دليل المعلم
الرياضيات
الصف العاشر
الفصل
الدراسي الثاني

مع الاجابات
الوحدة الخامسة الاقترانات

مخطط الوحدة

اسم الدرس	النتاجات	المصطلحات	المصادر والأدوات	عدد الحصص
أستعد لدراسة الوحدة			• كتاب التمارين والأنشطة العملية.	1
الدرس 1: اقترانات كثيرات الحدود.	• يتعرف الاقتران كثير الحدود، ودرجته، ومعاملاته. • يمثل الاقتران كثير الحدود بيانيًّا، ويجد مجاله ومداه. • يطبق عمليات الجمع والطرح والضرب على الاقترانات كثيرات الحدود. • يحل مسائل حياتية عن الاقترانات كثيرات الحدود.	وحيد الحد، كثير الحدود، الدرجة، الصورة القياسية لكثير الحدود، كثير الحدود الصفري، المعامل الرئيس، المجال، المدى.	• جهاز حاسوب. • برمجية جيوجبرا. • آلة حاسبة. • ورق رسم بياني.	3
الدرس 2: قسمة كثيرات الحدود والاقترانات النسبية.	• يجد ناتج قسمة كثير حدود على كثير حدود آخر. • يتعرف الاقترانات النسبية، ويجد مجالها ومداها. • يمثل الاقترانات النسبية بيانيًّا، ويجد خطوط التقارب. • يحل مسائل حياتية عن القسمة والاقترانات النسبية.	خوارزمية القسمة، اقتران المقلوب، الاقتران النسبي، خط التقارب الأفقي، خط التقارب الرأسي.	• جهاز حاسوب. • برمجية جيوجبرا. • آلة حاسبة. • ورق رسم بياني.	3
الدرس 3: تركيب الاقترانات.	• يتعرف مفهوم الاقتران المُركَّب، وشرط تركيب اقترانين. • يحسب قيمة الاقتران المُركَّب لعدد معطى. • يجد قاعدة اقتران مُركَّب عُلِمت قاعدتا مُركَّبتيه. • يحل مسائل حياتية عن تركيب الاقترانات.	تركيب الاقترانات، الاقتران المُركَّب، المُركَّبتان.	• جهاز حاسوب. • آلة حاسبة.	3
الدرس 4: الاقتران العكسي.	• يتعرَّف الاقتران العكسي. • يجد الاقتران العكسي لاقتران واحد لواحد، ويحدد مجاله ومداه. • يحل مسائل حياتية عن الاقتران العكسي.	العلاقة العكسية، الاقتران العكسي، اقتران واحد لواحد، اختبار الخط الأفقي، الاقتران المحايد، الاقتران الجذري.	• جهاز حاسوب. • برمجية جيوجبرا. • آلة حاسبة. • ورق رسم بياني.	2
الدرس 5: المتتاليات.	• يكتب الحد التالي في متتالية معطاة باستعمال العلاقة بين حدودها. • يكتب حدود متتالية عُلِم حدها العام. • يستنتج قاعدة الحد العام لمتتاليات خطية، وتربيعية، وتكعيبية، وأسية. • يحل مسائل حياتية عن المتتاليات.	المتتالية، الحد، الحد العام.	• جهاز حاسوب. • آلة حاسبة.	3
عرض نتائج المشروع			• جهاز الحاسوب.	1
اختبار الوحدة				2
مجموع الحصص				18

الوحدةُ 5


الوحدةُ 5

الاقتراناتُ
Functions

ما أهميةُ هذهِ الوحدةِ؟

تُستعمَلُ الاقتراناتُ لنمذجةِ التطبيقاتِ الحياتيةِ بصورةٍ رياضيةٍ تُسهِّلُ فهمَها. فمثلًا، تُستعمَلُ بعضُ أنواعِ الاقتراناتِ لوصفِ العلاقةِ بينَ أسعارِ السلعِ والكمياتِ المبيعةِ منْها. سأتعرَّفُ في هذهِ الوحدةِ أنواعًا عديدةً منَ الاقتراناتِ والمتتالياتِ ذاتِ الاستعمالاتِ الحياتيةِ الكثيرةِ.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ الاقتراناتِ الخطِّيَّةَ، والتربيعيةَ، وتمثيلَها بيانيًا.
- ✓ إيجادَ القيمةِ العظمى أوِ القيمةِ الصغرى للاقترانِ التربيعيِّ.
- ✓ تكوينَ معادلاتٍ تربيعيةٍ، وحلَّها.
- ✓ جمعَ مقاديرَ جبريةٍ، وطرحَها، وضربَها.
- ✓ المتتالياتِ الخطِّيَّةَ، والتربيعيةَ، وكتابةَ حدودِها.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- ◀ الاقتراناتِ كثيراتِ الحدودِ، وخصائصَها، وتمثيلَها بيانيًا.
- ◀ جمعَ كثيراتِ الحدودِ، وطرحَها، وضربَها، وقسمتَها.
- ◀ الاقتراناتِ النسبيةَ، ومجالَها، ومداها.
- ◀ تركيبَ الاقتراناتِ، والاقترانَ العكسيَّ، والاقترانَ الجذريَّ.
- ◀ استنتاجَ قاعدةِ الحدِّ العامِّ لمتتالياتٍ تربيعيةٍ، وتكعيبيةٍ، وأُسِّيةٍ.

6

نظرة عامة على الوحدة:

تعرف الطلبة فيما سبق مفهوم الاقتران، والاقترانات الثابتة، والخطية، والتربيعية، وكيفية تمثيلها بيانيًا، وإيجاد مجالها ومداها وأصفارها. وكذلك تعلموا جمع المقادير الجبرية، وطرحها، وضربها، وتحليل العبارة الثلاثية، والفرق بين مربعين، ومجموع مكعبين، والفرق بينهما. وتعلموا أيضًا المتتاليات الخطية، والتربيعية، والتكعيبية، ووصف الحد العام لكلٍّ منها. وسيتعلمون في هذه الوحدة الاقتران كثير الحدود، ودرجته، ومعاملاته، وصورته القياسية والعامة، وتمثيله بيانيًا، وإيجاد مجاله ومداه وأصفاره بالتحليل إلى العوامل، وتطبيق عمليات الجمع والطرح والقسمة على كثيرات الحدود، ويتعرفون الاقتران النسبي، ويجدون مجاله ومداه، ويُمثِّلونه بيانيًا، ويجدون خطوط تقارب منحناه. سيتعلمون أيضًا تركيب الاقترانات، والاقتران العكسي، وإيجاد المجال والمدى للاقتران المُركَّب والاقتران العكسي، والعلاقة بين الاقتران ومعكوسه. وكذلك سيتعلمون المتتاليات الأسية بوصفها اقترانًا، ويجدون حدها العام.

الترابط الرأسي بين الصفوف

سابقًا

الصف التاسع

- تعرف المقادير الجبرية، وتحليلها إلى عواملها الأولية.
- وصف الاقترانات التربيعية، وتمثيلها بيانيًا، وإيجاد مجالها ومداها وأصفارها.
- وصف الحد العام لمتتاليات خطية وتربيعية وتكعيبية، والتعبير عنه بمقدار جبري.

الصف العاشر

- تعرف كثيرات الحدود، وتمثيلها بيانيًا، وإيجاد مجالها ومداها وأصفارها.
- تطبيق عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة على كثيرات الحدود.
- تعرف الاقترانات النسبية، وإيجاد مجالها ومداها وخطوط تقارب منحنياتها، وتمثيلها بيانيًا.
- إيجاد نتيجة تركيب اقترانين، ومجال الاقتران المُركَّب ومداه.
- إيجاد معكوس الاقتران، وتحديد المجال والمدى لكلٍّ من الاقتران ومعكوسه.
- تعرف الاقترانات الجذرية، وإيجاد مجالها ومداها.
- وصف الحد العام لمتتاليات أسية.

لاحقًا

الصف الحادي عشر العلمي

- تمثيل الاقترانات الأسية واللوغاريتمية والمتفرعة، واستنتاج خواصها الأساسية.
- اكتشاف المتتاليات والمتسلسلات الحسابية والهندسية، وإيجاد حدها العام ومجموع (n) من حدودها.
- إيجاد مجموع متسلسلات هندسية لانهائية تقاربية.
- إدخال أوساط حسابية وهندسية بين عددين.

مشروعُ الوحدةِ

نمذجةُ علاقاتٍ حياتيةٍ باستعمالِ كثيراتِ الحدودِ

فكرةُ المشروعِ جمعُ بياناتٍ عنِ العلاقةِ بينَ مُتغيِّرَيْنِ في أحدِ المجالاتِ الحياتيةِ، ونمذجتُها باستعمالِ اقترانِ كثيرِ الحدودِ.

الموادُّ والأدواتُ جهازُ حاسوبٍ، شبكةُ إنترنتْ، برمجيةُ إكسل (Microsoft Excel).

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

1. أختارُ أنا وأفرادُ مجموعتي مُتغيِّرَيْنِ لجمعِ بياناتٍ حولَهُما، مثلَ: تكلفةِ إنتاجِ سلعةٍ مُعيَّنةٍ، وعددِ الوحداتِ المُنتَجةِ، أوْ عددِ ساعاتِ النهارِ في إحدى المدنِ في أيامٍ مختلفةٍ منَ العامِ، أوْ أيِّ مُتغيِّرَيْنِ آخرَيْنِ.
2. أجمعُ البياناتِ، ثمَّ أُدوِّنُها في جدولٍ منْ عمودَيْنِ، بحيثُ يحوي العمودُ الأولُ قيمَ المُتغيِّرِ x، ويحوي العمودُ الثاني القيمَ المُناظِرةَ للمُتغيِّرِ y (يجبُ جمعُ ما لا يقلُّ عنْ 15 زوجًا).
3. أستعملُ برمجيةَ إكسل لتمثيلِ الأزواجِ المُرتَّبةِ بيانيًّا، وإيجادِ اقترانِ كثيرِ الحدودِ الأفضلِ تمثيلًا لها باتباعِ الخطواتِ الآتيةِ:

	A	B
1	1	10.9
2	2	11.5
3	3	11.9
4	4	12.3
5	5	11.6
6	6	10.8
7	7	11
8	8	10.3
9	9	10
10	10	9.3
11	11	8.7
12	12	9.2
13	13	9.6
14	14	10
15	15	10.2

- أُدخِلُ البياناتِ في عمودَيْنِ متجاورَيْنِ ضمنَ صفحةِ إكسل، وأُظلِّلُ العمودَيْنِ، ثمَّ أختارُ (مُخطَّطاتٌ) منْ تبويبةِ (إدراجٌ)، وأنقرُ (مُبعثَرٌ)، ثمَّ أختارُ المُخطَّط الذي يُبيِّنُ مجموعةَ نقاطٍ منفصلةٍ، فيظهرُ مُخطَّطٌ بيانيٌّ.
- أنقرُ بزرِّ الفأرةِ الأيمنِ إحدى النقاطِ، ثمَّ أختارُ أيقونةَ (إضافةُ خطِّ اتجاهٍ) منَ القائمةِ المُنسدِلةِ، فيظهرُ مستقيمٌ يتوسَّطُ النقاطَ، وتظهرُ خياراتُ التنسيقِ جانبًا، فأنقرُ المُربَّعَ أمامَ أيقونةِ (عرضُ المعادلةِ في المُخطَّطِ)، لتظهرَ معادلةُ المستقيمِ التي هيَ قاعدةُ الاقترانِ كثيرِ الحدودِ المطلوبِ.
- إذا لاحظْتُ أنَّ المستقيمَ أوِ المنحنى الظاهرَ لا يُناسِبُ النقاطَ، فإنَّني أستطيعُ تغييرَ نوعِهِ؛ إذْ يُمكِنُني مثلًا اختيارُ مُتعدِّدِ الحدودِ (أيْ كثيرِ الحدودِ)، واختيارُ الترتيبِ (أيْ درجةِ كثيرِ الحدودِ) المناسبِ.
- عندما أحصلُ على المستقيمِ أوِ المنحنى الأنسبِ للنقاطِ أكتبُ قاعدةَ الاقترانِ.

4. أَجِدُ مجالَ الاقترانِ، ومداهُ، وأصفارَهُ، ونقاطَ القيمِ القصوى المحليةِ لهُ.
5. أَجِدُ الاقترانَ العكسيَّ (إنْ وُجِدَ)، وأَجِدُ مجالَهُ، ومداهُ، وأُحدِّدُ فائدتَهُ، ودلالاتِهِ في سياقِ موضوعِ البحثِ.

عرضُ النتائجِ:

أُعِدُّ معَ أفرادِ مجموعتي عرضًا تقديميًّا (بوربوينت) نُبيِّنُ فيهِ خطواتِ العملِ في المشروعِ والنتائجَ التي توصَّلْنا إليْها مُوضَّحةً بالصورِ والرسومِ، ثمَّ نعرضُهُ أمامَ الزملاءِ في مختبرِ الحاسوبِ.

7

أداة تقييم المشروع

الرقم	المعيار	1	2	3
1	اختيار متغيرين مناسبين من واقع الحياة يدلان على سعة الأفق والابتكار.			
2	جمع البيانات بطريقة علمية موثوقة.			
3	المشاركة الفاعلة لجميع أفراد المجموعة.			
4	دقة الحسابات المتوقعة باستعمال النموذج.			
5	مراعاة أن يكون التقرير المكتوب كاملًا، ومنظمًا، ويحوي رسومًا توضيحية.			
6	اتصاف العرض التقديمي بالوضوح والشمول.			

1 إنجاز المهمة بوجود أكثر من خطأ.
2 إنجاز المهمة بوجود خطأ بسيط.
3 إنجاز المهمة بصورة صحيحة من دون خطأ.

مشروع الوحدة: نمذجة علاقات حياتية باستعمال كثيرات الحدود.

هدف المشروع: نمذجة العلاقة بين متغيرين من الحياة اليومية باقتران كثير حدود، واستعمال النموذج للتنبؤ بقيمة أحد المتغيرين بافتراض معلومية الآخر، وتعرف خصائص هذا النموذج، وتعيين مجاله ومداه، وإيجاد معكوسه إن أمكن.

خطوات تنفيذ المشروع

- عرِّف الطلبة بالمشروع وأهميته في تعلم موضوعات الوحدة.
- وزِّع الطلبة إلى مجموعات (ثلاثية، أو رباعية)، ثم اطلب إلى أفراد كل مجموعة أن يوزعوا الأدوار بينهم، ويختاروا مُقرِّرًا لهم.
- اطلب إلى أفراد كل مجموعة إعداد المشروع، ثم كتابة تقرير مفصل عنه، ودور كل منهم في إنجازه.
- وجه أفراد المجموعات إلى اختيار متغيرين من واقع الحياة، مثل: العمر بالسنوات، والطول بالسنتيمترات لأفراد تتراوح أعمارهم بين سنة و15 سنة؛ وطول عظمة العضد، وطول الجسم لمجموعة متنوعة من الأشخاص.
- بيِّن لأفراد المجموعات معايير تقييم المشروع، واعرض عليهم أداة التقييم، مُنوِّهًا بأنَّه يمكنهم طرح أي استفسارات عن المشروع في أثناء دراستهم هذه الوحدة.
- ذكِّر أفراد المجموعات بأهمية إنجاز المشروع مع نهاية دراسة هذه الوحدة.

عرض النتائج

- اطلب إلى أفراد كل مجموعة المشاركة في عرض جزء من نتائج المشروع (تكمن أهمية هذه الخطوة في تعزيز مهارات الطلبة التكنولوجية، ومهاراتهم الحياتية، مثل: التواصل، والتعاون).
- وضِّح للطلبة أهمية اشتمال التقرير على الصعوبات التي واجهتهم، وكيفية التغلب عليها، والمعلومات الجديدة التي تعرَّفوها، ومقترحاتهم عن كيفية تطوير المشروع؛ تعزيزًا لمهارات حل المشكلات لديهم.
- اطلب إلى الطلبة تدوين تقييمهم الذاتي للمشروع، ونبِّههم إلى إمكانية الاستعانة بأداة التقييم المجاورة.
- اطلب إلى طلبة الصف التصويت على المشروع الأفضل.

التقويم القبلي (التشخيصي):

- استعمل صفحة (أستعد لدراسة الوحدة) في كتاب التمارين والأنشطة العملية؛ لمساعدة الطلبة على تذكُّر المعرفة السابقة اللازمة لدراسة هذه الوحدة.
- وجِّه الطلبة إلى حل الأسئلة، ثم تجوَّل بينهم، وحث الطلبة الذين يواجهون صعوبة في حل أي سؤال على قراءة المثال المقابل له.
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل الأسئلة، فاستعن بالمسائل الإضافية الآتية:

» **إذا كان $f(x) = 2x + 5$، فجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:**

1. $f(0)$ 5
2. $f(3)$ 11
3. $f(-1)$ 3

» **اكتب كلًّا ممّا يأتي في أبسط صورة:**

4. $3(2x - 5) + 4x$ $10x - 15$
5. $4a(2a^2 + 5ab^3 + 2)$ $8a^3 + 20a^2b^3 + 8a$
6. $(3x^2 - 4x) + (7x + 5)$ $3x^2 + 3x + 5$

» **جد x بدلالة y في كلٍّ ممّا يأتي:**

7. $y = x + 4$ $x = y - 4$
8. $y = 5x$ $x = \frac{y}{5}$
9. $y = 4x + 3$ $x = \frac{(y-3)}{4}$

» **أجد الحدين التاليين في كلٍّ ممّا يأتي:**

10. 2, 4, 6, 8,.... 10, 12
11. 40, 35, 30, 25,.... 20,15

إجابات المسائل (أختبر معلوماتي):

13) 104°F 14) 30°C 15) 16, 19

16) 76, 70 17) 27, 38

أختبرُ معلوماتي قبلَ البدءِ بدراسةِ الوحدةِ، وفي حالِ عدمِ تأكُّدي منَ الإجابةِ أستعينُ بالمراجعةِ.

إيجادُ صورةِ عددٍ في الاقترانِ.

إذا كانَ $f(x) = 3x - 2$، وَ $g(x) = x^2 - 2x - 3$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي:

1. $g(0)$ -3
2. $f(2)$ 4
3. $f(-3)$ -11
4. $g(-4)$ 21

مثالٌ: إذا كانَ $g(x) = 2x^2 + 5x + 4$، فأَجِدُ $g(-2)$

قاعدةُ الاقترانِ $g(x) = 2x^2 + 5x + 4$

بتعويضِ $x = -2$ $g(-2) = 2(-2)^2 + 5(-2) + 4$

بالتبسيطِ $= 8 - 10 + 4 = 2$

تبسيطُ المقاديرِ الجبريةِ.

أكتبُ كلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1. $-3(2x - 2y - 4)$ $-6x + 6y + 12$
2. $(4a + b) + 2(a - 3b)$ $6a - 5b$
3. $5x^2(2x - 5)$ $10x^3 - 25x^2$
4. $(x - 3)^2 + 11x$ $x^2 + 5x + 9$

مثالٌ: أكتبُ $-2a(3a - 2b - 5) + 5a^2$ في أبسطِ صورةٍ.

المقدارُ الأصليُّ $-2a(3a - 2b - 5) + 5a^2$

خاصيةُ التوزيعِ $= -2a(3a) - 2a(-2b) - 2a(-5) + 5a^2$

بالتبسيطِ $= -6a^2 + 4ab + 10a + 5a^2$

بجمعِ الحدودِ المتشابهةِ $= -a^2 + 4ab + 10a$

التعبيرُ عنْ مُتغيِّرٍ بدلالةِ الآخرِ.

أَجِدُ قيمةَ x بدلالةِ y في كلٍّ ممّا يأتي:

1. $y = 4x - 7$ $x = \frac{y+7}{4}$
2. $y = 3 - 5x$ $x = \frac{3-y}{5}$
3. $y = x^2 - 5$ $\pm\sqrt{y+5}$
4. $y = \frac{1}{2x - 1}$ $x = \frac{1}{2}(\frac{1}{y} + 1) = \frac{1+y}{2y}$

تُستعمَلُ الصيغةُ: $F = \frac{9}{5}C + 32$ لتحويلِ درجةِ الحرارةِ منْ مقياسِ سيلسيوس C إلى مقياسِ فهرنهايت F.

5. أُحوِّلُ 40° C إلى مقياسِ فهرنهايت F. 104°F
6. أُحوِّلُ 86° F إلى مقياسِ سيلسيوس C. 30°C

مثالٌ: أَجِدُ قيمةَ x بدلالةِ y في كلٍّ ممّا يأتي:

a) $y = 3x - 8$

المعادلةُ الأصليةُ $y = 3x - 8$

بإضافةِ 8 إلى الطرفيْنِ $y + 8 = 3x$

بقسمةِ الطرفيْنِ على 3 $\frac{y + 8}{3} = x$

b) $y = \frac{3}{2 - x}$

المعادلةُ الأصليةُ $y = \frac{3}{2 - x}$

بضربِ الطرفيْنِ في $(2-x)$ $y(2-x) = 3$

$2y - yx = 3$

بطرحِ $2y$ منَ الطرفيْنِ، وضربِ الطرفيْنِ في -1 $yx = 2y - 3$

بقسمةِ الطرفيْنِ على y $x = \frac{2y - 3}{y}$

إيجادُ حدودٍ متتاليةٍ.

أَجِدُ الحدَّيْنِ التالييْنِ للمتتالياتِ الآتيةِ:

1. 4, 7, 10, 13, ... 16, 19
2. 100, 94, 88,82, ... 76, 70
3. 3, 6, 11, 18, ... 27, 38

مثالٌ: أَجِدُ الحدَّيْنِ التالييْنِ للمتتاليةِ: 2, 7, 12, 17, ...

أُلاحِظُ أنَّ كلَّ حدٍّ يزيدُ على الحدِّ الذي يسبقُهُ بمقدارٍ ثابتٍ هوَ 5:

$7 - 2 = 12 - 7 = 17 - 12 = 5$

إذنْ، الحدّانِ التاليانِ هما: $17 + 5 = 22$, $22 + 5 = 27$

الدرس 1

اقتراناتُ كثيراتِ الحدودِ
Polynomial Functions

فكرةُ الدرسِ تعرُّفُ الاقتراناتِ كثيراتِ الحدودِ، وتمثيلُها بيانيًّا، وإجراءُ عملياتِ الجمعِ والطرحِ والضربِ عليْها، وحلُّ مسائلَ عنْها.

المصطلحاتُ وحيدُ الحدِّ، كثيرُ الحدودِ، المعاملُ الرئيسُ، الدرجةُ، الصورةُ القياسيةُ لكثيرِ الحدودِ، كثيرُ الحدودِ الصفريُّ، المجالُ، المدى.

مسألةُ اليومِ يُنتِجُ مصنعٌ ثُريّاتٍ عددُها x ثُريّا أسبوعيًّا، حيثُ $350 \leq x \leq 0$، ويبيعُ الواحدةَ منْها بسعرِ $(150 - 0.3x)$ دينارًا. إذا كانَتْ تكلفةُ إنتاجِ x مِنَ الثُّريّاتِ هيَ $(6300 + 60x - 0.1x^2)$ دينارًا، فأَجِدْ ربحَ المصنعِ منْ إنتاجِ x ثُريّا أسبوعيًّا وبيعِها.

الاقترانُ **وحيدُ الحدِّ** (monomial) بمُتغيِّرٍ واحدٍ هوَ اقترانٌ قاعدتُهُ ناتجُ ضربِ عددٍ حقيقيٍّ، يُسمّى المعاملَ، في مُتغيِّرٍ أُسُّهُ عددٌ صحيحٌ غيرُ سالبٍ. والجدولُ الآتي يعرضُ بعضَ الأمثلةِ على وحيدِ الحدِّ، وأُسِّهِ، ومعاملِهِ:

وحيدُ الحدِّ	$3x^2$	$-\frac{1}{2}x^5$	$\sqrt{7}x^3$	x	9
الأُسُّ	2	5	3	1	0
المعاملُ	3	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{7}$	1	9

الاقترانُ **كثيرُ الحدودِ** (polynomial) بمُتغيِّرٍ واحدٍ هوَ اقترانٌ يتكوَّنُ منْ وحيدِ حدٍّ واحدٍ، أوْ مجموعِ عِدَّةِ اقتراناتٍ وحيدةِ الحدِّ بمُتغيِّرٍ واحدٍ. ومنْ أمثلتِهِ الاقتراناتُ الآتيةُ:

$f(x) = 2$ $\quad f(x) = 3x - 4$ $\quad f(x) = x^2 + 4x - 5$ $\quad g(x) = -3x^2 + 1.5x^4 - 3$

مفهومٌ أساسيٌّ

الصورةُ العامةُ لكثيرِ الحدودِ:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$$

حيثُ: n: عددٌ صحيحٌ غيرُ سالبٍ. x: مُتغيِّرٌ.

$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$: أعدادٌ حقيقيةٌ تُسمّى معاملاتِ حدودِ كثيرِ الحدودِ.

الدرس 1

نتاجات الدرس

- يتعرف كثير الحدود وصورته القياسية، ويعين درجته ومعاملاته وأصفاره.
- يمثل كثيرات الحدود بيانيًّا، ويعين مجالها ومداها.
- يطبق عمليات الجمع والطرح والضرب على كثيرات الحدود.
- يحل مسائل حياتية تتعلَّق بكثيرات الحدود.

المواد والأدوات:

برمجية جيوجبرا، ورق رسم بياني، آلة حاسبة.

التعلم القبلي:

- حساب قيمة الاقتران لقيم معلومة للمتغير المستقل.
- تمثيل المعادلات بيانيًّا.
- ضرب حد جبري في آخر، وكتابة الناتج في أبسط صورة.

1 التهيئة

- ذكِّر الطلبة بالعلاقة، والاقتران، والفرق بينهما، والرمز المستخدم للاقتران: اكتب الاقتران $f(x) = 3x + 5$، ثم اطلب إليهم إيجاد كلٍّ ممّا يأتي: $f(0), f(2), f(-3)$
- اطلب إلى الطلبة تمثيل المعادلة: $y = f(x) = 2x - 3$ بيانيًّا، ثم ناقِشهم في مقطعي الخط البياني من المحورين وما يُمثِّلانه في هذه المعادلة.
- اطلب إلى الطلبة تبسيط كلٍّ ممّا يأتي: $(2x^2y^3)(3xy^2), (2xy^3)(-2.5y^4)$

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (مسألة اليوم)، ثم اسألهم:
  » إذا أنتج المصنع 100 ثريا، فبكم دينارًا يبيع الواحدة؟ 120 دينارًا.
  » ما تكلفة إنتاج 100 ثريا؟ 11300 دينار.
  » كيف تجد ربح المصنع مـن إنتاج عدد من الثريات وبيعها؟ طرح تكلفة الإنتاج من ثمن بيع الثريات.
  » ما ربح المصنع من إنتاج 100 ثريا وبيعها؟ 700 دينار.
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

3 التدريس

- وضِّح للطلبة مفهوم وحيد الحد، وكثير الحدود، ورمز الاقتران وقراءته، واذكر أمثلة على ذلك.
- ناقش الطلبة في الصورة العامة للاقتران كثير الحدود، والتسميات المتعلقة بكثيرات الحدود.
- اطلب إلى الطلبة ذكر أمثلة على كثيرات الحدود، وأمثلة على غير كثيرات الحدود.

مثال 1

- شارك الطلبة في حل المثال 1 الذي يُبيِّن طريقة تحديد إذا كان الاقتران المعطى يُمثِّل كثير حدود أم لا، وتحديد الدرجة وبعض المعاملات إن كان كثير حدود.

مثال إضافي

- حدِّد إذا كان كلٌّ ممّا يأتي كثير حدود أم لا. وإذا كان كثير حدود، فاكتبه بالصورة القياسية، ثم حدِّد المعامل الرئيس، والدرجة، والحد الثابت:

a) $f(x) = x^4 - 3x^3 + \sqrt[3]{x} + 6$ لا

b) $h(\mathrm{x}) = 5x^2 - 3x^5 + 4x + 7$

نعم، كثير حدود، صورته القياسية:
$h(x) = -3x^5 + 5x^2 + 4x + 7$، ومعامله الرئيس: -3، ودرجته 5، وحده الثابت 7

c) $g(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{x-3}$ لا

ملاحظات المعلم

إذا كانَ $a_n \neq 0$ ، فإنَّهُ يُسمّى **المعاملَ الرئيسَ** (leading coefficient)، و**درجةُ** (degree) كثيرِ الحدودِ هيَ أكبرُ أُسٍّ للمُتغيِّرِ في جميعِ حدودِهِ، ويُسمّى a_0 الحدَّ الثابتَ.

يكــونُ كثيرُ الحدودِ مكتوبًا **بالصورةِ القياســيةِ** (standard form) إذا كانَتْ حدودُهُ مكتوبةً بترتيبٍ تنازليٍّ منْ أكبرِها درجةً إلى أصغرِها درجةً.

كثيرُ الحدودِ الذي جميعُ معاملاتِهِ أصفارٌ يُسمّى **كثيرَ الحدودِ الصفريَّ** (zero polynomial)، وهوَ $f(x) = 0$، وليسَ لهُ درجةٌ، ويُمثِّلُهُ المحورُ x في المستوى الإحداثيِّ.

مثال 1

أُحـدِّدُ إذا كانَ كلٌّ ممّـا يأتـي كثيـرَ حـدودٍ أمْ لا. وفـي حـالِ كانَ كثيرَ حـدودٍ أكتبُـهُ بالصورةِ القياسـيةِ، ثـمَّ أُحـدِّدُ المعامـلَ الرئيـسَ، والدرجةَ، والحـدَّ الثابتَ:

1. $f(x) = -4 + 6x - 2x^3 + x^2$

كثيرُ حدودٍ، درجتُهُ 3، وصورتُهُ القياسيةُ هيَ:

$$f(x) = -2x^3 + x^2 + 6x - 4$$

معاملهُ الرئيسُ -2، وحدُّهُ الثابتُ -4

2. $g(x) = 2x^2 + \frac{1}{x}$

ليسَ كثيرَ حدودٍ؛ لأنَّ أُسَّ المُتغيِّرِ في الحدِّ الثاني هوَ -1

3. $h(x) = \sqrt{x} + 7$

ليسَ كثيرَ حدودٍ؛ لأنَّ أُسَّ المُتغيِّرِ في الحدِّ الأولِ هوَ $\frac{1}{2}$

4. $k(x) = \frac{3x^2 - 5}{4} + 2x$

كثيرُ حدودٍ، درجتُهُ 2، وصورتُهُ القياسيةُ هيَ: $k(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2x - \frac{5}{4}$

معاملهُ الرئيسُ $\frac{3}{4}$، وحدُّهُ الثابتُ $-\frac{5}{4}$

أتذكَّرُ

لأيِّ عددٍ حقيقيٍّ $a \neq 0$، فإنَّ: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

وإذا كانَ a مرفوعًا للقوَّةِ السالبةِ في المقامِ، فإنَّ: $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$.

أتحقق من فهمي

أُحدِّدُ إذا كانَ كلٌّ ممّا يأتي كثيرَ حدودٍ أمْ لا. وفي حالِ كانَ كثيرَ حدودٍ أكتبُهُ بالصورةِ القياسيةِ، ثمَّ أُحدِّدُ المعاملَ الرئيسَ، والدرجةَ، والحدَّ الثابتَ: انظر الهامش

a) $h(x) = 9 - 5x + \sqrt{2}\,x^5$

b) $f(x) = \frac{3x+5}{x^2+2} + 2x$

c) $g(x) = 2x(3-x)^3$

d) $r(x) = \frac{x^3}{6} - 7x^5 + 2\pi$

إجابة أتحقق من فهمي1:

a) كثير حـــدود، صورته القياســية: $h(x) = \sqrt{2x^5} - 5x + 9$ ، ودرجته 5، والمعامل الرئيس $\sqrt{2}$، والحد الثابت 9

b) ليس كثير حدود.

c) كثيــر حدود، صورته القياســية: $f(x) = -2x^4 + 18x^3 - 54x^2 + 54x$، ودرجته 4، والمعامل الرئيس -2، والحد الثابت 0

d) كثير حدود، صورته القياسية: $r(x) = 7x^5 - \frac{1}{6}x^3 + 2\pi$

درجته 5، المعامل الرئيس 7، وحده الثابت 2π

التقويم التكويني:

- وجِّــه الطلبة إلى حــل التدريب في بنــد (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

أخطــاء مفاهيميــة: قــد يخطئ بعض الطلبة فــي تحديد المعامل الرئيــس، فيكتبون أكبر معاملات كثير الحدود أو معامل أول حد؛ لذا ذكِّرهم أن المعامل الرئيس هو معامل الحد الأكبر درجة بعد تبسيط الاقتران.

مثال 2

- ناقِش الطلبة في خطوات تمثيل كثيــر الحدود بيانيًّا، وشاركهم في حل المثال 2 الذي يُبيِّن كيفية تمثيل كثير الحــدود بيانيًّا، وإيجاد مجاله ومــداه وأصفاره، مُبيِّنًا لهم أن أصفار الاقتران هي الإحداثيات x لنقاط تقاطع المنحنى مع المحــور x، وأن الناتج في هذه الطريقة يكون أحيانًا قيمة تقريبية لعدم دقة الرسم، وأنه يمكن إيجاد الأصفار جبريًّا بحل المعادلة $f(x) = 0$ بالطرق التي تعلموها، وبخاصة التحليل إلى العوامل.

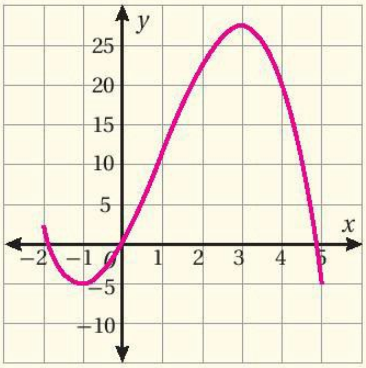
مثال إضافي

- مثِّل بيانيًا كلًّا ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجاله ومداه وأصفاره:

a) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x\ , -2 \leq x \leq 5$

مجاله: $-2 \leq x \leq 5$ مداه: $-5 \leq y \leq 27$

أصفاره: $-1.9, 0, 4.9$ تقريبًا.

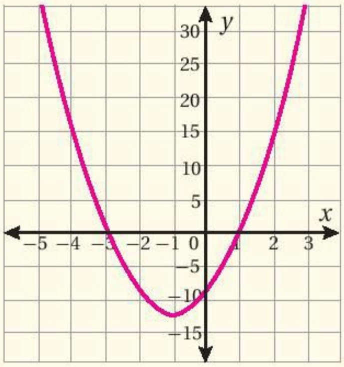


b) $f(x) = 3(x+1)^2 - 12$

مجاله: مجموعة الأعداد الحقيقية.

مداه: $y \geq -12$

أصفاره: $-3, 1$



تعزيز اللغة ودعمها:

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها، مثل: اقتران function، وكثير الحدود polynomial، والدرجة degree، والمعامل الرئيس leading coefficient، والمجال domain، والمدى range.

مجالُ (domain) أيِّ اقترانٍ هوَ مجموعةُ القيمِ التي يأخذُها المُتغيِّرُ x، **ومداهُ** (range) هوَ مجموعةُ القيمِ التي يأخذُها المُتغيِّرُ y.

لتمثيلِ الاقترانِ كثيرِ الحدودِ $f(x)$ بيانيًّا، أُكوِّنُ جدولَ قيمٍ أُحدِّدُ فيهِ قيمَ المُتغيِّرِ x، وأحسبُ قيمَ $f(x)$، وأُعيِّنُ النقاطَ $(x, f(x))$ في المستوى الإحداثيِّ، وأَصِلُ بينَها بمنحنى متصلٍ.

> **أتعلّمُ**
> مجالُ كثيرِ الحدودِ هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيةِ، أوْ مجموعةٌ جزئيةٌ منها تُحدَّدُ في نصِّ السؤالِ، ومداهُ هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيةِ، أوْ مجموعةٌ جزئيةٌ منها تُحدَّدُ منْ جدولِ قيمِ الاقترانِ، أوْ بتحليلِ التمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ.

مثال 2

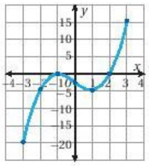
أُمثِّلُ بيانيًّا كلَّ اقترانٍ ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجالَهُ ومداهُ:

1 $f(x) = x^3 - 3x - 2,\ -3 \leq x \leq 3$

الخطوةُ 1: أُنشِئُ جدولَ قيمٍ.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = f(x)$	-20	-4	0	-2	-4	0	16
(x, y)	$(-3, -20)$	$(-2, -4)$	$(-1,0)$	$(0, -2)$	$(1, -4)$	$(2, 0)$	$(3, 16)$

الخطوةُ 2: أُعيِّنُ النقاطَ التي تُمثِّلُ الأزواجَ (x, y) في المستوى الإحداثيِّ، وأَصِلُ بينَها بمنحنى متصلٍ كما في الشكلِ المجاورِ.



مجالُ هذا الاقترانِ هوَ مجموعةُ قيمِ x الحقيقيةِ، حيثُ: $-3 \leq x \leq 3$، أوِ الفترةُ $[-3, 3]$، ومداهُ: $-20 \leq y \leq 16$، أوِ الفترةُ $[-20, 16]$.

يُظهِرُ الشكلُ أنَّ أصفارَ هذا الاقترانِ هي: $-1, 2$

> **أتعلّمُ**
> أجِدُ أصفارَ الاقترانِ منَ التمثيلِ البيانيِّ بإيجادِ نقاطِ تقاطعِهِ معَ محورِ x.

2 $f(x) = x^2 - 4x$

هذا الاقترانُ تربيعيٌّ، ومنحناهُ قطعٌ مُكافِئٌ مفتوحٌ إلى الأعلى؛ لأنَّ معاملَ x^2 عددٌ موجبٌ.

لرسمِ منحناهُ، أجِدُ إحداثيَّيْ نقطةِ رأسِهِ.

إرشادات للمعلم

المجال العاطفي لا يقل أهمية عن المجال المعرفي؛ فلا تقل لأحد الطلبة: (إجابتك خطأ)، بل قل له: (لقد اقتربت من الإجابة الصحيحة، فمن يستطيع إعطاء إجابة أُخرى؟)، أو قل له: (هذه إجابة صحيحة لغير هذا السؤال).

أتذكَّرُ

إحداثيا نقطةِ رأسِ القطعِ المُكافئِ هما: $(\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a}))$ يكونُ منحنى القطعِ مفتوحًا إلى الأعلى إذا كانَ معاملُ x^2 موجبًا، ومفتوحًا إلى الأسفلِ إذا كانَ معاملُ x^2 سالبًا.

$x = \frac{-b}{2a}$ الإحداثيُّ x لرأسِ القطعِ المُكافئِ

$= \frac{-(-4)}{2(1)}$ بتعويضِ $b = -4, a=1$

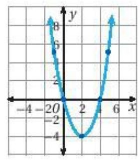
$x = 2$ بالتبسيطِ

$y = 2^2 - 4(2) = -4$ بتعويضِ $x=2$ في معادلةِ $f(x)$، والتبسيطِ

الخطوةُ 1: أُنشِئُ جدولَ قيمٍ (الرأسُ ونقطتانِ إلى يسارِهِ، ونقطتانِ إلى يمينِهِ).

x	-1	0	2	4	5
$y=f(x)$	5	0	-4	0	5
(x, y)	$(-1, 5)$	$(0, 0)$	$(2, -4)$	$(4, 0)$	$(5, 5)$

الخطوةُ 2: أُعيِّنُ النقاطَ التي تُمثِّلُ الأزواجَ (x, y) في المستوى الإحداثيِّ، وأَصِلُ بينَها بمنحنى متصلٍ، وأضعُ سهمًا على طرفَيِ المنحنى للدلالةِ على أنَّهُ يمتدُّ إلى ما لا نهايةَ كما في الشكلِ المجاورِ.



مجالُ هذا الاقترانِ هوَ مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيةِ (لمْ يُحدَّدْ في نصِّ السؤالِ خلافُ ذلكَ)، ومداهُ هوَ الأعدادُ الحقيقيةُ التي لا تقلُّ عنْ -4؛ أيِ الفترةُ $[-4, \infty)$.

لهذا الاقترانِ صفرانِ، هما: $0, 4$

أفكِّرُ

ما الفرقُ بينَ الفترةِ $[-4, \infty)$ والفترةِ $(-4, \infty)$؟

أتحقق من فهمي

أُمثِّلُ بيانيًّا كلَّ اقترانٍ ممّا يأتي، مُحدِّدًا مجالَهُ ومداهُ: انظر الهامش

a) $f(x) = 2x^3 - 16 , -3 \leq x \leq 3$

b) $f(x) = -0.5x^2 + 3x + 3.5$

جمعُ كثيراتِ الحدودِ

لجمعِ كثيراتِ الحدودِ، أُجمِّعُ الحدودَ المتشابهةَ التي لها الدرجةُ نفسُها، وأجمعُ معاملاتِها.

تنويع التعليم:

اطلب إلى الطلبة من ذوي المستوى فوق المتوسط كتابة كثيري حدود $f(x), g(x)$، بحيث إن:

a) درجة $(f(x) + g(x))$ أصغر من درجة $f(x)$

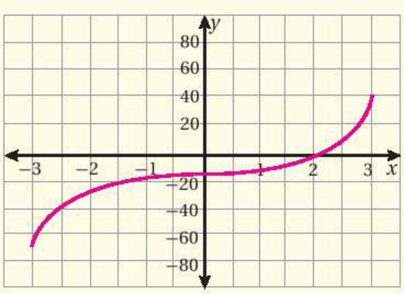
b) درجة $(f(x) + g(x))$ تساوي درجة $f(x)$

ثم اطلب إليهم كتابة ملاحظاتهم على درجة مجموع اقترانين كثيري حدود.

إجابة أتحقق من فهمي2:

a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=f(x)$	-70	-32	-18	-16	-14	0	38



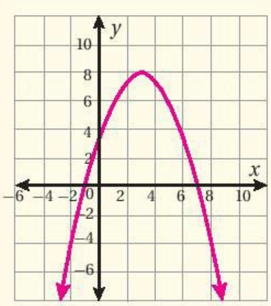
المجال: $-3 \leq x \leq 3$

المدى: $-70 \leq y \leq 38$

له صفر واحد هو 2

b)

x	-2	-1	1	3	7	8
$y=f(x)$	-4.5	0	6	8	0	-4.5



المجال: جميع الأعداد الحقيقية، والمدى: الأعداد الحقيقية التي لا تزيد على 8؛ أي $y \leq 8$، أو الفترة $(-\infty, 8]$.

له صفران، هما: -1، و 7

المثالان 3 و 4

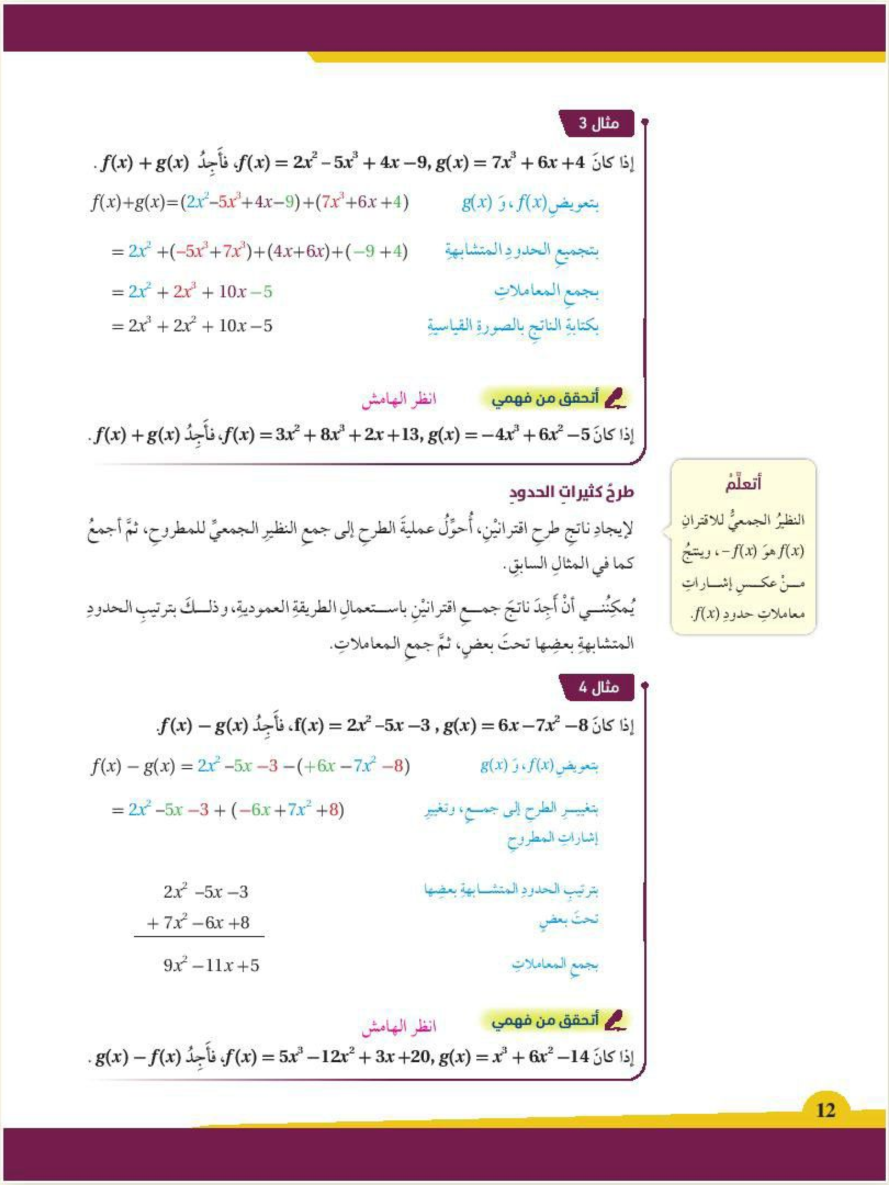
- ناقِش الطلبة في حلِّ المثاليـن 3 و 4، مُوضِّحًا جمع كثيـري حـدود بالطريقـة الأفقية بتجميـع الحدود المتشابهة التي لها الدرجة نفسها ثم جمع معاملاتها، والطريقة العمودية بترتيب الحدود المتشـابهة تحت بعضها، ثم جمع معاملاتها. بعـد ذلك نبِّههم إلى أن المتغير يبقى كما هو بدرجته نفســها في الجمع وفي الطرح.

مثال إضافي

- إذا كان $f(x)=12x+1-2x^2,\ h(x)=6x^2+4x+12$، فجد كلًّا ممّا يأتي:

a) $f(x)+h(x) \quad 4x^2+16x+13$

b) $h(x)-f(x) \quad 8x^2-8x+11$



مثال 3

إذا كانَ $f(x)=2x^2-5x^3+4x-9,\ g(x)=7x^3+6x+4$، فأَجِدُ $f(x)+g(x)$.

$f(x)+g(x)=(2x^2-5x^3+4x-9)+(7x^3+6x+4)$ — بتعويضِ $f(x)$، وَ $g(x)$

$=2x^2+(-5x^3+7x^3)+(4x+6x)+(-9+4)$ — بتجميعِ الحدودِ المتشابهةِ

$=2x^2+2x^3+10x-5$ — بجمعِ المعاملاتِ

$=2x^3+2x^2+10x-5$ — بكتابةِ الناتجِ بالصورةِ القياسيةِ

أتحقق من فهمي — انظر الهامش

إذا كانَ $f(x)=3x^2+8x^3+2x+13,\ g(x)=-4x^3+6x^2-5$، فأَجِدُ $f(x)+g(x)$.

طرحُ كثيراتِ الحدودِ

لإيجادِ ناتجِ طرحِ اقترانيْنِ، أُحوِّلُ عمليةَ الطرحِ إلى جمعِ النظيرِ الجمعيِّ للمطروحِ، ثمَّ أجمعُ كما في المثالِ السابقِ.

يُمكِنُنـي أنْ أَجِدَ ناتجَ جمـعِ اقترانيْنِ باسـتعمالِ الطريقةِ العموديةِ، وذلـكَ بترتيبِ الحدودِ المتشابهةِ بعضِها تحتَ بعضٍ، ثمَّ جمعِ المعاملاتِ.

أتعلّمُ: النظيرُ الجمعيُّ للاقترانِ $f(x)$ هوَ $-f(x)$، وينتجُ مـنْ عكـسِ إشـاراتِ معاملاتِ حدودِ $f(x)$.

مثال 4

إذا كانَ $f(x)=2x^2-5x-3,\ g(x)=6x-7x^2-8$، فأَجِدُ $f(x)-g(x)$.

$f(x)-g(x)=2x^2-5x-3-(+6x-7x^2-8)$ — بتعويضِ $f(x)$، وَ $g(x)$

$=2x^2-5x-3+(-6x+7x^2+8)$ — بتغييـرِ الطرحِ إلى جمـعٍ، وتغييرِ إشاراتِ المطروحِ

$$\begin{array}{r} 2x^2-5x-3 \\ +\ 7x^2-6x+8 \\ \hline 9x^2-11x+5 \end{array}$$

بترتيبِ الحدودِ المتشـابهةِ بعضِها تحتَ بعضٍ — بجمعِ المعاملاتِ

أتحقق من فهمي — انظر الهامش

إذا كانَ $f(x)=5x^3-12x^2+3x+20,\ g(x)=x^3+6x^2-14$، فأَجِدُ $g(x)-f(x)$.

12

إجابة أتحقق من فهمي3:

$f(x)+g(x)=4x^3+9x^2+2x+8$

إجابة أتحقق من فهمي4:

$f(x)-g(x)=4x^3-18x^2+3x+34$

ضربُ كثيراتِ الحدودِ

لضربِ كثيراتِ الحدودِ، أستعملُ خاصيةَ توزيعِ الضربِ على الجمعِ. يُمكِنُني أيضًا استعمالُ الطريقةِ العموديةِ كما في المثالِ الآتي.

مثال 5

أَجِدُ ناتجَ ضربِ $f(x) \cdot g(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

1 $f(x) = 3x^3 , g(x) = 2x^2 - 5x \ -4$

$f(x).g(x) = 3x^3\ (2x^2 - 5x - 4)$ بتعويضِ $f(x)$، وَ $g(x)$

$= 3x^3(2x^2) + 3x^3\ (-5x) + 3x^3(-4)$ بتوزيعِ الضربِ على الجمعِ

$= (3\times2)(x^3.x^2) + (3\times-5)(x^3.x) + (3\times-4)x^3$ خاصيةُ التجميعِ

$= 6x^5 - 15x^4 - 12x^3$ بالتبسيطِ

2 $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + x - 5, g(x) = 4x^2 - 7$

$3x^4 - 5x^2 + x - 5$ بترتيبِ الاقترانيْنِ عموديًّا

$(\times)\ 4x^2 - 7$

$12x^6 - 20x^4 + 4x^3 - 20x^2$ بضربِ $4x^2$ في حدودِ f

$(+)\quad -21x^4 \quad + 35x^2 - 7x + 35$ بضربِ -7 في حدودِ f

$12x^6 - 41x^4 + 4x^3 + 15x^2 - 7x + 35$ بجمعِ الحدودِ المتشابهةِ

أتذكّرُ

أُطبِّقُ قاعدةَ ضربِ القوى منْ قوانينِ الأُسسِ عندَ ضربِ الحدودِ الجبريةِ:

$a^m \times a^n = a^{m+n}$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ ناتجَ ضربِ $f(x) \cdot g(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي: انظر الهامش

a) $f(x) = 5x^2 + 4, g(x) = 7x + 6$

b) $f(x) = 2x^3 + x - 8, g(x) = 5x^2 + 4x$

تُستعمَلُ كثيراتُ الحدودِ لتمثيلِ وحلِّ مسائلَ حياتيةٍ كثيرةٍ في الصناعةِ، والتجارةِ، والاقتصادِ، والزراعةِ، والتعليمِ، ومعظمِ مناحي الحياةِ.

إجابة أتحقق من فهمي5:

a) $35x^3 + 30x + 28x + 24$

b) $10x^5 + 8x^4 + 5x^3 - 36x^2 - 32x$

مثال 5

- ناقِش الطلبة في ضرب كثيرات الحدود بالطريقتين الأفقية والعمودية، مُذكِّرًا إيّاهم بجمع الأسس عند ضرب قوى لها الأساس نفسه، وشاركهم في حل المثال.

مثال إضافي

- جد ناتج ضرب $f(y) \cdot g(y)$ إذا كان

$f(y) = y^2 - 7y + 5 \ , f(y) = y^2 - y - 3$

$f(y) \cdot g(y) = y^4 - 8y^3 + 9y^2 + 16y - 15$

تنويع التعليم:

اعرض طريقة ضرب كثيري حدود باستعمال جدول، وذلك بكتابة أحد الاقترانين فوق الجدول، وكتابة الآخر إلى يساره، ووضع نواتج ضرب الحدود داخل خلايا الجدول، ثم جمع النواتج داخل الجدول قطريًّا.

يُوضِّح الجدول المجاور طريقة ضرب:
$(2x^2 - 3x - 2)(x^2 + 4x + 3)$.

	x^2	$+4x$	$+3$
$2x^2$	$2x^4$	$+8x^3$	$+6x^2$
$-3x$	$-3x^3$	$-12x^2$	$-9x$
-2	$-2x^2$	$-8x$	-6

$(2x^2 - 3x - 2)(x^2 + 4x + 3)$

$= 2x^4 + (+8x^3 - 3x^3) +$
$(+6x^2 - 12x^2 - 2x^2) + (-9x - 8x) + (-6)$

$= 2x^4 + 5x^3 - 8x^2 - 17x - 6$

مثال 6: من الحياة

لياقةٌ: بلغَ عددُ المُشتركينَ في مركزِ لياقةٍ بدنيةٍ **840** شخصًا، يدفعُ كلٌّ منْهُمْ اشتراكًا شهريًّا مقدارُهُ **30** دينارًا. في دراسةٍ للسوقِ، وجدَ الباحثونَ أنَّ المركزَ سيفقدُ **25** مُشتركًا مُقابِلَ كلِّ دينارٍ يزيدُهُ على قيمةِ الاشتراكِ. ما قيمةُ الاشتراكِ التي تُحقِّقُ للمركزِ أعلى دخلٍ؟ ما مقدارُ هذا الدخلِ؟

أفترِضُ أنَّ المركزَ جعلَ قيمةَ الاشتراكِ x دينارًا، حيثُ: $x > 30$.

قيمةُ زيادةِ الاشتراكِ	$x-30$
عددُ المُشتركينَ الذينَ سيفقدُهُمُ المركزُ	$25(x-30)$
عددُ المُشتركينَ الباقينَ	$840-25(x-30)$
الدخلُ $R(x)$ يساوي عددَ المُشتركينَ الباقينَ مضروبًا في قيمةِ الاشتراكِ	$R(x) = x(840-25(x-30))$
بتوزيعِ الضربِ	$= 840x - 25x^2 + 750x$
بجمعِ الحدودِ المتشابهةِ	$= -25x^2 + 1590x$

هذا اقترانٌ تربيعيٌّ، معاملُهُ الرئيسُ سالبٌ؛ فمنحناهُ قطعٌ مُكافِئٌ مفتوحٌ إلى الأسفلِ، ولهُ قيمةٌ عظمى عندَ رأسِهِ.

الإحداثيُّ x للرأسِ هوَ: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1590}{2(-25)} = \frac{1590}{50} = 31.8$

إذنْ، قيمةُ الاشتراكِ التي تُحقِّقُ للمركزِ أعلى دخلٍ هيَ 31.8 دينارًا منْ كلِّ مُشترِكٍ، ومقدارُ هذا الدخلِ هوَ $R(31.8)$.

بتعويضِ 31.8 بدلًا منْ x في اقترانِ الدخلِ	$R(31.8) = -25(31.8)^2 + 1590\ (31.8)$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	$= 25281$

إذنْ، أعلى دخلٍ يُحقِّقُهُ المركزُ هوَ 25281 دينارًا كلَّ شهرٍ.

يُمكِنُني التحقُّقُ منْ صحَّةِ الحلِّ بتمثيلِ الاقترانِ باستعمالِ برمجيةِ جيوجبرا.

تُعَدُّ الرياضةُ الصباحيةُ أفضلَ وسيلةٍ لحرقِ الدهونِ وفقدانِ الوزنِ؛ إذْ تعملُ على تزويدِ الجسمِ بالطاقةِ التي تلزمُهُ منَ الحموضِ الدهنيةِ الحُرَّةِ الزائدةِ المفيدةِ لحرقِ الدهونِ.

ستادُ عمّانَ الدوليُّ أكبرُ ملاعبِ كرةِ القدمِ في الأردنِّ، افتُتِحَ عامَ 1968م.

أتحقق من فهمي

رياضةٌ: يتَّسِعُ ملعبٌ (ستادٌ) رياضيٌّ لنحوِ **62000** مُشجِّعٍ. إذا كانَ ثمنُ بطاقةِ الدخولِ **11** دينارًا، فإنَّ مُعدَّلَ عددِ الحضورِ هوَ **28000** مُشجِّعٍ. وجدَتْ دراسةٌ أنَّ عددَ بطاقاتِ الدخولِ المبيعةِ يزيدُ بمقدارِ **4000** بطاقةٍ مُقابِلَ كلِّ دينارٍ يُخصَمُ منْ ثمنِ البطاقةِ. ما ثمنُ بطاقةِ الدخولِ الذي يُحقِّقُ أعلى دخلٍ؟ ما مقدارُ هذا الدخلِ؟ انظر الهامش

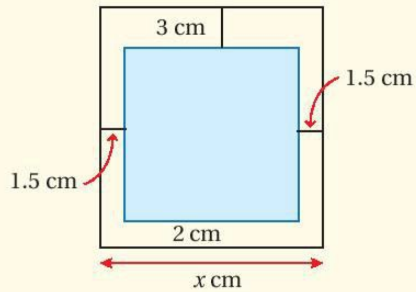
14

مثال 6: من الحياة

- ناقِش الطلبة في كيفية كتابة كثير حدود لنمذجة مسألة حياتية بطريقة مشابهة لترجمة المسألة إلى معادلة. وضِّح خطوات حل هذا المثال، ثم اطلب إلى الطلبة حله بطريقة بديلة بافتراض أن الزيادة هي x

مثال إضافي

إعلان: يريد سعد أن يطبع إعلانًا على ورقة مستطيلة محيطها 80 cm، بحيث يترك هامشًا من الأعلى عرضه 3 cm، وهامشًا من الأسفل عرضه 2 cm، وهامشًا من يمين الورقة ويسارها عرضه 1.5 cm



- اكتب اقترانًا يُمثِّل مساحة الإعلان بدلالة عرض الورقة x، ثم جد أبعاد الورقة التي تجعل مساحة الإعلان أكبر ما يمكن.

$A(x) = -x^2 + 38x - 105$, 19 cm, 21 cm

أتدرب وأحل المسائل 1 إلى 20 انظر ملحق الإجابات

أُحدِّدُ إذا كانَ كلٌّ ممّا يأتي كثيرَ حدودٍ أمْ لا. وفي حالِ كانَ كثيرَ حدودٍ أكتبُهُ بالصورةِ القياسيةِ، ثمَّ أُحدِّدُ المعاملَ الرئيسَ، والدرجةَ، والحدَّ الثابتَ:

1) $f(x) = 4 - x$

2) $g(x) = \frac{5x^2 + 2x}{x}$

3) $h(x) = 3x(4x-7) + 2x - 12$

4) $L(x) = 3x^2 + 5.3x^3 - 2x$

5) $j(t) = \sqrt{7}\,t - 16t^2$

6) $k(x) = 5x^{\frac{3}{2}} + 2x - 1$

7) $f(x) = 13(2)^x + 6$

8) $f(y) = y^3(4 - y^2)^2$

أُمثِّلُ كلَّ اقترانٍ ممّا يأتي بيانيًّا، مُحدِّدًا مجالَهُ ومداهُ:

9) $f(x) = x^2 - 3x - 4$

10) $f(x) = -4x^2 + 8x + 3$

11) $y = 2x^3 - 6x + 4,\ -2 \le x \le 3$

12) $y = 3x^2 - x^3 + 9x - 4,\ -3 \le x \le 4$

إذا كانَ $f(x) = 2x+1,\ g(x) = 5x^2 - 2x^3 + 4,\ h(x) = x^4 - 5x^2 + 3x - 6$، فأَجِدُ كلًّا ممّا يأتي بالصورةِ القياسيةِ:

13) $h(x) + g(x)$

14) $g(x) - h(x)$

15) $f(x) \cdot h(x)$

16) $x(f(x)) + h(x)$

17) $(f(x))^2 - g(x)$

18) $h(x) - x(g(x))$

19) **صاروخٌ:** أُطلِقَ صاروخٌ إلى أعلى، وكانَ ارتفاعُهُ بالأمتارِ فوقَ سطحِ البحرِ بعدَ t ثانيةً منْ إطلاقِهِ $h(t) = -4.9t^2 + 229t + 234$. أَجِدُ أقصى ارتفاعٍ يبلغُهُ الصاروخُ.

20) **زراعةٌ:** وجدَ مُزارِعٌ أنَّهُ إذا زرعَ 75 شجرةً فاكهةٍ في بُستانِهِ، فإنَّ مُعدَّلَ ما يجنيهِ منْ كلِّ شجرةٍ هوَ 21 صندوقًا في الموسمِ. وكلَّما نقصَ عددُ الأشجارِ شجرةً واحدةً زادَ مُعدَّلُ ما يجنيهِ منْ كلِّ شجرةٍ بمقدارِ 3 صناديقَ؛ فتباعدُ الأشجارِ بعضِها عنْ بعضٍ يُعزِّزُ فرصَها في الحصولِ على حاجاتِها منَ التربةِ. ما عددُ الأشجارِ التي يتعيَّنُ عليهِ زراعتُها لإنتاجِ أكبرِ قدرٍ منَ الثمرِ؟ ما مقدارُ هذا الثمرِ؟ انظر ملحق الإجابات

4 التدريب

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (**أتدرب وأحل المسائل**)، ثم اطلب إليهم حلها (يمكن الطلب إليهم حل الأسئلة ذوات الأرقام الزوجية(18–2) ضمن مجموعات).
- إذا واجه بعض الطلبة صعوبة في حل أي مسألة، فاطلب إليهم مراجعة أمثلة الدرس.

أخطاء مفاهيمية:

قد يظن بعض الطلبة أن الاقتران في السؤال 2 كثير حدود بسبب إمكانية اختصار العامل x من البسط والمقام، فيتحول إلى $f(x) = 5x+2$؛ لذا نبِّههم إلى أن القسمة لا تصح إلا إذا كان المقسوم عليه لا يساوي صفرًا. وإذا أرادوا كتابة هذا الاقتران بالصورة المختصرة: $f(x) = 5x + 2$، فيجب عليهم الإشارة عنده إلى أن $x \neq 0$

الواجب المنزلي:

- اطلب إلى الطلبة أن يحلوا في البيت جميع المسائل الواردة في الصفحة 8 من كتاب التمارين، مُحدِّدًا لهم المسائل التي يمكنهم حلها في نهاية كل حصة بحسب ما يُقدَّم من أمثلة الدرس وأفكاره.
- يمكن أيضًا إضافة المسائل التي لم يحلها الطلبة داخل غرفة الصف إلى الواجب البيتي.

مهارات التفكير العليا

- وجِّه الطلبة إلى قراءة الأسئلة في بند (**مهارات التفكير العليا**)، ثم اطلب إليهم حلها ضمن مجموعات ثنائية، وكتابة مُبرِّر للإجابة، وامنحهم وقتًا كافيًا لنقد مُبرِّرات بعضهم.
- وجِّه أفراد المجموعات في أثناء حل السـؤال 25 إلى كتابة أي مقدار ذي حدين، ثم البحث عن مقدار ثلاثي الحدود؛ شـرط أن تكون 4 من نواتج الضرب متناظرة بالنسـبة إلى عملية الجمع، فيكـون مجموعها صفرًا، ويبقى حدان من ناتج ضرب المقدارين.
- وجِّه أفراد المجموعات في أثناء حل السـؤال 26 إلى البحث عن طريقة لتحليل مقدار ذي 4 حدود.

5 الإثراء

- اطرح على الطلبة المسألة الآتية:

نظرية الأعداد:

يعطى مجموع مربعـات أول n مـن الأعـداد الطبيعية بالاقتران:

$$F(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

a) جد قيمة $F(5), F(10)$

b) صف ما تُمثِّله كلٌّ من القيمتين في الفقرة a.

c) جد مجموع: $1 + 4 + 9 + 16 + ... + 400$

6 الختام

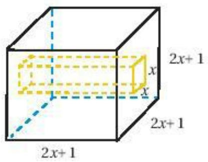
- اطلـب إلى الطلبـة وصف طرائـق مختلفة لتصنيف كثيرات الحـدود، ثم إعداد قائمـة تتضمن ما يجب مراعاته عند جمع كثيرات الحدود وطرحها وضربها.

تعليمات المشروع:

- اطلب إلى الطلبة اختيـار متغيرين من الحياة اليومية، والبدء بجمع البيانات حولهما.
- ذكِّـر الطلبة بضـرورة تدويـن قيمـة المتغير الأول (المسـتقل) مع قيمة المتغير الثاني (التابع) المناظرة لها، وذلك في العمود المقابل لها في الجدول.

21 سـياجٌ: لدى سعيدٍ 120 m منَ السياجِ، أرادَ أنْ يستعملَها لتسييجِ 3 حظائرَ مستطيلةٍ متساويةٍ كما في المُخطَّطِ الآتي.
ما أكبرُ مِساحةٍ ممكنةٍ لهذهِ الحظائرِ؟ انظر ملحق الإجابات

22 هندسـةٌ: مكعبٌ منَ الخشبِ، طولُ ضلعِهِ $(2x+1)$ cm، حُفِرَ فيهِ تجويفٌ مقطعُـهُ مُربَّعٌ، طولُ ضلعِـهِ x cm، وهوَ يمتدُّ منْ أحـدِ الأوجهِ إلى الوجهِ المقابلِ. أكتبُ بالصورةِ القياسـيةِ الاقترانَ الذي يُمثِّلُ حجمَ الجزءِ المُتبقّي منَ المكعبِ. انظر ملحق الإجابات



23 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ. $P(x) = -0.2x^2 + 90x - 6300$

مهارات التفكير العليا

24 أكتشفُ الخطأَ: وجدَ كلٌّ منْ طه وقاسمٍ ناتجَ $3x(x^2 - 2x - 3) - (5x^3 + 7x^2 - 3)$:

قاسمٌ	طه
$3x^3 - 6x^2 - 9x + (-5x^3 - 7x^2 + 3)$	$3x^3 - 6x^2 - 9x + 5x^3 + 7x^2 - 3$
$= -2x^3 + 6x^2 - 6x$	$= 8x^3 + x^2 - 9x - 3$

أُحدِّدُ إذا كانَتْ إجابةُ أيٍّ منْهُما صحيحةً، مُبرِّرًا إجابتي. 24 إلى 27 انظر ملحق الإجابات

25 مسـألةٌ مفتوحةٌ: أكتبُ كثيريْ حدودٍ، أحدُهُما ذو حدَّيْنِ، والآخرُ ثلاثيُّ الحدودِ، بحيثُ يكونُ ناتجُ ضربِهِما اقترانًا ذا حدَّيْنِ.

26 تحدٍّ: أجِدُ أصفارَ الاقترانِ: $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

27 تبريـرٌ: إذا كانَ f, g كثيريْ حـدودٍ، فأكتبُ العلاقةَ بينَ درجةِ كلٍّ منْهُما ودرجةِ كثيرِ الحـدودِ h الناتجِ منْ جمعِهِما، وطرحِهِما، وضربِهِما، مُبرِّرًا إجابتي.

الدرس 2

نتاجات الدرس

- يقسم اقتران كثير حدود على كثير حدود آخر.
- يبين إن كان كثير حدود أحد عوامل كثير حدود آخر.
- يتعرف الاقترانات النسبية، ويجد مجالها ومداها.
- يجد خطوط التقارب (إن وجدت) لمنحنى الاقتران النسبي.
- يمثل اقترانات نسبية بيانيًّا.
- يحل مسائل حياتية عن قسمة الاقترانات والاقترانات النسبية.

التعلم القبلي:

- قسمة القوى وتبسيط مقادير جبرية كسرية.
- تحليل مقادير جبرية إلى عواملها.
- حل معادلات خطية وتربيعية.

1 التهيئة

- راجِع الطلبة في قوانين الأسس، ثم اطلب إليهم تبسيط ما يأتي:

$$x^5 \div x^2 \qquad \frac{6x^3}{2x} \qquad \frac{12x^4}{4x^2} \qquad \frac{6x^3+8x^2}{2x^2}$$

» اطلب إلى الطلبة حل المعادلات الآتية:

a) $3x - 2 = 10$

b) $2 - 4x = 0$

c) $x^2 - 6x + 9 = 0$

d) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

الدرسُ 2

قسمةُ كثيراتِ الحدودِ والاقتراناتُ النسبيةُ

Dividing Polynomials and Rational Functions

فكرةُ الدرسِ إيجادُ ناتجِ قسمةِ اقترانِ كثيرِ الحدودِ على آخرَ، وتعرُّفُ الاقتراناتِ النسبيةِ، وإيجادُ مجالِها، ومداها، وتمثيلُها بيانيًّا.

المصطلحاتُ الاقترانُ المقلوبُ، الاقترانُ النسبيُّ، خطُّ التقاربِ الأفقيِّ، خطُّ التقاربِ الرأسيِّ.

مسألةُ اليومِ بركةُ سباحةٍ على شكلِ متوازي مستطيلاتٍ، حجمُها $3x^4-3x^3-33x^2+54x$ وحدةً مكعبةً، ومساحةُ قاعدتِها $3x^2-6x$ وحدةً مربعةً. كيفَ يُمكِنُ إيجادُ ارتفاعِ البركةِ؟ ما مقدارُ هذا الارتفاعِ؟

إنَّ قسمةَ كثيرِ حدودٍ على آخرَ تُشبِهُ كثيرًا عمليةَ قسمةِ عددٍ كليٍّ على آخرَ؛ إذْ تُتَّبَعُ الخطواتُ نفسُها في كلتا الحالتيْنِ. يُمكِنُ قسمةُ كثيرِ الحدودِ $f(x)$ على كثيرِ الحدودِ $h(x) \neq 0$ إذا كانَتْ درجةُ $f(x)$ أكبرَ منْ أوْ تساوي درجةَ $h(x)$. لقسمةِ كثيرِ حدودٍ على آخرَ، أكتبُ المقسومَ والمقسومَ عليْهِ بالصورةِ القياسيةِ. وإذا كانَتْ إحدى قوى المُتغيِّرِ في المقسومِ مفقودةً، فإنّي أُضيفُها في موقعِها، وأكتبُ معاملَها 0، ثمَّ أُنفِّذُ خطواتِ القسمةِ كما في المثالِ الآتي.

مثال 1

أَجِدُ ناتجَ قسمةِ $f(x) = 2x^3 + 24x - 15$ على $g(x) = x + 5$، وباقيَها.

$$\begin{array}{r l}
2x^2 - 10x + 74 & \\
x+5\,\big)\,\overline{2x^3 + 0x^2 + 24x - 15} & \\
(-)\ \underline{2x^3 + 10x^2} & \\
-10x^2 + 24x & \\
(-)\ \underline{-10x^2 - 50x} & \\
74x - 15 & \\
(-)\ \underline{74x + 370} & \\
-385 &
\end{array}$$

بقسمةِ $2x^3$ على x، وكتابةِ النتيجةِ $2x^2$ فوقَ الحدِّ المشابهِ

بضربِ المقسومِ عليْهِ $(x+5)$ في $2x^2$

بالطرحِ، وتنزيلِ $24x$

بقسمةِ $-10x^2$ على x، وكتابةِ النتيجةِ $-10x$ فوقَ الحدِّ المشابهِ، ثمَّ ضربِ المقسومِ عليْهِ $(x+5)$ في $-10x$

بالطرحِ، وتنزيلِ -15

بقسمةِ $74x$ على x، وكتابةِ النتيجةِ 74 فوقَ الحدِّ الثابتِ، وضربِ المقسومِ عليْهِ $(x+5)$ في 74

بالطرحِ

إذنْ، ناتجُ القسمةِ هوَ: $2x^2 - 10x + 74$، والباقي -385، ويُمكِنُ كتابةُ ذلكَ كما يأتي:

$$\frac{2x^3+24x-15}{x+5} = 2x^2 - 10x + 74 + \frac{-385}{x+5},\ x \neq -5$$

إرشادٌ تتوقفُ عمليةُ قسمةِ كثيراتِ الحدودِ عندما تصبحُ درجةُ باقي القسمةِ أقلَّ منْ درجةِ المقسومِ عليْهِ.

2 الاستكشاف

- وجِّه الطلبة إلى قراءة المسألة في بند (**مسألة اليوم**)، ثم اسألهم:
  » ما متوازي المستطيلات؟ مجسم ثلاثي الأبعاد ذو 6 أوجه مستطيلة الشكل، وأوجهه المتقابلة متوازية ومتطابقة، وأوجهه المتجاورة متعامدة.
  » كيف نجد حجمه؟ بضرب طوله في عرضه في ارتفاعه، أو بضرب مساحة قاعدته في ارتفاعه.
  » إذا علم حجم متوازي مستطيلات وطول اثنين من أبعاده، فكيف نجد بعده الثالث؟ بقسمة الحجم على ناتج ضرب البعدين المعلومين.
- استمع لإجابات الطلبة من دون تقديم تغذية راجعة لهم.

3 التدريس

- اطلب إلى الطلبة استعمال القسمة الطويلة لإيجاد ناتج: $695 \div 21$
- وضِّح لهم أنه يتعيَّن اتباع الخطوات نفسها عند قسمة $6x^2 + 9x + 5$ على $2x + 1$
- اسألهم:
  » كيف يمكن قسمة $9x^2 + 9x + 2$ على $3x + 2$ باستعمال قسمة الأعداد الكلية؟

مثال 1

- ناقِش الطلبة في خطوات قسمة كثير حدود على كثير حدود آخر باستعمال القسمة الطويلة المعروضة في المثال، ونبِّههم إلى أنه يجب كتابة المقسوم والمقسوم عليه بالصورة القياسية وإضافة 0 في موقع أي قوة مفقودة في أي منهما.

مثال إضافي

- جد ناتج قسمة $f(x) = 6x^3 - 3x^2 + 23$ على $h(x) = 2x + 3$ وباقيها.
  الناتج: $3x^2 - 6x + 9$، والباقي -4

التقويم التكويني:

- وجِّه الطلبة إلى حل التدريب في بند (**أتحقق من فهمي**) بعد كل مثال.
- اختر بعض الإجابات التي تحوي أخطاء مفاهيمية، ثم ناقِشها على اللوح، ولا تذكر اسم الطالب الذي أخطأ في الإجابة؛ تجنبًا لإحراجه.

أخطاء مفاهيمية:

قد يغفل بعض الطلبة عن كتابة المقسوم والمقسوم عليه بالصورة القياسية، أو وضع 0 في موقع أي قوة مفقودة؛ لذا أكِّد هذين الأمرين لتجنب الوقوع في الخطأ.

ملاحظات المعلم

أتحقَّقُ منْ صحَّةِ الحلِّ:

$$\begin{aligned}(x+5)(2x^2-10x+74)-385 &= 2x^3-10x^2+74x+10x^2-50x+370-385\\ &= 2x^3+(-10+10)x^2+(74-50)x-15\\ &= 2x^3+24x-15 \checkmark\end{aligned}$$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ ناتجَ قسمةِ $f(x) = 4x^4-7x^3+12x-25$ على $h(x) = x-4$ انظر الهامش

أتذكَّرُ

يُمكِنُ التحقُّقُ منْ صحَّةِ القسمةِ بضربِ الناتجِ في المقسومِ عليْهِ، وإضافةِ الباقي. فإذا كانتِ النتيجةُ مساويةً للمقسومِ كانَ الحلُّ صحيحًا.

إذا كانَ $f(x)$ وَ $h(x)$ كثيريْ حدودٍ، وكانَتْ درجةُ $f(x)$ أكبرَ منْ أوْ تساوي درجةَ $h(x)$، وَ $h(x) \neq 0$، فإنَّهُ يوجدُ كثيرا حدودٍ وحيدانِ، هما: $q(x)$ (ناتجُ القسمةِ)، وَ $r(x)$ (باقي القسمةِ)، ودرجتُهُ أصغرُ منْ درجةِ $h(x)$، حيثُ:

$$f(x) = h(x) \cdot q(x) + r(x) \quad \text{أوْ} \quad \frac{f(x)}{h(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{h(x)}$$

إذا كانَ $r(x) = 0$، فإنَّ $f(x)$ يقبلُ القسمةَ على $h(x)$، ويكونُ $h(x)$ أحدَ عواملِ $f(x)$.

معلومةٌ

يُمكِنُ استعمالُ خوارزميةِ القسمةِ للتأكُّدِ أنَّ كثيرَ الحدودِ $h(x)$ هوَ أحدُ عواملِ كثيرِ حدودٍ آخرَ $f(x)$ أمْ لا.

مثال 2

أُثبِتُ أنَّ $(2x^2+x+7)$ هوَ أحدُ عواملِ الاقترانِ $f(x) = 6x^4-7x^3+10x^2-38x-21$.

يكونُ $(2x^2+x+7)$ أحدَ عواملِ الاقترانِ $f(x)$ إذا كانَ باقي قسمةِ $f(x)$ على $(2x^2+x+7)$ يساوي 0، أَقْسِمُ $f(x)$ على $(2x^2+x+7)$:

$$\begin{array}{r l}
 & 3x^2 -5x -3\\
2x^2+x+7 \,\big)\!\! & 6x^4-7x^3+10x^2-38x-21\\
 & (-)\ 6x^4+3x^3+21x^2\\
 & -10x^3-11x^2-38x\\
 & (-)\ -10x^3-5x^2-35x\\
 & -6x^2-3x-21\\
 & (-)\ -6x^2-3x-21\\
 & 0
\end{array}$$

بقسمةِ $6x^4$ على $2x^2$، وكتابةِ النتيجةِ $3x^2$ فوقَ الحدِّ المشابهِ

بضربِ المقسومِ عليْهِ $(2x^2+x+7)$ في $3x^2$

بالطرحِ، وتنزيلِ $-38x$

بقسمةِ $-10x^3$ على $2x^2$، وكتابةِ النتيجةِ $-5x$ فوقَ الحدِّ المشابهِ، وضربِها في المقسومِ عليْهِ

بالطرحِ، وتنزيلِ -21

بقسمةِ $-6x^2$ على $2x^2$، وكتابةِ النتيجةِ -3 فوقَ الحدِّ الثابتِ، وضربِ -3 في المقسومِ عليْهِ

بالطرحِ

18

تنويع التعليم:

إذا واجه الطلبة من ذوي المستوى دون المتوسط صعوبة في الحفاظ على تركيزهم في أثناء تنفيذ الخطوات المتتابعة للقسمة الطويلة، فشجِّعهم على مقارنة نتيجة كل خطوة مع زملائهم، وبذلك يمكنهم طرح الأسئلة واكتشاف الأخطاء قبل الانتهاء من حل المسألة.

مثال 2

- ناقِش الطلبة في الشرط الذي يجعل عددًا عاملًا لعدد آخر. وبطريقة مماثلة، وضِّح الشرط الذي يجعل اقتران كثير حدود عاملًا لاقتران كثير حدود آخر، ثم شارك الطلبة في حل المثال، والتحقق من صحة الحل.

مثال إضافي

- بيِّن إذا كان $h(x) = x + 1$ أحد عوامل الاقتران: $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 2x - 12$ أم لا.

لا، $h(x)$ ليس أحد عوامل $f(x)$؛ لأن باقي القسمة -11، وليس 0

إجابة أتحقق من فهمي 1:

الناتج:

$4x^3 + 9x^2 + 36x + 156$، والباقي: 599

مثال 3

- ناقِش الطلبة في مفهوم الاقتران النسبي، واذكر أمثلة عليه، مُوضِّحًا أنه لا يوجد للاقتران النسبي قيمة عندما يكون مقامه صفرًا؛ لأن القسمة على الصفر غير معرفة، ولذلك يكون مجاله جميع الأعداد الحقيقية باستثناء أصفار مقامه. بعد ذلك شارك الطلبة في حل المثال 3 الذي يُبيِّن كيفية تعيين مجال الاقتران النسبي.

مثال إضافي

- جد مجال كلٍّ ممّا يأتي:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ $\{x|x \neq 2\}$

b) $g(x) = \dfrac{3}{x^2 - 16}$ $\{x|x \neq -4, x \neq 4\}$

c) $h(x) = \dfrac{2x - 6}{x^2 + 25}$ كل الأعداد الحقيقية

بما أنَّ باقي القسمةِ $r(x)$ يساوي 0، فإنَّ المقسومَ يساوي المقسومَ عليْهِ مضروبًا في ناتجِ القسمةِ؛ أيْ إنَّ:

$$6x^4 - 7x^3 + 10x^2 - 38x - 21 = (2x^2 + x + 7)(3x^2 - 5x - 3)$$

وهذا يعني أنَّ $(2x^2+x+7)$ عاملٌ للاقترانِ $f(x)$.

يُمكِنُ التحقُّقُ منْ ذلكَ بضربِ العاملَيْنِ في النتيجةِ السابقةِ.

أتحقق من فهمي

أُثبِتُ أنَّ $h(x)$ هوَ أحدُ عواملِ $f(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي: انظر الهامش

a) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 12x - 55,\ h(x) = 2x + 5$

b) $f(x) = 5x^3 + 12x^2 - 14x + 3,\ h(x) = x^2 + 3x - 1$

الاقتراناتُ النسبيةُ (rational functions) هي اقتراناتٌ يُمكِنُ كتابتُها بصورةِ نسبةٍ بينَ كثيرَيْ حدودٍ، مثلُ $\frac{f(x)}{g(x)}$؛ شرطَ أنْ: $g(x) \neq 0$. ومنَ الأمثلةِ عليْها:

$$y = \frac{x+4}{2x^3 - 5x^2 - 3x}\ ,\quad h(x) = \frac{x+2}{x^2 - 9}\ ,\quad q(x) = \frac{1}{x}$$

مفهومٌ أساسيٌّ

الاقترانُ النسبيُّ: اقترانٌ تكونُ قاعدتُهُ (معادلتُهُ) بصورةِ $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$، حيثُ إنَّ $g(x) \neq 0$، وَ $g(x)$، وَ $f(x)$ كثيرا حدودٍ.

مجالُ الاقترانِ النسبيِّ: مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيةِ باستثناءِ الأعدادِ التي تجعلُ المقامَ يساوي صفرًا.

مثال 3

أَجِدُ مجالَ كلِّ اقترانٍ نسبيٍّ في ما يأتي:

1) $q(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - 9}$

مجالُ هذا الاقترانِ هوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ باستثناءِ قيمِ x التي تجعلُ $x^2 - 9 = 0$:

$x^2 = 9$ بإضافةِ 9 إلى الطرفيْنِ

$x = \pm 3$ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفيْنِ

إذنْ، مجالُ هذا الاقترانِ هوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ باستثناءِ 3 ,3−، ويُكتَبُ برمزِ المجموعةِ كما يأتي: $\{x \mid x \neq \pm 3\}$

أتذكَّرُ

يُمكِنُ استعمالُ قاعدةِ تحليلِ الفرقِ بينَ مُربَّعيْنِ لتحليلِ $x^2 - 9 = 0$

إجابة أتحقق من فهمي 2:

a) ناتج القسمة هو $x^2 + 2x - 11$ ، والباقي 0

b) ناتج القسمة هو $5x - 3$ ، والباقي 0

أفكّر

هلْ مجالُ الاقترانِ $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$ يساوي مجالَ الاقترانِ $g(x) = x-3$؟

2 $y = \frac{x+4}{2x^3-5x^2-3x}$

مجالُ هذا الاقترانِ هوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ باستثناءِ قيمِ x التي تجعلُ $2x^3-5x^2-3x = 0$:

$x(2x^2-5x-3) = 0$	بإخراجِ x عاملٍ مشتركٍ
$x(2x+1)(x-3) = 0$	بتحليلِ العبارةِ التربيعيةِ $2x^2-5x-3$
$x = 0$ أو $2x+1 = 0$ أو $x-3 = 0$	خاصيةُ الضربِ الصفريِّ
$x = 0, x = \frac{-1}{2}, x = 3$	بحلِّ المعادلاتِ

إذنْ، مجالُ هذا الاقترانِ هوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ باستثناءِ $0, 3, \frac{-1}{2}$، أوْ $\{x \mid x \neq 0, x \neq 3, x \neq \frac{-1}{2}\}$

أتحقق من فهمي

أَجِدُ مجالَ كلٍّ ممّا يأتي: انظر الهامش

a) $h(x) = \frac{x^3+8}{x^2-5x+6}$

b) $y = \frac{x^2-4}{6x-3x^2}$

مِنْ أبسطِ الاقتراناتِ النسبيةِ الاقترانُ $f(x) = \frac{1}{x}$ الذي يُسمّى **اقترانَ المقلوبِ** (reciprocal function)، ومنْهُ تتولّدُ اقتراناتٌ نسبيةٌ كثيرةٌ. يُمكِنُ تمثيلُ هذا الاقترانِ بيانيًّا في الفترةِ $[-4, 4]$ مثلًا بإنشاءِ جدولِ قيمٍ معَ استثناءِ 0؛ لأنَّهُ ليسَ مِنْ مجالِهِ.

أُخِذَتْ قيمٌ صغيرةٌ للمُتغيِّرِ x قريبةٌ منَ الصفرِ لتمثيلِ الاقترانِ بدقةٍ؛ فالقيمُ الصحيحةُ وحدَها لا تُمثِّلُ الصورةَ كاملةً، وإنَّما تكونُ الصورةُ مُجتزَأةً ناقصةً.

x	-4	-2	-1	-0.8	-0.5	-0.2	0.2	0.5	0.8	1	2	4
$f(x) = \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-1.25	-2	-5	5	2	1.25	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

أُعيِّنُ النقاطَ $(x, f(x))$ في المستوى الإحداثيِّ، وأَصِلُ بينَ النقاطِ يمينَ $x = 0$ بمنحنى، وأَصِلُ بينَ النقاطِ يسارَ $x = 0$ بمنحنى آخرَ؛ لأنَّ الاقترانَ غيرُ مُعرَّفٍ عندَ $x = 0$، فينتجُ الشكلُ المجاورُ.

اقتران المقلوب

ناقِش الطلبة في تمثيل الاقترانات النسبية بيانيًّا، مُوضِّحًا لهم مفهوم خطوط التقارب الرأسية والأفقية، وكيفية إيجادها، ثم ناقِشهم في خصائص اقتران المقلوب.

تعزيز اللغة ودعمها:

كرِّر المصطلحات الرياضية المستخدمة في الدرس باللغتين العربية والإنجليزية، وشجِّع الطلبة على استعمالها، مثل: الاقتران النسبي rational function، واقتران المقلوب reciprocal function، وخط التقارب الرأسي vertical asymptote، وخط التقارب الأفقي horizontal asymptote .

إجابة أتحقق من فهمي 3:

a) مجال $H(x)$ هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 2 و3، أي $\{x \mid x \neq 2, x \neq 3\}$

b) مجال هذا الاقتران هو جميع الأعداد الحقيقية باستثناء 0 و2 ، أي $\{x \mid x \neq 0, x \neq 2\}$