :**

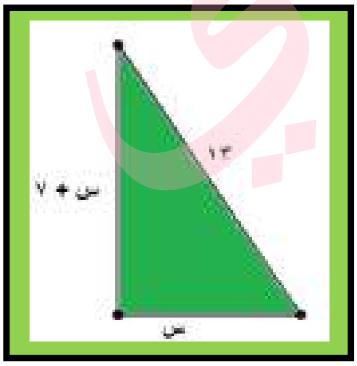
س = −٥ **مرفوضة**

س = ١٢ **سم هي طول المستطيل**

منها العرض = س ــ ٧ = ١٢ ــ ٧ = ٥ سم

٥) حديقة على شكل مثلث قائم الزاوية ، طول ضلعها الأكبر ١٣ م ، يزيد طول أحد ضلعي القائمة على طول الضلع الآخر بمقدار ٧ م ، جد طول ضلعي القائمة .

الحل :

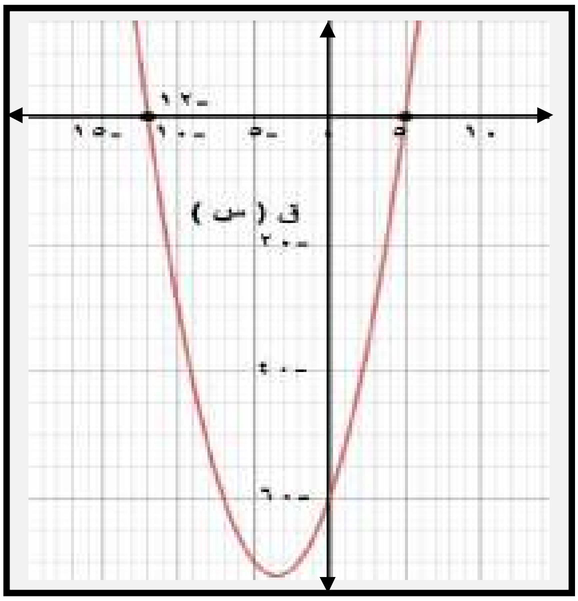


- **نفرض طول أحد ضلعي القائمة س ⟵ طول الضلع الآخر س + ٧**

- **نستخدم مبرهنة فيثاغورس**

- $\text{س}^{٢}+(\text{س}+٧)^{٢}=(١٣)^{٢} \leftarrow \text{س}^{٢}+\text{س}^{٢}+١٤\text{س}+٤٩=١٦٩$

$\underbrace{٢\text{س}^{٢}+١٤\text{س}-١٢٠=٠}_{÷٢} \leftarrow \text{س}^{٢}+٧\text{س}-٦٠=٠$



- **ليكن** $\text{ق}(\text{س})=\text{س}^{٢}+٧\text{س}-٦٠$
- **لاحظ من الشكل المجاور أن منحنى الاقتران ق**

يقطع محور السينات عندما س = −١٢ ، س = ٥

إذاً مجموعة حل المعادلة = { −١٢ ، ٥ }

- **لكن بما أننا نتعامل مع أطوال إذاً :**

س = −١٢ **مرفوضة**

س = ٥ م **طول ضلع القائمة الأولى**

منها طول ضلع القائمة الثانية = س +٧ = ٥ + ٧ = ١٢ م

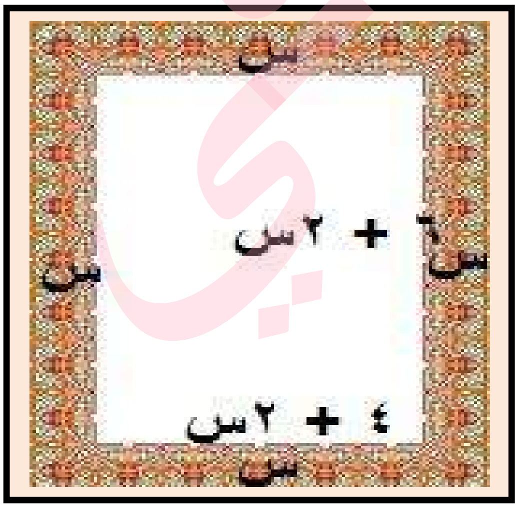
٦) المسألة الواردة في بداية الدرس

يراد إحاطة صورة مستطيلة الشكل طولها ٦ سم وعرضها ٤ سم ، بإطار عرضه متساو على الأطراف جميعها ، إذا كانت مساحة الإطار مع الصورة تساوي مثلي مساحة الصورة ، فجد عرض الإطار .

الحل :

- **نفرض عرض الإطار س ← طول الصورة والإطار = ٦ + ٢ س**

← عرض الصورة والإطار = ٤ + ٢ س

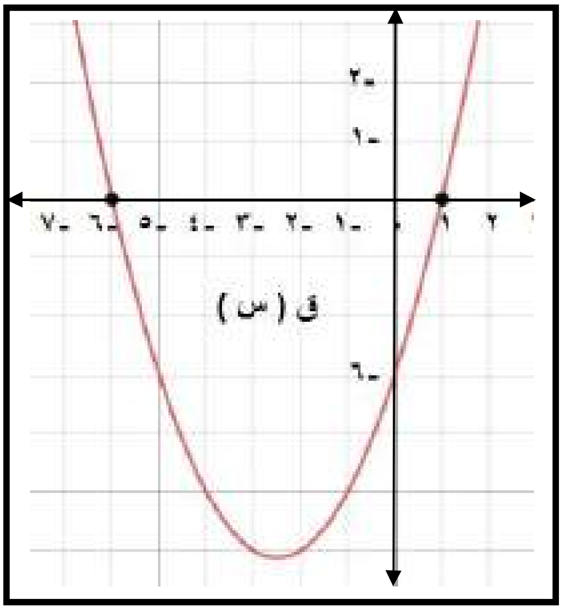


مساحة الإطار والصورة = مثلي مساحة الصورة

$(٤+٢\text{س})(٦+٢\text{س})=٢(٦\times٤) \leftarrow ٢٤+٢٠\text{س}+٤\text{س}^{٢}=٤٨$

$\underbrace{٤\text{س}^{٢}+٢٠\text{س}-٢٤=٠}_{÷٤} \leftarrow \text{س}^{٢}+٥\text{س}-٦=٠$

ليكن $\text{ق}(\text{س})=\text{س}^{٢}+٥\text{س}-٦$



- **لاحظ من الشكل المجاور أن منحنى الاقتران ق يقطع محور السينات عندما س = −٦ ، س = ١**
- **إذاً مجموعة حل المعادلة = { −٦ ، ١ }**
- **لكن بما أننا نتعامل مع أطوال إذاً :**

س = −٦ مرفوضة

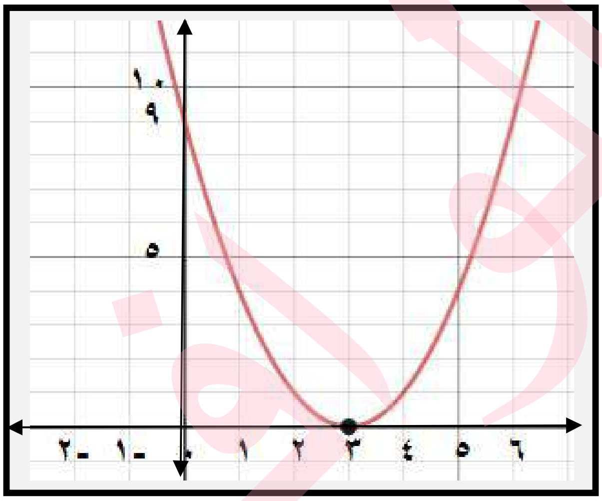
س = ١ سم عرض الإطار

٧) جد نقطة تقاطع منحنى كل من الاقترانين :

ن (س) = س^{٢} ، ل (س) = ٦س − ٩

الحل :

- ن(س) = ل(س) ← س^{٢} = ٦س − ٩ ← $\boxed{\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٩ = ٠}$
- **ليكن** ن(س) = س^{٢} − ٦س + ٩



لاحظ من الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ك أنه

يقطع محور السينات عند س = ٢

إذاً مجموعة حل المعادلة = { س = ٢ }

أي أن المنحنيين يتقاطعان عند النقطة

(٣ ، ن(٣)) $\xleftarrow{ن(٣)=(٣)^{٢}=٩}$ (٣ ، ٩)

٣ ـ ٤ حل المعادلة التربيعية بالتحليل إلى العوامل

مراجعة في تحليل العبارة التربيعية

الصورة العامة للعبارة التربيعية : $أس^{٢} + ب س + جـ$: $أ \neq ٠$

تحليل العبارة التربيعية :

- إذا كانت على الصورة $أس^{٢} + ب س + جـ$

$أ = ١$

- جـ موجبة ، ب موجبة أو سالبة
  - نفتح قوسين (س   ) (س   )
  - الإشارة بعد س حسب إشارة ب
  - ما هما العددان اللذان حاصل ضربهما جـ ومجموعهما ب ونضعهما بعد الإشارة
- جـ سالبة ، ب موجبة أو سالبة
  - نفتح قوسين (س   ) (س   )
  - في القوس الأول بعد س نضع إشارة ب ، وفي القوس الثاني إشارة مخالفة
  - ما هما العددان اللذان حاصل ضربهما جـ والفرق بينهما ب ، ونضع العدد الأكبر في القوس الأول

$أ \neq ١$

- نجعل أ = ١ إن أمكن أو
- نضرب كامل العبارة في أ ونكتبها على الصورة

$أ^{٢}س^{٢} + ب أس + أجـ$ ثم نكتبها

$(أس)^{٢} + ب(أس) + أجـ$ ثم نحللها كما في القسم الأيمن ،

- في النهاية نقسم القوسين على أ

مثال (١) : $٢س^{٢} + ٧س + ٣$

$$٢(٢س^{٢} + ٧س + ٣) = (٢س)^{٢} + ٧(٢س) + ٦$$

$$(٢س + ١)(٢س + ٦) = \underbrace{(٢س + ١) \times ٢(س + ٣)}_{÷٢}$$

$$= (٢س + ١)(س + ٣)$$

مثال (٢) : $٣س^{٢} + ١١س - ٤$

الحل بخطوات سريعة

$$(٣س)^{٢} + ١١(٣س) - ١٢ = (٣س + ١٢)(٣س - ١)$$

$$= (س + ٤)(٣س - ١)$$

جـ =	ب = ٠
أي على الصورة ﺃ س^{٢} + ب س	أي على الصورة ﺃ س^{٢}+جـ
إخراج س عامل مشترك	تحليل فرق بين مربعين بشرط أ ، ب مختلفي الإشارة

الخاصية الصفرية

- إذا كان ﺃ ، ب عدد ين حقيقيين وكان ﺃ × ب = ٠

فإن إما ﺃ = ٠ أو ب = ٠ أو كليهما يساوي صفراً

كيف نحل المعادلة التربيعية :

نكتب المعادلة على الصورة العامة

ﺃ س^{٢} + ب س+جـ = ٠

① ﺃ س^{٢} + ب س+جـ = ٠

② ﺃ س^{٢} + ب س = ٠

③ ﺃ س^{٢}+جـ = ٠

- نحلل الطرف الأيمن إلى عوامله الأولية بكتابته على شكل حاصل ضرب عبارتين خطيتين ٠
- استخدم الخاصية الصفرية ٠
- حل المعادلتين الخطيتين التي حصلت عليهما في الخطوة السابقة ٠

ملاحظة : ١) يجوز ضرب المعادلة بعدد حقيقي لا يساوي الصفر ، وكذلك القسمة

٢) بالنسبة للحالة الثالثة ، نستخدم الطريقة التالية في إيجاد حل المعادلة بالإضافة إلى طريقة فرق بين مربعين في التحليل

إذا كان س^{٢} = ك فإن س = ± $\sqrt{ك}$: ك ≥ ٠

ومجموعة الحل = { $\sqrt{ك}$ ، − $\sqrt{ك}$ }

مثال (٢٣) :

حل كل من المعادلات التربيعية الآتية :

١) س^{٢} + ٩س + ١٤ = ٠	٢) ٢س^{٢} − س − ١ = ٠	٣) س^{٢} = ٥س + ٦
٤) س^{٢} + ٩س = ٠	٥) س^{٢} − ٢س = ٠	٦) ٤س^{٢} = ٨س
٧) ٩ + س^{٢} = ٦س	٨) ٣٣ = س^{٢} + ٨س	٩) ٢س^{٢} + ٢س = ٢٤
١٠) ٤س^{٢} + ١ = ٤س	١١) ٦س^{٢} = ١١س + ١٠	١٢) س^{٢} − ٩ = ٠
١٣) ٤س^{٢} = ٢٥	١٤) ٣س^{٢} − ١ = ٠	١٥) س^{٢} + ٩ = ٠

الحل :

١) س^{٢} + ٩س + ١٤ = ٠ **نحلل الطرف الأيمن**

س^{٢} + ٩س + ١٤ = ٠ ← (س + ٢)(س + ٧) = ٠

إما س + ٢ = ٠ ←← $\boxed{\text{س} = -٢}$ **أو** س + ٧ = ٠ ←← $\boxed{\text{س} = -٧}$

مجموعة الحل = { −٢ ، −٧ }

تذكر : طريقة التحليل

٢(٢س^{٢} − س − ١) = ٠

(٢س)^{٢} − (٢س) − ٢ = ٠

$\underbrace{(٢\text{س} + ١)(٢\text{س} - ٢) = ٠}_{÷٢}$

(٢س + ١)(س − ١) = ٠

٢) ٢س^{٢} − س − ١ = ٠

٢س^{٢} − س − ١ = ٠ ← (٢س + ١)(س − ١) = ٠

إما ٢س + ١ = ٠ ←← $\boxed{\text{س} = \frac{-١}{٢}}$

أو س − ١ = ٠ ←← $\boxed{\text{س} = ١}$

مجموعة الحل = $\left\{ \frac{-١}{٢} ، ١ \right\}$

٣) س^{٢} = ٥س + ٦ **نكتب المعادلة بالصورة العامة**

س^{٢} − ٥س − ٦ = ٠ ← (س − ٦)(س + ١) = ٠

إما س − ٦ = ٠ ←← $\boxed{\text{س} = ٦}$ **أو** س + ١ = ٠ ←← $\boxed{\text{س} = -١}$

مجموعة الحل = { −١ ، ٦ }

٤) س^{٢} + ٩س = ٠ **نحلل الطرف الأيمن بإخراج س عامل مشترك**

س^{٢} + ٩س = ٠ ← س (س + ٩) = ٠

إما س = ٠ ←← $\boxed{\text{س = ٠}}$ **أو** س + ٩ = ٠ ←← $\boxed{\text{س = −٩}}$

مجموعة الحل = { −٩ ، ٠ }

٥) س^{٢} − ٢س = ٠ **نحلل الطرف الأيمن بإخراج س عامل مشترك**

س^{٢} − ٢س = ٠ ← س (س − ٢) = ٠

إما س = ٠ ←← $\boxed{\text{س = ٠}}$ **أو** س − ٢ = ٠ ←← $\boxed{\text{س = ٢}}$

مجموعة الحل = { ٢ ، ٠ }

٦) ٤س^{٢} = ٨س **نكتب المعادلة بالصورة القياسية (تحذير : لا يجوز قسمة المعادلة على س)**

$\underbrace{\text{٤س}^{٢} - \text{٨س} = ٠}_{÷٤}$ ← س^{٢} − ٢س = ٠ **نقسم المعادلة على ٤**

س^{٢} − ٢س = ٠ ← س (س − ٢) = ٠

إما س = ٠ ←← $\boxed{\text{س = ٠}}$ **أو** س − ٢ = ٠ ←← $\boxed{\text{س = ٢}}$

مجموعة الحل = { ٢ ، ٠ }

٧) ٩ + س^{٢} = ٦س **نكتب المعادلة بالصورة القياسية ثم نحلل**

س^{٢} − ٦س + ٩ = ٠ ← (س − ٣) (س − ٣) = ٠

إما س − ٣ = ٠ ←← $\boxed{\text{س = ٣}}$ **أو** س − ٣ = ٠ ←← $\boxed{\text{س = ٣}}$

مجموعة الحل = { ٣ }

تعلم :

$أ = ٠ \leftrightarrow ٠ = أ$

٨) $٣٣ = س^{٢} + ٨س$ **نكتب المعادلة بالصورة القياسية**

$س^{٢} + ٨س - ٣٣ = ٠ \leftarrow (س - ٣)(س + ١١) = ٠$

إما $س - ٣ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٣}$ **أو** $س + ١١ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = -١١}$

مجموعة الحل $= \{-١١ ، ٣\}$

٩) $٢س^{٢} + ٢س = ٢٤$ **نكتب المعادلة بالصورة القياسية ثم نقسمها على ٢ للتسهيل في الحل**

$\underbrace{٢س^{٢} + ٢س - ٢٤ = ٠}_{÷٢} \leftarrow س^{٢} + س - ١٢ = ٠ \leftarrow (س + ٤)(س - ٣) = ٠$

إما $س + ٤ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = -٤}$ **أو** $س - ٣ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٣}$

مجموعة الحل $= \{-٤ ، ٣\}$

١٠) $٤س^{٢} + ١ = ٤س$ **نكتب المعادلة بالصورة القياسية**

(لاحظ القسمة على ٤ لا تسهل الحل)

$٤س^{٢} - ٤س + ١ = ٠ \leftarrow (٢س - ١)(٢س - ١) = ٠$

$٢س - ١ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = \frac{١}{٢}}$

مجموعة الحل $= \left\{ \frac{١}{٢} \right\}$

$٤س^{٢} - ٤س + ١ = ٠$

$(٤س)^{٢} - ٤(٤س) + ٤ = ٠$

$\underbrace{(٤س - ٢)(٤س - ٢) = ٠}_{÷٤=٢×٢}$

$(٢س - ١)(٢س - ١) = ٠$

١١) $٦س^{٢} = ١١س + ١٠$ **نكتب المعادلة بالصورة القياسية**

$٦س^{٢} - ١١س - ١٠ = ٠ \leftarrow (٦س)^{٢} - ١١(٦س) - ٦٠ = ٠$

$\underbrace{(٦س - ١٥)(٦س + ٤) = ٠}_{÷٦=٣×٢} \leftarrow (٢س - ٥)(٣س + ٢) = ٠$

إما $٢س - ٥ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = \frac{٥}{٢}}$ **أو** $٣س + ٢ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = \frac{-٢}{٣}}$

مجموعة الحل $= \left\{ \frac{-٢}{٣} ، \frac{٥}{٢} \right\}$

١٢) $س^{٢} - ٩ = ٠$ نحلل فرق بين مربعين

$س^{٢} - ٩ = ٠ \leftarrow (س + ٣)(س - ٣) = ٠$

إما $س + ٣ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = -٣}$ أو $س - ٣ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٣}$

مجموعة الحل = $\{-٣ ، ٣\}$

حل ثاني : نضيف ٩ للطرفين ← $س^{٢} - ٩ = ٠ \leftarrow س^{٢} = ٩$ **الجذر التربيعي للطرفين**

$\sqrt{س^{٢}} = \pm\sqrt{٩} \leftarrow س = \pm ٣$ ← مجموعة الحل = $\{-٣ ، ٣\}$

١٣) $٤س^{٢} = ٢٥$

$\underbrace{٤س^{٢} = ٢٥}_{÷٤} \leftarrow س^{٢} = \frac{٢٥}{٤} \leftarrow \overset{\sqrt{}}{\leftarrow} س = \pm\frac{٥}{٢}$ :: مجموعة الحل = $\left\{ \pm\frac{٥}{٢} \right\}$

نترك للطالب الحل باستخدام طريقة فرق بين مربعين في التحليل

١٤) $٣س^{٢} - ١ = ٠$

$٣س^{٢} - ١ = ٠ \leftarrow \underbrace{٣س^{٢} = ١}_{÷٣}$

$س^{٢} = \frac{١}{٣} \leftarrow س = \pm\sqrt{\frac{١}{٣}} \leftarrow س = \pm\frac{١}{\sqrt{٣}}$

مجموعة الحل = $\left\{ \pm\frac{١}{\sqrt{٣}} \right\}$

$٣س^{٢} - ١ = ٠$ فرق بين مربعين

$(\sqrt{٣}س + ١)(\sqrt{٣}س - ١) = ٠$

إما $(\sqrt{٣}س + ١) = ٠ \leftarrow س = \frac{-١}{\sqrt{٣}}$

أو $(\sqrt{٣}س - ١) = ٠ \leftarrow س = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

١٥) $س^{٢} + ٩ = ٠$

- **لاحظ أن الطرف الأيمن في المعادلة التربيعية عبارة عن مجموع مربعين ، لا تحلل لذلك فإن**

  مجموعة الحل = $\{\ \}$ أو $\varnothing$

- **نضيف -٩ للطرفين** $س^{٢} = -٩$ **(مستحيل) لا يوجد عدد حقيقي مربعه = عدد سالب**

  مجموعة الحل = $\{\ \}$ أو $\varnothing$

مثال (٢٤) : (٣ – ١٤) كتاب مدرسي

إذا علمت أن غرفة الاجتماعات بمدرسة سلمى مستطيلة الشكل مساحتها ٣٢ م٢ ، ويزيد طولها عن عرضها بمقدار ٤ م ، جد أبعاد الغرفة .

الحل : نفرض عرض الغرفة س ⟵ الطول س + ٤ ،،،، مساحة الغرفة ٦٤ م٢

مساحة الغرفة = العرض × الطول

٦٤ = س (س + ٤) ← $س^{٢}$ + ٤س = ٦٤

$س^{٢}$ + ٤س − ٣٢ = ٠ ← (س − ٤)(س + ٨) = ٠

إما س + ٨ = ٠ ←← $\boxed{س = -٨}$ **أو** س − ٤ = ٠ ←← $\boxed{س = ٤}$

وبما أن الأبعاد لا يمكن أن تكون سالبة إذاً العرض = ٤ م ⟵ الطول = ٨ م

حل تدريب (٣ – ١٣) ص١٠٣

حل المعادلتين التربيعيتين الآتيتين :

أ) $س^{٢}$ − ٧س + ١٠ = ٠ ب) ٣$س^{٢}$ = ٨س − ٤

الحل :

أ) $س^{٢}$ − ٧س + ١٠ = ٠

$س^{٢}$ − ٧س + ١٠ = ٠ ← (س − ٥)(س − ٢) = ٠

إما س − ٥ = ٠ ←← $\boxed{س = ٥}$ **أو** س − ٢ = ٠ ←← $\boxed{س = ٢}$

مجموعة الحل = {٢ ، ٥}

ب) ٣$س^{٢}$ = ٨س − ٤ ← ٣$س^{٢}$ − ٨س + ٤ = ٠

٣$س^{٢}$ − ٨س + ٤ = ٠ ← (٣س − ٢)(س − ٢) = ٠

إما ٣ س − ٢ = ٠ ←← $\boxed{س = \frac{٢}{٣}}$ **أو** س − ٢ = ٠ ←← $\boxed{س = ٢}$

مجموعة الحل = $\left\{٢ ، \frac{٢}{٣}\right\}$

حل تدريب (٣ ـ ١٤) ص١٠٤

بطاقة مثلثة الشكل ، إذا علمت أن طول قاعدتها يساوي مثلي ارتفاعها ، وكانت مساحتها ٦٤ سم٢ ، جد ارتفاعها ٠

الحل :

نفرض أن ارتفاع البطاقة س ← قاعدة البطاقة ٢ س ،،، مساحة البطاقة ٦٤ سم٢

مساحة البطاقة (مثلث) = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع

$$٦٤ = \frac{١}{٢} \times ٢س \times س \leftarrow س^{٢} = ٦٤$$

$$س^{٢} - ٦٤ = ٠ \leftarrow (س + ٨)(س - ٨) = ٠$$

إما $س - ٨ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٨}$ أو $س + ٨ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = -٨}$

وبما أن الأبعاد لا يمكن أن تكون سالبة إذاً الارتفاع = ٨ سم

حل تدريب (٣ ـ ١٥) ص١٠٤

المسألة الواردة في بداية الدرس

لدى نول شريطاً لاصقاً ملوناً طوله ٧٢ سم ، أرادت استخدامه لإحاطة بطاقتين مربعتين مختلفتين ، إذا كان مجموع مساحتي البطاقتين ١٦٤ سم٢ ، ساعد نوال في تحديد نقطة قص الشريط ٠

الحل :

- **الشريط الأول للبطاقة المربعة الأولى :**

نفرض الطول س ← المحيط = ٤ س (المساحة = $س^{٢}$)

- **الشريط الثاني للبطاقة المربعة الثانية :**

محيط الشريط (حول البطاقة) = طول الشريط - محيط الشريط (حول البطاقة الأولى)

ل = ٧٢ ـ ٤ س

طول ضلع الشريط البطاقة الثانية = $\frac{٧٢ - ٤س}{٤} = ١٨ - س \leftarrow$ **المساحة** $= (١٨ - س)^{٢}$

مساحة البطاقة الأولى + مساحة البطاقة الثانية = ١٦٤

$$س^{٢} + (١٨ - س)^{٢} = ١٦٤ \leftarrow\leftarrow س^{٢} + ٣٢٤ - ٣٦س + س^{٢} = ١٦٤$$

$$\underbrace{٢س^{٢} - ٣٦س + ١٦٠ = ٠}_{÷٢} \leftarrow\leftarrow س^{٢} - ١٨س + ٨٠ = ٠$$

$$(س - ٨)(س - ١٠) = ٠ \leftarrow\leftarrow\leftarrow \quad س = ٨ \quad ، \quad س = ١٠$$

تقص نوال الشريط إلى قطعتين : الأولى طولها ٤ × ٨ = ٣٢ سم

الثانية طولها ٤ × ١٠ = ٤٠ سم

حل تمارين ومسائل ص١٠٥

١) إذا كان العدد (١) جذراً للمعادلة $س^{٢} - ٤س + جـ = ٠$ ، جد قيمة جـ ، ثم جد الجذر الآخر إن وجد

الحل :

بما أن العدد ١ جذراً للمعادلة إذاً ناتج تعويضه في المعادلة يبقيها = ٠ (صائبة)

$$\Big|_{س=١} \leftarrow (١)^{٢} - ٤(١) + جـ = ٠ \leftarrow ١ - ٤ + جـ = ٠ \leftarrow \boxed{جـ = ٣}$$

المعادلة تصبح $\leftarrow س^{٢} - ٤س + ٣ = ٠ \leftarrow (س - ٣)(س - ١) = ٠$

إما $س - ٣ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٣}$ **أو** $س - ١ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ١}$ **الجذر الآخر ٣**

٢) حل كلاً من المعادلات التربيعية الآتية بالتحليل إلى العوامل :

أ) $س^{٢} + س - ٢٠ = ٠$ ب) $س^{٢} + ٧س = ٠$ جـ) $س(س - ١) = ٦$

الحل :

أ) $س^{٢} + س - ٢٠ = ٠$

$$س^{٢} + س - ٢٠ = ٠ \leftarrow (س + ٥)(س - ٤) = ٠$$

إما $س + ٥ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = -٥}$ **أو** $س - ٤ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٤}$

مجموعة الحل $= \{ -٥ ، ٤ \}$

ب) $س^{٢} + ٧س = ٠$

$س^{٢} + ٧س = ٠ \leftarrow س(س + ٧) = ٠$

إما $س = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٠}$ أو $س + ٧ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = -٧}$

مجموعة الحل = $\{-٧ ، ٠\}$

ج) $س(س - ١) = ٦$

$س(س - ١) = ٦ \leftarrow س^{٢} - س - ٦ = ٠ \leftarrow (س + ٢)(س - ٣) = ٠$

إما $س + ٢ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = -٢}$ أو $س - ٣ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٣}$

مجموعة الحل = $\{-٢ ، ٣\}$

٣) إذا كان $(س + ٧)$ ، $(س - ٥)$ هما العاملين الأوليين الناتجين من تحليل المعادلة التربيعية المرافقة للاقتران ق ، فأكتب قاعدة الاقتران

الحل :

$(س + ٧)\ (س - ٥) = ٠ \leftarrow س^{٢} + ٢س - ٣٥ = ٠$

$\boxed{ق(س) = س^{٢} + ٢س - ٣٥}$

٤) ينوي وليد رسم صورة جداريه مربعة الشكل على سور المدرسة ، جد طول ضلعها إذا علمت أن ناتج طرح محيطها من مساحتها يساوي (٥) .

الحل :

- **نفرض طول ضلع الصورة س ← محيطها ٤ س ،،، مساحتها $س^{٢}$**
- **مساحة الصورة – محيط الصورة = ٥**

$س^{٢} - ٤س = ٥ \leftarrow س^{٢} - ٤س - ٥ = ٠$

$س^{٢} - ٤س - ٥ = ٠ \leftarrow (س + ١)(س - ٥) = ٠$

إما $س + ١ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = -١}$ أو $س - ٥ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٥}$

وبما أن الأبعاد لا يمكن أن تكون سالبة إذاً طول ضلع الصورة = ٥

٥) **سياج معدني طوله ٢٠ م ، يحيط بمبنى مستطيل الشكل مساحته ٢١ م^{٢} ، جد أبعاد المبنى ٠**

الحل :

- **نفرض أن بعدي المبنى س ، ص**
- **طول السياج = ٢٠ م ← ٢س + ٢ص = ٢٠ ← ص = ١٠ – س ٠٠٠٠ (١)**
- **مساحة المبنى = ٢١ ← س × ص = ٢١ ٠٠٠٠٠٠٠ (٢)**
- **بتعويض معادلة ١ في معادلة ٢ ينتج ←** $\boxed{\text{س(١٠ – س) = ٢١}}$ **نكتب المعادلة بالصورة العامة**

س(١٠ – س) = ٢١ ← +١٠س – س^{٢} = ٢١ ← س^{٢} – ١٠س + ٢١ = ٠

س^{٢} – ١٠س + ٢١ = ٠ ← (س – ٧)(س – ٣) = ٠

إما س – ٧ = ٠ ←← $\boxed{\text{س = ٧}}$ **أو** س – ٣ = ٠ ←← $\boxed{\text{س = ٣}}$

عند س = ٧ م ← ص = ٣ م ،،، عند س = ٣ م ← ص = ٧ م

إذاً أبعاد المبنى ٣ م ، ٧ م

٣ ــ ٥ حل المعادلة التربيعية بإكمال المربع

تذكر :

١) أن الأعداد ١ ، ٤ ، ٩ ، ٠٠٠ ، ١٠٠ ، ١٢١ ، ٠٠٠٠ تسمى مربعات كاملة

٢) المقادير الجبرية $(س + ١)^{٢}$ ، $(٢س - ٣)^{٢}$ ، $(س - أ)^{٢}$ ، $(س + ٥)^{٢}$ تسمى مربعات كاملة

٣) إذا كان $س^{٢} = ك$ فإن $س = \pm \sqrt{ك}$: $ك \geq ٠$

٤) $\sqrt{س^{٢}} = |س|$

٥) إذا كان $|س| = ك \leftarrow س = ك$ $\boxed{أو}$ $س = -ك$

مثال (٢٥) :

جد مجموعة حل (إن وجدت) كلاً من المعادلات الآتية :

١) $س^{٢} = ٩$	٢) $٢س^{٢} = ٥٠$	٣) $٣س^{٢} - ١ = ٤٧$
٤) $(س + ١)^{٢} = ٤$	٥) $(س + ٦)^{٢} = ١١$	٦) $٢(س + ٣)^{٢} = ١٠$
٧) $(س + ١)^{٢} + ١ = ٢٦$	٨) $(٢س + ١)^{٢} = ٤٩$	٩) $٢س^{٢} + ٧ = ٥$

الحل :

١) $س^{٢} = ٩$

يمكن حل المعادلة جبرياً بثلاثة طرق :

١) فرق بين مربعين : نضيف ــ ٩ للطرفين فينتج :

$$س^{٢} - ٩ = ٠ \leftarrow (س + ٣)(س - ٣) = ٠$$

إما $س - ٣ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٣}$ أو $س + ٣ = ٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = -٣}$

مجموعة الحل = $\{ -٣ ، ٣ \}$

٢) نجد الجذر التربيعي للطرفين $\leftarrow \text{س} = \pm\sqrt{\text{ك}}$: $\text{ك} \geq ٠$

$\text{س}^{٢} = ٩ \leftarrow \text{س} = \pm\sqrt{٩} \leftarrow \text{س} = \pm ٣$

مجموعة الحل $= \{-٣ ، ٣\}$

٣) استخدام القيمة المطلق بعد الجذر التربيعي

$\text{س}^{٢} = ٩ \leftarrow \sqrt{\text{س}^{٢}} = ٣ \leftarrow |\text{س}| = ٣$

إما $\text{س} = ٣ \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = ٣}$ **أو** $\text{س} = -٣ \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = -٣}$

مجموعة الحل $= \{-٣ ، ٣\}$

٢) $٢\text{س}^{٢} = ٥٠$ **بقسمة طرفي المعادلة على ٢ ينتج**

$\underbrace{٢\text{س}^{٢} = ٥٠}_{÷٢} \leftarrow \text{س}^{٢} = ٢٥$

$\text{س}^{٢} = ٢٥ \xleftarrow{\sqrt{}} \text{س} = \pm\sqrt{٢٥} \leftarrow \boxed{\text{س} = \pm ٥}$

مجموعة الحل $= \{-٣ ، ٣\}$

٣) $٣\text{س}^{٢} - ١ = ٤٧$

$٣\text{س}^{٢} \underset{+١}{-١} = \underset{+١}{٤٧} \leftarrow \underbrace{٣\text{س}^{٢} = ٤٨}_{÷٢} \leftarrow \text{س}^{٢} = ١٦$ **إضافة +١ للطرفين ثم ÷ ٣ للطرفين**

$\text{س}^{٢} = ١٦ \xleftarrow{\sqrt{}} \text{س} = \pm\sqrt{١٦} \leftarrow \boxed{\text{س} = \pm ٤}$

مجموعة الحل $= \{-٣ ، ٣\}$

٤) $(\text{س} + ١)^{٢} = ٤$

تذكر أن : $(\text{أ} + \text{ب})^{٢} = \text{أ}^{٢} + ٢\text{أب} + \text{ب}^{٢}$ **مربع مجموع حدين**

$(\text{أ} - \text{ب})^{٢} = \text{أ}^{٢} - ٢\text{أب} + \text{ب}^{٢}$ **مربع الفرق بين حدين**

الحل بأربعة طرق جبرية

١) فك القوس ، ثم كتابة المعادلة على الصورة العامة ، ثم استخدام طريقة التحليل لإيجاد الحل

$(\text{س}+١)^{٢}=٤ \leftarrow \text{س}^{٢}+٢\text{س}+١=٤ \leftarrow \text{س}^{٢}+٢\text{س}-٣=٠$

$\text{س}^{٢}+٢\text{س}-٣=٠ \leftarrow (\text{س}+٣)(\text{س}-١)=٠$

إما $\text{س}+٣=٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س}=-٣}$ أو $\text{س}-١=١ \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س}=١}$

مجموعة الحل = $\{-٣ ، ١\}$

٢) استخدام القيمة المطلقة

$(\text{س}+١)^{٢}=٤ \xrightarrow{\sqrt{}} \sqrt{(\text{س}+١)^{٢}}=٢ \leftarrow |\text{س}+١|=٢$

إما $\text{س}+١=٢ \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س}=١}$ أو $\text{س}+١=-٢ \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س}=-٣}$

مجموعة الحل = $\{-٣ ، ١\}$

٣) استخدام الجذر التربيعي $\leftarrow \text{س}=\pm\sqrt{\text{ك}} \;:\; \text{ك}\geq ٠$

$(\text{س}+١)^{٢}=٤ \xrightarrow{\sqrt{}} \text{س}+١=\pm ٢$

إما $\text{س}+١=٢ \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س}=١}$ أو $\text{س}+١=-٢ \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س}=-٣}$

مجموعة الحل = $\{-٣ ، ١\}$

٤) استخدام طريقة فرق بين مربعين في التحليل

$(\text{س}+١)^{٢}=\overset{\rightarrow}{٤} \leftarrow (\text{س}+١)^{٢}-٤=٠$ **إضافة ٤ للطرفين (تصفير المعادلة)**

$(\text{س}+١+٢)(\text{س}+١-٢)=٠ \leftarrow (\text{س}+٣)(\text{س}-١)=٠$

إما $\text{س}+١=٢ \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س}=١}$ أو $\text{س}+١=-٢ \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س}=-٣}$

مجموعة الحل = $\{-٣ ، ١\}$

٥) $(\text{س}+٦)^{٢}=١١$ **الحل باستخدام الجذر التربيعي (نترك للطالب الحل بالطرق الأخرى)**

ملاحظة : فك الأقواس لا تستخدمها الآن (في الدرس القادم)

$(\text{س}+٦)^{٢}=١١ \leftarrow \text{س}+٦=\pm\sqrt{١١}$ **لاحظ لا يوجد جذر للعدد ١١ كعدد صحيح**

إما $\text{س} + ٦ = \sqrt{١١} \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = -٦ + \sqrt{١١}}$ أو $\text{س} + ٦ = -\sqrt{١١} \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = -٦ - \sqrt{١١}}$

مجموعة الحل = $\{ -٦ - \sqrt{١١} ، -٦ + \sqrt{١١} \}$

٧) $(\text{س} + ١)^٢ + ١ = ٢٦$ استخدام الجذر التربيعي $\leftarrow \text{س} = \pm \sqrt{\text{ك}}$: $\text{ك} \geq ٠$

$$(\text{س} + ١)^٢ \overset{\leftarrow}{\underset{-١}{+١}} = \underset{-١}{٢٦} \leftarrow (\text{س} + ١)^٢ = ٢٥$$

$$(\text{س} + ١)^٢ = ٢٥ \overset{\sqrt{}}{\leftarrow} \text{س} + ١ = \pm ٥$$

إما $\text{س} + ١ = ٥ \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = ٤}$ أو $\text{س} + ١ = -٥ \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = -٦}$

مجموعة الحل = $\{ -٦ ، ٤ \}$

٨) $(٢\text{س} + ١)^٢ = ٤٩$ استخدام الجذر التربيعي $\leftarrow \text{س} = \pm \sqrt{\text{ك}}$: $\text{ك} \geq ٠$

$$(٢\text{س} + ١)^٢ = ٤٩ \overset{\sqrt{}}{\leftarrow} ٢\text{س} + ١ = \pm \sqrt{٤٩} \leftarrow ٢\text{س} + ١ = \pm ٧$$

إما $٢\text{س} + ١ = ٧ \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = ٣}$ أو $٢\text{س} + ١ = -٧ \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = -٤}$

مجموعة الحل = $\{ -٤ ، ٣ \}$

٩) $٢\text{س}^٢ + ٧ = ٥$ نضيف − ٧ للطرفين ، ثم نقسم الطرفين على ٢ ينتج

$$٢\text{س}^٢ \overset{\leftarrow}{\underset{-٧}{+٧}} = \underset{-٧}{٥} \leftarrow \underbrace{٢\text{س}^٢ = -٢}_{÷٢} \leftarrow \text{س}^٢ = -١$$

$\text{س}^٢ = -١$ لاحظ أنه لا يوجد عدد حقيقي مربعه يعطي عدد سالب لذلك فإن :

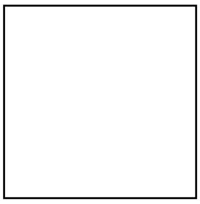
مجموعة الحل = $\{ \quad \}$ أو $\varnothing$

في هذا الدرس سوف نتعلم طريقة جديدة لحل المعادلة التربيعية ، وتسمى هذه الطريقة

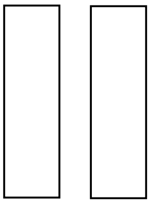
إكمال المربع

- **المقدار الجبري التربيعي $س^{٢}+٢س$ ناتج جمعه يفسر هندسيا كما يلي :**

$س^{٢}$ ← تمثل مربع طول ضلعه س ←

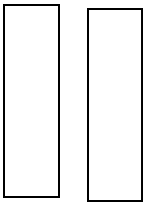


$٢س$ ← تمثل مستطيلين طول كل منهما س ، والعرض وحدة واحدة ←

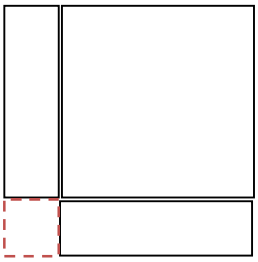


إذا $س^{٢}+٢س$ =

+



=



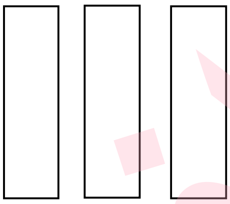
لاحظ أن ناتج الجمع الهندسي عبارة عن مربع كامل طول ضلعه (س +١) ناقص مربع صغير طول ضلعه وحدة واحدة . لذلك يمكن كتابة المقدار الجبري $س^{٢}+٢س$ كما يلي :

$$س^{٢}+٢س=(س+١)^{٢}-(١)^{٢}=(س+١)^{٢}-١$$

- **الآن لنفسر المقدار الجبري $س^{٢}+٣س$ هندسيا ونجد ناتج الجمع**

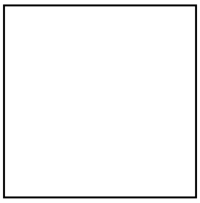
$س^{٢}$ ← تمثل مربع طول ضلعه س ←

$٣س$ ← تمثل مستطيلين طول كل منهما س ، والعرض وحدة واحدة ←

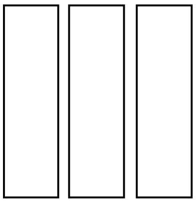


لاحظ وجود ٣ مستطيلات ، نوزع مستطيلين على جوانب المربع الكبير ، ثم نقسم المستطيل الثالث إلى قسمين متساويين أبعاد كل منهما س ، $\frac{١}{٢}$ وحدة ونوزعهما كما يلي :

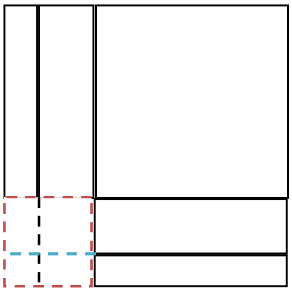
$س^{٢}+٣س$ =



+



=

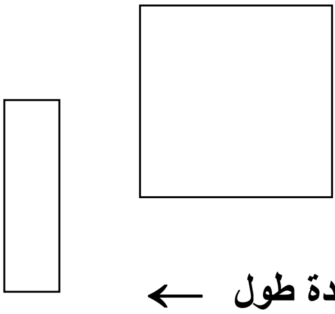


- لاحظ أن الشكل الهندسي الناتج يمثل مربع طول ضلعه $\left(س+\frac{٣}{٢}\right)$ ناقص مربعين صغيرين طول كل منهما وحدة واحدة ، و مستطيلين بعد كل منهما $\frac{١}{٢}$ وحدة، و $\frac{١}{٢}$، ١ لذلك يمكن كتابة المقدار الجبري $س^{٢}+٣س$ كما يلي :

$$س^{٢}+٣س=\left(س+\frac{٣}{٢}\right)^{٢}-\left((١)^{٢}+\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}+٢\left(١\times\frac{١}{٢}\right)\right)$$

$$=\left(س+\frac{٣}{٢}\right)^{٢}-\left(١+\frac{١}{٤}+١\right)=\boxed{\left(س+\frac{٣}{٢}\right)^{٢}-\frac{٩}{٤}}$$

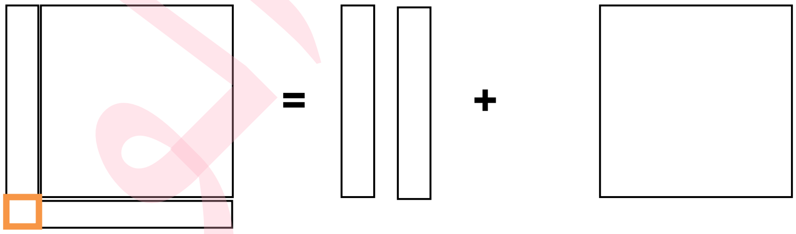
- الآن لنجد ناتج جمع المقدار الجبري $س^{٢}+ب\,س$ هندسياً :



- $س^{٢}$ ← تمثل مربع طول ضلعه س ←
- ب س ← تمثل طوله س ، والعرض ب وحدة طول ←

بما أنه يوجد لدينا مستطيل واحد ، نقسمه إلى قسمين أبعاد كل قسم س ، $\frac{ب}{٢}$ ونوزع

$س^{٢}+ب\,س$ =



لاحظ أن الشكل الهندسي الناتج عبارة عن مربع طول ضلعه $\left(س+\frac{ب}{٢}\right)$ ناقص مربع صغير طول ضلعه $\left(\frac{ب}{٢}\right)$ ، لذلك يمكن كتابة المقدار الجبري $س^{٢}+ب\,س$ كما يلي :

$$س^{٢}+ب\,س=\left(س+\frac{ب}{٢}\right)^{٢}-\left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢}=\boxed{\left(س+\frac{ب}{٢}\right)^{٢}-\frac{ب^{٢}}{٤}}$$

تسمى هذه الطريقة بطريقة إكمال المربع للمقدار التربيعي الذي على الصورة $س^{٢}+ب\,س$ ، وأيضاً مع العبارة التربيعية $س^{٢}+ب\,س+ج$.

مثال (٢٦) :

اكتب كلاً من المقادير الجبرية التالية باستخدام طريقة إكمال المربع :

١) $س^{٢}+س$ ٢) $س^{٢}+٥س$

٣) $س^{٢}+٤س$ ٤) $س^{٢}+٦س-٥$

الحل : نستخدم القاعدة $س^{٢}+ب\,س=\left(س+\frac{ب}{٢}\right)^{٢}-\left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢}$

١) $س^{٢}+س$

$$س^{٢}+س=\left(س+\frac{١}{٢}\right)^{٢}-\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}=\left(س+\frac{١}{٢}\right)^{٢}-\frac{١}{٤}$$

٢) $س^{٢}+٥س$

$$س^{٢}+٥س=\left(س+\frac{٥}{٢}\right)^{٢}-\left(\frac{٥}{٢}\right)^{٢}=\left(س+\frac{٥}{٢}\right)^{٢}-\frac{٢٥}{٤}$$

٣) $س^{٢}+٤س$

$$س^{٢}+٤س=\left(س+\frac{٤}{٢}\right)^{٢}-\left(\frac{٤}{٢}\right)^{٢}=(س+٢)^{٢}-٤$$

٣) $س^{٢}+٦س-٥$

$$س^{٢}+٦س-٥=\left(س+\frac{٦}{٢}\right)^{٢}-\left(\frac{٦}{٢}\right)^{٢}-٥=(س+٣)^{٢}-٩-٥=(س+٣)^{٢}-١٤$$

- **لاحظ مما سبق ، أنه حين استخدام طريقة إكمال المربع**

١) يجب أن يكون معامل $س^{٢}$ يساوي ١

٢) نضيف نصف معامل س إلى س ثم نكتبه كمربع كامل ثم نطرح مربع (نصف معامل س)

مثال (٢٧) :

باستخدام طريقة إكمال المربع ، جد مجموعة حل المعادلات الآتية :

١) $\text{س}^{٢} + \text{س} = ٠$ ٢) $\text{س}^{٢} + ٥\text{س} = ٠$

٣) $\text{س}^{٢} + ٤\text{س} = ٠$ ٤) $\text{س}^{٢} + ٦\text{س} - ٥ = ٠$

الحل : **نستخدم القاعدة** $\text{س}^{٢} + \text{ب س} = \left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{٢}\right)^{٢} - \left(\frac{\text{ب}}{٢}\right)^{٢}$

١) $\text{س}^{٢} + \text{س} = ٠$

$$\text{س}^{٢} + \text{س} = ٠ \leftarrow \left(\text{س} + \frac{١}{٢}\right)^{٢} - \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} = ٠ \leftarrow \left(\text{س} + \frac{١}{٢}\right)^{٢} - \frac{١}{٤} = ٠$$

$$\leftarrow \left(\text{س} + \frac{١}{٢}\right)^{٢} = \frac{١}{٤} \xleftarrow{\sqrt{}} \text{س} + \frac{١}{٢} = \pm \frac{١}{٢}$$

إما $\text{س} + \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = ٠}$ **أو** $\text{س} + \frac{١}{٢} = -\frac{١}{٢} \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = -١}$

مجموعة الحل $= \{-١ ، ٠\}$

٢) $\text{س}^{٢} + ٥\text{س} = ٠$

$$\text{س}^{٢} + ٥\text{س} = ٠ \leftarrow \left(\text{س} + \frac{٥}{٢}\right)^{٢} - \left(\frac{٥}{٢}\right)^{٢} = ٠ \leftarrow \left(\text{س} + \frac{٥}{٢}\right)^{٢} = \frac{٢٥}{٤}$$

$$\leftarrow \left(\text{س} + \frac{٥}{٢}\right)^{٢} = \frac{٢٥}{٤} \xleftarrow{\sqrt{}} \text{س} + \frac{٥}{٢} = \pm \frac{٥}{٢}$$

إما $\text{س} + \frac{٥}{٢} = \frac{٥}{٢} \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = ٠}$ **أو** $\text{س} + \frac{٥}{٢} = -\frac{٥}{٢} \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = -٥}$

مجموعة الحل $= \{-٥ ، ٠\}$

٣) $\text{س}^{٢} + ٤\text{س}$

$$\text{س}^{٢} + ٤\text{س} = ٠ \leftarrow \left(\text{س} + \frac{٤}{٢}\right)^{٢} - \left(\frac{٤}{٢}\right)^{٢} = ٠ \leftarrow (\text{س} + ٢)^{٢} - ٤ = ٠ \leftarrow (\text{س} + ٢)^{٢} = ٤$$

$$\leftarrow (\text{س} + ٢)^{٢} = ٤ \xleftarrow{\sqrt{}} \text{س} + ٢ = \pm ٢$$

إما $\text{س} + ٢ = ٢ \longleftarrow\longleftarrow \boxed{\text{س} = ٠}$ أو $\text{س} + ٢ = -٢ \longleftarrow\longleftarrow \boxed{\text{س} = -٤}$

مجموعة الحل = $\{-٤ ، ٠\}$

٣) $\text{س}^{٢} + ٦\text{س} - ٥ = ٠$

$$\text{س}^{٢} + ٦\text{س} - ٥ = \left(\text{س} + \frac{٦}{٢}\right)^{٢} - \left(\frac{٦}{٢}\right)^{٢} - ٥ = ٠ \longleftarrow (\text{س} + ٣)^{٢} - ٩ - ٥ = ٠ \longleftarrow (\text{س} + ٣)^{٢} = ١٤$$

$$\longleftarrow (\text{س} + ٣)^{٢} = ١٤ \longleftarrow \text{س} + ٣ = \pm\sqrt{١٤}$$

إما $\text{س} + ٣ = \sqrt{١٤} \longleftarrow\longleftarrow \boxed{\text{س} = -٣ + \sqrt{١٤}}$

أو $\text{س} + ٣ = -\sqrt{١٤} \longleftarrow\longleftarrow \boxed{\text{س} = -٣ - \sqrt{١٤}}$

مجموعة الحل = $\{-٣ + \sqrt{١٤} ، -٣ - \sqrt{١٤}\}$

تسمى طريقة إكمال المربع التي تم حل المثال السابق بها بالطريقة الجبرية ، وتستخدم في حل المعادلات التربيعية التي على الصورة $\text{أ}\,\text{س}^{٢} + \text{ب}\,\text{س} + \text{جـ} = ٠$ ، كما يلي :

١) ننقل الحد المطلق للطرف الثاني $\longleftarrow\longleftarrow \text{أ}\,\text{س}^{٢} + \text{ب}\,\text{س} = -\text{جـ}$

٢) نقسم المعادلة على معامل $\text{س}^{٢}$ $\longleftarrow\longleftarrow \text{س}^{٢} + \frac{\text{ب}}{\text{أ}}\text{س} = -\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$ **(يجب أن يكون معامل $\text{س}^{٢} = ١$)**

٣) نضيف للطرفين مربع (نصف معامل س) ونحلل ← (التفسير الهندسي)

$$\longleftarrow\longleftarrow \text{س}^{٢} + \frac{\text{ب}}{\text{أ}}\text{س} + \left(\frac{\text{ب}}{٢\text{أ}}\right)^{٢} = -\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} + \left(\frac{\text{ب}}{٢\text{أ}}\right)^{٢} \longleftarrow \left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{٢\text{أ}}\right)^{٢} = -\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} + \frac{\text{ب}^{٢}}{٤\text{أ}^{٢}}$$

- **إذا كان المقدار $-\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} + \frac{\text{ب}^{٢}}{٤\text{أ}^{٢}} > ٠$. نأخذ الجذر التربيعي للطرفين ونكمل الحل**
- **إذا كان المقدار $-\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} + \frac{\text{ب}^{٢}}{٤\text{أ}^{٢}} = ٠$. الحل هو $\longleftarrow\longleftarrow \text{س} = -\frac{\text{ب}}{٢\text{أ}}$**
- **إذا كان المقدار $-\frac{\text{جـ}}{\text{أ}} + \frac{\text{ب}^{٢}}{٤\text{أ}^{٢}} < ٠$. لا يوجد حل للمعادلة ← مجموعة الحل = $\{\ \}$**

مثال (٢٨) :

باستخدام طريقة إكمال المربع ، جد مجموعة حل المعادلات الآتية :

١) $س^٢ + ٤س + ١ = ٠$

٢) $س^٢ - ٤س + ١ = ٠$

٣) $٢س^٢ - ١٠س = -٣$

٤) $س^٢ = ٤س + ٣$

٥) $س^٢ - \frac{١}{٤}س = ١$

٦) $س^٢ + ٦س = -٩$

٧) $\frac{١}{٢}س^٢ + ٥س + \frac{٣}{٢} = ٠$

٨) $٢س^٢ - \frac{٣}{٢}س + ٧ = ٠$

٩) $س^٢ + ٤\sqrt{٣}س = ٥$

الحل :

١) $س^٢ + ٤س + ١ = ٠$

$س^٢ + ٤س + ١ = ٠ \leftarrow س^٢ + ٤س = -١$ **نقل الحد المطلق للطرف الثاني**

$س^٢ + ٤س + \left(\frac{٤}{٢}\right)^٢ = -١ + \left(\frac{٤}{٢}\right)^٢ \leftarrow (س + ٢)^٢ = ٣$ **إضافة** $\left(\frac{ب}{٢}\right)^٢$ **للطرفين وتبسيط المعادلة**

$\leftarrow (س + ٢)^٢ = ٣ \leftarrow س + ٢ = \pm\sqrt{٣}$

إما $س + ٢ = \sqrt{٣} \leftarrow\leftarrow \boxed{س = -٢ + \sqrt{٣}}$

أو $س + ٢ = -\sqrt{٣} \leftarrow\leftarrow \boxed{س = -٢ - \sqrt{٣}}$

مجموعة الحل $= \{-٢ + \sqrt{٣} ، -٢ - \sqrt{٣}\}$

٢) $س^٢ - ٤س + ١ = ٠$

$س^٢ - ٤س + ١ = ٠ \leftarrow س^٢ - ٤س = -١$

$س^٢ - ٤س + \left(\underbrace{\frac{-٤}{٢}}_{=-٢}\right)^٢ = -١ + \left(\underbrace{\frac{-٤}{٢}}_{=-٢}\right)^٢ \leftarrow (س - ٢)^٢ = ٣$

$\leftarrow (س - ٢)^٢ = ٣ \leftarrow س - ٢ = \pm\sqrt{٣}$

إما $س - ٢ = \sqrt{٣} \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٢ + \sqrt{٣}}$ **أو** $س - ٢ = -\sqrt{٣} \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٢ - \sqrt{٣}}$

مجموعة الحل $= \{٢ + \sqrt{٣} ، ٢ - \sqrt{٣}\}$

٣) $٢\text{س}^{٢} - ١٠\text{س} = -٣$

$$\underbrace{٢\text{س}^{٢} - ١٠\text{س} = -٣}_{÷٢} \leftarrow \text{س}^{٢} - ٥\text{س} = \frac{-٣}{٢}$$

$$\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + \left(\frac{-٥}{٢}\right)^{٢} = \frac{-٣}{٢} + \left(\frac{-٥}{٢}\right)^{٢} \leftarrow \left(\text{س} - \frac{٥}{٢}\right)^{٢} = \frac{-٣ \times ٢ = -٦}{٢ \times ٢ = ٤} + \frac{٢٥}{٤}$$

$$\leftarrow \left(\text{س} - \frac{٥}{٢}\right)^{٢} = \frac{١٩}{٤} \xleftarrow{\sqrt{}} \text{س} - \frac{٥}{٢} = \pm \frac{\sqrt{١٩}}{٢}$$

إما $\text{س} - \frac{٥}{٢} = \frac{\sqrt{١٩}}{٢} \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = \frac{٥}{٢} + \frac{\sqrt{١٩}}{٢}}$ أو $\text{س} - \frac{٥}{٢} = -\frac{\sqrt{١٩}}{٢} \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = \frac{٥}{٢} - \frac{\sqrt{١٩}}{٢}}$

مجموعة الحل $= \left\{ \frac{٥ + \sqrt{١٩}}{٢} ، \frac{٥ - \sqrt{١٩}}{٢} \right\}$

٤) $\text{س}^{٢} = ٤\text{س} + ٣$

$$\text{س}^{٢} = \overset{\rightarrow}{٤\text{س}} + ٣ \leftarrow \text{س}^{٢} - ٤\text{س} = ٣$$

$$\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + \left(\underset{=-٢}{\frac{-٤}{٢}}\right)^{٢} = ٣ + \left(\underset{=-٢}{\frac{-٤}{٢}}\right)^{٢} \leftarrow (\text{س} - ٢)^{٢} = ٧$$

$$\leftarrow (\text{س} - ٢)^{٢} = ٧ \leftarrow \text{س} - ٢ = \pm \sqrt{٧} \leftarrow \text{س} = ٢ \pm \sqrt{٧}$$

مجموعة الحل $= \{ ٢ \pm \sqrt{٧} \}$

٥) $\text{س}^{٢} - \frac{١}{٤}\text{س} = ١١$

$$\text{س}^{٢} - \frac{١}{٤}\text{س} + \left(\frac{-١}{٨}\right)^{٢} = ١ + \left(\frac{-١}{٨}\right)^{٢} \leftarrow \left(\text{س} - \frac{١}{٨}\right)^{٢} = \frac{٦٥}{٦٤}$$

$$\leftarrow \left(\text{س} - \frac{١}{٨}\right)^{٢} = \frac{٦٥}{٦٤} \leftarrow \text{س} - \frac{١}{٨} = \pm \frac{\sqrt{٦٥}}{٨} \leftarrow \text{س} = \frac{١}{٨} \pm \frac{\sqrt{٦٥}}{٨}$$

مجموعة الحل $= \left\{ \frac{١ \pm \sqrt{٦٥}}{٨} \right\}$

٦) $س^{٢} + ٦س = -٩$

$$س^{٢} + ٦س + \left(\underset{=٣}{\frac{٦}{٢}}\right)^{٢} = -٩ + \left(\underset{=٣}{\frac{٦}{٢}}\right)^{٢} \leftarrow (س + ٣)^{٢} = ٠$$

$$\leftarrow (س + ٣)^{٢} = ٠ \leftarrow س = -٣$$ **مجموعة الحل** $= \{ -٣ \}$

٧) $\frac{١}{٢}س^{٢} + ٥س + \frac{٣}{٢} = ٠$

$$\frac{١}{٢}س^{٢} + ٥س + \frac{٣}{٢} = ٠ \leftarrow \frac{١}{٢}س^{٢} + ٥س = -\frac{٣}{٢}$$

$$\underbrace{\frac{١}{٢}س^{٢} + ٥س = -\frac{٣}{٢}}_{\times ٢} \leftarrow س^{٢} + ١٠س = -٣$$

$$س^{٢} + ١٠س + \left(\underset{=٥}{\frac{١٠}{٢}}\right)^{٢} = -٣ + \left(\underset{=٥}{\frac{١٠}{٢}}\right)^{٢} \leftarrow (س + ٥)^{٢} = ٢٢$$

$$\leftarrow (س + ٥)^{٢} = ٢٢ \overset{\surd}{\leftarrow} س + \overset{\leftarrow}{٥} = \pm\sqrt{٢٢} \leftarrow س = -٥ \pm \sqrt{٢٢}$$

مجموعة الحل $= \{ -٥ \pm \sqrt{٢٢} \}$

٨) $٢س^{٢} - \frac{٣}{٢}س + ٧ = ٠$

$$٢س^{٢} - \frac{٣}{٢}س + ٧ = ٠ \leftarrow ٢س^{٢} - \frac{٣}{٢}س = -٧$$

$$٢س^{٢} - \frac{٣}{٢}س = -٧ \leftarrow س^{٢} - \frac{٣}{٤}س = \frac{-٧}{٢}$$

$$\leftarrow س^{٢} - \frac{٣}{٤}س + \left(\frac{-٣}{٨}\right)^{٢} = \frac{-٧}{٢} + \left(\frac{-٣}{٨}\right)^{٢} \leftarrow \left(س + \frac{-٣}{٨}\right)^{٢} = \frac{-٧}{٢} + \frac{٩}{٦٤}$$

$$\leftarrow \left(س + \frac{-٣}{٨}\right)^{٢} = \frac{-٧ \times ٣٢ = -٢٢٤}{٢ \times ٣٢ = ٦٤} + \frac{٩}{٦٤} \leftarrow \left(س + \frac{-٣}{٨}\right)^{٢} = \frac{-٢١٥}{٦٤} \succ ٠$$

مجموعة الحل $= \{ \quad \}$ أو $= \phi$

٩) $س^{٢} + ٤\sqrt{٣}\,س = ٥$

$$س^{٢} + ٤\sqrt{٣}\,س + \left(\underset{=٢\sqrt{٣}}{\frac{٤\sqrt{٣}}{٢}}\right)^{٢} = ٥ + \left(\underset{=٢\sqrt{٣}}{\frac{٤\sqrt{٣}}{٢}}\right)^{٢} \longrightarrow (س + ٢\sqrt{٣})^{٢} = ١٧$$

$$\longrightarrow (س + ٢\sqrt{٣})^{٢} = ١٧ \xrightarrow{\sqrt{}} س + \overset{\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow}{٢\sqrt{٣}} = \pm\sqrt{١٧} \longrightarrow س = -٢\sqrt{٣} \pm \sqrt{١٧}$$

$$م . ح = \{-٢\sqrt{٣} \pm \sqrt{١٧}\}$$

حل تدريب (٣ ـ ١٦) ص١٠٩

حل المعادلات الآتية ، وتحقق من صحة الحل :

أ) $(٢س - ١)^{٢} = ١٠٠$ ب) $س^{٢} - ٨س + ١٥ = ٠$

الحل :

أ) $(٢س - ١)^{٢} = ١٠٠$

$$(٢س - ١)^{٢} = ١٠٠ \xrightarrow{\sqrt{}} ٢س - ١ = \pm ١٠$$

إما $٢س - ١ = ١٠ \longrightarrow\longrightarrow \boxed{س = \frac{١١}{٢}}$ **أو** $٢س - ١ = -١٠ \longrightarrow\longrightarrow \boxed{س = \frac{-٩}{٢}}$

مجموعة الحل $= \left\{\frac{-٩}{٢} ، \frac{١١}{٢}\right\}$

التحقق : عند $س = \frac{١١}{٢} \longrightarrow \left(٢\left(\frac{١١}{٢}\right) - ١\right)^{٢} \longrightarrow (١٠)^{٢} = ١٠٠$ **الطرف الأيسر**

عند $س = \frac{-٩}{٢} \longrightarrow \left(٢\left(\frac{-٩}{٢}\right) - ١\right)^{٢} \longrightarrow (-١٠)^{٢} = ١٠٠$ **الطرف الأيسر**

ب) $س^{٢} - ٨س + ١٥ = ٠$

$$س^{٢} - ٨س + ١٥ = ٠ \longrightarrow س^{٢} - ٨س = -١٥$$

$$س^{٢} - ٨س + \left(\underset{=-٢}{\frac{-٨}{٤}}\right)^{٢} = -١٥ + \left(\underset{=-٢}{\frac{-٨}{٤}}\right)^{٢} \longrightarrow (س - ٢)^{٢} = -١١ \succ ٠$$

$$م . ح = \phi$$

حل تدريب (٣ – ١٧) ص١٠٩

المسألة الواردة في بداية الدرس

أراد معتز تصميم نموذج كرتوني لشاخصة مرورية عل شكل مثلث ، يزيد طول قاعدته على ارتفاعه بمقدار ٤ سم ، ومساحته ٤٨ سم٢ ، ساعد معتزاً في إيجاد ارتفاعه ليكتمل النموذج ٠

الحل :

نفرض أن ارتفاع الشاخصة س ← قاعدة الشاخصة س + ٤ ،،، مساحة الشاخصة ٤٨ سم٢

مساحة الشاخصة (مثلث) = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع

$$٤٨ = \frac{١}{٢} \times (س + ٤) \times س \leftarrow س^{٢} + ٤س = ٩٦$$

$$س^{٢} + ٤س + \left(\underset{=٢}{\frac{٤}{٢}}\right)^{٢} = ٩٦ + \left(\underset{=٢}{\frac{٤}{٢}}\right)^{٢} \leftarrow (س + ٢)^{٢} = ١٠٠$$

$$\leftarrow (س + ٢)^{٢} = ١٠٠ \xleftarrow{\sqrt{}} س + ٢ = \pm ١٠$$

إما $س + ٢ = ١٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٨}$ أو $س + ٢ = -١٠ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = -١٢}$

وبما أن الأبعاد لا يمكن أن تكون سالبة إذاً الارتفاع = ٨ سم

حل تمارين ومسائل ص ١١٠

١) جد جور المعادلة $(٢س - ١)^{٢} = ٢٥$

الحل :

$$(٢س - ١)^{٢} = ٢٥ \xleftarrow{\sqrt{}} ٢س - ١ = \pm ٥$$

إما $٢س - ١ = ٥ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٣}$ أو $٢س - ١ = -٥ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = -٢}$

مجموعة الحل $= \{ -٢ ، ٣ \}$

٢) استخدم طريقة إكمال المربع في حل المعادلات التربيعية التالية :

أ) $س^٢ - ٤س - ١٢ = ٠$	ب) $٢س^٢ - س = ٠$	جـ) $س^٢ - ٦س = ٧$
ء) $٤س - ٢س^٢ + ٦ = ٠$	هـ) $٩ + س^٢ = ١٠س$	و) $٨س - ٢س^٢ = ١٦$

الحل :

أ) $س^٢ - ٤س - ١٢ = ٠$

$$س^٢ - ٤س - ١٢ = ٠ \leftarrow س^٢ - ٤س = ١٢$$

$$س^٢ - ٤س + \Big(\underset{=-٢}{\frac{-٤}{٢}}\Big)^٢ = ١٢ + \Big(\underset{=-٢}{\frac{-٤}{٢}}\Big)^٢ \leftarrow (س - ٢)^٢ = ١٦$$

$$\leftarrow (س - ٢)^٢ = ١٦ \leftarrow س - ٢ = \pm ٤$$

إما $س - ٢ = ٤ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٦}$ أو $س - ٢ = -٤ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = -٢}$

مجموعة الحل $= \{ -٢ ، ٦ \}$

ب) $٢س^٢ - س = ٠$

$$٢س^٢ - س = ٠ \leftarrow س^٢ - \frac{١}{٢} س = ٠$$

$$س^٢ - \frac{١}{٢} س + \Big(\frac{-١}{٤}\Big)^٢ = \Big(\frac{-١}{٤}\Big)^٢ \leftarrow \Big(س - \frac{١}{٤}\Big)^٢ = \frac{١}{١٦}$$

$$\leftarrow \Big(س - \frac{١}{٤}\Big)^٢ = \frac{١}{١٦} \xleftarrow{\sqrt{\ }} س - \frac{١}{٤} = \pm \frac{١}{٤}$$

إما $س - \frac{١}{٤} = \frac{١}{٤} \leftarrow\leftarrow \boxed{س = \frac{١}{٢}}$

أو $س - \frac{١}{٤} = -\frac{١}{٤} \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٠}$

مجموعة الحل $= \Big\{ ٠ ، \frac{١}{٢} \Big\}$

ى) $٤س - ٢س^{٢} + ٦ = ٠$

$٤س - ٢س^{٢} + ٦ = ٠ \leftarrow -٢س^{٢} + ٤س + ٦ = ٠ \leftarrow -٢س^{٢} + ٤س = -٦$

$\underbrace{-٢س^{٢} + ٤س = -٦}_{÷-٢} \leftarrow س^{٢} - ٢س = ٣$

$س^{٢} - ٢س + \left(\underset{=-١}{\frac{-٢}{٢}}\right)^{٢} = ٣ + \left(\underset{=-١}{\frac{-٢}{٢}}\right)^{٢} \leftarrow (س - ١)^{٢} = ٤$

$\leftarrow (س - ١)^{٢} = ٤ \leftarrow س - ١ = \pm٢$

إما $س - ١ = ٢ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٣}$ أو $س - ١ = -٢ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = -١}$

مجموعة الحل = $\{-١ ، ٣\}$

هـ) $٩ + س^{٢} = ١٠س$

$٩ + س^{٢} = ١٠س \leftarrow س^{٢} - ١٠س = -٩$

$\leftarrow س^{٢} - ١٠س + \left(\underset{=-٥}{\frac{-١٠}{٢}}\right)^{٢} = -٩ + \left(\underset{=-٥}{\frac{-١٠}{٢}}\right)^{٢} \leftarrow (س - ٥)^{٢} = ١٦$

$\leftarrow (س - ٥)^{٢} = ١٦ \leftarrow (س - ٥) = \pm٤$

إما $س - ٥ = ٤ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٩}$ أو $س - ٥ = -٤ \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ١}$

مجموعة الحل = $\{١ ، ٩\}$

و) $٨س - ٢س^{٢} = ١٦$

$٨س - ٢س^{٢} = ١٦ \leftarrow س^{٢} - ٤س = -٨$

$\leftarrow س^{٢} - ٤س + \left(\underset{=-٢}{\frac{-٤}{٢}}\right)^{٢} = -٨ + \left(\underset{=-٢}{\frac{-٤}{٢}}\right)^{٢} \leftarrow (س - ٢)^{٢} = -٤ \succ ٠$

مجموعة الحل = $\{ \quad \}$

٣) هل يمكنك الحصول على عددين موجبين ، مجموعهما ١٠ ، ومجموع مربعيهما ٥٨ ؟ برر إجابتك .

الحل :

- **نفرض العدد الأول س** ← **الثاني** $(١٠ - \text{س})$
- **مربع الأول** ← $\text{س}^{٢}$ ،، **مربع الثاني** ← $(١٠ - \text{س})^{٢} = ١٠٠ - ٢٠\text{س} + \text{س}^{٢}$
- **مربع الأول + مربع الثاني = ٥٨**

$$\text{س}^{٢} + ١٠٠ - ٢٠\text{س} + \text{س}^{٢} = ٥٨ \leftarrow ٢\text{س}^{٢} - ٢٠\text{س} = -٤٢$$

$$٢\text{س}^{٢} - ٢٠\text{س} = -٤٢ \leftarrow \text{س}^{٢} - ١٠\text{س} = -٢١$$

$$\text{س}^{٢} - ١٠\text{س} + \left(\underset{-٥}{\frac{-١٠}{٢}}\right)^{٢} = -٢١ + \left(\underset{-٥}{\frac{-١٠}{٢}}\right)^{٢} \leftarrow (\text{س} - ٥)^{٢} = ٤$$

$$\leftarrow (\text{س} - ٥)^{٢} = ٤ \xleftarrow{\sqrt{}} \text{س} - ٥ = \pm ٢$$

إما $\text{س} - ٥ = ٢ \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = ٧}$ أو $\text{س} - ٥ = -٢ \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = ٣}$

مجموعة الحل $= \{ ٣ ، ٧ \}$

نعم يمكن : العددان هما : ٣ ، ٧ ← ٣ + ٧ = ١٠ ،، ٩ + ٤٩ = ٥٨

٤) هل يمكنك إيجاد حل حقيقي لكل من المعادلات الآتية ؟ مبرراً إجابتك .

أ) $٢\text{س}^{٢} - ١٢\text{س} + ٢٠ = ٠$ ب) $(\text{س} + ١)^{٢} = -١$

الحل :

أ) $٢\text{س}^{٢} - ١٢\text{س} + ٢٠ = ٠$

$$٢\text{س}^{٢} - ١٢\text{س} + ٢٠ = ٠ \leftarrow \text{س}^{٢} - ٦\text{س} = -١٠$$

$$\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + \left(\underset{=-٣}{\frac{-٦}{٢}}\right)^{٢} = -١٠ + \left(\underset{=-٣}{\frac{-٦}{٢}}\right)^{٢}$$

$$(\text{س} - ٣)^{٢} = -١ \succ ٠ \leftarrow \text{م.ح} = \phi$$

ب) $(\text{س} + ١)^{٢} = -١ \succ ٠$

$$\text{م.ح} = \phi$$

لا يوجد عدد حقيقي مربعه عدد سالب

٣ ـ ٦ حل المعادلة التربيعية بالقانون العام

مثال (٢٩) :

باستخدام طريقة إكمال المربع جد مجموعة حل المعادلة $أس^{٢} + ب س + جـ = ٠$

الحل :

١) ننقل الحد المطلق للطرف الثاني $\leftarrow \leftarrow$ $أس^{٢} + ب س = - جـ$

٢) نقسم المعادلة على معامل $س^{٢}$ $\leftarrow \leftarrow$ $س^{٢} + \frac{ب}{أ} س = - \frac{جـ}{أ}$ (يجب أن يكون معامل $س^{٢} = ١$)

٣) نضيف للطرفين مربع (نصف معامل س) ونحلل $\leftarrow$ (التفسير الهندسي)

$$\leftarrow \leftarrow س^{٢} + \frac{ب}{أ} س + \left(\frac{ب}{٢أ}\right)^{٢} = -\frac{جـ}{أ} + \left(\frac{ب}{٢أ}\right)^{٢} \leftarrow \left(س + \frac{ب}{٢أ}\right)^{٢} = -\frac{جـ}{أ} + \frac{ب^{٢}}{٤أ^{٢}}$$

$$\leftarrow \left(س + \frac{ب}{٢أ}\right)^{٢} = -\frac{جـ}{أ} + \frac{ب^{٢}}{٤أ^{٢}} \leftarrow \left(س + \frac{ب}{٢أ}\right)^{٢} = \frac{ب^{٢} - ٤أجـ}{٤أ^{٢}}$$

$$\leftarrow \left(س + \frac{ب}{٢أ}\right)^{٢} = \frac{ب^{٢} - ٤أجـ}{٤أ^{٢}} \sqrt{} \leftarrow س + \frac{ب}{٢أ} = \pm \sqrt{\frac{ب^{٢} - ٤أجـ}{٤أ^{٢}}}$$

$$\leftarrow س + \frac{ب}{٢أ} = \pm \frac{\sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ} \leftarrow س = \frac{-ب}{٢أ} \pm \frac{\sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ} \leftarrow س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

يسمى $\leftarrow س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$ بالقانون العام لحل أي معادلة تربيعية .

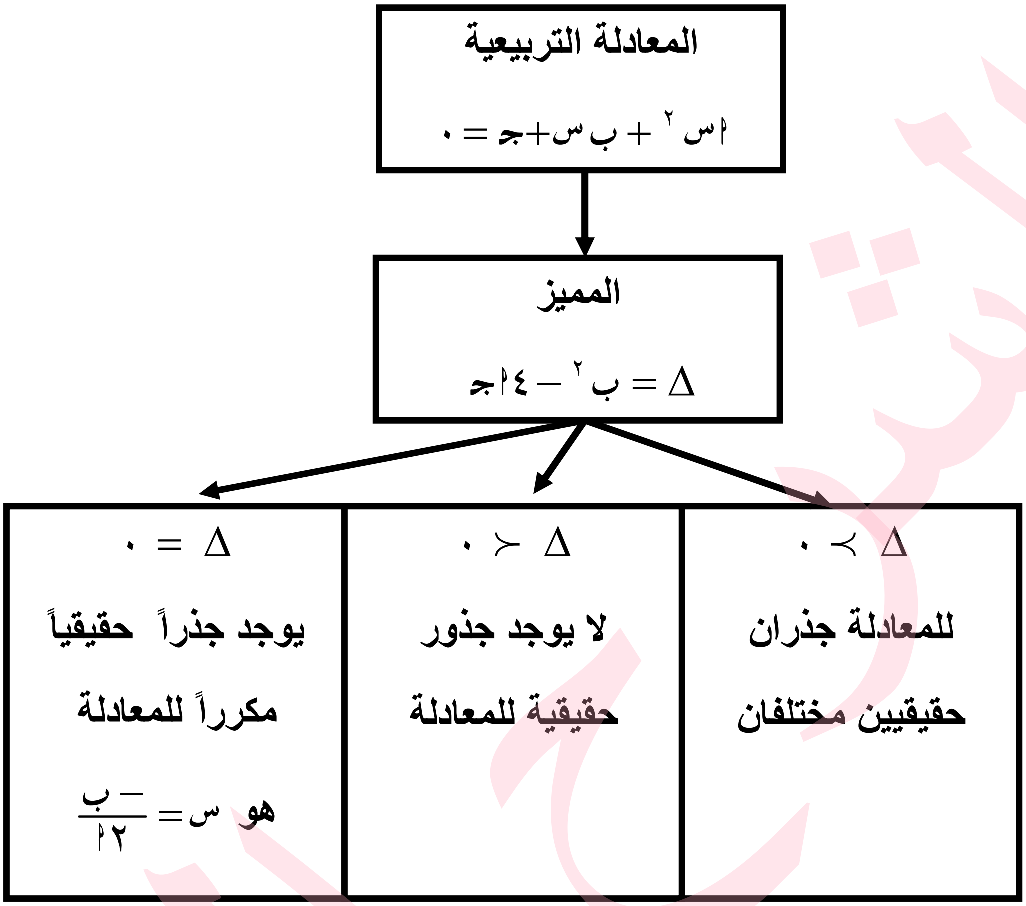
ويسمى المقدار $(ب^{٢} - ٤أجـ)$ مميز المعادلة التربيعية ويرمز له بالرمز Δ

قاعدة

القانون العام لحل المعادلة التربيعية $أس^{٢} + ب س + جـ = ٠$. هو $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$

حيث $ب^{٢} - ٤أجـ \geq ٠$.

- المميز Δ = ب^{٢} − ٤أجـ تكمن أهميته في الكشف عن إمكانية تحليل المعادلة التربيعية وتحديد عدد الحلول الحقيقية لها (إن وجدت) كما يلي :



لذلك يفضل قبل البدء في إيجاد جذور المعادلة التربيعية (إن وجدت) إيجاد المميز .

مثال (٣٠) :

لكل من المعادلات التربيعية الآتية ، جد المميز ، ثم جد جذور المعادلة (إن أمكن) ، باستخدام القانون العام :

أ) س^{٢} − ٤س − ١٢ = ٠

ب) ٢س^{٢} − س + ٣ = ٠

جـ) س^{٢} − ٦س = ٧

ء) س^{٢} − ٨س + ١٦ = ٠

هـ) س^{٢} − ١٠س + ٥ = ٠

و) ٨س − ٢س^{٢} = ١٦

الحل :

أ) س^{٢} − ٤س − ١٢ = ٠

- أ = ١ ، ب = −٤ ، جـ = −١٢ ← Δ = ب^{٢} − ٤أجـ
  ← Δ = ١٦ − ٤×١×−١٢ ← Δ = ١٦ + ٤٨ ← Δ = ٦٤ > ٠

يوجد للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$ ← س = $\frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢أ}$

س = $\frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢أ}$ ← س = $\frac{-(-٤) \pm \sqrt{٦٤}}{٢ \times ١}$ ← س = $\frac{٤ \pm ٨}{٢}$

إما س = $\frac{٤ + ٨}{٢}$ ←← $\boxed{س = ٦}$ أو س = $\frac{٤ - ٨}{٢}$ ←← $\boxed{س = -٢}$

مجموعة الحل = { −٢ ، ٦ }

ب) ٢س^{٢} − س + ٣ = ٠

- أ = ٢ ، ب = −١ ، جـ = ٣ ← Δ = ب^{٢} − ٤أجـ
  ← Δ = ١ − ٤×٢×٣ ← Δ = ١ − ٢٤ ← Δ = −٢٣ < ٠

بما أن المميز < ٠ (سالب) ← لا يوجد جذور حقيقية للمعادلة ← م ٠ ح = { }

جـ) س^{٢} − ٦س = ٧ ← س^{٢} − ٦س − ٧ = ٠

- أ = ١ ، ب = −٦ ، جـ = −٧ ← Δ = ب^{٢} − ٤أجـ
  ← Δ = ٣٦ − ٤×١×−٧ ← Δ = ٣٦ + ٢٨ ← Δ = ٦٤ > ٠

يوجد للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$ ← س = $\frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢أ}$

س = $\frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢أ}$ ← س = $\frac{-(-٦) \pm \sqrt{٦٤}}{٢ \times ١}$ ← س = $\frac{٦ \pm ٨}{٢}$

إما س = $\frac{٦ + ٨}{٢}$ ←← $\boxed{س = ٧}$ أو س = $\frac{٦ - ٨}{٢}$ ←← $\boxed{س = -١}$

مجموعة الحل = { −١ ، ٧ }

ى) $\text{س}^{٢} - ٨\text{س} + ١٦ = ٠$

- $\text{أ} = ١$ ، $\text{ب} = -٨$ ، $\text{جـ} = ١٦ \leftarrow \Delta = \text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}$
  $\leftarrow \Delta = ٦٤ - ٤ \times ١ \times ١٦ \leftarrow \Delta = ٦٤ - ٦٤ \leftarrow \Delta = ٠ = ٠$

- **بما أن المميز = ٠ ، إذاً للمعادلة جذراً مكرراً هو**

$$\leftarrow \text{س} = \frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} \leftarrow \text{س} = \frac{-(-٨)}{٢ \times ١} \leftarrow \boxed{\text{س} = ٤}$$

هـ) $\text{س}^{٢} - ١٠\text{س} + ٥ = ٠$

- $\text{أ} = ١$ ، $\text{ب} = -١٠$ ، $\text{جـ} = ٥ \leftarrow \Delta = \text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}$
  $\leftarrow \Delta = ١٠٠ - ٤ \times ١ \times ٥ \leftarrow \Delta = ١٠٠ - ٢٠ \leftarrow \Delta = ٨٠ \succ ٠$

يوجد للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}} \leftarrow \text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{٢\text{أ}}$$

ملاحظة :

$$\text{س} = \frac{٢(٣ \pm ٢\sqrt{٥})}{٢}$$

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{٢\text{أ}} \leftarrow \text{س} = \frac{-(-١٠) \pm \sqrt{٨٠}}{٢ \times ١} \leftarrow \text{س} = \frac{٦ \pm ٤\sqrt{٥}}{٢} \leftarrow \boxed{\text{س} = ٣ \pm ٢\sqrt{٥}}$$

ملاحظة : $\left(\sqrt{٨٠} = \sqrt{١٦ \times ٥} = \sqrt{١٦} \times \sqrt{٥} = ٤\sqrt{٥} \right)$

مجموعة الحل $= \{ ٣ \pm ٢\sqrt{٥} \}$

و) $٨\text{س} - ٢\text{س}^{٢} = ١٦$

- $٨\text{س} - ٢\text{س}^{٢} = ١٦ \xrightarrow{\div -٢} \text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٨ = ٠$ **كتابة المعادلة على الصورة العامة ثم ÷ -٢**

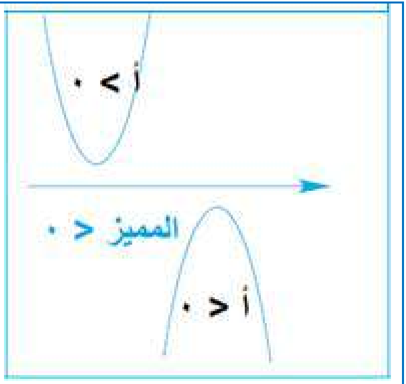
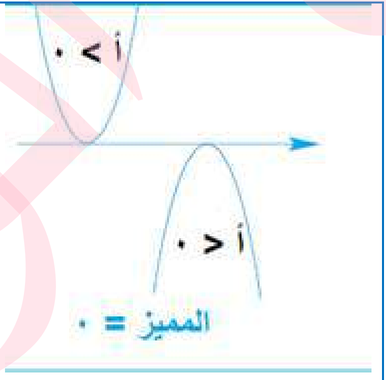
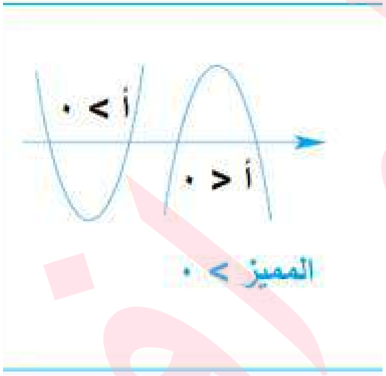
- $\text{أ} = ١$ ، $\text{ب} = -٤$ ، $\text{جـ} = ٨ \leftarrow \Delta = \text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}$
  $\leftarrow \Delta = ١٦ - ٤ \times ١ \times ٨ \leftarrow \Delta = ١٦ - ٣٢ \leftarrow \Delta = -١٦ \prec ٠$

بما أن المميز < ٠ (سالب) ← لا يوجد جذور حقيقية للمعادلة ← $\text{م ٠ ح} = \phi$

معلومة :

إذا كان مميز المعادلة التربيعية مربع كامل فإن جذور المعادلة أعداد نسبية

الجدول التالي يوضح العلاقة بين إشارة المميز وعدد جذور المعادلة التربيعية ، وكذلك نقط تقاطع الاقتران مع محور السينات (المعادلة التربيعية مرافقة للاقتران)

عدد نقط تقاطع منحنى الاقتران التربيعي مع محور السينات	**=**	**عدد جذور (حلول) المعادلة التربيعية المرافقة للاقتران**
Δ = ب^{٢} − ٤اجـ ≻ ٠ **لا يوجد نقاط تقاطع مع محور السينات**	Δ = ب^{٢} − ٤اجـ = ٠ **يوجد نقطة تقاطع واحدة مع محور السينات**	Δ = ب^{٢} − ٤اجـ ≺ ٠ **يوجد نقطتي تقاطع مع محور السينات**
لا يوجد جذر حقيقي للمعادلة التربيعية المرافقة	**يوجد جذر حقيقي مكرر للمعادلة التربيعية المرافقة**	**يوجد جذرين حقيقيين مختلفين للمعادلة التربيعية المرافقة**
		

حل تدريب (٣ ــ ١٨) ص ١١٤

حل المعادلة ٢س^{٢} + ٥س + ٢ = ٠ باستخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية .

الحل :

- ا = ٢ ، ب = ٥ ، جـ = ٢ ← Δ = ب^{٢} − ٤اجـ
  ← Δ = ٢٥ − ٤×٢×٢ ← Δ = ٢٥ − ١٦ ← Δ = ٩ ≺ ٠

- يوجد للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أج}}{٢أ} \leftarrow س = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢أ}$$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢أ} \leftarrow س = \frac{-٥ \pm \sqrt{٩}}{٢ \times ٢} \leftarrow س = \frac{-٥ \pm ٣}{٤}$$

إما $س = \frac{-٥ + ٣}{٤} \leftarrow\leftarrow \boxed{س = \frac{-١}{٢}}$ أو $س = \frac{-٥ - ٣}{٤} \leftarrow\leftarrow \boxed{س = -٢}$

مجموعة الحل = $\left\{ -٢ ، \frac{-١}{٢} \right\}$ (لاحظ أن المميز = ٩ (مربع كامل) وأن الجذور أعداد نسبية)

حل تدريب (٣ – ١٩) ص ١١٤

جد قيمة المميز ثم حدد عدد الجذور لكل من المعادلات الآتية :

أ) $س^{٢} - ٩س = -٢١$ ب) $٢س^{٢} + ١١س + ١٥ = ٠$ ج) $٩س^{٢} + ٢٤س + ١٦ = ٠$

الحل :

أ) $س^{٢} - ٩س = -٢١ \leftarrow س^{٢} - ٩س + ٢١ = ٠$

- $أ = ١ ، ب = -٩ ، ج = ٢١ \leftarrow \Delta = ب^{٢} - ٤أج$
$\leftarrow \Delta = ٨١ - ٤ \times ١ \times ٢١ \leftarrow \Delta = ٨١ - ٨٤ \leftarrow \Delta = -٣ < ٠$

لا يوجد جذور حقيقية للمعادلة

ب) $٢س^{٢} + ١١س + ١٥ = ٠$

- $أ = ٢ ، ب = ١١ ، ج = ١٥ \leftarrow \Delta = ب^{٢} - ٤أج$
$\leftarrow \Delta = ١٢١ - ٤ \times ٢ \times ١٥ \leftarrow \Delta = ١٢١ - ١٢٠ \leftarrow \Delta = ١ > ٠$

جذران حقيقيان مختلفان

ج) $٩س^{٢} + ٢٤س + ١٦ = ٠$

- $أ = ٩ ، ب = ٢٤ ، ج = ١٦ \leftarrow \Delta = ب^{٢} - ٤أج$
$\leftarrow \Delta = ٥٧٦ - ٤ \times ٩ \times ١٦ \leftarrow \Delta = ٥٧٦ - ٥٧٦ \leftarrow \Delta = ٠ = ٠$

جذر حقيقي مكرر (جذران حقيقيان متساويان)

مثال (٣١) : (الحل باستخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية)

متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها س سم ، إذا كان ارتفاعه يزيد طوله بمقدار ١ سم عن طول قاعدته :

١) بين أن المساحة الكلية للمتوازي ، <u>بدلالة س</u> تعطى بالعلاقة $\text{م} = ٦\text{س}^{٢} + ٤\text{س}$ سم٢ .

٢) إذا كانت مساحته الكلية تساوي ٢٤٠ سم٢ ، جد أبعاد المتوازي .

الحل :

- **طول القاعدة س ⟵ محيط القاعدة ٤س :: مساحة القاعدة** $\text{س}^{٢}$
- **طول الارتفاع يزيد عن طول القاعدة بمقدار ١ سم ⟵ الارتفاع** $= \text{س} + ١$
- **المساحة الكلية = ٢٤٠ سم٢**

١) المساحة الكلية = محيط القاعدة × الارتفاع + ٢ × مساحة القاعدة

$$\text{م} = ٤\text{س} \times (\text{س} + ١) + ٢ \times \text{س}^{٢}$$
$$\text{م} = ٤\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٢\text{س}^{٢}$$
$$\text{م} = ٦\text{س}^{٢} + ٤\text{س}$$

٢) المساحة الكلية = ٢٤٠ سم٢ $\text{م} = ٢٤٠ \rightarrow ٦\text{س}^{٢} + ٤\text{س} = ٢٤٠$

$$٦\text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ٢٤٠ = ٠ \xrightarrow{\div ٢} ٣\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ١٢٠ = ٠$$

- $\text{أ} = ٣ ،\ \text{ب} = ٢ ،\ \text{جـ} = -١٢٠ \rightarrow \Delta = \text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}$

$$\rightarrow \Delta = ٤ - ٤ \times ٣ \times -١٢٠ \rightarrow \Delta = ٤ + ١٤٤٠ \rightarrow \Delta = ١٤٤٤ \succ ٠$$

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}} \rightarrow \text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{٢\text{أ}}$$

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{٢\text{أ}} \rightarrow \text{س} = \frac{-٢ \pm \sqrt{١٤٤٤}}{٢ \times ٣} \rightarrow \text{س} = \frac{-٢ \pm ٣٨}{٦}$$

إما $\text{س} = \frac{-٢ + ٣٨}{٦} \longrightarrow\longrightarrow \boxed{\text{س} = ٦}$ أو $\text{س} = \frac{-٢ - ٣٨}{٦} \longrightarrow\longrightarrow \boxed{\text{س} = \frac{-٢٠}{٣}}$ مرفوضة

- **إذا طول قاعدة المتوازي ٦ سم ، وارتفاعه = ٧ سم ، ⟵ (أبعاد الصندوق ٦ ، ٦ ، ٧)**

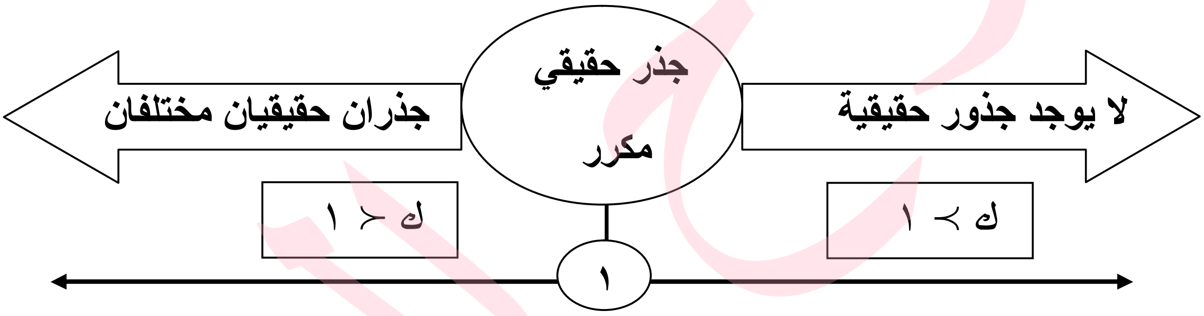
مثال (٣٢) :

للمعادلة $س^{٢} - ٢س + ك = ٠$ ، جد مجموعة قيم ك التي تجعل للمعادلة :

١) جذر حقيقي مكرر ٢) جذران حقيقيان مختلفان ٣) لا يوجد جذور حقيقية

الحل : نستخدم المميز

$أ = ١$ ، $ب = -٢$ ، $جـ = ك$		
جذر حقيقي مكرر	جذران حقيقيان مختلفان	لا يوجد جذور حقيقية
$ب^{٢} - ٤أجـ = ٠$	$ب^{٢} - ٤أجـ > ٠$	$ب^{٢} - ٤أجـ < ٠$
$٤ - ٤ \times ١ \times ك = ٠$ $٤ - ٤ك = ٠$ $٤ك = ٤ \rightarrow ك = ١$	$٤ - ٤ \times ١ \times ك > ٠$ $٤ - ٤ك > ٠$ $٤ك < ٤ \rightarrow ك < ١$	$٤ - ٤ \times ١ \times ك < ٠$ $٤ - ٤ك < ٠$ $٤ك > ٤ \rightarrow ك > ١$



حل تدريب (٣ ــ ١٩) ص ١١٤

إذا كان للمعادلة $س^{٢} - ٨هـس + ٤ = ٠$ حل واحد فما قيمة الثابت هـ ؟

الحل : $أ = ١$ ، $ب = -٨هـ$ ، $جـ = ٤$

- **للمعادلة حل واحد** $\rightarrow \Delta = ب^{٢} - ٤أجـ = ٠$

$$ب^{٢} - ٤أجـ = ٠ \rightarrow (-٨هـ)^{٢} - ٤ \times ١ \times ٤ = ٠$$

$$٦٤هـ^{٢} - ١٦ = ٠ \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow ٦٤هـ^{٢} = ١٦$$

$$هـ^{٢} = \frac{١٦}{٦٤} \rightarrow\rightarrow هـ^{٢} = \frac{١}{٤} \rightarrow\rightarrow \boxed{هـ = \pm\frac{١}{٢}}$$

حل تمارين ومسائل ص ١١٧

١) جد جذور المعادلة $\text{س}^{٢} - ٣\text{س} = ١٠$

الحل :

- $\text{س}^{٢} - ٣\text{س} = ١٠ \leftarrow \text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ١٠ = ٠$

- $\text{ﺃ} = ١ \text{ ، } \text{ب} = -٣ \text{ ، } \text{جـ} = -١٠ \leftarrow \Delta = \text{ب}^{٢} - ٤\text{ﺃجـ}$

$\leftarrow \Delta = ٩ - ٤ \times ١ \times -١٠ \leftarrow \Delta = ٩ + ٤٠ \leftarrow \Delta = ٤٩ \succ ٠$

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{ﺃجـ}}}{٢\text{ﺃ}} \leftarrow \text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{٢\text{ﺃ}}$$

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{٢\text{ﺃ}} \leftarrow \text{س} = \frac{-(-٣) \pm \sqrt{٤٩}}{٢ \times ١} \leftarrow \text{س} = \frac{٣ \pm ٧}{٢}$$

إما $\text{س} = \frac{٣+٧}{٢} \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = ٥}$ أو $\text{س} = \frac{٣-٧}{٢} \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = -٢}$

مجموعة الحل $= \{-٢ \text{ ، } ٥\}$

٢) استخدم القانون العام لحل المعادلات التربيعية الآتية :

ﺃ) $\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٥ = ٠$

ب) $٣\text{س}^{٢} - ٤\text{س} = ٣$

جـ) $٣\text{س} + ٣\text{س}^{٢} = -٤$

ء) $\text{س}^{٢} - ٨\text{س} + ١٦ = ٠$

الحل :

ﺃ) $\text{س}^{٢} - ٦\text{س} + ٥ = ٠$

- $\text{ﺃ} = ١ \text{ ، } \text{ب} = -٦ \text{ ، } \text{جـ} = ٥ \leftarrow \Delta = \text{ب}^{٢} - ٤\text{ﺃجـ}$

$\leftarrow \Delta = ٣٦ - ٤ \times ١ \times ٥ \leftarrow \Delta = ٣٦ - ٢٠ \leftarrow \Delta = ١٦ \succ ٠$

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{٢\text{ﺃ}} \leftarrow \text{س} = \frac{-(-٦) \pm \sqrt{١٦}}{٢ \times ١} \leftarrow \text{س} = \frac{٦ \pm ٤}{٢}$$

إما $\text{س} = \frac{٦+٤}{٢} \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = ٥}$ أو $\text{س} = \frac{٦-٤}{٢} \leftarrow\leftarrow \boxed{\text{س} = ١}$

مجموعة الحل $= \{١ \text{ ، } ٥\}$

ب) ٣س^٢ – ٤س = ٣ ← ٣س^٢ – ٤س – ٣ = ٠

- أ = ٣ ، ب = –٤ ، جـ = –٣ ← Δ = ب^٢ – ٤أجـ
← Δ = ١٦ – ٤×٣×–٣ ← Δ = ١٦+٣٦ ← Δ = ٥٢ > ٠

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{\text{٢أ}} \leftarrow \text{س} = \frac{-(-٤) \pm \sqrt{٥٢}}{٢\times٣} \leftarrow \text{س} = \frac{٤ \pm ٢\sqrt{١٣}}{٦} \leftarrow \text{س} = \frac{٢ \pm \sqrt{١٣}}{٣}$$

مجموعة الحل = $\left\{ \frac{٢ \pm \sqrt{١٣}}{٣} \right\}$

جـ) ٣س + ٣س^٢ = –٤ ← ٣س^٢ + ٣س + ٤ = ٠

- أ = ٣ ، ب = ٣ ، جـ = ٤ ← Δ = ب^٢ – ٤أجـ
← Δ = ٩ – ٤×٣×٤ ← Δ = ٩ – ٤٨ ← Δ = –٣٩ < ٠

بما أن المميز < ٠ (سالب) ← لا يوجد جذور حقيقية للمعادلة ← م ٠ ح = ϕ

د) س^٢ – ٨س + ١٦ = ٠

- أ = ١ ، ب = –٨ ، جـ = ١٦ ← Δ = ب^٢ – ٤أجـ
← Δ = ٦٤ – ٤×١×١٦ ← Δ = ٦٤ – ٦٤ ← Δ = ٠ = ٠

بما أن المميز = ٠ ، إذاً للمعادلة جذراً مكرراً هو

$$\leftarrow \text{س} = \frac{-\text{ب}}{\text{٢أ}} \leftarrow \text{س} = \frac{-(-٨)}{٢\times١} \leftarrow \boxed{\text{س} = ٤}$$

٣) عددان حقيقيان حاصل ضربهما ٧٧ ، ويزيد أحدهما على الآخر بمقدار ٤ ، جد العددين ٠

الحل :

- **نفرض العدد الأول س ← العدد الثاني ←** س + ٤
- **حاصل ضربهما = ٧٧** ← س(س + ٤) = ٧٧

س(س + ٤) = ٧٧ ← س^٢ + ٤س – ٧٧ = ٠

- أ = ١ ، ب = ٤ ، جـ = –٧٧ ← Δ = ب^٢ – ٤أجـ
← Δ = ١٦ – ٤×١×–٧٧ ← Δ = ١٦ + ٣٠٨ ← Δ = ٣٢٤ > ٠

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{\text{٢أ}} \leftarrow \text{س} = \frac{-٤ \pm \sqrt{٣٢٤}}{٢\times١} \leftarrow \text{س} = \frac{-٤ \pm ١٨}{٢}$$

إما $س = \frac{-٤+١٨}{٢} \leftarrow\leftarrow \boxed{س = ٧}$ أو $س = \frac{-٤-١٨}{٢} \leftarrow\leftarrow \boxed{س = -١١}$

- **عند س = ٧ العدد الأول ← العدد الثاني (س + ٤) = ١١**
- **عند س = -١١ العدد الأول ← العدد الثاني (س + ٤) = -٧**

٤) هل يمكن إيجاد حل حقيقي للمعادلة $١٤س^{٢} - ٣٠س = ٠$ **؟ برر إجابتك .**

الحل :

- $أ = ١٤ ، ب = ٣٠ ، ج = ٠ \leftarrow \Delta = ب^{٢} - ٤أج$
  $\leftarrow \Delta = ٩٠٠ - ٤ \times ١ \times ٠ \leftarrow \Delta = ٩٠٠ - ٠ \leftarrow \Delta = ٩٠٠ \succ ٠$

نعم يمكن ، لأن المميز = ٩٠٠ > ٠ ، ولها جذران حقيقيان مختلفان

٥) جد قيمة المميز ، ثم حدد عدد الحلول الحقيقية لكل معادلة فيما يأتي :

أ) $س^{٢} + س + ٩ = ٠$ ب) $٢س^{٢} + ١١س + ٦ = ٠$

الحل :

أ) $س^{٢} + س + ٩ = ٠$

- $أ = ١ ، ب = ١ ، ج = ٩ \leftarrow \Delta = ب^{٢} - ٤أج$
  $\leftarrow \Delta = ١ - ٤ \times ١ \times ٩ \leftarrow \Delta = ١ - ٣٦ \leftarrow \Delta = -٣٥ \prec ٠$

بما أن المميز < ٠ (سالب) ← لا يوجد جذور حقيقية للمعادلة ← $م . ح = \phi$

ب) $٢س^{٢} + ١١س + ٦ = ٠$

- $أ = ٢ ، ب = ١١ ، ج = ٦ \leftarrow \Delta = ب^{٢} - ٤أج$
  $\leftarrow \Delta = ١٢١ - ٤ \times ٢ \times ٦ \leftarrow \Delta = ١٢١ - ٤٨ \leftarrow \Delta = ٧٣ \succ ٠$

بما أن المميز > ٠ (٧٣) ← يوجد لها جذران حقيقيان مختلفان .

٦) يقفز خالد فوق منصة للقفز في بركة سباحة ، وتمثل المعادلة $ل = -٥ن^{٢} + ٨ن + ٦$ ارتفاع خالد (ل) بالأمتار بعد (ن) من الثواني ، استعمل المميز لتعرف إذا كان خالد سيصل إلى ارتفاع (٢٠) متراً ، فسر إجابتك .

الحل : $ل = -٥ن^{٢} + ٨ن + ٦$

- $أ = -٥ ، ب = ٨ ، ج = ٦ \leftarrow \Delta = ب^{٢} - ٤أج$
  $\leftarrow \Delta = ٦٤ - ٤ \times - ٥ \times ٦ \leftarrow \Delta = ٦٤ + ١٢٠ \leftarrow \Delta = ١٨٤ \succ ٠$.

- **بما أن المميز موجب (> ٠) ، إذا منحنى العلاقة يقطع محور السينات في نقطتين ، وكذلك إشارة معامل $ن^{٢}$ سالبة (< ٠) ، إذاً منحنى العلاقة مفتوح للأسفل ، هذا يعني أن مدى العلاقة هو :**

$$ف \leq ل\left(\frac{-ب}{٢أ}\right) \leftarrow ف \leq ل\left(\frac{-٨}{٢\times -٥}\right) \leftarrow ف \leq ل(٠و٨)$$

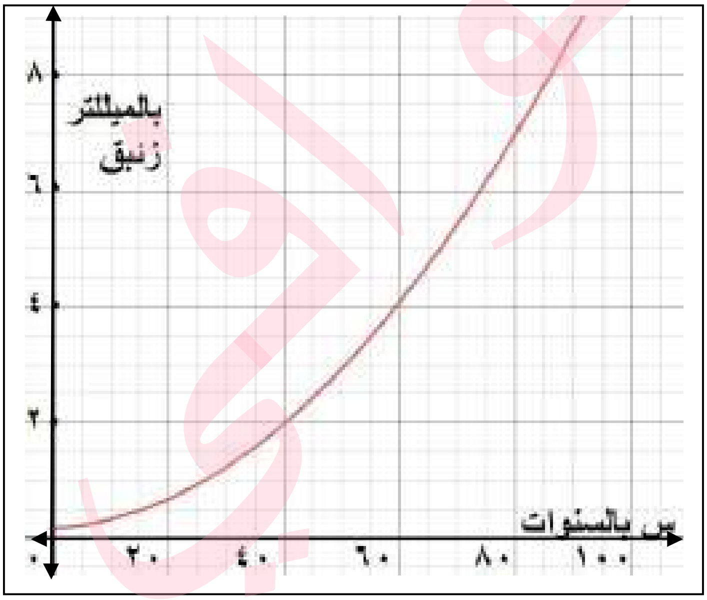
$$ف \leq \left(-٥(٠و٨)^{٢} + ٨(٠و٨) + ٦\right)$$

$$ف \leq -٣و٢ + ٦و٤ + ٦ \leftarrow \boxed{ف \leq ٩و٢}$$

وبما أن أقصى ارتفاع حسب منحنى العلاقة هو ٩و٢ م ، إذا لا يمكن لخالد الوصول لارتفاع ٢٢ متر

٧) المسألة في بداية الدرس

يمكن تمثيل ضغط الدم الانقباضي الطبيعي للمرأة بالميللتر زئبق بالاقتران $ص = ٠و٠١س^{٢} + ٠و٠٥س + ١و٧$ حيث س العمر بالسنوات ، ويستعمل هذا الاقتران لتقدير عمر المرأة إذا علم ضغط الدم الانقباضي لها ، هل تستطيع حل المعادلة المرافقة بالطرق التي تعلمتها سابقاً ؟



الحل : نعم يمكن من خلال التمثيل البياني

لاحظ من الشكل المجاور أن منحنى العلاقة لا يقطع محور السينات الممثل للأعمار بالسنوات ، لذلك لا يوجد حل للمعادلة المرافقة .

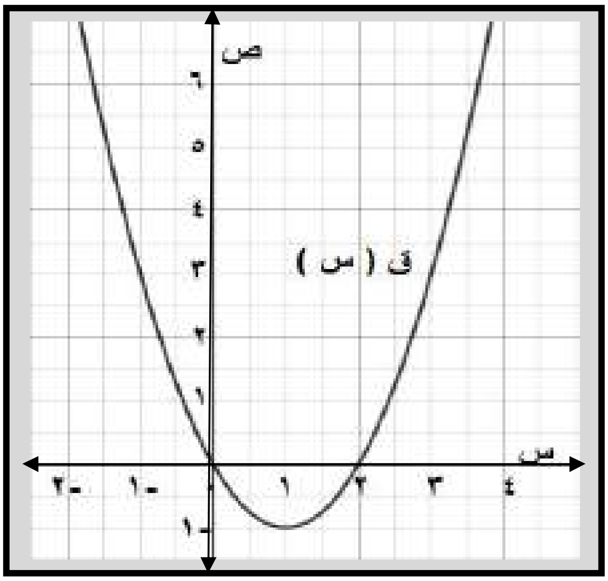
- **أو عن طريق المميز :** $ب^{٢} - ٤أج$

$$\Delta = (٠و٠٥)^{٢} - ٤ \times ٠و٠١ \times ١و٧$$

$$\Delta = ٠و٠٠٢٥ - ٠و٠٦٨٠ = -٠و٠٦٥٥$$

بما أن المميز سالب إذاً لا يوجد حل للمعادلة المرافقة .

حل المراجعة ص١١٨ + ١١٩



١) تأمل الشكل المجاور وأجب عن الأسئلة الآتية :

أ) ما مجال ومدى الاقتران ق ؟

الحل : المجال مجموعة الأعداد الحقيقية ح

المدى : ص $\geq$ −١

ب) جد قيمة س التي يأخذ عندها الاقتران ق

قيمة صغرى . ← الحل : س = ١

جـ) جد معادلة محور التماثل للاقتران ق .

الحل : س = ١

د) جد إحداثيي رأس منحنى الاقتران ق . ← الحل : (١ ، -١)

هـ) ما إشارة مميز المعادلة التربيعية المرافقة للاقتران ق ؟ ← الحل : موجبة

و) جد نقاط تقاطع منحنى ق مع محوري الإحداثيات .

الحل : مع السينات ← (٠ ، ٠) ، (٢ ، ٠) ، مع الصادات ← (٠ ، ٠)

ز) كم عدد الجذور الحقيقية للمعادلة المرافقة للاقتران ق ؟ ← الحل : جذران

ح) ما قيمة ق (-١) ؟ ← الحل : ق (-١) = ٤

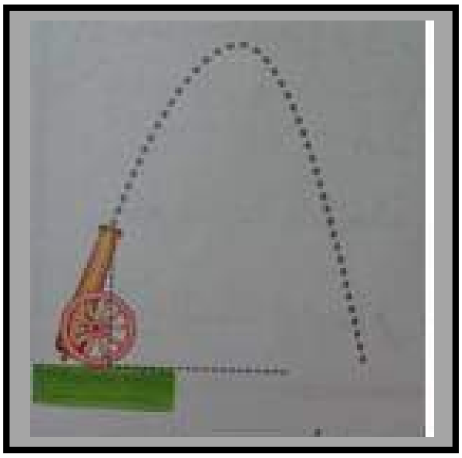
ط) ما أصفار الاقتران ق ؟ ← الحل : س = ٠ ،،، س = ٢

٢) إذا كان للاقتران ق صفر وحيد ، حيث ق(س) = أس^{٢} + ٦س + ٩ فما قيمة الثابت أ .

الحل : صفر وحيد ← المميز = صفر ← ب^{٢} − ٤أجـ = ٠

ب^{٢} − ٤أجـ = ٠ ← ٣٦ − ٤ × أ × ٩ = ٠ ← ٣٦ − ٣٦أ = ٠

٣٦أ = ٣٦ ← $\boxed{أ = ١}$



٣) أطلق مدفع قذيفة بسرعة ابتدائية مقدارها ١٩و٦ متراً / ث من سطح الأرض ، فإذا كانت المسافة التي تقطعها القذيفة (ف) بالأمتار بعد (ن) من الثواني معطاة بالعلاقة :

$$\text{ف} = -٩و٤\text{ن}^{٢} + ١٩و٦\text{ن}$$

أ) جد أقصى ارتفاع تصل إليه القذيفة من سطح الأرض .

ب) متى تصل القذيفة سطح الأرض .

الحل :

أ = −٩و٤ ، ب = ١٩و٦ ، جـ = ٠

أ) أقصى ارتفاع تصل إليه القذيفة عند $\text{ف}\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}}\right)$

$\text{ن} = \frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} \leftarrow \text{ن} = \frac{-١٩و٦}{٢\times -٩و٤} \leftarrow \text{ن} = \frac{١٩و٦}{٩و٨} \leftarrow \text{ن} = ٢$ ث

ف(٢) = −٩و٤×٤ + ١٩و٦×٢ ← ف(٢) = −١٩و٦ + ٣٩و٢ ← ف(٢) = ١٩و٦ م **أقصى ارتفاع**

ب) تصل القذيفة إلى الأرض عندما تكون المسافة (الإزاحة) = ٠ ← ف = ٠

ت)

$\text{ف} = ٠ \leftarrow -٩و٤\text{ن}^{٢} + ١٩و٦\text{ن} = ٠ \leftarrow \text{ن}(-٩و٤\text{ن} + ١٩و٦) = ٠$

إما ن = ٠ **وهي لحظة الانطلاق**

أو −٩و٤ن + ١٩و٦ = ٠ ← −٩و٤ن = −١٩و٦ ← ن = ٤ ث **تصل الأرض بعد ٤ ثواني**

٤) حل المعادلات الآتية :

أ) $(س+٥)^٢=٤٩$ ب) $٣-س^٢=٢س$ جـ) $س^٢+٦س+٧=٠$

ء) $٤س^٢+١٢=١٦س$ هـ) $٢٠=١٢س-٢س^٢$

الحل :

أ) $(س+٥)^٢=٤٩$

- $(س+٥)^٢=٤٩ \leftarrow س+٥=\pm٧$

إما $س+٥=٧ \leftarrow \boxed{س=٢}$ أو $س+٥=-٧ \leftarrow \boxed{س=-١٢}$

مجموعة الحل $=\{٢ ، -١٢\}$

ب) $٣-\overset{\leftleftarrows}{س^٢}=٢س \leftarrow س^٢+٢س-٣=٠$

- $أ=١ ، ب=٢ ، جـ=-٣ \leftarrow \Delta=ب^٢-٤أجـ$

- $\leftarrow \Delta=٤-٤\times١\times-٣ \leftarrow \Delta=٤+١٢ \leftarrow \Delta=١٦ \succ ٠$

بما أن إشارة المميز موجبة وقيمته تمثل مربع كامل ← الحل بطريقة التحليل

$س^٢+٢س-٣=٠ \leftarrow (س+٣)(س-١)=٠$

إما $س+٣=٠ \leftarrow \boxed{س=-٣}$ أو $س-١=٠ \leftarrow \boxed{س=١}$

مجموعة الحل $=\{-٣ ، ١\}$

ملاحظة : يمكن حل فرع ب باستخدام أي طريقة

جـ) $س^٢+٦س+٧=٠$

- $أ=١ ، ب=٦ ، جـ=٧ \leftarrow \Delta=ب^٢-٤أجـ$

$\leftarrow \Delta=٣٦-٤\times١\times٧ \leftarrow \Delta=٣٦-٢٨ \leftarrow \Delta=٨ \succ ٠$ ← **ليس مربع كامل**

يمكن الحل بسهولة باستخدام طريقة إكمال مربع أو القانون العام / الحل بالقانون العام

$$س=\frac{-ب\pm\sqrt{\Delta}}{٢أ} \leftarrow س=\frac{-٦\pm\sqrt{٨}}{٢\times١} \leftarrow س=-٣\pm\sqrt{٢}$$

مجموعة الحل $=\{-٣\pm\sqrt{٢}\}$

د) ٤س^{٢} + ١٢ = ١٦س $\xrightarrow{÷٤}$ س^{٢} − ٤س + ٣ = ٠ **الكتابة على الصورة العامة ثم القسمة على ٤**

- أ = ١ ، ب = −٤ ، جـ = ٣ ← Δ = ب^{٢} − ٤أجـ
  ← Δ = ١٦ − ٤×١×٣ ← Δ = ١٦ − ١٢ ← Δ = ٤ ≻ ٠

بما أن إشارة المميز موجبة وقيمته تمثل مربع كامل ← الحل بطريقة التحليل

س^{٢} − ٤س + ٣ = ٠ ← (س − ٣)(س − ١) = ٠

إما س − ٣ = ٠ ← $\boxed{\text{س} = ٣}$ أو س − ١ = ٠ ← $\boxed{\text{س} = ١}$

مجموعة الحل = {٣ ، ١}

ملاحظة : يمكن حل فرع د باستخدام أي طريقة

هـ) ٢٠ = ١٢س − ٢س^{٢} $\xrightarrow{÷٢}$ س^{٢} − ٦س + ١٠ = ٠ **الكتابة على الصورة العامة ثم القسمة على ٢**

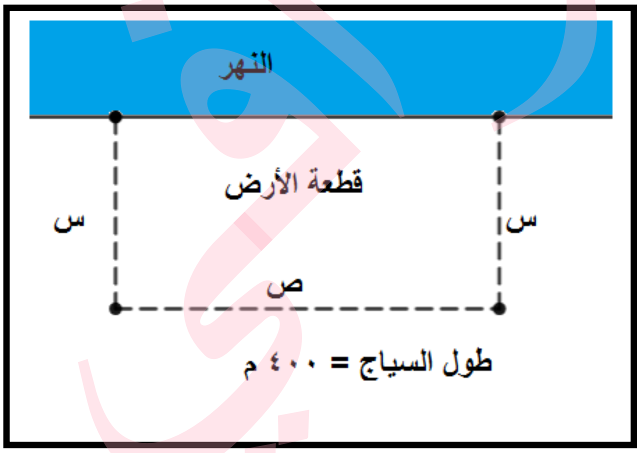
- أ = ١ ، ب = −٦ ، جـ = ١٠ ← Δ = ب^{٢} − ٤أجـ
  ← Δ = ٣٦ − ٤×١×١٠ ← Δ = ٣٦ − ٤٠ ← Δ = −٤ ≺ ٠

بما أن إشارة المميز سالبة (> ٠) إذاً لا يوجد حل للمعادلة ← م.ح = ϕ

٥) أقيم سياج طوله ٤٠٠ م حول قطعة أرض مستطيلة الشكل وتقع على ضفة نهر مستقيم ، فإذا لم تسيج الواجهة الواقعة على ضفة النهر ، جد أبعاد قطعة الأرض بحيث تكون مساحتها أكبر ما يمكن .

الحل :

الشكل المجاور يمثل قطعة الأرض ومكان النهر بالنسبة إلى قطعة الأرض ، حيث تم تسييج قطعة الأرض من ٣ جهات فقط ، ولم تسيج الجهة الواقعة على ضفة النهر



- **نفرض أن بعدي القطعة س ، ص ، وبما أنه أقيم السياج على ٣ جهات فإن**

س + س + ص = ٤٠٠ ← ٢س + ص = ٤٠٠ ....(١)

- **مساحة الأرض (م) = حاصل ضرب بعديها**

م = س × ص = ٠٠٠٠ (٢)

- **لاحظ وجود علاقة بين المعادلتين ١ ، ٢ ، نجعل ص موضع للقانون في المعادلة الأولى ثم نعوضها في المعادلة الثنية**

ص = ٤٠٠ − ٢س ← م = س × (٤٠٠ − ٢س) ← م = − ٢$\text{س}^{٢}$ + ٤٠٠س

- **لاحظ أنه نتج لدينا اقتران تربيعي م(س) = − ٢$\text{س}^{٢}$ + ٤٠٠س يمثل المساحة بدلالة أحد بعدي قطعة الأرض ، وبما أن المطلوب أبعاد قطعة الأرض لتكون المساحة أكبر ما يمكن ، نجد الإحداثي السيني لنقطة الرأس $\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}} ، \text{م}\left(\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}}\right)\right)$ ، فتكون مساحة قطعة الأرض أكبر ما يمكن عندما س = $\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}}$ (لاحظ أن إشارة معامل $\text{س}^{٢}$ سالبة ، إذاً يوجد قيمة عظمى)**

- س = $\frac{-\text{ب}}{٢\text{أ}}$ = $\frac{-٤٠٠}{٢ \times -٢}$ ← $\boxed{\text{س} = ١٠٠}$ **م بعد الأرض الأول**

- **عند** س = ١٠٠ ← ص = ٤٠٠ − ٢ × ١٠٠ ← $\boxed{\text{ص} = ٢٠٠}$ **م بعد الأرض الثاني**

- **وللتأكد من صحة الحل س + س + ص = ١٠٠ + ١٠٠ + ٢٠٠ = ٤٠٠ م طول السياج ٠**

حل الاختبار الذاتي ص ١٢٠ + ١٢١

١) يتكون هذا السؤال من تسع فقرات من نوع الاختيار من متعدد ، ولكل منها أربعة بدائل ، واحد منها فقط صحيح ، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح لكل منها ٠

(١) أحد الاقترانات التالية ليس تربيعياً٠

$\boxed{\text{أ)}}$ ن(س) = ٢$\text{س}^{٣}$ − ٢س + ٢ ب) ل(س) = $\text{س}^{٢}$ − ٢س + ٢

جـ) هـ(س) = ١٠$\text{س}^{٢}$ د) و(س) = ٤ − ٨س − $\text{س}^{٢}$

(٢) معادلة محور التماثل للاقتران التربيعي ن(س) = $\text{س}^{٢}$ هي :

أ) س = ١ $\boxed{\text{ب)}}$ س = ٠ جـ) س = ٢ د) س = −٢

(٣) الإحداثي السيني لنقطة رأس الاقتران التربيعي ق(س) = ٢س^{٢} − ٢س **هي :**

$\boxed{\text{أ)}}$ س = $\frac{١}{٢}$ ب) س = ٠ جـ) س = ٢ د) س = $\frac{−١}{٢}$

الحل : س = $\frac{−ب}{٢أ}$ = $\frac{−(−٢)}{٢×٢}$ ← $\boxed{س = \frac{١}{٢}}$

(٤) مجال الاقتران التربيعي ق(س) = (س − ١)^{٢} **يساوي :**

أ) ∅ $\boxed{\text{ب)}}$ **مجموعة الأعداد الحقيقية**

جـ) مجموعة الأعداد الصحيحة **د) مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة**

(٥) يقطع الاقتران التربيعي ق(س) = ٣س − س^{٢} **محور الصادات في النقطة :**

أ) (٠ ، ٣) ب) (٣ ، ٠) جـ) (٣ ، −١) $\boxed{\text{د)}}$ (٠ ، ٠)

الحل : ق(٠) = ٣(٠) − (٠)^{٢} ← ق(٠) = ٠ ← (٠ ، ٠)

(٦) إذا كان إحداثيا رأس منحنى الاقتران التربيعي ص = ق(س) **المفتوح للأسفل هما**

(−٣ ، ١) ، **فإن مدى الاقتران ق هو : مجموعة القيم التي تحقق :**

أ) س ≥ −٣ ب) س ≤ −٣ جـ) ص ≥ ١ $\boxed{\text{د)}}$ ص ≤ ١

(٧) مجموعة حل المعادلة س^{٢} + ٢ = ٣س **هي :**

$\boxed{\text{أ)}}$ {١ ، ٢} ب) {٢ ، −١} جـ) {−١ ، −٢} د) ϕ

الحل : س^{٢} + ٢ = ٣س ← س^{٢} − ٣س + ٢ = ٠

- أ = ١ ، ب = −٣ ، جـ = ٢ ← Δ = ب^{٢} − ٤أجـ
  ← Δ = ٩ − ٤×١×٢ ← Δ = ٩ − ١ ← Δ = ١ ≻ ٠

س^{٢} − ٣س + ٢ = ٠ ← (س − ١)(س − ٢) = ٠ ← س = ١ ، س = ٢

(٨) مميز المعادلة التربيعية المرافقة للاقتران ق(س) = ١ − س − س^{٢} **يساوي :**

أ) Δ = −٣ ب) Δ = −٤ جـ) Δ = −٥ $\boxed{\text{د)}}$ Δ = ٥

الحل : Δ = ب^{٢} − ٤أجـ = ١ − ٤ × −١ × ١ ← Δ = ٥

(٩) القيمة الصغرى للاقتران التربيعي ق(س) = س^{٢} − ٢س + ٩ تساوي :

أ) ٠ ب) ١ جـ) ١١ $\boxed{\text{د)}}$ ٨

الحل : $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{٢}{٢}$ = ١ ← ق(١) = ١ − ٢ + ٩ = ٨

٢) جد قيم جـ التي تجعل الاقتران ق(س) = س^{٢} + ٤س + جـ ليس له جذور حقيقية .

الحل : ليس له جذور حقيقية ← المميز < ٠

ب^{٢} − ٤أجـ < ٠ ← ١٦ − ٤×١×جـ < ٠
١٦ − ٤جـ < ٠ ←←← ١٦ < ٤جـ
$\frac{١٦}{٤}$ < جـ ←← $\boxed{\text{جـ > ٤}}$

٣) جد حل المعادلات التربيعية الآتية (إن وجد) :

أ) س^{٢} − ٢س = ٢٤ ب) (س + ٢)^{٢} = س + ٤ جـ) ٢س^{٢} + ٦س = ٠

د) −١٠ = س(٣ − س) هـ) س^{٢} − ٤س − ٥ = ٠

الحل :

أ) س^{٢} − ٢س = ٢٤

س^{٢} − ٢س = ٢٤ ← س^{٢} − ٢س − ٢٤ = ٠

- أ = ١ ، ب = −٢ ، جـ = −٢٤ ← Δ = ب^{٢} − ٤أجـ
← Δ = ٤ − ٤×١×−٢٤ ← Δ = ٤ + ٩٦ ← Δ = ١٠٠ > ٠

س^{٢} − ٢س − ٢٤ = ٠ ← (س − ٦)(س + ٤) = ٠ ← س = ١ ، س = ٢
م . ح = { −٤ ، ٦ }

ب) (س + ٢)^{٢} = س + ٤

- (س + ٢)^{٢} = س + ٤ $\xleftarrow{\text{(س+أ)}^{٢}\text{=س}^{٢}\text{+٢أس+أ}^{٢}}$ س^{٢} + ٤س + ~~٤~~ = $\overrightarrow{\text{س}}$ + ~~٤~~ ← س^{٢} + ٣س = ٠
- س^{٢} + ٣س = ٠ ← س(س + ٣) = ٠ ← س = ٠ ، س = −٣ ← م . ح = {−٣ ، ٠}

سليمان دلدوم أبو هبه

جـ) $٢س^{٢} + ٦س = ٠$

$٢س^{٢} + ٦س = ٠ \rightarrow س^{٢} + ٣س = ٠ \rightarrow س(س + ٣) = ٠$

$س(س + ٣) = ٠ \rightarrow س = ٠ \quad ، \quad س = -٣$

$م . ح = \{-٣ ، ٠\}$

ملاحظة : في المعادلة التربيعية إذا كان الحد المطلق (جـ) = ٠ ، لا داعي لإيجاد المميز ، نبسط المعادلة إن أمكن ، ثم التحليل بإخراج س عامل مشترك ، ثم نكمل الحل .

د) $-١٠ = س(٣ - س)$

$-١٠ = س(٣ - س) \rightarrow -١٠ = ٣س - س^{٢} \rightarrow س^{٢} - ٣س - ١٠ = ٠$

- $أ = ١ ، ب = -٣ ، جـ = -١٠ \rightarrow \Delta = ب^{٢} - ٤أجـ$ **الحل بالتحليل**
  $\rightarrow \Delta = ٩ - ٤ \times ١ \times -١٠ \rightarrow \Delta = ٩ + ٤٠ \rightarrow \Delta = ٤٩ \succ ٠$

$س^{٢} - ٣س - ١٠ = ٠ \rightarrow (س + ٢)(س - ٥) = ٠ \rightarrow س = -٢ \quad ، \quad س = ٥$

$م . ح = \{ -٢ ، ٥ \}$

هـ) $س^{٢} - ٤س - ٥ = ٠$

- $أ = ١ ، ب = -٤ ، جـ = -٥ \rightarrow \Delta = ب^{٢} - ٤أجـ$ **الحل بالتحليل**
  $\rightarrow \Delta = ١٦ - ٤ \times ١ \times -٥ \rightarrow \Delta = ١٦ + ٢٠ \rightarrow \Delta = ٣٦ \succ ٠$

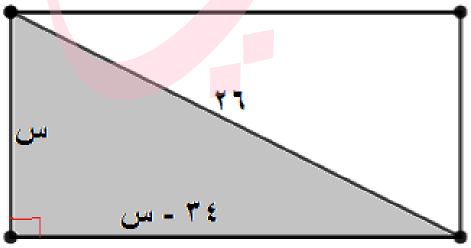
$س^{٢} - ٤س - ٥ = ٠ \rightarrow (س + ١)(س - ٥) = ٠ \rightarrow س = -١ \quad ، \quad س = ٥$

$م . ح = \{ -١ ، ٥ \}$

٤) جد أبعاد المستطيل الذي محيطه ٦٨ سم ، وطول قطره ٢٦ سم .

الحل :

- **نستخدم علاقة محيط المستطيل ونظرية فيثاغورس في تكوين علاقة بدلالة أحد بعديه .**
- **نفرض طول أحد بعدي المستطيل س ← البعد الثاني** $= \frac{٦٨ - ٢س}{٢} = (٣٤ - س)$
- **بتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث المظلل (الشكل)**



$(٣٤ - س)^{٢} + س^{٢} = (٢٦)^{٢}$

وبفك القوس وجمع الحدود المتشابهة وترتيب المعادلة

(٣٤ – س)^{٢} + س^{٢} = (٢٦)^{٢} ← ١١٥٦ – ٦٨س + س^{٢} + س^{٢} ← = ٦٧٦

٢س^{٢} – ٦٨س + ٤٨٠ = ٠ ← س^{٢} – ٣٤س + ٢٤٠ = ٠ ← **معادلة تربيعية**

- أ = ١ ، ب = –٣٤ ، جـ = ٢٤٠ ← Δ = ب^{٢} – ٤أجـ ← Δ = ١١٥٦ – ٤×١×٢٤٠ ← Δ = ١١٥٦ – ٩٦٠ ← Δ = ١٤ > ٠ **طريقة التحليل**

س^{٢} – ٣٤س + ٢٤٠ = ٠ ← (س – ٢٤)(س – ١٠) = ٠ ← س = ٢٤ ، س = ١٠

عندما البعد الأول = ١٠ سم ← البعد الثاني = ٣٤ – س = ٣٤ – ١٠ = ٢٤ سم

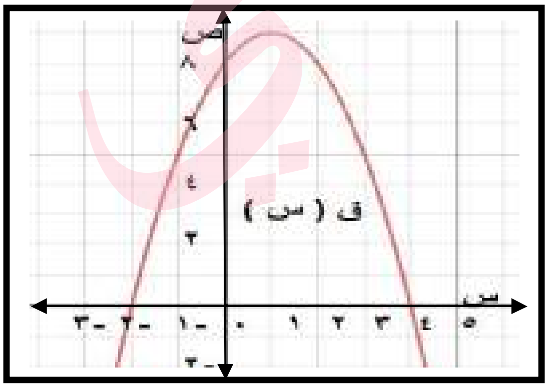
عندما البعد الأول = ٢٤ سم ← البعد الثاني = ٣٤ – س = ٣٤ – ٢٤ = ١٠ سم

ملاحظة : $\frac{١}{٢}$ محيط المستطيل (ل) = البعد الأول + البعد الثاني

٥) إذا علمت أن منحنى الاقتران التربيعي ق يقطع محور السينات عند س = -٢ ، س = ٤ ، ويمر منحناه بالنقطة (٠ ، ٨) ، جد قاعدة الاقتران ق ، ثم ارسم منحناه مستخدماً برنامج رسم .

الحل : ق(س) = أس^{٢} + ب س + جـ = ٠

- **يمر في النقطة** (٠ ، ٨) ← ق(٠) = ٨ ← $\boxed{\text{جـ} = ٨}$ **(نقطة تقاطعه مع محور الصادات)**
- **صورة الاقتران** ق(س) = أس^{٢} + ب س + ٨ = ٠
- **يقطع محور السينات عند** س = –٢ ← ق(–٢) = ٠ ← ق(–٢) = ٤أ – ٢ب + ٨ = ٠ . . . . (١)
- **يقطع محور السينات عند** س = ٤ ← ق(٤) = ٠ ← ق(٤) = ١٦أ + ٤ب + ٨ = ٠ . . . . (٢)
- **بضرب المعادلة ١ في ٢ ، ثم جمعها للمعادلة ٢ ينتج** ← ٢٤أ + ٢٤ = ٠ ← $\boxed{\text{أ} = -١}$
- **بتعويض قيمة أ في معادلة ١ ينتج** ← –٤ – ٢ب + ٨ = ٠ ← $\boxed{\text{ب} = ٢}$
- **قاعدة الاقتران هي :** ق(س) = –س^{٢} + ٢س + ٨ = ٠



القسم الثاني : الصورة القياسية للاقتران التربيعي

- درسنا سابقا الصورة العامة للاقتران التربيعي والتي هي على الصورة $ق(س) = أس^{٢} + ب س + جـ \leftarrow أ \neq ٠$ وفي هذا الجزء سوف نتعرف على صورة ثانية وهي $ق(س) = أ(س - د)^{٢} + هـ \leftarrow أ \neq ٠$ حيث :

- $(د ، هـ)$ إحداثيي نقطة الرأس لمنحنى الاقتران
- معادلة محور التماثل $(س = د)$
- نقطة التقاطع مع محور الصادات ضع $(س = ٠)$

- الصورة القياسية ناتجة من الصورة العامة للاقتران التربيعي باستخدام طريقة إكمال المربع كما يلي :

$$ق(س) = أس^{٢} + ب س + جـ$$

١) $\leftarrow ق(س) = أ\left(س^{٢} + \frac{ب}{أ}س + \frac{جـ}{أ}\right)$ إخراج أ عامل مشترك

٢) $\leftarrow ق(س) = أ\left(س^{٢} + \frac{ب}{أ}س + \left(\frac{ب}{٢أ}\right)^{٢} - \left(\frac{ب}{٢أ}\right)^{٢} + \frac{جـ}{أ}\right)$ إضافة $\pm \left(\frac{ب}{٢أ}\right)^{٢}$ داخل القوس

٣) $\leftarrow ق(س) = أ\left(س^{٢} + \frac{ب}{أ}س + \left(\frac{ب}{٢أ}\right)^{٢}\right) + \left(-\left(\frac{ب}{٢أ}\right)^{٢} + \frac{جـ}{أ}\right)$ نرتب

٤) $\leftarrow ق(س) = أ\left(س + \frac{ب}{٢أ}\right)^{٢} + \left(\frac{٤أجـ - ب^{٢}}{٤أ^{٢}}\right)$ نحلل ونرتب القوسين

٥) نفرض أن $\leftarrow \boxed{د = -\frac{ب}{٢أ}}$ ، $\boxed{هـ = \frac{٤أجـ - ب^{٢}}{٤أ^{٢}}} \leftarrow$

٦) $\leftarrow ق(س) = أ(س - د)^{٢} + هـ \leftarrow\leftarrow$ الصورة القياسية للاقتران التربيعي

المعادلة المرافقة للاقتران التربيعي بالصورة القياسية هي : $أ(س - د)^{٢} + هـ = ٠$

مثال (٣٣) :

لكل من الاقترانات التربيعية الآتية :

أ) $ك(س) = (س - ٤)^٢ + ٣$ ب) $ص = -(س + ٣)^٢ + ٢$ جـ) $ن(س) = ٢(س + ١)^٢$

د) $ل(س) = ٣(س + ٢)^٢ - ٤$ هـ) $م(س) = \frac{١}{٢}(س - ٢)^٢$ و) $ع(س) = \frac{-٣}{٢}(س + ٢)^٢ - ٤$

١) جد معادلة محور التماثل .

٢) جد إحداثيي نقطة رأس منحنى الاقتران

٣) جد نقط تقاطع منحنى الاقتران مع المحورين الإحداثيين

الحل :

أ) $ك(س) = (س - ٤)^٢ + ٣$

١) معادلة محور التماثل ← $س - ٤ = ٠ \leftarrow \boxed{س = ٤}$

٢) إحداثيي نقطة الرأس $(د ، هـ) = (٤ ، ٣)$

٣) مع محور الصادات ، نضع ← $\boxed{س = ٠} \leftarrow ك(٠) = (٠ - ٤)^٢ + ٣ = ١٩ \leftarrow (٠ ، ١٩)$

مع محور السينات $ك(س) = ٠ \leftarrow (س - ٤)^٢ + ٣ = ٠ \leftarrow (س - ٤)^٢ = -٣$

مجموعة الحل $= \phi$ **، لا يوجد عدد حقيقي مربعه عدد سالب**

إذاً منحنى الاقتران لا يقطع محور السينات

ب) $ص = -(س + ٣)^٢ + ٢$

١) معادلة محور التماثل ← $س + ٣ = ٠ \leftarrow \boxed{س = -٣}$

٢) إحداثيي نقطة الرأس $(د ، هـ) = (-٣ ، -٢)$

٣) مع محور الصادات ، نضع ← $\boxed{س = ٠} \leftarrow ص = (٠ + ٣)^٢ + ٢ = ١١ \leftarrow (٠ ، ١١)$

مع محور السينات $ص = ٠ \leftarrow -(س + ٣)^٢ + ٢ = ٠ \leftarrow \underbrace{-(س + ٣)^٢}_{÷-١} = \underbrace{-٢}_{÷-١}$

$(\text{س}+٣)^{٢}=٢ \leftarrow \text{س}+٣=\pm\sqrt{٢} \leftarrow \text{س}=-٣\pm\sqrt{٢}$ أصفار الاقتران ص

$\text{م . ع}=\{\text{س}=-٣\pm\sqrt{٢}\}$

نقط التقاطع مع محور السينات $(-٣+\sqrt{٢}\text{ ، }٠)(-٣-\sqrt{٢}\text{ ، }٠)$

جـ) $\text{ق}(\text{س})=٢(\text{س}+١)^{٢}$

١) معادلة محور التماثل $\leftarrow \text{س}+١=٠ \leftarrow \boxed{\text{س}=-١}$

٢) إحداثيي نقطة الرأس $(\text{د ، هـ})=(-١\text{ ، }٠)$

٣) مع محور الصادات ، نضع $\leftarrow \boxed{\text{س}=٠} \leftarrow \text{ق}(٠)=٢(٠+٣)^{٢}=١٨ \leftarrow (٠\text{ ، }١٨)$

مع محور السينات $\text{ق}(\text{س})=٠ \leftarrow \underbrace{٢(\text{س}+١)^{٢}}_{÷٢}=\underset{÷٢}{٠} \leftarrow (\text{س}+١)^{٢}=٠$

$\leftarrow (\text{س}+١)^{٢}=٠ \leftarrow \text{س}+١=٠ \leftarrow \boxed{\text{س}=-١}$

نقطة التقاطع مع محور السينات $(-١\text{ ، }٠)$

د) $\text{ل}(\text{س})=٣(\text{س}+٢)^{٢}-٤$

١) معادلة محور التماثل $\leftarrow \text{س}+٢=٠ \leftarrow \boxed{\text{س}=-٢}$

٢) إحداثيي نقطة الرأس $(\text{د ، هـ})=(-٢\text{ ، }-٤)$

٣) مع محور الصادات ، نضع $\leftarrow \boxed{\text{س}=٠} \leftarrow \text{ل}(٠)=٣(٠+٢)^{٢}-٤=٨ \leftarrow (٠\text{ ، }٨)$

مع محور السينات $\text{ل}(\text{س})=٠ \leftarrow ٣(\text{س}+٢)^{٢}-٤=٠ \leftarrow \underbrace{٣(\text{س}+٢)^{٢}}_{÷٣}=\underset{÷٣}{٤}$

$(\text{س}+٢)^{٢}=\frac{٤}{٣} \leftarrow \text{س}-٢=\pm\frac{٢}{\sqrt{٣}} \leftarrow \text{س}=-٢\pm\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ أصفار الاقتران ص

$\text{م . ع}=\left\{\text{س}=-٢\pm\frac{٢}{\sqrt{٣}}\right\}$

نقط التقاطع مع محور السينات $\left(-٢\pm\frac{٢}{\sqrt{٣}}\text{ ، }٠\right)\left(-٢-\frac{٢}{\sqrt{٣}}\text{ ، }٠\right)$

هـ) $\text{م}(\text{س}) = \frac{١}{٢}(\text{س} - ٢)^{٢}$

١) معادلة محور التماثل ← $\text{س} - ٢ = ٠$ ← $\boxed{\text{س} = ٢}$

٢) إحداثيي نقطة الرأس $(\text{ء} ، \text{هـ}) = (٢ ، ٠)$

٣) مع محور الصادات ، نضع ← $\boxed{\text{س} = ٠}$ ← $\text{م}(٠) = \frac{١}{٢}(٠ - ٢)^{٢} = ٢$ ← $(٠ ، ٥)$

مع محور السينات $\text{م}(\text{س}) = ٠$ ← $\underbrace{\frac{١}{٢}(\text{س} - ٢)^{٢}}_{\times ٢} = \underset{\times ٢}{٠}$ ← $(\text{س} - ٢)^{٢} = ٠$

← $(\text{س} - ٢)^{٢} = ٠$ ← $\text{س} - ٢ = ٠$ ← $\boxed{\text{س} = ٢}$

نقطة التقاطع مع محور السينات $(٢ ، ٠)$

و) $\text{ع}(\text{س}) = \frac{-٣}{٢}(\text{س} + ٢)^{٢} - ٤$

١) معادلة محور التماثل ← $\text{س} + ٢ = ٠$ ← $\boxed{\text{س} = -٢}$

٢) إحداثيي نقطة الرأس $(\text{ء} ، \text{هـ}) = (-٢ ، -٤)$

٣) مع محور الصادات ، نضع

← $\boxed{\text{س} = ٠}$ ← $\text{ع}(٠) = \frac{-٣}{٢}(٠ + ٢)^{٢} - ٤ = -١٠$ ← $(٠ ، -١٠)$

مع محور السينات $\text{ل}(\text{س}) = ٠$ ← $\frac{-٣}{٢}(\text{س} + ٢)^{٢} - ٤ = ٠$ ← $\underbrace{\frac{-٣}{٢}(\text{س} + ٢)^{٢}}_{\times \frac{٢}{-٣}} = \underset{\times \frac{٢}{-٣}}{٤}$

$(\text{س} + ٢)^{٢} = \frac{-٨}{٣}$ ← $\text{م} ٠ \text{ح} = \{ \quad \}$

لا يوجد عدد حقيقي مربعه سالب، إذا : لا يوج نقط تقاطع مع محور السينات

معلومة

إذا كان الاقتران على الصورة $\text{ن}(\text{س}) = \text{أ}(\text{س} - \text{ء})^{٢}$ ، فإنه يقطع (يمس) محور السينات في نقطة واحدة فقط وهي $(\text{ء} ، ٠)$ ، وهي أيضاً نقطة الرأس لمنحنى الاقتران ٠

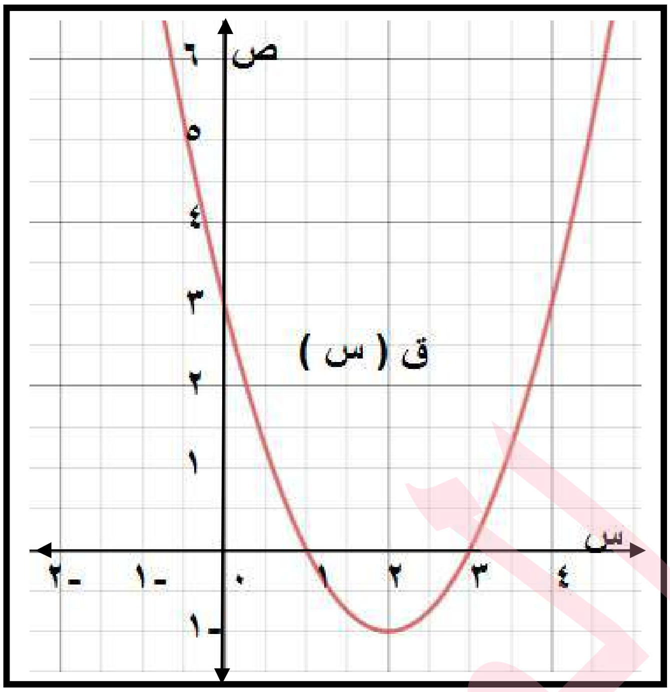
مثال (٣٤) :

ارسم منحنى الاقتران ق(س) = (س − ٢)^{٢} − ١ ، مستخدما أي برنامج رسم ، ثم من خلال الرسم جد :

١) إحداثي نقطة الرأس ٢) معادلة محور التماثل ٣) نقط التقاطع مع المحورين الإحداثيين

٤) مدى الاقتران ٥) جذور المعادلة المرافقة للاقتران ٦) ق(٤)

الحل :



١) إحداثي نقطة الرأس ← (٢ ، −١)

٢) معادلة محور التماثل ← (س = ٢)

٣) نقط التقاطع مع المحورين الإحداثيين

:: مع الصادات ← (٠ ، ٣)

:: مع السينات ← (٣ ، ٠) ، (١ ، ٠)

٤) مدى الاقتران ← { ص : ص ≥ −١ }

٥) جذور المعادلة المرافقة للاقتران

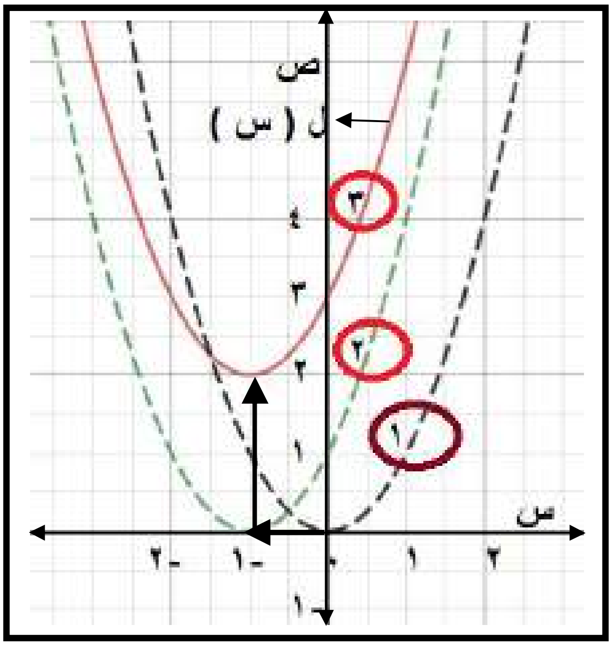
← (س = ١ ، س = ٣)

٦) ق(٤) ← ق(٤) = ٣

مثال (٣٤) : مستخدما الاقتران التربيعي الإمام ق(س) = س^{٢} ، **ثم الانسحابات الأفقية والعمودية في رسم تقريبي لمنحنى الاقتران** ل(س) = (س + ١)^{٢} + ٢

الحل :

- **نكتب الاقتران على الصورة القياسية** ل(س) = (س − (−١))^{٢} + ٢
- **نرسم الاقتران الإمام** ق(س) = س^{٢} ‎.‎.‎.‎.‎ **(١)**
- **نسحب الاقتران وحدة واحدة (أفقياً) إلى اليسار** (ء = −١) ، **فتكون نقطة رأس الاقتران الجديد هي** ← (−١ ، ٠) ‎.‎.‎.‎.‎.‎.‎.‎.‎ **(٢)**



- نسحب منحنى الاقتران الجديد (رقم ٢) وحدتين إلى الأعلى (هـ = ٢) ٠٠٠٠٠٠ (٣)
- يكون الشكل الناتج (رقم ٣) هو منحنى الاقتران

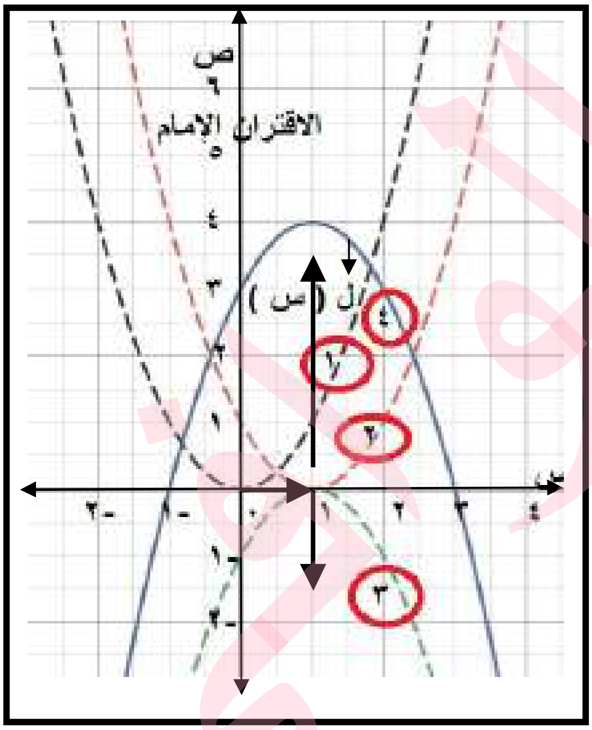
ل(س) = (س + ١)^{٢} + ٢

مثال (٣٥) :

مثل منحنى الاقران ل(س) = – س^{٢} + ٢س + ٣ بيانياً : مستخدماً الاقتران الإمام والانسحابات ٠

الحل :

- **نكتب الاقتران ل على الصورة القياسية** ل(س) = أ(س – ى)^{٢} + هـ



ل(س) = – س^{٢} + ٢س + ٣ ← ل(س) = –(س^{٢} – ٢س – ٣)

±$(\frac{ب}{٢})^{٢}$= ±١

← ل(س) = –(س^{٢} – ٢س + ١ – ١ – ٣)

ل(س) = –((س – ١)^{٢} – ٤) ← ل(س) = –(س – ١)^{٢} – ٤

- **نرسم الاقتران الإمام ٠٠٠٠٠٠٠ (١)**
- **نسحب الاقتران الإمام وحدة واحدة (ى = ١) إلى اليمين ينتج الاقتران رقم (٢) ورأسه ← (١ ، ٠)**
- **نعكس الاقتران رقم (٢) (أ = –١) حول محور السينات ينتج الاقتران رقم (٣) ورأسه ← (١ ، ٠)**
- **نسحب الاقتران رقم (٣) أربع وحدات للأعلى ينتج الاقتران رقم (٤) ، والذي يمثل منحنى الاقتران** ل(س) = –(س – ١)^{٢} – ٤ ← ل(س) = – س^{٢} + ٢س + ٣

مثال (٣٦) :

اكتب قاعدة الاقتران ق الذي يحقق الشروط في كل حالة من الحالات التالية ، علما بأن $(أ = ١)$ **أو** $(أ = -١)$

١) نقطة الرأس ← (٢ ، ٣) ومنحناه مفتوح للأسفل

٢) نقطة الرأس ← (-٢ ، -٣) ومنحناه مفتوح للأعلى

٣) نقطة الرأس ← (-٣ ، ٠) ومنحناه مفتوح للأسفل

الحل : الصورة القياسية للاقتران هي $ق(س) = أ(س - د)^{٢} + هـ$ **نقطة الرأس ← (د ، هـ)**

١) نقطة الرأس ← (د ، هـ) = (٢ ، ٣) ، ومنحناه مفتوح للأسفل ← (أ = -١)

قاعدة الاقتران هي : $ق(س) = -(س - ٢)^{٢} + ٣$

٢) نقطة الرأس ← (د ، هـ) = (-٢ ، -٣) ، ومنحناه مفتوح للأسفل ← (أ = ١)

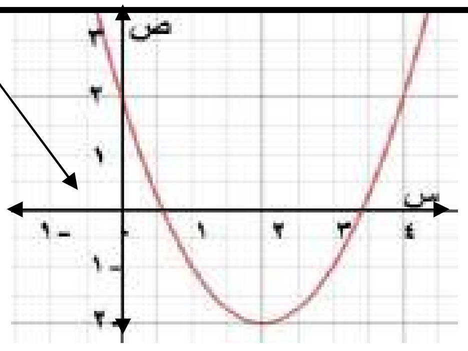
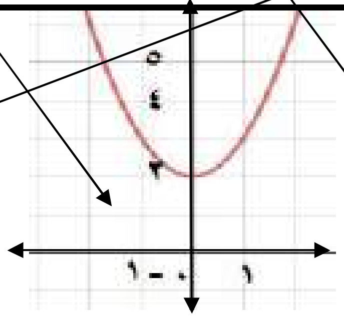
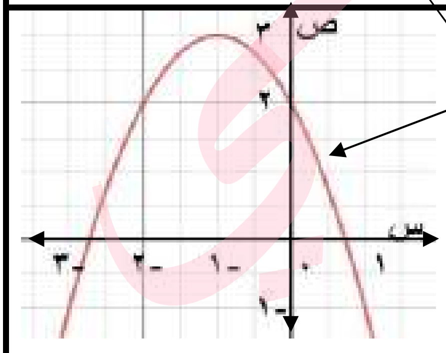
قاعدة الاقتران هي : $ق(س) = (س + ٢)^{٢} - ٣$

٣) نقطة الرأس ← (د ، هـ) = (-٣ ، ٠) ، ومنحناه مفتوح للأسفل ← (أ = -١)

قاعدة الاقتران هي : $ق(س) = -(س + ٣)^{٢}$

مثال (٣٦) :

صل بين الاقتران التربيعي والرسم الذي يمثل هذا الاقتران

الاقتران ←	$ق(س) = -(س + ١)^{٢} + ٣$	$ق(س) = (س - ٢)^{٢} - ٢$	$هـ(س) = س^{٢} + ٢$
الرسم ←			

القسم الثالث : كتابة قاعدة الاقتران بدلالة صفريه

- إذا كان م ، ن ، هما صفري الاقتران ق فإن قاعدة الاقتران ق تكتب كما يلي :

ق(س) = أ(س − م)(س − ن) ← أ ≠ ٠

١) م ، ن الإحداثي السيني لنقط تقاطع منحنى الاقتران مع محور السينات

٢) معادلة محور التماثل هي ← $\left(\text{س} = \frac{\text{م}+\text{ن}}{٢}\right)$

٣) إحداثيي نقطة رأس منحنى الاقتران ← $\left(\frac{\text{م}+\text{ن}}{٢} \text{ ، } \text{ق}\left(\frac{\text{م}+\text{ن}}{٢}\right)\right)$

٤) نقطة التقاطع مع محور الصادات ضع ← (س = ٠) أو جد ق(٠)

٥) م ، ن جذور المعادلة التربيعية المرافقة للاقتران ← أ (س − م)(س − ن) = ٠

مثال (٣٧) :

لكل من الاقترانات التربيعية الآتية :

أ) ك(س) = (س + ٢)(س − ٢)
ب) ل(س) = ٢(س − ١)(س − ٣)
جـ) ق(س) = ٣(س − ١)(س − ٢)
د) ع(س) = $\frac{١}{٢}$س(س − ٤)
هـ) م(س) = −٢س(س + ٣)
و) د(س) = $\frac{-١}{٢}$(س + ٢)(س + ٣)

١) جد معادلة محور التماثل ٠

٢) جد إحداثيي نقطة رأس منحنى الاقتران

٣) جد نقط تقاطع منحنى الاقتران مع محور السينات

٤) جد نقطة التقاطع مع محور الصادات

الحل :

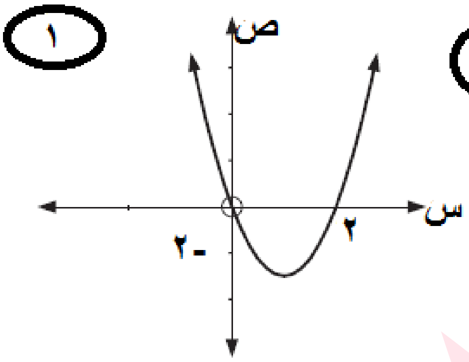
الاقتران	معادلة محور التماثل	نقطة الرأس	نقاط التقاطع	
	س = $\frac{\text{م} + \text{ن}}{\text{٢}}$	$\left(\frac{\text{م+ن}}{\text{٢}}\right.$، ق$\left.\left(\frac{\text{م+ن}}{\text{٢}}\right)\right)$	مع السينات	مع الصادات
أ) ك(س) = (س + ٢)(س − ٢) م = −٢ ، ن = ٢	س = $\frac{\text{−٢} + \text{٢}}{\text{٢}}$ س = ٠	(٠، ق(٠)) (٠، −٤)	(−٢، ٠) (٢، ٠)	(٠، −٤)
ب) ل(س) = ٢(س − ١)(س − ٣) م = ١ ، ن = ٣	س = $\frac{\text{١} + \text{٣}}{\text{٢}}$ س = ٢	(٢، ق(٢)) (٢، −٢)	(١، ٠) (٣، ٠)	(٠، ٦)
جـ) ق(س) = ٣(س − ١)(س − ٢) م = ١ ، ن = ٢	س = $\frac{\text{١} + \text{٢}}{\text{٢}}$ س = $\frac{\text{٣}}{\text{٢}}$	$\left(\frac{\text{٣}}{\text{٢}}\right.$، ق$\left.\left(\frac{\text{٣}}{\text{٢}}\right)\right)$ $\left(\frac{\text{٣}}{\text{٢}}\right.$، $\left.\frac{\text{−٣}}{\text{٤}}\right)$	(١، ٠) (٢، ٠)	(٠، ٦)
د) ع(س) = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$س(س − ٤) م = ٠ ، ن = ٤	س = $\frac{\text{٠} + \text{٤}}{\text{٢}}$ س = ٢	(٢، ق(٢)) (٢، −٢)	(٠، ٠) (٤، ٠)	(٠، ٠)
هـ) م(س) = −٢س(س + ٣) م = ٠ ، ن = −٣	س = $\frac{\text{٠} + \text{−٣}}{\text{٢}}$ س = $\frac{\text{−٣}}{\text{٢}}$	$\left(\frac{\text{−٣}}{\text{٢}}\right.$، ق$\left.\left(\frac{\text{−٣}}{\text{٢}}\right)\right)$ $\left(\frac{\text{−٣}}{\text{٢}}\right.$، $\left.\frac{\text{٩}}{\text{٢}}\right)$	(٠، ٠) (−٣، ٠)	(٠، ٠)
و) د(س) = $\frac{\text{−١}}{\text{٢}}$(س + ٢)(س + ٣) م = −٢ ، ن = −٣	س = $\frac{\text{−٢} + \text{−٣}}{\text{٢}}$ س = $\frac{\text{−٥}}{\text{٢}}$	$\left(\frac{\text{−٥}}{\text{٢}}\right.$، ق$\left.\left(\frac{\text{−٥}}{\text{٢}}\right)\right)$ $\left(\frac{\text{−٥}}{\text{٢}}\right.$، $\left.\frac{\text{١}}{\text{٨}}\right)$	(−٢، ٠) (−٣، ٠)	(٠، −٣)

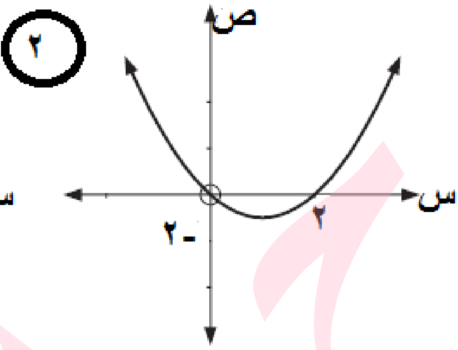
مثال (٣٨) :

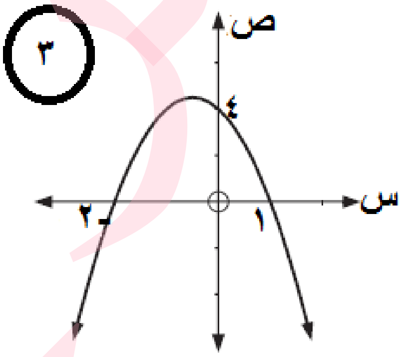
صل بين الاقتران والرسم الذي يمثل هذا الاقتران

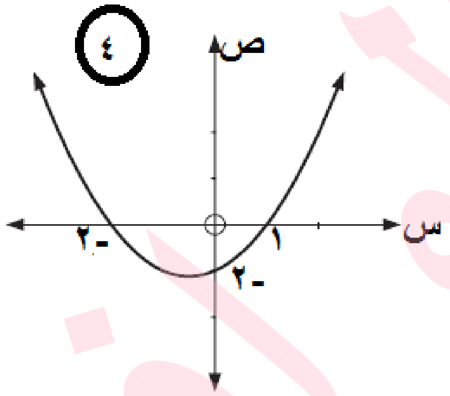
أ) ك(س)=س(س−٢)　　ب) ل(س)=٣س(س−٢)　　جـ) ن(س)=−س(س−٢)

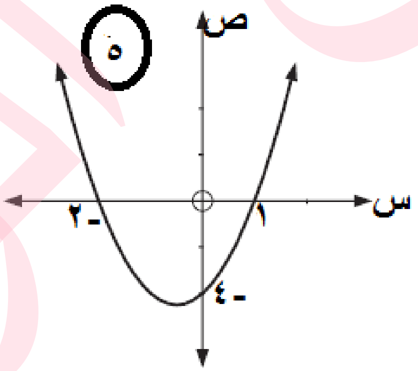
د) ع(س)=(س+٢)(س−١)　　هـ) م(س)=٢(س+٢)(س−١)　　و) د(س)=−(س+٢)(س−١)

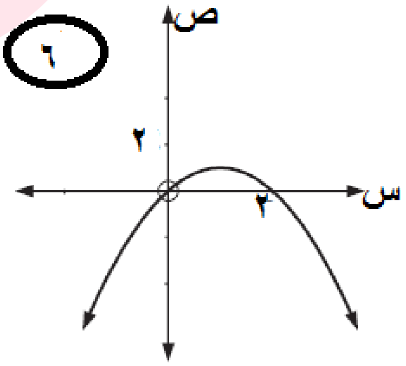












الحل :

الاقتران	ك(س)	ل(س)	ن(س)	ع(س)	م(س)	د(س)
رقم الشكل	٢	١	٦	٤	٥	٣

مثال (٣٩) :

اكتب الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢} - ٦\text{س} - ٩$

١) بالصورة القياسية ٢) بدلالة صفري الاقتران

الحل :

١) الصورة القياسية

$\text{ق}(\text{س}) = ٣(\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣)$	**إخراج ٣ عامل مشترك**
$\text{ق}(\text{س}) = ٣(\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١ - ١ - ٣)$	**إكمال مربع داخل القوس**
$\text{ق}(\text{س}) = ٣(\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١) - ١٢$	**ترتيب**
$\text{ق}(\text{س}) = ٣(\text{س} - ١)(\text{س} - ١) - ١٢$	**تحليل ما داخل القوس**
$\text{ق}(\text{س}) = ٣(\text{س} - ١)^{٢} - ١٢$	**كتابة الاقتران على الصورة القياسية**

٢) بدلالة صفري الاقتران

$\text{ق}(\text{س}) = ٣(\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣)$	**إخراج ٣ عامل مشترك**
$\text{ق}(\text{س}) = ٣(\text{س} - ٣)(\text{س} + ١)$	**تحليل ما داخل القوس**

مثال (٤٠) :

إذا كان منحنى الاقتران التربيعي $\text{ق}(\text{س})$ يقطع محور السينات عندما $\text{س} = ٢$ ، $\text{س} = -٤$ ، إذا علمت أن الإحداثي الصادي لنقطة الرأس يساوي ٤ .

١) جد معادلة محور التماثل للاقتران ق .

٢) جد إحداثيي نقطة الرأس لمنحنى الاقتران ق .

٣) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{أ}(\text{س} - \text{م})(\text{س} - \text{ن})$: أ معامل $\text{س}^{٢}$ ، م ، ن صفري الاقتران ق ، جد : قيمة كل من أ ، م ، ن .

٤) جد مجموعة حل المعادلة التربيعية المرافقة للاقتران ق .

٥) مدى الاقتران ق .

الحل :

١) بما أن الاقتران يقطع محور السينات عندما س = ٢ ، س = −٤ ⟵ معادلة محور التماثل

$$س = \frac{٢ + −٤}{٢} \leftarrow \boxed{س = −١}$$

٢) بما أن محور التماثل يمر في نقطة الرأس ، إذاً إحداثيي نقطة الرأس (−١ ، ٤)

٣) بما أن منحنى الاقتران يقطع محور السينات عندما س = ٢ ، س = −٤ ، إذا صفري الاقتران هما م = ٢ ، ن = −٤ ⟵ ق(س) = أ(س − ٢)(س + ٤) ، ولإيجاد قيمة أ ، من نقطة الرأس
(−١ ، ٤) ← ق(−١) = ٤

$$\leftarrow ق(−١) = أ(−١ − ٢)(−١ + ٤) \leftarrow ٤ = −٩أ \leftarrow \boxed{أ = \frac{−٤}{٩}}$$

٤) صفري الاقتران ق هما جذور المعادلة المرافقة ⟵ م ، ع = {٢ ، −٤}

٥) مدى الاقتران ق : = {ص ، ص ≤ ٤}

مثال (٤١) :

إذا كان منحنى الاقتران ق(س) = (س − م)(س − ن) يقطع محور السينات عندما س = −٣ ، س = −١ ، إذا تم سحب الاقتران ٥ وحدات لليمين ، ثم ٤ وحدات للأعلى جد :

١) إحداثيي نقطة رأس الاقتران الجديد ل(س)

٢) أكتب الاقتران ل(س) بالصورة القياسية ٠

الحل :

- **لاحظ أن م = −٣ ، ن = −١ ←** ق(س) = (س − (−٣))(س − (−١))
- **انسحاب لليمين ٥ وحدات ←** ق(س) = (س − (−٣ + ٥))(س − (−١ + ٥))

  ← هـ(س) = (س − ٢)(س − ٤) ⟵ **نقطة الرأس** ← (٣ ، −١)
- **انسحاب للأعلى ٤ وحدات ⟵ نقطة الرأس للاقتران ل ←** (٣ ، −١ + ٤) ← (٣ ، ٣)
- **الصورة القياسية للاقتران ل هي ←** ل(س) = (س − ٣)^{٢} + ٣

القسم الرابع : حل معادلات كسرية تؤول إلى معادلات تربيعية

مثال (٤٢) :

جد مجموعة حل المعادلات الكسرية الآتية (إن أمكن) :

أ) $س + \frac{١٢}{س} = ٧ \leftarrow س \neq ٠$ ب) $٢س - \frac{١}{س} = ٣ \leftarrow س \neq ٠$

جـ) $س - \frac{١}{س} = ١ \leftarrow س \neq ٠$ د) $\frac{س - ١}{٢ - س} = ٢س + ١ \leftarrow س \neq ٢$

الحل :

أ) $س + \frac{١٢}{س} = ٧ \leftarrow س \neq ٠$

- أ) $س \times \left(س + \frac{١٢}{س} = ٧\right) \leftarrow س^{٢} + ١٢ = ٧س$ **ضرب طرفي المعادلة في** $س \neq ٠$

$س^{٢} + ١٢ = ٧س \leftarrow س^{٢} - ٧س + ١٢ = ٠$ **كتابة المعادلة على الصورة العامة**

- $أ = ١ ، ب = -٧ ، جـ = ١٢ \leftarrow \Delta = ب^{٢} - ٤أجـ$
$\leftarrow \Delta = ٤٩ - ٤ \times ١ \times ١٢ \leftarrow \Delta = ٤٩ - ٤٨ \leftarrow \Delta = ١ \succ ٠$ **طريقة التحليل**

$\leftarrow س^{٢} - ٧س + ١٢ = ٠ \leftarrow (س - ٤)(س - ٣) = ٠$
$\leftarrow س = ٤ ، س = ٣ \leftarrow م.ح = \{ ٣ ، ٤ \}$

ب) $٢س - \frac{١}{س} = ٣ \leftarrow س \neq ٠$

$س \times \left(٢س - \frac{١}{س} = ٣\right) \leftarrow ٢س^{٢} - ١ = ٣س$ **ضرب طرفي المعادلة في** $س \neq ٠$

$٢س^{٢} - ١ = ٣س \leftarrow ٢س^{٢} - ٣س - ١ = ٠$ **كتابة المعادلة على الصورة العامة**

- $أ = ٢ ، ب = -٣ ، جـ = -١ \leftarrow \Delta = ب^{٢} - ٤أجـ$
$\leftarrow \Delta = ٩ - ٤ \times ٢ \times -١ \leftarrow \Delta = ٩ + ١٧ \leftarrow \Delta = ٢٦ \succ ٠$ **طريقة القانون العام**

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{\Delta}}{٢أ} \leftarrow س = \frac{٣ \pm \sqrt{١٧}}{٤}$$

$$م.ح = \left\{ \frac{٣ \pm \sqrt{١٧}}{٤} \right\}$$

جـ) $\text{س} - \frac{١}{\text{س}} = ١ \leftarrow \text{س} \neq ٠$

$\text{س} \times \left(\text{س} - \frac{١}{\text{س}} = ١\right) \leftarrow \text{س}^{٢} - ١ = \text{س}$ **ضرب طرفي المعادلة في** $\text{س} \neq ٠$

$\leftarrow \text{س}^{٢} - ١ = \text{س} \leftarrow \text{س}^{٢} - \text{س} - ١ = ٠$ **كتابة المعادلة على الصورة العامة**

- $\text{أ} = ١ \text{ ، } \text{ب} = -١ \text{ ، } \text{جـ} = -١ \leftarrow \Delta = \text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}$ **طريقة القانون العام**
  $\leftarrow \Delta = ١ - ٤ \times ١ \times -١ \leftarrow \Delta = ١ + ٤ \leftarrow \Delta = ٥ \succ ٠$

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{٢\text{أ}} \leftarrow \text{س} = \frac{١ \pm \sqrt{٥}}{٢}$$

$$\text{م . ح} = \left\{ \frac{١ \pm \sqrt{٥}}{٢} \right\}$$

د) $\frac{\text{س} - ١}{٢ - \text{س}} = ٢\text{س} + ١ \leftarrow \text{س} \neq ٢$

$(٢ - \text{س})\left(\frac{\text{س} - ١}{٢ - \text{س}} = ٢\text{س} + ١\right) \leftarrow \text{س} - ١ = (٢ - \text{س})(٢\text{س} + ١)$ **ضرب طرفي المعادلة في** $٢ - \text{س} \neq ٠$

$\leftarrow \text{س} - ١ = -٢\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ٢ \leftarrow ٢\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣ = ٠$ **فك الأقواس ثم الترتيب**

- $\text{أ} = ٢ \text{ ، } \text{ب} = -٢ \text{ ، } \text{جـ} = -٣ \leftarrow \Delta = \text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}$ **القانون العام**
  $\leftarrow \Delta = ٤ - ٤ \times ٢ \times -٣ \leftarrow \Delta = ٤ + ٢٤ \leftarrow \Delta = ٢٨ \succ ٠$

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\Delta}}{٢\text{أ}} \leftarrow \text{س} = \frac{٢ \pm \sqrt{٢٨}}{٤} \leftarrow \text{س} = \frac{٢ \pm ٢\sqrt{٧}}{٤} \leftarrow \text{س} = \frac{١ \pm \sqrt{٧}}{٢}$$

$$\text{م . ح} = \left\{ \frac{١ \pm \sqrt{٧}}{٢} \right\}$$

مثال (٤٣) :

إذا كان مجموع عدد ومقلوبه يساوي $\frac{٢٦}{٥}$ **، فما هو العدد ؟**

الحل : نفرض العدد س ← **مقلوبه** ← $\frac{١}{\text{س}}$ ،، ← $\text{س} + \frac{١}{\text{س}} = \frac{٢٦}{٥} : \text{س} \neq ٠$

$٥\text{س}\left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}} = \frac{٢٦}{٥}\right) \leftarrow ٥\text{س}^{٢} + ٥ = ٢٦\text{س}$ **ضرب طرفي المعادلة في** $٥\text{س} \neq ٠$

$٥\text{س}^{٢} + ٥ = ٢٦\text{س} \leftarrow ٥\text{س}^{٢} - ٢٦\text{س} + ٥ = ٠$ **كتابة المعادلة على الصورة العامة**

- أ = ٥ ، ب = −٢٦ ، جـ = ٥ ← Δ = ب^{٢} − ٤أجـ

← Δ = ٦٧٦ − ٤ × ٥ × ٥ ← Δ = ٦٧٦ − ١٠٠ ← Δ = ٥٧٦ ≻ ٠

الحل باستخدام القانون العام أو التحليل (المميز مربع كامل) ← تحليل

٥س^{٢} − ٢٦س + ٥ = ٠ ← (٥س − ١)(س − ٥) = ٠

(٥س − ١) = ٠ ← س = $\frac{١}{٥}$ ، (س − ٥) = ٠ ← س = ٥

إذاً العدد إما $\frac{١}{٥}$ أو ٥