كتاب التمارين

الدرس 1 اقترانات كثيرات الحدود

أحدِّدُ إذا كانَ كلٌّ ممّا يأتي كثيرَ حدودٍ أمْ لا، مُحدِّدًا الدرجةَ والمعاملَ الرئيسَ والحدَّ الثابتَ لكلِّ كثيرِ حدودٍ ثمَّ أكتبُهُ بالصورةِ القياسيةِ: 1–8) انظر ملحق الإجابات

1. $h(x) = 3x^2 + 2x^{-1} + 5$
2. $g(x) = 3\frac{1}{5}x^2 - 5x^3 + 7x - 1$
3. $f(x) = \frac{8(3-2x)}{5}$
4. $j(x) = \sqrt{x^2 + 16} - 4x$

أمثِّلُ بيانيًّا كلًّا ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجالَهُ ومداهُ:

5. $f(x) = 2x^3 - 5, -2 \le x \le 3$
6. $r(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 5, -2 \le x \le 2$
7. $g(x) = 12 - 4x - x^2$
8. $h(x) = (2x-5)^2 - 10$

إذا كانَ $f(x) = 2x^2 - 4x^3 + 5x - 1$ وَ $g(x) = x^3 + 5x^2 - 7$، وَ $h(x) = 2x - 4$، فأجِدُ ناتجَ ما يأتي:

9. $f(x) + g(x)$ — $-3x^3 + 7x^2 + 5x - 8$
10. $f(x) - g(x)$ — $-5x^3 - 3x^2 + 5x + 6$
11. $g(x) - x(h(x))$ — $x^2 + 3x^2 + 4x - 7$
12. $h(x) \cdot f(x)$ — $-8x^4 + 20x^3 + 2x^2 - 22x + 4$
13. $(h(x))^2 + f(x)$ — $-4x^3 + 6x^2 - 11x + 15$
14. $f(x) \cdot g(x)$ — $-4x^5 - 18x^3 + 15x^2 + 52x^3 - 19x^2 - 35x + 7$
15. هلِ العددُ 2− صفرٌ للاقترانِ $h(x) = -x^4 - 5x^3 + 7x - 10$؟ أبرِّرُ إجابتي. نعم، لأنَّ $f(-2) = -16 + 40 - 14 - 10 = 0$
16. أجِدُ أصفارَ الاقترانِ $g(x) = (x-1)^3 - 3(x-1)^2$ $(x-1)^2(x-1-3) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 4$
17. لدى مُزارعٍ 24 m مِنَ السياجِ، وَأرادَ أنْ يُسيِّجَ بِهِ حظيرةً مستطيلةً لدوابِّهِ؛ على أنْ يجعلَ جدارَ مخزنٍ في مزرعتِهِ أحدَ جوانبِ الحظيرةِ مِنْ دونِ سياجٍ. ما أكبرُ مساحةٍ ممكنةٍ للحظيرةِ التي يُمكنُ تسييجُها بهذا السياجِ؟ انظر ملحق الإجابات
18. يزيدُ ارتفاعُ أسطوانةٍ 3 وحداتٍ على طولِ نصفِ قُطرِ قاعدتِها. أكتبُ اقترانًا يُعبِّرُ عنْ حجمِ الأسطوانةِ بدلالةِ x إذا كانَ طولُ نصفِ قُطرِ قاعدتِها $(2x + 1)$ وحدةً.
(حجمُ الأسطوانةِ التي نصفُ قُطرِ قاعدتِها r، وارتفاعُها h، هوَ $V = \pi r^2 h$).
$V(x) = \pi(2x+1)^2(2x+4) = \pi(8x^3 + 24x^2 + 18x + 4)$

الدرس 2 قسمةُ كثيراتِ الحدودِ والاقتراناتِ النسبيةِ

أجِدُ ناتجَ قسمةِ $f(x)$ على $h(x)$ وباقيها في كلٍّ ممّا يأتي:

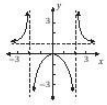
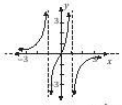
1. $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 12x + 5;\ h(x) = x + 4$ — الناتج $2x^2 - 12x + 36$، والباقي 139−
2. $f(x) = 4x^4 - 6x^3 - 9x + 12;\ h(x) = 2x^2 - 5x + 2$ — الناتج $2x^2 + 2x + 3$، والباقي $2x + 6$

3. أجِدُ قيمةَ k بحيثُ يكونُ باقي قسمةِ $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 7x + k$ على $h(x) = 2x + 1$ هوَ 8
4. أجِدُ قيمةَ c بحيثُ يكونُ $h(x) = x - 3$ أحدَ عواملِ $g(x) = 2x^4 - 5x^3 + cx - 18$ 3–6) انظر ملحق الإجابات

أجِدُ خطوطَ التقاربِ لكلٍّ اقترانٍ ممّا يأتي، وأمثِّلُهُ بيانيًّا، ثمَّ أجِدُ مجالَهُ ومداهُ:

5. $f(x) = 4 + \frac{2}{x-1}$
6. $h(x) = -\frac{3}{x+2} + 5$

أجِدُ المجالَ والمدى وخطوطَ التقاربِ لكلٍّ مِنَ الاقترانيْنِ المُمثَّلَيْنِ بيانيًّا في ما يأتي:

7. 
8. 

7–10) انظر ملحق الإجابات

أجِدُ المجالَ والمدى لكلٍّ ممّا يأتي:

9. $g(x) = \frac{1}{(x-3)^2} + 5$
10. $f(x) = \frac{4}{(x+2)^2} + 3$

يُعطى تركيزٌ مضادٌّ حيويٌّ (بالميليغرام لكلِّ ديسيلتر) في دمِ مريضٍ بعدَ t ساعةً مِنْ تناولِهِ بالاقترانِ: $C(t) = \frac{50t}{t^2 + 25}$

11. أجِدُ تركيزَ هذا المضادِّ بعدَ 5 ساعاتٍ مِنْ تناولِهِ.
12. متى يكونُ تركيزُ هذا المضادِّ 4 mg/dL؟

11–15) انظر ملحق الإجابات

تُقلَّتْ فصيلةٌ نادرةٌ مِنَ الحشراتِ إلى محميةٍ خاصةٍ لمنعِ انقراضِها. وقدْ بلغَ عددُ أفرادِ هذهِ الفصيلةِ بعدَ t شهرًا مِنْ نقلِها: $P(t) = \frac{72(1 + 0.6t)}{3 + 0.02t}$

13. كمْ كانَ عددُ الحشراتِ عندَ نقلِها إلى المحميةِ؟
14. كمْ سيبلغُ عددُها بعدَ 30 شهرًا مِنْ نقلِها؟
15. بعدَ كمْ شهرٍ سيصلُ عددُها إلى 558 حشرةً؟

الدرس 3 تركيبُ الاقتراناتِ

أجِدُ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي، مُستعمِلًا القيمَ المُبيَّنةَ في الجدوليْنِ الآتيينِ:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	−7	−5	−3	−1	3	5	7

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$g(x)$	8	3	0	−1	0	3	8

1. $(f \circ g)(1)$ −1
2. $(f \circ g)(-2)$ 7
3. $(g \circ f)(1)$ 8
4. $(g \circ f)(0)$ 0
5. $(g \circ g)(-1)$ −1
6. $(f \circ f)(-1)$ −7

إذا كانَ $f(x) = 2x + 1$ وَ $g(x) = 3x - 4$، فأجِدُ:

7. $(f \circ g)(2)$ 5
8. $(f \circ g)(0)$ −7
9. $(f \circ g)(8)$ 41
10. $(g \circ f)(1)$ 5
11. $(f \circ g)(x)$ $6x - 7$
12. $(g \circ f)(x)$ $6x - 1$

إذا كانَ $k(x) = \frac{1}{x+1}$، وَ $h(x) = \frac{2}{x}$، فأجِدُ:

13. $(h \circ k)(3)$ 8
14. $(k \circ h)(3)$ $\frac{3}{5}$
15. $(h \circ h)(6)$ 6
16. $(k \circ k)(-3)$ 2
17. $(k \circ h)(x)$
18. $(h \circ k)(x)$

17–23) انظر ملحق الإجابات

أجِدُ اقترانيْنِ $f(x)$ وَ $g(x)$، بحيثُ يكونُ $h(x) = (g \circ f)(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

19. $h(x) = x^6 + 1$
20. $h(x) = 4(x+1)^2$
21. $h(x) = 2x^2 - 20x + 50$
22. $h(x) = \sqrt{2x^2 - 4} + 7$

23. يرتبطُ سعرُ سلعةٍ مُعيَّنةٍ وعددُ الوحداتِ المبيعةِ مِنْها بالعلاقةِ $0 \le x \le 400$، $p = 100 - \frac{x}{4}$، حيثُ p السعرُ بالدينارِ، وَ x عددُ الوحداتِ المبيعةِ. إذا كانَتِ التكلفةُ C بالدنانيرِ لإنتاجِ x وحدةً هيَ $C = \frac{4\sqrt{x}}{0.5} + 600$، فأجِدُ التكلفةَ C في صورةِ اقترانٍ نسبةً إلى السعرِ p، ثمَّ أجِدُ التكلفةَ إذا كانَ سعرُ الوحدةِ الواحدةِ 19 دينارًا.

كتاب التمارين

الدرس 4 الاقترانُ العكسيُّ

إذا كانَ $g(x)=80-\frac{100}{1+x}$، فأجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

1. $g(9)$ 70
2. $g(4)$ 60
3. $g^{-1}(70)$ 9
4. $g^{-1}(60)$ 4

5. إذا كانَ $f(x)$ اقترانًا واحدٍ لواحدٍ، وَ $f(3)=8$، فماذا يُستنتَجُ منْ هذهِ المعطياتِ؟
يمكن استنتاج أن $f^{-1}(8)=3$

6. إذا كانَ $f(x)$ يُمثِّلُ عددَ الوحداتِ المُنتَجةِ في x ساعةَ عملٍ لمُنتِجٍ مُعيَّنٍ، فماذا يُمثِّلُ المقدارُ $f^{-1}(2540)$؟
عدد ساعات العمل التي ينتج فيها 2540 وحدة.

أجِدُ الاقترانَ العكسيَّ $f^{-1}(x)$ لكلٍّ ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجالَهُ ومداهُ: 7–16) انظر ملحق الإجابات

7. $f(x)=3x-5$
8. $f(x)=4-7x$
9. $f(x)=x^2+3, x\geq 0$
10. $f(x)=5-9x^2, x\geq 0$
11. $f(x)=\frac{x}{2x+6}$
12. $f(x)=\frac{x}{8-4x}$
13. $f(x)=\sqrt{2x-1}+3$
14. $f(x)=\sqrt{3x+2}-5$
15. $f(x)=\sqrt[3]{3x-2}-1$
16. $f(x)=\sqrt[3]{3-4x}+1$

أُبيِّنُ إذا كانَ كلٌّ منَ الاقترانينِ $f(x)$ وَ $h(x)$ اقترانًا عكسيًّا للآخرِ أمْ لا:

17. $f(x)=2x-5, h(x)=5x+2$
18. $f(x)=\frac{2x}{3x+5}, h(x)=\frac{5x}{2-3x}$

17–21) انظر ملحق الإجابات

19. أجِدُ الاقترانَ العكسيَّ للاقترانِ $f(x)=\sqrt{6+3x}$، ثمَّ أُمثِّلُ $f(x)$ وَ $f^{-1}(x)$ في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ.

20. هندسةٌ: تُعطى مساحةُ الدائرةِ بالاقترانِ $A(r)=\pi r^2$، حيثُ A المساحةُ، وَ r نصفُ القُطرِ. أُعبِّرُ عنْ r في صورةِ اقترانٍ نسبةً إلى المساحةِ A، ثمَّ أجِدُ طولَ نصفِ قُطرِ دائرةٍ مساحتُها $250\ \text{cm}^2$

21. فيزياء: يُعطى زمنُ الدورةِ T ثانيةً لبندولٍ بسيطٍ بالاقترانِ $T(\ell)=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{9.8}}$، حيثُ ℓ طولُ البندولِ بالأمتارِ. أُعبِّرُ عنْ ℓ في صورةِ اقترانٍ نسبةً إلى الزمنِ T، ثمَّ أجِدُ طولَ بندولٍ زمنُ دورتِهِ 3 s

الدرس 5 المتتالياتُ

الوحدة 5: الاقترانات

أكتبُ الحدودَ الثلاثةَ التاليةَ لكلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي:

1. 4, 6, 8, 10, … 12,14,16
2. 3, 30, 300, 3000, … 30000,300000,3000000
3. 1, 4, 9, 16, … 25,36,49
4. 2, 4, 8, 16, … 32,64,128
5. 3, 10, 17, 24, … 31,38,45
6. 0, 4, 18, 48, … 100,180,294

أُصنِّفُ المتتاليات الآتيةَ إلى خطيَّةٍ، وتربيعيةٍ، وتكعيبيةٍ، وأُسّيةٍ، ثمَّ أجِدُ الحدودَ الثلاثةَ الأولى والحدَّ العشرينَ لكلٍّ منْها:

7. $T(n)=3n+1$ خطية. 4, 7, 10 — $T(20)=61$
8. $T(n)=2n^2+1$ تربيعية. 3, 9, 19 — $T(20)=801$
9. $T(n)=3(2)^n-5$ أسية. 1, 7, 19 — $T(20)=3145723$
10. $T(n)=n(n^2+1)$ تكعيبية. 2, 10, 30 — $T(20)=8020$

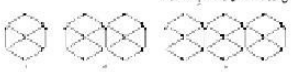
أجِدُ الحدَّ العامَّ لكلِّ متتاليةٍ ممّا يأتي:

11. 6, 11, 16, 21, 26, … $T(n)=5n+1$
12. $-4, 3, 22, 59, 120, \ldots$ $T(n)=n^3-5$
13. 5, 15, 45, 135, … $T(n)=5(3)^{n-1}$
14. 5, 11, 21, 35, 53, … $T(n)=2n^2+3$

استثمرَ خالدٌ 20000 دينارٍ في مشروعٍ تجاريٍّ، وتوقَّعَ أنْ تبلغَ نسبةُ الربحِ منهُ 15% سنويًّا:

15. أكتبُ مقدارًا جبريًّا يُمثِّلُ قيمةَ استثمارِ خالدٍ بعدَ n منَ السنواتِ. $T(n)=20000(1.15)^n$
16. أجِدُ قيمةَ استثمارِ خالدٍ بعدَ 12 سنةً. 107005.0021

في ما يأتي نمطٌ هندسيٌّ يُمثِّلُ فيهِ عددُ أعوادِ الثقابِ متتاليةً:



17. أرسمُ النموذجَ الرابعَ في هذا النمطِ. انظر ملحق الإجابات
18. أجِدُ عددَ أعوادِ الثقابِ اللازمةِ لبناءِ النموذجِ رقمِ 20 في هذا النمطِ. 181
19. ما أكبرُ مجموعةٍ منَ الأشكالِ السداسيةِ يُمكنُ بناؤُها باستعمالِ 100 عودٍ منَ الثقابِ؟ 11

الدرس 1 ، إجابة أتحقق من فهمي6:

افترض أن سعر البطاقة x دينارًا ، حيث $x < 11$، فيكون مقدار التخفيض $(11 - x)$ دينارًا، وسيزيد عدد البطاقات المبيعة بمقدار $4000(11 - x)$، وبذلك يصبح عددها:

$(28000 + 4000(11-x))$، ويساوي الدخل $R(x)$ سعر البطاقة مضروبًا في عدد البطاقات:

$$R(x) = x(28000 + 4000(11-x))$$

$$= -4000x^2 + 72000x$$

الإحداثي x لرأس هذا القطع المكافئ هو:

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-72000}{-8000} = 9$$

إذن، يكون الدخل أعلى ما يمكن إذا أصبح ثمن بطاقة الدخول 9 دنانير.

وأعلى دخل هو قيمة $R(x)$ عندما $x = 9$:

$$R(9) = -4000\,(9)^2 + 72000(9) = 324000$$

الدرس 1:

1) كثير حدود، صورته القياسية: $f(x) = -x + 4$، درجته 1، معامله الرئيس: -1، حده الثابت: 4

2) ليس كثير حدود؛ لأن فيه عاملًا أسه سالب (x الموجودة في المقام).

3) كثير حدود، صورته القياسية: $h(x) = 12x^2 - 19x - 12$، ودرجته 2، ومعامله الرئيس: 12، وحده الثابت: -12

4) كثير حدود، صورته القياسية: $L(x) = 5.3x^3 + 3x^2 - 2x$، ودرجته 3، ومعامله الرئيس: 5.3، وحده الثابت: 0

5) كثير حدود، صورته القياسية: $j(x) = -16t^2 + \sqrt{7}\,t$، ودرجته 2، ومعامله الرئيس: -16، وحده الثابت: 0

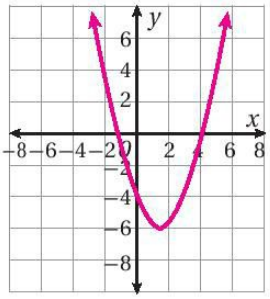
6) ليس كثير حدود؛ لأن فيه أسًّا كسريًّا.

7) ليس كثير حدود؛ لأن الأس فيه متغير، فهو اقتران أسي.

8) كثير حدود، صورته القياسية: $f(y) = y^7 - 8y^5 + 16y^3$، ودرجته 7، ومعامله الرئيس: 1، وحده الثابت: 0

9)

x	-2	0	1.5	3	5
$y = f(x)$	6	-4	-6.25	-4	6

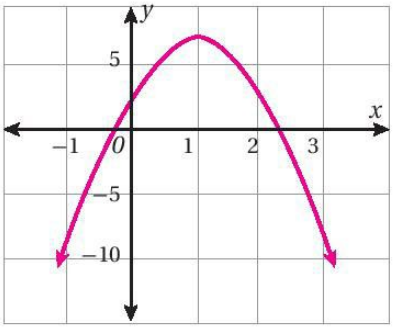


المجال: جميع الأعداد الحقيقية.

المدى: $y \geq 6.25$، أو الفترة $[6.25, \infty)$.

10)

x	-1	0	1	2	3
$y = f(x)$	-9	3	7	3	-9

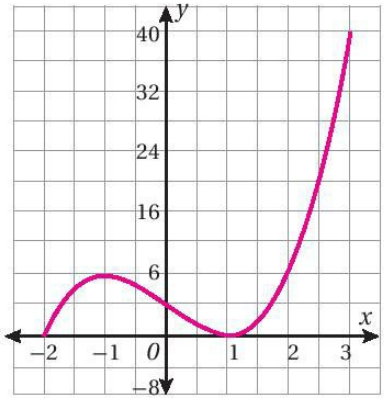


المجال: جميع الأعداد الحقيقية.

المدى: $y \leq 7$، أو الفترة $(-\infty, 7]$.

11)

x	-2	-1	0	1	2	3
y	0	8	4	0	8	40



المجال: $-2 \le x \le 3$ ، أو الفترة $[-2, 3]$

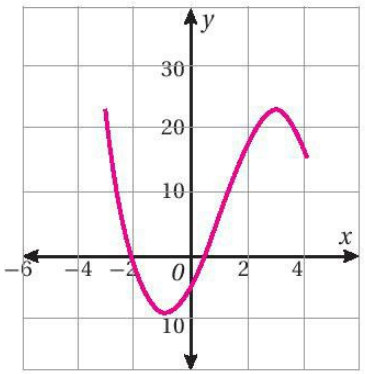
المدى: $0 \le y \le 40$، أو الفترة $[0, 40]$.

12)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	23	-2	-9	-4	7	18	23	16

المجال: $-3 \le x \le 4$ ، أو الفترة $[-3, 4]$

المدى: $-9 \le y \le 23$، أو الفترة $[-9, 23]$.



13) $h(x) + g(x) = x^4 - 2x^3 + 3x - 2$

14) $g(x) - h(x) = -x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 3x + 10$

15) $f(x) \cdot h(x) = 2x^5 + x^4 - 10x^3 + x^2 - 9x - 6$

16) $x(f(x)) + h(x) = x^4 - 3x^2 + 4x - 6$

17) $(f(x))^2 - g(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 3$

18) $h(x) - x(g(x)) = 3x^4 - 5x^3 - 5x^2 - x - 6$

19) أقصى ارتفاع للصاروخ هو ارتفاعه عندما

$t = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-229}{2(-4.9)} \approx 23.4$ ، وهو يساوي

$h(23.4) \approx 2910 \text{ m}$

20) ليكن عدد الأشجار x (حيث $x > 75$)، فيكون ما يجنيه من كل شجرة: $21 + 3(75 - x)$

المحصول الكلي: $P(x) = x(21 + 3(75 - x))$

$= 21x + 3x(75) - 3x^2$

$P(x) = -3x^2 + 246x$

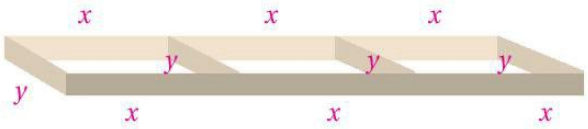
لهذا القطع المكافئ قيمة عظمى عندما:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-246}{2(-3)} = 41$$

إذن، عدد الأشجار الذي يحقق أعلى محصول هو 41 شجرة في البستان.

أعلى محصول هو: $P(41) = 5043$

21) ليكن طول كل حظيرة x، وعرضها y، فيكون طول السياج الكلي للحظائر الثلاث:



$6x + 4y = 120$، ومنه ينتج أن:

$$y = \frac{120 - 6x}{4}$$

المساحة الكلية للحظائر الثلاث:

$$A = 3xy = 3x\left(\frac{120 - 6x}{4}\right)$$

$$A(x) = 90x - 4.5x^2$$

تكون هذه المساحة أكبر ما يمكن عندما:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-90}{-9} = 10$$

إذن، أكبر مساحة ممكنة لهذه الحظائر هي: $A(10) = 450 \text{ m}^2$

22) حجم ما تبقى من المكعب يساوي حجم المكعب الأصلي مطروحًا منه حجم التجويف.

حجم المكعب الأصلي هو $(2x + 1)^3$ ، وحجم التجويف هو $x^2(2x + 1)$

إذا كان حجم الجزء المتبقي هو $R(x)$، فإن:

$R(x) = (2x + 1)^3 - x^2(2x + 1)$

$= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - (2x^3 + x^2) = 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$

23) $P(x) = -0.2x^2 + 90x - 6300$

24) كلتا الإجابتين غير صحيحة. لم يُغيِّر طه إشارات المطروح عندما حوَّل الطرح إلى جمع. وبالرغم من أن قاسمًا غيَّر إشارات المطروح، فإنه أخطأ في نتيجة جمع بعض الحدود المتشابهة.

النتيجة الصحيحة لهذه العملية هي: $-2x^3 - 13x^2 - 9x + 3$

25) إجابة محتملة:

$f(x) = 2x - 1, h(x) = 4x^2 + 2x + 1$

$f(x) \cdot h(x) = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$

$= 8x^3 + 4x^2 + 2x - 4x^2 - 2x - 1$

$= 8x^3 - 1$

26) لإيجاد الأصفار، تُحَل المعادلة: $f(x) = 0$

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$$
$$(x^3 - x^2) - (4x - 4) = 0$$
$$x^2(x-1) - 4(x-1) = 0$$
$$(x-1)(x^2 - 4) = 0$$
$$(x-1)(x-2)(x+2) = 0$$
$$x = 1, x = 2, x = -2$$

إذن، أصفار هذا الاقتران هي: $-2، 2، 1$

27) إذا كانت درجة f أكبر من درجة g فإن درجة كلٍّ من $f+g, f-g$ تساوي درجة f؛ أي الدرجة العليا. أمّا إذا كانت درجة f تساوي درجة g فإن درجة كلٍّ من $f+g, f-g$ تساوي درجة كلٍّ منهما، أو تقل عنها؛ لأن ناتج جمع المعاملين الرئيسين قد يكون صفرًا. وأمّا درجة $f \cdot g$ فإنها تساوي دائمًا مجموع درجتي الاقترانين f, g

الدرس 2:

9) المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 0؛ أي $\{x | x \neq 0\}$

10) المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 1 و $\frac{1}{2}$ ؛ أي $\{x | x \neq \frac{1}{2}, x \neq 1\}$

11) المجال: جميع الأعداد الحقيقية.

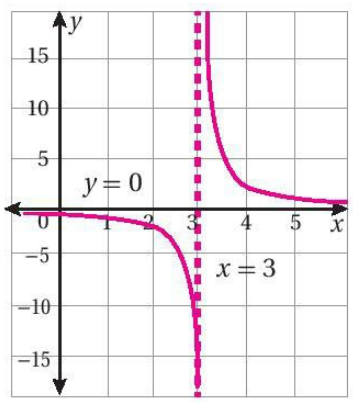
12)

x	-1	0	1	2	2.8	3.2	3.5	4	6
$y = f(x)$	-0.5	-0.67	-1	-2	-10	10	4	2	0.67

له خط تقارب رأسي هو $x = 3$، وخط تقارب أفقي هو $y = 0$

المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 3 أي $\{x | x \neq 3\}$

المدى: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 0 أي $\{y | y \neq 0\}$



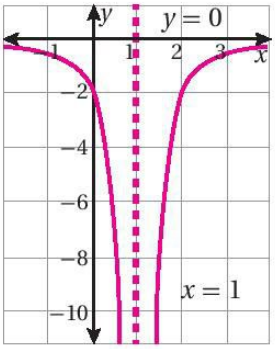
13)

x	-2	-1	0	0.5	1.5	2	3	4
$y = h(x)$	-0.22	-0.5	-2	-8	8	-2	-0.5	-0.22

له خط تقارب رأسي هو $x = 1$، وخط تقارب أفقي هو $y = 0$

المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 1؛ أي $\{x | x \neq 1\}$

المدى: جميع الأعداد الحقيقية السالبة؛ أي $\{y | y < 0\}$



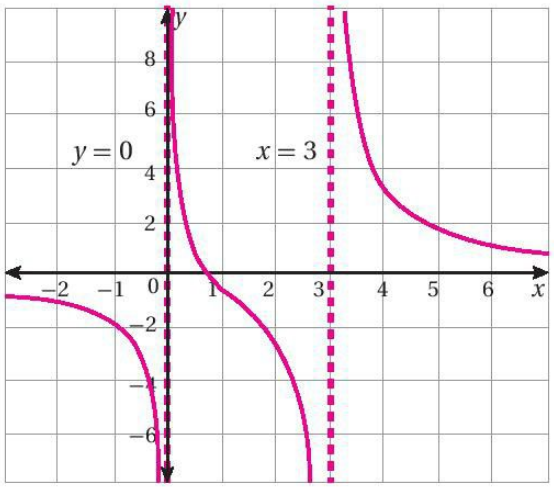
14)

x	-2	-1	-0.5	0.5	0.75	1	2.5	3.5	5
$y = w(x)$	-1.1	-1.75	2.9	0.8	0	-0.5	-5.6	6.3	1.7

له خطا تقارب رأسيان، هما: $x = 3, x = 0$ ، وله خط تقارب أفقي هو: $y = 0$

المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 0, 3 ؛ أي $\{x | x \neq 0, x \neq 3\}$

المدى: جميع الأعداد الحقيقية.



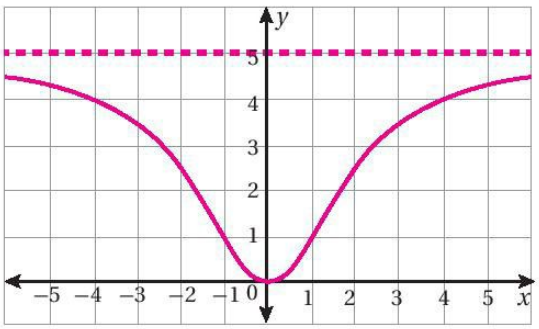
15) بقسمة البسط على المقام، يمكن كتابة الاقتران بالصورة:

$$g(x)=5+\frac{-20}{x^2+4}$$

إذن، لـه خط تقـارب أفقي هو $y=5$، وليس لـه خطوط تقارب رأسية لعدم وجود أصفار حقيقية للمقام.

المجال: جميع الأعداد الحقيقية.

المدى: $0 \le y < 5$، أو الفترة $[0, 5)$.



x	−5	−2	−1	0	1	2	5
$y=g(x)$	4.3	2.5	1	0	1	2.5	4.3

17) عرض هذه الورقـة $(x+2)^2$، وهو أحد عاملي مسـاحتها. فإذا قسمت المساحة على $(x+2)^2$، كان الباقي صفرًا.

باقـي قسـمة المسـاحة علـى $(x+2)^2$، أو (x^2+4x+4) هو $(a-20)x$. وبمساواته بالصفر، ينتج أن $a=20$

$$\begin{array}{r} 3x+2 \\ x^2+4x+4 \overline{)\,3x^3+14x^2+ax+8} \\ \underline{(-)\ 3x^3+12x^2+12x} \\ 2x^2+(a-12)x+8 \\ \underline{(-)\ 2x^2+8x+8} \\ (a-20)x \end{array}$$

18) حجم البركة يساوي مساحة قاعدتها ضرب ارتفاعها.

ويمكـن حسـاب الارتفـاع h بقسـمة الحجـم V علـى مسـاحة القاعـدة A:

$$h = V \div A$$

$$h=(3x^4-3x^3-33x^2+54x) \div (3x^2-6x)=x^2+x-9+0$$

إذن، ارتفاع البركة هو: (x^2+x-9)

19) الاقتران المختلف هـو $h(x)=\frac{9}{x^2+1}$ ؛ إذ ليس لمقامه أصفار وليس له خطوط تقارب رأسـية. أمّا مقامات الاقترانات الأُخرى فلها صفر واحد أو أكثر؛ أي إن لها خط تقارب رأسـي واحدًا على الأقل.

20) إجابة محتملة:

$f(x)=\frac{1}{x^2+5x-14}+3$، أو $f(x)=\frac{ax+b}{x^2+5x-14}+3$، حيث a و b عددان حقيقيان، شرط أن يكون صفر المقدار $ax+b$ لا يساوي 7 أو -2

21) العامل المعطى $(x-1)^2$ هـو اقتران تربيعي، والاقتران المطلوب من الدرجـة الثالثة، فيكون العامـل الثاني اقترانًـا خطيًّا بصورة $(ax+b)$.

وعليه، فإن:

$$f(x)=(x-1)^2(ax+b)=ax^3+(b-2a)x^2+(a-2b)x+b$$

من تقسـيم $ax^3+(b-2a)x^2+(a-2b)x+b$ على $(x+2)$، ثم مساواة الباقي بـ 9، فتنتج المعادلة: $-18a+9b=9$

ومـن ثـم تقسـيم $ax^3+(b-2a)x^2+(a-2b)x+b$ على $(x-3)$، ثم مساواة الباقي بـ 44، فتنتج المعادلة: $12a+4b=44$

وبقسـمة طرفي المعادلة الأولى على 9، وطرفـي المعادلة الثانية على 4، وحل نظام المعادلتين:

$$-2a+b=1,\ 3a+b=11 \text{، فإن: } a=2,\ b=5$$

إذن، الاقتران المطلوب هو: $f(x)=2x^3+x^2-8x+5$

الدرس 3:

9) $(a \circ b)(x)=a(x-7)=x-7+4=x-3$

$(b \circ a)(x)=b(x+4)=x+4-7=x-3$

$(a \circ b)(x)=(b \circ a)(x)=x-3$

10) $(f \circ g)(x)=f(3x+4)=2^{3x+4}$

$(f \circ g)(-3)=2^{3(-3)+4}=2^{-5}=\frac{1}{32}$

11) $(g\circ f)(x) = 2(\frac{1}{x-4}) - 10 = \frac{2}{x-4} - 10\,(\frac{x-4}{x-4})$

$= \frac{2-10x+40}{x-4}$

$= \frac{42-10x}{x-4}$

مجال هذا الاقتران هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 4؛ أي $\{x|x \neq 4\}$

19) ستتنوع إجابات الطلبة.

إجابة محتملة:

$f(x) = \frac{4}{3-\sqrt{x}}$ ، $g(x) = 4 + x^2$

أو $f(x) = \frac{4}{3-x}$ ، $g(x) = \sqrt{4+x^2}$، وغيرها.

20) ستتنوع إجابات الطلبة.

إجابة محتملة:

$f(x) = x^3$ ، $g(x) = \frac{1}{2x-3}$،

أو $f(x) = \frac{1}{x^3}$ ، $g(x) = 2x - 3$، وغيرها.

21) مدى $g(x)$ هو جميع الأعداد الحقيقية السالبة، وهي غير موجودة في مجال $f(x)$؛ لأن مجال $f(x)$ هو الأعداد الحقيقية التي لا تقل عن 2، فلا يمكن تكوين $f\circ g(x)$.

22) عندما $t = 2$ يكون طول نصف قطر الموجة:

$r(2) = 25\sqrt{2+2}$

$= 50$ cm

مساحة الموجة تساوي $\pi(50)^2$، أو 7854 cm^2 تقريبًا.

23)

$(N\circ T)(t) = N(T(t)) = 23(5t+1.5)^2 - 56(5t+1.5) + 1$

$= 575t^2 + 65t - 31.25$

24) الزمن الذي يكون عنده عدد خلايا البكتيريا 6752 خلية هو حل المعادلة الآتية:

$575t^2 + 65t - 31.25 = 6752$

$575t^2 + 65t - 6783.25 = 0$

$t = \frac{-65 \pm \sqrt{65^2 + 4(575)(6783.25)}}{2(575)}$

$t = 3.38,\ t = -3.49$

الإجابة السالبة مرفوضة (لا يكون الزمن سالبًا).

إذن، يكون عدد خلايا البكتيريا 6752 خلية بعد 3.38 h من لحظة إخراج الطعام من الثلاجة.

25) $a = 4, b = -3$

26) $(f\circ g\circ h)(x) = f(g(x+3))$

$= f(\frac{1}{x+3}) = (\frac{1}{x+3})^2 + 1 = \frac{x^2+6x+10}{(x+3)^2}$

27) إجابة هدى صحيحة. عوضت وفاء x^2 مكان x في الحد الثاني من قاعدة $f(x)$، ونسيت 5

28) ستتنوع إجابات الطلبة.

إجابة محتملة:

$f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = x-2$

29) $(f\circ g)(x) = f(\frac{1}{x+2}) = \frac{1}{\frac{1}{x+2} - 3} = 1 \div (\frac{1}{x+2} - 3)$

$= 1 \div \frac{1-3(x+2)}{x+2} = 1 \times \frac{x+2}{-3x-5} = -\frac{x+2}{3x+5}$

مجاله هو مجال $g(x)$ باستثناء الأعداد التي تجعل المقام يساوي 0؛ أي $x = -\frac{5}{3}$ ، فمجاله هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 2− و $-\frac{5}{3}$؛ أي $\{x \mid x \neq -2, x \neq = -\frac{5}{3}\}$

18) $y=\frac{x}{x-1}$

$xy-y=x \Rightarrow xy-x=y \Rightarrow x(y-1)=y$

$x=\frac{y}{y-1}$

$y=\frac{x}{x-1} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{x-1}=f(x)$

يمكن إثبات أن $f(x)$ هو اقتران عكسي لنفسه بيبان أن:

$(f\circ f)(x)=x$

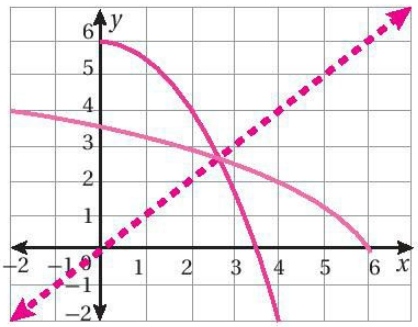
$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1}=\frac{x}{x-1}\div(\frac{x}{x-1}-1)=$

$=\frac{x}{x-1}\div\frac{x-(x-1)}{x-1}=\frac{x}{x-1}\div\frac{1}{x-1}=\frac{x}{x-1}\times\frac{x-1}{1}=x$

20) رسم المستقيم $x=y$، ثم تعيين صور بعض النقاط بالانعكاس حول المستقيم $x=y$، مثل: $(0,6)$ وانعكاسها $(6,0)$، والنقطة $(-2,4)$ وانعكاسها $(4,-2)$، والنقطة $(2,4)$ وانعكاسها $(4,2)$، ثم الوصل بينها بخط متصل، فينتج الشكل المجاور.

مجال $f(x)$: $0\le x\le 4$ ، ومداه: $-2\le x\le 6$

مجال $f^{-1}(x)$: $-2\le x\le 6$، ومداه: $0\le y\le 4$



30)

$(f\circ g)(x)=f(\frac{2x-1}{3})=\frac{2(\frac{2x-1}{3})-2}{\frac{2x-1}{3}-1}$

$=\frac{\frac{4x-8}{3}}{\frac{2x-13}{3}}=\frac{4x-8}{2x-13}$

$(f\circ g)(x)=\frac{4x-8}{2x-13}=-4 \Rightarrow 4x-8=-8x+52 \Rightarrow x=5$

الدرس 4:

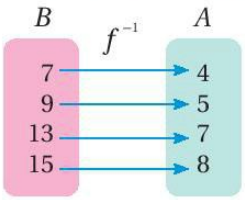
1) ليس له اقتران عكسي؛ لأنه ليس اقتران واحد لواحد.

الزوجان الأول والثاني فيهما المسقط الثاني نفسه 6

2) له اقتران عكسي؛ لأنه اقتران واحد لواحد.

$h^{-1}=\{(0,0),(1,1),(16,2),(81,3)\}$

3) له اقتران عكسي؛ لأنه اقتران واحد لواحد.



4) ليس له اقتران عكسي؛ لأنه ليس اقتران واحد لواحد.

العنصران -3 و3 لهما الصورة نفسها 3

17) $(f\circ g)(x)=(-3+\sqrt{x-2}+3+2=x-2+2=x$

$(g\circ f)(x)=-3+\sqrt{(x+3)^2+2-2}=-3+(x+3)=x$

إذن، كل من الاقترانين $f(x), g(x)$ هو اقتران عكسي للآخر.

21) $f(x) = x^2-2x+5 = x^2-2x+1+4 = (x-1)^2+4\ ,\ -3 \le x \le 1$

$$y = (x-1)^2 + 4$$

$$y-4 = (x-1)^2$$

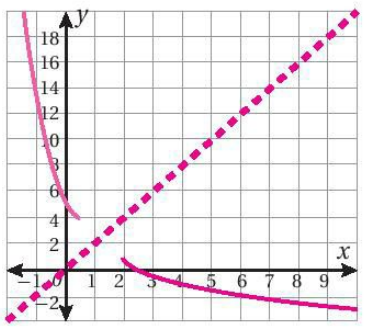
$$-\sqrt{y-4} = x-1$$

(أُخِذ الجذر السالب لأننا نتعامل هنا مع الجزء الأيسر من القطع المكافئ).

$$1-\sqrt{y-4} = x$$

$$y = 1-\sqrt{x-4}$$

مجال $f^{-1}(x)$: $20 \le x \le 4$، ومداه: $1 \le y \le -3$



22)

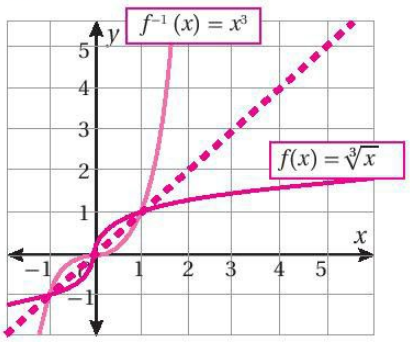
$$n(C) = \frac{100C-25}{0.6-C}\ ;\ n(0.5) = \frac{100(0.5)-25}{0.6-0.5} = \frac{25}{0.1} = 250\ \text{mL}$$

23) نعم؛ فالاقتران العكسي يُبيِّن كتلة الجسم بدلالة طول الزنبرك، وهو: $w = 2(l-3)$

24) $r(A) = -20 + \sqrt{\dfrac{A+800\pi}{2\pi}}$;

$$r(2000) = -20 + \sqrt{\frac{2000+800\pi}{2\pi}} \approx 6.8\ \text{cm}$$

25) $f^{-1}(x) = x^3$



26) بما أن للاقتران $f(x)$ صفرًا عندما $x = 3$، فإن منحنى $f(x)$ يمر بالنقطة $(3, 0)$؛ لذا فإن منحنى الاقتران العكسي $f^{-1}(x)$ يمر بالنقطة $(0, 3)$.

27) ستتنوع إجابات الطلبة.

إجابة محتملة:

$$g(x) = 9x + 7\ ,\ g^{-1}(x) = \frac{x-7}{9}$$

$$(g \circ g^{-1})(x) = g\left(\frac{x-7}{9}\right) = 9\left(\frac{x-7}{9}\right)+7 = x-7+7 = x$$

$$(g^{-1} \circ g)(x) = g^{-1}(9x+7) = \frac{9x+7-7}{9} = \frac{9x}{9} = x$$

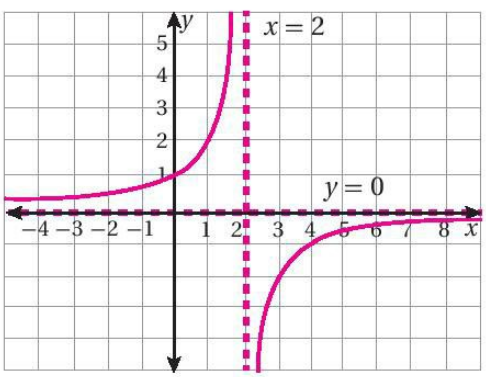
إذن، كلٌّ من الاقترانين $g(x)$ وَ $g^{-1}(x)$ هو اقتران عكسي للآخر.

28) $x = 0.6$

اختبار نهاية الوحدة:

13) لهذا الاقتران خط تقارب رأسي هو $x = 2$، وخط تقارب أفقي هو $y = 0$

x	-1	0	1	1.5	2.5	3	4	5
$y = f(x)$	1.33	2	4	8	-8	-4	-2	-1.33



المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 2؛ أي $\{x | x \ne 2\}$.

المدى: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 0؛ أي $\{y | y \ne 0\}$.

18) $g^{-1}(x) = \dfrac{1}{x-2} - 1\ ,\ x \ne 2$

19) $(f \circ f)(x) = 16x - 15$

20) $(g\circ f)(x) = \dfrac{1}{4x-2} + 2$

21) $f^{-1}(x) = -x^2 + 4, x \geq 0$

مجال $f(x)$ هو $x \leq 4$ أو الفترة $(-\infty, 4]$، ومداه هو $y \geq 0$ أو الفترة $[0, \infty)$

مجال $f^{-1}(x)$ هو $x \geq 0$ أو الفترة $[0, \infty)$، ومداه هو $y \leq 4$ أو الفترة $(-\infty, 4]$

22) عند تنفيذ الزيادة x مرَّة ستقل مبيعات المحل بمقدار $100x$، وتصبح كمية المبيعات $3500 - 100x$، وسعر العلبة الواحدة $0.75 + 0.05x$، ويكون الدخل:

$$R(x) = (0.75 + 0.05x)(3500 - 100x)$$

$$R(x) = 2625 + 100x - 5x^2$$

وهذا قطع مكافئ مفتوح إلى الأسفل، وله قيمة عظمى عند رأسه.

الإحداثي x للرأس هو:

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2(-5)} = 10$$

إذن، سعر العلبة الذي يحقق أعلى دخل أسبوعي هو:

$$0.75 + 10(0.05) = 1.25$$

إجابات كتاب التمارين - الدرس 1:

1) ليس كثير حدود لأن أس المتغير x في الحد الثاني سالب.

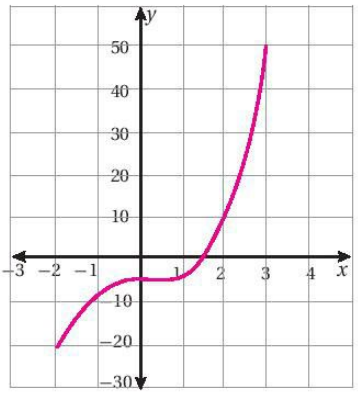
2) كثير حدود، درجته 3، معامله الرئيس -5، الحد الثابت -1، صورته القياسية هي: $f(x) = -5x^3 + 3\frac{1}{5}x^2 + 7x - 1$

3) كثير حدود، درجته 1، معامله الرئيس $-\frac{16}{5}$، الحد الثابت $\frac{24}{5}$، صورته القياسية هي: $f(x) = -\frac{16}{5}x + -\frac{24}{5}$

4) ليس كثير حدود لأنه يحتوي مقدار جذري.

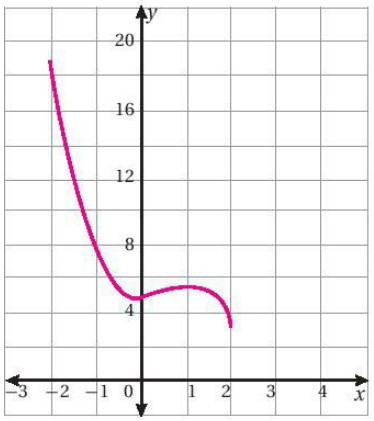
5) المجال: $\{x | -2 \leq x \leq 3\}$

المدى: $\{y | -21 \leq y \leq 49\}$



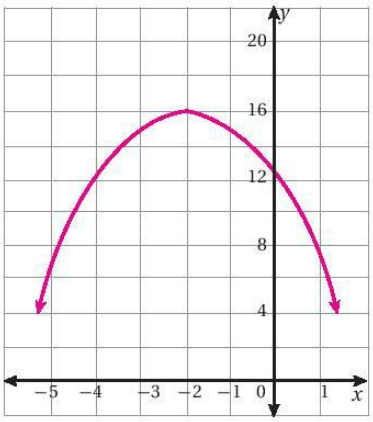
6) المجال: $\{x | -2 \leq x \leq 2\}$

المدى: $\{y | -3 \leq y \leq 19\}$



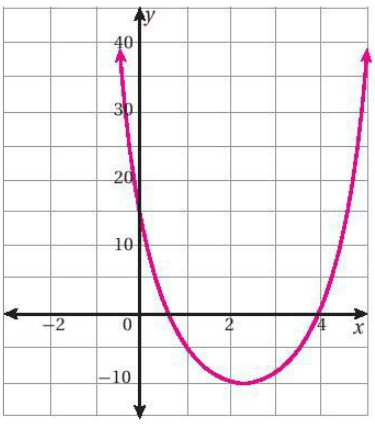
7) المجال: جميع الأعداد الحقيقية

المدى: $\{y | y \leq 16\}$ أو $(-\infty, 16]$



8) المجال: جميع الأعداد الحقيقية

المدى: $\{y | y \geq -10\}$ أو $[-10, \infty)$



17)

$A(x) = x(24-2x) = 24x - 2x^2$

الإحداثي x للرأس هو $\frac{-b}{2a} = \frac{-24}{2(-2)} = 6$

أكبر مساحة ممكنة هي:

$A(6) = 24(6) - 2(6)^2 = 72\ \text{m}^2$

إجابات كتاب التمارين-الدرس 2:

3) باقي القسمة هو $(k-6)$

$k-6 = 8 \Rightarrow k = 14$

4) باقي القسمة هو $3 + 18 - (c+9)$، ويجب أن يكون الباقي صفرًا

$(c+9) = 0 - 18 + 3$

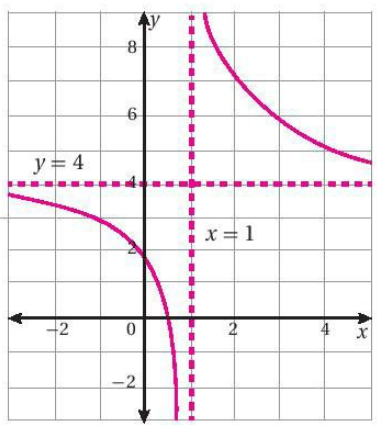
$-6 + (c+9) = 0 \Rightarrow c = -3$

5) له خط تقارب رأسي هو $x = 1$

وله خط تقارب أفقي هو $y = 4$

المجال: $\{x \mid x \neq 1\}$

المدى: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 4 أي $\{y|y \neq 4\}$

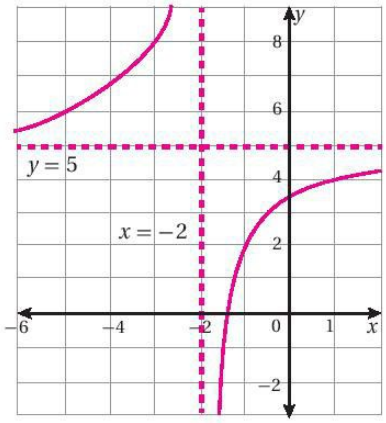


6) له خط تقارب رأسي هو $x = -2$

وله خط تقارب أفقي هو $y = 5$

المجال: $\{x \mid x \neq -2\}$

المدى: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 5 أي $\{y|y \neq 5\}$



7) المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء $-2, 2$

أي: $\{x|x \neq -2, x \neq 2\}$

المدى: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء $(0, 1]$

أي: $(-\infty, 0]$ أو $(1, \infty)$

له خطا تقارب رأسيان هما: $x = -2, x = 2$

له خط تقارب أفقي هو $y = 1$

له خط تقارب هو $y = 0$

8) المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء $-1, 1$

أي: $\{x|x \neq -1, x \neq 1\}$

المدى: جميع الأعداد الحقيقية

له خطا تقارب رأسيان هما: $x = -1, x = 1$

9) المجال : جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 3 أي $\{x|x \neq 3\}$

المـــدى: جميع الأعداد الحقيقية التي تزيد على 5 أي $\{y|y > 5\}$ أو الفترة $(5, \infty)$

10) المجال: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء -2 أي $\{x \mid x \neq -2\}$

المدى: جميع الأعداد الحقيقية التي تزيد على 3 أي $\{y|y > 3\}$ أو الفترة $(3, \infty)$

11) $C(5) = \frac{50(5)}{5^2 + 25} = 5\text{mg/dL}$

11) $C(t) = 4 \Rightarrow \frac{50t}{t^2 + 25} = 4 \Rightarrow 4t^2 - 50t + 100 = 0$

$t = 2.5,\ t = 10$

إذن، يكون تركيز المضاد الحيوي في دم المريض 4 mg/dL بعد 2.5 ساعة من تناوله، وبعد 10 ساعات من تناوله.

13) a)

$P(0) = \frac{72(l + 0.6(0))}{3 + 0.02(0)} = 24$

13) b)

$P(30) = \frac{72(l + 0.6(30))}{3 + 0.02(30)} = 380$

13) c) $\frac{72(l + 0.6t)}{3 + 0.02t} = 558 \Rightarrow 588(3+0.02t) = 72(1+0.6t)$

$1674+11.16t = 72+ 43.2t$

$1602 = 32.04t \Rightarrow t = 50$

إذن، يكون عدد الحشرات 558 بعد 50 شهر من نقلها إلى المحمية.

إجابات كتاب التمارين-الدرس 3:

17) $k \circ h(x) = k(\frac{2}{x}) = \frac{1}{\frac{2}{x} + 1}$

$\frac{1}{\frac{2+x}{x}} = \frac{x}{2+x}$

18) $h \circ k(x) = h(\frac{1}{x+1})$

$= \frac{2}{\frac{1}{x+1}} = 2 \times \frac{x+1}{1} = 2x + 2$

19) تتنوع الإجابات. إجابة محتملة: $f(x) = x^6;\ g(x) = x + 1$ أو $f(x) = x^3;\ g(x) = x^2 + 1$ وغيرها.

20) تتنوع الإجابات. إجابة محتملة: $f(x) = x + 1;\ g(x) = 4x^2$

أو $g(x) = x^2;\ f(x) = 2x + 2$ وغيرها.

21) تتنوع الإجابات. إجابة محتملة: $f(x) = x - 5;\ g(x) = 2x^2$

أو $f(x) = (x-5)^2;\ g(x) = 2x$

22) تتنوع الإجابات. إجابة محتملة:

$f(x) = 2x^2 - 4;\ g(x) = \sqrt{x} + 7$

أو $f(x) = 2x^2;\ g(x) = \sqrt{x - 4} + 7$

23) $x = 4(100 - p) \Rightarrow C(p) = \frac{8\sqrt{(100-p)}}{0.5} + 600$

$C(19) = 744$

إجابات كتاب التمارين-الدرس 4:

7) $f^{-1}(x) = \frac{x + 5}{3}$

مجاله ومداه هما جميع الأعداد الحقيقية.

8) $f^{-1}(x) = \frac{4 + x}{7}$

مجاله ومداه هما جميع الأعداد الحقيقية.

9) $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 3}$

مجاله: $[3, \infty)$، ومداه الأعداد الحقيقية غير السالبة أو $[0, \infty)$

10) $f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{5 - x}}{3}$

مجاله: $(-\infty, 5]$، ومداه الأعداد الحقيقية غير السالبة أو $[0, \infty)$

11) $f^{-1}(x) = \frac{6x}{1-2x}$

مجاله: $\{x \mid x \neq \frac{1}{2}\}$، ومداه الأعداد الحقيقية باستثناء -3 أو $\{y \mid y \neq -3\}$

12) $f^{-1}(x) = \frac{8x}{1+4x}$

مجاله: $\{x \mid x \neq \frac{-1}{4}\}$، ومداه الأعداد الحقيقية باستثناء 2 أو $\{y \mid y \neq 2\}$

13) $f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 6x + 10}{2}$

مجاله: جميع الأعداد الحقيقية التي لا تقل عن 3 أي $[3, \infty)$، ومداه الأعداد الحقيقية التي لا تقل عن $\frac{1}{2}$ أي $[\frac{1}{2}, \infty)$

14) $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2 + 10x + 23}{3}$

مجاله: جميع الأعداد الحقيقية التي لا تقل عن -5 أي $[-5, \infty)$،
ومداه الأعداد الحقيقية التي لا تقل عن $\frac{-2}{3}$ أي $[\frac{-2}{3}, \infty)$

15) $f^{-1}(x) = \dfrac{(x+1)^3 + 2}{3}$

مجاله ومداه جميع الأعداد الحقيقية.

16) $f^{-1}(x) = \dfrac{3-(x-1)^3}{4}$

مجاله ومداه جميع الأعداد الحقيقية.

17) $(f \circ h)(x) = 2(5x+2)-5 = 10x-1 \neq x$

لا يكون أي منهما اقترانًا عكسيًا للآخر

18) $(f \circ h)(x) = \dfrac{2(\frac{5x}{2-3x})}{3(\frac{5x}{2-3x}) + 5}$

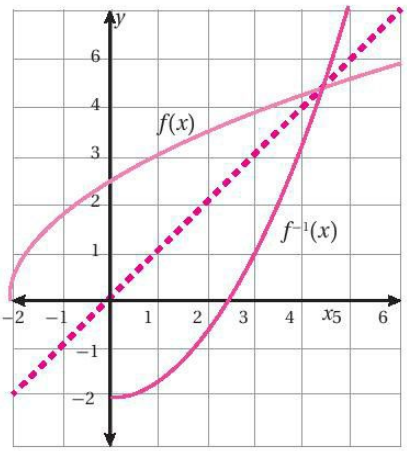
$$= \frac{10x}{2-3x} \div \frac{15x + 10 - 15x}{2-3x}$$

$$= \frac{10x}{2-3x} \div \frac{2-3x}{10} = x$$

وأيضًا يمكن أن نبين أن $(h \circ f)(x) = x$

إذن، كل من $h(x), f(x)$ هو اقتران عكسي للآخر.

19) $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2 - 6}{3}$



20) $r(A) = \sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$

$$r(250) = \sqrt{\frac{250}{\pi}} \approx 8.92 \text{ cm}$$

21) $l(T) = \dfrac{9.8\ T^2}{4\pi^2}$

$$l(3) = \frac{9.8\ (3)^2}{4\pi^2} \approx 2.23 \text{ m}$$

إجابات كتاب التمارين - الدرس 5:

17)