



الرياضيات

الصف العاشر - كتاب الطالب

الفصل الدراسي الأول

10

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

يوسف سليمان جرادات إبراهيم عقله القادري هيثم زهير مرشود

نفين أحمد جوهر (منسقًا)

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

☎ 06-5376262 / 237 📠 06-5376266 📧 P.O.Box: 2088 Amman 11941

📌 @nccdjor 📧 feedback@nccd.gov.jo 🌐 www.nccd.gov.jo

قررت وزارة التربية والتعليم تدرّس هذا الكتاب في مدارس المملكة الأردنية الهاشمية جميعها، بناءً على قرار المجلس الأعلى للمركز الوطني لتطوير المناهج في جلسته رقم (2020/4)، تاريخ 2020/6/11 م، وقرار مجلس التربية والتعليم رقم (2020/56) تاريخ 2020/6/24 م بدءاً من العام الدراسي 2020 / 2021 م.

© Harper Collins Publishers Limited 2020.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 045 - 5

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2020/8/2970)

373,19

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج

الرياضيات: كتاب الطالب (الصف العاشر) / المركز الوطني لتطوير المناهج - عمان: المركز، 2020

ج1 (144) ص.

ر.إ.: 2020/8/2970

الواصفات: / الرياضيات / التعليم الاعدادي / المناهج /

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, sorted in retrieval system, or transmitted in any form by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior written permission of the publisher or a license permitting restricted copying in the United Kingdom issued by the Copyright Licensing Agency Ltd, Barnard's Inn, 86 Fetter Lane, London, EC4A 1EN.

British Library Cataloguing -in- Publication Data

A catalogue record for this publication is available from the Library.

1441 هـ / 2020 م

1442 هـ / 2021 م

الطبعة الأولى (التجريبية)

أعيدت طباعته

المقدمة

انطلاقاً من إيمان المملكة الأردنية الهاشمية الراسخ بأهمية تنمية قدرات الإنسان الأردني، وتسليحه بالعلم والمعرفة؛ سعى المركز الوطني لتطوير المناهج، بالتعاون مع وزارة التربية والتعليم، إلى تحديث المناهج الدراسية وتطويرها، لتكون معيّنًا للطلبة على الارتقاء بمستواهم المعرفي، ومجارة أقرانهم في الدول المتقدّمة. ولما كانت الرياضيات إحدى أهمّ المواد الدراسية التي تنمّي لدى الطلبة مهارات التفكير وحلّ المشكلات، فقد أولى المركز هذا المبحث عنايةً كبيرةً، وحرص على إعداد كتب الرياضيات وفق أفضل الطرائق المُتبَّعة عالمياً على يد خبراء أردنيين؛ لضمان انسجامها مع القيم الوطنية الراسخة، وتلبيتها لاحتياجات أبنائنا الطلبة والمُعَلِّمين.

روعي في إعداد كتب الرياضيات تقديم المحتوى بصورة سلسلة، ضمن سياقات حياتية شائقة، تزيد رغبة الطلبة في التعلّم، ووظّفت فيها التكنولوجيا لتسهّل في جعل الطلبة أكثر تفاعلاً مع المفاهيم المُقدّمة لهم. وقد احتوت الكتب على مشروع لكل وحدة؛ لتعزيز تعلّم الطلبة للمفاهيم والمهارات الواردة فيها وإثرائها. ولأنّ التدرّب المكثّف على حلّ المسائل يُعدّ إحدى أهمّ طرائق ترسيخ المفاهيم الرياضية وزيادة الطلاقة الإجرائية لدى الطلبة؛ فقد أُعدّ كتاب التمارين على نحوٍ يُقدّم للطلبة ورقة عمل في كل درس، تُحلّ بوصفها واجباً منزلياً، أو داخل الغرفة الصفية إن توافر الوقت الكافي. ولأنّنا ندرك جيداً حرص المعلم الأردني على تقديم أفضل ما لديه للطلبة؛ فقد جاء كتاب التمارين أداة مساعدة تُوفّر عليه جهد إعداد أوراق العمل وطباعتها.

من المعلوم أنّ الأرقام العربية تُستخدم في معظم مصادر تعليم الرياضيات العالمية، ولا سيّما على شبكة الإنترنت، التي أصبحت أداة تعليمية مُهمّة؛ لما تزخر به من صفحات تُقدّم محتوى تعليمياً تفاعلياً ذا فائدة كبيرة. وحرصاً منا على ألا يفوت أبنائنا الطلبة أيّ فرصة، فقد استعملنا في هذا الكتاب الأرقام العربية؛ لجسر الهوة بين طلبتنا والمحتوى الرقمي العلمي، الذي ينمو بتسارع في عالم يخطو نحو التعليم الرقمي بوتيرة متسارعة.

ونحن إذ نُقدّم هذا الكتاب، نأمل أن ينال إعجاب أبنائنا الطلبة ومعلّمهم، ويجعل تعليم الرياضيات وتعلّمها أكثر متعةً وسهولةً، ونعدهم بأن نستمرّ في تحسين هذا الكتاب في ضوء ما يصلنا من ملاحظات.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمة المحتويات

6	الوحدة 1 الأسس والمعادلات
7	مشروع الوحدة: أنظمة المعادلات في حياتنا
8	معمل برمجة جوجبرا: حل أنظمة المعادلات بيانياً
10	الدرس 1 حل نظام مُكوّن من معادلة خطية ومعادلة تربيعية
17	الدرس 2 حل نظام مُكوّن من معادلتين تربيعيتين
23	الدرس 3 تبسيط المقادير الأسية
29	الدرس 4 حل المعادلة الأسية
34	اختبار نهاية الوحدة
36	الوحدة 2 الدائرة
37	مشروع الوحدة: استعمالات علمية لخصائص الدائرة
38	الدرس 1 أوتار الدائرة، وأقطارها، ومماساتها
45	الدرس 2 الأقواس والقطاعات الدائرية
51	الدرس 3 الزوايا في الدائرة
58	الدرس 4 معادلة الدائرة
65	معمل برمجة جوجبرا: استكشاف الدوائر المتماسكة
67	الدرس 5 الدوائر المتماسكة
73	اختبار نهاية الوحدة

قائمة المحتويات

76	الوحدة 3 حساب المثلثات
77	مشروع الوحدة: إنشاء نظام إحداثي جديد
78	الدرس 1 النسب المثلثية
86	الدرس 2 النسب المثلثية للزوايا ضمن الدورة الواحدة
94	الدرس 3 تمثيل الاقترانات المثلثية
100	الدرس 4 حل المعادلات المثلثية
108	اختبار نهاية الوحدة
110	الوحدة 4 تطبيقات المثلثات
111	مشروع الوحدة: صنع كلينومتر واستعماله
112	الدرس 1 الاتجاه من الشمال
118	الدرس 2 قانون الجيوب
125	الدرس 3 قانون جيب التمام
131	الدرس 4 استعمال جيب الزاوية لإيجاد مساحة المثلث
136	الدرس 5 حل مسائل ثلاثية الأبعاد
142	اختبار نهاية الوحدة

ما أهمية هذه
الوحدة؟

تُستخدمُ أنظمةُ المعادلاتِ في كثيرٍ من مجالاتِ الحياة. فخبراءُ الأرصادِ الجوية - مثلاً - يُعبّرونَ عنِ العلاقةِ بينَ درجةِ الحرارة، وسرعةِ الرياحِ، والضغطِ الجويِّ، ومعدلِ الهطلِ، باستخدامِ نظامِ معادلاتٍ غيرِ خطيّ؛ ذلكَ أنّ أيَّ تغييرٍ في أحدِ هذهِ العواملِ يؤدي إلى تغييرٍ في العواملِ الأخرى.

سأتعلّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- ◀ حلّ نظامٍ مُكوّنٍ من معادلةٍ خطّيةٍ، وأخرى تربيعيةٍ.
- ◀ حلّ نظامٍ مُكوّنٍ من معادلتينِ تربيعيتينِ.
- ◀ الأسسُ النسبية، وخصائصها.
- ◀ حلّ أنظمةِ معادلاتٍ أُسسِيّةٍ.

تعلّمتُ سابقاً:

- ✓ حلّ معادلاتٍ تربيعيةٍ باستعمالِ التحليلِ.
- ✓ حلّ معادلاتٍ تربيعيةٍ باستعمالِ القانونِ العامِّ.
- ✓ حلّ أنظمةِ معادلاتٍ تتضمّنُ معادلتينِ خطّيتينِ بمُتغيّرينِ.
- ✓ قواعدُ الأسسِ الصحيحةِ.

البحث عن أنظمة معادلات في نماذج حياتية.

فكرة المشروع



شبكة الإنترنت، برمجية جيو جبرا.

المواد والأدوات

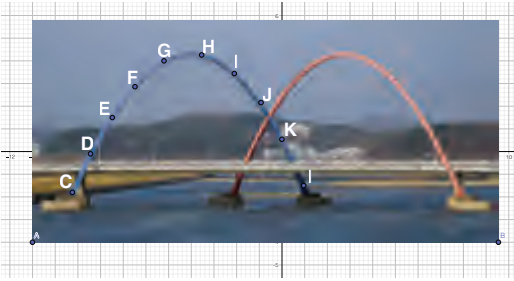


خطوات تنفيذ المشروع:

- 1 أبحث مع أفراد مجموعتي في شبكة الإنترنت عن صور لنماذج حياتية تظهر فيها منحنيات ومستقيمات متقاطعة (مثل: الجسور، ونوافير المياه، وخرائط الطرق)، أو ألتقط صوراً لذلك، ثم أحفظها في ملف على جهاز الحاسوب.
- 2 أستعمل برمجية جيو جبرا لإيجاد معادلة كل من المنحنيات المتقاطعة التي تظهر في الصور باتباع الخطوات الآتية:

- انقر على أيقونة **Image** من شريط الأدوات، ثم أختار الصورة التي حفظتها.

- أعدّل موقع الصورة، وأختار مقاساً مناسباً لها بتحريك النقطتين A و B اللتين تظهران عليها.



- أجد معادلة أحد المنحنيات التي تظهر في الصورة، وذلك بتحديد بعض النقاط عليه باستعمال أيقونة **A** من شريط الأدوات.

- أكتب الصيغة $\text{FitPoly}(\{C, D, E, F, G, H, I, J, K, L\}, n)$ في شريط الإدخال، ثم انقر **←** ليظهر منحنى فوق الصورة، ومعادلة في شريط الإدخال.

- أستعمل المؤشّر فوق المعادلة لضبط المنحنى الظاهر،

بحيث ينطبق تماماً على المنحنى الذي في الصورة.

- أكرّر الخطوات السابقة لتحديد معادلات المنحنيات الأخرى التي تظهر في الصورة.

- 3 أكتب مع أفراد مجموعتي نظام معادلات يمثل منحنين متقاطعين في كل صورة، ثم نختار إحدى هذه الأنظمة لنحلّها جبرياً، ثم نتحقق من صحة الحل بإظهار نقاط تقاطع المنحنين في برمجية جيو جبرا.

عرض النتائج:

أعدّد مع أفراد مجموعتي عرضاً تقديمياً نبيّن فيه ما يأتي:

- خطوات تنفيذ المشروع موضحة بالصور (نستعمل خاصية طباعة الشاشة).
- بعض الصعوبات التي واجهناها في أثناء العمل بالمشروع، ومعلومة جديدة تعرّفناها في أثناء العمل بالمشروع.

حل أنظمة المعادلات بيانياً Solving Systems of Equations Graphically

يُمكنني استعمال برمجية جيوجبرا (GeoGebra) لتمثيل أنظمة المعادلات، وحلها بيانياً. أستعمل الرابط www.geogebra.org/download لتثبيت نسخة 6 GeoGebra Classic من هذه البرمجية على جهاز الحاسوب. يُمكنني أيضاً استعمال النسخة المتوافرة في شبكة الإنترنت من دون حاجة إلى تثبيتها في جهاز الحاسوب عن طريق الرابط الإلكتروني: www.geogebra.org/classic.

نشاط

أحلُّ نظام المعادلات التربيعية الآتي بيانياً باستعمال برمجية جيوجبرا.

$$x^2 + y^2 = 13$$

$$x^2 - y = 7$$

الخطوة 1: أمثل بيانياً المعادلة التربيعية: $x^2 + y^2 = 13$.

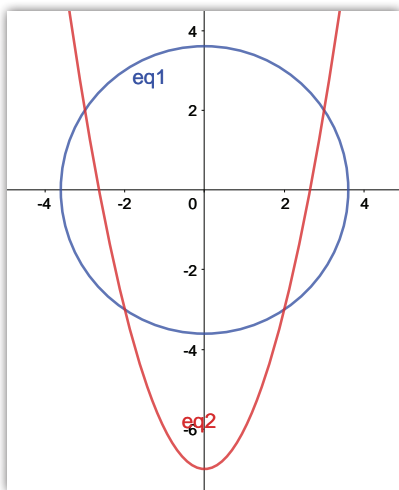
أدخل المعادلة في حاسبة جيوجبرا، بالنقر على المفاتيح الآتية:

x x^2 + y y^2 = 1 3 ←


الخطوة 2: أمثل بيانياً المعادلة التربيعية: $x^2 - y = 7$.

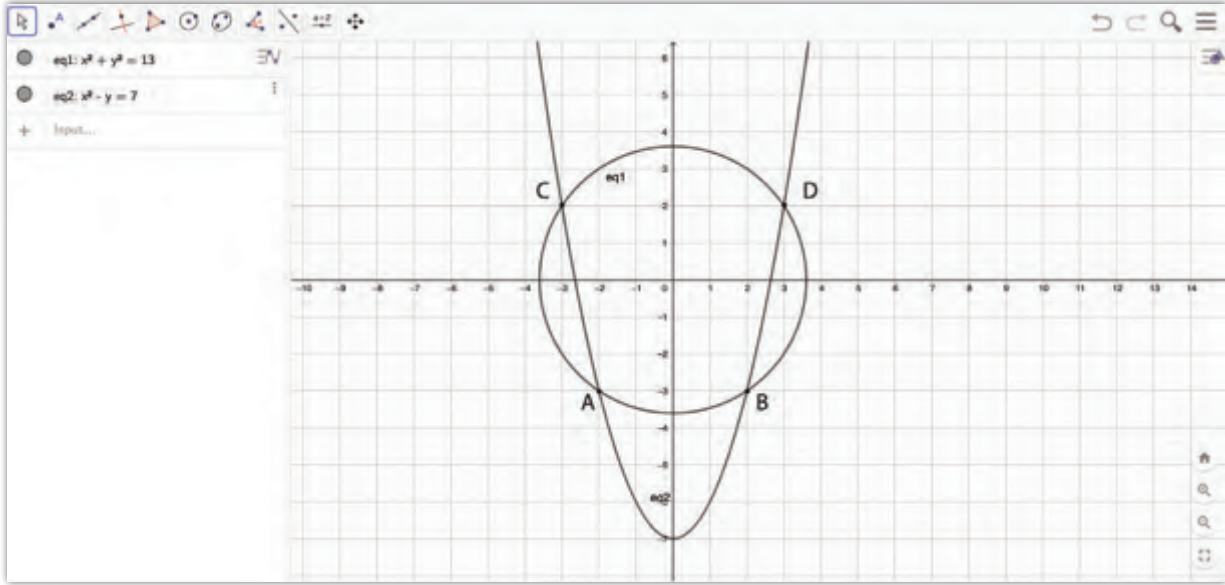
أدخل المعادلة في حاسبة جيوجبرا، بالنقر على المفاتيح الآتية:

x x^2 - y = 7 ←



الأحظُّ أنَّ منحنَيي المعادلتين يتقاطعان في أربع نقاط؛ ما يعني وجود أربعة حلول لنظام المعادلات.

الخطوة 3: أحدد إحداثيات نقاط التقاطع بين منحنَي المعادلتين. أختارُ  من شريط الأدوات، ثم أنقرُ على منحنَي المعادلتين، فتظهرُ إحداثياتُ نقاطِ التقاطع.



إحداثياتُ نقاطِ التقاطعِ هي: $(-3, 2)$, $(3, 2)$, $(2, -3)$, $(-2, -3)$ ؛ ما يعني أن حلولَ نظامِ المعادلاتِ هي:

الحلُّ الأولُ: $x = -3, y = 2$	الحلُّ الثاني: $x = 3, y = 2$
الحلُّ الثالثُ: $x = 2, y = -3$	الحلُّ الرابعُ: $x = -2, y = -3$

أتدرب 

أحلُّ كلَّ نظامِ معادلاتٍ ممَّا يأتي بيانياً باستعمالِ برمجة جيو جبراً:

1 $y = x - 4$
 $2x^2 + 3y^2 = 12$

2 $y = x^2$
 $x^2 + 2y^2 = 34$

3 $x + y = 16$
 $x^2 - y^2 = 20$

4 $3x + 4y = 1$
 $y = x^2 + 5$

5 $y = 6x$
 $x^2 + y^2 = 9$

6 $x = 7 + y$
 $y = 3x^2 - 2$

الدرس 1

حلّ نظامٍ مُكوّنٍ من معادلةٍ خطيّةٍ ومعادلةٍ تربيعيّةٍ Solving a System of Linear and Quadratic Equations



حلّ نظامٍ مُكوّنٍ من معادلةٍ خطيّةٍ ومعادلةٍ تربيعيّةٍ.

تُمثّل المعادلة $y = x - 3$ طريقًا مستقيمًا داخل إحدى المدن،
في حين تُمثّل المعادلة $y = x^2 - 3x - 10$ طريقًا آخر منحنياً
داخل المدينة نفسها. هل يتقاطع هذان الطريقان أم لا؟

فكرة الدرس



مسألة اليوم



يُمكنني حلّ نظامٍ مُكوّنٍ من معادلةٍ خطيّةٍ وأخرى تربيعيّةٍ باستعمالِ طريقةِ التعويضِ، وذلك
بكتابةِ أحدِ المُتغيّرينِ في المعادلةِ الخطيّةِ بدلالةِ الآخرِ، ثمّ تعويضه في المعادلةِ التربيعيّةِ وحلّها.

مثال 1

أحلّ نظامَ المعادلاتِ الآتي، ثمّ أتحقّق من صحّةِ الحلّ:

$$x - y = 1$$

$$x^2 + y^2 = 5$$

يُمكنني استعمالُ برمجيةِ جيو جبرا (GeoGebra)، أو حاسبةٍ بيانيةٍ، لتمثيلِ المعادلتينِ بيانيًا
على المستوى الإحداثيّ نفسه كما في التمثيل البيانيّ المجاور. ألاحظُ أنّ منحنَيي المعادلتينِ
يتقاطعانِ في نقطتينِ؛ ما يعني أنّ للنظامِ حلّينِ مختلفينِ. أتحقّق من ذلك جبريًا باستعمالِ
طريقةِ التعويضِ:

الخطوة 1: أكتبُ المعادلةَ الخطيّةَ بالصورة القياسيّة (بدلالةِ y).

$$x - y = 1$$

$$y = x - 1$$

المعادلةُ الخطيّةُ

بكتابةِ y بدلالةِ x

الخطوة 2: أعوّضُ قيمةَ y من المعادلةِ الخطيّةِ في المعادلةِ التربيعيّةِ:

$$x^2 + (x - 1)^2 = 5$$

$$x^2 + x^2 - 2x + 1 = 5$$

$$2x^2 - 2x - 4 = 0$$

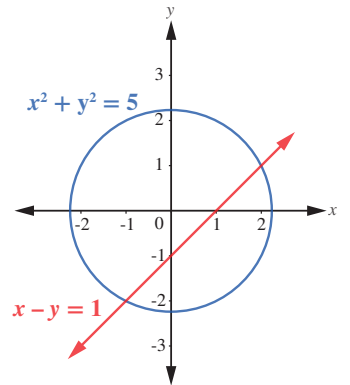
$$x^2 - x - 2 = 0$$

بتعويضِ قيمةِ y في المعادلةِ التربيعيّةِ

بفكّ القوسينِ

بالتبسيطِ

بالقسمةِ على 2



الخطوة 3: أحل المعادلة الناتجة باستعمال التحليل:

$$(x + 1)(x - 2) = 0$$

$$x + 1 = 0, x - 2 = 0$$

$$x = -1, x = 2$$

بالتحليل

خاصية الضرب الصفري

بحل المعادلتين

الخطوة 4: أعوض قيمة x لإيجاد قيمة y :

الحالة الأولى: عندما $x = -1$:

$$y = x - 1$$

$$y = -1 - 1 = -2$$

بتعويض $x = -1$ في المعادلة الخطية

الحل الأول: $(x, y) = (-1, -2)$.

للتحقق من صحة الحل الأول، أعوض الزوج المرتب $(-1, -2)$ في كل من المعادلة الخطية والتربيعية:

$$x - y = -1 - (-2) = 1 \quad \checkmark$$

$$x^2 + y^2 = (-1)^2 + (-2)^2 = 1 + 4 = 5 \quad \checkmark$$

بالتعويض في المعادلة الخطية

بالتعويض في المعادلة التربيعية

الحالة الثانية: عندما $x = 2$:

$$y = 2 - 1 = 1$$

بتعويض $x = 2$ في المعادلة الخطية

الحل الثاني: $(x, y) = (2, 1)$.

للتحقق من صحة الحل الثاني، أعوض الزوج المرتب $(2, 1)$ في كل من المعادلة الخطية والتربيعية:

$$x - y = 2 - 1 = 1 \quad \checkmark$$

$$x^2 + y^2 = (2)^2 + (1)^2 = 4 + 1 = 5 \quad \checkmark$$

بالتعويض في المعادلة الخطية

بالتعويض في المعادلة التربيعية

أتحقق من فهمي

أحل نظام المعادلات الآتي، ثم أتحقق من صحة الحل:

$$2x + y = 12$$

$$y = x^2 + 5x - 6$$

يوجد حلان لنظام المعادلات في المثال السابق. ولكن، هل يوجد نظام معادلات له حل واحد؟ لمعرفة الإجابة، أدرس المثال الآتي.

أتذكر

توجد طرائق عدة لحل معادلة تربيعية، منها: التحليل إلى العوامل، والقانون العام.

إرشاد

يجب تعويض الحل في كلتا معادلتَي النظام؛ لكيلا يكون الحل غير صحيح، بحيث يُحقق إحدى المعادلتين من دون الأخرى.

مثال 2

أحلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتي:

$$y - x^2 = 7 - 5x$$

$$4y - 8x = -21$$

عند تمثيل معادلتَي النظام في المستوى الإحداثيِّ نفسه، يلاحظُ وجودَ نقطةِ تقاطعٍ واحدةٍ كما في التمثيل البيانيِّ المجاور؛ ما يعني أن للنظام حلًّا واحدًا فقط. أتحرَّقُ من ذلك جبريًّا باستعمالِ طريقةِ التعويضِ:

الخطوةُ 1: أكتبُ المعادلةَ الخطيَّةَ بالصورة القياسية (بدلالة y).

$$4y - 8x = -21$$

المعادلةُ الخطيَّةُ

$$4y = 8x - 21$$

بجمع $8x$ للطرفين

$$y = 2x - 5.25$$

بقسمة الطرفين على 4

الخطوةُ 2: أعوِّضُ قيمةَ y من المعادلةِ الخطيَّةِ في المعادلةِ التربيعية:

$$y - x^2 = 7 - 5x$$

المعادلةُ التربيعيةُ

$$(2x - 5.25) - x^2 = 7 - 5x$$

بتعويضِ قيمةِ y من المعادلةِ الخطيَّةِ

$$x^2 - 7x + 12.25 = 0$$

بالتبسيط

الخطوةُ 3: أحلُّ المعادلةَ الناتجة:

لحلِّ المعادلةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ، أُحدِّدُ قيمَ المعاملاتِ: $a = 1$, $b = -7$, $c = 12.25$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

القانونُ العامُّ

$$= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(12.25)}}{2(1)}$$

بالتعويضِ

$$= \frac{7 \pm \sqrt{49-49}}{2} = 3.5$$

بالتبسيط

الخطوةُ 4: أعوِّضُ قيمةَ x لإيجادِ قيمةِ y :

$$y = 2x - 5.25$$

المعادلةُ الخطيَّةُ

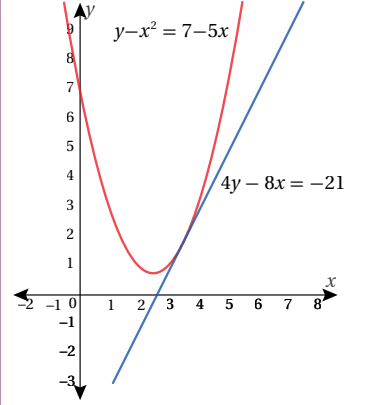
$$= 2(3.5) - 5.25$$

بتعويضِ $x = 3.5$

$$= 1.75$$

بالتبسيط

إذن، حلُّ النظام هو الزوجُ المرتبُ $(3.5, 1.75)$



أتذكَّرُ

أستعملُ القانونَ العامَّ لحلِّ المعادلاتِ التي يصعبُ تحليلها.

أتحقق من فهمي

$$y = 2x + 1$$

$$x^2 + y^2 = 10$$

أحلُّ نظامَ المعادلاتِ المجاور، ثمَّ أتحقِّقُ منُ صحَّةِ الحُلِّ:

لاحظتُ في المثالين السابقين وجودَ حلٍّ أو حلَّينِ لنظامِ المعادلاتِ. ولكن، هل توجدُ أنظمةُ معادلاتٍ ليس لها حلٌّ؟ لمعرفةِ الإجابة، أدرسُ المثالَ الآتي.

مثال 3

أحلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتي:

$$y + x = 5$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

يتبيَّنُ منَ التمثيلِ البيانيِّ المجاور أنَّ منحنَيي المعادلتين لا يتقاطعان في أيِّ نقطة؛ ما يعني عدمَ وجودِ حلٍّ لنظامِ المعادلاتِ. أتحقِّقُ منُ ذلكَ جبريًّا باستعمالِ طريقةِ التعويضِ:

$$y + x = 5$$

$$x = 5 - y$$

$$(5 - y)^2 + y^2 = 9$$

$$25 - 10y + y^2 + y^2 = 9$$

$$2y^2 - 10y + 16 = 0$$

المعادلة الخطية

بكتابة x بدلالة y

بتعويض قيمة x في المعادلة التربيعية

بالتبسيط

لحلِّ المعادلة التربيعية الناتجة باستعمالِ القانونِ العامِّ، أُحدِّدُ قيمَ المعاملاتِ:

$$a = 2, b = -10, c = 16$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

القانون العام

$$y = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(2)(16)}}{2(2)}$$

بالتعويض

$$y = \frac{10 \pm \sqrt{-28}}{4}$$

بالتبسيط

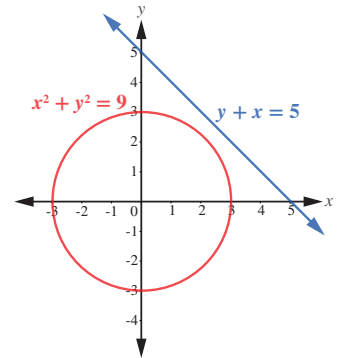
ألاحظُ أنَّه عندَ تعويضِ قيمِ a ، و b ، و c في القانونِ العامِّ، ينتجُ جذرَّ تربيعيٍّ لعددٍ سالبٍ. إذن، لا يوجدُ حلٌّ لهذا النظامِ.

أتحقق من فهمي

$$x - y = 0$$

$$y = x^2 + 3x + 2$$

أحلُّ نظامَ المعادلاتِ المجاور:



أذكر

لا يوجدُ عددٌ حقيقيٌّ مربعه عددٌ سالبٌ.

نتيجة

لأي نظام يتكوّن من معادلةٍ خطّيةٍ وأخرى تربيعية، تكون واحدةٌ من العبارات الآتية صحيحةً:

- 1 وجود حلّين مختلفين.
- 2 وجود حلٍّ واحدٍ فقط.
- 3 عدم وجود حلٍّ.

توجد تطبيقاتٌ حياتيةٌ كثيرةٌ لحلّ الأنظمة التي تتكوّن من معادلةٍ خطّيةٍ وأخرى تربيعية.

مثال 4: من الحياة

سجادةٌ مصنوعةٌ يدويًا، مجموع بُعديها 7 m، وطول قُطرها 5 m. أجدُ كلاً من طولها، وعرضها.

لإيجاد بُعدي السجادة، أكتبُ نظامَ معادلاتٍ يُمثّل المسألة، ثمّ أحلّه.

أفترضُ أنّ طولَ السجادة هو x ، وأنّ عرضها هو y ، وبما أنّ مجموع بُعدي السجادة هو 7 m، فإنّ $x + y = 7$ ، وبما أنّ قُطرَ السجادة هو 5 m، فإنّ (باستعمال نظرية فيثاغورس): $x^2 + y^2 = 25$ ، إذن، أصبح لدينا نظامٌ يتكوّن من معادلةٍ خطّيةٍ وأخرى تربيعية.

$$y + x = 7$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

والآن، سأحلّ النظامَ باستعمالِ طريقةِ التعويضِ:

$$x + y = 7$$

$$y = 7 - x$$

$$x^2 + (7 - x)^2 = 25$$

$$2x^2 - 14x + 24 = 0$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$(x - 4)(x - 3) = 0$$

$$x - 4 = 0 \text{ أو } x - 3 = 0$$

$$x = 4 \text{ أو } x = 3$$

المعادلة الخطّية

بكتابة y بدلالة x

بتعويض قيمة y في المعادلة التربيعية

بالتبسيط

بالقسمة على 2

أحلّ المعادلة التربيعية بالتحليل إلى العوامل:

بالتحليل

خاصية الضرب الصفريّ

بحلّ كلّ معادلة



قد تستغرق صناعة السجادة اليدوية الصغيرة 4 أشهرٍ من العمل المتواصل.

أتذكّر

أنصحك من صحّة التحليل باستعمال خاصية التوزيع.

أعوّض قيم x في المعادلة الخطية لإيجاد قيم y :

$$y = 7 - 3$$

بتعويض قيمة $x = 3$ في المعادلة الخطية

$$y = 4$$

قيمة y الأولى

$$y = 7 - 4$$

بتعويض قيمة $x = 4$ في المعادلة الخطية

$$y = 3$$

قيمة y الثانية

إذن، حلّ النظام هو: $(4, 3)$ و $(3, 4)$.

بما أن طول السجادة أكبر من عرضها، فإن الطول هو 4 m ، والعرض هو 3 m

أتحقق من فهمي 

مزرعة مستطيلة الشكل، طول قُطرها 50 m ، ومحيطها 140 m . أجد بُعدي المزرعة.

أدرب وأحل المسائل 

أحلُّ كلاً من أنظمة المعادلات الآتية، ثمَّ أتحقق من صحّة الحلّ:

1 $y = x^2 + 4x - 2$
 $y + 6 = 0$

2 $y = x^2 + 6x - 3$
 $y = 2x - 3$

3 $y = x^2 + 4$
 $x - y = -1$

4 $y = x^2 + 5x - 1$
 $2x + 3y = 1$

5 $y = x^2 + 4x + 7$
 $y - 3 = 0$

6 $y = x^2 - 2x + 4$
 $y = x$

7 $x^2 + y^2 = 8$
 $2x + 3y = 7$

8 $y = x^2 + 2x + 1$
 $y = 0$

9 $x^2 + y^2 = 4$
 $x + y = 5$

10 $x^2 + y^2 = 10$
 $x - y = 2$

11 $x^2 + (y - 1)^2 = 17$
 $x = 1$

12 $2x + 3y = 5$
 $2y^2 + xy = 12$

13 **بركة:** بركة ماء قاعدتها مستطيلة الشكل، ومحيطها 16 m ، والفرق بين مربّعي بُعديها 16 m^2 . أجد بُعديها.

14 **أعداد:** أجد العددين الموجبين اللذين مجموعهما 12 ، والفرق بين مربّعيهما 24

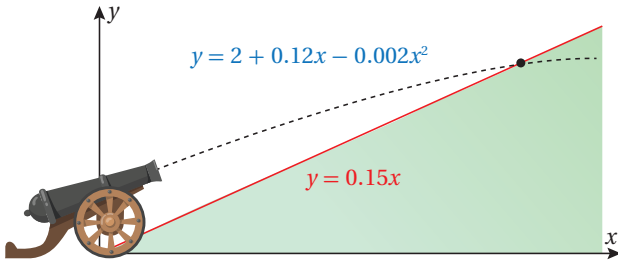
15 **هندسة:** دائرتان مجموع محيطيهما $12\pi\text{ cm}$ ، ومجموع مساحتيهما $20\pi\text{ cm}^2$. أجد قُطر كلٍّ منهما.

16 **أعمار:** قالت شيماء: «عُمري أكبر بأربع سنواتٍ من عُمري أخي ريان، ومجموعُ مُربَّعي عُمريّنا هو 346 عامًا». ما عُمُر شيماء؟



17 **لوحة:** لوحةٌ مستطيّلة الشكل، طولُها يساوي مثلي عرضها، وطولُ قُطْرِها $\sqrt{1.25}$ m، أُحيطَ بها إطارٌ، تكلفَةُ المترِ الطولي الواحدٍ منه بالدينارِ 2.25. أجدُ تكلفَةَ الإطارِ.

18 **زراعة:** قَسَمَ فيصلُ 41m^2 من مزرعتهِ إلى منطقتينٍ مُربَّعتينِ الشكلِ، ثم زرعَهُما بمحصوليّ الطماطمِ والبطاطا. إذا زاد بُعدُ المنطقَةِ المزروعةِ بالطماطمِ مترًا واحدًا على بُعدِ المنطقَةِ المزروعةِ بالبَطاطا، فما مساحَةُ المنطقَةِ المزروعةِ بكلِّ محصولٍ؟



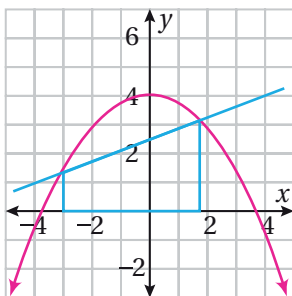
19 تُمثِّلُ المعادلةُ $y = 2 + 0.12x - 0.002x^2$ مسارَ قذيفةٍ مدفعٍ تمَّ إطلاقُها نحوَ تَلَّةٍ. أجدُ إحداثيّاتِ النقطةِ التي اصطدمتْ عندها القذيفةُ بسفحِ التَلَّةِ؛ إذا علمتُ أنَّه مستقيمٌ ومعادلتهُ $y = 0.15x$.

مهارات التفكير العليا



20 **تبرير:** صُمِّمَتْ نافورةٌ بصورةٍ يخرجُ منها الماءُ بحسبِ العلاقة: $y + x^2 = 10$ ، إذا وُضِعَتْ وحدةٌ إنارةٍ على المستقيمِ الذي معادلتهُ: $y = 12 + x$ ، فهل يصلُ ماءُ النافورةِ إلى وحدةِ الإنارةِ؟

21 **تحذُّ:** إذا علمتُ أنَّ المعادلةَ الخطيَّةَ: $y = 3x + p$ تقطعُ المنحنى: $y = 2x^2 + 3x - 5$ في نقطةٍ واحدةٍ فقط، فما قيمةُ p ؟



22 **تحذُّ:** أجدُ مساحةَ شبه المنحرفِ المرسومِ باللونِ الأزرقِ أسفلَ مُنحني الاقترانِ $y = -0.3x^2 + 4$ في الشكلِ المجاور.

حلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ من معادلتين تربيعيتين Solving a System of Two Quadratic Equations

حلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ من معادلتين تربيعيتين بمتغيَّرين.

فكرة الدرس



مسألة اليوم



استعمل خبير تسويق المعادلتين التربيعيتين الآتيتين لتمثيل مقدار كلٍّ من العرض والطلب لسلمة تجارية؛ بُغية تحديد نقاط التوازن التي يتساوى عندها العرض مع الطلب في السوق، حيث يُمثَّل x سعر الوحدة، ويُمثَّل y عدد الوحدات المباعة. هل يمكنني مساعدة الخبير على تحديد نقاط التوازن؟

$$y = x^2 + 6x$$

$$y = -x^2 + 24x$$

لحلِّ نظامٍ يتكوَّن من معادلتين تربيعيتين، تُساوى أولاً المعادلتان بعضهما بعضاً لتكوين معادلة تربيعية واحدة.

مثال 1

أحلُّ نظام المعادلات الآتي، ثمَّ أتحرَّق من صحَّة الحلِّ:

$$y = x^2 + 4x - 3$$

$$y = -x^2 + 2x - 3$$

عند تمثيل معادلتين النظام على المستوى الإحداثي نفسه، يلاحظ أنَّ منحنيهما يتقاطعان في نقطتين كما في الشكل المجاور؛ ما يعني أنَّ للنظام حلَّين مختلفين. أتحرَّق من ذلك جبرياً.

بدايةً، يجب مساواة معادلتين النظام المعطى، ثمَّ حلِّ المعادلة التربيعية الناتجة:

$$x^2 + 4x - 3 = -x^2 + 2x - 3$$

بمساواة المعادلتين

$$2x^2 + 2x = 0$$

بجمع الحدود المتشابهة، والتبسيط

أحلُّ المعادلة التربيعية الناتجة باستعمال التحليل:

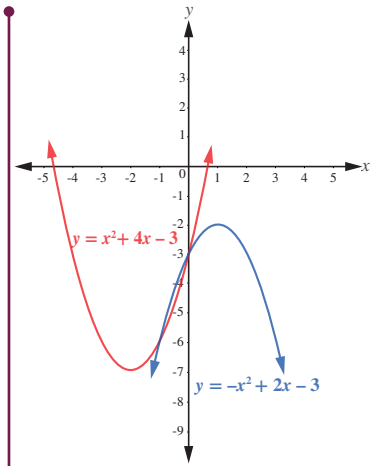
$$2x(x + 1) = 0$$

بتحليل المعادلة التربيعية الناتجة

$$x = -1 \text{ و } x = 0$$

حلَّ المعادلة

لإيجاد قيمة y ، أعوِّض قيمتي x في أيٍّ من معادلتين النظام:



أتذكَّر

يمكنني حلُّ المعادلة التربيعية الناتجة باستعمال القانون العامِّ أيضاً.

الحالة الأولى: إذا كانت $x = 0$:

$$y = -(0)^2 + 2(0) - 3$$

بتعويض $x = 0$ في إحدى المعادلتين

$$y = -3$$

بالتبسيط

إذن، الحُلُّ الأوَّل للنظام هو: $(x, y) = (0, -3)$.

الحالة الثانية: إذا كانت $x = -1$:

$$y = -(-1)^2 + 2(-1) - 3$$

بتعويض $x = -1$ في إحدى المعادلتين

$$y = -6$$

بالتبسيط

إذن، الحُلُّ الثاني للنظام هو: $(x, y) = (-1, -6)$.

إذن، حلُّ النظام هو: $(-1, -6)$, $(0, -3)$.

أتحقق من فهمي

أحلُّ نظام المعادلات الآتي، ثمَّ أتحقق من صحَّة الحُلِّ:

$$y = -x^2 - 2x + 3$$

$$y = x^2 + 2x - 3$$

إرشاد

للتحقُّق من صحَّة الحُلِّ،
أعوِّض قيمتي x و y
في كلِّ من معادلتَي النظام.

قد يتقاطع منحنيا معادلتين تربيعيتين في نقطة واحدة فقط، وعندئذ يكون لنظام المعادلات الذي تُكوِّنه هاتان المعادلتان حلٌّ واحدٌ.

مثال 2: من الحياة

سباقات: في أحد سباقات المراحل، سلك مُتسابق مساراً تُمثِّله المعادلة التربيعية: $y = x^2$ في حين سلك مُتسابق آخر مساراً تُمثِّله المعادلة: $x^2 + 3x = y + 2$. أجد نقطة التقاطع بين مساري المُتسابقين.

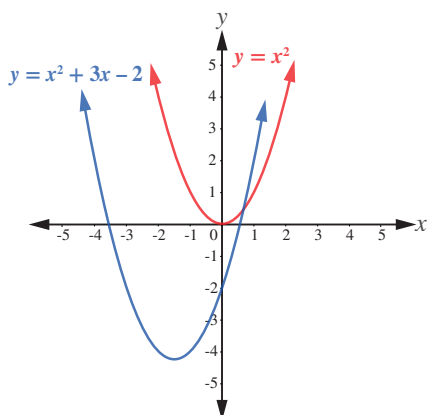
أكتب المعادلة $x^2 + 3x = y + 2$ بالصورة القياسية (بدلالة y).

$$x^2 + 3x - 2 = y$$

ب طرح 2 من الطرفين

$$y = x^2 + 3x - 2$$

باستعمال الخاصية التبديلية



عند تمثيل المعادلتين بيانياً كما في الشكل المجاور، يلاحظ وجود نقطة تقاطع واحدة بين منحنيهما؛ ما يعني أن لنظام المعادلات حلًّا واحدًا. أتحقق من ذلك جبرياً.

بدايةً، يجب مساواة معادلتَي النظام المعطى، ثمَّ حلُّ المعادلة التربيعية الناتجة:



تُجرى سباقات المراحل على مدار أيام، وهي تقام على مساراتٍ متنوعةٍ من حيث التضاريس، مثل: الطرق المُنبسطة، والطرق الجبلية.

الوحدة 1

$$x^2 + 3x - 2 = x^2$$

$$x^2 + 3x - 2 - x^2 = 0$$

$$3x - 2 = 0$$

$$x = \frac{2}{3}$$

بعد ذلك أجد قيمة y ، وذلك بتعويض قيمة $x = \frac{2}{3}$ في أي من معادلتَي النظام:

$$y = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{2}{3}\right) - 2$$

$$y = \frac{4}{9}$$

إذن، حَلُّ نظامِ المعادلاتِ هو: $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{4}{9}$ ، ونقطة تقاطع المنحنيين هي: $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{9}\right)$.

أتحقق من فهمي

تمثّل المعادلة: $y = x^2 + 2x$ مسار مُتزلّج على الجليد، في حين تُمثّل المعادلة: $y = x^2 - x + 5$ مسار مُتزلّج آخر. أبحث عن جميع النقاط التي قد يصطدم عندها المُتزلّجان إذا لم يكونا حذرين.

عرضنا في المثالين السابقين أنظمة معادلات تربيعية لها حلان أو حل واحد. ولكن، هل يوجد دائماً حل للنظام المُكوّن من معادلتين تربيعيتين؟ أدرس المثال الآتي.

مثال 3

أحلُّ نظامَ المعادلات الآتي:

$$y = x^2 + x + 2$$

$$y = -x^2 - x + 1$$

عند تمثيل المعادلتين بيانياً كما في الشكل المجاور، يُلاحظ عدم وجود نقاط تقاطع بين منحنيهما؛ ما يعني عدم وجود حل لنظام المعادلات. أتحقق من ذلك جبرياً.

بدايةً، يجب مساواة معادلتَي النظام المعطى، ثم حل المعادلة التربيعية الناتجة لإيجاد قيمة x :

$$x^2 + x + 2 = -x^2 - x + 1$$

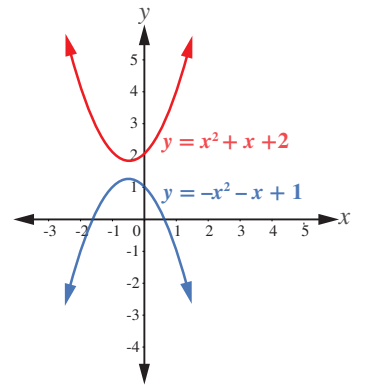
$$2x^2 + 2x + 1 = 0$$

بمساواة المعادلتين

بالتبسيط



رياضة التزلّج هي إحدى أسرع الرياضات غير الآلية؛ فقد تصل سرعة المُتزلّج إلى 200 km/h



بعد ذلك أجد قيمة المُميز $\Delta = b^2 - 4ac$ لتحديد إذا كان للمعادلة التربيعية الناتجة حلٌّ أم لا. قيم المعاملات هي: $a = 2, b = 2, c = 1$. وبالتعويض في المُميز ينتج:

$$\Delta = (2)^2 - 4(2)(1) = -4$$

قيمة المُميز سالبة. إذن، لا يوجد حلٌّ للمعادلة. ومنه لا يوجد حلٌّ لهذا النظام.

أتحقق من فهمي

أحلُّ نظام المعادلات الآتي:

$$y = x^2 + 4$$

$$y = -x^2 + 2$$

أتذكر

يعتمد عدد جذور المعادلة وأنواعها على قيمة المُميز الذي يُرمز إليه بالرمز (Δ) ، حيث:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

عرضنا في الأمثلة السابقة أنظمة لها حلان، أو حل واحد، أو ليس لها حل. ولكن، هل يوجد نظامٌ مكونٌ من معادلتين تربيعيتين، له ثلاثة حلول، أو أربعة؟ أدرس المثال الآتي.

مثال 4

أحلُّ نظام المعادلات التربيعية الآتي، ثم أتحقق من صحّة الحل:

$$x^2 + y^2 = 13$$

$$x^2 - y = 7$$

عند تمثيل المعادلتين بيانياً كما في الشكل المجاور، يلاحظ وجود 4 نقاط تقاطع بين منحنيهما؛ ما يعني وجود أربعة حلول لنظام المعادلتين. أتحقق من ذلك جبرياً.

يظهر المتغيّر x في كلتا المعادلتين بالقوة نفسها؛ لذا يُمكنني استعمال الحذف للتخلص من هذا المتغيّر، ثم حل المعادلة التربيعية الناتجة التي تحوي متغيّراً واحداً هو y :

$$x^2 + y^2 = 13$$

$$(-) \quad x^2 - y = 7$$

$$y^2 + y = 6$$

$$y^2 + y - 6 = 0$$

بالطرح

بترح 6 من كلا الطرفين

يُمكنني حل المعادلة التربيعية الناتجة باستعمال القانون العام، أو التحليل:

$$(y + 3)(y - 2) = 0$$

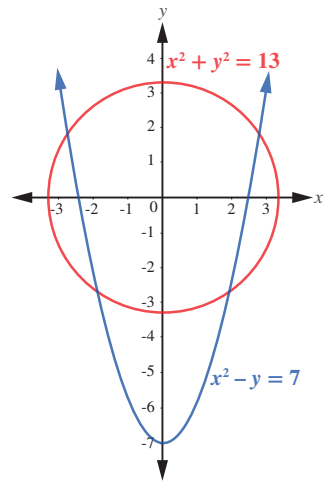
بالتحليل

$$\text{إذن: } y = -3, y = 2$$

أعوّض قيمتي y في إحدى معادلتَي النظام لإيجاد قيم x :

$$x^2 = -3 + 7$$

بتعويض قيمة $y = -3$



$$x = \pm 2$$

$$x^2 = 2 + 7 = 9$$

$$x = \pm 3$$

بحل المعادلة

$$x = 2, x = -2$$

بتعويض قيمة $y = 2$

بحل المعادلة

إذن، توجد أربعة حلول للنظام، هي: $(-2, -3)$ ، و $(2, -3)$ ، و $(3, 2)$ ، و $(-3, 2)$.
أتحقق من صحة هذه الحلول بتعويضها في كل من معادلتَي النظام.

أتحقق من فهمي 

أحلُّ نظام المعادلات التربيعية الآتي، ثم أتحقق من صحة الحل:

$$x^2 + y^2 = 16$$

$$3y - x^2 = -12$$

أدرب وأحل المسائل 

أحلُّ كلاً من أنظمة المعادلات التربيعية الآتية، ثم أتحقق من صحة الحل:

1 $y = 2x^2 + x - 5$
 $y = -x^2 - 2x - 5$

2 $y = x^2 - 4x + 1$
 $y = -2x^2 - 4$

3 $y = x^2 + 1$
 $y = 2x^2 - 3$

4 $y = x^2 + x + 1$
 $y = -x^2 + x - 2$

5 $y = -x^2 + 5x$
 $y = x^2 - 5x$

6 $y = x^2$
 $y = x^2 + x + 6$

7 $y = -x^2 + 6x + 8$
 $y = -x^2 - 6x + 8$

8 $x^2 + y^2 = 16$
 $y = x^2 - 5$

9 $5x^2 - 2y^2 = 18$
 $3x^2 + 5y^2 = 17$

10 أجد نقاط التقاطع بين الدائرتين:

$$x^2 + (y - 2)^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

11 عددان، مجموع مربعيهما 89، والفرق بين مربعيهما 39، ما هذان العددان؟

12 **فيزياء:** قُذِفَت كرتانِ رأسياً في الوقتِ نفسه من موقعينِ مختلفين. إذا كانتِ المعادلةُ: $y = -2t^2 + 12t + 10$ تُمثِّل ارتفاعَ الكرةِ الأولى بالأمتارِ بعدَ مرورِ t ثانية، وكانتِ المعادلةُ: $y = -2t^2 + 4t + 42$ تُمثِّل ارتفاعَ الكرةِ الثانية، فأجدُ الزمنَ الذي يتساوى عندهُ ارتفاعُ كلِّ من الكرتين، ثمَّ أجدُ ارتفاعَ كلِّ كرةٍ في تلكَ اللحظة.

13 **ثقافة مالية:** بالعودة إلى مقدمةِ الدرس، أستعملُ نظامَ المعادلاتِ المعطى لإيجادِ نقاطِ التوازنِ التي يتساوى عندها العرضُ والطلبُ.

14 **أحلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتي:**

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$$

$$x^2 + xy = 6$$

مهارات التفكير العليا



15 **تبرير:** قالت زينبُ إنَّه لا يوجدُ حلٌّ لنظامِ المعادلاتِ الآتي:

$$x^2 + y^2 = 4$$

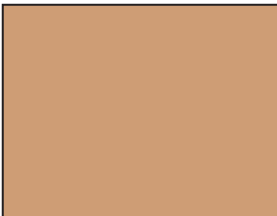
$$x^2 + y^2 = 9$$

هل قولُ زينبَ صحيحٌ؟ أبرِّرْ إجابتي.

16 **مسألة مفتوحة:** أكتبُ نظاماً مكوناً من معادلتينِ تربيعيتينِ ليسَ لهُ حلٌّ.

17 **تحديد:** قطعةُ أرضٍ على شكلِ مثلثٍ مُتطابقِ الضلعينِ، طولُ ضلعيه المُتطابقينِ 50 m، ومساحتهُ 1200 m^2 . أجدُ طولَ قاعدتهِ، وارتفاعه.

18 **مسألة مفتوحة:** أكتبُ نظاماً من معادلتينِ تربيعيتينِ؛ على أن تكونَ النقطةُ (5, 3) أحدَ حلوله.



19 **تحديد:** قطعةُ من ورقٍ مقوَّى مستطيلة الشكلِ، مساحتها 216 cm^2 ، ثنيَ طولها، ولصقتُها معاً، فتشكَّل أنبوبٌ أسطوانيٌّ حجمه 224 cm^3 . أجدُ بُعديَّ قطعةِ الورق.



تبسيط المقادير الأسية Simplifying Exponential Expressions



معرفة الأسس النسبية وتبسيطها.

فكرة الدرس



الأسس النسبية.

المصطلحات



حديقة مربعة الشكل، طول نصف ضلعها مُعطى بالحدّ الجبريِّ $2x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{3}}z^4$ ، ما مساحتها بالوحدات المربعة؟

مسألة اليوم



مراجعة المفاهيم

لأيّ عددٍ حقيقيّ a ، إذا كان n و m عدديّن صحيحين موجبين ($n > 1$)، فإنّ:
 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ ، إلا إذا كانت $a < 0$ ، و n عددًا زوجيًا، فإنّ الجذر يكون غير معرف.

مثال 1

أجد قيمة كلِّ ممّا يأتي في أبسط صورة:

$$\begin{aligned} 1 \quad 27^{\frac{1}{3}} &= (\sqrt[3]{27})^1 \\ &= \sqrt[3]{3 \times 3 \times 3} \\ &= 3 \end{aligned}$$

بكتابة المقدار في صورة الجذر الثالث
بتحليل العدد 27 إلى عوامله الأولية

$$\begin{aligned} 2 \quad 4^{\frac{3}{2}} &= (\sqrt{4})^3 \\ &= (\sqrt{2 \times 2})^3 \\ &= (2)^3 \\ &= (2 \times 2 \times 2) \\ &= 8 \end{aligned}$$

بكتابة المقدار في صورة الجذر التربيعي مرفوعاً للأس 3
بتحليل العدد 4 إلى عوامله الأولية

تعريف الأسس

أتذكّر

لأيّ عددٍ حقيقيّ a ، إذا كان n عددًا صحيحًا موجبًا، فإنّ:
 $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_n$ مرة n
ويُسمّى a الأساس، و n الأس.

3 (81)^{-5/4}

$$(81)^{-5/4} = (\sqrt[4]{81})^{-5}$$

الصورة الجذرية

$$= (\sqrt[4]{3 \times 3 \times 3 \times 3})^{-5}$$

بتحليل العدد 81 إلى عوامله الأولية

$$= (3)^{-5}$$

تعريف الأس السالب

$$= \frac{1}{(3)^5}$$

تعريف الأس

$$= \frac{1}{(3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)}$$

$$= \frac{1}{243}$$

4 (-8)^{7/3}

$$(-8)^{7/3} = (\sqrt[3]{-8})^7$$

الصورة الجذرية

$$= (\sqrt[3]{-2 \times -2 \times -2})^7$$

بتحليل العدد -8 إلى عوامله الأولية

$$= (-2)^7$$

$$= -128$$

أتحقق من فهمي 

أجد قيمة كل مما يأتي في أبسط صورة:

a) $32^{1/5}$

b) $9^{5/2}$

c) $(16)^{-5/4}$

أتذكر

لأي عدد حقيقي $a \neq 0$ ،
فإن: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. وإذا كان
 a مرفوعاً لأس سالب ويقع
في المقام، فإن: $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$.

مراجعة المفاهيم

خصائص ضرب القوى وقسمتها

لأي عددين حقيقيين a و b و عددين صحيحين m و n ، فإن:

1 $a^n \times a^m = a^{n+m}$

ضرب القوى

2 $(a^n)^m = a^{n \times m}$

قوة القوى

3 $(ab)^n = a^n \times b^n$

قوة ناتج الضرب

4 $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, $a \neq 0$

قسمة القوى

5 $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $a, b \neq 0$

قوة ناتج القسمة

تنطبق خصائص ضرب القوى وقسمتها التي درستها سابقاً للأسس الصحيحة على الأسس النسبية (rational exponents) أيضاً.

مثال 2

أجد قيمة كل مما يأتي في أبسط صورة:

$$\begin{aligned} 1 \quad & y^{-\frac{5}{2}} \times y^{\frac{3}{2}} \\ & y^{-\frac{5}{2}} \times y^{\frac{3}{2}} = y^{-\frac{5}{2} + \frac{3}{2}} \\ & = y^{-1} \\ & = \frac{1}{y} \end{aligned}$$

ضرب القوى
بجمع الأسس
تعريف الأس السالب

$$\begin{aligned} 2 \quad & (x^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}} \\ & (x^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{4}{3} \times \frac{1}{2}} \\ & = x^{\frac{2}{3}} \\ & = \sqrt[3]{x^2} \end{aligned}$$

بالتبسيط
الصورة الجذرية

$$\begin{aligned} 3 \quad & (a \times b^2)^{\frac{3}{2}}, a > 0 \\ & (a \times b^2)^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}} \times b^{2 \times \frac{3}{2}} \\ & = \sqrt{a^3} \times b^3 \end{aligned}$$

قوة ناتج الضرب
الصورة الجذرية

$$\begin{aligned} 4 \quad & \frac{z^{\frac{7}{8}}}{z^{\frac{1}{8}}} \\ & \frac{z^{\frac{7}{8}}}{z^{\frac{1}{8}}} = z^{\frac{7}{8} - \frac{1}{8}} \\ & = z^{\frac{6}{8}} \\ & = z^{\frac{3}{4}} \\ & = \sqrt[4]{z^3} \end{aligned}$$

قسمة القوى
بالتبسيط
بالتبسيط
الصورة الجذرية

أتعلم

تنقسم الجذور بحسب دليل الجذر إلى نوعين، هما: الجذور الفردية، والجذور الزوجية. مثلاً:
جذور فردية:
 $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt{x^2 + 1}$
جذور زوجية:
 $\sqrt{18}$, $\sqrt{9 + 3y}$

5 $\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\frac{3}{4}}$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{x^{4 \times \frac{3}{4}}}{y^{2 \times \frac{3}{4}}}$$

قوة ناتج القسمة

$$= \frac{x^3}{y^{\frac{3}{2}}}$$

قوة القوى

$$= \left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^3$$

الصورة الجذرية

6 $\frac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[3]{x^2}}$

$$\frac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{x^{\frac{4}{5}}}{x^{\frac{2}{3}}}$$

تعريف الأس النسبي

$$= x^{\frac{4}{5} - \frac{2}{3}}$$

قسمة القوى

$$= x^{\frac{2}{15}}$$

بالتبسيط

$$= \sqrt[15]{x^2}$$

الصورة الجذرية

أتحقق من فهمي 

أجد قيمة كل مما يأتي في أبسط صورة:

a) $a^{\frac{2}{3}} \times a^{-\frac{3}{7}}$

b) $\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{-\frac{7}{5}}$

c) $(y \times z)^{\frac{5}{4}}$

d) $\frac{x^{\frac{9}{2}}}{x^{\frac{8}{5}}}$

e) $\left(\frac{x}{y^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$

f) $\frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[7]{x^3}}$

مفهوم أساسي

تكون العبارة الأسية في أبسط صورة إذا:

1 ظهر الأساس مرة واحدة، وكانت الأسس جميعها موجبة.

2 لم تتضمن العبارة قوة القوى.

3 كانت الكسور والجذور جميعها في أبسط صورة.

اكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة، علماً بأن أيًا من المتغيرات لا يساوي صفراً:

1
$$\frac{(6x^{\frac{4}{3}})(y^{\frac{-7}{5}})}{(2x^{\frac{-8}{3}})(y^{\frac{-2}{5}})}$$

$$\frac{6x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{-7}{5}}}{2x^{\frac{-8}{3}}y^{\frac{-2}{5}}} = \left(\frac{6}{2}\right) \times \left(x^{\frac{4}{3}-\frac{-8}{3}}\right) \times \left(y^{\frac{-7}{5}-\frac{-2}{5}}\right)$$

$$= 3x^4y^{-1}$$

$$= \frac{3x^4}{y}$$

قسمة القوى

بالتبسيط

الأس السالب

2
$$\frac{(3xy^2)(6y^{\frac{2}{5}})}{(9x^{\frac{-3}{2}})(x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{4}{10}})}$$

$$\frac{(3xy^2)(6y^{\frac{2}{5}})}{(9x^{\frac{-3}{2}})(x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{4}{10}})} = \frac{3 \times 6}{9} \times \frac{x}{x^{\frac{-3}{2}+\frac{5}{2}}} \times \frac{y^{\frac{3}{2}+\frac{2}{5}}}{y^{\frac{4}{10}}}$$

$$= 2 \times \frac{x}{x^1} \times \frac{y^{\frac{19}{10}}}{y^{\frac{4}{10}}}$$

$$= 2x^{1-1}y^{\frac{19}{10}-\frac{4}{10}}$$

ضرب القوى

بالتبسيط

بقسمة القوى

تعريف الأس الصفرى

الصورة الجذرية

3
$$\sqrt[3]{64x^{12}y^3}$$

$$\sqrt[3]{64x^{12}y^3} = (64x^{12}y^3)^{\frac{1}{3}}$$

$$= (64)^{\frac{1}{3}}(x)^{\frac{12}{3}}(y)^{\frac{3}{3}}$$

$$= 4x^4y$$

صورة الأس النسبى

قوة ناتج الضرب

بالتبسيط

أتحقق من فهمي 

اكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة، علماً بأن أيًا من المتغيرات لا يساوي صفراً:

a)
$$\frac{9x^{-\frac{3}{4}}y}{3x^{\frac{7}{2}}y^{-\frac{5}{3}}}$$

b)
$$\frac{(125y^{-\frac{9}{2}})(10xy^{\frac{10}{3}})}{(5x^{\frac{5}{2}}y)(y^{-\frac{3}{7}})}$$

c)
$$\sqrt[4]{16x^{18}y^{22}}$$

أفهم

إذا كانت $n = m$ فإن:

$$1 = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-n} = a^0$$

إذن، $a^0 = 1$

أُتدرب وأحل المسائل



أجد قيمة كل مما يأتي في أبسط صورة:

1 $512^{\frac{1}{9}}$

2 $125^{\frac{2}{3}}$

3 $36^{-\frac{1}{2}}$

4 $(-243)^{\frac{6}{5}}$

5 $(25)^{\frac{3}{2}}$

6 $(-8)^{\frac{7}{3}}$

أجد قيمة كل مما يأتي في أبسط صورة:

7 $z^{-\frac{4}{2}} \times z$

8 $(x^{\frac{3}{5}})^{\frac{5}{7}}$

9 $(a^3 \times b)^{\frac{2}{3}}$

10 $\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{7}{2}}}$

11 $\frac{\sqrt{y^3}}{\sqrt[6]{y^9}}$

12 $\frac{k^{\frac{1}{2}} \times k^{\frac{3}{2}}}{k^2}$

أكتب ما يأتي في أبسط صورة، علماً بأن أيًا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

13 $\left(\frac{40x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{7}{3}}}{5x^{-\frac{3}{2}}y^{-\frac{16}{3}}}\right)^{-\frac{2}{5}}$

14 $\frac{27x^{\frac{7}{3}}y^{-\frac{4}{2}}xz^2}{(3x^2y^{\frac{5}{2}})(3x^{\frac{5}{3}}y^{-5})}$

15 $\frac{(a^2b^3)^{-2} \times ab^4}{a^{-1}b^2}$

16 $\frac{(8p^{-6}q^3)^{\frac{2}{3}}}{(27p^3q)^{-\frac{1}{3}}}$

17 $\frac{(x^2y)^{\frac{1}{3}}(xy^2)^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}}$

18 $\frac{(4x^{-1}y^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}}}{(xy)^{\frac{3}{2}}}$

مهارات التفكير العليا



19 تحدّ: أجد قيمة المقدار الأسّي الآتي:

$$(-5)^{43} + (-1)^{43} + (5)^{43}$$

20 تبرير: تتضاعف عيّنة في المختبر 3 مرّات كل أسبوع. إذا علمت أن فيها 7300 خلية بكتيرية، فكم خلية سيصبح فيها بعد مرور 5 أسابيع؟ أبرّر إجابتي.

تحدّ: أكتب ما يأتي في أبسط صورة، علماً بأن أيًا من المتغيرات لا يساوي صفرًا:

21 $\frac{r^{\frac{3}{2}} + r^{\frac{5}{2}}}{r^2 + r^3}$

22 $\frac{y^{-\frac{1}{2}} - 2y^{-\frac{3}{2}}}{y^{\frac{1}{2}} - 2y^{-\frac{1}{2}}}$

23 $\frac{1+x}{2x^{\frac{1}{2}}} + x^{\frac{1}{2}}$

24 تبرير: أقرن بين العددين: 2^{175} و 5^{75} اعتماداً على خصائص الأسس، من دون استعمال الآلة الحاسبة. أبرّر إجابتي.

حلُّ المعادلةِ الأسيَّةِ Solving Exponential Equation

حلُّ معادلاتٍ أُسيَّةٍ، حلُّ أنظمةِ معادلاتٍ أُسيَّةٍ.

فكرةُ الدرس



المعادلةُ الأسيَّةُ.

المصطلحاتُ



مسألةُ اليوم



تستغرقُ الزنبقةُ المائيةُّ 26 يومًا لتنموَ بصورةٍ كاملةٍ. إذا علمتُ أن الزهرةَ تنمو يومياً بمقدارِ الضَّعْفِ عنِ اليومِ السابقِ، فكمَ يوماً يلزمُها لتصلَ إلى نصفِ مرحلةِ النموِّ؟

المعادلةُ الأسيَّةُ (exponential equation) هي معادلةٌ تتضمنُ قوَى أُسسها مُتغيِّراتٌ، ويتطلَّبُ حلُّها كتابةَ طرفي المعادلةِ بصورةٍ قوَّةٍ للأساسِ نفسه، ثمَّ المقارنةَ بينَ أُسِّي الطرفين، وَفَقَّ القاعدةِ التي نصَّها: "إذا تساوت قوتانِ لهُما الأساسُ نفسه، فإنَّ أُسِّيهِما متساويانِ."

مثال 1

أحلُّ المعادلاتِ الأسيَّةِ الآتية:

1 $5^{3x+2} = 25^{x-1}$

$$5^{3x+2} = (5^2)^{x-1}$$

$$5^{3x+2} = 5^{2(x-1)}$$

$$3x + 2 = 2x - 2$$

$$x = -4$$

$$5^2 = 25$$

الأساسانِ متساويانِ

بمساواةِ الأسيِّ

بحلِّ المعادلةِ

2 $8^x = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$$(2^3)^x = 2 \times (2^{-1})^x$$

$$2^{3x} = 2 \times 2^{-x}$$

$$2^{3x} = 2^{-x+1}$$

$$3x = -x + 1$$

$$x = \frac{1}{4}$$

قوَّة القوي

ضربُ القوي

بمساواةِ الأسيِّ

بحلِّ المعادلةِ



أَبْحَثْ: قوَّةُ العددِ 2
أو 2^x مهمةٌ جدًّا في علمِ
الحاسوبِ، لماذا؟

أتحقق من فهمي

أحلّ المعادلات الأسية الآتية:

a) $4^{x-5} = 32^{2x+1}$

b) $9^x = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x$

c) $625^{2x+1} = \frac{5}{\sqrt{5}}$

توجد تطبيقات حياتية كثيرة لحلّ المعادلات الأسية.

مثال 2: من الحياة

بكتيريا: يتضاعف عدد الخلايا البكتيرية في عينة مخبرية 4 مرات كل ساعة، إذا استعملت المعادلة $y = 3(4^{x-1})$ لحساب عدد الخلايا البكتيرية y في العينة بعد مرور x ساعة من زمن تحضير العينة، فما الزمن اللازم ليصبح في العينة 192 خلية؟

$$y = 3(4^{x-1})$$

$$192 = 3(4^{x-1})$$

$$64 = (4^{x-1})$$

$$4^3 = (4^{x-1})$$

$$3 = x - 1$$

$$x = 4$$

المعادلة المعطاة

بتعويض $y = 192$ في المعادلة

بقسمة طرفي المعادلة على 3

$$64 = 4^3$$

بمساواة الأسس

بحلّ المعادلة الخطية الناتجة

إذن، يصبح في العينة 192 خلية بعد 4 ساعات.

أتحقق من فهمي

تعليم: يزداد عدد المشتركين في موقع تعليمي على الإنترنت عامًا بعد عام، وتُستعمل المعادلة $y = 2(3^{2x-6})$ لحساب عدد المشتركين y بالألوف بعد مرور x عامًا من إطلاق الموقع. ما الزمن اللازم ليصبح عدد المشتركين في الموقع 162 ألف مشترك؟

يمكنني حلّ نظام مُكوّن من معادلتين أُسيتين بكتابة طرفي المعادلة الأولى في صورة قوة للأساس نفسه، ثمّ مساواة أُسّي الطرفين، ثمّ تكرار ذلك في المعادلة الثانية، فيتكوّن نظام من معادلتين.



قد يحتوي الغرام الواحد من التربة على نحو 10^{10} خلايا بكتيرية مختلفة الأنواع.



نما عدد مستخدمي المواقع التعليمية بما نسبته 900% منذ عام 2000م.

مثال 3

أحلُّ نظامَ المعادلاتِ المجاور:

$$4^{2x} \times 2^y = 64$$

$$9^x \times 3^y = 81$$

المعادلةُ الأسيَّةُ الأولى

بتحليلِ العددينِ 4 و 64 إلى عواملِهما الأولى

$$4^{2x} \times 2^y = 64$$

$$(2^2)^{2x} \times 2^y = 2^6$$

$$2^{4x} \times 2^y = 2^6$$

$$2^{4x+y} = 2^6$$

$$4x + y = 6$$

قوَّةُ القوي

ضربُ القوي

بمساواةِ الأسسِ

بتطبيقِ الخطواتِ نفسها على المعادلةِ الثانيةِ تنتجُ المعادلةُ الخطيَّةُ

أحلُّ نظامَ المعادلاتِ الخطيَّةِ الناتجِ بالحذف:

$$4x + y = 6$$

$$(-) \quad 2x + y = 4$$

$$\hline 2x = 2$$

$$x = 1$$

$$4(1) + y = 6$$

$$4 + y = 6$$

$$y = 2$$

ب طرحِ المعادلتينِ

بالقسمةِ على 2

بتعويضِ قيمةِ x في المعادلةِ الثانيةِ

بحلِّ المعادلةِ

إذن، حلُّ نظامِ المعادلاتِ هو: $x = 1, y = 2$

أتتحقق من فهمي 

أحلُّ نظامَ المعادلاتِ المجاور:

$$\frac{4^x}{256^y} = 64$$

$$3^{2x} \times 9^y = 243$$

قد لا يكون من الممكن كتابة أحد طرفي المعادلة الأسيَّة على صورة قوة للأساس نفسه، عندئذ يمكن حل المعادلة بيانياً باستعمال برمجية حاسوبية أو آلة حاسبة بيانية.

مثال 4 حلُّ المعادلةِ الأسيَّةِ الآتية $5 = 3^{x-1}$ بيانياً.

ألاحظُ أنه ليس من الممكن كتابة طرفي المعادلة بصورة قوة للأساسِ نفسه، لذلك أحلُّ المعادلةَ بيانياً.

أتذكر

يُمكنني حلُّ نظامِ المعادلاتِ الخطيَّةِ بالحذف، أو التعويض.

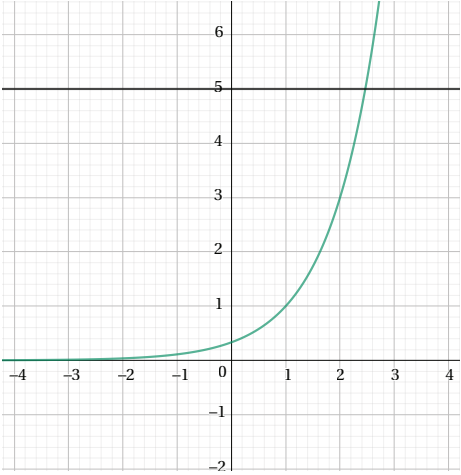
الخطوة 1: أكتب نظام معادلاتٍ باستعمال طرفي المعادلة.

$$y = 5$$

المعادلة 1

$$y = 3^{x-1}$$

المعادلة 2




الخطوة 2: أمثل المعادلتين بيانياً في

المستوى نفسه باستعمال

برمجية جيو جبراً.

الخطوة 3: أجد إحداثيي نقطة تقاطع

المنحنيين.

أختار أيقونة  من شريط الأدوات، ثم أنقر على كلا المنحنيين فيظهر إحداثيا

نقطة التقاطع (2.46, 5)

إذن، حل المعادلة هو $x = 2.46$

أتتحقق من فهمي 

أحل كلاً من المعادلتين الأسيتين الآتيتين بيانياً:

a) $3^x = -6^{x+2} + 1$

b) $5 = 4^{x+1}$

أتدرب وأحل المسائل 

أحل المعادلات الأسية الآتية:

1 $64 = (32)^{3-x}$

2 $81^{5x+1} = 27^{4x-3}$

3 $128^{x-5} = \frac{2}{\sqrt{2}}$

4 $64^{7x+1} = \frac{2}{16^{4x-3}}$

5 $\left(\frac{11}{\sqrt{11}}\right)^{3x+1} = (11)^{x+7}$

6 $(\sqrt{7})^{4x+5} = \left(\frac{\sqrt{28}}{2}\right)^{7x-2}$

7 $9^{x^2} \times 27^{x^2} = 243$

8 $5^{2x} \times 25^x = 125$

9 $2^{x^2} \times 2^{6x} = \frac{1}{32}$

أحل أنظمة المعادلات الآتية:

10 $5^y = 25^{x-3}$

$125^y = 25^{x-1}$

11 $3^y = 3^{2x+y}$

$27^y = 27^{x+3}$

12 $5^{2x} \times 25^y = 125$

$\frac{8^x}{2^y} = 16$

13 $9^{2-x} = 81^{6y}$

$\left(\frac{1}{216}\right)^{-2x-3} = 36^{3y}$

14 $\frac{16^{-x}}{64^{-3x}} = 16^{-3y-3}$

$8^{x^2} = \left(\frac{1}{2^{y+1}}\right)^2$

15 $\frac{1}{27} \times 9^{2-n} = 3^{m^2-2}$

$2^{m^2} \times 2^n = 64$

أحل كلاً من المعادلات الأسية الآتية بيانياً:

16 $4^{x+3} = 6$

17 $2^x = 1.8$

18 $4 = 8^x$

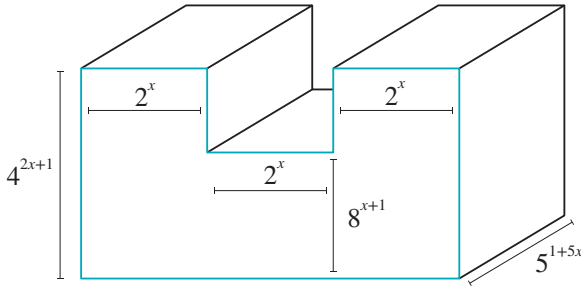
19 $\left(\frac{3}{4}\right)^{x+2} = 10$

20 $2^{-x-3} = 3^{x+1}$

21 $5^x = -4^{x+4}$

22 **تصوير:** تُستعمل المعادلة $y = 2^{x+2}$ لحساب مقاس ورقة لا بعد تكبيرها بنسبة 100% عدد x من المرات، مقارنة بمقاسها الأصلي، باستعمال آلة ناسخة. كم مرة يجب تكبير صورة ليصبح مقاسها 32 ضعف مقاسها الأصلي؟

23 **بكتيريا:** يُمثّل المقدار 3^{t-2} عدد الخلايا البكتيرية في تجربة مخبرية بعد مرور t من الساعات. ما الزمن اللازم ليصبح عدد الخلايا البكتيرية 2187 خلية؟



24 **هندسة:** أكتب في أبسط صورة عبارة أسية تُمثّل حجم الشكل المجاور.

مهارات التفكير العليا

25 **تبرير:** هل يمكن حل المعادلة الأسية الآتية: $2 + 2^x = 1$ ؟ أبرر إجابتي.

26 **تبرير:** أحل المعادلة: $x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}} = 4$ ، مُبرراً خطوات الحل.

27 **تحذ:** ما قيمة كل من x و y في المعادلة الآتية: $\frac{36^{x-y+1}}{54^{x+y-1}} = 48^{x+y}$

28 **تحذ:** أحل نظام المعادلات الأسية الآتية:

$2^x + 3^y = 10$

$2^{x+1} + 3^{y+1} = 29$

5 المقدار الجبري الذي يجب وضعه في المربع الفارغ

$$\frac{8x^2y^3}{\square} = \left(\frac{2y}{x}\right)^2$$

للمعادلة هو:

- a) $2x^4y$ b) $4x^4y^2$
c) $2xy$ d) x^2y^2

أحل كل نظام معادلات مما يأتي، ثم أتحقق من صحة الحل:

- 6 $y = 4x$ 7 $y - x = 15$
 $y = 5 - x^2$ $x^2 + y^2 = 64$
- 8 $y = x^2 - 4x + 5$ 9 $y = -x^2 - x + 12$
 $y = -x^2 + 5$ $y = x^2 + 7x + 12$

إذا كان c ثابتاً في نظام المعادلات الآتي،

$$3x - 2y = 7$$

$$x^2 - y^2 = c$$

فأجد:

10 حل هذا النظام، علماً بأن $c = 8$

11 جميع قيم c الممكنة التي لا تجعل للنظام أي حل.

12 أجد مجموعة حل المتباينة: $3 - 7x < 6x^2$ بحل نظام المعادلات الآتي:

$$y = 3 - 7x$$

$$y = 6x^2$$

1 أي الأزواج المرتبة الآتية تمثل حلاً لنظام المعادلات:

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$3x + y = 6$$

- a) (1, 3) b) (0, 2)
c) (2, 0) d) (-2, -2)

2 أي الأزواج المرتبة الآتية تمثل حلاً لنظام المعادلات:

$$y = x^2 - 5x + 6$$

$$y = -x^2 + 2x + 3$$

- a) (0, 3) b) (1, 2)
c) (2, 0) d) (3, 0)

3 أي الأزواج المرتبة الآتية تمثل حلاً لنظام المعادلات:

$$3^{5x} \times 9^y = 27$$

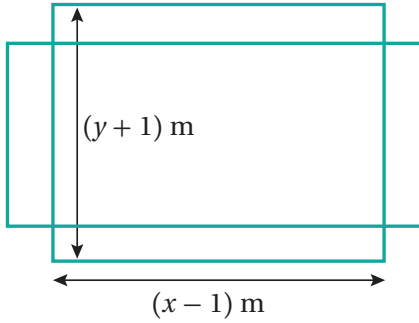
$$5^{3x} \times 5^y = 25$$

- a) (-1, -1) b) (1, 1)
c) (-1, 1) d) (1, -1)

4 يمثل $x = -1$ حلاً للمعادلة الأسية:

- a) $5^{2x+1} = 25$ b) $3^{1+x} = 81$
c) $7^{3-2x} = 49$ d) $4^{2-x} = 64$

- 27 **تنس:** ملعب تنسٍ طوله x مترًا وعرضه y مترًا ومساحته 224 m^2 ، إذا تمت زيادة عرضه بمقدار 1 m وتقليل طوله بمقدار 1 m فزادت مساحته بمقدار 1 m^2 كما في الشكل الآتي، فأجد أبعاد ملعب التنس.



تدريب على الاختبارات الدولية

- 28 أجد جميع قيم p التي تجعل منحنى المعادلة الخطية $y = 2x + p$ لا يقطع منحنى المعادلة

$$y = x^2 + 3x - 1$$

- 29 أجد الأعداد الصحيحة الموجبة a, b, c إذا كان $(ab^c)^3 = 27b^{21}$

- 30 أجد العددين اللذين ناتج جمع القوة الخامسة لأحدهما مع مربع العدد الثاني يساوي 268

- 31 أثبت أنه يمكن كتابة العدد 81 على صورة مجموع مربع كامل وإحدى قوى العدد 5

أكتب كلاً مما يأتي في أبسط صورة:

13 $\frac{2}{2^3 \times 2^{-4}}$

14 $\left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$

15 $\frac{(16p^4 q^{-2})^{-\frac{3}{2}}}{(64p^2 q^{-1})^{-\frac{1}{2}}}$

16 $\frac{(27a^{\frac{3}{2}} b^{-6})^{-\frac{1}{3}}}{(729a^4 b^{-2})^{-\frac{1}{2}}}$

تحذ: أجد قيمة كل من a و b في كل مما يأتي:

17 $3^a x^b = \frac{27x^{\frac{7}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}$

18 $\frac{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{x - x^2} = x^a$

أحل كلاً من المعادلات الأسية الآتية:

19 $5^{\frac{1}{2}} = 5^{2x-1}$

20 $27^{-\frac{1}{c}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{c-\frac{5}{2}}$

21 $432 = 3^{x+1} \times 2^{2x}$

22 $500 = \frac{2^{\frac{1}{2}-x}}{5^{2x}}$

أحل كل نظام معادلات مما يأتي:

23 $36^{x+4} = 6^y$
 $36^y = 36^{x+6}$

24 $5^{2x+4} = 5^{y-3}$
 $7^{y-x} = 49$

- 25 عدنان مجموع مربعيهما 85 ومربع مجموعيهما 121، ما هُما؟

- 26 يمثل كل من X, Y عددين مفقودين في الرقم السري XY1290. إذا كان مجموع العددين المفقودين 12 ومجموع مربعيهما يساوي 90، فأجد قيمة كل منهما.

ما أهمية هذه الوحدة؟

تُعَدُّ الدائرة أحدَ أكثرِ الأشكالِ ظهورًا على سطحِ الأرضِ، بل في جميعِ الكونِ. فهيَ تظهرُ جليًّا في بؤبؤِ العينِ، وفي الفاكهةِ، وُجذوعِ الأشجارِ، وغيرِ ذلكَ من المخلوقاتِ. وقد استفادَ الإنسانُ من الخصائصِ الفريدةِ لهذا الشكلِ المُعقَّدِ في مجالاتٍ عدَّةٍ، مثل: الهندسةِ، والصناعةِ.

سأتعلَّمُ في هذه الوحدة:

- ◀ حسابَ طولِ القوسِ، ومساحةِ القطاعِ الدائريِّ.
- ◀ العلاقاتِ بينَ الزوايا في الدائرة، والإفادةَ منها في إيجادِ زوايا مجهولةٍ.
- ◀ كتابةَ معادلةِ الدائرة، وإيجادَ المركزِ ونصفِ القطرِ من معادلةِ دائرة معلومةٍ.
- ◀ العلاقةَ بينَ دائرتينِ، وماهية المماسَّاتِ المشتركةِ.

تعلَّمتُ سابقًا:

- ✓ إيجادَ محيطِ الدائرة، ومساحتِها.
- ✓ تمييزَ حالاتِ تطابقِ المثلثاتِ، وتشابُّهها.
- ✓ إيجادَ مجموعِ قياسِ زوايا كلِّ من المثلثِ، والشكلِ الرباعيِّ.
- ✓ إيجادَ المسافةِ بينَ نقطتينِ في المستوى الإحداثيِّ، وإحداثياتِ نقطة المنتصفِ.

البحث عن استعمالات علمية لخصائص الدائرة، ووصفها، ونمذجتها.

فكرة المشروع



شبكة الإنترنت، برمجية جيو جبرا.

المواد والأدوات



خطوات تنفيذ المشروع:

1 أبحث مع أفراد مجموعتي في مكتبة المدرسة (أو في شبكة الإنترنت) عن نموذج

علمي أو حياتي تُستعمل فيه إحدى الخصائص الآتية للدائرة:

- العلاقة بين الزوايا المركزية والزوايا المحيطية.
- العلاقة بين الزاوية المماسية والزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه.
- الدوائر المتماصة.
- معادلة الدائرة.



2 أكتب في مستند معالج النصوص (وورد) فقرة أصف فيها النموذج الحياتي أو العلمي الذي اخترته، مُحدداً خصائص

الدائرة الموجودة في هذا النموذج، ثم أفسرها.


3 أضيف إلى المستند صوراً توضيحية للنموذج، ذاكرًا مصدر المعلومات والصور.



4 أستعمل برمجية جيو جبرا لرسم شكل يوضح استعمال الخاصية في النموذج، وأضع عليه قياسات الزوايا وأطوال

الأضلاع جميعها. وهذه بعض الإرشادات التي قد تساعد على رسم الشكل التوضيحي باستعمال برمجية جيو جبرا:

● لرسم دائرة، انقر على أيقونة  من شريط الأدوات.

● لإيجاد قياس زاوية، انقر على أيقونة ، ثم على ضلع ابتداء الزاوية، وضلع انتهائها.

● لإيجاد طول قطعة مستقيمة، انقر على أيقونة ، ثم على القطعة المستقيمة.

● لرسم مماس للدائرة من نقطة خارجها، أحدد أولاً النقطة بالنقر على أيقونة ، ثم أيقونة .

عرض النتائج:

أعد مع أفراد مجموعتي عرضاً تقديمياً نبيّن فيه ما يأتي:

- خطوات تنفيذ المشروع موصّحة بالصور والرسوم، بما في ذلك صورة الشكل الذي رسم باستعمال برمجية جيو جبرا.
- معلومة جديدة تعرّفناها في أثناء العمل بالمشروع، ومقترح لتوسعة المشروع.

الدرس 1

أوتار الدائرة، وأقطارها، ومماساتها Chords, Diameters and Tangents of a Circle

معرفة الوتر، والقطر، والمماس، وخصائص كل منها، والعلاقات التي تربط بعضها ببعض، وتوظيف ذلك في إيجاد أطوال وقياسات زوايا مجهولة.

الدائرة، المركز، الوتر، القوس، القطر، نصف القطر، المماس، نقطة التماس، القاطع.



في حديقة منزل عبير طاولة دائرية، وهي تريد عمل فتحة عند مركزها لتثبيت عمود يحمل مظلة بها. كيف يمكن لعبير تحديد مركز الطاولة؟

فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم



الدائرة (circle) هي المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى، بحيث تظل على البعد نفسه عن نقطة محددة تُسمى **مركز الدائرة** (center). أما **الوتر** (chord) فهو قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين على الدائرة، ويسمى الوتر الذي يمر بمركز الدائرة **القطر** (diameter). ويُطلق على القطعة المستقيمة التي تصل مركز الدائرة بنقطة عليها اسم **نصف القطر** (radius).

القاطع (secant) هو مستقيم يقطع الدائرة في نقطتين، ويحوي وترًا فيها. أما المستقيم الذي يشترك مع الدائرة في نقطة واحدة فقط فيسمى **المماس** (tangent). ويُطلق على نقطة التقاء المماس بالدائرة اسم **نقطة التماس** (point of tangency).

مثال 1

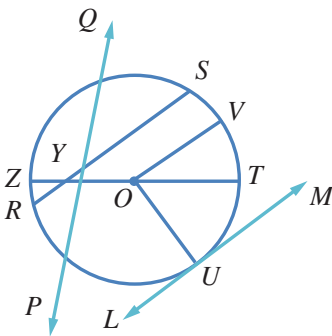
يمثل الشكل المجاور دائرة مركزها O . أسمى:

1 مماسًا للدائرة.

\overleftrightarrow{LM}

2 أربعة أنصاف أقطار.

\overline{OV} , \overline{OT} , \overline{OZ} , \overline{OU}



رموز رياضية

• ترمز \overleftrightarrow{LM} إلى المستقيم LM .

• ترمز LM إلى طول القطعة المستقيمة. أما \overline{LM} فترمز إلى القطعة المستقيمة نفسها.

3 قُطْرًا للدائرة.
 \overline{ZT}

4 وترًا للدائرة.
 $\overline{SR}, \overline{ZT}$

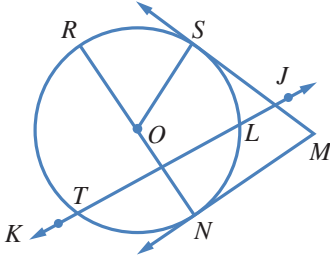
أتحقق من فهمي 

يُبيِّن الشكل المجاور دائرة مركزها O . أَسْمِي:

(a) قاطعًا للدائرة.

(b) وترًا للدائرة.

(c) مماسًا للدائرة.

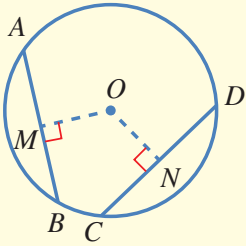


نظريات

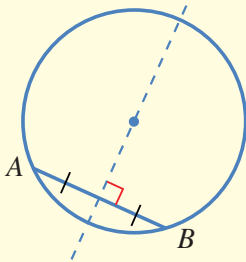
1 الوتران المُتطابقان يبعدان المسافة نفسها عن مركز الدائرة. والوتران اللذان يبعدان المسافة نفسها عن مركز الدائرة مُتطابقان.

مثال: بما أن $CD = AB$ ، فإن $OM = ON$.

وإذا كان $OM = ON$ ، فإن $AB = CD$.



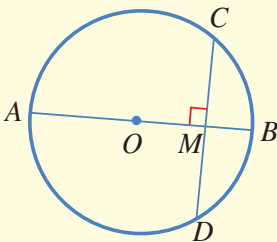
2 المُنصف العمودي لأي وتر في الدائرة يمر بمركزها. مثال: في الشكل المجاور، يقع مركز الدائرة على الخط المُتقطع.



3 نصف القطر العمودي على وتر في دائرة يُنصف ذلك الوتر.

مثال: بما أن $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ ، فإن $MC = MD$. وإذا

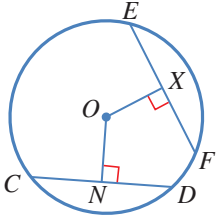
مرَّ القطر بمنتصف وتر فإنه يعامده.



رموز رياضية

يدلُّ الرمز \perp على تعامد قطعيتين، أو مستقيمين.

مثال 2



في الشكل المجاور، \overline{CD} و \overline{EF} وتران في دائرة مركزها O . إذا كان $ON = OX$ ، و $EF = 8 \text{ cm}$ ، فما طول \overline{NC} ؟

ON و OX يمثلان بُعدي الوترين CD و EF عن مركز الدائرة، وهما مُتطابقان.

من معطيات السؤال $ON = OX$

إذا تساوى بُعدا وترين عن مركز الدائرة، فهما مُتطابقان $CD = EF$

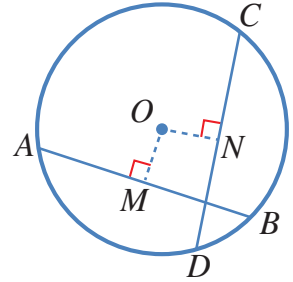
نصف القطر العمودي على وتر يُنصفه $NC = \frac{1}{2} CD$

الوتران \overline{CD} و \overline{EF} مُتطابقان $= \frac{1}{2} EF$

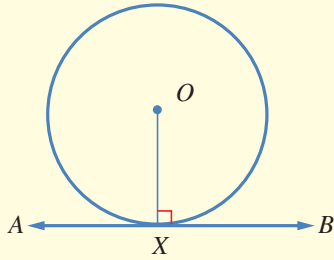
بالتعويض $= \frac{1}{2} (8) = 4 \text{ cm}$

أتحقق من فهمي

في الشكل المجاور، \overline{CD} و \overline{AB} وتران في دائرة مركزها O . إذا كان $OM = ON$ ، و $CN = 12 \text{ cm}$ ، فما طول \overline{AB} ؟



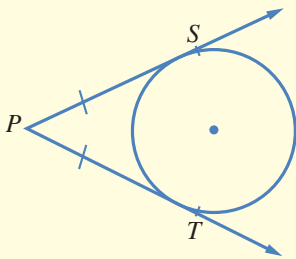
نظريات



1 مماس الدائرة يكون عمودياً على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس.

مثال: نصف القطر \overline{OX} عمودي على

$$\begin{aligned} & \overleftrightarrow{AB} \\ & \overleftrightarrow{OX} \perp \overleftrightarrow{AB} \end{aligned}$$



2 المماسان المرسومان للدائرة من نقطة خارجها لهما الطول نفسه.

مثال: \overline{PS} و \overline{PT} لهما الطول نفسه: $PS = PT$.

رموز رياضية

يُبدل \overleftrightarrow{PT} على مماس الدائرة. أما \overline{PT} فيدل على القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطة P ونقطة التماس، ويبدل الرمز PT على طول هذه القطعة.

مثال 3

جبر: في الشكل المجاور، \overleftrightarrow{TP} و \overleftrightarrow{TQ} مماسان لدائرة مركزها O :

1 أجد قيمة x .

$$TP = TQ$$

مماسان مرسومان للدائرة من نقطة خارجها

$$2x + 3 = 4x - 6$$

بالتعويض

$$2x + 3 + 6 - 2x = 4x - 6 + 6 - 2x$$

بإضافة $6 - 2x$ إلى الطرفين

$$9 = 2x$$

بالتبسيط

$$x = \frac{9}{2}$$

2 أجد قياس الزاوية POQ .

أفترض أن قياس الزاوية POQ هو y :

$$m\angle OQT = m\angle OPT = 90^\circ$$

مماس الدائرة يتعامد مع نصف

القطر في نقطة التماس

$$90^\circ + 70^\circ + 90^\circ + y = 360^\circ$$

مجموع قياس الزوايا الداخلية

للسكك الرباعي هو 360°

$$250^\circ + y = 360^\circ$$

بالتبسيط

$$y = 360^\circ - 250^\circ = 110^\circ$$

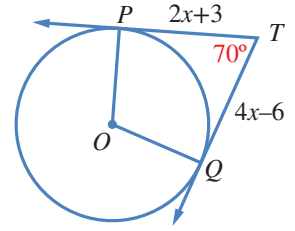
ب طرح 250° من الطرفين

أتحقق من فهمي

في الشكل المجاور، \overleftrightarrow{TP} و \overleftrightarrow{TQ} مماسان لدائرة مركزها O :

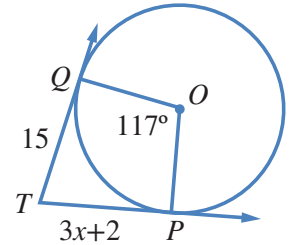
(b) أجد قياس الزاوية PTQ .

(a) أجد قيمة x .

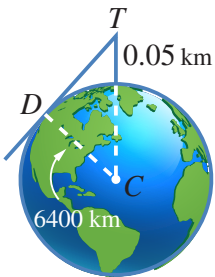


رموز رياضية

يرمز الحرف m في $m\angle OQT$ إلى قياس الزاوية OQT .



مثال 4: من الحياة



أبراج: يرتفع برج مراقبة 50 m عن مستوى الأرض. ما أبعد نقطة على الأرض يمكن مشاهدتها من قمة البرج، بافتراض أن الأرض كرة طول نصف قطرها 6400 km تقريباً؟
أرسم مخططاً يمثّل المسألة.

الدائرة تُمثّل الأرض، والنقطة T تُمثّل قَمّة البرج، والمماس \overrightarrow{TD} يُمثّل خطّ البصر، ونقطة التماس D هي أبعد نقطة يُمكنُ مشاهدتها من قَمّة البرج. ارتفاع البرج $50 \text{ m} = 0.05 \text{ km}$

$$m\angle TDC = 90^\circ$$

المماس يتعامد مع نصف القطر عند نقطة التماس

$$(CT)^2 = (TD)^2 + (CD)^2$$

نظرية فيثاغورس

$$(6400 + 0.05)^2 = (TD)^2 + (6400)^2$$

بالتعويض

$$40960640.0025 = (TD)^2 + 40960000$$

باستعمال الآلة الحاسبة

$$640.0025 = (TD)^2$$

بترح 40960000 من الطرفين

$$25.3 \approx TD$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

إذن، المسافة التي تُمثّل أبعد نقطة على الأرض يُمكنُ مشاهدتها من قَمّة البرج هي: 25 km تقريبًا.

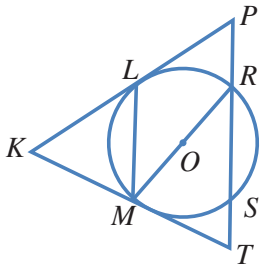
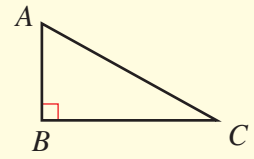
أتحقق من فهمي

برج مراقبة: تبعد أقصى نقطة يُمكنُ مشاهدتها من قَمّة برج مراقبة مسافة 32 km عنه. ما ارتفاع قَمّة البرج عن سطح الأرض، بافتراض أن الأرض كرة طول نصف قطرها 6400 km تقريبًا.

أتذكّر

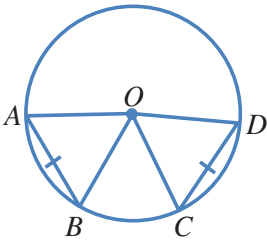
نظرية فيثاغورس: إذا كان المثلث ABC قائم الزاوية في B ، فإن:

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$



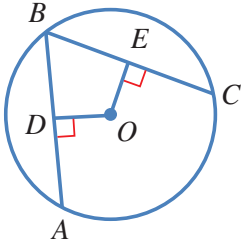
يُمثّل الشكل المجاور دائرة مركزها O . أسمى:

- 1 نصفَي قُطرَيْن.
- 2 وترَيْن.
- 3 مماسَيْن.
- 4 قاطعًا.

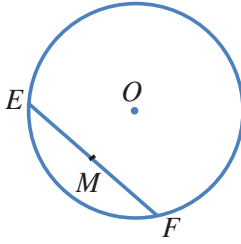


\overline{AB} و \overline{CD} وتران لهما الطول نفسه في دائرة مركزها O :

- 5 ما نوع المثلث AOB ؟ أبرر إجابتي.
- 6 هل المثلثان AOB و COD مُتطابقان؟ أبرر إجابتي.
- 7 إذا كان قياس الزاوية OAB هو 65° ، فما قياس الزاوية COD ؟



- 8 **جبر:** في الشكل المجاور، \overline{AB} و \overline{CB} وتران مُتطابقان في دائرة مركزها O . إذا كان $OE = x + 9$ ، و $OD = 3x - 7$ ، فما قيمة x ؟

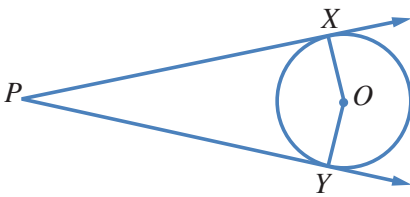


في الشكل المجاور، وتر \overline{EF} في دائرة مركزها O ، والنقطة M هي منتصف الوتر \overline{EF} :

- 9 هل المثلثان EOM ، و FOM مُتطابقان؟ أبرر إجابتي.

- 10 هل الزاوية EMO قائمة؟ أبرر إجابتي.

- 11 إذا كان قياس الزاوية MOF هو 72° ، فما قياس الزاوية MEO ؟ أبرر إجابتي.

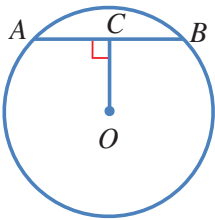


في الشكل المجاور، \overrightarrow{PX} و \overrightarrow{PY} مماسان لدائرة مركزها O :

- 12 هل قياس الزاوية PXO هو 90° ؟ أبرر إجابتي.

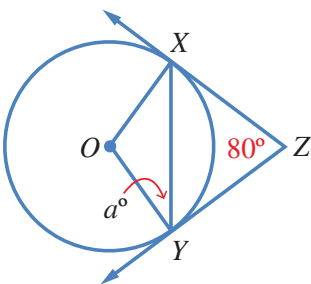
- 13 أبين أن المثلثين XPO و YPO مُتطابقان.

- 14 إذا كان قياس الزاوية XPO هو 17° ، فما قياس الزاوية XOY ؟



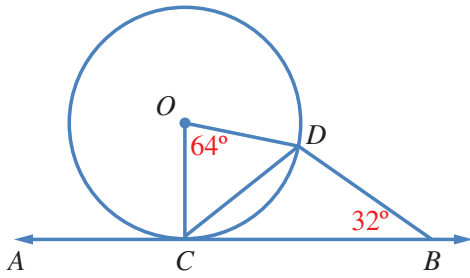
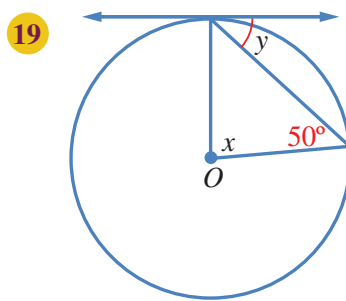
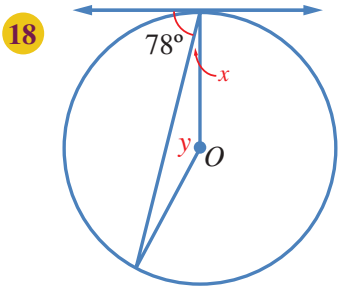
- 15 في الشكل المجاور، وتر طوله 6 cm في دائرة مركزها O . إذا كان قياس الزاوية ACO هو 90° ، و $OC = 4$ cm، فما طول نصف قطر الدائرة؟

- 16 أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.



- 17 في الشكل المجاور، \overrightarrow{ZX} و \overrightarrow{ZY} مماسان لدائرة مركزها O . أجد قيمة a .

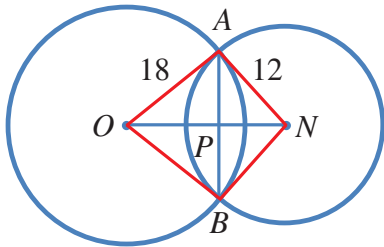
يُظهِرُ فِي كُلِّ مِنَ الشَّكْلَيْنِ الْآتِيَيْنِ مِمَّا سَّ لِدَائِرَةٍ مَرَكُزُهَا O . أَجِدْ قِيَمَةَ x وَ y فِي كُلِّ حَالَةٍ.



20 في الشكلِ المجاورِ، \overleftrightarrow{AB} مماسٌّ لدائرةٍ مركزُها O في النقطةِ C . لماذا يُعَدُّ المثلثُ BCD مُتطابِقَ الضلعينِ؟ أُبَرِّرُ إجابتي.

24 كم مماسًّا يُمكنُ أَنْ يُرَسَمَ لِلدَّائِرَةِ مِنْ نَقْطَةٍ عَلَيْهَا، وَمِنْ نَقْطَةٍ خَارِجِهَا، وَمِنْ نَقْطَةٍ دَاخِلِهَا؟ أُبَرِّرُ إجابتي.

مهارات التفكير العليا



21 تحدُّ: \overline{AB} وترٌّ مشتركٌ بينَ دائرتينِ متقاطعتينِ، وهو عموديٌّ على القطعةِ المستقيمةِ \overline{ON} الواصلةِ بينَ مركزيهما. إذا كانَ $AB = 14$ cm، فما طولُ \overline{ON} ؟ أُبَرِّرُ إجابتي.

22 برهانٌ: \overline{AB} ، و \overline{CD} وترانِ متساويانِ في دائرةٍ مركزُها N . أثبتْ أَنَّ لهُمَا البُعْدَ نَفْسَهُ عَنِ النِّقْطَةِ N .

23 تبريرٌ: \overleftrightarrow{AB} مماسٌّ لدائرةٍ مركزُها N في النقطةِ A ، وطولُ نصفِ قُطْرِها 3 cm، و $BA = 5$ cm. قالتْ سارةٌ إِنَّ $BN = 4$ cm، لأنَّ $(BN)^2 = (BA)^2 - (AN)^2 = 16$. هل قولُ سارةٍ صحيحٌ؟ أُبَرِّرُ إجابتي.

الأقواس والقطاعات الدائرية Arcs and Sectors

حساب طول القوس، ومساحة القطاع الدائري، وحل مسائل تتعلق بهما.

فكرة الدرس



القوس، القطاع.

المصطلحات

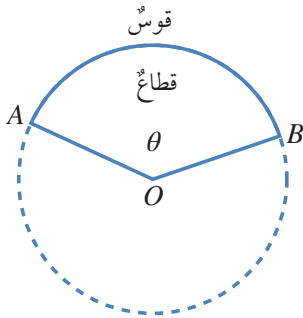


مسألة اليوم



أعدت عفاف فطيرة بيتزا في وعاء دائري طول قطره 24 cm. وبعد أن خبزتها أحدثت فيها شقين من المركز إلى الطرف، بحيث كان قياس الزاوية بينهما 45° . كيف يمكن إيجاد مساحة الجزء الذي قطعت عفاف من الفطيرة؟

القوس (arc) هو جزء من الدائرة مُحدّد بنقطتين عليها. و**القطاع** (sector) هو جزء من الدائرة محصور بين قوسٍ منها ونصف القطرين اللذين يمران بطرفي القوس.

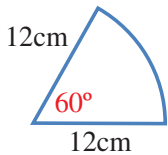


تمثل الزاوية AOB في الشكل المجاور زاوية القطاع الذي يُعدّ كسرًا من الدائرة. ويمكن استعمال قياس زاوية القطاع لكتابة هذا الكسر، وذلك بقسمة قياس الزاوية على الدورة الكاملة؛ أي: $\frac{\theta}{360^\circ}$ ، حيث θ قياس زاوية القطاع.

مثال 1

يُمثل الشكل المجاور قطاعًا دائريًا. أجد:

1 طول القوس (اكتب الإجابة بدلالة π).

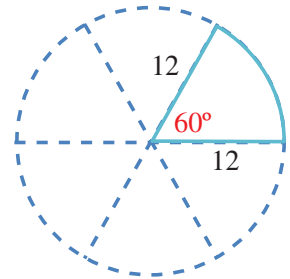


القطاع كسر من الدائرة، وهذا الكسر هو $\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6}$. وبما أن طول

قطر الدائرة 24 cm، فإن طول محيطها: $24 \times \pi = 24\pi$ cm

إذن، طول القوس يساوي $\frac{1}{6}$ طول محيط الدائرة؛ أي:

$$24\pi \div 6 = 4\pi \text{ cm}$$



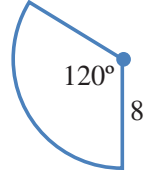
2 مساحة القطاع.

مساحة الدائرة هي: $\pi \times 12^2 = 144\pi \text{ cm}^2$

مساحة القطاع تساوي $\frac{1}{6}$ مساحة الدائرة؛ أي: $144\pi \div 6 = 24\pi \text{ cm}^2$

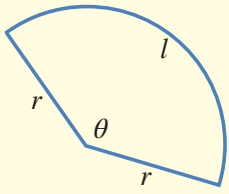
أتحقق من فهمي

يُمثِّل الشكل المجاور قطاعًا دائريًا. أجد طول القوس، ومساحة القطاع الدائري.



تعرفنا في المثال السابق أن القطاع هو كسر من الدائرة، وأنه يُمكن دائمًا استعمال قياس زاوية القطاع لحساب طول القوس ومساحة القطاع الدائري.

مفهوم أساسي

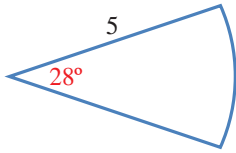


إذا كان قياس زاوية القطاع θ° ، وطول نصف قطر الدائرة r ، وطول القوس l ، ومساحة القطاع A ، فإن:

$$l = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r$$

$$A = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$$

مثال 2



أجد طول القوس ومساحة القطاع في الشكل المجاور.
زاوية القطاع هي 28° ، وطول نصف القطر هو 5 وحدات طول:

$$l = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r$$

قانون طول القوس

$$l = \frac{28^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 2 \times 5$$

بتعويض $\theta = 28^\circ$, $r = 5$

$$\approx 2.4$$

باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، طول هذا القوس مُقرَّبًا إلى أقرب منزلة عشرية واحدة هو: 2.4 وحدة طول.

$$A = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$$

قانون مساحة القطاع

$$= \frac{28^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 5^2$$

بتعويض $r = 5$, $\theta = 28^\circ$

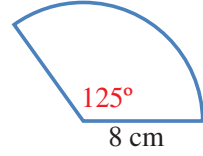
$$\approx 6.1$$

باستعمال الآلة الحاسبة

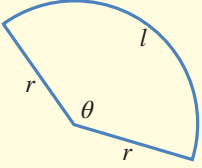
إذن، مساحة هذا القطاع مُقَرَّبَةً إلى أقرب منزلة عشرية واحدة هي: 6.1 وحدة مربعة.

أتحقق من فهمي

أجد طول القوس ومساحة القطاع في الشكل المجاور.



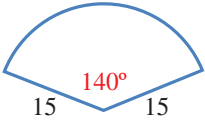
مفهوم أساسي



محيط القطاع الدائري (L) هو المسافة حول القطاع، وهي تساوي طول قوس القطاع، مضافاً إليه مثلاً طول نصف قطر الدائرة:

$$L = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r + 2r$$

مثال 3



أجد محيط القطاع الدائري في الشكل المجاور، مُقَرَّبًا إجابتي إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.

زاوية القطاع هي 140° ، وطول نصف القطر هو 15 وحدة طول:

$$L = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r + 2r$$

$$= \left(\frac{140^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \pi \times 15\right) + 2 \times 15$$

$$\approx 66.6519$$

قانون محيط القطاع

$$r = 15, \theta = 140^\circ$$

باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، محيط هذا القطاع مُقَرَّبًا إلى أقرب منزلة عشرية واحدة هو: 66.7 وحدة طول.

أتحقق من فهمي

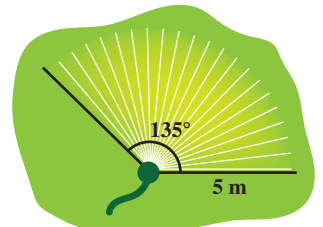
أجد محيط قطاع دائري زاويته 225° ، في دائرة طول نصف قطرها 50 cm، مُقَرَّبًا إجابتي إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.

رموز رياضية

يرمز الحرف l إلى طول القوس، ويرمز الحرف L إلى محيط القطاع.

مثال 4: من الحياة

حديقة منزل وُضِعَ في أحد أطرافها مرش للماء، يدور حول الرأس بزوايا مقدارها 135° ، فيصل الماء إلى مسافة 5 m من المرش. أجد مساحة المنطقة التي سيرونها هذا المرش، مُقَرَّبًا إجابتي إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.



تمثل المنطقة التي سيروها المرش قطاعاً دائرياً زاويته 135° ، وطول نصف قطره 5 m:

$$A = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$$

$$= \frac{135^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 5^2$$

$$\approx 29.5$$

قانون مساحة القطاع

$$r = 5, \theta = 135^\circ$$

بتعويض

باستعمال الآلة الحاسبة

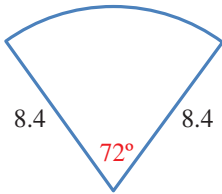
إذن، مساحة هذه المنطقة مُقَرَّبَةً إلى أقرب منزلة عشرية واحدة هي: 29.5 m^2

أتحقق من فهمي

طول عقرب الدقائق في ساعة حائط هو 15 cm. ما مساحة المنطقة التي يُعطيها العقرب في أثناء حركته من العدد 9 إلى العدد 2؟

أتدرب وأحل المسائل

يُمثل الشكل المجاور قطاعاً دائرياً:



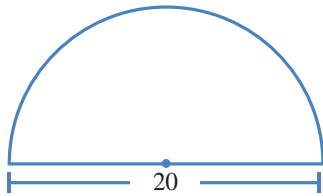
1 أُعبر بكسرٍ عن الجزء الذي يُمثله هذا القطاع من الدائرة.

2 أجد طول القوس، مُقَرَّباً إجابتي إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.

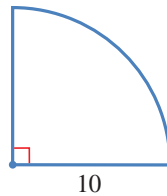
3 أجد مساحة القطاع، مُقَرَّباً إجابتي إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.

أجد طول القوس ومساحة القطاع في كلٍّ من الأشكال الآتية (أكتب الإجابة بدلالة π):

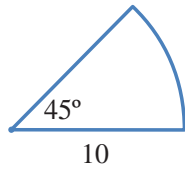
4



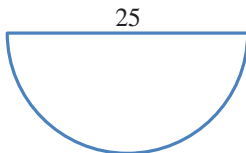
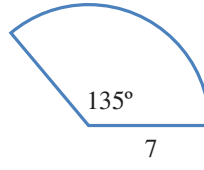
5



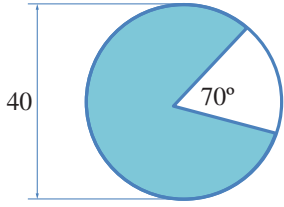
6



7

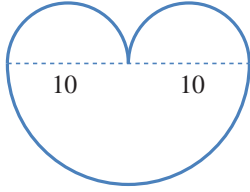


8 أجد مساحة نصف الدائرة المجاورة، ثم أجد محيطها.



9 أجد مساحة الجزء المُظلل في الشكل المجاور (أكتب الإجابة بدلالة π). أبرر إجابتي.

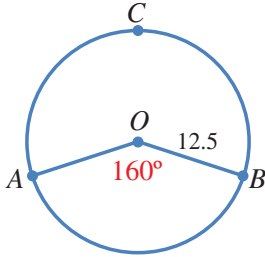
10 أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.



يُمثل الشكل المجاور 3 أنصاف دوائر:

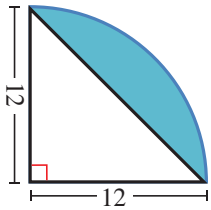
11 أجد محيط الشكل (أكتب الإجابة بدلالة π).

12 أجد مساحة الشكل (أكتب الإجابة بدلالة π).

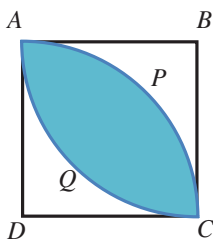


13 تُمثل النقطة O مركز دائرة، طول نصف قطرها 12.5 وحدة طول.

أجد طول القوس ACB.

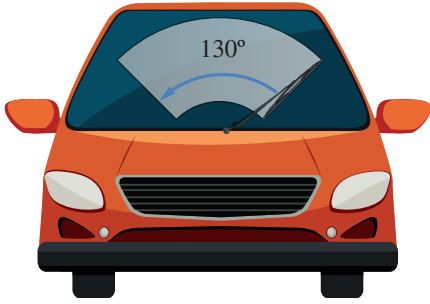


14 يُمثل الشكل المجاور ربع دائرة. أجد مساحة الجزء المُظلل في الشكل (أكتب الإجابة بدلالة π).



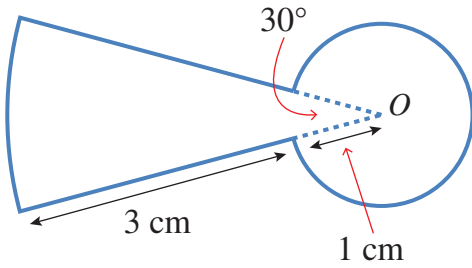
15 يُمثل الشكل المجاور المربع ABCD الذي طول ضلعه 8 cm، ويُمثل APC و AQC قوسين من دائرتين مركزاهما D و B على التوالي. أجد مساحة الجزء المُظلل (أكتب الإجابة بدلالة π).

16 صمّم مهندس مرش مياه لري منطقة مساحتها 100 m^2 على هيئة قطاع دائري طول نصف قطره 15 m. ما زاوية دوران هذا المرش؟



- 17 سيارات: يُبين الشكل المجاور مساحة الزجاج الأمامي لسيارة. إذا كان طول شفرة الماسحة 40 cm، وطول شفرة الماسحة مع ذراعها 66 cm، فما مساحة الزجاج التي تُنظفها الماسحة، مُقربةً إلى أقرب منزلة عشرية واحدة؟

مهارات التفكير العليا

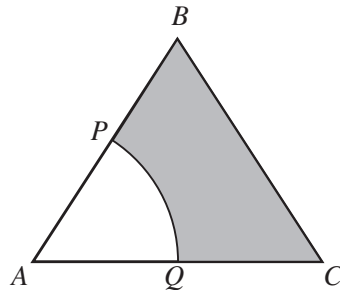


- 18 تحدّ: أجد محيط الشكل المجاور ومساحته.



- 19 تحدّ: اشترى سعيد فطيرة بيتزا دائرية الشكل طول قطرها 36 cm، ثم قسّمها إلى قطع متساوية. بعد ذلك أكل منها قطعتين تُمثّلان معاً 180 cm^2 منها. أجد قياس الزاوية لقطعة البيتزا الواحدة، مُقرباً إجابتي إلى أقرب عدد كليّ.

- 20 تحدّ: يُمثّل الشكل المجاور مثلثاً مُتطابق الأضلاع، طول ضلعه 6 cm. إذا كانت النقطتان P و Q تُنصّفان الضلعين AB و AC على التوالي، وكان APQ قطاعاً دائرياً من دائرة مركزها A، فأجد مساحة الجزء المُظلل.



الزوايا في الدائرة Angles in a Circle

معرفة العلاقات بين الزوايا في الدائرة، وتوظيفها في إيجاد زوايا مجهولة وحل مسائل حياتية.

فكرة الدرس



الزاوية المركزية، الزاوية المحيطية، القوس المقابل، الزاوية المُقابلَة لقطر الدائرة، الرباعي الدائري، الزاوية المماسية.

المصطلحات

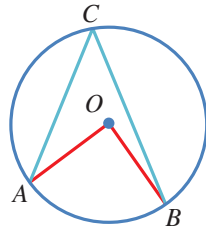


يُمثل الشكل المجاور تصميمًا مُكوّنًا من نجمة خماسية منتظمة محاطة بدائرة يحيط بها مربع. ماذا تُسمى الزوايا عند رؤوس النجمة؟ كيف نجد قياس كل منها؟

مسألة اليوم



تُسمى الزاوية التي يكون رأسها في مركز الدائرة، وضلعاها نصفي قطرين للدائرة زاوية مركزية (central angle). ففي الشكل الآتي، زاوية AOB مركزية في الدائرة التي مركزها O ، ويُسمى القوس \widehat{AB} القوس المقابل (subtended arc).



يُسمى \widehat{AB} القوس الأصغر، ويُسمى \widehat{ACB} القوس الأكبر.

تُسمى الزاوية التي يقع رأسها على الدائرة، ويكون ضلعاها وترين في الدائرة زاوية محيطية (inscribed angle). ففي الشكل السابق، الزاوية ACB محيطية، والزاوية AOB مركزية، وهما مرسومتان على القوس \widehat{AB} . وعند قياس هاتين الزاويتين سنجد أن قياس الزاوية المركزية AOB يساوي مثلي قياس الزاوية المحيطية ACB .

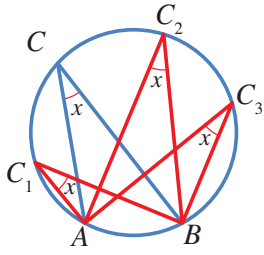
نظرية

قياس الزاوية المركزية يساوي مثلي قياس الزاوية المحيطية المرسومة على القوس نفسه:

$$m\angle AOB = 2m\angle ACB$$

أفكر

ما قياس الزاوية المحيطية المقابلة للقطر؟



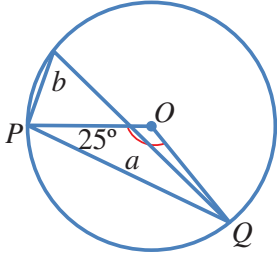
إذا رسمنا زوايا محيطيةً أخرى مُقابلةً للقوس AB سنجدُ أنّ لها القياس نفسه.

نظرية

جميع الزوايا المحيطية المرسومة على قوس واحد في دائرة لها القياس نفسه:

$$m\angle ACB = m\angle AC_1B = m\angle AC_2B = m\angle AC_3B$$

مثال 1



إذا كانت النقطة O هي مركز الدائرة في الشكل المجاور،

فما قياس الزاويتين المشار إليهما بالحرفين a و b ؟

المثلث OPQ مُتطابق الضلعين؛ لأن \overline{OP} و \overline{OQ} نصفاً قُطرين في الدائرة ومجموع قياسات زوايا المثلث هو 180° . إذن:

$$m\angle POQ + m\angle OQP + m\angle OPQ = 180^\circ$$

$$a + 25^\circ + 25^\circ = 180^\circ$$

$$a + 50^\circ = 180^\circ$$

$$a + 50^\circ - 50^\circ = 180^\circ - 50^\circ$$

$$a = 130^\circ$$

$$b = 130^\circ \div 2$$

$$= 65^\circ$$

في المثلث مُتطابق الضلعين تتطابق زاويتا القاعدة

بالتبسيط

ب طرح 50° من الطرفين

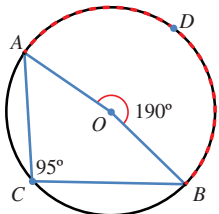
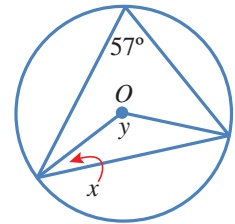
قياس الزاوية المركزية يساوي مثلي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه

أتذكر

زاويتا قاعدة المثلث مُتطابق الضلعين متساويتان في القياس.

أتحقق من فهمي

إذا كانت النقطة O هي مركز الدائرة في الشكل المجاور، فما قيمة كل من x و y ؟

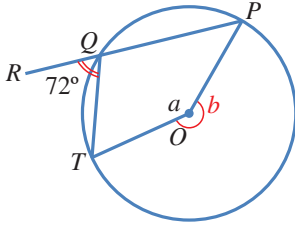


قد يكون قياس الزاوية المركزية أكبر من 180° . ففي الشكل

المجاور، الزاوية AOB مُقابلةً للقوس ADB ، وقياسها 190° ، وهو

ضعف قياس الزاوية المحيطية ACB .

مثال 2



إذا كانت النقطة O هي مركز الدائرة في الشكل المجاور، والنقاط P, Q, R على استقامة واحدة، فما قياس الزاوية a ؟

الزاويتان PQT, RQT تُشكّلان زاويةً مستقيمةً

مجموع قياسات الزوايا حول نقطة هو 360°

قياس الزاوية المركزية يساوي مثلي قياس الزاوية المحيطية المرسومة على القوس نفسه

بتعويض قيمة b

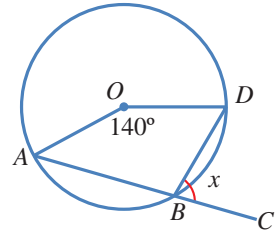
ب طرح 216° من الطرفين

$$a + 216^\circ = 360^\circ$$

$$a = 360^\circ - 216^\circ = 144^\circ$$

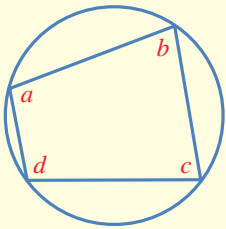
أتحقق من فهمي

إذا كانت النقطة O هي مركز الدائرة في الشكل المجاور، والنقاط A, B, C على استقامة واحدة، فما قيمة x ؟



إذا وقعت رؤوس مُضلعٍ رباعيٍّ على دائرة، فإنه يُسمى رابعياً دائرياً (cyclic quadrilateral). وإذا حسبنا مجموع قياسي كل زاويتين متقابلتين فيه، فإنه يكون 180° .

نظرية



مجموع قياسي كل زاويتين متقابلتين في المضلع الرباعي الدائري هو 180° :

$$b + d = 180^\circ, a + c = 180^\circ$$

مثال 3

إذا كانت النقطة O هي مركز الدائرة في الشكل المجاور، فما قيمة كل من x و y ؟

$$m\angle ACO = 43^\circ$$

$$y + m\angle ACO = 90^\circ$$

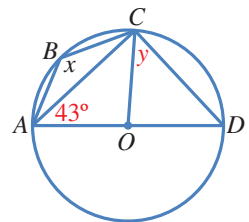
$$y + 43^\circ = 90^\circ$$

المثلث ACO متطابق الضلعين

الزاوية ACD محيطيةٌ مشتركةٌ مع الزاوية

المركزية AOD بالقوس نفسه

بالتعويض



أذكر

- قياس الزاوية المستقيمة هو 180° .
- مجموع قياسات الزوايا حول نقطة هو 360° .

$$y = 90^\circ - 43^\circ$$

$$= 47^\circ$$

$$x + m\angle ADC = 180^\circ$$

$$m\angle ADC = y = 47^\circ$$

$$x + 47^\circ = 180^\circ$$

$$x = 180^\circ - 47^\circ$$

$$= 133^\circ$$

بطرح 43° من الطرفين

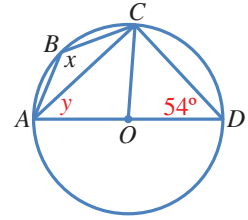
الشكل $ABCD$ رباعيٌّ دائريٌّ
المثلث OCD مُتطابقُ الضلعين

بتعويض قيمة y

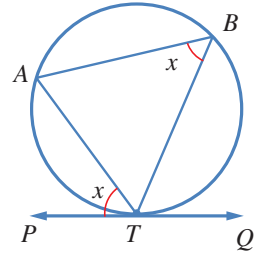
بطرح 47° من الطرفين

أتحقق من فهمي

إذا كانت النقطة O هي مركز الدائرة في الشكل المجاور، فما قيمة كل من x و y ؟



في الشكل المجاور، \overleftrightarrow{PQ} هو مماسٌ للدائرة عند النقطة T ، و \overline{TA} هو وترٌ للدائرة. تُسمى الزاوية المحصورة بين المماس والوتر المارّ بنقطة التماس الزاوية المماسية (angle between a tangent and a chord). وهذه الزاوية تحصرُ القوس \widehat{TA} ، ويُمكن ملاحظة أن قياس الزاوية المماسية PTA يساوي قياس الزاوية المحيطية المرسومة على القوس \widehat{TA} نفسه.



نظرية

قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس:

$$m\angle ATP = m\angle ABT$$

مثال 4

في الشكل المجاور، \overleftrightarrow{AB} مماسٌ للدائرة في T . أجد قياس كل من الزاويتين ATS و TSR .

$$m\angle ATS = m\angle TRS = 80^\circ$$

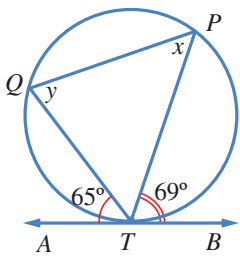
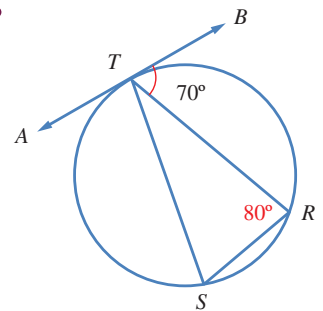
$$m\angle TSR = m\angle BTR = 70^\circ$$

زاويتان (مماسية، ومحيطية) مشتركتان في القوس

زاويتان (مماسية، ومحيطية) مشتركتان في القوس

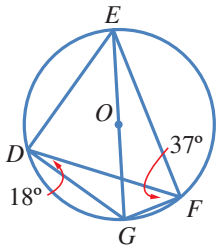
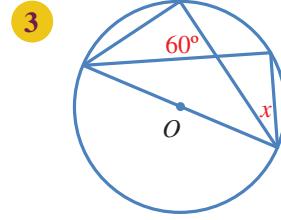
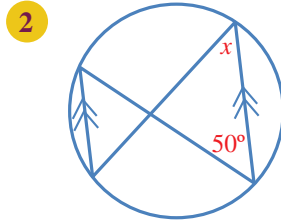
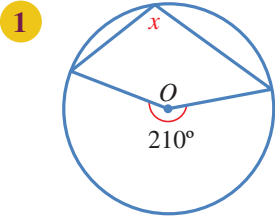
أتحقق من فهمي

في الشكل المجاور، \overleftrightarrow{AB} مماسٌ للدائرة في T . أجد قياس كل من الزاوية TQP ، و TPQ ، و QTP .





أجد قيمة x في كلِّ ممَّا يأتي:



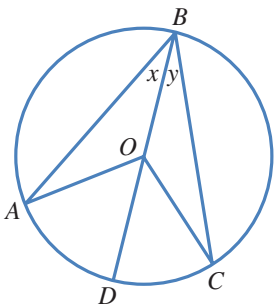
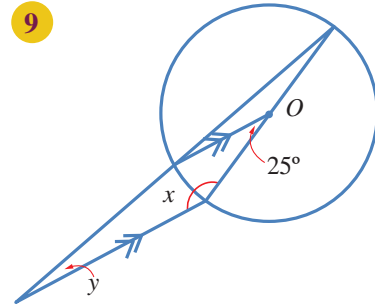
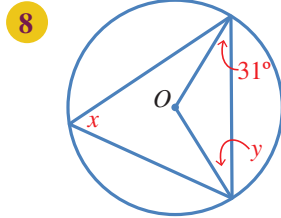
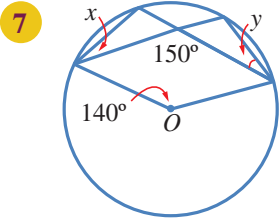
إذا كانتِ النقطة O هي مركز الدائرة في الشكلِ المجاورِ، فأجدُ كلاً ممَّا يأتي:

4 $m\angle EGF$.

5 $m\angle DEG$.

6 $m\angle EDF$.

إذا كانتِ النقطة O هي مركز الدائرة، فأجدُ قياسَ الزوايا المشارِ إليها بالحرفينِ x و y في كلِّ من الدوائر الآتية:



في الشكلِ المجاورِ دائرةٌ مركزُها O ، وقياسُ الزاويةِ ABO هو x° ،

وقياسُ الزاويةِ CBO هو y° :

10 أجدُ قياسَ الزاويةِ BAO .

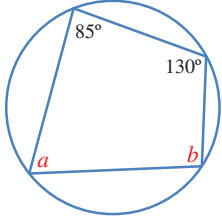
11 أجدُ قياسَ الزاويةِ AOD .

12 أثبتُ أنَّ قياسَ الزاويةِ المركزيةِ يساوي مثليَّ قياسِ

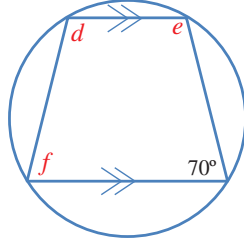
الزاويةِ المحيطةِ المرسومةِ على القوسِ نفسه.

أَجِدْ قِيَاسَ الزوايا المشار إليها بأحرفٍ في كلِّ من الدوائر الآتية:

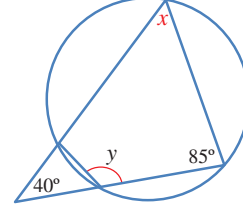
13



14



15

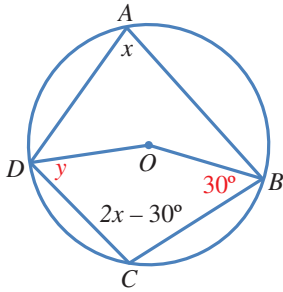


في الشكل الرباعيِّ الدائريِّ $PQRT$ ، قياسُ الزاويةِ ROQ هو 38° ، حيثُ O مركزُ الدائرة، و POT قُطْرٌ فيها يوازي QR . أجدُ قياسَ كلِّ من الزوايا الآتية:

16 ROT .

17 QRT .

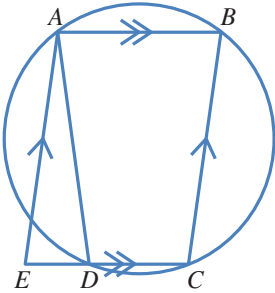
18 QPT .



يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ دائرةً مركزها O :

19 لماذا $3x - 30^\circ = 180^\circ$ ؟

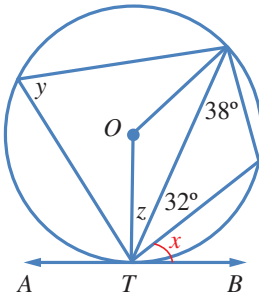
20 أجدُ قياسَ الزاويةِ CDO المشار إليها بالحرفِ y ، مُبرِّراً كلَّ خطوةٍ في حلِّي.



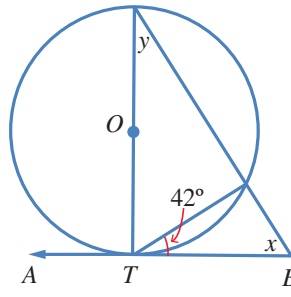
21 يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ $ABCE$ متوازي أضلاع. أُبينُ أنَّ قياسَ الزاويةِ AED يساوي قياسَ الزاويةِ ADE ، مُبرِّراً كلَّ خطوةٍ في حلِّي.

أَجِدْ قِيَاسَ الزوايا المشار إليها بأحرفٍ في كلِّ من الدوائر الآتية:

22

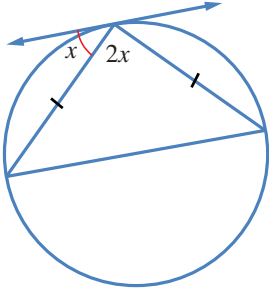


23

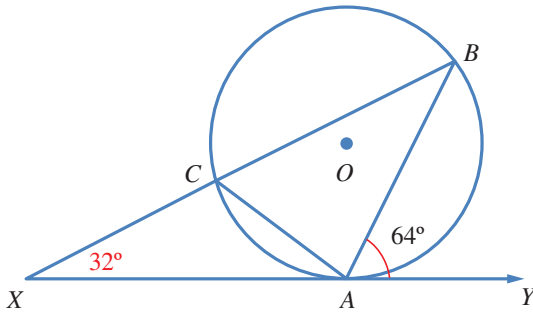
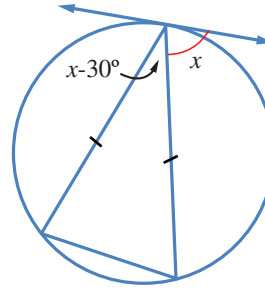


أجد قيمة x في كل من الشكلين الآتيين:

24



25

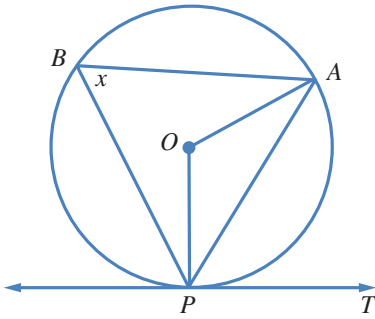


26 تُمثّل النقطة O مركز الدائرة في الشكل الآتي، ويمثّل \overleftrightarrow{XY} مماسًا للدائرة عند A . إذا كانت النقاط B و C و X تُمثّل خطًا على استقامة واحدة، فأثبت أن المثلث ACX مُتطابق الضلعين، مُبرّرًا إجابتي.

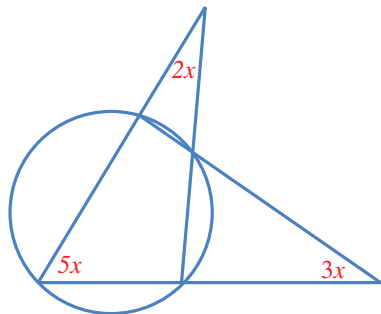
مهارات التفكير العليا



27 تبرير: قالت فاتن إن الزاوية المحيطة المرسومة على قُطر الدائرة زاوية قائمة. هل قول فاتن صحيح؟ أبرّر إجابتي.



28 تبرير: في الشكل المجاور، \overleftrightarrow{PT} مماسٌ لدائرة مركزها O . إذا كان قياس الزاوية PBA هو x° ، فأثبت أن قياس الزاوية APT يساوي قياس الزاوية ABP ، مُبرّرًا خطوات الحل.



29 تحدّد: أجد قيمة x في الشكل المجاور.

معادلة الدائرة Equation of a Circle



كتابة معادلة الدائرة، وإيجاد المركز ونصف القطر من معادلة دائرة معلومة.
معادلة الدائرة، الصورة القياسية، الصورة العامة.

فكرة الدرس



المصطلحات

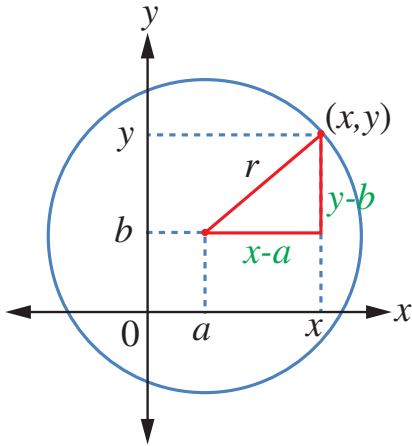


مسألة اليوم



تمثل النقطة $(7, 4)$ موقع محطة إذاعة يلتقط بثها في دائرة نصف قطرها 224 km. إذا كان فواز يقيم في بيت تمثله النقطة $(-75, 95)$ على مستوى إحداثي وحدته 1 km، فكيف يستطيع معرفة إن كان بث هذه الإذاعة يصل بيته أم لا؟

معادلة الدائرة (equation of the circle) هي العلاقة التي تربط بين الإحداثي x والإحداثي y لكل نقطة واقعة على الدائرة. فإذا عوّض إحداثيا نقطة في المعادلة، وكانت النتيجة عبارة صحيحة، فهذا يعني أن تلك النقطة تقع على الدائرة.



يُمثل الشكل المجاور دائرة مركزها النقطة (a, b) ، وطول نصف قطرها r . والنقطة (x, y) تقع على الدائرة. ألاحظ أنه يمكن تكوين المثلث قائم الزاوية الذي طول ضلعه الأفقي $(x - a)$ ، وطول ضلعه الرأسي $(y - b)$ ، وطول وتره r . وبتطبيق نظرية فيثاغورس تنتج المعادلة $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ التي تُسمى **الصورة القياسية** (standard form) لمعادلة الدائرة.

مفهوم أساسي

1 الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها النقطة (a, b) ، وطول نصف قطرها r هي: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

2 معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل $(0, 0)$ ، وطول نصف قطرها r هي: $x^2 + y^2 = r^2$

مثال 1

أكتب معادلة الدائرة في كلِّ من الحالات الآتية:

1 المركز هو النقطة $(-2, 7)$ ، وطول نصف القطر 6 وحدات.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad \text{الصورة القياسية لمعادلة الدائرة}$$

$$(x - (-2))^2 + (y - 7)^2 = 6^2 \quad (a, b) = (-2, 7), r = 6$$

$$(x + 2)^2 + (y - 7)^2 = 36$$

2 المركز هو نقطة الأصل، وطول نصف القطر 5 وحدات.

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل}$$

$$x^2 + y^2 = 5^2 \quad \text{بتعويض } r = 5$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

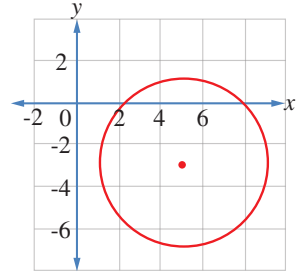
3 الدائرة المرسومة في المستوى الإحداثي المجاور.

عند النظر إلى الدائرة يتبين أن مركزها النقطة $(5, -3)$ ، وأن طول نصف قطرها 4 وحدات.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad \text{الصورة القياسية لمعادلة الدائرة}$$

$$(x - 5)^2 + (y - (-3))^2 = 4^2 \quad (a, b) = (5, -3), r = 4$$

$$(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 16$$



أتحقق من فهمي

أكتب معادلة الدائرة في الحالتين الآتيتين:

(a) المركز هو النقطة $(0, 4)$ ، وطول نصف القطر 9 وحدات.

(b) المركز هو نقطة الأصل، وطول القطر 8 وحدات.

إذا علم مركز الدائرة ونقطة واقعة عليها، فإنه يمكن إيجاد طول نصف القطر باستعمال قانون المسافة بين نقطتين، ثم كتابة معادلة الدائرة.

مراجعة المفهوم

إذا كان طول القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ ، هو d فإن:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

مثال 2

أجد معادلة الدائرة التي مركزها النقطة $(-7, 13)$ ، وتمرُّ بالنقطة $(5, 4)$.
أجد طول نصف القطر باستعمال قانون المسافة بين نقطتين:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad \text{قانون المسافة بين نقطتين}$$

$$r^2 = (5 - (-7))^2 + (4 - 13)^2 \quad \text{بالتعويض}$$

$$= 144 + 81 \quad \text{بالتبسيط}$$

$$= 225$$

$$r = \sqrt{225} = 15 \quad \text{بأخذ الجذر التربيعي}$$

والآن، أعرِّض إحداثيي المركز وقيمة r^2 في الصورة القياسية لمعادلة الدائرة، فأجد أن معادلة هذه الدائرة هي:

$$(x + 7)^2 + (y - 13)^2 = 225$$

أتحقق من فهمي

أجد معادلة الدائرة التي مركزها النقطة $(4, -3)$ ، وتمرُّ بالنقطة $(2, 0)$.

إذا علمنا معادلة دائرة بالصورة القياسية $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ، حيث $r > 0$ فإنه يمكن فك الأضراس وإعادة الترتيب، فنتج المعادلة: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$.
يمكن أيضًا كتابة هذه المعادلة بالصورة الآتية:

$$x^2 + y^2 + 2fx + 2gy + c = 0$$

حيث: $f = -a, g = -b, c = a^2 + b^2 - r^2$ ، وهي تُسمى **الصورة العامة** (general form) لمعادلة الدائرة.

إذا علمنا الصورة العامة لمعادلة أي دائرة، فإنه يمكن تحويلها إلى الصورة القياسية $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ، وذلك بإكمال المربع.

مراجعة المفهوم

لإكمال المربع للحدين $x^2 + ax$ ، يضاف $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ ، ثم يُطرح، فينتج مربع كامل هو

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

مثال 3

أجد إحداثيات المركز، وطول نصف القطر للدائرة $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 56 = 0$.
 بإكمال المربع للحدود التي تحوي x ينتج: $x^2 - 8x = (x-4)^2 - 16$ ، وإكمال المربع
 للحدود التي تحوي y ينتج: $y^2 + 6y = (y+3)^2 - 9$.
 وبذلك يُمكن تحويل المعادلة $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 56 = 0$ إلى:
 $(x-4)^2 - 16 + (y+3)^2 - 9 - 56 = 0$
 $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 81$
 بمقارنة هذه المعادلة بالصورة القياسية $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ ، نجد أن:
 $a = 4, b = -3, r = 9$
 إذن، مركز هذه الدائرة هو النقطة $(4, -3)$ ، وطول نصف قطرها 9 وحدات.

أتحقق من فهمي

أجد إحداثيات المركز، وطول نصف القطر للدائرة $x^2 + y^2 + 2x - 10y - 10 = 0$.

تعلمت في درس سابق أن مماس الدائرة يشترك مع الدائرة في نقطة واحدة فقط، وأنه يتعامد مع نصف القطر المار بنقطة التماس. وهذا يفيد في التحقق من أن مستقيماً معطى هو مماس لدائرة معطاة، وحساب طول قطعة مماسية كما في المثالين الآتيين.

مثال 4

أجد طول المماس المرسوم من النقطة $P(6, -6)$ ، الذي يمس الدائرة التي معادلتها

$$(x+5)^2 + (y-4)^2 = 25$$

أرسم مُخطّطاً، ولتكن النقطة X مركز الدائرة، و T نقطة التماس.

لحساب طول المماس PT ، ثم أطبق نظرية فيثاغورس على المثلث القائم XTP ، الذي يُمكن إيجاد طولَي ضلعيّ فيه، هما: نصف القطر XT ، والوتر XP .

طول نصف القطر XT هو 5. ولحساب XP ، أجد المسافة بين مركز الدائرة $X(-5, 4)$

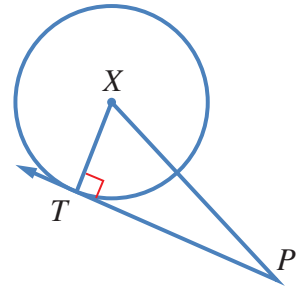
والنقطة $P(6, -6)$ باستعمال قانون المسافة بين نقطتين:

$$(XP)^2 = (6 - (-5))^2 + (-6 - 4)^2 = (11)^2 + (-10)^2 = 221$$

وبتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث XTP :

$$(PT)^2 = (XP)^2 - (XT)^2$$

نظرية فيثاغورس



$$= 221 - 25$$

$$= 196$$

$$PT = \sqrt{196} = 14$$

بالتعويض

بالتبسيط

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

إذن، طول المماس 14 وحدة.

أتحقق من فهمي

أجد طول المماس المرسوم من النقطة $P(7, 4)$ ، الذي يمس الدائرة التي معادلتها $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 81$.

مثال 5

أثبت أن المستقيم $y = 2x + 3$ هو مماس للدائرة التي معادلتها $(x - 10)^2 + (y - 8)^2 = 45$ ؛ لإيجاد عدد نقاط تقاطع المستقيم والدائرة. فإذا كان عدد نقاط التقاطع واحدًا فقط، فإن المستقيم يكون مماسًا للدائرة.

بتعويض $y = 2x + 3$ في معادلة الدائرة $(x - 10)^2 + (2x + 3 - 8)^2 = 45$

$$(x - 10)^2 + (2x - 5)^2 = 45$$

بالتبسيط

$$x^2 - 20x + 100 + 4x^2 - 20x + 25 = 45$$

بنك الأقواس

$$5x^2 - 40x + 80 = 0$$

بجمع الحدود المتشابهة،

وجعل الطرف الأيمن صفرًا

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

بقسمة الطرفين على 5

$$(x - 4)^2 = 0$$

بالتحليل

$$x = 4$$

بتعويض قيمة x في إحدى المعادلتين لإيجاد قيمة y

$$y = 2(4) + 3 = 11$$

بما أن هذا المستقيم يقطع الدائرة في نقطة واحدة فقط هي $(4, 11)$ ، فإنه مماس للدائرة.

أتحقق من فهمي

أثبت أن المستقيم $y = 4x - 5$ هو مماس للدائرة التي معادلتها

$$(x + 5)^2 + (y - 9)^2 = 68$$



أكتب معادلة الدائرة في كل من الحالات الآتية:

1 المركز هو نقطة الأصل، وطول نصف قطرها 7 وحدات.

2 المركز هو النقطة $(-1, 3)$ ، وطول نصف قطرها 5 وحدات.

3 المركز هو النقطة $(-3, -2)$ ، وطول قطرها 10 وحدات.

أجد معادلة الدائرة المُعطى مركزها وإحداثيات نقطة تمرُّ بها في كل مما يأتي:

4 المركز $(-1, 2)$ ، وتمرُّ بالنقطة $(3, 5)$.

5 المركز نقطة الأصل، وتمرُّ بالنقطة $(-9, -4)$.

أجد إحداثيَّي المركز، وطول نصف القطر لكل من الدوائر الآتية:

6 $(x + 5)^2 + (y - 8)^2 = 36$

7 $(x - 19)^2 + (y - 33)^2 = 400$

8 $x^2 + (y + 4)^2 = 45$

9 $(x - 3)^2 + (y + 10)^2 = 28$

أجد إحداثيَّي المركز، وطول نصف القطر لكل من الدوائر الآتية:

10 $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0$

11 $x^2 + y^2 + 8x = 9$

12 $2x^2 + 2y^2 + 20x + 36y + 158 = 0$

13 $x^2 + y^2 - 18x + 14y = 14$

أكتب معادلة الدائرة بالصورتين: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ، $x^2 + y^2 + 2fx + 2gy + c = 0$ ، حيث: f ، g ، و c

أعداد صحيحة في الحالات الآتية:

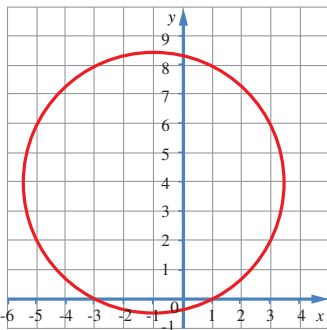
14 المركز $(-11, -1)$ ، وطول القطر 26 وحدة.

15 المركز $(3, 0)$ ، وطول نصف القطر $4\sqrt{3}$ وحدات.

16 المركز $(-4, 7)$ ، وتمرُّ بالنقطة $(1, 3)$.

17 أجد معادلة الدائرة المُبيَّنة في الرسم البياني المجاور.

18 أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.



- 19 أجد إحداثيَّي المركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها: $(2x-4)^2 + (2y+6)^2 = 100$.
- 20 دائرة معادلتها $x^2 + y^2 + px + 6y = 96$ ، وطول نصف قطرها 11 وحدة، و p عدد ثابت موجب. أجد بُعد مركز الدائرة عن نقطة الأصل.

تمثل النقطتان $D(2, 9)$ و $E(14, -7)$ نهايتي قطر لدائرة مركزها C :

- 21 أجد إحداثيَّي المركز C .
- 22 أجد طول نصف القطر.
- 23 أكتب معادلة الدائرة.
- 24 أثبت أن المستقيم $y = 3x - 2$ هو مماس للدائرة التي معادلتها: $x^2 + y^2 + 4x - 24y + 108 = 0$.
- 25 رُسم مماس من النقطة $P(8, 5)$ للدائرة التي معادلتها: $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 75 = 0$. أجد طول القطعة المستقيمة التي تصل النقطة P بنقطة التماس.

مهارات التفكير العليا



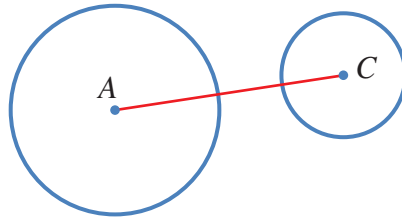
- 26 **تبرير:** قال عبد الرحمن إن $x^2 + y^2 - 14x + 6y + 59 = 0$ ليست معادلة دائرة. هل قول عبد الرحمن صحيح؟ أبرر إجابتي.
- 27 **تحذ:** ممر دائري محصور بين دائرتين لهما المركز نفسه، وهو النقطة $(7, 3)$. إذا كانت الدائرة الكبرى تمس المحور y ، والصغرى تمس المحور x ، فأكتب معادلتَي الدائرتين اللتين تُشكِّلان المحيطَ الخارجيَّ والمحيطَ الداخليَّ للممرِّ، ثم أجد مساحة الممرِّ بالوحدات المربَّعة.
- 28 **تحذ:** رُسم من النقطة $A(8, 21)$ مماسان للدائرة التي مركزها C ، فمساها عند النقطتين D ، و B . إذا كانت معادلة الدائرة هي $(x-9)^2 + (y+4)^2 = 49$ ، فما مساحة الشكل الرباعي $ABCD$ ؟
- 29 **تحذ:** أكتب الصورة القياسية لمعادلة الدائرة $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 24 = 0$ من دون استعمال طريقة إكمال المربع.

استكشاف الدوائر المتماسّة Exploring Tangent Circles

يُمكنني استعمال برمجية جيوجبرا (GeoGebra) لرسم دائرتين، أنصاف أقطارهما مُحدّدة، وإيجاد البُعد بين مركزيهما.

أرسم الشكل الآتي باستعمال برمجية جيوجبرا، ثمّ أجد AC .


نشاط 1



الخطوة 1: أختار أيقونة  من شريط الأدوات.

الخطوة 2: أنقر زرّ الفأرة الأيسر مع السحب لرسم دائرة مركزها A . ستظهر معادلة الدائرة بالصورة القياسية في شريط الإدخال، وسيظهر مركزها على شكل زوج مرتب.

الخطوة 3: أكرّر الخطوتين (1) و(2) لرسم دائرة مركزها C ، وإيجاد نصف قطرها.

الخطوة 4: لأجد البُعد بين مركز كلّ من الدائرتين، أختار  من شريط الأدوات، ثمّ أنقر على المركز A ، ثمّ المركز C ، وأقرأ البُعد بين المركزين من شريط الإدخال.

يُمكن استعمال برمجية جيوجبرا لاستكشاف العلاقة بين نصفي قطري الدائرتين، وموقع كلّ منهما بالنسبة إلى الأخرى.

نشاط 2

1 أرسم كلاً من الدوائر المُبيّنة في الجدول الآتي باستعمال برمجية جيوجبرا.

2 إذا كان طول نصف قطر الدائرة الكبيرة r_1 ، وطول نصف قطر الدائرة الصغيرة r_2 ، فأستعمل برمجية جيوجبرا لأكمل الجدول الآتي.

3 أقرن بين قيم $r_2 + r_1$ ، و $r_2 - r_1$ و AC ، ثم أستنتج العلاقة بينها وبين وضع الدائرتين بالنسبة إلى بعضهما.

الاستنتاج	$r_1 + r_2$	$r_1 - r_2$	AC	r_2	r_1	وضع الدائرتين

أدرب



أحدّد وضع الدائرتين بالنسبة إلى بعضهما في كلٍّ من الحالات الآتية دون رسميهما:

1 $r_1 = 9, r_2 = 5, AC = 3$

2 $r_1 = 11, r_2 = 5, AC = 6$

3 $r_1 = 6, r_2 = 3, AC = 17$

4 $r_1 = 8, r_2 = 5, AC = 3$

الدوائر المتماسّة Tangent Circles

استنتاج العلاقة بين دائرتين، وتعرّف المماسّات المشتركة، وتوظيف ذلك في حلّ مسائل حياتية.
الدائرتان المتماستان، المماسّ المشترك الخارجي، المماسّ المشترك الداخلي.

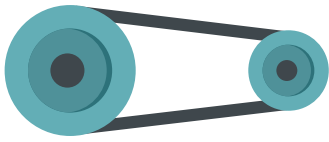
فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم



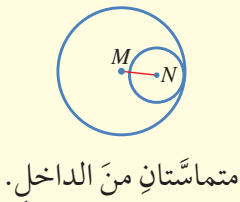
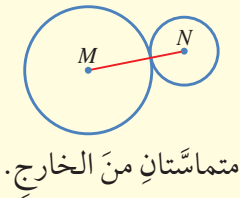
يدور حزام مطاطي حول بكرتين دائريتين، طول نصفي قطريهما 8 cm و 3 cm على التوالي. إذا كان طول الحزام بين نقطتي التماسّ مع البكرتين 25 cm، فما المسافة بين مركزي البكرتين؟

يمكن أن تتقاطع الدائرتان المرسومتان في مستوى واحد في نقطة واحدة، أو نقطتين، وقد لا تتقاطعان أبداً. وتسمى الدائرتان المتقاطعتان في نقطة واحدة فقط **دائرتين متماستين** (tangent circles).

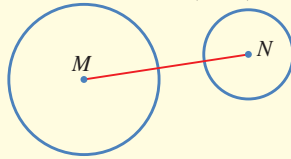
مفهوم أساسي

إذا رسمت دائرتان في مستوى واحد، فإن وضعهما بالنسبة إلى بعضهما ينحصر في الحالات الآتية:

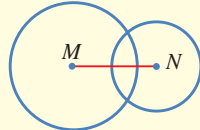
4 مُشتركتان في نقطة واحدة؛ أي إنهما متماستان. ولهذا الوضع صورتان:



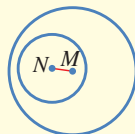
1 مُبتاعدتان.



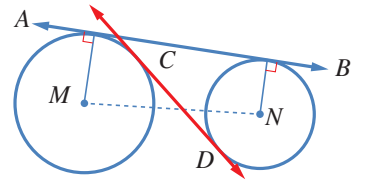
2 مُتقاطعتان في نقطتين.



3 إحداهما داخل الأخرى.



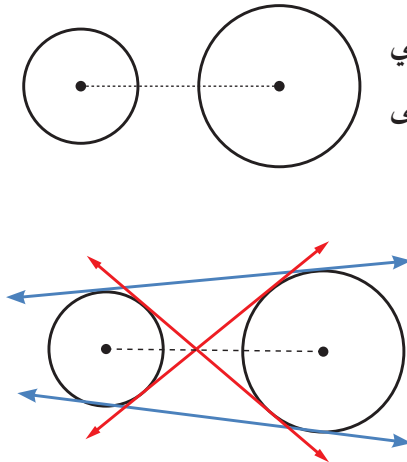
إذا كان المستقيم مماسًا لكل من دائرتين، فإنه يُسمى **مماسًا مشتركًا** (common tangent).
 وإذا قطع المماس المشترك القطعة المستقيمة الواصلة بين مركزي الدائرتين، فإنه يُسمى **المماس المشترك الداخلي** (common internal tangent)، وإلا فإنه يُسمى **المماس المشترك الخارجي** (common external tangent). ففي الشكل المجاور، \overleftrightarrow{AB} مماس مشترك خارجي، و \overleftrightarrow{CD} مماس مشترك داخلي.



يُمكن رسم مماس واحد فقط للدائرة عند نقطة عليها، ويُمكن أيضًا رسم مماسين للدائرة من نقطة خارجها، فما عدد المماسات المشتركة التي يُمكن رسمها للدائرتين؟ تعتمد إجابه هذا السؤال على وضع الدائرتين بالنسبة إلى بعضهما.

مثال 1

كم مماسًا مشتركًا يُمكن رسمه للدائرتين في الشكل الآتي؟ أرسُم المماسات، ثم أصنّفها إلى خارجية وداخلية.

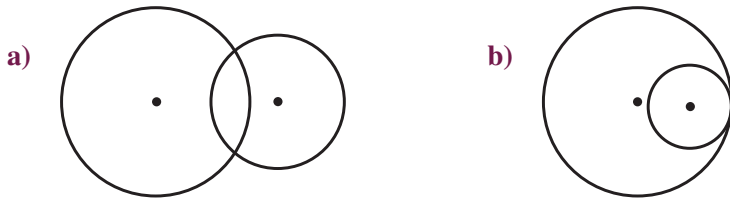


أرسُم القطعة المستقيمة الواصلة بين مركزي الدائرتين، ثم أرسُم المماسات التي تقطعها بلون أحمر، والمماسات التي لا تقطعها بلون أزرق.

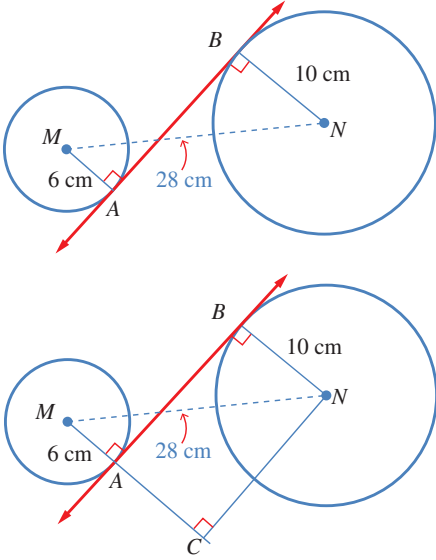
ألاحظ أنه يوجد للدائرتين مماسان داخليان، وآخران خارجيان.

أتتحقق من فهمي

كم مماسًا مشتركًا يُمكن رسمه للدائرتين في الشكل الآتي؟ أرسُم المماسات، ثم أصنّفها إلى خارجية وداخلية.



يُمكنُ حسابُ طولِ المماسِّ المشتركِ (المسافةُ بينَ نقطتي التماسِّ على الدائرتين) بطريقةٍ مُماثلةٍ لحسابِ طولِ المماسِّ المرسومِ منَ نقطةٍ خارجِ الدائرةِ إلى نقطةٍ عليها.



مثال 2

أجدُ طولَ \overline{AB} في الشكلِ المجاورِ.

أفكر

هل يُمكنُ إيجادُ طولِ \overline{AB} باستعمالِ تشابهِ المثلثاتِ أيضًا؟

$$m\angle NBA = m\angle BAC = 90^\circ$$

المماسُّ عموديٌّ على نصفِ

القُطرِ المارِّ بنقطةِ التماسِّ

$$m\angle ACN = 90^\circ$$

\overline{NC} عموديٌّ على \overline{MA}

$$m\angle BNC = 90^\circ$$

مجموعُ قياساتِ زوايا الشكلِ الرباعيِّ 360°

إذن، الشكلُ الرباعيُّ $ACNB$ مستطيلٌ؛ لأنَّ زواياه الأربعةَ قوائمٌ.

$$AB = NC$$

ضلعانِ مُتقابلانِ في المستطيلِ

والآن، أُطبِّقُ نظريةَ فيثاغورس على المثلثِ قائمِ الزاويةِ MCN لأجدُ CN :

$$(CN)^2 = (MN)^2 - (MC)^2$$

نظريةَ فيثاغورس

$$= 28^2 - (6 + 10)^2$$

بالتعويضِ

$$(CN)^2 = 784 - 256 = 528$$

بالتبسيطِ

$$CN = \sqrt{528} \approx 23$$

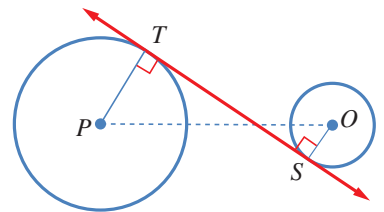
بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفينِ

$$AB = CN \approx 23 \text{ cm}$$

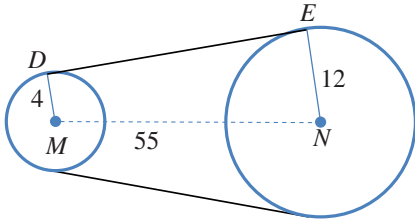
أتحقق من فهمي

أجدُ طولَ المماسِّ المشتركِ \overline{ST} في الشكلِ المجاورِ، علمًا بأنَّ:

$$PT = 12 \text{ cm}, OS = 4 \text{ cm}, PO = 34 \text{ cm}$$



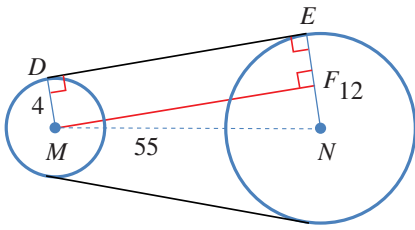
مثال 3: من الحياة



درّاجات: تلتف في درّاجة هوائية سلسلة معدنية على عجلتين مُسنّتين دائريتين، نصف قطر الصغرى 4 cm، ونصف قطر الكبرى 12 cm، والمسافة بين مركزيهما 55 cm. أجد طول السلسلة بين نقطتي تماسها مع المُسنّتين.



لركوب الدراجة الهوائية فوائد صحية وبيئية كثيرة، منها: تقوية عضلات الجسم، والتقليل من التلوث الناجم عن استعمال وسائل النقل التقليدية.



المطلوب هو حساب طول \overline{DE} .

أرسم من M عموداً على \overline{NE} ، ثمّ أسمي نقطة تقاطعه معها F كما في الشكل المجاور.

$$m \angle NED = m \angle MDE = 90^\circ$$

$$m \angle MFE = 90^\circ$$

$$m \angle DMF = 90^\circ$$

المماس يتعامد مع نصف

القطر المار بنقطة التماس

\overline{MF} عمودي على \overline{NE}

مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي 360°

إذن، الشكل الرباعي $MDEF$ مستطيل؛ لأن زواياه الأربع قوائم.

والآن، أطبق نظرية فيثاغورس على المثلث قائم الزاوية MFN لأجد طول \overline{MF} :

$$(MF)^2 = (MN)^2 - (FN)^2$$

$$= 55^2 - (12 - 4)^2$$

$$(MF)^2 = 3025 - 64 = 2961$$

$$MF = \sqrt{2961} = 54.4$$

$$DE = MF = 54.4 \text{ cm}$$

نظرية فيثاغورس

بالتعويض

بالتبسيط

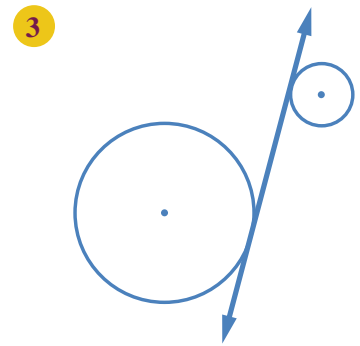
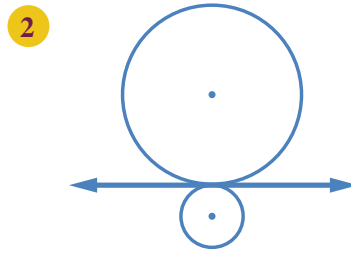
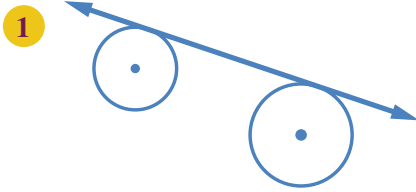
بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

أتحقق من فهمي

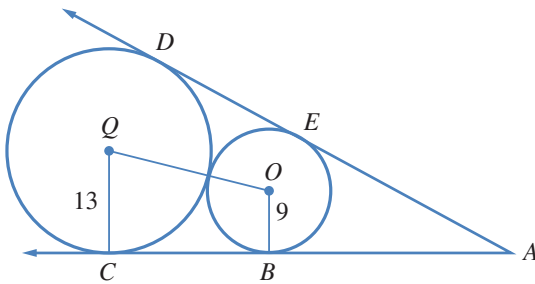
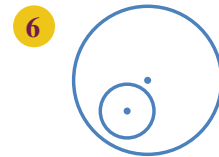
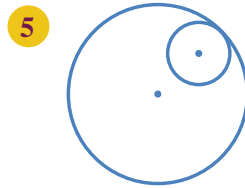
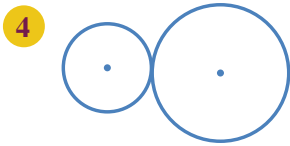
أجد طول نصف قطر العجلة المُسنّنة الكبرى في درّاجة، علماً بأن طول السلسلة بين نقطتي تماسها مع المُسنّتين 40 cm، وطول نصف قطر العجلة المُسنّنة الصغرى 5 cm، والمسافة بين مركزي العجلتين المُسنّتين 41 cm.



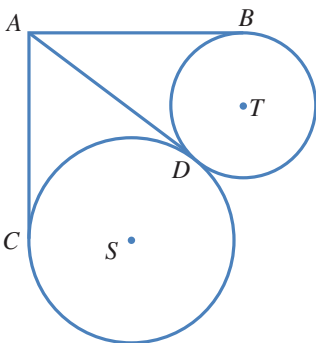
أُحدِّد إذا كان المماس داخلياً أم خارجياً في كلِّ ممّا يأتي:



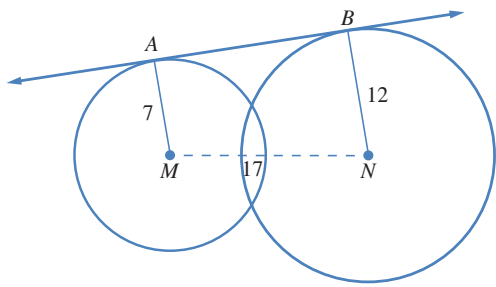
كم مماساً مشتركاً يُمكن رسمه لكلِّ من أزواج الدوائر الآتية؟ أرسّمها، ثمَّ أصنّفها إلى خارجية وداخلية.



7 يُبين الشكل المجاور مماسين من النقطة A لدائرتين متماسّتين من الخارج. أجد طول \overline{CB} باستعمال القياسات المُبيّنة في الشكل.



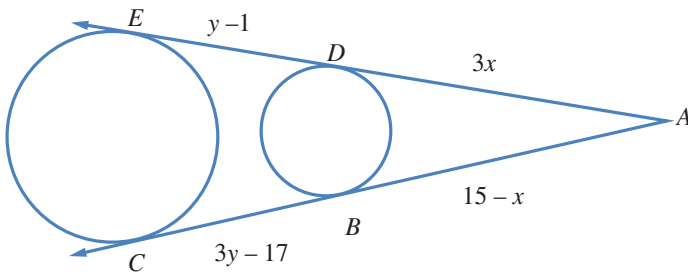
8 يُبين الشكل المجاور دائرتين متماسّتين من الخارج، والمماسات \overline{AB} و \overline{AC} ، و \overline{AD} . إذا كان $AC = 2x + 5$ و $AB = 3x - 2$ ، فما قيمة x ؟



9 أجد طول \overline{AB} باستعمال القياسات المبيّنة في الشكل المجاور.

10 **حزام ناقل:** يمرّ حزام حول دولابين دائريين، نصف قطر الصغير منهما 15 cm، ونصف قطر الكبير 25 cm. إذا كان طول الحزام بين نقطتي التماس مع الدولابين 2 m، فما المسافة بين مركزي الدولابين؟

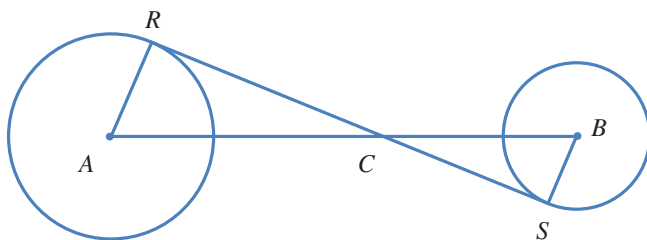
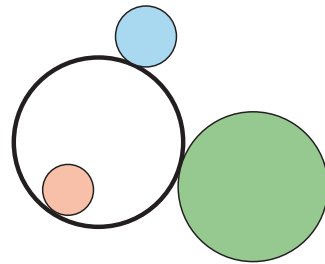
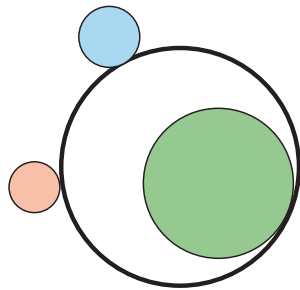
11 أجد وضع الدائرتين بالنسبة إلى بعضهما إذا كانت معادلتاهما: $x^2 + y^2 = 25$ ، $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$.



12 أجد قيمة كل من x و y في الشكل المجاور.

مهارات التفكير العليا

13 **تحديد:** يُمثل الشكلان الآتيان طريقتين لرسم دائرة تلامس كلاً من الدائرة الزرقاء، والخضراء، والحمراء. أجد 6 طرائق أخرى لرسم هذه الدائرة.



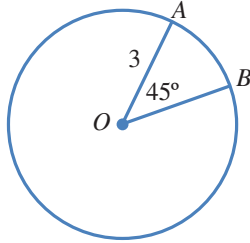
14 **برهان:** تُمثل \overline{RS} في الشكل المجاور مماساً

داخلياً مشتركاً لدائرتين مركزاهما A ، و B على

$$\frac{RC}{SC} = \frac{AC}{BC}.$$

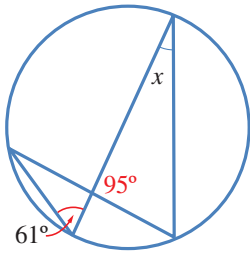
اختبار نهاية الوحدة

4 طول القوس الأصغر \widehat{AB} بدلالة π في الشكل الآتي هو:



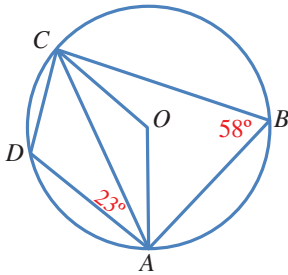
- a) $\frac{9\pi}{8}$ b) $\frac{3\pi}{2}$
c) $\frac{9\pi}{2}$ d) $\frac{3\pi}{4}$

5 قيمة x في الشكل الآتي هي:



- a) 61° b) 24°
c) 34° d) 95°

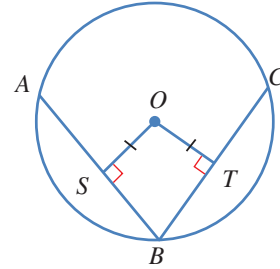
6 قياس الزاوية DCA في الشكل الآتي هو:



- a) 55° a) 41°
b) 35° c) 45°

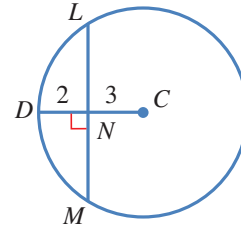
أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في ما يأتي:

1 \overline{AB} و \overline{CB} في الشكل الآتي وتران في دائرة مركزها O . إذا كان $AS = 4$ cm و $OT = 3$ cm، فإن طول \overline{BC} بالسنتيمترات هو:



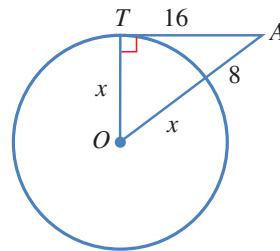
- a) 6 b) 7
c) 8 d) 10

2 اعتماداً على الشكل الآتي، فإن طول \overline{LM} هو:



- a) 5 b) 8
c) 10 d) 13

3 اعتماداً على الشكل الآتي، فإن طول نصف قطر الدائرة هو:

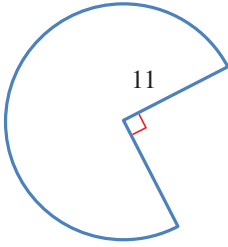


- a) 5.75 b) 12
c) 4 d) 8

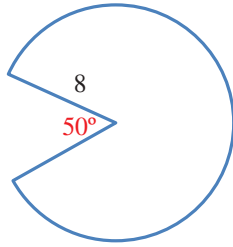
اختبار نهاية الوحدة

أجد المساحة والمحيط لكل من القطعين الآتيين:

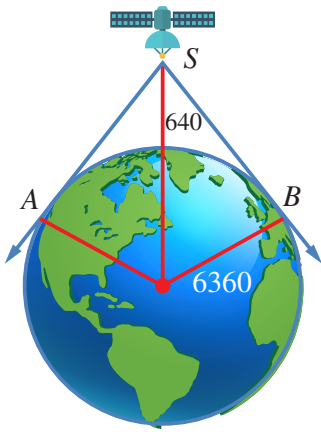
12



13



14 **أقمارٌ صناعيةٌ:** يرتفع قمرٌ صناعيٌّ مسافةً 640 km عن سطح الأرض التي نصفُ قُطرِها 6360 km، ويمكنُ منه مشاهدةُ المنطقة الواقعة بين المماسَّين \vec{SA} و \vec{SB} من سطح الأرض. ما المسافة بين القمر الصناعي وأبعد نقطة يمكنُ مشاهدتها منه على سطح الأرض؟



15 **حزامٌ مطاطيٌّ:** يدورُ حزامٌ مطاطيٌّ حولَ بكرتين دائريتين، طولُ نصفَي قُطريهما 8 cm، و 3 cm على التوالي. إذا كان طولُ الحزام بين نقطتي التماس مع البكرتين 25 cm، فما المسافة بين مركزي البكرتين؟

7 النقطة التي لا تقع على الدائرة التي معادلتها

$$(x+2)^2 + (y-4)^2 = 25$$

- a) (-2, -1) b) (1, 8)
c) (3, 4) d) (0, 5)

8 عددُ المماسَّات المشتركة التي يمكنُ رسمها لدائرتين

متماستين من الداخل هو:

- a) 3 b) 2
c) 1 d) 0

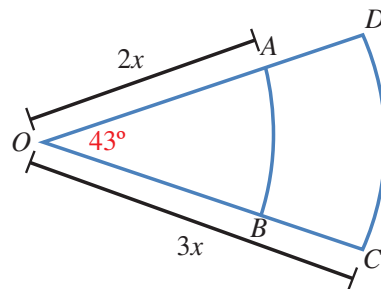
9 أكتب معادلة الدائرة التي تُمثل النقطتان $A(4, -3)$ و

$B(6, 9)$ طرفاً قُطر فيها.

يُمثل الشكل التالي قطاعين دائريين من دائرتين لهما المركز نفسه O . إذا كان نصف قُطر الدائرة الصغرى $2x$ ، ونصف قُطر الدائرة الكبرى $3x$ ، وقياس الزاوية AOB هو 43° ، ومساحة المنطقة $ABCD$ هي 30 cm^2 ، فأجد:

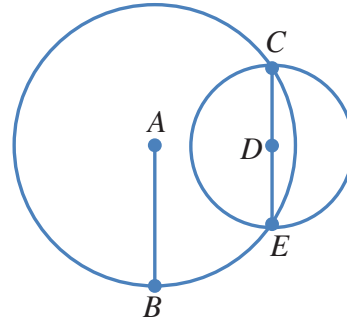
10 قيمة x .

11 الفرق بين طولَي القوسين CD و AB .



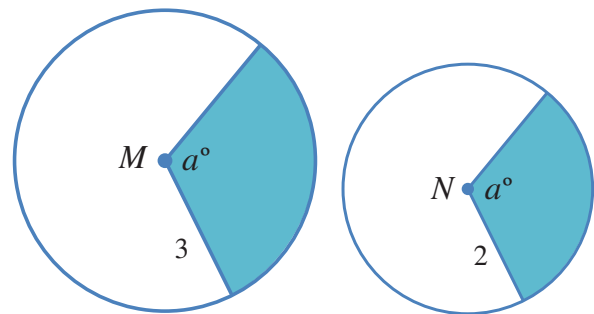
تدريب على الاختبارات الدولية

16 تتقاطع دائرتان مركزاهما A, D في النقطتين C و E . إذا كان $AB = EC = 10 \text{ cm}$ ، فما طول AD بالستيمترات؟



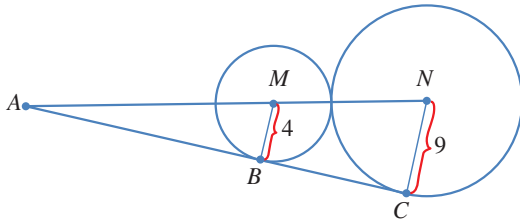
- a) $5\sqrt{2}$ b) $10\sqrt{3}$
c) $10\sqrt{2}$ d) $5\sqrt{3}$

17 النقطتان M و N هما مركزا الدائرتين في الشكل الآتي. إذا كانت مساحة المنطقة المظللة في الدائرة الكبرى 9 وحدات مربعة، فما مساحة المنطقة المظللة في الدائرة الصغرى بالوحدات المربعة؟



- a) 3 b) 4
c) 5 d) 7

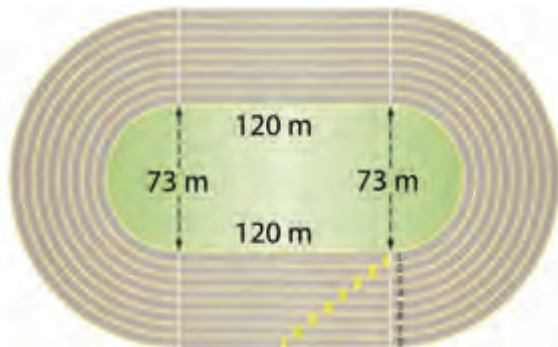
18 يُمثل الشكل الآتي دائرتين متماسكتين من الخارج، رُسم لهما مماس مشترك من النقطة A الواقعة على المستقيم المار بالمركزين N و M . إذا كان نصف قطر الدائرتين 4 وحدات و 9 وحدات، فأَيُّ العبارات التالية صحيحة:



- a) طول AN يساوي طول AC .
b) طول BC يساوي 13 وحدة.
c) $AC = \frac{9}{4} AB$
d) $AC = \frac{4}{9} AB$

19 أجد طول AM في السؤال السابق مبيِّناً خطوات الحل.

20 يُمثل الشكل الآتي مضمارًا للجري من ثمانية مسارب، كلُّ منها يتكوَّن من جزأين مستقيمين متوازيين، ونصفي دائرتين متصلتين بهما. إذا كان عرض كلِّ مسارب 1 m، فبكم يزيد طول الحدِّ الداخلي من المسرب الثالث على طول الحدِّ الداخلي من المسرب الأول؟



ما أهمية هذه
الوحدة؟

تُعَدُّ دراسةُ العلاقاتِ بينَ أطوالِ أضلاعِ المثلثِ وقياساتِ زواياهُ (أو ما يُسمَّى علمَ المثلثاتِ) أحدَ أهمِّ فروعِ الرياضياتِ وأقدمِها؛ إذُ ساعدَ هذا العلمُ قدماءَ المصريينَ على بناءِ الأهراماتِ ودراسةِ الفلكِ، وقد استمرَّ الاهتمامُ به حتى اليومِ؛ فكانَ أساسًا لكثيرٍ منَ العلومِ الأخرى.

سأتعلَّمُ في هذه الوحدة:

- ◀ ماهية دائرة الوحدة، ووضع الزاوية القياسيِّ.
- ◀ إيجاد النسبِ المثلثية للزوايا ضمنَ الدورة الواحدة.
- ◀ تمثيلَ الاقتواناتِ المثلثية في المستوى الإحداثيِّ، واستنتاجَ خصائصها.
- ◀ حلَّ معادلاتِ مثلثية، بحيثُ تكونُ مجموعةُ الحلِّ ضمنَ الدورة الواحدة.

تعلَّمتُ سابقًا:

- ✓ مفهومَ جيبِ الزاوية الحادَّة، وجيبَ تمامها، وظلَّها بوصفها نسبًا بينَ أضلاعِ المثلثِ قائمِ الزاوية.
- ✓ استخدامَ العلاقةِ $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ في حلِّ مسألةٍ عنِ مثلثِ قائمِ الزاوية.
- ✓ حلَّ معادلاتِ خطِّيةٍ وتربيعيةٍ ضمنَ مجموعة الأعدادِ الحقيقية.

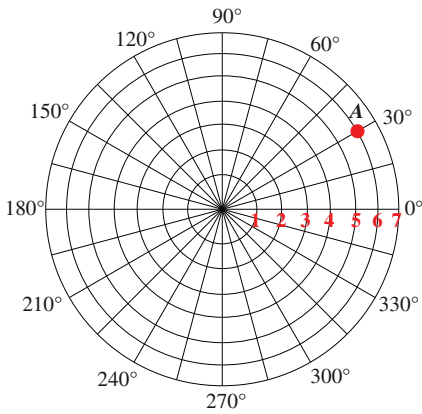
إنشاء نظام إحداثي جديد، يعتمد البعد عن نقطة مرجعية، وقياس زاوية الميل على الخط الأفقي.

فكرة المشروع



أوراق، مسطرة، منقلة، فرجار، آلة حاسبة.

المواد والأدوات



نظام الإحداثيات القطبية: يُمكن تحديد موقع أي نقطة في المستوى باستعمال

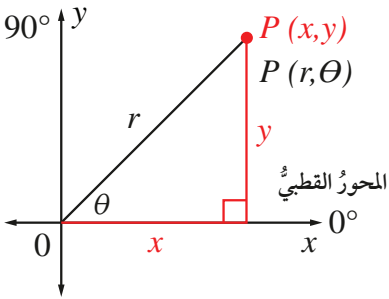
الزوج المُرتَّب (r, θ) ، حيث:

r : بُعد النقطة عن نقطة مرجعية تُسمى القطب.

θ : الزاوية بين الشعاع المارّ بالنقطة والقطب، والمحور القطبي، وهو الشعاع الأفقي من القطب باتجاه اليمين. يُلاحظ من الشكل المجاور أن إحداثي النقطة A هما: $(6, 30^\circ)$. تُسمى هذه الطريقة نظام الإحداثيات القطبية.

تحويل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية: لتحويل الإحداثيات القطبية

إلى إحداثيات ديكارتية، أرسّم عمودًا من النقطة التي يُراد تحويل إحداثياتها إلى المحور الأفقي، ثم أستمع النسب المثلثية لحساب طولَي ضلعي المثلث الناتج، كما في الشكل المجاور، للحصول على الإحداثيين x و y لتلك النقطة. للتحويل من النظام الديكارتي إلى النظام القطبي، أجد قيمة كل من r و θ بطريقة عكسية، وذلك باستعمال النسب المثلثية.



خطوات تنفيذ المشروع:

1 أستمع مسطرة وفرجارًا الرسم نسخة مكبرة للمستوى القطبي أعلاه، مُحدّدًا عليه مواقع 6 نقاط تمثل رؤوس سداسي منتظم، ثم أجد إحداثياتها القطبية (r, θ) ، والديكارتية (x, y) .

2 أصِل بين النقاط الستة بلونٍ مختلف، ثم أستمع قانون المسافة بين نقطتين لإيجاد محيط الشكل السداسي.

عرض النتائج:

أصمّم مع أفراد مجموعتي مجلة أو لوحة تتضمن ما يأتي:

- خطوات تنفيذ المشروع موصّحة بالصور والرسوم.
- وصف لتطبيق حياتي تُستعمل فيه الإحداثيات القطبية.

النسب المثلثية Trigonometric Ratios

تعرفُ الوضع القياسيُّ للزاوية، وربطُ النسبِ المثلثيةِ بدائرةِ الوحدةِ، وإيجادُها للزوايا الربعية، وإيجادُ النسبتينِ المثلثينِ الأساسيتينِ الباقيتينِ في حالِ معرفةِ إحدى النسبِ المثلثيةِ الأساسيةِ للزاوية.

فكرةُ الدرس



ضلعُ الابتداءِ، ضلعُ الانتهاءِ، الوضعُ القياسيُّ، دائرةُ الوحدةِ، الزاويةُ الربعيةُ.

المصطلحات



تعلمتُ سابقاً إيجادَ النسبِ المثلثيةِ لزاويا حادّةٍ، مثلِ النسبِ بينَ أطوالِ أضلاعِ المثلثِ قائمِ الزاويةِ. ولكن، كيفَ يُمكنُ إيجادُ النسبِ المثلثيةِ لزاويةٍ أكبرَ منَ 90° ، مثلِ الزاويةِ بينَ شفراتِ مروحةِ توليدِ الطاقةِ الكهربائية؟

مسألةُ اليوم



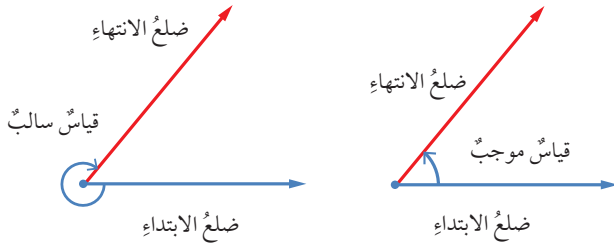
الزاويةُ هي اتحادُ شعاعينِ لهُما نقطةُ البداية نفسُها. والنقطةُ المشتركةُ تُعرفُ برأسِ الزاويةِ، أمّا الشعاعانِ فيُسمّى أحدهما **ضلعُ الابتداءِ** (initial side)، والآخرُ **ضلعُ الانتهاءِ** (terminal side). يوجدُ قياسانِ لأيِّ زاويةٍ؛ أحدهما موجبٌ عندما يدورُ ضلعُ الانتهاءِ عكسَ اتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ، والآخرُ سالبٌ حينَ يدورُ ضلعُ الانتهاءِ معَ اتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ.

إرشادٌ

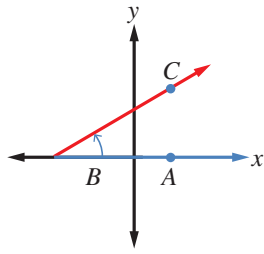
اتّجاهُ حركةِ
عقاربِ الساعةِ.



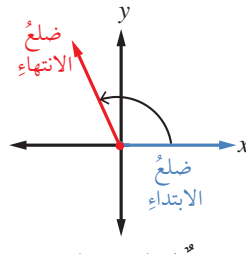
عكسُ حركةِ
عقاربِ الساعةِ.



تكونُ الزاويةُ المرسومةُ في المستوى الإحداثيِّ في **الوضع القياسيِّ** (standard position) إذا كانَ رأسُها عندَ نقطةِ الأصلِ $(0, 0)$ ، وضلعُ ابتدائها منطبقاً على محورِ x الموجبِ.



زاوية ليست في الوضع القياسي.

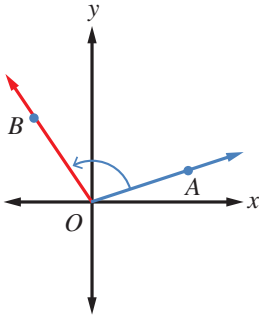


زاوية في الوضع القياسي.

مثال 1

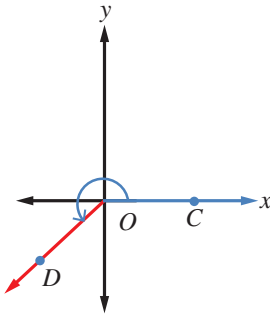
أحدّد إذا كانت الزاويتان الآتيتان في وضعٍ قياسيٍّ أم لا، مُبيّنًا السبب:

1



الزاوية AOB ليست في وضعٍ قياسيٍّ؛ لأنّ ضلعَ ابتدائها لا ينطبقُ على محورِ x الموجب.

2

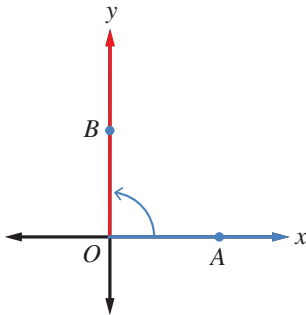


الزاوية COD في وضعٍ قياسيٍّ؛ لأنّ ضلعَ ابتدائها ينطبقُ على محورِ x الموجب، ورأسها على نقطةِ الأصلِ O .

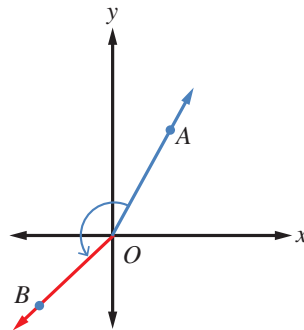
أتحقّق من فهمي

أحدّد إذا كانت الزاويتان الآتيتان في وضعٍ قياسيٍّ أم لا، مُبيّنًا السبب:

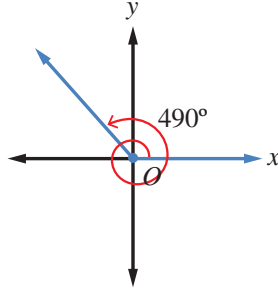
1



2



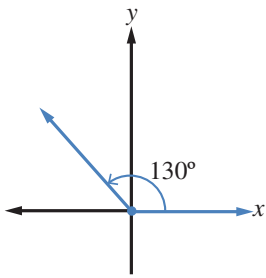
إذا دارَ ضلعُ انتهاءِ زاويةٍ في الوضعِ القياسيِّ دورةً كاملةً عكسَ اتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ، فإنه يصنعُ زوايا قياساتها بين 0° و 360° . وإذا استمرَّ في دورانه، فإنه يصنعُ زوايا قياساتها أكبرَ من 360° .



مثال 2

أرسمُ في الوضعِ القياسيِّ الزاويةَ المعطى قياسها في ما يأتي، مُحدِّدًا مكانها:

1 130°

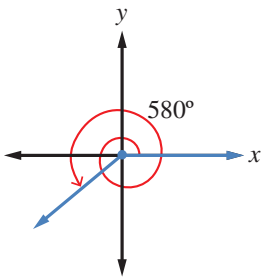


أرسمُ المحورين الإحداثيين، ومن نقطة الأصلِ أرسمُ ضلعَ الابتداءِ مُنطبقًا على محورِ x الموجبِ، ثمَّ أضعُ مركزَ المنقلةِ على نقطةِ الأصلِ، وتدرّجَ المنقلةِ 0° على ضلعِ الابتداءِ، ثمَّ أعيّنُ نقطةَ مقابلِ التدرّجِ 130° . بعدَ ذلكَ أرسمُ ضلعَ الانتهاهِ من نقطةِ الأصلِ إلى النقطةِ التي عيَّنتها، فأجدُ أن ضلعَ انتهاهِ الزاويةِ يقعُ في الربعِ الثاني.

إرشادٌ

المنقلةُ ذاتُ شكلِ نصفِ الدائرةِ لها تدرّجانِ متعاكسانِ، يبدأ كُلُّ منهما من 0° ، وينتهي عندَ 180° ؛ لذا يجبُ دائمتًا وضعُ التدرّجِ على ضلعِ ابتداءِ الزاويةِ عندَ قياسها، أو رسمها.

2 580°

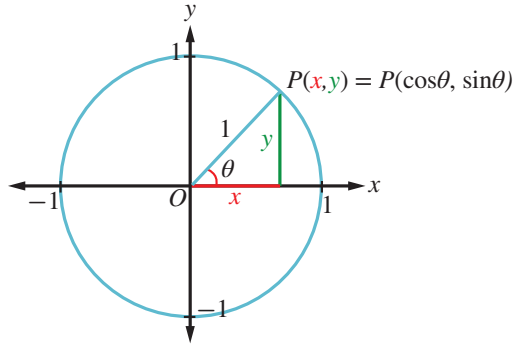


بما أن $580^\circ = 360^\circ + 220^\circ$ ، فإن ضلعَ انتهاهِ الزاويةِ 580° هو نفسه ضلعُ انتهاهِ الزاويةِ 220° الذي يقعُ في الربعِ الثالثِ.

أتحقق من فهمي

أرسمُ زاويةً قياسها 460° في الوضعِ القياسيِّ، مُحدِّدًا مكانها.

دائرة الوحدة (unit circle) هي دائرة مركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها وحدة واحدة. إذا سُمِّت الزاوية θ في الوضع القياسي، فإن ضلع انتهائها يقطع دائرة الوحدة في نقطة وحيدة هي $P(x, y)$. ومع تغيير قياس الزاوية يتغير موقع النقطة P على الدائرة، ويتغير إحداثياتها.



يُمكن تعريف النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ بدلالة إحداثيات P كما يأتي:

$$\sin \theta = \frac{\text{المُقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{y}{1} = y \qquad \cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{x}{1} = x$$

$$\tan \theta = \frac{\text{المُقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{y}{x}, x \neq 0$$

رموز رياضية

يدلُّ الرمز $\sin \theta$ على نسبة جيب الزاوية θ ، والرمز $\cos \theta$ على نسبة جيب التمام، والرمز $\tan \theta$ على نسبة ظل الزاوية θ .

مثال 3

أجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي، التي يقطع ضلع انتهائها دائرة الوحدة في النقطة الواردة في ما يأتي:

1 $P(-0.6, 0.8)$

$$\sin \theta = y = 0.8, \quad \cos \theta = x = -0.6, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{0.8}{-0.6} = -\frac{4}{3}$$

2 $P\left(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$

$$\sin \theta = y = -\frac{12}{13}, \quad \cos \theta = x = \frac{5}{13}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-12/13}{5/13} = -\frac{12}{5}$$

أتحقق من فهمي

أجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي، التي يقطع ضلع انتهائها

$$P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

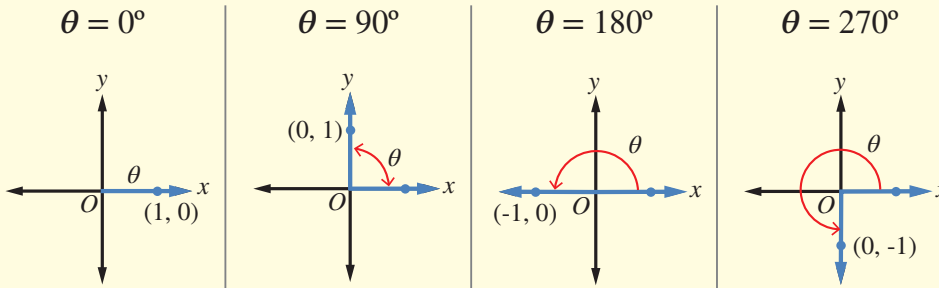
إرشاد

النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ هي: $\sin \theta$ ، $\cos \theta$ ، و $\tan \theta$.

عند رسم الزاوية θ في الوضع القياسي، قد يقع ضلع انتهائها في أحد الأرباع الأربعة، فيقال عندئذ إن الزاوية θ واقعة في الربع كذا، وقد ينطبق ضلع انتهائها على أحد المحورين الإحداثيين، فتسمى الزاوية θ في هذه الحالة زاوية ربعية (quadrantal angle).

مفهوم أساسي

الزوايا الربعية في دائرة الوحدة:



يُمكنُ تحديدُ النسبِ المثلثية للزوايا الربعية من إحداثيات نقاط تقاطع دائرة الوحدة مع المحورين الإحداثيين. فمثلاً، يتقاطع ضلع انتهاء الزاوية 90° في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة في النقطة $P(0, 1)$. وبذلك، فإن: $\sin 90^\circ = 1$ ، $\cos 90^\circ = 0$ ، ويكون $\tan 90^\circ$ غير مُعرَّفٍ لأنَّهُ لا تجوزُ القسمة على صفر.

مثال 4

أين يقطع ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها 180° دائرة الوحدة إذا رُسِّمَت في الوضع القياسي؟ أجد النسب المثلثية الأساسية لها.

يقطع ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها 180° دائرة الوحدة في النقطة $C(-1, 0)$ ، إذن:

$$\sin 180^\circ = y = 0, \quad \cos 180^\circ = x = -1, \quad \tan 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$$

أتحقق من فهمي 

أجد النسب المثلثية الأساسية للزاويتين اللتين قياس كل منهما 270° ، و 360° على الترتيب.

إذا كانت θ زاويةً حادةً، فإنه يُمكنُ رسمُ مثلثٍ قائمٍ الزاوية تكون θ إحدى زواياه.

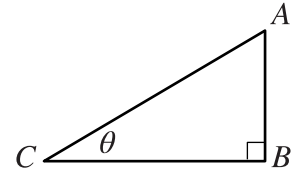
$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2 \quad \text{نظرية فيثاغورس}$$

$$\frac{(BC)^2}{(AC)^2} + \frac{(AB)^2}{(AC)^2} = \frac{(AC)^2}{(AC)^2} \quad \text{بقسمة الطرفين على } (AC)^2$$

$$\left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = 1 \quad \text{بتطبيق قوانين الأسس}$$

$$(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1 \quad \text{بالتعويض}$$

تظل هذه النتيجة صحيحةً بقطع النظر عن قياس الزاوية θ ، وهي تُستعمل لإيجاد إحدى هاتين النسبتين إذا عُلِمَت الأخرى ولكن يجب مراعاة إشارات النسب المثلثية؛ فهي تختلف بحسب الربع الذي يقع فيه ضلع انتهاء الزاوية في الوضع القياسي كما هو موضح في الشكل المجاور.



الربع الثاني	الربع الأول
$\sin \theta \oplus$	$\sin \theta \oplus$
$\cos \theta \ominus$	$\cos \theta \oplus$
$\tan \theta \ominus$	$\tan \theta \oplus$
الربع الثالث	الربع الرابع
$\sin \theta \ominus$	$\sin \theta \ominus$
$\cos \theta \ominus$	$\cos \theta \oplus$
$\tan \theta \oplus$	$\tan \theta \ominus$

مثال 5

أجد قيمة النسبتين الأساسيتين الباقيتين إذا كان:

$$\sin \theta = -\frac{1}{5} \quad \text{1} \quad \text{، ووقع ضلع انتهاء } \theta \text{ في الوضع القياسي في الربع الثالث.}$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad \text{نتيجة لنظرية فيثاغورس}$$

$$\cos^2 \theta + \left(\frac{-1}{5}\right)^2 = 1 \quad \text{بتعويض قيمة } \sin \theta$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25} \quad \text{ب طرح } \frac{1}{25} \text{ من الطرفين}$$

$$\cos \theta = \pm \frac{\sqrt{24}}{5} \quad \text{بأخذ الجذر التربيعي للطرفين}$$

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{24}}{5} \quad \text{في الربع الثالث يكون } \cos \theta \text{ سالبًا}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-1/5}{-\sqrt{24}/5} = \frac{1}{\sqrt{24}}$$

2 $\tan \theta = -3.5$ ، ووقع ضلعُ انتهاءِ θ في الوضعِ القياسيِّ في الربعِ الثاني.

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -3.5$$

$$\sin \theta = -3.5 \cos \theta$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta + (-3.5 \cos \theta)^2 = 1$$

$$\cos^2 \theta + 12.25 \cos^2 \theta = 1$$

$$13.25 \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{13.25}$$

$$\cos \theta = \pm \sqrt{\frac{1}{13.25}} \approx \pm 0.2747$$

$$\cos \theta = -0.2747$$

$$\begin{aligned} \sin \theta &= -3.5 \times -0.2747 \\ &= 0.96145 \approx 0.96 \end{aligned}$$

بالتعويض

بضرب الطرفين في $\cos \theta$

نتيجةً لنظرية فيثاغورس

بتعويض قيمة $\sin \theta$

بالتربيع

بالتبسيط

بقسمة الطرفين على 13.25

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين،

واستعمال الآلة الحاسبة

في الربع الثاني يكون $\cos \theta$ سالبًا

بتعويض قيمة $\cos \theta$

أتحقق من فهمي 

أجدُّ قيمة كلِّ من $\sin \theta$ و $\tan \theta$ إذا كان $\cos \theta = 0.8$ ، ووقع ضلعُ انتهاءِ θ في الوضعِ القياسيِّ في الربعِ الرابعِ.



برع عالمُ الفلكِ والرياضياتِ
المُسلمُ محمدُ بنُ جابرِ البتانيُّ
في علمِ المثلثاتِ، واكتشفَ
العديدَ منَ العلاقاتِ المُهمَّةِ
بينَ النسبِ المثلثيةِ، مثلَ:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

أُتدرب وأحلُّ المسائل 

أرسمُ الزوايا الآتية في الوضعِ القياسيِّ:

1 225°

2 160°

3 330°

4 240°

أحدُّ الربعِ الذي يقع فيه ضلعُ انتهاءِ كلِّ زاويةٍ ممَّا يأتي إذا رُسِّمَتْ في الوضعِ القياسيِّ:

5 285°

6 75°

7 100°

8 265°

أحدُّ الربع (أو الأرباع) الذي يقع فيه ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ θ في الوضعِ القياسيِّ إذا كان:

- 9 $\sin \theta > 0$ 10 $\cos \theta > 0$ 11 $\tan \theta < 0$ 12 $\sin \theta < 0$ و $\cos \theta < 0$

أحدُّ الربع (أو الأرباع) الذي يقع فيه ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ θ في الوضعِ القياسيِّ إذا كان:

- 13 $\sin \theta = -0.7$ 14 $\tan \theta = 2$ 15 $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ 16 $\tan \theta = -1$

- 17 $\cos \theta = 0.45$ 18 $\sin \theta = 0.55$ 19 $\sin \theta = 0.3, \cos \theta < 0$ 20 $\tan \theta = -4, \sin \theta > 0$

أجدُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ للزاويةِ θ إذا قطعَ ضلعُ انتهائِها في الوضعِ القياسيِّ دائرةَ الوحدةِ في النقاطِ الآتية:

- 21 $P(0, -1)$ 22 $P(0.5, 0.5\sqrt{3})$ 23 $P\left(\frac{-8}{17}, \frac{15}{17}\right)$ 24 $P\left(\frac{20}{29}, \frac{-21}{29}\right)$

أجدُ النسبتينِ المثلثتينِ الأساسيتينِ الباقيتينِ في الحالاتِ الآتية:

- 25 $\sin \theta = \frac{3}{4}, \quad 90^\circ < \theta < 180^\circ$ 26 $\tan \theta = 0.78, \quad -1 < \sin \theta < 0$

- 27 $\cos \theta = -0.75, \quad \tan \theta < 0$ 28 $\sin \theta = -0.87, \quad 270^\circ < \theta < 360^\circ$

مهارات التفكير العليا



29 تبرير: ما أكبر قيمةٍ لجيبِ الزاويةِ؟ ما أصغر قيمةٍ له؟ أبرر إجابتي.

30 أكتشف الخطأ: حلّ كلُّ من أمجد وزينة المسألة الآتية. إذا كان $\tan x = 0.75$ ، وكانت x بين 180° و 360° ، فما

قيمة $\sin x + \cos x$ ؟

زينة:

$$\sin x + \cos x = -1.4$$

أمجد:

$$\sin x + \cos x = 0.2$$

أحدُّ أيُّهما كانت إجابته صحيحة، مُبرراً إجابتي.

النسب المثلثية للزوايا ضمن الدورة الواحدة Trigonometric Ratios for Angles between 0° and 360°

إيجاد النسب المثلثية الأساسية لأي زاوية بين 0° و 360° ، وإيجاد الزاوية إذا عرفت إحدى نسبها المثلثية.

فكرة الدرس

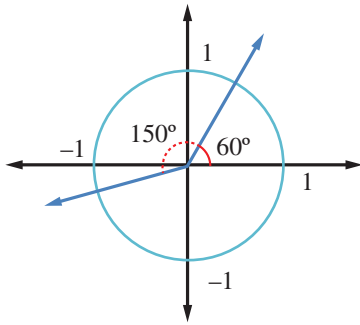


الزاوية المرجعية، معكوس النسبة المثلثية.

المصطلحات



مسألة اليوم



دار ضلع انتهاء زاوية قياسها 60° في الوضع القياسي
بزاوية 150° عكس اتجاه حركة عقارب الساعة. كيف نجد
إحداثي نقطة تقاطع ضلع الانتهاء مع دائرة الوحدة في
موقعه الجديد؟

تعرفنا في الدرس السابق كيفية إيجاد النسب المثلثية لزاوية مرسومة في الوضع القياسي
باستعمال إحداثي نقطة تقاطع ضلع انتهائها مع دائرة الوحدة، وستعرف في هذا الدرس كيف
نجد النسب المثلثية إذا علم قياس الزاوية بالدرجات.

إذا وقع ضلع انتهاء الزاوية θ في الربع الأول (أي كانت $0^\circ < \theta < 90^\circ$)، فإنه يمكن إيجاد
النسب المثلثية لهذه الزاوية باستعمال الآلة الحاسبة، أو بما نحفظه من نسب مثلثية للزوايا
الخاصة: ($30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$).

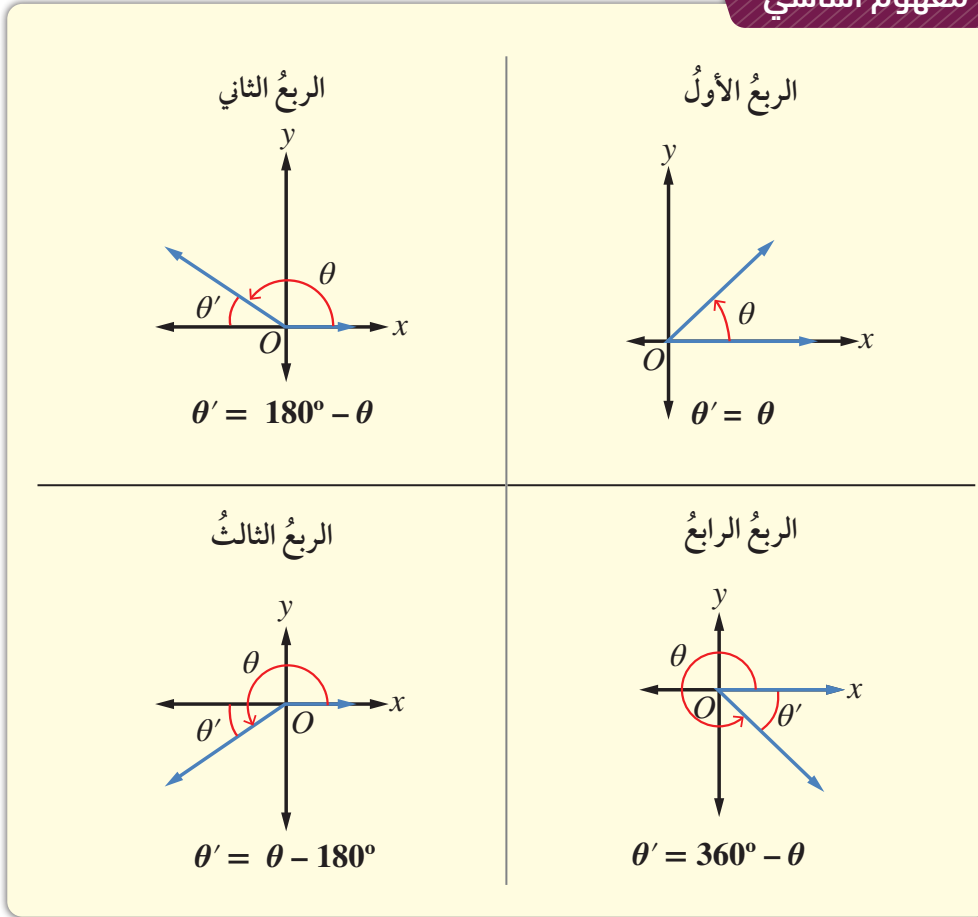
مراجعة المفاهيم

النسب المثلثية للزوايا الخاصة:

θ	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	غير مُعرَّف

أمّا إذا وقع ضلعُ انتهاءِ الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي في أيِّ من الأرباع الثلاثة الأخرى، فإنَّ نسبها المثلثية تكونُ مُرتبطةً بالنسبِ المثلثية للزاوية المرجعية θ' (reference angle)، وهي الزاوية الحادة المحصورة بين ضلعِ انتهاءِ الزاوية θ والمحورِ x .

مفهوم أساسي



النسبُ المثلثية للزاوية θ تساوي النسبِ المثلثية لزاويتها المرجعية θ' مع اختلاف الإشارة أحياناً بحسبِ الربع الذي يقع فيه ضلعُ انتهاءِ الزاوية θ .

لإيجاد النسبِ المثلثية لأيِّ زاوية θ ، فإننا نتبع الخطوات الثلاث الآتية:

الخطوة 1: إيجاد الزاوية المرجعية θ' .

الخطوة 2: إيجاد النسبة المثلثية للزاوية المرجعية θ' .

الخطوة 3: تحديد إشارة النسبة المثلثية للزاوية θ بحسبِ الربع الذي يقع فيه ضلعُ انتهاءها.

أتذكّر

	y	الربيع الأول	
الربيع الثاني	↑	$\sin \theta \oplus$	$\sin \theta \oplus$
		$\cos \theta \ominus$	$\cos \theta \oplus$
		$\tan \theta \ominus$	$\tan \theta \oplus$
			x
		$\sin \theta \ominus$	$\sin \theta \ominus$
		$\cos \theta \ominus$	$\cos \theta \oplus$
		$\tan \theta \oplus$	$\tan \theta \ominus$
	↓	الربيع الثالث	الربيع الرابع

مثال 1

أجد قيمة كل مما يأتي:

1 $\sin 150^\circ$.

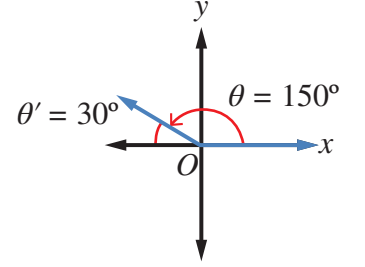
يقع ضلع الانتهاء للزاوية 150° في الربع الثاني؛ لذا أستعمل زاويتها المرجعية:

$$\theta' = 180^\circ - \theta \quad \text{إيجاد قياس الزاوية المرجعية}$$

$$= 180^\circ - 150^\circ \quad \theta = 150^\circ$$

$$= 30^\circ$$

$$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = 0.5 \quad \text{الجيب موجب في الربع الثاني}$$



2 $\cos 225^\circ$.

يقع ضلع الانتهاء للزاوية 225° في الربع الثالث؛ لذا نستعمل زاويتها المرجعية:

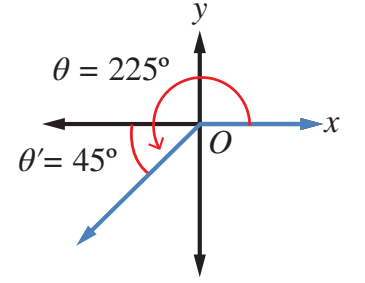
$$\theta' = \theta - 180^\circ \quad \text{إيجاد قياس الزاوية المرجعية}$$

$$= 225^\circ - 180^\circ \quad \theta = 255^\circ$$

$$= 45^\circ$$

$$\cos 225^\circ = -\cos 45^\circ \quad \text{جيب التمام سالب في الربع الثالث}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



3 $\tan 300^\circ$.

يقع ضلع الانتهاء للزاوية 300° في الربع الرابع؛ لذا نستعمل زاويتها المرجعية:

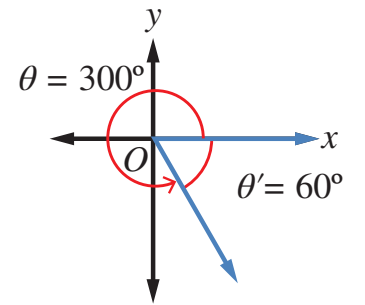
$$\theta' = 360^\circ - \theta \quad \text{إيجاد قياس الزاوية المرجعية}$$

$$\theta' = 360^\circ - 300^\circ \quad \theta = 300^\circ$$

$$= 60^\circ$$

$$\tan 300^\circ = -\tan 60^\circ \quad \text{الظل سالب في الربع الرابع}$$

$$= -\sqrt{3}$$



أتحقق من فهمي 

أجد قيمة كل مما يأتي:

a) $\sin 120^\circ$

b) $\tan 240^\circ$

c) $\cos 315^\circ$

d) $\sin 210^\circ$

جميع الزوايا في المثال السابق مرتبطة بزوايا مرجعية مألوفة، مثل: 30° ، أو 45° ، أو 60° ، وهي زوايا خاصة عرفنا قيم النسب المثلثية لها. ولكن، كيف نجد النسب المثلثية لأي زوايا أخرى؟ يمكن إيجاد النسبة المثلثية للزاوية المرجعية باستعمال الآلة الحاسبة، ثم تحديد الإشارة المناسبة تبعاً للربع الذي يقع فيه ضلع انتهاء الزاوية.

انتبه

يجب ضبط الآلة الحاسبة على خيار درجات (DEGREES) قبل استعمالها. أسأل معلّمي.

مثال 2

أجد قيمة كل مما يأتي:

1 $\sin 255^\circ$

يقع ضلع الانتهاء للزاوية 255° في الربع الثالث؛ لذا أستعمل زاويتها المرجعية:

$$\theta' = \theta - 180^\circ$$

إيجاد قياس الزاوية المرجعية

$$\theta' = 255^\circ - 180^\circ$$

$$\theta = 255^\circ$$

$$= 75^\circ$$

$$\sin 255^\circ = -\sin 75^\circ$$

الجيب سالب في الربع الثالث

والآن، أستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد $\sin 75^\circ$ كما يأتي:

أضغط على مفتاح **sin**، ثم أدخل القيمة 75، ثم أضغط على مفتاح **=**، فتظهر النتيجة:

$$\sin 75 = 0.965925826$$

بالتقريب إلى ثلاث منازل عشرية، تكون النتيجة: 0.966

$$\sin 255^\circ \approx -0.966$$

يُمْكِنُ أَيْضًا إِجَادُ $\sin 255^\circ$ مَبَاشِرَةً بِاسْتِعْمَالِ الآلَةِ الحَاسِبَةِ مِنْ دُونِ إِجَادِ الزَاوِيَةِ المَرَجِعِيَّةِ عَلَى النَحْوِ الآتِي:

أَضْغَطْ عَلَى مِفْتَاحِ \sin ، ثُمَّ أَدْخِلْ القِيَمَةَ 255 ، ثُمَّ أَضْغَطْ عَلَى مِفْتَاحِ $=$ ، فَتَظْهَرُ النَتِيْجَةُ:

$$\sin 255 = -0.965925826$$

بِالتَقْرِيْبِ إِلَى ثَلَاثِ مَنَازِلٍ عَشْرِيَّةٍ، تَكُونُ النَتِيْجَةُ -0.966 ، وَهِيَ النَتِيْجَةُ نَفْسُهَا الَّتِي تَوَصَّلَتْ إِلَيْهَا آنْفَاءً.

2 $\tan 168^\circ$.

أَضْغَطْ عَلَى مِفْتَاحِ \tan ، ثُمَّ أَدْخِلْ القِيَمَةَ 168 ، ثُمَّ أَضْغَطْ عَلَى مِفْتَاحِ $=$ ، فَتَظْهَرُ النَتِيْجَةُ:

$$\tan 168 = -0.212556561$$

بِالتَقْرِيْبِ إِلَى ثَلَاثِ مَنَازِلٍ عَشْرِيَّةٍ، تَكُونُ النَتِيْجَةُ: -0.213

$$\tan 168^\circ \approx -0.213$$

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي

أَجِدُ قِيَمَةَ كُلِّ مِمَّا يَأْتِي بِاسْتِعْمَالِ الآلَةِ الحَاسِبَةِ:

a) $\sin 320^\circ$

b) $\cos 175^\circ$

c) $\tan 245^\circ$

يُمْكِنُ اسْتِعْمَالُ الآلَةِ الحَاسِبَةِ لِإِجَادِ قِيَاسِ أَيِّ زَاوِيَةٍ حَادَّةٍ (فِي الرِّبْعِ الأوَّلِ) عُلِمَتْ إِحْدَى نَسَبِهَا المَثَلِيَّةِ، وَذَلِكَ بِاسْتِعْمَالِ مَعكُوسِ النَسَبِ المَثَلِيَّةِ (inverse trigonometric ratio). فَإِذَا عُلِمَ جَيْبُ الزَاوِيَةِ اسْتُعْمِلَ مَعكُوسُ الجَيْبِ (\sin^{-1})، وَإِذَا عُلِمَ جَيْبُ تَمَامِ الزَاوِيَةِ اسْتُعْمِلَ مَعكُوسُ جَيْبِ التَمَامِ (\cos^{-1})، وَإِذَا عُلِمَ ظَلُّ الزَاوِيَةِ اسْتُعْمِلَ مَعكُوسُ الظِّلِّ (\tan^{-1}). وَبِالطَّرِيقَةِ نَفْسِهَا، يُمْكِنُ إِجَادُ قِيَاسِ أَيِّ زَاوِيَةٍ فِي الأَرْبَاعِ الثَّلَاثَةِ البَاقِيَةِ بِاسْتِعْمَالِ مَفْهُومِ الزَاوِيَةِ المَرَجِعِيَّةِ وَإِشَارَاتِ النَسَبِ المَثَلِيَّةِ فِي الأَرْبَاعِ الأَرْبَعَةِ.

لُغَةُ الرِّبَاضِيَّاتِ

- نَقْرَأُ مَعكُوسَ الجَيْبِ

.sine inverse

- نَقْرَأُ مَعكُوسَ جَيْبِ التَمَامِ

.cosine inverse

- نَقْرَأُ مَعكُوسَ الظِّلِّ

.tan inverse

مثال 3

أجد قيمة (أو قيم) θ في ما يأتي، علمًا بأن $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$:

1 $\sin \theta = 0.98$

$\theta = \sin^{-1}(0.98)$ هي الزاوية التي نسبة الجيب لها 0.98

والآن، أستخدم الآلة الحاسبة لإيجاد $\sin^{-1}(0.98)$ كما يأتي:



وبالتقريب إلى منزلة عشرية واحدة، تكون النتيجة: 78.5° ، وهي زاوية مرجعية لزاوية أخرى؛ لأنها تقع في الربع الأول. وبما أن الجيب موجب في ربعين (الأول والثاني فقط)، فإن الزاوية الأخرى θ تكون في الربع الثاني، ويمكن إيجادها باستعمال العلاقة بين الزاوية المرجعية والزاوية المناظرة في الربع الثاني التي تعرفتها آنفًا.

$\theta' = 180^\circ - \theta$ العلاقة بين الزاوية المرجعية والزاوية المناظرة في الربع الثاني

$\theta' = 78.5^\circ$

$78.5^\circ = 180^\circ - \theta$

$\theta = 101.5^\circ$ بحل المعادلة

إذن، $\theta = 78.5^\circ$ ، أو $\theta = 101.5^\circ$

2 $\tan \theta = -1.2$

$\theta = \tan^{-1}(-1.2)$ هي الزاوية التي نسبة الظل لها تساوي -1.2

والآن، أستخدم الآلة الحاسبة لإيجاد $\tan^{-1}(-1.2)$ كما يأتي:



وبالتقريب إلى منزلة عشرية واحدة، تكون النتيجة: 50.2° ؛ ولأن الظل يكون سالبًا في ربعين فقط (الثاني والرابع)؛ فإن الزاوية 50.2° ليست من الحلول، وإنما زاوية مرجعية لها.

إرشاد

بعض الآلات الحاسبة تحوي المفتاح 2ND بدّل المفتاح SHIFT.

أفكر

أتجاهل الإشارة السالبة. لماذا؟

إذا استعملنا العلاقة بين الزاوية المرجعية والزوايا المناظرة في الربعين الثاني والرابع، فإننا سنجد هاتين الزاويتين:

$$\text{زاوية الربع الثاني: } 180^\circ - 50.2^\circ = 129.8^\circ$$

$$\text{زاوية الربع الرابع: } 360^\circ - 50.2^\circ = 309.8^\circ$$

أتحقق من فهمي

أجد قيمة (أو قيم) θ في كل مما يأتي، علماً بأن $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$:

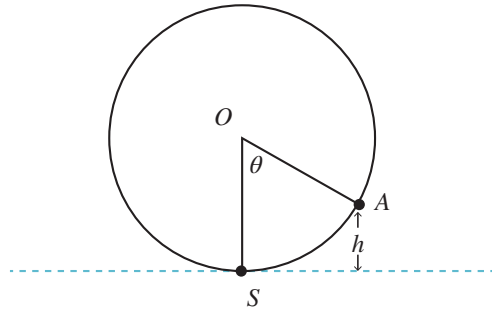
a) $\cos \theta = -0.4$

b) $\tan \theta = 5.653$

c) $\sin \theta = -0.5478$

مثال 4: من الحياة

نواعير: يُمثّل الشكل الآتي ناعورة ماءٍ تدور بسرعة ثابتة، وتُمثّل S في الشكل أخفض نقطة تبلغها الناعورة تحت الماء، في حين تُمثّل النقطة O مركز الناعورة. إذا دارت الناعورة بزاوية θ ؛ فإن ارتفاع صندوق الماء الذي موقعه النقطة A عن أخفض نقطة تبلغها الناعورة يُعطى بالعلاقة: $h = 7.5 - 7.5 \cos \theta$ حيث h الارتفاع بالأمتار. أجد طول قطر الناعورة.



عندما يصل الصندوق إلى النقطة الواقعة فوق S مباشرة، فإن ارتفاعه عن أخفض موقع له يُساوي طول قطر الناعورة، ويكون قياس θ في تلك اللحظة 180° :

$$h = 7.5 - 7.5 \cos 180^\circ$$

بتعويض قيمة θ

$$= 7.5 - 7.5 (-1)$$

$$\cos 180^\circ = -1$$

$$= 7.5 + 7.5 = 15$$

بالتبسيط

إذن، طول قطر الناعورة هو: 15 m

أتحقق من فهمي

أجد ارتفاع صندوق الماء الذي موقعه النقطة A عندما تصبح $\theta = 235^\circ$



الناعورة آلة مائية دائرية تتحرك بفعل جريان مياه الأنهار، وترفع الماء بواسطة صناديق إلى حوض علوي؛ فينسب في قنوات نحو البساتين على ضفة النهر.



أجد قيمة كل مما يأتي:

- 1 $\sin 130^\circ$ 2 $\sin 325^\circ$ 3 $\cos 270^\circ$
 4 $\tan 120^\circ$ 5 $\cos 250^\circ$ 6 $\tan 315^\circ$

أجد في ما يأتي زاويةً ثانيةً بين 0° و 360° ، لها نسبةُ الجيبِ نفسها، مثل الزاوية المعطاة:

- 7 325° 8 84° 9 245°

أجد في ما يأتي زاويةً ثانيةً بين 0° و 360° ، لها نسبةُ جيبِ التمامِ نفسها، مثل الزاوية المعطاة:

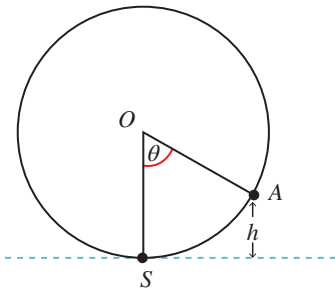
- 10 280° 11 150° 12 215°

أجد في ما يأتي زاويةً ثانيةً بين 0° و 360° ، لها نسبةُ الظلِّ نفسها، مثل الزاوية المعطاة:

- 13 75° 14 300° 15 235°

أجد في ما يأتي قيمةً (أو قيم) θ ، علمًا بأن $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$:

- 16 $\sin \theta = 0.55$ 17 $\cos \theta = -0.05$ 18 $\tan \theta = 0$



- 19 **ترفيه:** يُمثّل الشكل الآتي دولابًا دوّارًا في مدينة ألعابٍ يدورُ بسرعةٍ ثابتةٍ، وتُمثّل S في الشكل نقطة صعود الراكب الذي موقعه الآن عند النقطة A، في حين تُمثّل النقطة O مركز الدوالب. إذا دار الدوالب بزاوية θ ، فإن ارتفاع الراكب عن الأرض (h) بالأمتار يُعطى بالعلاقة: $h = 12.5 - 12.5 \cos \theta$. أجد ارتفاع الراكب عن سطح الأرض عندما تصبح $\theta = 345^\circ$.

- 20 أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.

مهارات التفكير العليا



- 21 **تحذّر:** أجد مجموعة قيم θ التي تجعل المتباينة الآتية صحيحةً، علمًا بأن $90^\circ < \theta < 180^\circ$:

$$\cos \theta + \sin \theta < 0$$

- 22 **أكتشف الخطأ:** حسبّت سندس نسبة جيب إحدى الزوايا في الربع الثاني، فكانت قيمتها 1.4527. هل إجابة سندس صحيحة؟ أبرّر إجابتي.

- 23 **تبرير:** أجد قيمة ما يأتي، مُبرّرًا إجابتي:

$$\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \dots + \cos 357^\circ + \cos 358^\circ + \cos 359^\circ + \cos 360^\circ$$

تمثيل الاقترانات المثلثية Graphing Trigonometric Functions

تمثيل اقترانات مثلثية مجالها الفترة $[0^\circ, 360^\circ]$ بيانياً.

فكرة الدرس



يرتبط عمق الماء عند نقطة مُعَيَّنَة في أحد الموانئ بالزمن حسب العلاقة:

مسألة اليوم



$$y = \sin x, x \geq 0$$

حيث: y عمق الماء بالأمتار، و x الزمن بالساعات بعد منتصف الليل. هل يمكن رسم منحنى يبين تغير عمق الماء في الميناء مع مرور الوقت؟



تُستخدَمُ الاقترانات المثلثية في تمثيل مواقف حياتية مرتبطة بالحركة الدورية، مثل: موجات الصوت، وضغط الدم في جسم الإنسان، وارتفاع مقعد في دولاب دوّار، وتغيّر عدد ساعات النهار خلال عام، وغير ذلك. ولكن، هل يمكن رسم منحنى اقتران يبين كيف تبدو الحركة الدورية التي تُمثّلها هذه الاقترانات؟

تعلّمت سابقاً كيفية تمثيل اقترانات خطية وتربيعية في المستوى الإحداثي بإنشاء جدول قيم للمتغيّرين x و y ، وتمثيل كل زوج (x, y) بنقطة في المستوى، ثم رسم المنحنى الذي يصل هذه النقاط ببعضها. وفي هذا السياق، يمكن اتباع الطريقة نفسها لتمثيل الاقترانات المثلثية.

مثال 1

أرسم منحنى كل من الاقترانين الآتيين ثم أصفه، علماً بأن $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$:

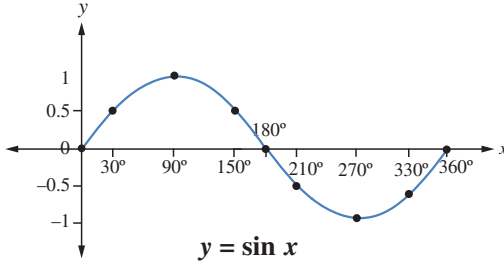
1 $y = \sin x$.

الخطوة 1: أكوّن جدولاً أكتب فيه زوايا شائعة، نسبها المثلثية معروفة، مثل: الزوايا الربعية، والزوايا التي زاويتها المرجعية 30° .

الخطوة 2: أجد قيمة $\sin x$ لكل زاوية x ، ثم أكتبها في الجدول:

x	0°	30°	90°	150°	180°	210°	270°	330°	360°
$y = \sin x$	0	0.5	1	0.5	0	-0.5	-1	-0.5	0

الخطوة 3: أعيّن الأزواج المُرتّبة: $(0^\circ, 0), (30^\circ, 0.5), (90^\circ, 1), \dots, (360^\circ, 0)$



في المستوى الإحداثي.

الخطوة 4: أصِل بمنحنى أملس بين

النقاط، فينتج رسمٌ كما في الشكل المجاور.

من التمثيل البياني لاقتران $\sin x$ ، ألاحظُ أن:

- أكبر قيمةٍ للاقتران $\sin x$ هي 1، وأصغر قيمةٍ له هي -1
- $\sin x$ يكون موجبًا إذا كانت $0^\circ < x < 180^\circ$ ، وسالبًا إذا كانت $180^\circ < x < 360^\circ$.

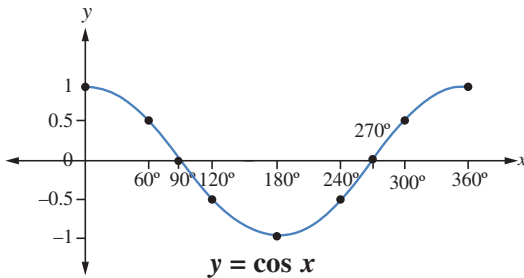
2 $y = \cos x$.

الخطوة 1: أكوّن جدولًا أكتب فيه زوايا شائعة.

الخطوة 2: أجد قيمة $\cos x$ لكل زاوية x ، ثم أكتبها في الجدول:

x	0°	60°	90°	120°	180°	240°	270°	300°	360°
$y = \cos x$	1	0.5	0	-0.5	-1	-0.5	0	0.5	1

الخطوة 3: أعيّن الأزواج المُرتّبة: $(0^\circ, 1), (60^\circ, 0.5), (90^\circ, 0), \dots, (360^\circ, 1)$ في المستوى الإحداثي، وأصل بين النقاط بمنحنى أملس.



من التمثيل البياني لاقتران $\cos x$ ، ألاحظُ أن:

- أكبر قيمةٍ للاقتران $\cos x$ هي 1، وأصغر قيمةٍ له هي -1

أفكر

ما العلاقة بين منحنى اقتران الجيب والزوايا المرجعية التي تعلّمتها في الدرس السابق؟

إرشاد

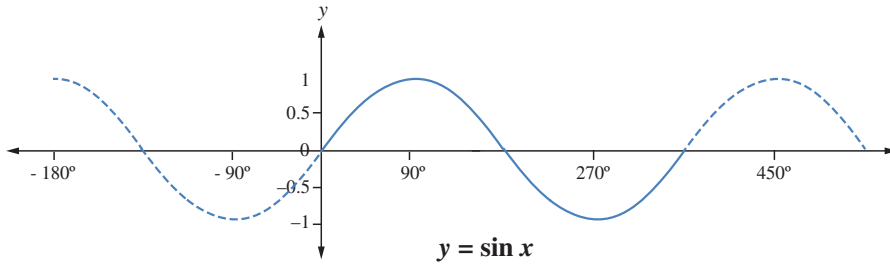
يُمكن استعمال برمجية جيو جبرا لتمثيل الاقتران $\cos x$ ، وملاحظة أكبر قيمةٍ له، وأصغر قيمةٍ له أيضًا.

- $\cos x$ يكون موجبا إذا كانت $0^\circ < x < 90^\circ$ ، و $270^\circ < x < 360^\circ$ ، وسالبا إذا كانت $90^\circ < x < 270^\circ$.

أتحقق من فهمي

أرسم منحنى الاقتران $y = \sin x$ ، علما بأن $90^\circ \leq x \leq 360^\circ$ ، مُستعملا زوايا مختلفة عن تلك التي في الجدول السابق، ثم أجد قيم الجيب لهذه الزوايا باستعمال الآلة الحاسبة.

تعرفت أنه توجد زوايا أكبر من 360° . فإذا دار ضلع انتهاء الزاوية (في الوضع القياسي) أكثر من دورة واحدة عكس اتجاه عقارب الساعة، فإنه يُكوّن زوايا أكبر من 360° ، وإذا دار مع اتجاه عقارب الساعة، فإنه يُكوّن زوايا قياسها سالب؛ ولهذا، فقد يكون قياس الزاوية أي عدد حقيقي، علما بأنه يمكن تمثيل الاقترانات المثلثية للأعداد الحقيقية جميعها، وليس فقط للزوايا الواقعة بين 0° و 360° ، ألاحظ منحنى اقتران الجيب الآتي.



كاشف الاهتزاز (الأوسيليسكوب) هو جهاز يرسم جهد الإشارات الإلكترونية على شكل مخطط يُشبه التمثيل البياني لاقتران الجيب، ويُستعمل لاكتشاف أعطال الأجهزة الكهربائية.

والآن، سأرسم منحنى الاقتران $y = \tan x$ ، ملاحظا الفرق بينه وبين منحنى الاقتران $\sin x$ ، و $\cos x$.

مثال 2

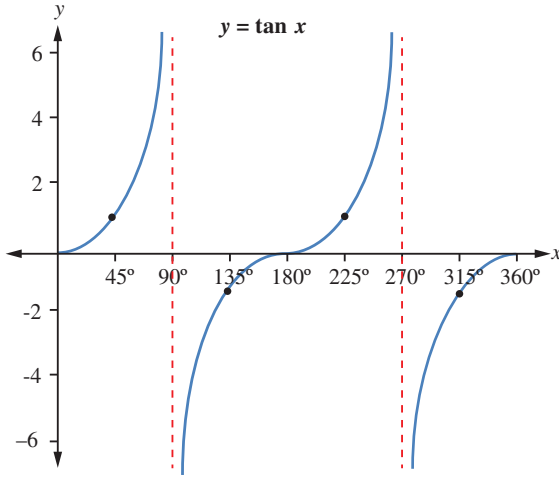
أرسم منحنى الاقتران $y = \tan x$ ، ثم أصفه علما بأن $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$:

الخطوة 1: أكوّن جدولا، ثم أكتب فيه زوايا شائعة.

الخطوة 2: أجد قيمة $\tan x$ لكل زاوية x ، ثم أكتبها في الجدول:

x	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
$\tan x$	0	1	غير مُعرّف	-1	0	1	غير مُعرّف	-1	0

الخطوة 3: أعيّن النقاط في المستوى الإحداثي، ملاحظاً صعوبة التوصل بين النقاط بمنحنى واحد؛ لأن قيمة $\tan x$ غير مُعرّفة للزاويتين 90° و 270° ؛ لذا أصل النقاط قبل الزاوية 90° ببعضها، والنقاط بين الزاويتين 90° و 270° ببعضها، والنقاط بعد الزاوية 270° ببعضها، فينتج رسم كما في الشكل الآتي.



أتعلم

يُسمى كل من المستقيمين $x = 90^\circ$ و $x = 270^\circ$ خطّ تقاربٍ رأسيٍّ لمنحنى $\tan x$ ؛ لأن المنحنى يقترب كثيراً منهما، لكنه لا يقطعُهُما.

يُبين الشكل أن منحنى $\tan x$ غير متصل؛ فهو مُكوّن من عدّة قطع، وأن الظل موجب بين الزاويتين 0° و 90° ، وبين الزاويتين 180° و 270° ، وأنه يكون سالباً بين الزاويتين 90° و 180° ، وبين الزاويتين 270° و 360° .

أتتحقق من فهمي

أرسم منحنى الاقتران $y = \tan x$ ، علماً بأن $90^\circ < x < 270^\circ$ ، مُستعملاً زوايا مختلفة عن تلك التي في الجدول السابق، ثم أجد قيم الظل لهذه الزوايا باستعمال الآلة الحاسبة.

أُتدرب وأحل المسائل

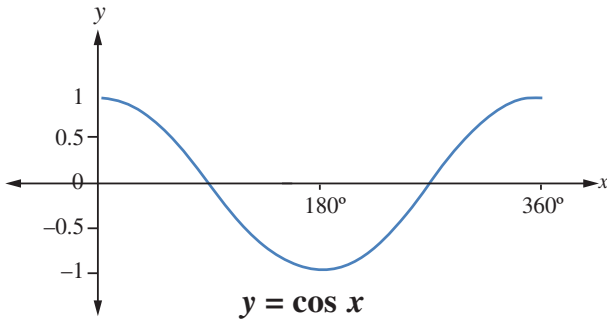
أرسم منحنى الاقتران لكل مما يأتي في الفترة المعطاة، ثم أصفه:

1 $y = \sin x \quad 0^\circ \leq x \leq 270^\circ$

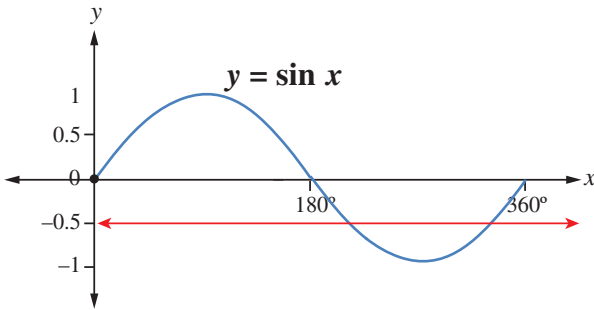
2 $y = \cos x \quad 0^\circ \leq x \leq 180^\circ$

3 $y = \sin x \quad 0^\circ \leq x \leq 180^\circ$

4 $y = \tan x \quad 0^\circ \leq x \leq 180^\circ$

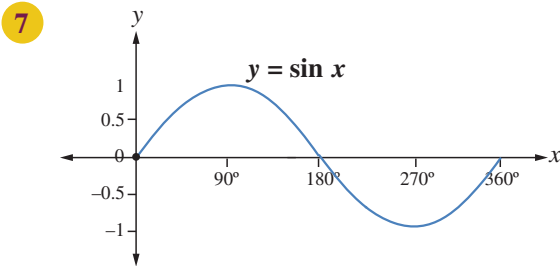


5 يُبين الشكل المجاور جزءاً من التمثيل البياني للاقتران $y = \cos x$. بناءً على هذا الشكل، أقدّر قيمتين للمتغير x يكون عندهما $\cos x = -0.5$

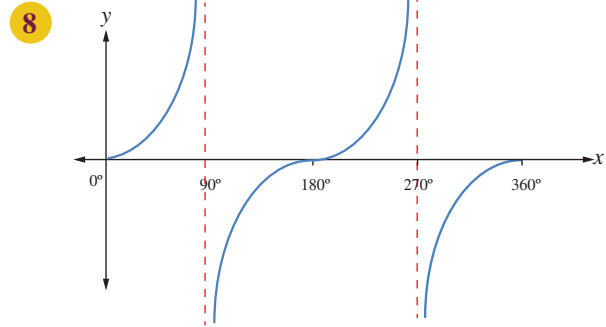


6 يُبين الشكل المجاور جزءاً من التمثيل البياني للاقتران $y = \sin x$. بناءً على هذا الشكل، أقدّر قيمتين للمتغير x يكون عندهما $\sin x = -0.5$

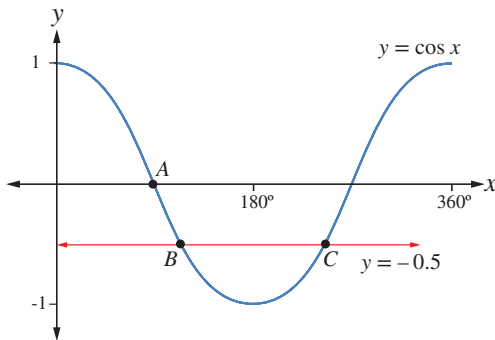
أستعمل التمثيلات البيانية الآتية لأجد جميع القيم الممكنة لكل من a, b, c, d, e, f, g, h :



$$\begin{aligned} \sin 0^\circ &= \sin a^\circ = \sin b^\circ \\ \sin 30^\circ &= \sin c^\circ \\ \sin 60^\circ &= \sin d^\circ \\ \sin 210^\circ &= \sin e^\circ \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \tan 0^\circ &= \tan e^\circ = \tan f^\circ \\ \tan 45^\circ &= \tan g^\circ \\ \tan 60^\circ &= \tan h^\circ \end{aligned}$$

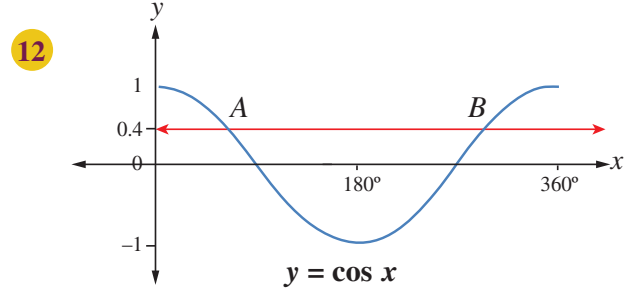
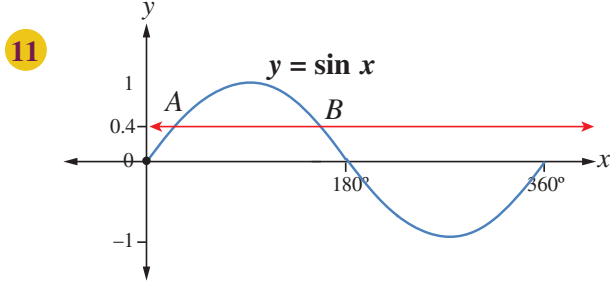


يُبين الشكل المجاور جزءاً من التمثيل البياني للاقتران $y = \cos x$ الذي يقطعُه المستقيم $y = -0.5$ في النقطتين B, C :

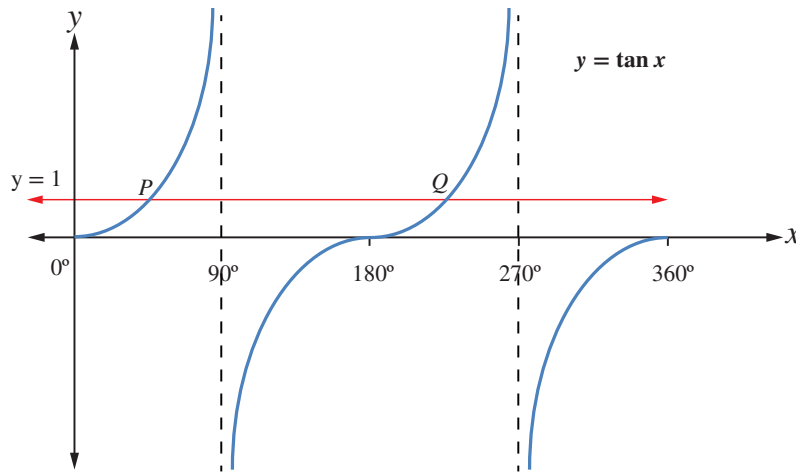
9 أجد إحداثيات النقطة A .

10 أجد إحداثيات النقطتين B, C باستعمال الآلة الحاسبة.

أجدُ إحداثياتِ النقطتينِ A و B في كلِّ شكلٍ ممَّا يأتي باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ:



13 يُبيِّنُ الشكلُ الآتي جزءاً من التمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ $y = \tan x$ ، حيثُ يقطعُ المستقيمُ $y = 1$ منحنى $y = \tan x$ في النقطتينِ P ، و Q . أكتبُ الإحداثيَّ x لكلِّ من النقطتينِ P ، و Q .



مهارات التفكير العليا



14 تحدُّ: أرسِّمُ منحنَيي الاقترانينِ $y = \cos x$ و $f = 2 \cos x$ في المستوى الإحداثيِّ نفسه، في الفترة $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ ، ثمَّ أقارنُ بينهما.

15 أكتبُ: ما الفرقُ بينَ منحنَيي الجيبِ وجيبِ التمامِ؟

حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ Solving Trigonometric Equations

حُلُّ معادلاتٍ تتضمنُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ، وتكونُ فيها مجموعةُ الحَلِّ ضمنَ دورةٍ واحدةٍ. المعادلةُ المثلثيةُ.

فكرةُ الدرس



المصطلحات



مسألةُ اليوم



ساعةٌ حائطيةٌ كبيرةٌ مُعلَّقةٌ على جدارِ غرفةٍ. إذا كانَ طولُ عقربِ الساعاتِ فيها 16 cm، وُبعُدُ رأسِ العقربِ عنُ سقفِ الغرفةِ يُمثَّلُ دائماً بالعلاقة: $d = -60 \cos(30x) + 110$ ، حيثُ: d البُعدُ بالسنتيمتر، و x الوقتُ بالساعاتِ، فما الوقتُ الذي يبعُدُ فيه رأسُ عقربِ الساعاتِ 118 cm عنِ السقفِ؟

المعادلةُ المثلثيةُ (trigonometric equation) هي معادلةٌ مُتغيِّراتُها نسبٌ مثلثيةٌ لزاويةٍ مجهولةٍ. وحُلُّ المعادلةِ المثلثيةِ يعني إيجادَ الزاويةِ (أو الزوايا) التي تُحقِّقُ هذه المعادلةَ، وتجعلُ منها عبارةً صحيحةً.

من الأمثلة على المعادلات المثلثية:

$$\sin x = 0.5 \quad \tan x = 2.435 \quad 2 + \cos x = 3 - 2 \cos x \quad 2 \sin^2 x = 3$$

يُمكنُ حُلُّ بعضِ المعادلاتِ، مثل: $\sin x = a$ ، و $\cos x = a$ ، باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، أو استعمالِ ما نتذكَّره منُ نسبِ الزوايا الخاصةِ.

مثال 1

أحلُّ المعادلتين الآتيتين، علماً بأن $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$:

1 $2 \sin x = 1$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ$$

ولأنَّ الجيبَ يكونُ أيضًا موجبًا في الربعِ الثاني؛ فإنَّهُ يوجدُ حَلٌّ آخرٌ للمعادلةِ هو:

$$180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

إذن، لهذه المعادلةِ حلَّانِ ضمنَ الفترةِ المعطاةِ في المسألةِ، هما: 30° ، و 150° .

أندكّر

يكونُ جيبُ الزاويةِ موجبًا في الربعين: الأول، والثاني.

2 $3 \cos x - 1 = 2$

$3 \cos x = 3$

$\cos x = 1$

$x = \cos^{-1}(1) = 0^\circ$

لهذه المعادلة حلان ضمن الفترة المعطاة في المسألة، هما: 0° و 360° .

بإضافة 1 إلى الطرفين

بقسمة طرفي المعادلة على 3

باستعمال الآلة الحاسبة

أتحقق من فهمي 

أحل المعادلتين الآتيتين، علماً بأن $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$:

a) $2 \cos x = \sqrt{3}$

b) $2 \tan x + 3 = 1$

يتطلب حل بعض المعادلات مزيداً من التبسيط والمعالجة قبل استعمال الآلة الحاسبة.

مثال 2

أحل المعادلتين الآتيتين:

1 $2(\tan x - 3) + 4 = 12, 0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

$2 \tan x - 6 + 4 = 12$

$2 \tan x = 14$

$\tan x = 7$

$x = \tan^{-1}(7)$

$x = 81.9^\circ$

باستعمال الخاصية التوزيعية

بالتبسيط

بقسمة طرفي المعادلة على 2

تعريف معكوس الظل

باستعمال الآلة الحاسبة

ولأن الظل يكون أيضاً موجباً في الربع الثالث؛ فإنه يوجد حل آخر للمعادلة هو:

$180^\circ + 81.9^\circ = 261.9^\circ$

إذن، لهذه المعادلة حلان ضمن الفترة المعطاة في المسألة، هما: 81.9° و 261.9°

أتذكر

الزوايا المرجعية هي الزوايا المحصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ الحادة المرسومة في الوضع القياسي والمحور x .

2 $1 + 4 \sin(3x) = 2.5, 0^\circ \leq x \leq 90^\circ$

$$4 \sin(3x) = 2.5 - 1$$

$$\sin(3x) = \frac{1.5}{4}$$

$$\sin \theta = \frac{1.5}{4} = 0.375$$

$$\theta = \sin^{-1}(0.375)$$

$$\theta = 22^\circ$$

$$22^\circ = 3x \Rightarrow x = 7.3^\circ$$

ولأن الجيب يكون أيضًا موجبًا في الربع الثاني؛ فإنه يوجد حلٌّ آخرٌ للمعادلة هو:

$$180^\circ - 22^\circ = 158^\circ$$

$$\theta = 3x = 158^\circ$$

$$x \approx 52.7^\circ$$

ب طرح 1 من الطرفين

بقسمة طرفي المعادلة على 4

باستعمال الرمز θ بدلًا من $3x$ ،

حيث: $0^\circ \leq \theta \leq 270^\circ$

تعريف معكوس الجيب

باستعمال الآلة الحاسبة

الزاوية في الربع الثاني

بالتعويض

بقسمة طرفي المعادلة على 3

معلومة أساسية

إذا كانت $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ ،

فإن $0^\circ \leq 3x \leq 270^\circ$

إذن، للمعادلة $1 + 4 \sin(3x) = 2.5$ حلان ضمن الفترة المعطاة في المسألة، هما:

7.3° و 52.7°

أتحقق من فهمي 

أحلُّ المعادلتين الآتيتين:

a) $3(\sin x + 2) = 3 - \sin x, 0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

b) $3 \cos(2x) - 1 = 0, 0^\circ \leq x \leq 180^\circ$

يُمكنُ حلُّ المعادلات المثلثية التربيعية بطرائقٍ مشابهةٍ لطرائقِ حلِّ المعادلات التربيعية الجبرية، أبرزها: إيجاد العامل المشترك، والتحليل إلى ناتج ضرب قوسين، وغير ذلك من الطرائق التي تعرّفناها سابقًا.

مثال 3

أحلُّ المعادلتين الآتيتين، علمًا بأنَّ $0^\circ \leq x < 360^\circ$:

1 $3 \sin x \cos x - 2 \sin x = 0$

تحوي هذه المعادلة نسبتين مثلثيتين، ويُلاحظ أنَّ $\sin x$ تكرر في حدِّي المعادلة، ما يعني أنَّها تُشبه المعادلة $3yz - 2y = 0$ ؛ لذا يُمكن تحليلها بإخراج عاملٍ مشتركٍ:

$\sin x (3 \cos x - 2) = 0$ بإخراج العامل المشترك $\sin x$

$3 \cos x - 2 = 0, \sin x = 0$ خاصية الضرب الصفري

وبذلك أتوصلُ إلى معادلتين بسيطتين، ثمَّ أحلُّ كلَّ معادلةٍ على حدة:

$\sin x = 0$ المعادلة الأولى

باستعمال الآلة الحاسبة، أو جدول الزوايا الخاصة $x = 0^\circ, x = 180^\circ$

$3 \cos x - 2 = 0$ المعادلة الثانية

$3 \cos x = 2$ بإضافة 2 إلى الطرفين

$\cos x = \frac{2}{3}$ بقسمة الطرفين على 3

$x = \cos^{-1} \left(\frac{2}{3} \right)$ تعريف معكوس جيب التمام

$x = 48.2^\circ$ باستخدام الآلة الحاسبة

ولأنَّ جيب التمام يكون أيضًا موجبًا في الربع الرابع؛ فإنَّه يوجد حلٌّ آخرٌ للمعادلة هو: $x = 360^\circ - 48.2^\circ = 311.8^\circ$

إذن، حلول هذه المعادلة هي: $0^\circ, 180^\circ, 48.2^\circ, 311.8^\circ$

2 $3 \sin^2 x = 2 \sin x + 1$

أجعلُ الطرف الأيمن من المعادلة صفرًا بطرح $(2 \sin x + 1)$ من الطرفين:

$3 \sin^2 x - 2 \sin x - 1 = 0$

هذه المعادلة تُشبه المعادلة الجبرية $3y^2 - 2y - 1 = 0$ ؛ لذا يُمكن حلُّها بالتحليل إلى العوامل:

$(3 \sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$ بالتحليل إلى العوامل

$3 \sin x + 1 = 0, \sin x - 1 = 0$ خاصية الضرب الصفري

أَتَذَكَّرُ

يكونُ جيبُ تمامِ الزاوية موجبًا في الربعين: الأول، والرابع.

$$3 \sin x + 1 = 0$$

المعادلة الأولى

$$3 \sin x = -1$$

بطرح 1 من الطرفين

$$\sin x = -\frac{1}{3}$$

بقسمة الطرفين على 3

$$x = \sin^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$$

تعريف معكوس الجيب

$$x = 19.5^\circ$$

باستعمال الآلة الحاسبة، وتجاهل الإشارة السالبة

يُمثل ما سبق الزاوية المرجعية للحل، لا الحل نفسه؛ لأنَّ الجيب سالب في الربعين: الثالث، والرابع.

$$180^\circ + 19.5^\circ = 199.5^\circ \text{ هو: } \text{الحل الثالث في الربع}$$

$$360^\circ - 19.5^\circ = 340.5^\circ \text{ هو: } \text{الربع الرابع هو:}$$

$$\text{والآن، أحل المعادلة } \sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = 1$$

بإضافة 1 إلى الطرفين

$$x = \sin^{-1}(1)$$

تعريف معكوس الجيب

$$x = 90^\circ$$

باستعمال الآلة الحاسبة، أو جدول الزوايا الخاصة

إذن، حلول هذه المعادلة هي: $90^\circ, 199.5^\circ, 340.5^\circ$

أتحقق من فهمي

أحل المعادلتين الآتيتين، علمًا بأن $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$:

a) $4 \sin x \tan x + 3 \tan x = 0$

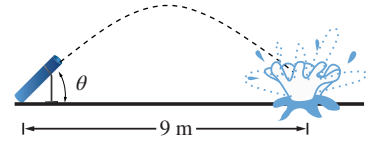
b) $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$

مثال 4: من الحياة

مدفع هوائي يميل عن الأرض بزاوية قياسها θ . انطلق من فوهته بالون مملوء بالماء بسرعة ابتدائية مقدارها 12 m/s ، فسقط على بُعد 9 m من المدفع. إذا كانت العلاقة التي تُمثل المسافة الأفقية d التي يقطعها البالون هي:

$$d = \frac{1}{10} v^2 \sin 2\theta$$

حيث v سرعة البالون الابتدائية، فما قيمة θ ، مُقرَّبًا إجابتي إلى أقرب عُشر درجة؟



الخطوة 1: أَعوّض القيمَ المعطاةَ في المسألة في المعادلةِ المعطاةِ، ثمَّ أَحُلُّها لإيجادِ قيمةِ θ .

$$9 = \frac{1}{10} (12)^2 \sin 2\theta$$

الخطوة 2: لتسهيلِ الحساباتِ، أفترضُ أن $x = 2\theta$ ، ثمَّ أَحُلُّ المعادلةَ:

$$9 = \frac{1}{10} (12)^2 \sin x \quad \text{المعادلة}$$

$$90 = 144 \sin x \quad \text{بضربِ الطرفينِ في 10، والتبسيط}$$

$$\sin x = \frac{90}{144} \quad \text{بقسمةِ الطرفينِ على 144}$$

$$x = \sin^{-1} \frac{90}{144} = 38.7^\circ \quad \text{باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، والتقريبِ إلى أقربِ عُشرٍ}$$

الخطوة 3: أجدُ الحَلَّ الآخرَ في الربعِ الثاني، وهو: $180^\circ - 38.7^\circ = 141.3^\circ$

الخطوة 4: أجدُ الآنَ قيمةَ θ :

$$x = 2\theta \quad \text{العلاقةُ بينَ } x \text{ و } \theta$$

$$\theta = \frac{38.7^\circ}{2} = 19.4^\circ \quad \text{أو} \quad \theta = \frac{141.3^\circ}{2} = 70.7^\circ \quad \text{بالقسمةِ على 2، والتعويضِ}$$

إذن، يصنعُ المدفَعُ معَ الأرضِ زاويةً قياسها 19.4° ، أو 70.7° تقريبًا.

أتحقق من فهمي

فيزياء: فرقُ الجهدِ E (بالفولت) في دائرةٍ كهربائيةٍ يُعطى بالعلاقة: $E = 20 \cos(180t)$ ، حيثُ t الزمنُ (بالثواني):

(a) أفترضُ أن $x = 180t$ ، وأحلُّ المعادلةَ $12 = 20 \cos x$ ، علمًا بأنَّ $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

(b) أجدُ الزمنَ t (حيثُ $0 \leq t \leq 2$) عندما يكونُ فرقُ الجهدِ 12 volt، مُقربًا إجابتي إلى أقربِ جزءٍ من مئةٍ من الثانية.



الكهرباءُ موجودةٌ في جسمِ الإنسانِ أيضًا؛ فعضلاتُ القلبِ مثلًا تنقبضُ بتأثيرِ تياراتٍ كهربائيةٍ تصلُ إليها عبرَ العُقدِ والوصلاتِ العصبية.



أحلُّ المعادلات الآتية، علمًا بأنَّ $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$:

1 $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

2 $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

3 $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

4 $7 + 9 \cos x = 1$

5 $2 \sin x + 1 = 0$

6 $1 - 2 \tan x = 5$

أحلُّ المعادلات الآتية، علمًا بأنَّ $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$:

7 $5 - 2 \cos (4x) = 4$

8 $3 + 4 \tan (2x) = 6$

9 $13 \sin (3x) + 1 = 6$

أحلُّ المعادلات الآتية، مُفترضًا أنَّ قياسَ الزاوية المجهولة يقعُ في الفترة $[0^\circ, 360^\circ]$:

10 $2 (\sin x - 2) + 1 = 3 \sin x$

11 $\tan x - 3 (2 \tan x - 1) = 10$

12 $15 \tan x - 7 = 5 \tan x - 3$

13 $5 (\cos x - 1) = 6 + \cos x$

14 $\tan^2 x - 9 \tan x + 20 = 0$

15 $2 \cos^2 x - \cos x = 0$

16 $4 \sin^2 x - 3 \sin x = 1$

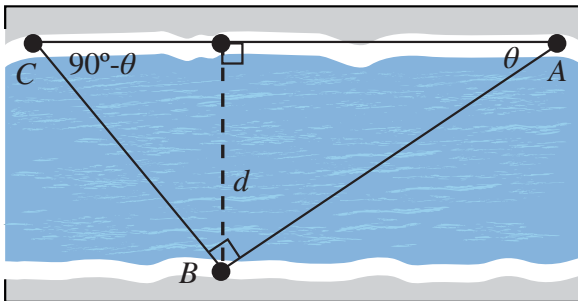
17 $2 \sin^2 x - 1 = 0$

18 $4 \cos^2 x - 4 = 15 \cos x$

19 $\cos x = \sin x$

20 **ساعات:** أحلُّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

21 **سباحة:** سبَّحَ حامدٌ مسافةً 90 m من النقطة A على الضفة الشمالية لنهرٍ إلى النقطة B على الضفة المقابلة، ثمَّ دارَ بزوايا قائمة، وسبَّحَ مسافةً 60 m إلى نقطةٍ أخرى C على الضفة الشمالية. إذا كانَ قياسُ الزاوية CAB هو θ ، وقياسُ الزاوية ACB هو $(90^\circ - \theta)$ ، وطولُ العمود من B إلى CA يساوي عرضَ النهر d ، فأعبِّر عن d بدلالة θ مرَّةً، وبدلالة $(90^\circ - \theta)$ مرَّةً أخرى، ثمَّ أكتبْ معادلةً وأحلَّها لإيجادِ قيمة θ ، ثمَّ أجدُ عرضَ النهر.





22 **دولابٌ:** يُعطى ارتفاع الراكب عن الأرض في دولابٍ دوّارٍ بالمعادلة:

$$h = 27 - 25\cos \theta$$

حيث h الارتفاع بالأمتار، و θ قياس الزاوية التي دارها الدولاب. متى يكون ارتفاع الراكب عن الأرض 49 m؟

23 **حركة مقذوفات:** المسافة الأفقية التي تقطعها مقذوفة في الهواء (من دون افتراض وجود مقاومة الهواء) تُعطى بالمعادلة:

$$d = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$$

حيث: v_0 السرعة الابتدائية، و θ الزاوية التي تُطلق بها المقذوفة، و g تسارع الجاذبية الأرضية (9.8 m/s^2). إذا قُدِّت كرة بيسبول بسرعة ابتدائية مقدارها 40 m/s، فما الزاوية التي تُوجَّه بها الرمية لكي تقطع الكرة

مسافة أفقية مقدارها 110 m قبل سقوطها على الأرض؟ ما أبعد نقطة يمكن أن تصلها الكرة إذا قُدِّت بهذه السرعة

الابتدائية؟

مهارات التفكير العليا



24 **أكتشف الخطأ:** حلّ كلٌّ من سعيدٍ وعليٍّ المعادلة: $2\sin x \cos x = \sin x$ ، حيث: $0^\circ \leq x < 360^\circ$:

علي:

الحلان هما: $60^\circ, 300^\circ$ لأن:

$$\frac{2\sin x \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\sin x}$$

$$2 \cos x = 1$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = 60^\circ, 300^\circ$$

سعيد:

الحلول هي: $0^\circ, 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$ لأن:

$$\sin x (2 \cos x - 1) = 0$$

$$\sin x = 0$$

$$x = 0^\circ, 180^\circ$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = 60^\circ, 300^\circ$$

أيهما إجابته صحيحة؟ أبرر إجابتي.

25 **تحذّر:** أحلّ المعادلة: $2 \sin x \cos x + \sin x + 2 \cos x + 1 = 0$ ، علمًا بأن $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

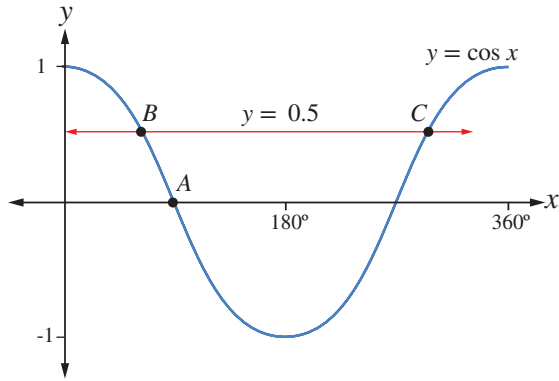
26 **تحذّر:** أحدّد عدد حلول المعادلة: $\cos x - \sin x - 1 = 0$ ، حيث: $0^\circ \leq x < 360^\circ$.

اختبار نهاية الوحدة

أجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية x المرسومة في الوضع القياسي، التي يقطع ضلع انتهائها دائرة الوحدة عند كلٍّ من النقاط الآتية:

- 6 (0.6, 0.8) 7 $(\frac{5}{13}, \frac{-12}{13})$
 8 (-1, 0) 9 $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$
 10 (0, 1) 11 (-0.96, 0.28)

يُبين الشكل التالي جزءاً من التمثيل البياني للاقتران المثلثي $y = \cos x$ الذي يقطعُه المستقيم $y = 0.5$ في النقطتين B و C :



12 أجد إحداثيات النقطة A .

13 أجد إحداثيات النقطتين B ، و C .

- 14 $\sin x = \frac{-1}{2}$, $270^\circ \leq x \leq 360^\circ$
 15 $\cos x = 0.4$, $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$
 16 $\tan x = 3$, $180^\circ \leq x \leq 360^\circ$
 17 $\sin x = -\cos x$, $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في ما يأتي:

1 إذا كان $\cos \theta = -0.5$ ، فإن ضلع انتهاء الزاوية θ في الوضع القياسي يقع في:
 (a) الربع الثاني. (b) الربعين: الثاني، والثالث.

(c) الربع الرابع. (d) الربعين: الثاني، والرابع.

2 إذا قطع ضلع انتهاء الزاوية θ في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $P(-\frac{40}{41}, \frac{9}{41})$ ، فإن قيمة $\sin \theta$ هي:

- a) $-\frac{40}{41}$ b) $\frac{9}{40}$
 c) $-\frac{9}{41}$ d) $\frac{9}{41}$

3 قياس الزاوية المرجعية للزاوية 230° هو:

- a) 130° b) 40°
 c) 50° d) 140°

4 إذا كانت $90^\circ < x < 180^\circ$ ، وكان $\sin x = \frac{8}{17}$ ، فإن قيمة $\tan x$ هي:

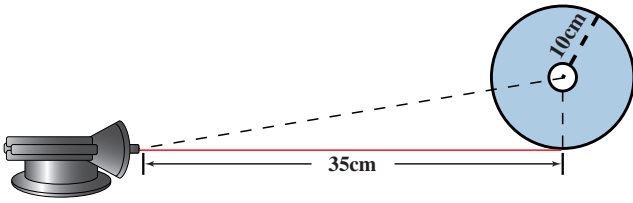
- a) $-\frac{8}{15}$ b) $\frac{8}{15}$
 c) $\frac{15}{17}$ d) $-\frac{15}{8}$

5 حل المعادلة $x = \sin^{-1}(-1)$ هو:

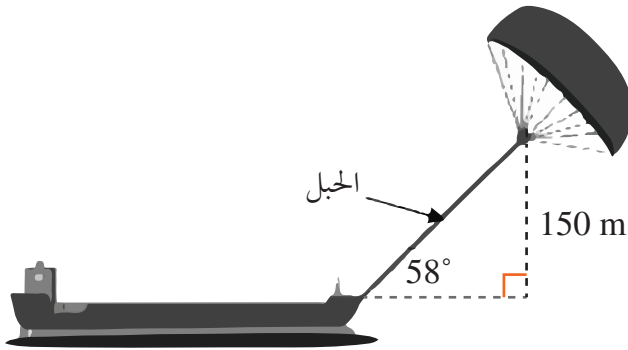
- a) 0° b) 90°
 c) 270° d) 360°

تدريب على الاختبارات الدولية

32 في تجربة علوم لاكتشاف خصائص الضوء، وُضع مصدر ضوئي ليزري على بُعد 35 cm من قرص دائري مثقوب من مركزه، وكان طول نصف قطره 10 cm كما في الشكل الآتي. أجد زاوية الشعاع الذي يمر خلال ثقب مركز هذا القرص.



33 لاستغلال طاقة الرياح وخفض استهلاك الوقود؛ رُبط شراع طائر بسفينة. ما الطول المناسب لحبل الشراع كي يسحب السفينة بزاوية 58° ، ويكون الشراع على ارتفاع رأسي مقداره 150 m كما هو مبين في الشكل الآتي:



- a) 177 m
- b) 283 m
- c) 160 m
- d) 244 m

أجد قيمة كل مما يأتي:

18 $\sin 140^\circ$ 19 $\cos 173^\circ$

20 $\tan 219^\circ$ 21 $\sin 320^\circ$

22 $2\sin 150^\circ + \tan 135^\circ$

23 $\sin^2 150^\circ + \cos^2 150^\circ$

أجد حل المعادلات الآتية، علمًا بأن $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$:

24 $3 \cos^2 x - 1 = 0$

25 $\sin x = -1.3212 \cos x$

26 $4 + 5 \sin^2 x = 9 \sin x$

27 $\tan x = 4 \sin x$

28 $3 \tan^2 x \cos x = 3 \tan^2 x$

29 إذا كانت x زاوية في الربع الأول، وكان $\sin x + \sin (180^\circ - x) = 1.4444$ فأجد قياس الزاوية x .

30 لعبة مدفع: يُطلق مدفع قذائف بالونات مائية في مسابقة للتسلية. إذا كان البعد الأفقي لقذيفة أُطلقت من المدفع بزاوية قياسها x مع المستوى الأفقي، وبسرعة ابتدائية مقدارها 7 m/s، يُعطى بالأمتار حسب العلاقة: $d = 7 + 2 \sin\left(\frac{3x}{5}\right)$ قذيفة أُطلقت بزاوية مقدارها 50° ؟

31 أجد أصفار الاقتران $y = 4(\sin x)^2 - 3$ ، علمًا بأن $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

تطبيقات المثلثات Triangle Applications

ما أهمية هذه الوحدة؟

لنسب المثلثية استعمالات كثيرة في العلوم، والهندسة، والإلكترونيات، مثل حساب ارتفاعات قمم الجبال والمباني، وتحديد اتجاهات تحليق الطائرات على الخريطة وغيرها.

سأتعلم في هذه الوحدة:

- ◀ تفسير الاتجاه من الشمال، وإيجاده لنقطة ما بالنسبة إلى نقطة معينة.
- ◀ حل المثلث باستخدام قانوني الجيوب، وجيوب التمام.
- ◀ استعمال جيب الزاوية لإيجاد مساحة المثلث.
- ◀ إيجاد أطوال وزوايا مجهولة في أشكال ثلاثية الأبعاد.

تعلمت سابقاً:

- ✓ إيجاد النسب المثلثية (الجيب، جيب التمام، الظل) في الأرباع الأربعة.
- ✓ استخدام العلاقة: $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ في حل مسألة عن مثلث قائم الزاوية.
- ✓ نمذجة مسائل حياتية باستعمال مثلثات قائمة الزاوية، تتضمن قياسات الزوايا والأطوال لأضلاع مجهولة.

صنع جهاز بسيط لإيجاد قياسات زوايا الارتفاع والانخفاض، ثم استعماله.

فكرة المشروع

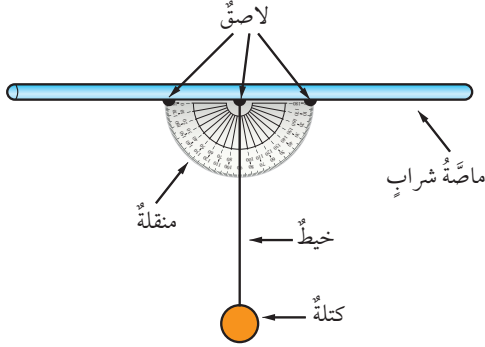


ماصّة شراب، منقلة، خيط، كتلة (مفتاح، أو ممحاة)، لاصق شفاف، شريط قياس.

المواد والأدوات



خطوات تنفيذ المشروع:



1 صنع الكلينومتر: أُبْتُت ماصّة الشراب على الحافة المستقيمة للمنقلة باستعمال لاصق شفاف، ثم أُبْتُت طرف الخيط في مركز المنقلة، وأربط بطرفه الآخر كتلة صغيرة، مثل: المفتاح، أو المشابك المعدنية؛ على أن تتدلى رأسياً إلى أسفل مثل خط الشاقول.

2 استعمال الكلينومتر: أستعمل أنا وأفراد مجموعتي الكلينومتر لإيجاد

ارتفاع بناية أو شجرة باتّباع الخطوات الآتية:

● اختار شيئاً لأقيس ارتفاعه، وليكن شجرة.

● أقف على مسافة من قاعدة الشجرة، ممسكاً بـ ماصّة الشراب.

● أنظر من فتحة ماصّة الشراب إلى قمة الشجرة، ثم أطلب إلى زميلي

أن يقرأ الزاوية x التي يشير إليها الخيط، ملاحظاً أن هذه الزاوية تقع

بين خط النظر والخط الرأسّي. وبذلك، تكون زاوية ارتفاع قمة

الشجرة: $(90^\circ - x)$.

● أقيس المسافة بين المكان الذي أقف عنده وقاعدة الشجرة.

● أستعمل القياسات التي دوّنتها لإيجاد ارتفاع الشجرة فوق مستوى

عيني، باستعمال العلاقة الآتية:

$$\tan(90^\circ - x) = \frac{h}{l} \Rightarrow h = l \tan(90^\circ - x)$$

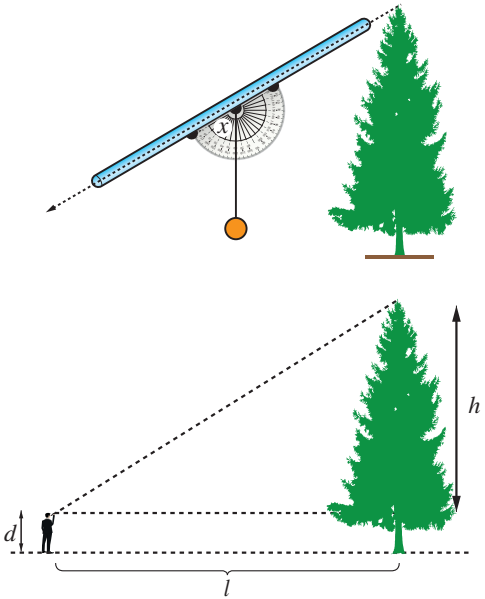
● أضيف المسافة بين الأرض ومستوى عيني إلى القيمة التي توصلت إليها لإيجاد ارتفاع الشجرة فوق سطح الأرض.

عرض النتائج:

أكتب مع أفراد مجموعتي تقريراً يتضمّن ما يأتي:

● صورة لجهاز الكلينومتر المصنوع.

● صوراً لجميع الأشياء التي قيست ارتفاعاتها، وتدوين الحسابات التي تمّت في أثناء القياس بجانب كل منها.



الاتجاه من الشمال Bearing

تفسير الاتجاه من الشمال، وإيجاده لنقطة ما بالنسبة إلى نقطة أخرى بالرسم، والقياس، والحساب باستعمال العلاقات بين الزوايا.

فكرة الدرس



المصطلحات

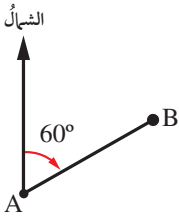


مسألة اليوم



الاتجاه من الشمال.
حلقت طائرة من عمان إلى العقبة، وقد صنع مسارها المستقيم زاوية قياسها 200° مع خط الشمال الجغرافي. ما قياس الزاوية بين مسار عودة الطائرة إلى عمان وخط الشمال الجغرافي؟

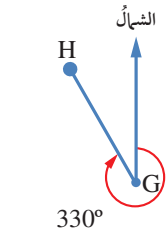
الاتجاه من الشمال (bearing) للنقطة B من النقطة A هو قياس الزاوية التي ضلع ابتدائها خط الشمال الجغرافي المرسوم من النقطة A ، وضلع انتهائها المستقيم AB ، وذلك عند قياس الزاوية في اتجاه حركة عقارب الساعة. يُكتب الاتجاه من الشمال باستعمال عدد من ثلاثة أرقام (منازل) بين 000° و 360° .



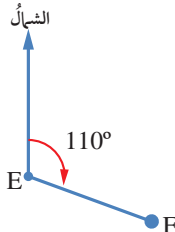
يبيّن الشكل المجاور أنّ الاتجاه من الشمال للنقطة B من النقطة A هو 060° .



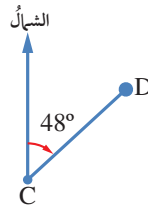
يُستخدم الاتجاه من الشمال كثيراً في تحديد خطوط الملاحة البحرية والجوية.



الاتجاه من الشمال للنقطة H من النقطة G هو 330° .



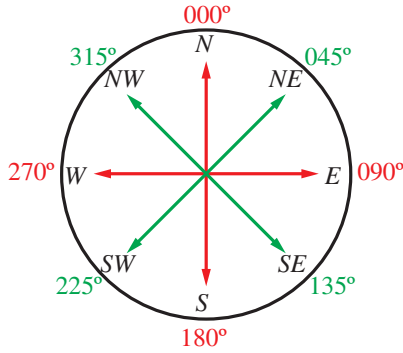
الاتجاه من الشمال للنقطة F من النقطة E هو 110° .



الاتجاه من الشمال للنقطة D من النقطة C هو 048° .

توجد أربعة اتجاهات رئيسية يجب تذكرها دائمًا، هي:

- 1 الشمال (N)، واتجاهه من مركز البوصلة هو (000°).
- 2 الشرق (E)، واتجاهه من مركز البوصلة هو (090°).
- 3 الجنوب (S)، واتجاهه من مركز البوصلة هو (180°).
- 4 الغرب (W)، واتجاهه من مركز البوصلة هو (270°).

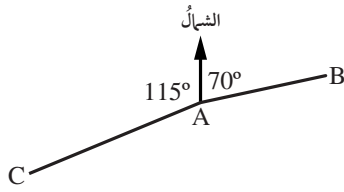


اعتمد الإنسان قديمًا على الشمس والقمر والنجوم في معرفة الاتجاهات، ثم أخذ يعتمد اليوم على البوصلة التي تُحدد اتجاه الشمال، ومنه تُحدد بقية الاتجاهات.

توجد أربعة اتجاهات أخرى مشهورة تقع بين الاتجاهات الأربعة الرئيسية يجب تذكرها دائمًا، هي:

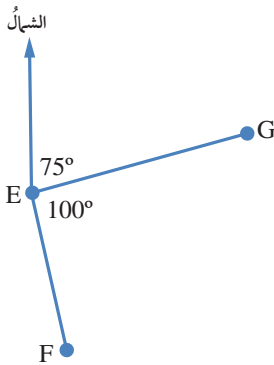
- 1 الشمال الشرقي (NE)، واتجاهه من مركز البوصلة هو (045°).
- 2 الجنوب الشرقي (SE)، واتجاهه من مركز البوصلة هو (135°).
- 3 الجنوب الغربي (SW)، واتجاهه من مركز البوصلة هو (225°).
- 4 الشمال الغربي (NW)، واتجاهه من مركز البوصلة هو (315°).

مثال 1



يُمثل الشكل المجاور موقع ثلاث مدن، هي: A، B، و C. أكتب اتجاه المدينة B من المدينة A، واتجاه المدينة C من المدينة A.

اتجاه المدينة B من المدينة A هو 070°، واتجاه المدينة C من المدينة A هو $360^\circ - 115^\circ = 245^\circ$



يُمثل الشكل المجاور موقع ثلاث سفن، هي: E، و F، و G. أكتب اتجاه السفينة G من السفينة E، واتجاه السفينة F من السفينة E.

أتحقق من فهمي

أتعلم

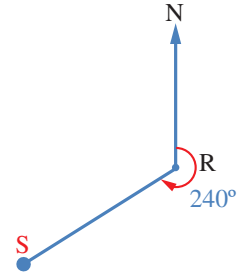
سنستعمل في بقية الدرس كلمة (اتجاه) وحدها للدلالة على الاتجاه من الشمال.

إذا عَلِمَ اتجاهُ النقطةِ S من النقطةِ R ، فيمكنُ حسابُ اتجاهِ النقطةِ R من النقطةِ S .

مثال 2

أجدُ اتجاهَ النقطةِ R من النقطةِ S في الشكلِ المجاورِ.

الطريقةُ الأولى: استعمالُ الرسمِ.



أرسمُ خطاً رأسياً يُبينُ اتجاهَ الشمالِ الجغرافيِّ

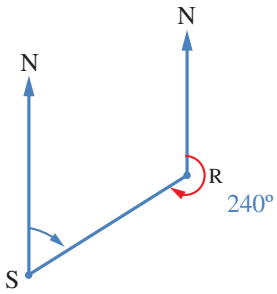
عندَ النقطةِ S ، ثمَّ أستعملُ منقلةً لأقيسَ الزاويةَ

التي رأسها S ، وضلعاها خطُ الشمالِ (SN)

والمستقيمُ SR .

سأجدُ أن قياسَ هذه الزاويةِ هو 60° ، إذن، اتجاهُ

النقطةِ R من النقطةِ S هو 060° .



الطريقةُ الثانيةُ: استعمالُ الجبرِ.

يُمكنُ إيجادُ اتجاهِ النقطةِ R من النقطةِ S باستعمالِ العلاقاتِ بينَ الزوايا.

$$m \angle NRS = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$$

مجموعُ قياسِ الزوايا حولَ نقطةٍ

هو 360°

$$m \angle NSR = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

خطاً الشمالِ متوازيان؛ لذا،

فالزاويتانِ الداخليتانِ

NRS ، و NSR متكاملتانِ

أذكّر

الزاويتانِ المتكاملتانِ

هُما زاويتانِ مجموعُ

قياسيهما 180°

أتحقق من فهمي

إذا كانَ اتجاهُ النقطةِ X من النقطةِ Z هو 295° ، فما اتجاهُ النقطةِ Z من النقطةِ X ؟



مريمُ الجيليُّ هي عالمةُ رياضياتٍ وفلكٍ مُسلمةٌ عاشت في حلب زمنَ الدولة العباسية، واخترعت الأسطرلابَ المُعقَّد؛ وهو آلةٌ فلكيةٌ مهمَّةٌ بُنيتَ عليها آليَّةُ عملِ أنظمةِ الملاحةِ الحديثةِ (GPS).

أرسم شكلاً يوضح كل موقف مما يأتي:

5 اتجاه النقطة B من النقطة W هو 310° .

4 اتجاه النقطة C من النقطة H هو 170° .

أرسم شكلاً لحل المسائل الآتية:

6 اتجاه A من B هو 070° . أجد اتجاه B من A .

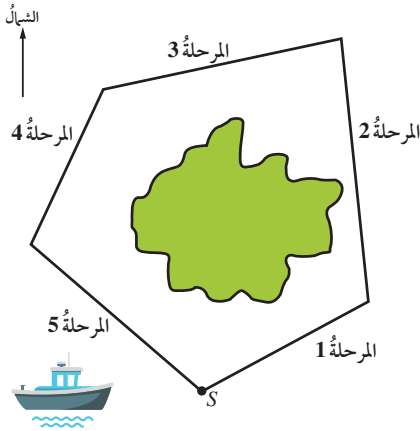
8 تقع النقطة A شمالي النقطة C ، وتقع النقطة B شرقي النقطة A ، واتجاه النقطة B من النقطة C هو 045° . أرسم شكلاً يُبين مواقع النقاط الثلاث.

ملاحظة بحرية: أبحر قارب حول الأضلاع الأربعة لمربع مساحته كيلو متر مربع واحد:

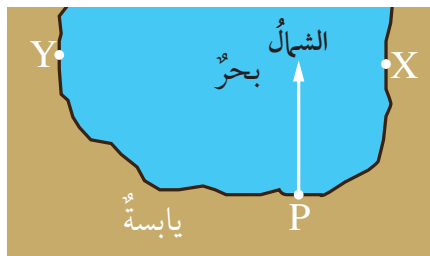
9 إذا بدأ الإبحار في اتجاه الشمال، فما الاتجاهات الثلاثة التالية التي سلكها حتى أكمل رحلته حول المربع باتجاه حركة عقارب الساعة؟

10 إذا بدأ الإبحار في اتجاه 090° ، فما الاتجاهات الثلاثة التالية التي سلكها حتى أكمل رحلته حول المربع بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة؟

11 خرائط: تُبين الخريطة الآتية رحلة قارب حول إحدى الجزر، بدأت من الموقع S ، وانتهت عنده. إذا كان كل 1 cm على الخريطة يُمثل 20 km ، فما طول كل مرحلة من مراحل الرحلة واتجاهها؟ أنسخ الجدول الآتي، ثم أكمله:



المرحلة	المسافة الحقيقية	الاتجاه
1		
2		
3		
4		
5		



موانئ: يُبين المخطط المجاور الميناء P والمرفأين X و Y على الساحل:

12 أبحر قارب صيد من الميناء P إلى المرفأ X . ما اتجاه المرفأ X من الميناء P ؟

13 أبحر يخت من الميناء P إلى المرفأ Y . ما اتجاه المرفأ Y من الميناء P ؟

مواقع جغرافية: يُبين المخطط المجاور موقع بيت أريج عند النقطة H والنادي الرياضي الذي ترآه عند النقطة C :

مقياس الرسم: كل 1 cm يُمثل 200 m

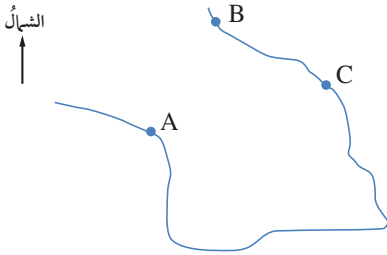


14 أستخدم مقياس الرسم المعطى لإيجاد المسافة الحقيقية بين بيت أريج والنادي الرياضي.

15 أستخدم منقلة لإيجاد اتجاه النادي من بيت أريج.

16 يبعد السوق التجاري S مسافة 600 m عن بيت أريج، وباتجاه 150° من بيتها. أعيّن موقع السوق التجاري S على نسخة من المخطط.

17 ملاحظة جوية: في أثناء تحليق طائرة باتجاه 072° ، طُلب إلى قائدها التوجّه إلى مطارٍ صوب الجنوب. ما الزاوية التي سيستدير بها؟



18 خرائط: تُمثل A و B و C ثلاث قرى تقع على رؤوس مربع في خليج ما. إذا كان اتجاه القرية B من القرية A هو 030° ، فما اتجاه القرية A من القرية C ؟

19 أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.

مهارات التفكير العليا



20 مسألة مفتوحة: أرسم مثلثًا ذا قاعدة أفقية أسميه ABC ، ثم أقيس زواياه، ثم أجد اتجاه A من B ، واتجاه C من A ، واتجاه C من B .

تحدّ: أبحرت سفينة من الميناء P مسافة 57 km باتجاه الشمال، ثم تحوّلت إلى اتجاه 045° ، وقطعت مسافة 38 km. إذا كان موقع السفينة الحالي هو S ، فأجد:

21 SP .

22 اتجاه موقع السفينة من الميناء P .

الدرس 2

قانون الجيوب Law of Sines

استعمال قانون الجيوب لإيجاد طول ضلع، أو قياس زاوية في مثلث، عُلِمَ فيه ضلعان وزاوية مقابلة لأحدهما، أو زاويتان وضلع.

حلّ المثلث، قانون الجيوب.

فكرة الدرس



المصطلحات

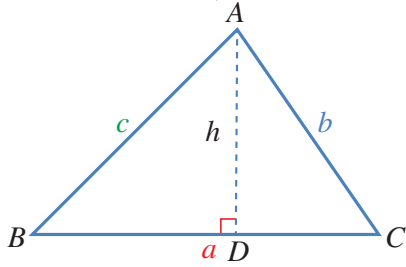


مسألة اليوم



إذا كانت جرش والزرقاء ومأدبا تُشكّل رؤوس مثلث على الخريطة، والمسافة بين مدينتي الزرقاء وجرش 44 km، وقياس الزاوية التي تقع عند رأسها مدينة جرش 52° ، وقياس الزاوية التي تقع عند رأسها مدينة الزرقاء 93° ، فهل يُمكن بهذه المعلومات حساب المسافة بين مدينتي جرش ومأدبا؟

يوجد في أيّ مثلث ستة قياسات، هي: ثلاثة أضلاع، وثلاث زوايا. وإيجاد هذه القياسات يُعرف باسم **حلّ المثلث** (solving a triangle)؛ إذ تساعد قياسات الزوايا على حلّ المثلثات في حال كانت بعض قياساتها معروفة، وذلك باستعمال نسبة الجيب لإيجاد علاقات بين أطوال الأضلاع.



ففي المثلث ABC المرسوم جانباً، يُمثّل h الارتفاع من النقطة A ؛ لذا فهو عمودي على القاعدة BC .

يُمكن الاستفادة من تعريف الجيب في استنتاج بعض العلاقات كما يأتي:

$$\sin B = \frac{h}{c}$$

تعريف الجيب

$$h = c \sin B$$

بالضرب التبادلي

$$\sin C = \frac{h}{b}$$

تعريف الجيب

$$h = b \sin C$$

بالضرب التبادلي

$$c \sin B = b \sin C$$

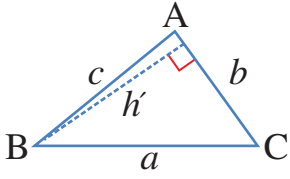
بالمساواة $h = h$

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$$

بقسمة الطرفين على $\sin B$ ، ثم على $\sin C$

رموز رياضية

تشير الأحرف الكبيرة A, B, C إلى رؤوس المثلث وزواياه، في حين تشير الصغيرة منها إلى أطوال الأضلاع. فمثلاً، طول الضلع المقابل للزاوية A يشار إليه بالحرف a ، وهكذا.



وبالمثل، يُمكنُ استنتاجُ العلاقتينِ الآتيتينِ عندَ رسمِ ارتفاعِ المثلثِ منَ النقطةِ B بشكلٍ عموديٍّ على AC ، أو رسمِ ارتفاعه منَ النقطةِ C عمودياً على AB .

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

عندَ دمجِ هذهِ العلاقاتِ الثلاثِ معاً، ينتجُ **قانونُ الجيوب** (law of sines).

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

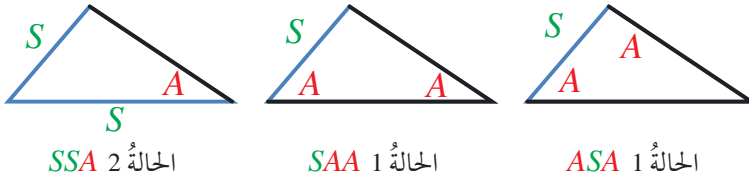
يُستعملُ قانونُ الجيوبِ لحلِّ المثلثِ الذي عُلِمَت ثلاثةٌ من قياساته، وذلك في الحالتين الآتيتين:

أفكر

لماذا يتعدَّدُ حلُّ المثلثِ الذي عُلِمَت فقط قياساتُ زواياه جميعاً؟

- 1 ضلعٌ واحدٌ وزاويتان (ASA ، أو SAA).
- 2 ضلعانِ وزاويةٌ مقابلةٌ لأحدهما (SSA).

يُبيِّنُ الشكلُ الآتي هاتينِ الحالتينِ:



الحالة 2 SSA

الحالة 1 SAA

الحالة 1 ASA

إرشاد

توجدُ صيغةٌ أخرى لقانونِ الجيوبِ هي:

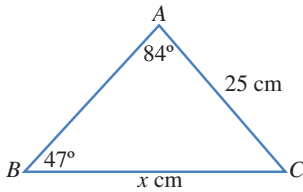
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

إرشاد

- الحرفُ S هو اختصارُ لكلمةِ Side، وتعني الضلع.
- الحرفُ A هو اختصارُ لكلمةِ Angle، وتعني الزاوية.

مثال 1

أجدُ قيمةَ x في المثلثِ ABC .



$$\frac{x}{\sin 84^\circ} = \frac{25}{\sin 47^\circ}$$

$$x = \frac{25 \sin 84^\circ}{\sin 47^\circ}$$

$$\approx 34 \text{ cm}$$

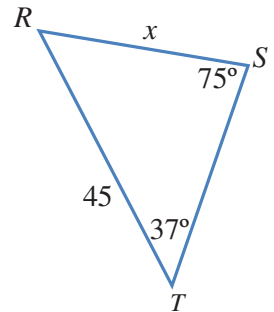
قانونُ الجيوبِ

بضربِ الطرفينِ في $\sin 84^\circ$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

أتحقق من فهمي

أجدُ قيمةَ x في المثلثِ RST المُبيَّنِ جانباً.



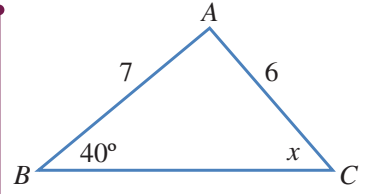
يُمكنُ أيضًا استعمالُ قانونِ الجيوبِ لإيجادِ قياسِ زاويةٍ مجهولةٍ في المثلثِ.

مثال 2

أجدُ قيمةَ x في المثلثِ ABC .

قانونُ الجيوبِ

بضربِ الطرفينِ في 7



$$\frac{\sin x}{7} = \frac{\sin 40^\circ}{6}$$

$$\sin x = \frac{7 \sin 40^\circ}{6}$$

$$\approx 0.7499$$

$$x = \sin^{-1}(0.7499)$$

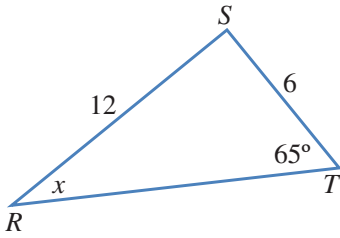
$$\approx 48.6^\circ$$

معكوسُ الجيبِ

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

أتحقق من فهمي

أجدُ قيمةَ x في المثلثِ RST .



أَنَعَلَمُ

توجدُ قيمتانِ

لـ $\sin^{-1} 0.7499$ ضمنَ

الدورةِ الواحدةِ هُما

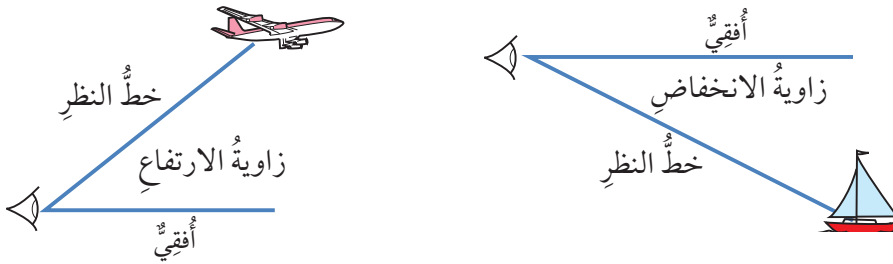
48.6° و 131.4° ، نختارُ

منهُما القيمةَ 48.6° ؛ لأنَّ

الزاويةَ x تبدو حادةً في

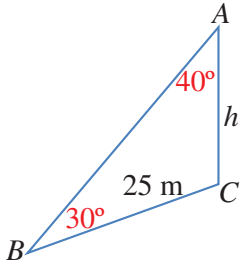
الشكلِ المُعطى.

عندما أنظرُ إلى طائرةٍ في السماء، فإنَّ الزاويةَ المحصورةَ بينَ الخطِّ الواصلِ بينَ عيني والطائرةِ وخطِّ نظري أفقيًّا تُسمَّى زاويةَ الارتفاعِ. وإذا وقفتُ على تلةٍ ساحليةٍ، ثمَّ نظرتُ إلى قاربٍ أسفلَ مني، فإنَّ الزاويةَ المحصورةَ بينَ الخطِّ الواصلِ بينَ عيني والقاربِ وخطِّ نظري أفقيًّا تُسمَّى زاويةَ الانخفاضِ. ولهاتينِ الزاويتينِ أهميةٌ كبيرةٌ عندَ حلِّ المسائلِ الحياتيةِ باستعمالِ النسبِ المثلثيةِ.



مثال 3: من الحياة

يقعُ برجٌ ارتفاعُهُ h مترٌ على تلةٍ، وقد رُصدتُ قَمَّةُ البرجِ A منَ النقطةِ B التي تبعدُ عنَ قاعدةِ البرجِ 25 m فكانَ قياسُ زاويةِ ارتفاعِها 50° ، ثمَّ رُصدتُ قَمَّةُ التلةِ منَ النقطةِ B نفسها فكانَ قياسُ زاويةِ ارتفاعِها 20° . ما ارتفاعُ البرجِ h ؟



أجدُ أولاً قياسَ الزاوية ABC :

$$m\angle ABC = 50^\circ - 20^\circ = 30^\circ$$

ثمَّ أجدُ قياسَ الزاوية BAD :

$$m\angle BAC = 180^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

ارتفاعُ البرجِ هوَ طولُ الضلعِ AC في المثلثِ BAC . أستعملُ قانونَ الجيوبِ لحلِّ هذا المثلثِ.

بعدَ ذلكَ أستعملُ قانونَ الجيوبِ في المثلثِ BAC لإيجادِ ارتفاعِ البرجِ:

$$\frac{h}{\sin 30^\circ} = \frac{25}{\sin 40^\circ}$$

$$h = \frac{25 \sin 30^\circ}{\sin 40^\circ}$$

$$h \approx 19.45 \text{ m}$$

قانونُ الجيوبِ

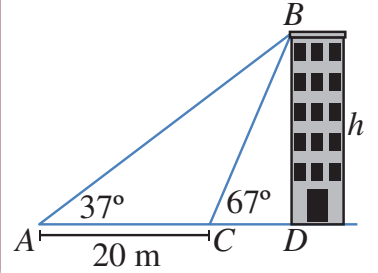
بضربِ الطرفينِ في $\sin 30^\circ$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

إذن، ارتفاعُ البرجِ هوَ: 19.45 m

أتحقق من فهمي

رصدَ ليثُ زاويةَ قَمَّةِ بنايةٍ منَ النقطةِ A ، فكانتْ 37° ، ثمَّ سارَ مسافةً 20 m باتجاهِ البنايةِ حتىَ النقطةِ C ، ثمَّ رصدَ زاويةَ قَمَّةِ البنايةِ، فكانتْ 67° . أجدُ ارتفاعَ البنايةِ.



مثال 4: من الحياة

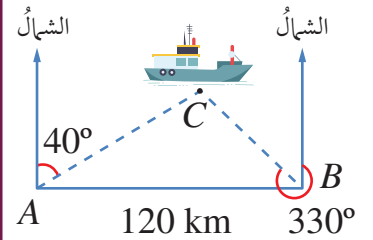
التقطتْ محطّتا خفر السواحلِ A و B نداءً استغاثةً منَ سفينةٍ عندَ النقطةِ C في البحرِ، وقدَّ حدّدتِ المحطّطةُ A اتجاهَ السفينةِ عندَ 040° ، وحدّدتِ المحطّطةُ B اتجاهَ السفينةِ عندَ 330° . إذا كانتِ B شرقيّ A وكانتِ المسافةُ بينَ المحطّتينِ 120 km، فكمَ تبعدُ السفينةُ عنَ المحطّطةِ A ؟

يجبُ أولاً إيجادُ قياسِ الزاويةِ C :

قياسُ الزاويةِ BAC هوَ 50° (لأنّها مُتممّةٌ للزاويةِ التي قياسُها 40°).

وقياسُ الزاويةِ ABC هوَ 60° (لأنَّ $60^\circ = 330^\circ - 270^\circ$). إذن:

$$m\angle ACB = 180^\circ - 60^\circ - 50^\circ = 70^\circ$$



ثمَّ استعمالُ قانونِ الجيوبِ:

قانونُ الجيوبِ

بالتعويضِ

بضربِ الطرفينِ في $\sin 60^\circ$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{b}{\sin 60^\circ} = \frac{120}{\sin 70^\circ}$$

$$b = \frac{120 \times \sin 60^\circ}{\sin 70^\circ}$$

$$\approx 110.59 \text{ km}$$

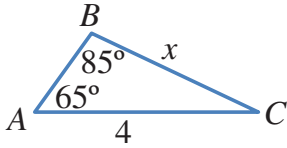
أتحقق من فهمي 

أجدُ بُعدَ السفينةِ عن المحطّةِ B في المثالِ السابقِ.

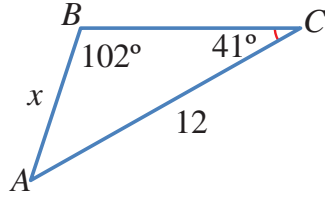
أتدرب وأحل المسائل 

أجدُ قيمةَ x في كلِّ من المثلثاتِ الآتية:

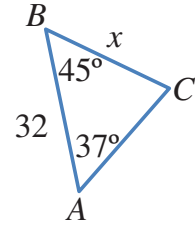
1



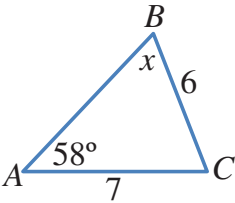
2



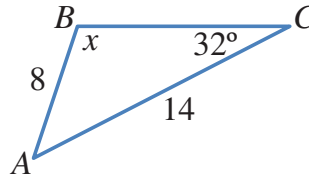
3



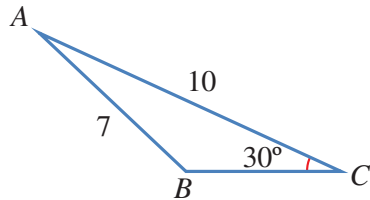
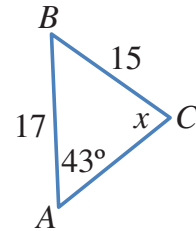
4



5

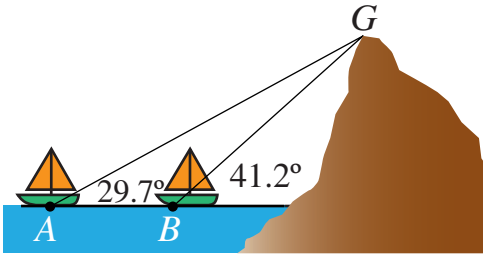


6



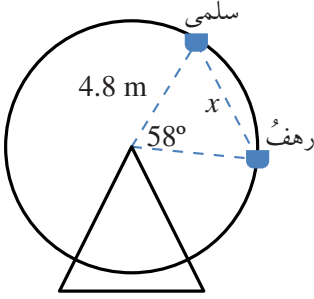
7 أجدُ قياسَ الزاويةِ المنفرجةِ CBA في الشكلِ المجاورِ.

8 خرائطُ: أحلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

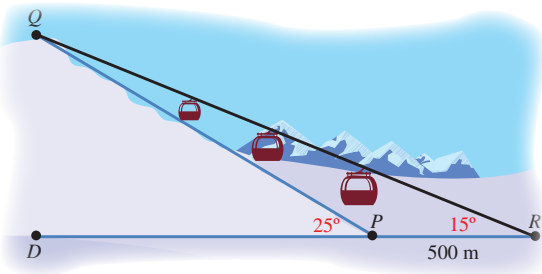


- 9 **بحار:** ترصدُ سفيتان في البحرِ قَمَّةَ جبلٍ كما في الشكلِ المجاورِ. إذا كانتِ المسافةُ بينَ السفيتينِ 1473 m، فما ارتفاعُ الجبلِ منْ مستوى سطحِ البحرِ؟

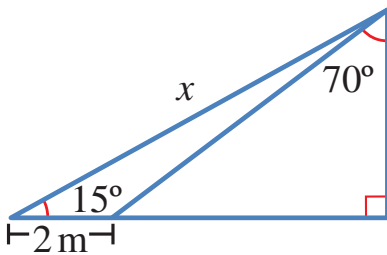
- 10 **علمُ الفلكِ:** رصدَ عامرٌ وهشامٌ منْ منزلَيْهِما نجمًا في السماءِ في اللحظةِ نفسِها. إذا كانتِ زاويةُ رصدِ هشامٍ للنجمِ 49.8974° ، وزاويةُ رصدِ عامرٍ له 49.9312° ، والمسافةُ بينَ منزلَيْهِما 300 km، فأقْدِرْ بُعْدَ النجمِ عنِ الأرضِ.



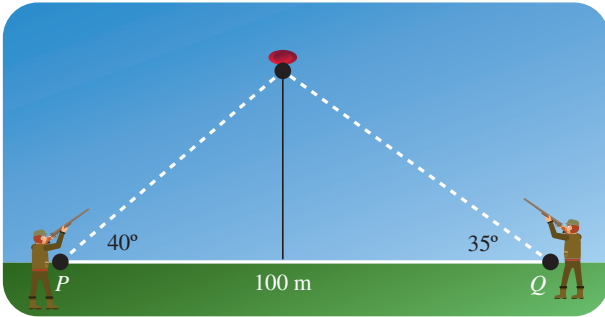
- 11 **مدينة الألعاب:** في مدينةِ الألعابِ، جلسَت سلمى ورهفُ على مقعدَينِ منفصلَينِ في لعبةِ الدوَلابِ الدوَارِ كما في الشكلِ المجاورِ. أجدُ المسافةَ x بينهما.



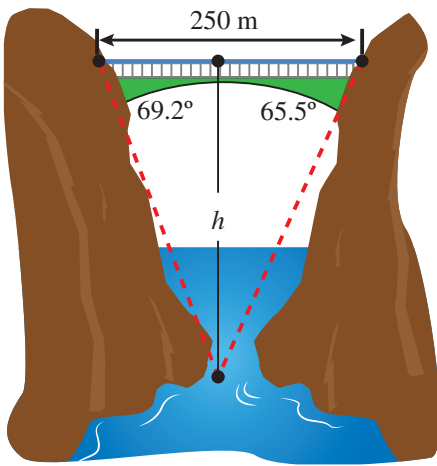
- 12 **رياضةُ التزلُّج:** يتكوَّن مسارُ تزلُّجٍ منْ جزءٍ مائلٍ، وآخرٍ مستقيمٍ. إذا تزلَّجَ محمودٌ منْ النقطةِ Q إلى النقطةِ P ، ثمَّ وصلَ خطَّ النهايةِ عندَ النقطةِ R ، وكانتِ زاويةُ ارتفاعِ مسارِ التزلُّجِ عنِ الأرضِ 25° ، والمسافةُ بينَ النقطتينِ P و R هي 500 m، وزاويةُ رصدِ الحَكَمِ منْ نقطةِ النهايةِ للمتزلِّجِ الذي يقفُ عندَ نقطةِ البداية 15° ، فما طولُ QP ؟



- 13 أجدُ قيمةَ x في الشكلِ المجاورِ، مُقَرَّبًا إيجابيًا إلى أقربِ جزءٍ منْ عشرةٍ.

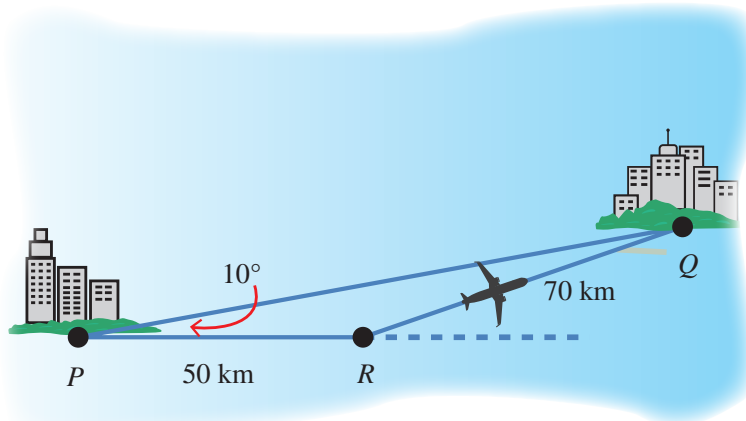


14 **تبرير:** أطلق قناصان النار على هدفٍ مُتحرِّكٍ في السماء في لحظةٍ ما. إذا كانت زاوية إطلاق الأول 40° ، وزاوية إطلاق الثاني 35° ، والمسافة بينهما 100 m ، فأيهما سيصيب الهدف أولاً؟ أبرّر إجابتي.



15 **تحلّ:** مرّ قاربٌ أسفل جسرٍ طوله 250 مترًا . وقد رصد الشخص الذي في القارب الزاويتين اللتين تقعان عند طرفي الجسر، فكانتا 69.2° و 65.5° ، أجد ارتفاع الجسر عن القارب.

16 **تبرير:** توجهت طائرة من المدينة P إلى المدينة Q ، وبعد أن قطعت مسافة 50 km أدرك الطيار وجود خطأ في زاوية الانطلاق مقداره 10° ، فاستدار في الحال، وقطعت الطائرة مسافة 70 km حتى وصلت المدينة Q . إذا كانت سرعة الطائرة ثابتة وتساوي 250 km/h ، فما الوقت الإضافي الذي استغرقه الطيار بسبب خطئه في زاوية الانطلاق؟



قانون جيب التمام Law of Cosines

استعمال قانون جيب التمام لإيجاد طول ضلع، أو قياس زاوية في مثلث.
قانون جيب التمام.

فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم

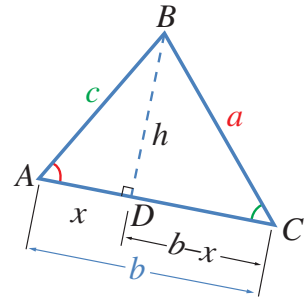


انطلقت حافلتان من محطة واحدة في الوقت نفسه، وقد اتجهت الأولى شرقاً بسرعة 60 km/h، وانطلقت الثانية في مسار يصنع زاوية 30° مع مسار الحافلة الأولى بسرعة 50 km/h. هل يمكن حساب المسافة بين الحافلتين بعد مضي 3 ساعات على انطلاقهما؟

تعرفت في الدرس السابق قانون الجيب، وكيف يُستعمل لحل مثلثات علم فيها ضلع واحد وزاويتان (ASA، أو SAA)، أو ضلعان وزاوية مقابلة لأحدهما (SSA).

تُستعمل أيضاً نسبة جيب التمام لإيجاد علاقات أخرى بين أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا؛ ما يساعد على حل بعض المثلثات التي لا يمكن حلها باستعمال قانون الجيب.

ففي الشكل المجاور، يُمثل الارتفاع المرسوم من B عمودياً على AC . وباستعمال نظرية فيثاغورس وتعريف جيب التمام، يمكن استنتاج بعض العلاقات على النحو الآتي:



$$h^2 = c^2 - x^2 \quad \text{باستعمال نظرية فيثاغورس في المثلث ADB}$$

$$h^2 = a^2 - (b-x)^2 \quad \text{باستعمال نظرية فيثاغورس في المثلث BDC}$$

$$c^2 - x^2 = a^2 - (b-x)^2 \quad \text{بمساواة المعادلتين } h^2 = h^2$$

$$c^2 - x^2 = a^2 - b^2 + 2xb - x^2 \quad \text{بفك القوس}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2xb \quad \text{بالتبسيط}$$

لإدخال جيب التمام في المعادلة: $a^2 = b^2 + c^2 - 2xb$ ، فإننا نكتب x بدلالة $\cos A$:

$$\cos A = \frac{x}{c} \quad \text{تعريف جيب التمام}$$

$$x = c \times \cos A \quad \text{بالضرب التبادلي}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \text{بتعويض قيمة } x \text{ في المعادلة}$$

وبذلك، نتوصّل إلى العلاقة الآتية بين أطوال أضلاع المثلث وقياسات زواياه باستعمال جيب التمام:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

وبطريقة مشابهة، يُمكنُ التوصلُ إلى العلاقاتين الآتيتين:

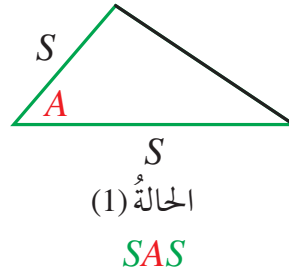
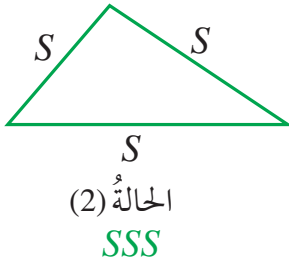
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

تُسمى هذه العلاقات الثلاث **قانون جيب التمام (Law of Cosines)**، ويُستعمل هذا القانونُ لحلّ أيّ مثلثٍ عَلِمَتْ ثلاثة من قياساته في الحالتين الآتيتين:

1 ضلعان وزاوية محصورة بينهما (SAS).

2 ثلاثة أضلاع (SSS).



أَتَعَلَّم

يُمكنُ كتابةُ قانونِ جيبِ التمامِ كما يأتي:

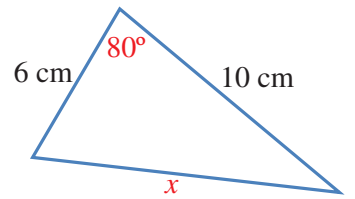
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

مثال 1

أجد قيمة x في المثلث المجاور.



$$x^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \cos 80^\circ$$

$$x^2 = 115.16$$

$$x = \pm \sqrt{115.16}$$

$$x = \pm 10.7 \text{ cm}$$

قانون جيب التمام

باستعمال الآلة الحاسبة

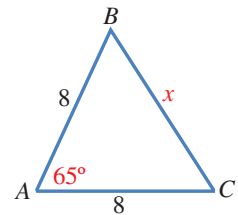
بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، $x = 10.7$ ؛ لأن قيمة x لا يمكن أن تكون سالبة.

أتحقق من فهمي

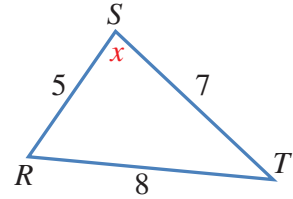
أجد قيمة x في المثلث المجاور.



يُستعمل قانون جيب التمام أيضًا لإيجاد قياس زاوية مجهولة في المثلث.

مثال 2

أجد قيمة x في المثلث RST المجاور.



قانون جيب التمام

بكتابة $\cos x$ موضوع القانون

باستعمال الآلة الحاسبة

معكوس جيب التمام

أتحقق من فهمي

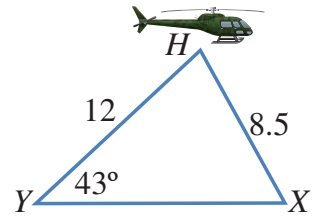
في المثلث ABC ، إذا كان $AB = 16$, $BC = 12$, $AC = 20$ فأثبت أن الزاوية B قائمة.

قد نحتاج في بعض المسائل إلى استعمال قانوني الجيوب و جيب التمام معاً لإيجاد القياسات المطلوبة.

مثال 3: من الحياة



شوهدت طائرة مروحية تحلق في السماء من القريتين X و Y في اللحظة نفسها. إذا كان بُعد الطائرة عن القرية X هو 8.5 km، وعن القرية Y هو 12 km، وكانت القريتان في مستوى أفقي واحد، وزاوية ارتفاع الطائرة من القرية Y هي 43° ، فما المسافة بين هاتين القريتين؟



لإيجاد المسافة بين القريتين، يجب معرفة قياس الزاوية بين الضلعين اللذين يمثلان بُعدي الطائرة عن القريتين كما يأتي:

الخطوة 1: استعمال قانون الجيوب لإيجاد قياس الزاوية X في المثلث HYX .

$$\frac{\sin 43^\circ}{8.5} = \frac{\sin X}{12}$$

$$\sin X = \frac{12 \sin 43^\circ}{8.5}$$

$$\sin X \approx 0.963$$

$$X = \sin^{-1} 0.963$$

$$\approx 74.3^\circ$$

قانون الجيوب

بضرب الطرفين في 12

باستعمال الآلة الحاسبة

معكوس sin

باستعمال الآلة الحاسبة

الخطوة 2: إيجاد قياس الزاوية H .

أتعلم

توجد قيمتان لـ $\sin^{-1} 0.963$ ضمن الدورة الواحدة هما 74.3° و 105.6° ، نختار منهما القيمة 74.3° ؛ لأنّ الزاوية x تبدو حادة في الشكل المعطى.

$$m\angle H = 180^\circ - 43^\circ - 74.3^\circ = 62.7^\circ$$

مجموع قياس زوايا المثلث 180°

الخطوة 3: استعمال قانون جيب التمام لإيجاد المسافة بين القريتين.

$$(XY)^2 = 12^2 + 8.5^2 - 2(12)(8.5)\cos 62.7^\circ$$

قانون جيب التمام

$$(XY)^2 = 122.7$$

باستعمال الآلة الحاسبة

$$XY = \pm \sqrt{122.7} = \pm 11.1$$

بحساب الجذر التربيعي للطرفين

إذن، المسافة بين المدينتين 11.1 km تقريباً.

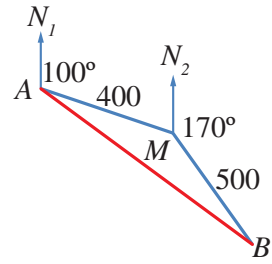
أتحقق من فهمي

سفن: أبحرت سفينة من الميناء A باتجاه الشمال، فقطعت مسافة 240 km ، ثم انحرقت بزاوية 50° ، وقطعت مسافة 160 km حتى وصلت إلى الميناء B. ما المسافة بين الميناء A والميناء B؟

مثال 4: من الحياة



أقلعت طائرة بزاوية 100° عن الشمال من المدينة A، فقطعت مسافة 400 km ، ثم انعطفت يمينا، فأصبحت الزاوية بين خط مسارها الجديد والشمال 170° ، ثم قطعت مسافة 500 km لتصل إلى المدينة B. ما المسافة بين هاتين المدينتين؟ يمكن حساب المسافة بين المدينتين (طول القطعة المستقيمة AB) بإيجاد قياس الزاوية $\angle AMB$.



من الملاحظ أن الزاوية $\angle AMN_2$ مكمل للزاوية $\angle MAN_1$ ، وهي تساوي 80° .

$$m\angle AMB = 360^\circ - (80^\circ + 170^\circ) = 110^\circ$$

مجموع الزوايا حول نقطة

$$(AB)^2 = (400)^2 + (500)^2 - 2 \times 400 \times 500 \cos 110^\circ$$

قانون جيب التمام

$$(AB)^2 = 546808.0573$$

باستعمال الآلة الحاسبة

$$AB = \sqrt{546808.0573} \approx 739.5$$

بأخذ الجذر التربيعي

إذن، المسافة بين المدينتين 739.5 km تقريباً.

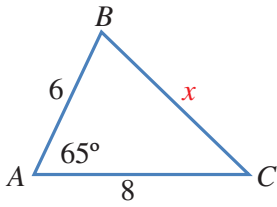
أتحقق من فهمي

سار قطار من المحطة A في اتجاه 080° إلى المحطة B التي تبعد عنها 120 km ، ثم تحوّل إلى اتجاه 070° ، وسار مسافة 90 km إلى المحطة C. ما المسافة بين المحطة A والمحطة C؟

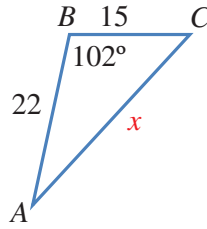


أجد قيمة x في كل من المثلثات الآتية:

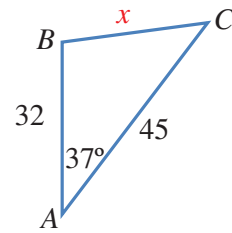
1



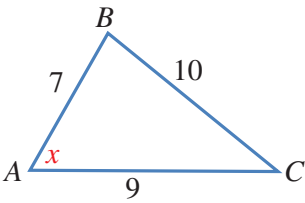
2



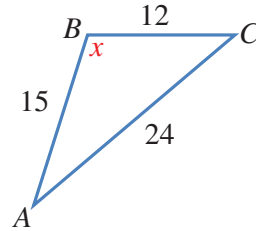
3



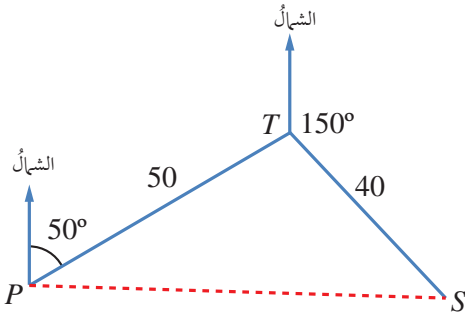
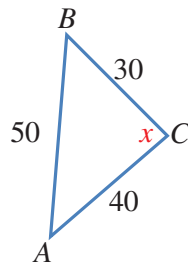
4



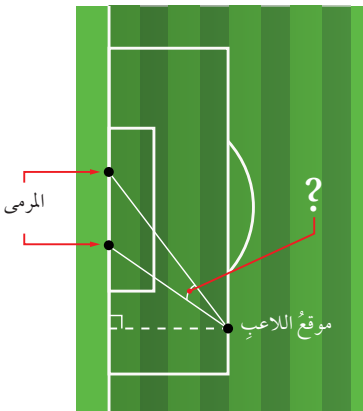
5



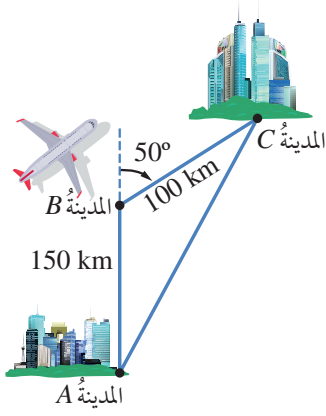
6



7 **ملاحه جوية:** أبحرت سفينة من أحد الموانئ مسافة 50 km في اتجاه 050° ، ثم غير القبطان خط سيرها إلى اتجاه 150° وقطعت مسافة 40 km، ثم توقفت بسبب إصابة أحد أفراد الطاقم. ما المسافة التي ستقطعها مروحية الإنقاذ من الميناء لتصل إلى السفينة في أقصر وقت ممكن؟

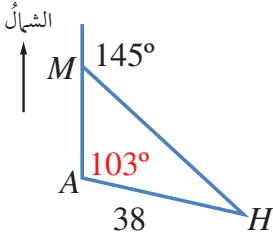


8 **كرة قدم:** يُبين الشكل المجاور موقع لاعب كرة قدم يركل الكرة نحو مرمر عرضه 5 m. أجد قياس الزاوية التي يستطيع منها اللاعب أن يركل الكرة لتسديد هدف، علماً بأنه يبعد عن طرفي المرمر مسافة 26 m و 23 m.



- 9 **خرائط طيران:** أقلعت طائرة من المدينة A في اتجاه 000° مسافة 150 km، ثم اتجهت إلى 050° ، وسارت مسافة 100 km حتى وصلت المدينة C كما في الشكل المجاور. ما أقصر مسافة ممكنة بين المدينتين إذا كان مسموحًا للطائرة اتخاذ المسار الذي تريده؟

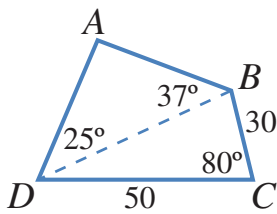
- 10 **ساعات:** طول عقربي ساعة 3 cm، و 4 cm. أجد المسافة بين رأسي العقربين عندما يشيران إلى الساعة 4 تمامًا.



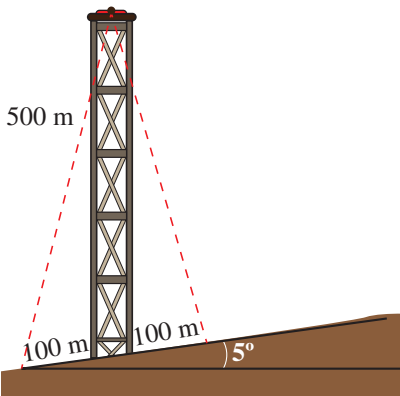
- 11 **مروحية إنقاذ:** أرسلت مروحية إنقاذ من القاعدة A لإسعاف رجل على جبل عند النقطة M إلى الشمال من هذه القاعدة، ثم أوصلته إلى المستشفى H الذي يبعد عن القاعدة مسافة 38 km كما يظهر في الشكل المجاور. أجد المسافة من الجبل إلى المستشفى بطريقتين.

مهارات التفكير العليا

- 12 **تحذ:** أجد قياس أصغر زاوية في مثلث أطوال أضلاعه $3a$ ، $5a$ ، $7a$ ، حيث a عدد حقيقي موجب.



- 13 **تحذ:** يمثل الشكل ABCD المجاور حقل نخيل يريد مالكه إحاطته بسياج. أجد طول السياج.



- 14 **تحذ:** يرتفع برج 500 m على تلة تميل بزاوية 5° عن المستوى الأفقي كما في الشكل المجاور. أرادت المهندسة صفاة تثبيت البرج بسلكين من قمته إلى نقطتين على الأرض، تبعد كل منهما مسافة 100 m عن قاعدة البرج. أجد طول السلكين.

استعمال جيب الزاوية لإيجاد مساحة المثلث

Using Sine to Find the Area of a Triangle

إيجاد مساحة مثلث عُلِمَ فيه طولاً ضلعين، وقياسُ الزاوية المحصورة بينهما.

فكرة الدرس



مسألة اليوم



لدى مزارع قطعة أرضٍ مثلثة الشكل، طول أحد أضلاعها 84 m، وطول ضلعٍ آخر 110 m، وقياسُ الزاوية المحصورة بينهما 145° ، وقد أراد زراعتها بالبطاطا، فلزمه 0.15 kg من درنات البطاطا لكل متر مربع. كيف يستطيع المزارع حساب كمية درنات البطاطا اللازمة لزراعة أرضه؟

تعلمتُ سابقاً كيفية حساب مساحة المثلث بضرب نصف طول قاعدته في ارتفاعه، غير أنه يتعدّد استعمال هذه الطريقة إذا كان الارتفاع مجهولاً؛ لذا يُمكن استخدام النسب المثلثية في إيجاد قانونٍ آخر لحساب مساحة المثلث باستعمال أطوال أضلاعه وقياسات زواياه. ففي الشكل المجاور، نلاحظ أن BD هو ارتفاع المثلث ABC ، وأنه عمودي على القاعدة AC . فإذا كان $AC = b$ ، و $BD = h$ ، فإن مساحة هذا المثلث هي:

$$K = \frac{1}{2} AC \times BD$$

$$= \frac{1}{2} bh$$

نلاحظ أيضاً من المثلث BDC ما يأتي:

$$\sin C = \frac{h}{a}$$

تعريف جيب الزاوية

$$h = a \sin C$$

بضرب طرفي المعادلة في a

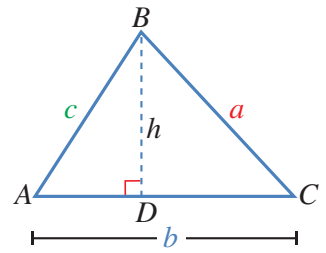
$$K = \frac{1}{2} b (a \sin C)$$

بالتعويض عن h في قانون مساحة المثلث بـ $a \sin C$

$$= \frac{1}{2} ab \sin C$$

يُمكن رسم العمود من الرأس A إلى الضلع الذي يقابله BC ، ومن الرأس C إلى الضلع الذي يقابله AB ، لبيان أن مساحة هذا المثلث تساوي $\frac{1}{2} ac \sin B$ ، وأنها تساوي أيضاً

$$\frac{1}{2} bc \sin A$$



مفهوم أساسي

مساحة المثلث تساوي نصف ناتج ضرب طولَي أيّ ضلعين فيه مضروبًا في جيب الزاوية المحصورة بينهما:

$$K = \frac{1}{2} bc \sin A \quad K = \frac{1}{2} ac \sin B \quad K = \frac{1}{2} ab \sin C$$

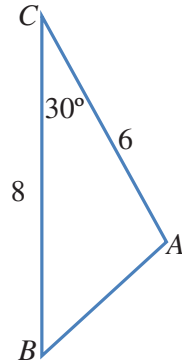
مثال 1

أجد مساحة المثلث ABC بالوحدات المربعة في الشكل المجاور.

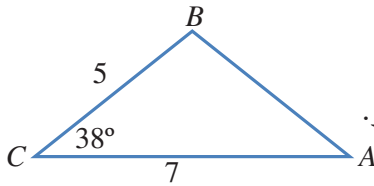
$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} ab \sin C \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \sin 30^\circ \\ &= 12 \end{aligned}$$

قانون مساحة المثلث

بالتعويض



أتحقق من فهمي



أجد مساحة المثلث بالوحدات المربعة في الشكل المجاور.

تعلمت في المثال السابق كيف أجد مساحة مثلث علم فيه طولاً ضلعين، وقياس الزاوية المحصورة بينهما، وسأعلم الآن كيفية حساب مساحة مثلث علمت فيه أطوال أضلاعه الثلاثة.

مثال 2

أجد مساحة المثلث ABC في الشكل المجاور.

يتعين أولاً إيجاد قياس إحدى الزوايا باستعمال قانون جيب التمام، ثم حساب المساحة. إذن، أستعمل قانون جيب التمام لإيجاد قياس الزاوية C :

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

قانون جيب التمام

$$= \frac{13^2 + 19^2 - 8^2}{2 \times 13 \times 19}$$

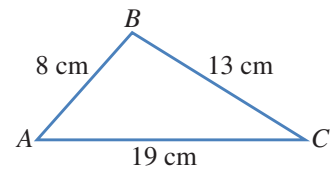
بالتعويض

$$= 0.9433$$

باستعمال الآلة الحاسبة

$$C = \cos^{-1} 0.9433 = 19.4^\circ$$

معكوس \cos ، واستعمال الآلة الحاسبة



أطبّق قانون المساحة:

$$K = \frac{1}{2} ab \sin C$$

$$= \frac{1}{2} \times 13 \times 19 \times \sin 19.4^\circ$$

$$= 41.0 \text{ cm}^2$$

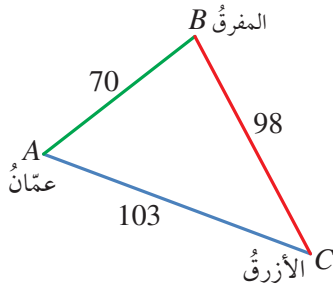
قانون مساحة المثلث

بالتعويض

باستعمال الآلة الحاسبة

أتحقق من فهمي

أجد مساحة المثلث DEF ، علمًا بأن $DE = 10 \text{ cm}$ و $DF = 12 \text{ cm}$ و $EF = 9 \text{ cm}$.



مثال 3: من الحياة

المسافة بين عمّان والأزرق 103 km، وبين عمّان والمفرق 70 km، وبين المفرق والأزرق 98 km. أجد مساحة المثلث الذي تقع عند رؤوسه هذه المدن الثلاث.

الخطوة 1: إيجاد قياس إحدى الزوايا، ولتكن B ، باستعمال قانون جيب التمام.

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$= \frac{98^2 + 70^2 - 103^2}{2 \times 98 \times 70}$$

$$= 0.2839$$

$$B = \cos^{-1}(0.2839) = 73.5^\circ$$

قانون جيب التمام

بالتعويض

باستعمال الآلة الحاسبة

معكوس جيب التمام، واستعمال الآلة الحاسبة

الخطوة 2: تطبيق قانون المساحة.

$$K = \frac{1}{2} ac \sin B$$

$$= \frac{1}{2} \times 98 \times 70 \times \sin 73.5^\circ$$

$$= 3288.8 \text{ km}^2$$

قانون مساحة المثلث

بالتعويض

باستعمال الآلة الحاسبة

أتحقق من فهمي

قطعة رخام مثلثة الشكل، أبعادها: 50 cm، و 85 cm، و 70 cm. ما مساحتها؟

التخزين في ذاكرة الآلة الحاسبة

أستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قياس الزاوية B في هذا السؤال، ثم أضغط على الأزرار (بالترتيب من اليسار):
SHIFT → RCL → B
فتُحفظ الزاوية في الذاكرة.

ولاستعمالها في حساب مساحة المثلث، أدخل:

$$\frac{1}{2} \times 98 \times 70 \times$$

ثم أضغط على الأزرار:

sin → ALPHA → B → =

فتظهر النتيجة: 3288.8



أجد مساحة كل من المثلثات الآتية:

1 المثلث ABC الذي فيه $BC = 7$ cm، و $AC = 8$ cm، وقياس الزاوية ACB فيه 59° .

2 المثلث ABC الذي قياس الزاوية BAC فيه 85° ، و $AC = 6.7$ cm، و $AB = 8$ cm.

3 المثلث PQR الذي فيه $QR = 27$ cm، و $PR = 19$ cm، وقياس الزاوية QRP فيه 109° .

4 المثلث XYZ الذي فيه $XY = 231$ cm، و $XZ = 191$ cm، وقياس الزاوية YXZ فيه 73° .

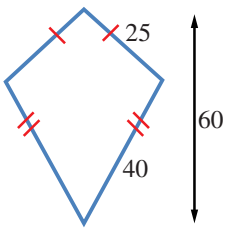
5 المثلث LMN الذي فيه $LN = 63$ cm، و $LM = 39$ cm، وقياس الزاوية NLM فيه 85° .

6 إذا كانت مساحة المثلث ABC هي 27 cm²، و $BC = 14$ cm، وقياس الزاوية BCA فيه 115° ، فما طول AC ؟

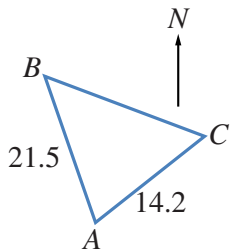
7 إذا كانت مساحة المثلث LMN هي 133 cm²، و $LM = 16$ cm، و $MN = 21$ cm، والزاوية LMN حادة، فما قياس كل من الزاويتين: LMN ، و MNL ؟

9 لوحة على شكل مثلث، أطوال أضلاعه: 60 cm، و 70 cm، و 80 cm. أجد مساحة اللوحة.

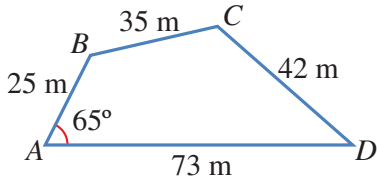
10 دائرتان، مركز إحدهما P ومركز الأخرى Q ، وطول نصف قطر إحدهما 6 cm والأخرى 7 cm. إذا تقاطعتا في النقطتين X و Y ، وكان $PQ = 9$ cm، فما مساحة المثلث PXQ ؟



11 طائرة ورقية: صنع سليم طائرة ورقية كما في الشكل المجاور. أجد مساحة المادة اللازمة لصنع الطائرة بالوحدات المربعة.



12 مُتَنَزَّهٌ وُطِنِيٌّ: يراد إنشاء مُتَنَزَّهٍ وُطِنِيٍّ على قطعة أرضٍ مثلثة الشكل ABC . إذا كانت النقطة B في اتجاه 324° من النقطة A ، والنقطة C في اتجاه 042° من النقطة A ، فما مساحة المُتَنَزَّهٍ بالوحدات المربعة؟



حَقُولُ: يُمَثِّلُ الشَّكْلُ المَجَاوِرُ أبعادَ حَقْلٍ رِباعِيٍّ الأضلاعِ:

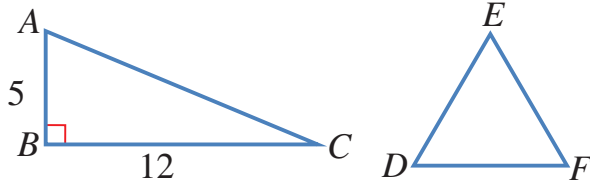
13 أُثْبِتُ أَنَّ طَوْلَ BD هُوَ 66 m، مُتَقَرِّبًا إِجَابَتِي إِلَى أَقْرَبِ مِترٍ.

14 أَجِدُ قِياسَ الزاويةِ C .

15 أَحسُبُ مِساحةَ الحَقْلِ.

16 أَحلُّ المسألةَ الوارِدةَ في بَدِيةِ الدرسِ.

17 المثلث ABC قائمُ الزاوية، والمثلث DEF مُتطابِقُ الأضلاعِ وللمثلثينِ المَحيطُ نَفسُهُ. أَجِدُ مِساحةَ المثلثِ DEF .



18 **جغرافيا:** بَرمودا مَنتِقةٌ مِثلثةُ الشَّكْلِ، تَقعُ في الجِزءِ الغَربِيِّ مِنَ المَحيطِ الأطلِسيِّ، رَؤُوسُها مَدينَةُ مِيامي، وِبرمودا، وِسانِ خِوان. وَقَدُ شَهِدَ مِثلثُ بَرمودا وَقِوعَ عَديدٍ مِنَ حِواديِّ اِختِفاءِ السَفينِ والطائِراتِ. إِذا كَانَتِ المِسافَةُ بَينَ مِيامي وِسانِ خِوان 1674 km تَقرِيبًا، وِبينَ مِيامي وِبرمودا نَحِوَ 1645 km، وِبينَ سانِ خِوان وِبرمودا قِرابَةَ 1544 km، فِما مِساحةُ مِثلثِ بَرمودا مِنَ دِوَنِ اِعتِبارِ لَتَقُوسِ الأَرْضِ؟

مهارات التفكير العليا



19 **تحلُّ:** أَجِدُ مِساحةَ المِثلثِ ABC الَّذِي قِياسُ الزاويةِ A فِيهِ 70° ، وَقِياسُ الزاويةِ B فِيهِ 60° ، وَطَوْلُ الضِّلَعِ AB فِيهِ 4 cm.

20 **أكتشف الخطأ:** ABC مِثلثٌ فِيهِ $AB = 9\text{cm}$ ، $BC = 8\text{cm}$ ، وَقِياسُ الزاويةِ A فِيهِ 30° . أَرادَتِ نِوْرُ إِيجادَ مِساحَتِهِ إِلى أَقْرَبِ عَشْرِ، فَكانَ حَلُّها كِما يَأْتِي:

$$K = \frac{1}{2} \times 8 \times 9 \sin 30^\circ$$

$$= 18 \text{ cm}^2$$

أكتشفُ الخِطأَ في حَلِّ نِوْرَ، ثُمَّ أَصَحِّحُهُ.

حلّ مسائل ثلاثية الأبعاد Solving Problems in Three Dimensions

إيجاد أطوال وقياسات لزوايا مجهولة في أشكال ثلاثية الأبعاد باستعمال نظرية فيثاغورس والنسب المثلثية.

فكرة الدرس



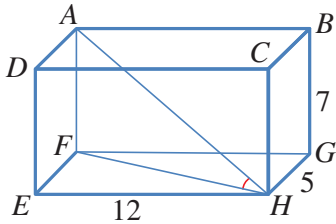
شُيّد الهرم الأكبر في مدينة الجيزة بمصر عام 2500 قبل الميلاد تقريبًا، وتمثّل قاعدته مربعًا طول ضلعه 232.6 m، وطول الضلع الواصل بين قمة الهرم وأي من رؤوس المربع 221.2 m. أجد ارتفاع هذا الهرم.

مسألة اليوم



تتضمن المسائل ثلاثية الأبعاد (في الفضاء) على ثلاثة مستويات؛ أفقيّ، ورأسيّ، ومائل. ويتطلب حلّ هذه المسائل رسم مخطط يوضّح المسألة، ويمثّل المعلومات المعطاة فيها، ثمّ البحث عن مثلثات قائمة الزاوية فيها. وإذا لم توجد هذه المثلثات، فإننا نرسم بعضها، بحيث تكون بعض عناصرها معلومة، فضلًا عن تحديد العنصر المطلوب إيجادها؛ على أن نرسم كلاً منها بمنأى عن المخطط المذكور آنفًا، ليسهل علينا معرفة العلاقة التي نستخدمها في الحلّ.

مثال 1



يمثّل الشكل المجاور متوازي مستطيلات. أجد قياس الزاوية AHF ، مُقرَّبًا إجابتي إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.

المثلث AFH قائم الزاوية في F ، ومعلوم فيه طول AF ؛ لذا يجب معرفة عنصر آخر لإيجاد القياس المطلوب.

الخطوة 1: إيجاد طول FH من المثلث قائم الزاوية FEH ؛ المرسوم وحده جانبًا.

$$(FH)^2 = (EF)^2 + (EH)^2$$

$$= 5^2 + 12^2$$

$$(FH)^2 = 169$$

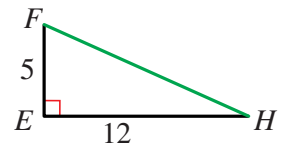
$$FH = \sqrt{169} = 13$$

نظرية فيثاغورس

بالتعويض

بالتبسيط

بحساب الجذر التربيعي للطرفين

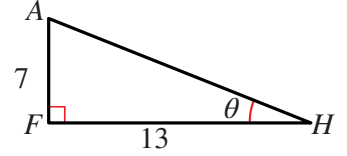


الخطوة 2: رسم المثلث AFH وحدّه، ثم استعمال الظل (\tan) لإيجاد قياس الزاوية AHF .

$$\tan \theta = \frac{7}{13} = 0.5385$$

$$\theta = \tan^{-1} (0.5385) = 28.3^\circ$$

بالتقريب إلى منزلة عشرية واحدة



أتحقق من فهمي

أجد BE ، وقياس الزاوية EBG في المثال السابق.

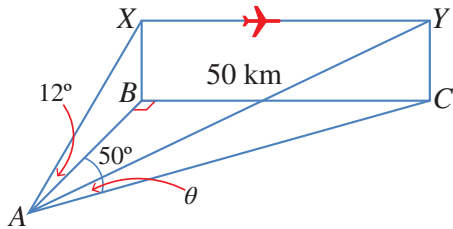
يُمكنُ نمذجة كثيرٍ من المواقف الحياتية باستعمال المثلثات، ثم إيجاد قياساتٍ مجهولةٍ فيها باستعمال النسب المثلثية.

مثال 2: من الحياة

تقع النقاط A ، و B ، و C في مستوى أفقي واحدٍ على الأرض، وتقع النقطة C على بُعد 50 km شرقي النقطة B التي تقع شمالي النقطة A ، وتقع النقطة C في اتجاه 050° من النقطة A . رُصدت من النقطة A حركة طائرة في موقعين مختلفين على الارتفاع نفسه عن الأرض؛ الأول: عندما كانت فوق النقطة B مباشرة، وكانت زاوية ارتفاعها 12° . والثاني: عندما كانت فوق النقطة C . أجد زاوية ارتفاع الطائرة عندما كانت فوق النقطة C .

أتذكر

تُسمى الزاوية المحصورة بين خط البصر والخط الأفقي المارّ بعين الناظر زاوية الارتفاع.



الخطوة 1: أرسم مُخطّطاً يمثّل المعلومات المعطاة.

الخطوة 2: أرسم المثلث قائم الزاوية ABC ، ثمّ أستخدّمه في إيجاد AB ، و AC .

$$\tan 50^\circ = \frac{50}{AB}$$

تعريف ظلّ الزاوية

$$AB = \frac{50}{\tan 50^\circ} = 41.95 \text{ km}$$

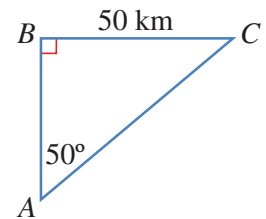
باستعمال الآلة الحاسبة

$$\sin 50^\circ = \frac{50}{AC}$$

تعريف جيب الزاوية

$$AC = \frac{50}{\sin 50^\circ} = 65.27 \text{ km}$$

باستعمال الآلة الحاسبة



الخطوة 3: أرسم المثلث قائم الزاوية ABX ، ثمَّ أستخدمه في إيجاد BX ، ومنه يمكن إيجاد CY ، فهما متساويان؛ لأنَّ الشكل $BXYC$ مستطيل.

$$\tan 12^\circ = \frac{BX}{41.95}$$

$$BX = 41.95 \tan 12^\circ = 8.917 \text{ km}$$

تعريف ظل الزاوية

باستعمال الآلة الحاسبة

الخطوة 4: أستخدم المثلث قائم الزاوية ACY لإيجاد زاوية الارتفاع θ .

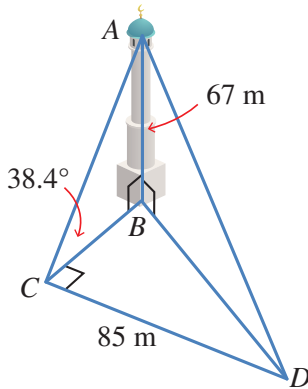
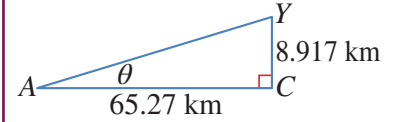
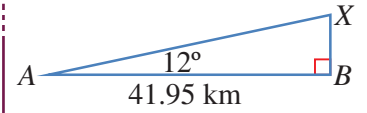
$$\tan \theta = \frac{8.917}{65.27} = 0.1366$$

$$\theta = \tan^{-1} 0.1366 = 7.8^\circ$$

تعريف ظل الزاوية

معكوس الظل

إذن، زاوية ارتفاع الطائرة عندما كانت فوق النقطة C هي: 7.8° ، مُقرَّبةً إلى منزلة عشرية واحدة.

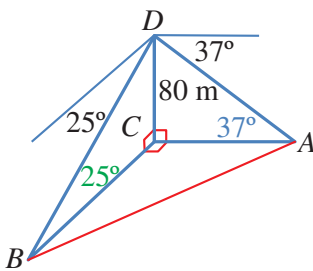


أتتحقق من فهمي

رصد أحمد قمةً مئذنةً من نقطةٍ على الأرض تقع جنوب المئذنة، فكانت زاوية ارتفاعها 38.4° ، ثمَّ سارَ شرقاً مسافةً 85 m ، ورصد قمةً المئذنة مرةً أخرى. إذا كان ارتفاع المئذنة 67 m ، أجد زاوية ارتفاع قمة المئذنة في المرة الثانية.

مثال 3: من الحياة

رُصد المنزل A في اتجاه الشرق من قمة برج يرتفع 80 m ، وكذلك المنزل B في اتجاه الجنوب. إذا كانت زاوية انخفاض المنزل A من قمة البرج 37° ، وزاوية انخفاض المنزل B من قمته 25° ، فما المسافة بين المنزلين؟



الخطوة 1: أرسم مُخطَّطاً، علماً بأنَّ البرج DC يصنع زاوية قائمة مع الأرض، وأنَّ اتجاه كلٍّ من الشرق والجنوب يصنعان معاً زاوية قائمة.

بما أن زاوية انخفاض المنزل A هي 37° ، فإن الزاوية DAC هي 37° ، وبما أن زاوية انخفاض المنزل B هي 25° ، فإن الزاوية DBC هي 25° .

الخطوة 2: أستخدم المثلث قائم الزاوية ABC لإيجاد AB ، وهذا يُحتم معرفة AC ، و BC .

الخطوة 3: أرسم المثلث ADC . ولإيجاد AC ، أستخدم ظل الزاوية 37° .

$$\tan 37^\circ = \frac{80}{AC}$$

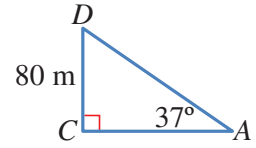
تعريف ظل الزاوية

$$AC = \frac{80}{\tan 37^\circ}$$

بالتبسيط

$$AC = 106.2 \text{ m}$$

باستعمال الآلة الحاسبة



الخطوة 4: أرسم المثلث BCD . ولإيجاد BC ، أستخدم ظل الزاوية 25° .

$$\tan 25^\circ = \frac{80}{BC}$$

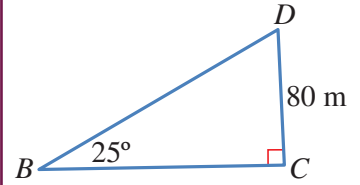
تعريف ظل الزاوية

$$BC = \frac{80}{\tan 25^\circ}$$

بالتبسيط

$$BC = 171.6 \text{ m}$$

باستعمال الآلة الحاسبة



الخطوة 5: أستخدم نظرية فيثاغورس في المثلث ACB لإيجاد AB .

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$$

نظرية فيثاغورس

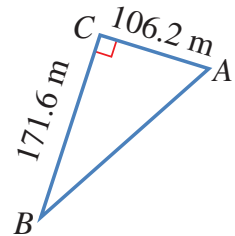
$$= (106.2)^2 + (171.6)^2 = 40725$$

بالتعويض

$$AB = \sqrt{40725} = 201.8$$

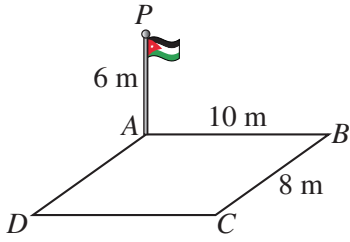
بأخذ الجذر التربيعي

إذن، المسافة بين المنزلين هي: 201.8 m ، مُقربةً إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.

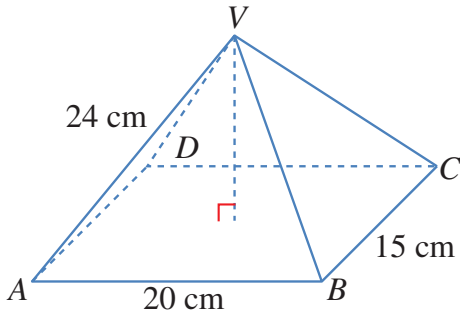


أتحقق من فهمي

أبحرت السفينتان A و B من الميناء P في اتجاهين متعاكسين. وقد رصدت طائرة عمودية تحلق فوق الميناء هاتين السفينتين في اللحظة نفسها، فكانت زاوية انخفاض السفينة A هي 40° ، وزاوية انخفاض السفينة B هي 54° . إذا كان ارتفاع الطائرة عن سطح البحر 600 m ، فما المسافة بين السفينتين لحظة رصدهما؟

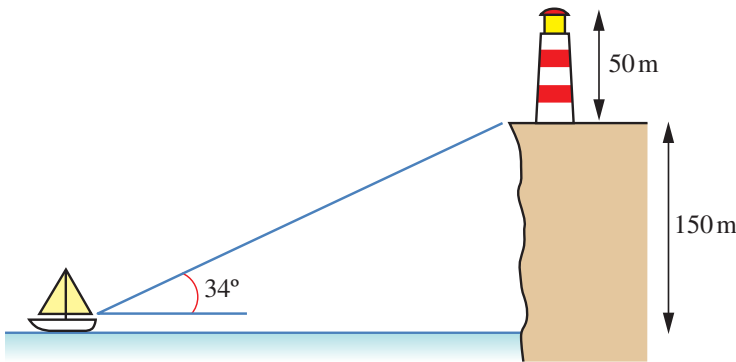


1 **سارية العَلَم:** نُصِبَت سارية عَلمٍ عمودياً عند رُكنٍ ساحةٍ مستطيلة الشكل $ABCD$. أجدُ زاوية ارتفاع قَمَّة السارية P من النقطة C .



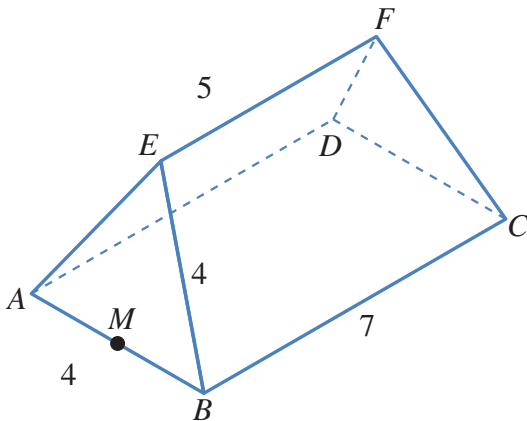
يُمثِّل الشكل المجاورُ هرمًا قائمًا قاعدته $ABCD$ مستطيلة الشكل، بُعدها: 20 cm ، و 15 cm . إذا كان طول كلٍّ من الأحراف الواصلة بين قَمَّة الهرم ورؤوس القاعدة 24 cm ، وكانت القمَّة V تقع رأسيًا فوق مركز القاعدة المستطيلة، فأجد:

- 2 طول القطر AC .
3 قياس الزاوية VAC .
4 ارتفاع الهرم.



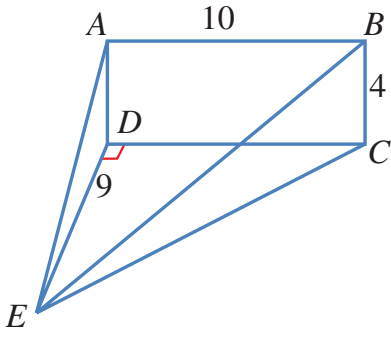
5 **منارة:** شاهد صيَّادٌ من قاربه قاعدة منارة على حافة صخرية بزاوية ارتفاع قياسها 34° . إذا كان ارتفاع قاعدة المنارة عن مستوى عيني الصيَّاد 150 m ، فكم يبعد الصيَّاد عن هذه القاعدة؟

6 إذا كان ارتفاع المنارة 50 m ، فما زاوية ارتفاع نظر الصيَّاد نحو قَمَّة المنارة؟



يُمثِّل الشكل المجاورُ سقفَ بناية، قاعدته المستطيل الأفقي $ABCD$ الذي بُعده: 7 m ، و 4 m . وتُمثِّل نهايتا السقفِ مثلثين متطابقين الأضلاع، في حين يُمثِّل كلٌّ من جانبي السقفِ شبه منحرفٍ متطابق الساقين. إذا كان طول الحافة العلوية EF هو 5 m ، فأجد:

- 7 طول EM ، حيث M نقطة منتصف AB .
8 قياس الزاوية EBC .
9 قياس الزاوية بين EM والقاعدة $ABCD$.



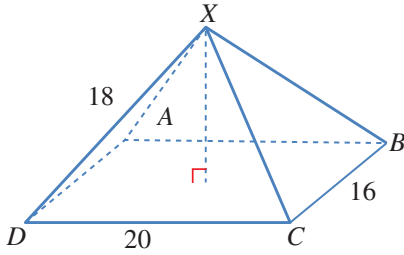
$ABCD$ مستطيلٌ رأسيٌّ، و EDC مثلثٌ أفقيٌّ. إذا كان قياس الزاوية CDE هو 90° ، و $AB = 10 \text{ cm}$ و $BC = 4 \text{ cm}$ و $ED = 9 \text{ cm}$ ، فأجد:

10 قياس الزاوية AED .

11 قياس الزاوية DEC .

12 طول \overline{EC} .

13 قياس الزاوية BEC .



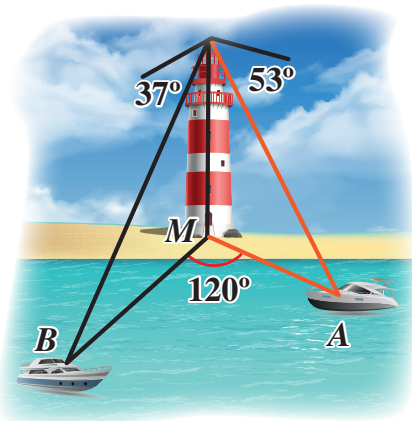
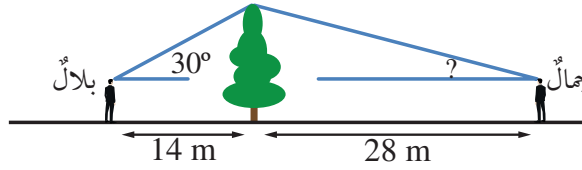
14 يُمثّل الشكل المجاور الهرم $XABCD$ الذي له قاعدة مستطيلة الشكل. أجد قياس الزاوية بين الحافة XD وقُطر القاعدة DB .

15 أحلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

مهارات التفكير العليا



16 **أكتشف الخطأ:** يقف بلالٌ على بُعد 14 m شرقيّ شجرة، زاوية ارتفاع قمتها بالنسبة إليه 30° ، ويقف جمالٌ على بُعد 28 m غربيّ الشجرة، وهو يرى أنّ زاوية ارتفاع قمة الشجرة بالنسبة إليه يجب أن تكون 15° ؛ لأنّه يبعد عن الشجرة مثليّ المسافة التي يبعدها بلالٌ. هل رأي جمالٍ صحيحٌ؟ إذا لم يكن رأيّه صحيحًا، فما زاوية الارتفاع؟



17 **تحذّر:** رُصد القاربان A و B في البحر من قمة منارة على الشاطئ، ارتفاعها 44 m، في اللحظة نفسها، فكانت زاوية انخفاض القارب A هي 53° ، وزاوية انخفاض القارب B هي 37° ، وقياس الزاوية AMB هو 120° ، حيث M قاعدة المنارة. أجد المسافة بين القاربين.

اختبار نهاية الوحدة

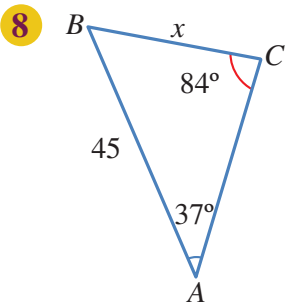
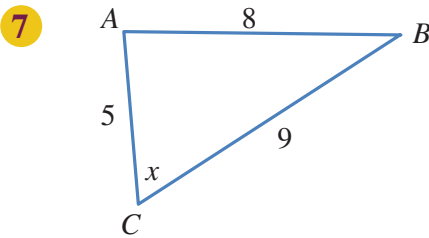
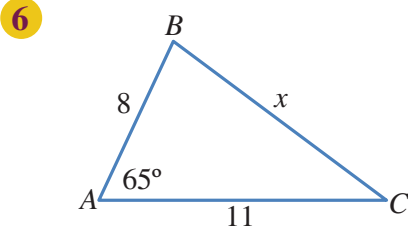
4 إحدى الصيغ الآتية تُستعمل لإيجاد مساحة المثلث ABC :

- a) $\frac{1}{2} bc \sin C$ b) $\frac{1}{2} ab \sin C$
c) $\frac{1}{2} ab \sin A$ d) $\frac{1}{2} ab \sin B$

5 إذا كان اتجاه النقطة R من النقطة Z هو 070° ، فإن اتجاه النقطة Z من النقطة R هو:

- a) 070° b) 110°
c) 250° d) 290°

أجد قيمة x في كل من المثلثات الآتية:



أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في ما يأتي:

1 يُمكن حل المثلث إذا عُلِّمَت جميع زواياه باستعمال:

(a) قانون الجيوب فقط. (b) قانون جيب التمام فقط.

(c) قانوني الجيوب (d) لا يُمكن حل المثلث

وجيوب التمام معاً. في هذه الحالة.

2 يُمكن حل المثلث إذا عُلِّمَت جميع أضلاعه باستعمال:

(a) قانون الجيوب فقط. (b) قانون جيب التمام فقط.

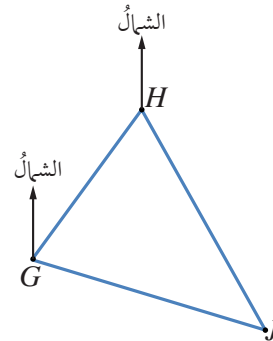
(c) قانوني الجيوب (d) لا يُمكن حل المثلث

وجيوب التمام معاً. في هذه الحالة.

3 إذا كان اتجاه النقطة H من النقطة G في الشكل الآتي

هو 045° ، واتجاه النقطة J من النقطة H هو 164° ، فإن

قياس الزاوية GHI هو:



a) 16°

b) 045°

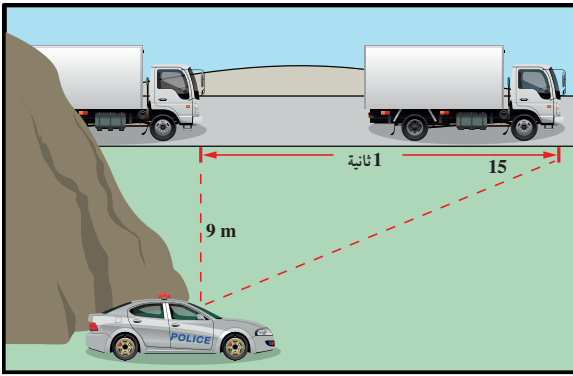
c) 29°

d) 61°

اختبار نهاية الوحدة

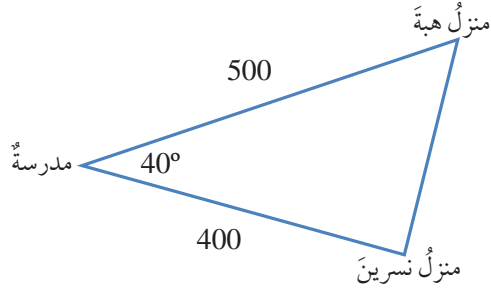
16 **موانئ:** أبحرت سفينة من الميناء P باتجاه الغرب مسافة 16 km ، ثم تحوّلت إلى اتجاه الجنوب، وقطعت مسافة 9 km حتى وصلت الميناء S . أجد اتجاه الميناء S من الميناء P .

17 **رادار:** رصد رادار شاحنة بعد ثانية من مرورها بمحاذاة، فصنع الخطّ الواصل بين الرادار والشاحنة وحافة الطريق زاوية مقدارها 15° كما في الشكل الآتي. أجد سرعة الشاحنة بوحدّة km/h .

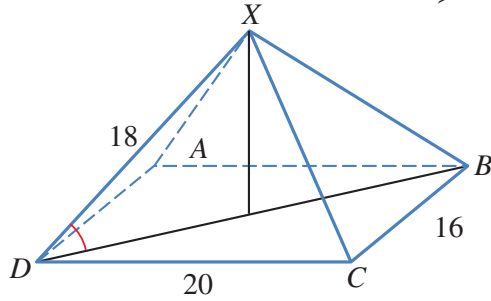


18 **عواصف بحرية:** أبحرت سفينة من الميناء A بسرعة 28 km/h متوجهة إلى الميناء B على بُعد 1100 km شرق الميناء A . ولتجنب العواصف الشديدة التي هبت عند انطلاق السفينة؛ فقد سلك القبطان مسارًا ينحرف 20° جنوبًا عن خطّ الملاحة المباشر بين الميناءين حتى هدأت العواصف بعد إبحار استمرّ 10 ساعات. كم تبعد السفينة عن الميناء B بعد هذه المدّة من الإبحار؟ ما قياس الزاوية الذي سيجعل السفينة تتوجّه مباشرة إلى الميناء B ؟

9 **يبدأ منزل نسرين عن المدرسة مسافة 400 m ، ويبعد منزل هبة عن المدرسة نفسها مسافة 500 m ، كما في الشكل الآتي. أجد المسافة بين منزلَيْهما.**

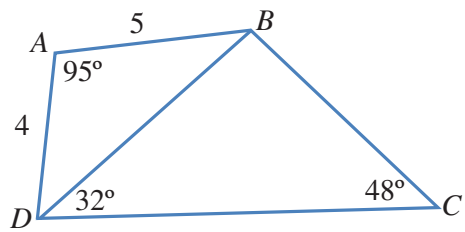


10 **أجد قياس الزاوية بين الحافة XD وقاعدة الهرم في الشكل الآتي.**



11 **إذا كانت مساحة المثلث PQR هي 68 cm^2 ، وكان $PQ = 18 \text{ cm}$ ، $RQ = 15 \text{ cm}$ ، فما قياس الزاوية الحادة PQR ؟**

مستعينًا بالشكل الآتي، أجد:



12 **طول \overline{DB} .** 13 **قياس الزاوية DBC .**

14 **طول \overline{CD} .** 15 **مساحة الشكل الرباعي $ABCD$.**

$ABCD$.

