

الوحدة 1

الدوال الأسية واللوغاريتمية

مقدمة الوحدة

الوحدة 1

الوحدة 1

الدوال الأسية واللوغاريتمية

السؤال الأساسي

كيف نستخدم الدوال الأسية واللوغاريتمية لنمذجة المواقف وحل المسائل؟

نظرة عامة على الوحدة

1-1

خصائص الدوال الأسية

1-2

النماذج الأسية

1-3

اللوغاريتمات

1-4

الدوال اللوغاريتمية

1-5

خواص اللوغاريتمات

1-6

المعادلات الأسية واللوغاريتمية

1-1

Key Features of Exponential Functions

1-2

Exponential Models

1-3

Logarithms

1-4

Logarithmic Functions

1-5

Properties of Logarithms

1-6

Exponential and Logarithmic Equations

مصطلحات الوحدة

• دالة أسية

• دالة النمو الأسّي

• دالة الاضمحلال الأسّي

• معامل النمو

• معامل الاضمحلال

• صيغة الفائدة المركبة

• الأساس الطبيعي e

• صيغة الفائدة المركبة المتصلة

• لوغاريتم

• دالة لوغاريتمية

• لوغاريتم اعتيادي

• لوغاريتم طبيعي

• صيغة تعبير الأساس

• معادلة أسية

• معادلة لوغاريتمية

Topic Vocabulary

• exponential function

• exponential growth function

• exponential decay function

• growth factor

• decay factor

• compound interest formula

• natural base e

• continuously compounded interest formula

• logarithm

• logarithmic function

• common logarithm

• natural logarithm

• change of base formula

• exponential equation

• logarithmic equation

الوحدة 1 الدوال الأسية واللوغاريتمية 3

الوحدة 1 الدوال الأسية واللوغاريتمية 2

السؤال الأساسي للوحدة

كيف نستخدم الدوال الأسية واللوغاريتمية لنمذجة المواقف وحل المسائل؟

ارجع إلى السؤال الأساسي للوحدة أثناء دراسة الوحدة، واقرأ الملاحظات المتعلقة بالإجابة عن السؤال في الصفحة 49 (مراجعة الوحدة) من دليل المعلم.

الوحدة 1

الدوال الأسية واللوغاريتمية

مشروع STEM

نظرة عامة على المشروع

في هذا المشروع، يتعلم الطلاب متى وكيف يستعملون قانون بنفورد لتحليل البيانات.

تقديم المشروع

قدّم المشروع بمناقشة الفرق بين الخطأ والاحتمال وكيف يمكن تحليل البيانات لإيجاد الأخطاء و/أو أدلة على حدوث عملية احتمال (أو غش أو تزوير).

يمكنك طرح الأسئلة الآتية لتوجيه النقاش:

س: ما الفرق بين ارتكاب خطأ والقيام بعملية احتمال؟
[ارتكاب الخطأ لا يكون متعمداً وليست له غاية.]

س: "تدقيق الحسابات" هي عملية نظامية للتحقق من بيانات شخص آخر، البيانات المالية غالباً. لماذا، في رأيك، قد لا يرغب بعض الأشخاص في تدقيق حساباتهم؟
[ابحث عن أسباب واقعية، كان يكون الشخص خائفاً من أنه قد ارتكب خطأ ما، وأن يعاقب على هذا الخطأ، إلخ.]

س: [هل من الواقعي أن نتوقع أن تتبع بيانات تمثل موقفاً من واقع الحياة نموذجاً نظرياً بدقة؟ لماذا؟]
[كلا؛ قد تتنوع التفسيرات.]

اطلب من الطلاب المهمة التي سيطلب منهم إنجازها.

تنفيذ المشروع

أحد الاكتشافات المهمة المتعلقة بقانون بنفورد هو أنه مقياس "ثابت"، أي أن تحويل وحدة قياس مجموعة بيانات إلى وحدة قياس أخرى لا يؤثر في توزيع البيانات. شجّع الطلاب على استعمال مجموعة واحدة على الأقل من البيانات الفيزيائية، بحيث يكتشفون ذلك من خلال عملية تحويل وحدات القياس (تحويل السنتمترات إلى إنشات، أو تحويل الكيلومترات إلى أميال، وما إلى ذلك). إذا استعمل الطلاب بيانات نقدية، اطلب منهم تحويل العملات المستعملة في البيانات إلى عملات أخرى (تحويل الدولارات إلى ريالات، أو تحويل الريالات إلى يورو، وغير ذلك).

إنهاء المشروع

قد ترغب في تحديد يوم يتشارك فيه الطلاب المشاريع التي أنجزوها. شجّع الطلاب على شرح خطوات عملهم بالإضافة إلى نتائجهم النهائية.

الوحدة 1 مشروع STEM

هل تعلم؟

مجموعات بيانات تتبع قانون بنفورد.



تكاثر البكتيريا



مفكوك 2ⁿ



السعر × الكمية

قد تعتقد أن الأرقام من 1 إلى 9، التي تشكل أرقاماً راندة في الأعداد في مجموعة بيانات تتكرر بشكل متساو، لكن قانون بنفورد يثبت عدم صحة ذلك.
بنض قانون بنفورد على أن، في مجموعة بيانات من واقع الحياة، الرقم الرائد 1 يتكرر بنسبة تزيد عن 30%، بينما الرقم الرائد 9 يتكرر بنسبة أقل من 5%.

مجموعات بيانات لا تتبع قانون بنفورد.



السعر



الكمية



الرمز البريدي



أرقام الضمان الاجتماعي



تعيش البكتيريا في التربة، والمياه، والنباتات، والأنهار الجليدية، ونباتات المياه الساخنة، والمحيطات. تتكاثر البكتيريا عن طريق عملية الانشطار الثنائي، لذا فإن أعدادها تتضاعف في المختبر، يمكن لأعداد البكتيريا أن تتضاعف خلال فترات منتظمة. هذه الفترات تختلف من حيث المدة، فمدة بعضها لا تتجاوز 12 دقيقة، في حين تتجاوز مدة بعضها الآخر 24 ساعة.

مهمتك: تحليل نتائج الانتخابات

سقوم أنت وزملائك في الصف بتحليل نتائج بعض الانتخابات، باستعمال قانون بنفورد لتحديد ما إذا كانت نتائج هذه العمليات الانتخابية قد طالها التزوير أم لا.

الدرس 1-1

خصائص الدوال الأسية

نظرة عامة على الدرس

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على:

- ✓ تفسير خصائص الدوال الأسية الممثلة بيانيًا وجدولًا ومعادلات.
- ✓ تمثيل تحويلات الدوال الأسية بيانيًا وتحديد المقاطع والسلوك الطرقي.
- ✓ نمذجة الكميات التي تتزايد أو تتناقص بنسبة مئوية ثابتة كل فترة زمنية باستعمال الدوال الأسية.

الفهم الأساس

معدل النمو أو الاضمحلال الأسّي هو النسبة بين قيمتي مخرجتين متتاليتين في دالة أسية.

في الصفوف السابقة، تمكّن الطلاب من:

- تحديد خصائص الدوال الخطية والتربيعية من خلال دراسة المعادلات التالية:
 $y = a(x - h)^2 + k$ و $y = ax^2 + bx + c$ و $y = mx + b$

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من:

- تمثيل الدوال الأسية بيانيًا وتفسير خصائص الدوال الأسية من خلال دراسة الجداول والتمثيلات البيانية.

لاحقًا في هذه الوحدة، سيتمكّن الطلاب من:

- مقارنة خصائص التمثيلات البيانية لكل من الدوال الأسية واللوغاريتمية.

يركّز هذا الدرس على الدمج بين الاستيعاب المفاهيمي والتطبيق.

- يستعمل الطلاب خصائص الدوال الأسية للتمييز بين النمو والاضمحلال الأسّي.
- يقوم الطلاب بتفسير ومقارنة الدوال الأسية لنمذجة تعداد السكان وقيمة سيارة بعد مرور x سنة على شرائها.

بناء المصطلحات

المصطلحات الجديدة

العربية | الإنجليزية

- دالة أسية | *exponential function*
- دالة النمو الأسّي | *exponential growth function*
- دالة الاضمحلال الأسّي | *exponential decay function*
- معامل النمو | *growth factor*
- معامل الاضمحلال | *decay factor*

نشاط المصطلحات

ناقش خصائص الدالة الأسية والفرق بين "الاضمحلال الأسّي" و "النمو الأسّي". اطلب من الطلاب توصيل كل مصطلح أدناه بما يناسبه باستعمال ما يعرفونه عن بنية الدوال الأسية.

دالة نمو أسّي $A(t) = a(1 + r)^t$
دالة اضمحلال أسّي $A(t) = a(1 - r)^t$
معامل النمو $(1 + r)$
معامل الاضمحلال $(1 - r)$

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير ممارسات الرياضيات

نمذج

ينشئ الطلاب جداول وتمثيلات بيانية ومعادلات لتحليل العلاقات، واستخلاص نتائج، وحل مسائل تتضمن كميات تتزايد أو تتناقص بنسبة مئوية ثابتة كل فترة زمنية.

ابحث عن البنية واستعملها

يبحث الطلاب عن الضرب المتكرر في حساباتهم ويدركون أن بالإمكان تمثيل هذه المسائل بالدوال الأسية.

استكشف وبتّر منطقياً

محور تركيز التدريس يدرس الطلاب العلاقات بين قيم y المتتالية في الدوال الخطية والتكعيبية والأسية لاكتشاف الخصائص الأساسية للدوال الأسية.

قبل البدء بالحلّ [👤] طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التفكير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

الجزء A

س: لماذا قد تكون مريم مهتمة بالنسبة بين قيم المتغير y ؟

[نموذج إجابة: تبحث مريم عن نمط يمكنها استعماله لوصف الدوال.]

أثناء الحلّ [👥] مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البناء في تعلم الرياضيات

س: كيف يمكن للجدول مساعدتك على إيجاد الفروق والنسب الثابتة؟

[ينظم الجدول قيم الدالة بالتسلسل، مما يساعد على إيجاد الفروق والنسب بسرعة وسهولة مقارنتها.]

س: ما أوجه الشبه والاختلاف التي تلاحظها بين الجداول الثلاثة؟

[تتضمّن كل دالة x و 3 ؛ الفروق تتزايد في جدولين والنسب تتناقص في جدولين؛ يتضمّن جدول واحد فقط فروقاً ثابتة ويتضمّن جدول واحد فقط نسباً ثابتة.]

للطلاب سريعى الإنجاز

س: ما تأثير تغيير العدد 3 في المعادلات إلى العدد 2 على القيم الواردة في الجداول؟

[ستصبح القيم في الجدول أصغر، لكن جدولاً واحداً سيظل يظهر فروقاً ثابتاً وسيظل جدول واحد يبيّن نسباً ثابتة.]

بعد إنجاز الحلّ [👤] طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

شجع إجراء مناقشة مع الطلاب حول مشاركة إجاباتهم عن الجزأين B و C.

س: هل لاحظت شيئاً في معادلات الدوال يمكن أن يدلّ على أنّ إحدى هذه الدوال تحتوي على نسبة ثابتة بين قيم y المتتالية؟

[تشير 3^x إلى ضرب العدد 3 في نفسه بشكل متكرر.]

استعمل مع استكشف وبتّر منطقياً

عادات التفكير

عقم ليكن b عدداً كلياً. إذا كان $b > 1$ ، أي دالة تعتقد أنها تتزايد بوتيرة أسرع كلما زادت قيمة x ، $f(x) = b^x$ أم $g(x) = x^b$ ؟ وضح إجابتك.

[تتزايد الدالة الأسية بوتيرة أسرع من دالة القوة كلما اقترب x من مالانهاية.]

كتاب الطالب، صفحة 5

1-1

خصائص الدوال الأسية

Key Features of Exponential Functions

استطيع... تمييز الخصائص الأساسية للدوال الأسية.

المصطلحات

- دالة أسية exponential function
- دالة النمو الأسّي exponential growth function
- دالة الاضمحلال الأسّي exponential decay function
- معامل النمو growth factor
- معامل الاضمحلال decay factor

تدرس مريم ثلاث دوال:

$$y = 3x \text{ و } y = x^2$$

$$\text{و } y = 3^x$$

وهي مهتمة بإيجاد الفروق والنسب بين قيم y المتتالية.

الجدول المقابل هو الجدول الذي بدأت منه لدراسة الدالة

$$y = 3x$$

استكشف وبتّر منطقياً

دراسة $y = 3x$

x	y	النسبة بين قيم y	الفرق بين قيم y
1	3		
2	6	$\frac{6}{3} = 2$	$6 - 3 = 3$
3	9	$\frac{9}{6} = 1.5$	$9 - 6 = 3$
4	12	$\frac{12}{9} \approx 1.33$	$12 - 9 = 3$

A. أنشئ جدولاً مشابهاً للجدول الذي أنشأته مريم لكل من الدوال الثلاث وأصف مزيجاً من الصفوف وأملأها.

B. أيّ من هذه الدوال تحتوي على فرق ثابت، وأيها تحتوي على نسبة ثابتة، بين قيم y المتتالية؟

C. **استعمل البنية** في أيّ من هذه الدوال الثلاث تتزايد قيم y بوتيرة أسرع بتزايد قيم x ؟ وضح إجابتك.

نموذج من أعمال الطلاب

A. و B. لاحظت أن قيم y المتتالية في الجدول الخاص بالدالة التي معادلتها

$$y = 3x \text{ فرقها ثابت ويساوي 3 وأن للدالة التي معادلتها } y = 3^x \text{ نسبة ثابتة}$$

وتساوي 3 أيضاً.

C. الفرق بين قيم y المتتالية في الدالة $y = 3^x$ أكبر من ذلك الفرق في الدالتين

الأخريين وبالتالي تتزايد بوتيرة أسرع. كما أن النسبة بين قيم y المتتالية في كل

من الدالتين الأخريين تتناقص، وبالتالي هما تتزايدان بوتيرة أبطأ.

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلم مركز

عزف الطلاب أن معادلتني النمو الأسّي والاضمحلال الأسّي لهما نفس الصورة،
 $y = a \cdot b^x$

وضّح للطلاب أن قيمتي a و b ستساعدهم على تحديد خصائص التمثيلات البيانية للدوال الأسّيّة.

مثال 1

تحديد الخصائص الأساسية للدوال الأسّيّة

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: لتكن الدالتان $f(x) = 2^x$ و $g(x) = 5\left(\frac{1}{2}\right)^x$. ما المعلومة التي تبين ما إذا كانت الدالة متزايدة أم متناقصة؟

[قيمة الأساس b ؛ إذا كانت $b > 1$ تكون الدالة متزايدة، وإذا كانت $b < 1$ تكون الدالة متناقصة.]

كيف تبين التمثيلات البيانية والمعادلات الخصائص الأساسية لدوال النمو والاضمحلال الأسّي؟

السؤال الأساس

مثال 1

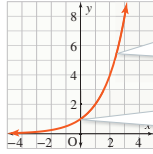
تحديد الخصائص الأساسية للدوال الأسّيّة

حدّد الخصائص الأساسية لكل دالة أدناه، بما في ذلك المجال، والمدى، والمقطع، وخطوط التقارب، والسلوك الطرفي.

الدالة الأسّيّة هي أي دالة في الصورة $y = a \cdot b^x$ حيث a و b عدنان ثابتان و $a \neq 0$ و $b > 0$ ، $b \neq 1$.

A. $f(x) = 2^x$

التعبير البياني للدالة $y = a \cdot b^x$	
x	$f(x) = 2^x$
-2	0.25
-1	0.5
0	1
1	2
2	4



بالنسبة للدالة f ، $b = 2$ ،
 بما أن $b > 1$ ، فإن قيم y
 متزايدة.

بالنسبة للدالة $y = a \cdot b^x$ ،
 قيمة a هي المقطع y .

نصيحة دراسية
 راجع الدراسة التي أجريتها لقيم y المتتالية في نشاط "استكشف" وبنز منطقياً. لاحظ أن النسبة التي كانت 3 في الدالة $y = 3^x$ تساوي قيمة b في المعادلة $y = a \cdot b^x$.

خط التقارب: المحور x

المجال: كل الأعداد الحقيقية

المدى: $\{y : y > 0, y \in \mathbb{R}\}$

السلوك الطرفي:

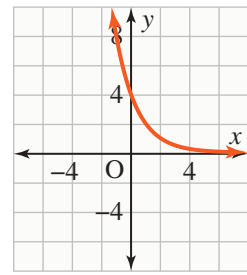
عندما $x \rightarrow -\infty$ فإن $y \rightarrow 0$ ، وعندما $x \rightarrow \infty$ فإن $y \rightarrow \infty$

المقطع y : 1

تابع في الصفحة التالية

تابع المثال 1

حاول أن تحلّ! الإجابات



1.

المجال: كل الأعداد الحقيقية؛ المدى: $\{y \mid y > 0\}$
المقطع $y: 4$ ؛ خط التقارب: المحور x ؛ السلوك الطرفي:
عندما $x \rightarrow -\infty$ فإن $y \rightarrow \infty$ وعندما $x \rightarrow \infty$ فإن $y \rightarrow 0$

مثال 2 تمثيل تحويلات الدوال الأسية بيانيًا

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: تقع النقطة $(1, 3)$ على منحنى الدالة f . كيف يمكن لانعكاس أن يحدد أي نقطة تقع على منحنى الدالة g ؟
[بما أن $g(x)$ انعكاس $f(x)$ حول المحور x ، فإن النقطة $(1, -3)$ ستقع على منحنى الدالة g .]

س: كيف يمكن للإزاحة $f(x) - 4$ أن تساعدك على تحديد موقع النقاط الجديدة على $h(x)$ ؟
[ستزاح جميع النقاط على التمثيل البياني للدالة f بمقدار 4 وحدات إلى الأسفل.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

- خطا التقارب للدالتين هو المحور x . تمت إزاحة المقطع y للأعلى من 1 إلى 125.
- للدالتين نفس خط التقارب ونفس المقطع.

استعمل مع المثال 2

عادات التفكير

بزر منطقيًا ما نوع التحويلات التي تغير خطوط التقارب أو المقاطع للدوال الأسية؟ وضح إجابتك.

[الإزاحات الرأسية والأفقية.]

تعزيز المهارات اللغوية

استعمل مع المثال 2

الكتابة مستوى 1 وجه الطلاب إلى التفكير في العلاقة بين الدالة الرئيسة والدالة الناتجة عن تحويلها في كل تمثيل بياني. اطلب من الطلاب استعمال مخطط "فن" للمقارنة والتمييز بين الاستخدام اليومي للمصطلح رئيس أو رئيسة مع الاستخدام الرياضي للمصطلح.

القراءة مستوى 3 اطلب من الطلاب استعمال القاموس لإيجاد معاني المصطلحات التالية: تحويل، انعكاس، إزاحة، نقل.

س: ما العلاقة بين هذه المصطلحات؟
[الانعكاسات والإزاحات والنقل جميعها أنواع من التحويلات. الإزاحة والنقل لهما نفس المعنى.]

النمذجة باستعمال الدوال الأسية

مثال 3

طرح أسئلة هادفة

س: ما العلاقة بين الأعداد المكتوبة على يسار الرسم والمقادير المكتوبة على يمينه؟
[على الجانب الأيسر من الرسم، يتزايد عدد السنوات منذ عام 2010 بمقدار 1 في كل صف. أما على الجانب الأيمن من الرسم، تصبح هذه الزيادات الأس للعدد 1.013 في المقدار العددي الذي يُمثل نمو عدد السكان.]

س: لماذا معامل النمو يساوي 1.013 بدلاً من 0.013؟
[معدل نمو عدد السكان هو 1.3%، لكن الرقم 1 الذي في منزلة الآحاد في معامل النمو يمثل عدد السكان الأصلي.]

حاول أن تحل! الإجابات

3. a. QR 14.52

b. أول 10 سنوات.

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: كيف يمكنك معرفة ما إذا كانت قيمة الطابعة تتزايد أم تتناقص بمجرد النظر إلى المعادلة؟

[$0 < b < 1$ ، إذن قيمة الطابعة تتناقص.]

س: هل إجابتك منطقية؟ وضح إجابتك.

[نموذج إجابة: القيمة الأصلية للطابعة هي QR 30 وهذه القيمة تتناقص بمعدل 7% سنوياً، أي بمقدار QR 2.1 في السنة الأولى. إذا تناقصت القيمة بمعدل ثابت فستصبح أقل من QR 20 بعد 10 سنوات. لكن الطابعة تفقد في نهاية كل سنة 7% من قيمتها الحالية وبالتالي سيكون الانخفاض أقل مما يجعل QR 14.52 إجابة منطقية.]

خطأ شائع

حاول أن تحل! 3 قد يطرح بعض الطلاب قيمة الطابعة بعد 20 سنة من قيمتها الأصلية. أكد على أن مقدار الانخفاض في قيمة الطابعة في العشر سنوات الثانية هو ناتج طرح قيمتها بعد 20 سنة من قيمتها بعد 10 سنوات.

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 3 اطلب من الطلاب استكشاف كيفية كتابة نماذج نمو واضمحلال آسي، على أن تكون المعطيات هي القيمة الابتدائية ومعدل النمو أو الاضمحلال الآسي.

1. القيمة الابتدائية: 45، معدل النمو: 4.5%

2. القيمة الابتدائية: 240، معدل الاضمحلال: 7%

3. القيمة الابتدائية: 13، معدل الاضمحلال: 25%

س: ما الدالة الأسية التي تنمذج كل موقف؟

[1. $y = 45(1.045)^x$ 2. $y = 240(0.93)^x$ 3. $y = 13(0.75)^x$]

س: اكتب للتمرين رقم (1) أعلاه مسألة حياتية تنمذجها الدالة.

[نموذج إجابة: عام 2010 كان عدد الماشية في قطيع 45، ثم أخذت أعداد الماشية تزداد بمعدل 4.5% سنوياً. اكتب دالة تنمذج عدد الماشية في هذا القطيع.]

الاستنباط المفاهيمي

النمذجة باستعمال الدوال الأسية

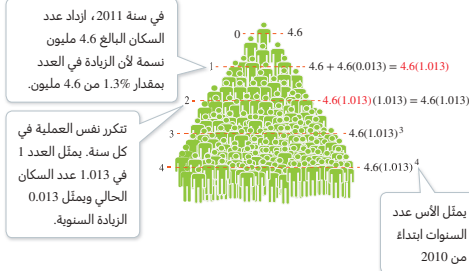
مثال 3

بلغ عدد سكان مدينة كبيرة 4.6 مليون نسمة تقريباً عام 2010، ثم تزايد بمعدل 1.3% في السنوات الأربع التالية.

A. أوجد الدالة الأسية التي تنمذج عدد سكان المدينة خلال فترة الأربع سنوات.

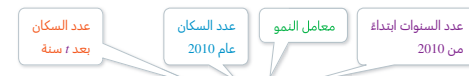
احسب عدد السكان في السنوات الأولى بحثاً عن نمط.

P (عدد السكان بالملايين) t (عدد السنوات ابتداءً من 2010)



استعمل البنية
الدوال الأسية التي في الصورة $y = a + b^x$ تتضمن عمليات ضرب متكررة في المعامل b . لفهم كيفية نمذجة عدد السكان باستعمال دالة أسية، أبحث عن عمليات الضرب المتكررة في العمليات الحسابية التي أجريتها.

يمكن نمذجة عدد السكان بالدالة الأسية:



B. إذا استمر عدد السكان في النمو بنفس المعدل، أوجد عدد السكان عام 2040

لإيجاد عدد السكان عام 2040، حل المعادلة عند $t = 30$:

$$P = 4.6(1.013)^{30} \approx 6.78$$

إذن، في العام 2040 سيبالغ عدد السكان 6.78 مليون نسمة تقريباً.

3. اشترى صاحب مصنع طابعة ثلاثية الإبعاد عام 2010،

تنمذج الدالة $f(x) = 30(0.93)^x$ قيمة الطابعة، حيث x عدد السنوات ابتداءً من عام 2010

a. أوجد قيمة الطابعة بعد 10 سنوات.

b. هل تفقد الطابعة من قيمتها أكثر في السنوات العشر الأولى أم في السنوات العشر الثانية بعد شرائها؟

تفسير دالة أسية

مثال 4

الربط بين التمثيلات الرياضية

س: لماذا $0 < x < 10$ مجال معقول للدالة؟

[بعد 10 سنوات تقل قيمة السيارة بسبب الأميال المقطوعة.]

س: يمكن نمذجة قيمة سيارة أخرى بمرور الزمن بالدالة $y = 124(0.77)^x$ ؟

ما وجه المقارنة بين قيمة هذه السيارة وقيمة السيارة المذكورة في المثال؟

[في الأصل، هذه السيارة أعلى من السيارة المذكورة في المثال

(QR 124 000 > QR 96 000)، لكن قيمة هذه السيارة تتناقص بمعدل

23% سنوياً، أي بوتيرة أسرع من تناقص قيمة السيارة المذكورة في المثال.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

4. a. يتزايد؛ بما أن الأساس أكبر من 1، إذن تتزايد الدالة بتزايد قيمة x .

b. سيبلغ عدد الصقور 280 صقراً بنهاية العام 2020

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: كيف سيصبح شكل الدالة إذا أطلق 250 صقراً وكانت الصقور تتزايد بمعدل

5.5% سنوياً؟

$$[f(x) = 250(1.055)^x]$$

استعمل مع المثال 4

عادات التفكير

استعمل البنية كيف يمكنك تحديد معامل النمو أو الاضمحلال، وكذلك معدل النمو أو الاضمحلال، بمجرد النظر إلى الدالة الأسية؟

[معامل النمو أو الاضمحلال هو أساس الحد الأسّي؛ معدل النمو (عندما $b > 1$) يساوي $b - 1$ ومعامل الاضمحلال (عندما $0 < b < 1$) يساوي $1 - b$]

المفهوم: نماذج النمو والاضمحلال الأسّي

نمذج دوال النمو الأسّي والاضمحلال الأسّي الكميات التي تتزايد أو تتناقص بنسبة مئوية ثابتة خلال كل فترة زمنية. إذا كانت القيمة الابتدائية a ومعدل التزايد أو التناقص r ، فإن قيمة $A(t)$ بعد الفترة الزمنية t تحسب كما يلي:

نموذج الاضمحلال الأسّي

$$A(t) = a(1 - r)^t$$

$$a > 0, 0 < b < 1, b = 1 - r$$

نموذج النمو الأسّي

$$A(t) = a(1 + r)^t$$

$$a > 0, b > 1, b = 1 + r$$

معامل النمو أو الاضمحلال يساوي b ، وهو النسبة بين قيمتين متتاليتين للمتغير y .

مثال 4

تفسير دالة أسية

اشترى خالد سيارة بمبلغ QR 96 000، يمكن استعمال الدالة $y = 96 \cdot 0.8^x$ لنمذجة قيمة السيارة (بالآلاف الريالات) بعد x سنة من شرائها.

A. هل تمثل الدالة نموّاً أم اضمحلالاً أسياً؟

$$y = 96 \cdot 0.8^x$$

$b = 0.8$ ، إذن $b < 1$ والدالة تمثل اضمحلالاً أسياً.

B. أوجد معدل الاضمحلال في هذه الدالة. ماذا يعني؟

$$b = 1 - r$$

$$0.8 = 1 - r$$

$$r = 0.2$$

إذن، معدل الاضمحلال هو 0.2 أو 20%، وهذا يعني أن قيمة السيارة تتناقص بمعدل 20% سنوياً.

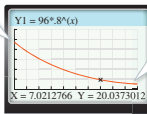
C. مثل الدالة بيانياً في مجال معقول. ماذا يمثل كل من المقطع y وخط التقارب؟

متى ستبلغ قيمة السيارة QR 20 000 تقريباً؟

نصيحة دراسية

بالنسبة للدوال التي في الصورة $y = a \cdot b^x$ ، تكون الدالة متزايدة إذا كان $b > 1$ ، ومتناقصة إذا كان $0 < b < 1$

بشير المقطع 96 إلى أن المشتري اشترى السيارة بمبلغ 96 000 ريال.



خط التقارب $y = 0$ يعني أن القيمة ستقترب من الصفر بعد عدة سنوات.

أوجد قيمة x عندما $y = 20$.

التمثيل البياني يمر (تقريباً) بالنقطة $(7, 20)$ ، وهذا يعني أن قيمة السيارة ستبلغ QR 20 000 تقريباً بعد 7 سنوات.

ينص في الصفحة التالية

مقارنة دالتين أسيتين

مثال 5

إدراج مهام تعزّز التفكير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: لماذا يعدّ ميل المستقيم الذي يتضمن نقطتين على التمثيل البياني للدالة الأسية متوسط معدل التغير؟

يتغير معدل التغير على التمثيل البياني بشكل مطّرد، ولكن يمكن تقديره من خلال إيجاد ميل المستقيم الذي يصل بين نقطتين على التمثيل البياني.

س: كيف يمكن مقارنة الدالتين إلى جانب مقارنة متوسط معدلات التغير فيهما على مدى 5 سنوات؟

يمكنك استعمال النقطتين المعلومتين للوحة لكتابة معادلة نموذج قيمة اللوحة ثم تمثيل الدالتين بيانيًا في نفس المستوى الإحداثي لمقارنتهما.

حاول أن تحلّ! الإجابات

5. نعم؛ متوسط معدل تزايد قيمة اللوحة أكبر من متوسط معدل تزايد قيمة المنحوتة، لذلك ستكون اللوحة في النهاية أعلى قيمة.

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: هل يمكن تحديد متى تتجاوز قيمة اللوحة قيمة المنحوتة؟

نعم؛ يمكن كتابة معادلة نموذج قيمة اللوحة، ثم تمثيل الدالتين بيانيًا في نفس المستوى الإحداثي، وأخيرًا تعيين نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين.

استعمل مع المثال 5

عادات التفكير

بزر منطقيًا هل من الممكن أن يتقاطع التمثيلان البيانيان للدالتين $f(x) = b^x$ و $g(x) = b^{x+n}$ حيث $n > 0$ ؟ وضح إجابتك.

كلا؛ لكي يتقاطع التمثيلان البيانيان، يجب أن يساوي x المقدار $x + n$ ، وهذا لا يمكن أن يحدث عندما $n > 0$.

تابع المثال 4

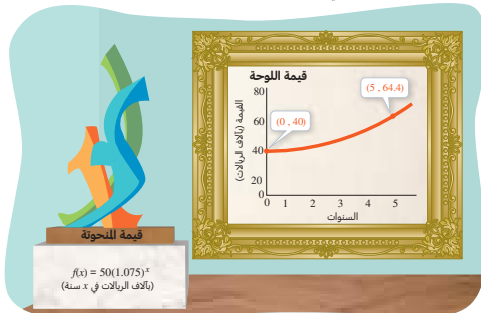
حاول أن تحلّ! 4. أطلق متنان وعشرون صقرًا في إحدى المناطق في 2 يناير عام 2016،
تمنّج الدالة $f(x) = 220(1.05)^x$ عدد الصقور في المنطقة بعد x سنة
ابتداءً من عام 2016

هـ. هل تزايد عدد الصقور أم تناقص؟ وضح إجابتك.

ب. في أي عام سيبالغ عدد الصقور 280 صقرًا؟

مقال 5 مقارنة دالتين أسيتين

اشترى متحف لوحة ومنحوتة في نفس السنة. التغير في قيمتي العملين الفنيين مبين في الشكل أدناه. أوجد متوسط معدل تغيّر قيمة كل من هذين العملين الفنيين على مدى 5 سنوات، ثم حدّد العمل الفني الذي تزايدت قيمته بوتيرة أسرع؟



المنحوتة

$$f(0) = 50(1.075)^0 = 50$$

$$f(5) = 50(1.075)^5 \approx 71.78$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{71.78 - 50}{5 - 0} = \frac{21.78}{5} = 4.356$$

تزايدت قيمة المنحوتة بمعدل 4 356 QR في السنة.

اللوحة

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{64.4 - 40}{5 - 0} = \frac{24.4}{5} = 4.88$$

تزايدت قيمة اللوحة بمعدل 4 880 QR في السنة.

على مدى 5 سنوات، تزايدت قيمة اللوحة بمتوسط معدل أكبر من متوسط معدل تزايد قيمة المنحوتة.

حاول أن تحلّ! 5. في المثال 5، هل ستتجاوز قيمة اللوحة يوقا ما قيمة المنحوتة بحسب النموذجين؟ وضح إجابتك.

نموذج

متوسط معدل التغير للدالة f من x_1 إلى x_2 هو ميل المستقيم المار بالنقطتين $(x_1, f(x_1))$ و $(x_2, f(x_2))$.

ملخص المفهوم خصائص الدوال الأسية

س: فكّر في الدالة $y = 500(0.86)^x$. كيف يمكن إيجاد معدل الاضمحلال؟
[أوجد معدل الاضمحلال بطرح 0.86 من 1]

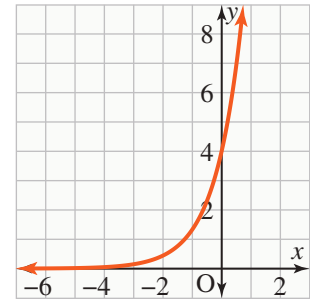
عبر عن فهمك | طبق فهمك

خطأ شائع

التمرين 6 قد يذكر الطلاب بشكل غير صحيح أن معدل الاضمحلال هو 0.4، أخبرهم أن القيمة b في المعادلة هي عامل اضمحلال وليس معدل اضمحلال. عامل الاضمحلال هو $1 - r$ ، حيث r هو معدل الاضمحلال.

الإجابات

1. تحدد قيم المعادلات الخصائص الأساسية، وتوضح التمثيلات البيانية هذه الخصائص.
2. في الدوال الأسية، تُرفع الأعداد الثابتة إلى قوى متغيرة. أما في الدوال كثيرات الحدود والدوال النسبية، فتُرفع المتغيرات إلى قوى هي أعداد ثابتة.
3. $\frac{3}{2} > 1$ ، إذن تمثل الدالة نموًا أسّيًا.
4. نموذج إجابة: لدوال النمو الأسّي ودوال الاضمحلال الأسّي نفس المجال والمدى وخطوط التقارب، لكن سلوكهما الطرفي يختلف.



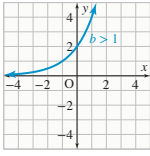
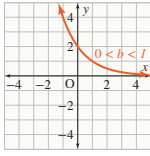
المجال: كل الأعداد الحقيقية؛ المدى $\{y \mid y > 0\}$
المقطع $y: 4$ ؛ خط التقارب: المحور x ؛ السلوك الطرفي: عندما $x \rightarrow -\infty$ فإن $y \rightarrow 0$ وعندما $x \rightarrow \infty$ فإن $y \rightarrow \infty$.

6. يتناقص؛ $1 - 0.6$

7. التمثيل البياني للدالة $f(x)$ هو إزاحة للتمثيل البياني $g(x)$ بمقدار 3 وحدات إلى اليمين.

8. الدالة $f(x)$ هي التي تمثل قيمة الشاشة التي ستكون الأعلى بعد 5 سنوات؛
 $f(5) = 15.53$ و $g(5) = 10.92$

ملخص المفهوم خصائص الدوال الأسية

النمو الأسّي	الاضمحلال الأسّي
 معامل النمو: $1 + r$	 معامل الاضمحلال: $1 - r$
حيث $y = a \cdot b^x$ حيث $b > 1$	حيث $y = a \cdot b^x$ حيث $0 < b < 1$
المجال: كل الأعداد الحقيقية المدى: $\{y : y > 0, y \in \mathbb{R}\}$ المقطع a؛ خط التقارب: المحور x.	المجال: كل الأعداد الحقيقية المدى: $\{y : y > 0, y \in \mathbb{R}\}$ المقطع a؛ خط التقارب: المحور x.
عندما $x \rightarrow -\infty$، فإن $y \rightarrow 0$ عندما $x \rightarrow \infty$، فإن $y \rightarrow \infty$	عندما $x \rightarrow -\infty$، فإن $y \rightarrow \infty$ عندما $x \rightarrow \infty$، فإن $y \rightarrow 0$
النمو الأسّي: $A(t) = a(1 + r)^t$	الاضمحلال الأسّي: $A(t) = a(1 - r)^t$

عبر عن فهمك

1. **السؤال الأساسي** كيف تبين التمثيلات البيانية والمعادلات الخصائص الأساسية لدوال النمو والاضمحلال الأسّي؟
2. **المصطلحات** بماذا تختلف الدوال الأسية من جهة عن الدوال النسبية وكثيرات الحدود من جهة أخرى.
3. **حلّ الخطأ** قال سعيد إن الدالة $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ تمثل اضمحلالاً أسّيًا. بين خطأ سعيد وضح.
4. **تواصل بدقة** بماذا تختلف دوال النمو الأسّي عن دوال الاضمحلال الأسّي؟

طبق فهمك

5. مثلّ الدالة $f(x) = 4 \times 3^x$ بيانيًا، وحدّد المجال والمدى والمقطع وخطوط التقارب، ثم صف السلوك الطرفي للدالة.
6. تمثّل الدالة الأسية $f(x) = 2500(0.4)^x$ رصيد يوسف في حساب التوفير خلال السنوات العشر الأخيرة. هل يتزايد رصيد يوسف أم يتناقص؟ اكتب الأساس بدلالة معدل النمو أو الاضمحلال.
7. صف التمثيل البياني للدالة $g(x) = 4(0.5)^{x-3}$ بدلالة التحويلات على الدالة $f(x) = 4(0.5)^x$.
8. اشترت شركة بناء شاحنتين عام 2016، تمثّل الدالتان $f(x) = 35(0.85)^x$ و $g(x) = 46(0.75)^x$ قيمتي الشاحنتين، حيث x عدد السنوات ابتداءً من عام 2016، أي دالة تمثّل قيمة الشاحنة التي ستكون الأعلى بعد 5 سنوات. وضح إجابتك.

تدرّب وحل مسائل

دليل المهام

أساسي	متقدم
9-23, 25-30	9-13, 15-30

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	14-17	1
	9	2
2	23, 28, 29	2
3	10, 25	2
4	11, 12, 18-21, 24, 30	2
	26	3
5	13, 22	2
	27	3

الإجابات

9. 4

10. $f(x) = 8,000(1.015)^x$; QR 8,878.76

11. المعدل هو 0.3، إذن معامل الاضمحلال يساوي 0.7

12. 346 904، هذا هو عدد السكان في السنة الأولى في البيانات. السنة 2000 يقابلها $x = 0$ في التمثيل البياني للدالة.

13. التمثيل البياني للدالة g هو إزاحة للتمثيل البياني للدالة f بمقدار 4 وحدات إلى الأسفل ووحدة واحدة إلى اليسار.

14. المجال: كل الأعداد الحقيقية؛ المدى $\{y | y > 0\}$
المقطع $y: 5$ ؛ خط التقارب: المحور x ؛
السلوك الطرفي: عندما $x \rightarrow -\infty$ فإن $y \rightarrow 0$.
عندما $x \rightarrow \infty$ فإن $y \rightarrow \infty$.

15. المجال: كل الأعداد الحقيقية؛ المدى $\{y | y > 0\}$
المقطع $y: 0.75$ ؛ خط التقارب: المحور x ؛
السلوك الطرفي: عندما $x \rightarrow -\infty$ فإن $y \rightarrow \infty$.
عندما $x \rightarrow \infty$ فإن $y \rightarrow 0$.

16. المجال: كل الأعداد الحقيقية؛ المدى $\{y | y > 0\}$
المقطع $y: 4$ ؛ خط التقارب: المحور x ؛
السلوك الطرفي: عندما $x \rightarrow -\infty$ فإن $y \rightarrow \infty$.
عندما $x \rightarrow \infty$ فإن $y \rightarrow 0$.

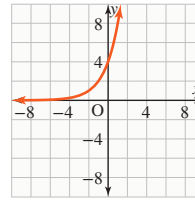
17. المجال: كل الأعداد الحقيقية؛ المدى $\{y | y > 0\}$
المقطع $y: 7$ ؛ خط التقارب: المحور x ؛
السلوك الطرفي: عندما $x \rightarrow -\infty$ فإن $y \rightarrow 0$.
عندما $x \rightarrow \infty$ فإن $y \rightarrow \infty$.

18. نمو أسّي: معامل النمو هو $1 + 1.5$ ، $r = 1.5$ ، وهذا يعني أن قيمة y تتزايد بمعدل 1.5 أو 150%

تدرّب وحل مسائل

عزّز فهمك

9. **استعمل البنية** ما قيمة a التي تكمل المعادلة $y = a \cdot 2^x$ لدالة النمو الأسّي الموضحة أدناه؟



10. **فكر وتابّر في الحل** لدى حمد مجموعة من الطوايح القديمة تبلغ قيمتها QR 8 000. من المتوقع أن تزداد قيمة مجموعة الطوايح بمعدل 1.5% كل سنة. اكتب دالة النمو الأسّي، ثم أوجد قيمة مجموعة الطوايح بعد 7 سنوات.

11. **حلّ الخطأ** وضح خطأ منصور وصححه عندما أوجد معامل النمو أو الاضمحلال للدالة $y = 2.55(0.7)^x$ كما هو مبين أدناه.

الخطوة 1 أساس الدالة هو 0.7، لذا فإن الدالة تمثل اضمحلالاً أسّيّاً.

الخطوة 2 الدالة في الصورة $y = a(1 - r)^x$ هي $y = 2.55(1 - 0.7)^x$.

الخطوة 3 معامل الاضمحلال هو 0.3

12. **بزر منطقياً** في عام 2000، بلغ عدد سكان إحدى المدن 346 904 نسمة، وفي عام 2010 تناقص هذا العدد إلى 319 257 نسمة. عند نمذجة هذا التناقص في عدد السكان بدالة اضمحلال أسّي، فاي قيمة سوف تمثل المقطع y ؟ وضح إجابتك.

13. **روابط في الرياضيات** وضح كيف يمكن أن نحصل على التمثيل البياني للدالة $g(x) = 6 \cdot 2^{x+1} - 4$ من التمثيل البياني للدالة $f(x) = 6 \cdot 2^x$.

19. اضمحلال أسّي: معامل الاضمحلال هو

$r = \frac{2}{5}$ ، $1 - \frac{2}{5}$ ، وهذا يعني أن قيمة f تتناقص بمعدل $\frac{2}{5}$ أو 40%

20. اضمحلال أسّي: معامل الاضمحلال هو $1 - \frac{3}{10}$ ، $r = \frac{3}{10}$ ، وهذا يعني أن قيمة $f(x)$ تتناقص بمعدل $\frac{3}{10}$ أو 30%

تدرّب

في التمارين 14-17، حدّد المجال والمدى والمقطع وخط التقارب لكل دالة أسّيّة أدناه، ثم صِف سلوكها الطرفي.

انظر المثال 1

14. $f(x) = 5 \cdot 3^x$ 15. $f(x) = 0.75 \left(\frac{2}{3}\right)^x$
16. $f(x) = 4 \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 17. $f(x) = 7 \cdot 2^x$

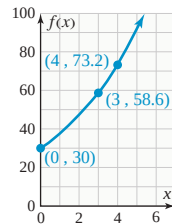
في التمارين 18-21، حدّد ما إذا كانت الدالة تمثّل دالة نمو أم اضمحلال أسّي. اكتب الأساس بدلالة معدل النمو أو الاضمحلال، أوجد قيمة r ، ثم فشر معدل النمو أو

الاضمحلال. انظر المثالين 3 و 4

18. $y = 100 \cdot 2.5^x$ 19. $f(x) = 10\,200 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x$
20. $f(x) = 12\,000 \left(\frac{7}{10}\right)^x$ 21. $y = 450 \cdot 2^x$

22. تمثّل الدالة $f(x)$ ، الممثلة بيانياً أدناه، دالة نمو أسّي. قارن بين متوسط معدل التغيّر للدالة $f(x)$ ومتوسط معدل التغيّر لدالة النمو الأسّي $g(x) = 25(1.4)^x$. استعمل الفترة $[0, 4]$.

انظر المثال 5



23. أوجد الدالة $g(x)$ التي تمثّل الدالة $f(x) = 2^x$ بعد تمدد رأسي معاملها 6 وانعكاس حول المحور x ، ثم مثّل الدالتين بيانياً. انظر المثال 2

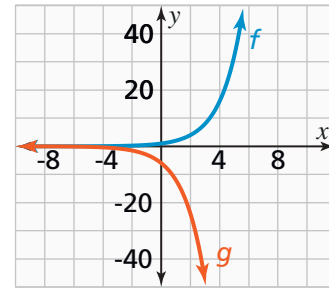
24. بلغ عدد سكان إحدى القرى 4 007 نسمة عام 2000، ومن المتوقع أن يتناقص هذا العدد بمعدل 0.36% كل سنة. اكتب دالة اضمحلال أسّي واستعملها لإيجاد التقدير التقريبي لعدد سكان القرية عام 2020 انظر المثال 4

21. نمو أسّي: معامل النمو هو $1 + 1$ ، $r = 1$ ، وهذا يعني أن قيمة y تتزايد بمعدل 1 أو 100%

22. 10.8; 17.8

الإجابات

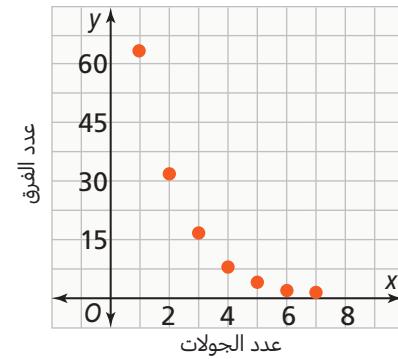
23. $g(x) = -6(2)^x$



24. $f(x) = 4007(0.9964)^x$; 3 728

25. $P(t) = 50(4)^t$, 51 200 بكتيريا

26. a. اضمحلل؛ الأساس أصغر من 1
b. العدد الابتدائي للفرق المشاركة في المسابقة.
c. 50%؛ معدل الاضمحلال يساوي $\frac{1}{2}$
d.



المجال: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
المدى: {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64}
عدد الجولات المعقول هو 7 فقط. بعد الجولة السابعة يبقى فريق واحد فقط.

27. نعم؛ بعد سنتين سيكون قد بقي 271 حمازا وحشيًا و 256 أسدًا تقريبًا.

30. الجزء A $A = A_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{21.5}}$

الجزء B 143 ساعة تقريبًا.

تدرب و حل مسائل

طبق

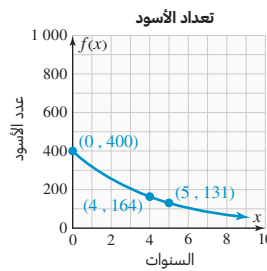
25. **نموذج** تبدأ مستعمرة بكتيريا ب 50 بكتيريا ويتضاعف عددها 4 مرات يوميًا. اكتب دالة أسية $P(t)$ تمثل تعداد البكتيريا في المستعمرة بعد t من الأيام. ثم أوجد عدد البكتيريا في المستعمرة بعد 5 أيام.



26. **مهارات التفكير العليا** يمكن إيجاد عدد الفرق المتبقية y في دورة الإقصاء المباشرة في مسابقة رياضية باستعمال الدالة الأسية $y = 128 \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ، حيث x عدد الجولات التي لعبتها الفرق في المسابقة.

- a. حدد ما إذا كانت الدالة تمثل نموًا أم اضمحلالًا أسّيًا. وضح إجابتك.
b. ماذا يمثل العدد 128 في الدالة؟
c. ما النسبة المئوية للفرق المستبعدة بعد كل جولة؟ وضح إجابتك.
d. مثل الدالة بيانيًا. ما المجال والمدى المناسبان للدالة؟ وضح إجابتك.

27. **ابن الحجج الرياضية** تمثل الدالة المبيّنة في التمثيل البياني عدد الأسود في إحدى المناطق بعد x سنة، حيث معدل الاضمحلال هو 20%، ويمكن نمذجة عدد حيوانات الحمار الوحشي في نفس المنطقة بعد x سنة باستعمال الدالة $f(x) = 300(0.95)^x$. يدعي ممثل إحدى مجموعات حماية البيئة أن عدد الأسود سيصبح أقل من عدد حيوانات الحمار الوحشي بعد سنتين. هل هو على صواب؟ برّر إجابتك.

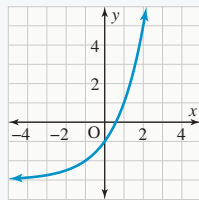


تدرب على اختبار

28. الدالة الأسية $g(x) = 3^{x-1} + 6$ هي تحويل للدالة $f(x) = 3^x$. هل تصف كل جملة في الجدول التالي بدقة المقارنة بين التمثيل البياني للدالة g والتمثيل البياني للدالة f ؟ أجب بنعم أو كلا.

نعم	كلا
☒	☐
☐	☒
☒	☐
☐	☒
☒	☐
☐	☒
☒	☐

29. **اختبار SAT/ACT** أي الدوال المعرّفة التالية يمكن أن تكون الدالة الممثلة بيانيًا أدناه؟



- A $f(x) = 4(2)^{x-1} + 3$ B $f(x) = 4(2)^{x-1} - 3$
C $f(x) = 4(2)^{x+1} + 3$ D $f(x) = 4(2)^{x+1} - 3$

30. **مهمة أدائية** إذا كان نصف عمر النظير المشع لعنصر الأوزميوم الكيميائي Os-182 هو 21.5 ساعة، أي أن كل 100 جرام من عينة Os-182 سيبقى منها بعد مرور 21.5 ساعة 50 جرامًا فقط.

الجزء A اكتب دالة اضمحلال أسّي لنمذجة كمية Os-182 المتبقية في عينة بمرور الزمن. استعمل A_0 لتمثيل القيمة الابتدائية و A لتمثيل الكمية بعد مرور t ساعة.

الجزء B استعمل النموذج السابق لتوقع المدة التي تستغرقها عينة تحتوي على 500 g من Os-182 لتضمحل بحيث تحتوي على 5 g فقط من Os-182.

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم. تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس. كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليقًا متميزًا يستفيد منه الطلاب، كلٌّ بحسب مستواه. سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

ملاحظات

This image shows a full page of blank, lined paper. It features approximately 20 evenly spaced horizontal blue lines across its entire width. The paper is otherwise completely empty, with no margins, text, or other markings.

الدرس 1-2 النماذج الأسية

نظرة عامة على الدرس

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على:

- ✓ إعادة كتابة الدوال الأسية لتحديد المعدلات.
- ✓ تفسير العوامل المتغيرة في دالة أسية في سياق مسائل الفائدة المركبة.
- ✓ إنشاء نماذج أسية إذا علمت نقطتان أو باستعمال الانحدار.

الفهم الأساس

النماذج الأسية مفيدة لتمثيل المواقف التي يزداد فيها المعدل بنفس النسبة المئوية لكل فترة زمنية ولتفسير المسائل التي تتضمن فائدة مركبة. يمكن استعمال الانحدار الأسّي لإنشاء نماذج أسية لسياقات من واقع الحياة.

سابقاً في هذه الوحدة، تمكّن الطلاب من:

- تفسير الخصائص الأساسية للدوال الأسية.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من:

- تحليل مواقف من واقع الحياة باستعمال نماذج أسية.

لاحقاً في هذه الوحدة، سيتمكّن الطلاب من:

- ربط فهمهم للدوال الأسية بالدوال اللوغاريتمية عند إيجاد وتبسيط اللوغاريتمات الاعتيادية والطبيعية.

يركز هذا الدرس على الدمج بين المهارة الإجرائية والطلاقة والتطبيق.

- يتدرب الطلاب على تطبيق صيغة الفائدة المركبة وصيغة الفائدة المركبة المتصلة.
- يطبق الطلاب النماذج الأسية لحل المسائل التي تتضمن فائدة مركبة.

بناء المصطلحات

العربية | الإنجليزية

مراجعة المصطلحات

- فائدة مركبة | *compound interest*
- دالة أسية | *exponential function*

المصطلحات الجديدة

- صيغة الفائدة المركبة | *compound interest formula*
- الأساس الطبيعي e | *natural base e*
- صيغة الفائدة المركبة المتصلة | *continuously compounded interest formula*

نشاط المصطلحات

وَصِّح للطلاب لماذا يمكن استعمال نموذج أسّي لتمثيل الفائدة المركبة من خلال مثال بسيط. اطلب من الطلاب كتابة تعريفات المصطلحات الجديدة بعباراتهم الخاصة من دون استعمال كتبهم.

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير ممارسات الرياضيات

فكر في المسائل وثابر في حلها

يجد الطلاب نقاطاً ينطلقون منها لحل المسائل التي تتضمن علاقات أسية من خلال تحديد المعلومات والأهداف المعطاة، ويكتبن معادلات النمو أو الاضمحلال الأسّي في إطار يحدده سياق المسألة من أجل إيجاد حلول لها.

نموذج

يستعمل الطلاب الدوال لوصف كيفية تغيّر قيمة قطعة من الأرض بمرور الزمن، ولاستنتاج متى يكون وعاء الحساء بارداً بما يكفي لتناوله.

استكشف وبتّر منطقياً

محور تركيز التدريس أعد تنشيط معرفة الطلاب بالنمو الأسّي من خلال استكشاف تكاثر البكتيريا. يجب أن يبحث الطلاب عن نمط عندما يكون ناتج ضرب معدل النمو اليومي في عدد الأيام ثابتًا.

قبل البدء بالحلّ طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التفكير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: هل تتوقع أن يكون العدد النهائي للبكتيريا هو نفسه لكل مزرعة؟ وضح إجابتك.
[كلا؛ على الرغم من أن ناتج ضرب معدل النمو اليومي في عدد الأيام ثابت، إلا أن العدد النهائي للبكتيريا سيكون مختلفًا لأن معدل النمو يتضاعف.]

أثناء الحلّ مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البناء في تعلم الرياضيات

س: كيف يكون معدل النمو الذي يساوي $\frac{1}{2}\%$ والزمن الذي مقداره 16 يومًا ملائمًا للجدول؟
[إنهما يكملان النمط المتكرر في الجدول. فمعدل النمو ينخفض إلى النصف في كل مزرعة، وعدد الأيام يتضاعف، وناتج ضرب هاتين القيمتين يساوي 0.08]

للطلاب سريعى الإنجاز

س: كيف ستتغير النتيجة إذا كان المعدل معدل اضمحلال وليس معدل نمو؟
[عندما يكون المعدل معدل نمو، فإن معدلًا أقل على مدى فترة زمنية أطول يؤدي إلى مزيد من التزايد في نمو البكتيريا. لكن عندما يكون المعدل معدل اضمحلال، فإن معدلًا أقل على مدى فترة زمنية أطول يؤدي إلى موت عدد أقل من البكتيريا.]

بعد إنجاز الحلّ طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

ناقش الطلاب في كيفية تغير عدد البكتيريا بمرور الزمن.

س: هل تطابق نتيجة النشاط توقعاتك قبل بدء النشاط؟
[نموذج إجابة: كلا؛ اعتقدت أن عدد البكتيريا سيكون ثابتًا لأن ناتج ضرب معدل النمو في عدد الأيام ثابت.]

عرّف النماذج الأسّية للطلاب بأنها نماذج يمكن استعمالها لحساب الفائدة المركبة.

استعمل مع استكشف وبتّر منطقياً

عادات التفكير

عمّم كيف ستتغير أعداد البكتيريا النهائية إذا تم مضاعفة العدد الابتدائي لكل مزرعة؟ وضح إجابتك.

[ستضاعف أعداد البكتيريا النهائية أيضًا لأن العملية الأسّية تنطبق فقط على معدل النمو وليس على العدد الابتدائي للبكتيريا.]

كتاب الطالب، صفحة 9

1-2

النماذج الأسّية
Exponential Models

استطيع... كتابة نماذج أسّية بطرائق مختلفة لحلّ المسائل.

- المصطلحات
- صيغة الفائدة المركبة
- compound interest formula
- الأساس الطبيعي e
- natural base e
- صيغة الفائدة المركبة المتصلة
- continuously compounded interest formula

الزرعة	العدد الابتدائي للبكتيريا	معدل النمو اليومي	الزمن (بالأيام)	العدد النهائي للبكتيريا
A	10 000	8%	1	
B	10 000	4%	2	
C	10 000	2%	4	
D	10 000	1%	8	

A. ما العلاقة بين معدل النمو اليومي والزمن بالأيام في كل مزرعة؟

B. **ابحث عن العلاقات** هل تتوقع أن يكون عدد خلايا البكتيريا في مزرعة معدل النمو اليومي فيها $\frac{1}{2}\%$ خلال زمن مقداره 16 يومًا أكبر أم أصغر من عدد خلايا البكتيريا في المزارع الأخرى في الجدول؟ وضح إجابتك.

السؤال الأساسي كيف يمكنك تطوير نماذج أسّية لتمثيل المواقف وتفسيرها؟

مثال 1 إعادة كتابة دالة أسّية لتحديد معدل

نموذج من أعمال الطلاب

الزرعة	العدد الابتدائي للبكتيريا	معدل النمو اليومي	الزمن (بالأيام)	العدد النهائي للبكتيريا
A	10 000	8%	1	10 800
B	10 000	4%	2	10 816
C	10 000	2%	4	10 824
D	10 000	1%	8	10 828

A. ناتج ضرب كل معدل نمو في الزمن المناظر له يساوي 0.08

B. أتوقع أن يكون عدد خلايا البكتيريا في المزرعة أكبر من عددها في المزارع الأخرى في الجدول لأننا نلاحظ، عند النظر إلى المزارع الأخرى، أن عدد البكتيريا أكثر في المزارع التي عدد الأيام المعطاة لها أكثر، على الرغم من أن معدل النمو اليومي للبكتيريا فيها أصغر.

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلم مركز

وضّح للطلاب أن بالإمكان استعمال النماذج الأسية لتمثيل مواقف من واقع الحياة مثل الفائدة المركبة والنمو السكاني.

ساعد الطلاب على اكتشاف كيف أن معرفة النموذج الأسّي $y = ab^x$ والقيمة الابتدائية a ومعامل النمو الأسّي b تكون مفيدة عند العمل على الأمثلة الواردة في هذا الدرس.

مثال 1

إعادة كتابة دالة أسية لتحديد معدل

دعم عملية التحدي البناء في تعلم الرياضيات

س: كيف تقارن بين معدل النمو الشهري ومعدل النمو السنوي؟
[المعدل الشهري هو $\frac{1}{12}$ من المعدل السنوي تقريبًا.]

حاول أن تحل! الإجابات

1. 0.447%

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: ما وجه الاختلاف بين مسألة "حاول أن تحل" ومسألة المثال 1، وكيف يؤثر هذا الاختلاف في الخطوات المستعملة للإجابة عن السؤال؟

[المطلوب في مسألة "حاول أن تحل" هو إيجاد المعدل ربع السنوي بدلاً من المعدل الشهري. لذا بدلاً من ضرب الأس في $\frac{12}{1}$ ، اضربه في $\frac{4}{1}$]

استعمل مع المثال 1

عادات التفكير

عقّم لماذا لا يمكن قسمة معدل النمو السنوي على 4 للحصول على معدل النمو ربع السنوي؟

[معدل النمو السنوي هو $(1 + r)$ ، وعند قسمة هذا المقدار على 4 نحصل على $\frac{1+r}{4}$ بدلاً من $(1 + \frac{r}{4})$]

السؤال الأساس

مثال 1

إعادة كتابة دالة أسية لتحديد معدل
في سنة 2015، بلغ عدد سكان بلدة صغيرة 8 000 نسمة. يتزايد عدد السكان بمعدل 2.5% في السنة. اكتب دالة نمو أسّي لإيجاد معدل النمو الشهري لعدد السكان.

اكتب دالة نمو أسّي باستعمال المعدل السنوي لنمذجة عدد سكان البلدة، y ، في سنة t بعد 2015

عدد السكان الابتدائي $y = 8\,000(1 + 0.025)^t$
معدل النمو السنوي $y = 8\,000(1.025)^t$
عدد السنوات بعد 2015

لتحديد معدل النمو الشهري، يجب أن يكون الأس هو عدد الأشهر في t سنة، أو $12t$

اضرب الأس في $\frac{12}{12}$ بحيث يمثل $12t$ عدد الأشهر.
 $y = 8\,000(1.025)^{\frac{12t}{12}}$
 $y = 8\,000(1.025^{12})^{12t}$
بساعد تطبيق قاعدة قوة القوة على تحديد معدل النمو الشهري من خلال الحصول على مقدار يتضمن الأس $12t$

إذن، معدل النمو الشهري لعدد سكان البلدة يساوي $1.00206 - 1 = 0.00206$ ، أي 0.206% تقريباً في الشهر.
يتزايد عدد السكان بمعدل 0.206% تقريباً في الشهر.

حاول أن تحل! 1. يتزايد عدد سكان بلدة صغيرة بمعدل 1.8% سنوياً. ما معدل التزايد ربع السنوي لعدد السكان؟

خطأ شائع

لا يعطي ناتج قسمة معدل النمو السنوي على 12 معدل النمو الشهري الدقيق. يبيّن هذا المثال كيفية إيجاد مقدار يمثل معدل النمو الشهري الدقيق: $1.025^{\frac{1}{12}} - 1$

مثال 2 فهم الفائدة المركبة

طرح أسئلة هادفة

س: لماذا استعملنا 0.04 في صيغة الفائدة المركبة بدلاً من 4؟
[معدل الفائدة هو 4%، الرمز "%" يعني "جزء من مئة" و $0.04 = 4 \div 100$]

حاول أن تحلّ! الإجابات

- QR 4 048.06
- QR 60 031.45

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: عندما تعلن المصارف عن فائدة معدلها 3% تُستحق كل ربع سنة، فهل تدفع فعلاً 3% كل ربع سنة؟ وضح إجابتك.
[كلا؛ 3% تمثّل معدل الفائدة السنوية، لذا فإن المصارف تدفع $\frac{1}{4}$ معدل الفائدة السنوية كل ربع سنة.]

المفهوم الفائدة المركبة

عند دفع الفائدة شهرياً، تصبح الفائدة المستحقة بعد الشهر الأول جزءاً من المبلغ الأصلي الجديد للشهر الثاني، وهكذا. في كل فترة تُضاف فائدة على الفائدة المستحقة سابقاً. هذه هي الفائدة المركبة.

صيغة الفائدة المركبة هي نموذج آسي يُستعمل لحساب قيمة المبلغ المستثمر في حساب مصرفي عندما تكون الفائدة مركبة.

$P =$ المبلغ الأصلي

$r =$ معدل الفائدة السنوية في الصورة العشرية

$n =$ عدد فترات استحقاق الفائدة المركبة في السنة

$A =$ جملة المبلغ بعد t سنة

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nt}$$

فهم الفائدة المركبة

مثال 2

تريد ثريا استثمار مبلغ QR 5 000 في حساب مصرفي بفائدة سنوية معدلها 4%، كم سيصبح رصيد ثريا في حسابها المصرفي بعد 3 سنوات إذا كانت الفائدة مركبة سنوية، أو نصف سنوية، أو ربع سنوية، أو شهرية؟

استعمل صيغة الفائدة المركبة لإيجاد رصيد ثريا في حسابها المصرفي بعد 3 سنوات.

الرصيد بعد 3 سنوات (QR)	صيغة الفائدة المركبة	سنوات
5 624.32	$A = 5\,000 \left(1 + \frac{0.04}{1} \right)^{3(1)}$	سنوية
5 630.81	$A = 5\,000 \left(1 + \frac{0.04}{2} \right)^{3(2)}$	نصف سنوية
5 634.13	$A = 5\,000 \left(1 + \frac{0.04}{4} \right)^{3(4)}$	ربع سنوية
5 636.36	$A = 5\,000 \left(1 + \frac{0.04}{12} \right)^{3(12)}$	شهرية

كلما ازدادت فترات استحقاق الفائدة، تزداد جملة المبلغ أيضاً في الحساب المصرفي.

حاول أن تحلّ! 2. يريد جاسم استثمار مبلغ QR 3 000 في حساب مصرفي بفائدة سنوية مركبة معدلها 3%، تُستحق شهرياً.

a. ما قيمة رصيد جاسم بعد 10 سنوات؟

b. ما قيمة رصيد جاسم بعد 100 سنة؟

بئر منطقياً

كلما ازداد عدد مرات إضافة الفائدة إلى الرصيد، حققت تلك الفائدة مزيداً من الفائدة في مدة زمنية أقصر. هذا التبرير المنطقي يدعم الاتجاه المبين في الجدول.

تعزيز المهارات اللغوية

استعمل مع المثال 2

التحدث مستوى 3 اطلب من الطلاب العمل في مجموعات ثنائية لمناقشة العلاقة بين الفترة السنوية والفترة نصف السنوية. ذكّر الطلاب أنه عندما تكون الفترة سنوية، فإن $n = 1$.

س: ما قيمة n عندما تكون الفترة نصف سنوية؟
[2؛ إذن عندما تكون الفترة نصف سنوية تستحق الفائدة كل نصف سنة أو مرتين في السنة.]

القراءة مستوى 2 ساعد الطلاب على استيعاب وفهم النص أثناء قراءته. استخراج الكلمات التي تنتهي بياء النسبية من المثال، مثل: سنوية، شهرية، ربع سنوية. اكتب هذه الكلمات على السبورة، واكتب تحت كل كلمة منها جملة تتضمنها.

س: تنتهي جميع الكلمات الخاصة بالفترات الزمنية المتعلقة باستحقاق الفائدة بياء النسبية (ي أو ية أو يّا). كيف تغير هذه الأداة اللغوية معاني هذه الكلمات؟
[إنها تغير المعنى من وحدة زمنية مفردة إلى حدوث متكرر.]

س: ما الأشياء التي قد تفعلها أو قد تحدث سنويًا؟ كل ستة أشهر؟ كل ربع سنة؟ شهريًا؟ أسبوعيًا؟ يوميًا؟
[قد تتنوع الإجابات.]

الكتابة مستوى 1 اعرض للطلاب ريالاً وأربع قطع نقدية معدنية من فئة 25 درهماً. ارسم مخططاً لتوضيح العلاقة بين الريال والقطع النقدية، ثم اشرح معنى أن الفائدة تُستحق كل ربع سنة.

س: ما فئة العملة التي يمكن استعمالها لشرح الفائدة نصف السنوية؟
[50 درهماً]

س: اكتب وصفاً لما يحدث عندما تستحق الفائدة شهرياً باستعمال جمل كاملة.
[تحقق من عمل الطلاب.]

مثال 3 فهم الفائدة المركبة المتصلة

طرح أسئلة هادفة

س: هل قيم $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ دقيقة؟

[كلا؛ القيم مقربة إلى آخر منزلة تظهر على الحاسبة.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

3. ستزداد؛ تزداد قيمة الرصيد بتزايد قيمة n .

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: هل من الضروري إيجاد قيمة الرصيد حتى تسع منازل عشرية؟

[كلا، قيمة الرصيد معطاة بالريال، والتي تحسب فقط لأقرب جزء من مئة.

لذا عند تفسير معنى هذه القيمة في سياق من واقع الحياة، فسواء

أكان عدد فترات الفائدة المركبة 1 000 أو 100 000 مرة، تبقى قيمة

الرصيد QR 2.72 تقريبًا.]

مثال 4 إيجاد الفائدة المركبة المتصلة

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: أي من رموز صيغة الفائدة المركبة المتصلة يشير إلى مفهوم الاتصال؟

[e ؛ ينتج مفهوم الاتصال عن اعتبار عدد الفترات n في المقدار $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ عددًا كبيرًا

جداً يقترب من موجب مالانهاية. ويتمثل ذلك في الصيغة بالعدد غير النسبي e الذي هو

القيمة التي يقترب منها المقدار أعلاه عندما يقترب n من موجب مالانهاية.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

4. a. QR 254 885.32

b. QR 519 732.23

استعمل مع المثال 4

عادات التفكير

عمّم ما الذي يحقق أكبر عائد على الاستثمار: الفائدة التي تُستحق كل ربع سنة، أم الفائدة التي تُستحق كل ساعة، أم الفائدة المتصلة؟ وضح إجابتك.

[الفائدة المتصلة؛ e هو أساس أكبر من $\left(1 + \frac{r}{4}\right)$ ومن $\left(1 + \frac{r}{8760}\right)$.]

الاستيعاب المفاهيمي

مثال 3

فهم الفائدة المركبة المتصلة

افترض أنه تم استثمار QR 1 في حساب مصرفي بفائدة سنوية معدلها 100% لمدة سنة واحدة. تعطي المعادلة $A = 1 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ جملة المبلغ بعد سنة على الإيداع إذا كان عدد فترات الفائدة المركبة n . أوجد قيمة الرصيد لعدد الفترات المعطاة في الجدول.

عدد الفترات n	قيمة $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$
10	$\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = 2.59374246$
100	$\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2.704813829$
1 000	$\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2.716923932$
10 000	$\left(1 + \frac{1}{10000}\right)^{10000} = 2.718145927$
100 000	$\left(1 + \frac{1}{100000}\right)^{100000} = 2.718268237$

لاحظ أنه كلما إزداد العدد n ، اقتربت قيمة جملة المبلغ من 2.718، هذا العدد المتميز نسمي "الأساس الطبيعي". يعرّف **الأساس الطبيعي** e بأنه القيمة التي يقترب منها المقدار $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ عندما $x \rightarrow \infty$.

العدد e هو عدد غير نسبي.

$e = 2.718281828459...$

العدد e هو الأساس في **صيغة الفائدة المركبة المتصلة**.

$P =$ المبلغ الأصلي

$e =$ الأساس الطبيعي

$r =$ معدل الفائدة السنوية في الصورة العشرية

$A =$ جملة المبلغ بعد مرور t سنة

$$A = Pe^{rt}$$

حاول أن تحلّ! 3. إذا أكملت الجدول باستعمال $n = 1\,000\,000$ ، هل ستزداد قيمة الرصيد أم تقل؟ كيف عرفت ذلك؟

مثال 4

إيجاد الفائدة المركبة المتصلة



تريد ريم استثمار مبلغ QR 12 600 في حساب مصرفي بفائدة سنوية مركبة متصلة معدلها 3.2%، أوجد جملة المبلغ في حساب ريم المصرفي بعد مرور 12 سنة. قرب الإجابة إلى أقرب ريال.

نستعمل صيغة الفائدة المركبة المتصلة باستعمال القيم:

$$P = 12\,600, r = 0.032, t = 12$$

$$A = Pe^{rt}$$

$$= 12\,600e^{0.032(12)}$$

$$= 12\,600e^{0.384}$$

$$\approx 18\,498.63$$

جملة المبلغ في الحساب بعد مرور 12 سنة، مقربة إلى أقرب ريال، هي QR 18 499.

حاول أن تحلّ! 4. استثمر منصور QR 125 000 في حساب مصرفي بفائدة سنوية مركبة متصلة معدلها 4.75 %

هـ. أوجد جملة المبلغ في الحساب بعد 15 سنة.

ب. أوجد جملة المبلغ في الحساب بعد 30 سنة.

خطا شائع

عندما تجد قيمة $e^{0.032(12)}$ ،

تأكد من أن تنيشط 0.032(12)

إلى 0.384 أولاً، أو استعمل

الأفواس للتأكد من رفع e

إلى قوة ناتج الضرب بأكمله، وليس

إلى العامل الأول فقط.

لحساب $e^{0.384}$ ، نستعمل

المفتاح e^x في الحاسبة.

مثال 5 استعمال نقطتين لإيجاد نموذج أسي

دعم عملية التحدي البناء في تعلم الرياضيات

س: لماذا عوّضنا 7 عن x ؟

[لأن الفارق بين عامي 2009 و 2016 هو 7 سنوات]

س: كيف يمكنك إيجاد معامل النمو إذا تضمنت البيانات قيمتين للمتغير x الفرق بينهما 2؟

[اقسم قيمة y الثانية على قيمة y الأولى، ثم خذ جذر ناتج القسمة فتحصل على معامل النمو.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

$$5. y = 19\,000(1.13)^x$$

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: وفقًا للنموذج، قيمة قطعة الأرض سنة 1980 كان يجب أن تكون QR 743 200.

هل من المرجح أن تساوي قيمة قطعة الأرض هذا المبلغ بالفعل؟ وضح إجابتك.

[كلا؛ قد تكون النماذج الأسية دقيقة في المجالات المقيدة فقط. من غير المرجح أن تزداد قيمة الأرض أسياً على مدى 30 عامًا.]

خطأ شائع

حاول أن تحلّ! 5 قد يستعمل بعض الطلاب القيمة الأولى المعطاة كقيمة ابتدائية في النموذج الأسي. أسأل الطلاب عن القيمة الابتدائية في هذا السياق. أكد لهم أن عليهم استعمال معامل النمو وإحدى النقاط المعطاة لإيجاد القيمة الابتدائية.

مثال 5 استعمال نقطتين لإيجاد نموذج أسي

تعرّف دالة أن أعداد الرسائل الإلكترونية التي ترسلها تزداد بشكل أسي، وقد سجلت الرسائل الإلكترونية التي أرسلتها سنوياً ابتداءً من عام 2009، أوجد النموذج الأسي الذي يصف البيانات.



أكتب النموذج الأسي في الصورة $y = a \cdot b^x$ ، حيث y عدد الرسائل الإلكترونية و x عدد السنوات منذ 2009، استعمال البيانات أعلاه لإيجاد قيمة كل من a و b .

خطأ شائع

تذكّر أن معامل النمو $(1 + r)$ يختلف عن معدل النمو r . في هذا المثال، معامل النمو هو 1.4، بينما معدل النمو هو 0.4 أو 40%.

عندما تكون قيم x في البيانات متتالية، أي عدد سنوات متتالية، يكون معامل النمو b هو النسبة بين قيم y التابعة لها.

استعمل قيمة b وإحدى نقاط البيانات لإيجاد القيمة الابتدائية a .

أكتب معادلة نمو أسي

$$y = a \cdot b^x$$

عوض $b = 1.4$ ، $x = 7$ ، $y = 1\,400$

$$1\,400 = a(1.4)^7$$

خاصية القسمة في المعادلات

$$\frac{1\,400}{(1.4)^7} = a$$

بسط

$$133 \approx a$$

إذن، نمذج الدالة $y = 133(1.4)^x$ عدد الرسائل الإلكترونية التي أرسلتها دالة خلال x سنة بعد عام 2009

حاول أن تحلّ! 5. قتر متفن قيمة قطعة أرض خلال عدة سنوات ابتداءً من سنة 1950، كانت قيمة قطعة الأرض QR 31 000 سنة 1954، و QR 35 000 سنة 1955، استعمال هذه البيانات لكتابة نموذج أسي يصف قيمة قطعة الأرض.

16 الوحدة 1 الدوال الأسية واللوغاريتمية

س: ما معامل النمو لكل نموذج أسي.

[1. 1.5 2. 1.25 3. 1.3]

س: إذا عرفت معامل النمو، ما الذي يتبقى عليك فعله لكتابة دالة النمو الأسي؟

[تعويض معامل النمو وقيمة الإحداثيين x و y لإحدى النقاط في الدالة $y = a(b)^x$

ثم حل المعادلة لإيجاد قيمة a .]

س: استعمال معامل النمو الذي وجدته لكتابة النموذج الأسي المشتغل على النقطتين

(12, 20) و (13, 26).

$[y = 0.858(1.3)^x]$

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 5 يواجه بعض الطلاب صعوبة في إيجاد النموذج الأسي الملائم باستعمال نقطتين.

• دع الطلاب يتدربون على إيجاد معامل النمو لنموذج أسي باستعمال أزواج النقاط التالية.

1. (4, 8) و (5, 12)

2. (7, 32) و (8, 40)

3. (12, 20) و (13, 26)

مثال 6 استعمال الانحدار لإيجاد نموذج أسّي

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: لماذا لا يمكن أن تصبح درجة حرارة الحساء أقل من 68°F ؟
[لا يمكن أن تصبح الأجسام أكثر برودة من الهواء المحيط بها.]

س: ماذا يعني 0.9492 في السياق المعطى؟
[تتناقص درجة حرارة الحساء بمعدل 5% تقريباً في الدقيقة.]

س: هل يمكن استعمال نموذج لا يتضمن إضافة العدد 68 إلى الدالة الأسية؟
[نعم، طالما أن النتيجة تُفسر على أنها عدد الدرجات الأعلى من درجة حرارة الغرفة.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

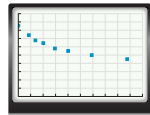
6. 88.37°F

استعمل مع المثال 6

عادات التفكير

عقّم كيف يمكن أن يساعد التمثيل البياني في تحديد ما إذا كان نموذج أسّي مناسباً أم لا لمجموعة من البيانات؟ وضح إجابتك.

[إذا كان التمثيل البياني للبيانات ينحني ويميل نحو خط تقارب أفقي، فقد يكون النموذج الأسّي مناسباً.]



B. أوجد نموذجاً أسياً للبيانات، ثم استعمل هذا النموذج لتحديد متى يجب أن تقدم فاطمة الحساء.

الخطوة 1 أدخل البيانات على شكل قوائم إلى الحاسبة البيانية. بما أن قيم درجات الحرارة تقترب من 68°F ، اطرح 68 من قيم درجات الحرارة.

L1	L2	L3	2
2	117		
3.5	185		
5	94		
7.5	77		
10	70		
15	57		
20			
L1(8)=49			

لا تحسب معظم الحاسبات البيانية الانحدارات الأسية إلا عندما تقترب قيم البيانات من الصفر. يمكن طرح 68 من كل قيم البيانات حتى تقترب هذه القيم من الصفر، ويمكنك بعد ذلك التراجع عن هذا التعديل في الخطوة 3 أدناه.

الخطوة 2 استعمل الحاسبة البيانية لإيجاد معادلة الانحدار الأسّي. النموذج الأسّي الأكثر تطابقاً مع البيانات هو $y = 126.35(0.9492)^x$

X	Y1
42	82.142
43	82.024
44	80.742
45	80.094
46	79.48
47	78.897
48	78.343
X=45	

الخطوة 3 أرح هذه الدالة 68 وحدة إلى الأعلى.

النموذج الفُراخ هو

$$y = 126.35(0.9492)^x + 68$$

استعمل النموذج الفُراخ لإيجاد متى تصبح درجة حرارة الحساء 80°F

تصبح درجة حرارة الحساء 80°F بعد 45 دقيقة تقريباً.

إذن، يجب أن تقدم فاطمة الحساء بعد 45 دقيقة تقريباً من بداية تبريده.

حاول أن تحلّ! 6. وفقاً للنموذج الوارد في المثال 6، ما درجة الحرارة التقريبية بعد 35 دقيقة من بدء تبريد الحساء؟

نصيحة دراسية

قد تختلف خطوات تحديد نموذج انحدار أسّي للبيانات في حاسبتك البيانية قليلاً عن هذه، لكن الخطوات يجب أن تكون متشابهة جداً.

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 6 قدّم مجموعات البيانات الإضافية التالية لاستكشاف مزيد من النماذج الأسية من خلال الانحدار.

A. (4, 112), (6, 264), (7, 391), (10, 1048), (12, 1776)

B. (10, 95), (31, 159), (38, 189), (45, 225), (49, 248)

C. (1, 79), (7, 241), (15, 457), (19, 565), (25, 727)

س: ما هي أفضل مجموعة بيانات يمكن نمذجتها بدالة أسية؟ وضح إجابتك.

[B، باستعمال الحاسبة البيانية، قيمة معامل الارتباط r أقرب إلى 1 في مجموعة البيانات هذه مقارنة بمجموعات البيانات الأخرى.]

س: ما النموذج الأسّي الأنسب لمجموعة البيانات التي اخترتها؟

$$[y = 74.2(1.025)^x]$$

س: ما الموقف الذي يمكن أن تصفه البيانات والنموذج؟

[نموذج إجابة: اشترت عائلة منزلًا بمبلغ QR 74 200. بفضل التحسينات التي تدخلها العائلة على المنزل تزداد قيمته بمرور الزمن بمعدل 2.5% تقريباً كل سنة.]

ملخص المفهوم كتابة نماذج أسية

س: اكتب نموذجين لرصيد في حساب مصرفي قيمته الابتدائية QR 500، الأول بفائدة مركبة معدلها 4.5% تستحق شهريًا والثاني بفائدة متصلة معدلها 4.5%

$$[A = 500 \left(1 + \frac{0.045}{12}\right)^{12t}; A = 500e^{0.045t}]$$

س: كيف تؤثر قيمة n في قيمة A ؟
كلما ازدادت قيمة n ، تزداد قيمة A أيضًا.

عبر عن فهمك | طبق فهمك

خطأ شائع

التمرين 5 قد يحاول الطلاب إيجاد المعدل الشهري بقسمة المعدل السنوي على 12 وإيجاد المعدل ربع السنوي بقسمة المعدل السنوي على 4، أكد لهم أن، لإيجاد المعدل الشهري، عليهم إضافة 1 إلى المعدل السنوي ورفع المجموع إلى القوة $\frac{1}{12}$ ، ولإيجاد المعدل ربع السنوي عليهم إضافة 1 إلى المعدل السنوي ورفع المجموع إلى القوة $\frac{1}{4}$

الإجابات

- 1. نموذج إجابة: يمكن استعمال النماذج الأسية لتمثيل كيفية تغير الأرصدة في الحسابات المصرفية أثناء تزايدها.
- 2. اعتقد يوسف أن معدل الفائدة الشهرية، $0.05 = 0.004 = 0.4\%$ ، هي نفس معدل الفائدة السنوية الفائدة هي 0.4%
- 3. نموذج إجابة: يمكن نمذجة كلا نوعي الفائدة بدوال أسية. في دالة الفائدة المركبة المتصلة، الأساس دائمًا e ، بينما يتغير أساس دالة الفائدة المركبة.
- 4. يمثل a القيمة الابتدائية، ويمثل b معامل الاضمحلال الأسّي، ويمثل x الزمن، ويمثل y القيمة عند زمن معطى.

5. 0.25%; 0.74%

6. 0.45%; 1.3%

7. QR 2 323.23

8. QR 1 641.26

9. $y = 26.9(1.27)^x$

10. $y = 0.071(2.08)^x$

11. QR 8 069.41

ملخص المفهوم كتابة نماذج أسية

النموذج الأسّي العام	الفائدة المركبة	الفائدة المركبة المتصلة
$y = a \cdot b^x$	$A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$	$A = Pe^{rt}$
عدديًا إذا كانت تكلفة فائدة QR 250 وتزداد قيمتها بمعدل 2% سنويًا. $a =$ القيمة الابتدائية QR 250 $b =$ معامل النمو الأسّي 1.02 $x =$ عدد السنوات فإن $y = 250(1.02)^x$	استثمر سالم مبلغًا أصليًا مقداره QR 3 000 في حساب مصرفي بفائدة سنوية مركبة معدلها 5%، تستحق شهريًا، لمدة 4 سنوات. $P = 3\,000$ $r = 5\%$ $n = 12$ فترات استحقاق للفائدة في السنة. $t = 4$ سنوات $A = 3\,000 \left(1 + \frac{0.05}{12}\right)^{(12)(4)}$	استثمر فارس مبلغًا أصليًا مقداره QR 3 000 بفائدة مركبة متصلة معدلها 5% لمدة 4 سنوات. $P = 3\,000$ $r = 5\%$ $t = 4$ سنوات $A = 3\,000e^{(0.05)(4)}$

عبر عن فهمك

- السؤال الأساسي كيف يمكنك تطوير نماذج أسية لتمثيل المواقف وتفسيرها؟
- حلل الخطأ** يمثل النموذج الأسّي $y = 5\,000(1.05)^t$ جملة المبلغ في حساب يوسف المصرفي بعد مرور t سنة على استثماره مبلغًا أصليًا مقداره QR 5 000. يقول يوسف أن معدل الفائدة الشهرية في النموذج الأسّي هي 5%، بين خطأ يوسف ووضحه.
- المصطلحات** وضح أوجه الشبه والاختلاف بين الفائدة المركبة والفائدة المركبة المتصلة.
- تواصل بدقة** تستعمل سلمى الحاسبة لإيجاد نموذج انحدار أسّي. كيف يمكنك أن توضح لسلمى ما تمثله المتغيرات في النموذج $y = a \cdot b^x$ ؟

طبق فهمك

في التمرينين 5 و 6، تمذج الدالة الأسية معدل التزايد السنوي. أوجد المعدل الشهري والمعدل ربع السنوي للتزايد.

5. $f(t) = 2\,000(1.03)^t$

6. $f(t) = 500(1.055)^t$

في التمرينين 7 و 8، أوجد جملة المبلغ في الحساب المصرفي في نهاية الفترة الزمنية المعطاة.

7. فائدة مركبة شهرية، $P = \text{QR } 2\,000$ ، $r = 3\%$ ، $t = 5$ سنوات

8. فائدة مركبة متصلة، $P = \text{QR } 1\,500$ ، $r = 1.5\%$ ، $t = 6$ سنوات

في التمرينين 9 و 10، اكتب نموذجًا أسّيًا باستعمال النقاط المعطاة.

9. (3, 55) و (4, 70)

10. (7, 12) و (8, 25)

11. استثمر بدر QR 6 450 في حساب مصرفي بفائدة سنوية مركبة متصلة معدلها 2.8%، أوجد جملة المبلغ بعد 8 سنوات.

18 الوحدة 1 الدوال الأسية واللوغاريتمية

تدرّب وُحْل مسائل دليل المهام

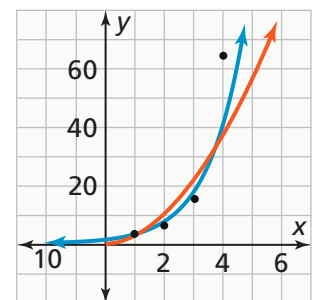
أساسي	متقدم
12-23, 25-33	12-15, 17-33

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	25, 28	2
2	16-19	1
	12	2
	33	3
4	20-21, 29, 31-32	2
	27	3
5	22-24	1
	13	3
6	26, 30	2
	14, 15	3

الإجابات

12. حسب أحمد الفائدة المركبة الشهرية بدلاً من الفائدة ربع السنوية. الإجابة الصحيحة: $A = QR\ 7\ 935.16$.
13. a. عوّض إحدى النقطتين في النموذج لإيجاد قيمة a :
 $y = 7.39e^x$
b. عوّض 8 في النموذج لإيجاد y :
 $y = 22\ 029$
14. $y = 2\ 954(1.08)^x$, $y = 3\ 001(1.078)^x$
لإيجاد النموذج الأسّي باستعمال نقطتي بيانات، أوجد معدل النمو بين نقطتي بيانات متتاليتين واستعمل معدل النمو هذا وإحدى النقطتين لإيجاد القيمة الابتدائية. لإيجاد النموذج باستعمال الحاسبة، أدخل البيانات وأوجد الانحدار الأسّي. QR 9 259.
15. النموذج الأسّي: $y = 1.414(2.462)^x$
نموذج القوة: $y = 3.125(x)^{1.837}$
النموذج الأسّي: 314.9؛ نموذج القوة: 84.1؛
النموذج الأسّي يمثل البيانات بشكل أفضل.



تدرّب وُحْل مسائل

عزّز فهمك

12. **حلل الخطأ** لنفترض أن أحمد استثمر QR 6 500 في حساب مصرفي بفائدة مركبة ربع سنوية معدلها 2% لمدة 10 سنوات. بين الخطأ الذي وقع فيه أحمد عند إيجاد جملة المبلغ بعد 10 سنوات، وضح.

$$A = 6\ 500 \left(1 + \frac{0.02}{12}\right)^{12(10)}$$

$$A = 7937.80$$

13. **تواصل بدقة** تقع النقطتان (2, 54.61) و (4, 403.48) على التمثيل البياني لنموذج أسّي في الصورة $y = a \cdot e^x$.

- a. وضح كيف يُكتب النموذج الأسّي، ثم اكتبه.
b. كيف يمكنك استعمال هذا النموذج الأسّي لإيجاد قيمة y عندما $x = 8$ ؟

14. **نمذج** استعمل النقطتين الواردتين في الجدول أدناه للسنتين 7 و 8 لإيجاد نموذج أسّي. ثم استعمل الحاسبة لإيجاد نموذج أسّي للبيانات. وضح كيف وجدت كلاً من النموذجين، ثم توقّع جملة المبلغ بعد مرور 15 سنة.

المبلغ (QR)	الزمن (بالسنوات)
3 225	1
3 500	2
3 754	3
4 042	4
4 368	5
4 702	6
5 063	7
5 456	8

15. **مهارات التفكير العليا** نموذج القوة هو نوع من الدوال في الصورة $y = a \cdot x^b$. استعمل النقطتين (1, 4) و (2, 8) و (3, 16) و (4, 64) والحاسبة لإيجاد نموذج أسّي ونموذج قوة لهذه البيانات، ثم استعمل كل نموذج لتوقع قيمة y عندما $x = 6$. مثل النقطتين والنموذجين بيانياً في نفس المستوى الإحداثي. ماذا تلاحظ؟

تدرّب

في التمارين 16-21، استعمل المعطيات أدناه لإيجاد جملة المبلغ في الحساب المصرفي. انظر المثالين 2 و 4

16. $P = QR\ 800$, $r = 6\%$, سنوات $t = 9$, فائدة مركبة ربع سنوية.

17. $P = QR\ 3\ 750$, $r = 3.5\%$, سنة $t = 20$, فائدة مركبة شهرية.

18. $P = QR\ 2\ 400$, $r = 5.25\%$, سنة $t = 12$, فائدة مركبة نصف سنوية.

19. $P = QR\ 1\ 500$, $r = 4.5\%$, سنوات $t = 3$, فائدة مركبة يومية.

20. $P = QR\ 1\ 000$, $r = 2.8\%$, سنوات $t = 5$, فائدة مركبة متصلة.

21. $P = QR\ 16\ 000$, $r = 4\%$, سنة $t = 25$, فائدة مركبة متصلة.

في التمارين 22-24، اكتب نموذجاً أسّيّاً لكل زوج من النقاط الآتية. انظر المثال 5

22. (9, 140) و (10, 250)

23. (6, 85) و (7, 92)

24. (10, 43) و (11, 67)

25. في عام 2012، كان عدد سكان بلدة صغيرة 3 560 نسمة. إذا كان عدد سكان هذه البلدة يتناقص بمعدل 1.7% كل سنة، كيف يمكنك إعادة كتابة دالة اضمحلال أسّي لإيجاد معدل الاضمحلال ربع السنوي؟ انظر المثال 1

الزمن (بالدقائق)	درجة الحرارة (°F)
5	310
8	264
10	238
15	202
20	186
25	175

26. أخرجت هند فطيرة بيتزا من الفرن لتبرد تدريجياً إلى أن تصل درجة حرارتها إلى درجة حرارة الغرفة (أي 68°F). تريد هند تقديم فطيرة البيتزا لأفراد أسرتها عندما تصل درجة حرارتها إلى 150°F، إذا أخرجت هند فطيرة البيتزا من الفرن عند الساعة الخامسة مساءً، متى يمكنها تقديمها؟ انظر المثال 6

الدرس 1-2 النماذج الأسية 19

25. اضرب الأس في $\frac{4}{4}$ لأن عدد السكان يتناقص بمعدل اضمحلال ربع سنوي.
26. بعد 28 دقيقة تقريباً.

16. 1 367.31

17. 7 543.88

18. 4 469.79

19. 1 716.79

20. 1 150.27

21. 43 492.51

22. $y = 0.758(1.786)^x$

23. $y = 53.0(1.082)^x$

24. $y = 0.510(1.558)^x$

الإجابات

27. منيرة؛ لأن الفائدة المركبة المتصلة تتزايد بوتيرة أسرع.

28. $y = 80,000(1.056)^t$ ؛ 0.0149% ؛ اضرب الأس في $\frac{365}{365}$ لكي يتزايد عدد الزيارات بمعدل يومي، ثم احسب $(1.056)^{\frac{1}{365}}$ لإيجاد المعدل اليومي.

29. QR 4 905.04; QR 1 405.04

30. $y = 20.361(0.743)^x$; $1.221 \times 10^{-22} g$

33. الجزء A QR 455.38

الجزء B QR 541.78

الجزء C كل شهر من السنة الثانية، تواصل دفع الفائدة على فائدة أكبر.

تدرب و حل مسائل

طبق

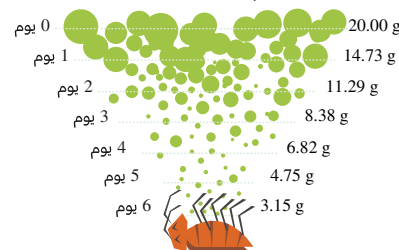
27. **بزر منطقيًا** استثمر حسن QR 8 000 في حساب مصرفي بفائدة مركبة ربع سنوية معدلها 1.25% لمدة 20 سنة. وفي نفس التاريخ استثمرت منيرة مبلغ QR 8 000 في حساب مصرفي بفائدة مركبة متصلة سنوية معدلها 1.25% لمدة 20 سنة. من منهما تتوقع أن يكون رصيده أكبر بعد 20 سنة؟ وضح إجابتك.



28. **فكر وثابر في الحل** لاحظ أحد المدوّنين أن عدد الزيارات لموقعه الإلكتروني يتزايد بمعدل 5.6% سنويًا، وأن موقعه الإلكتروني حصل على 80 000 زيارة هذه السنة. اكتب نموذجًا أسّيًا لتمثيل هذا الموقف. ما النسبة المئوية للتزايد اليومي في عدد الزيارات. وضح كيف وجدت المعدل اليومي للزيارات.

29. **استعمل البنية** استثمر جمال QR 3500 في حساب مصرفي بفائدة مركبة متصلة معدلها 2.25% ، ابتداءً من عام 2010، كم ستبلغ جملة المبلغ عام 2025؟ كم ستبلغ قيمة الفائدة بحلول عام 2025؟

30. **نمذج** يجري أحد العلماء تجربة على نوع من المبيدات الحشرية. استعمل الحاسبة لإيجاد نموذج أسّي للبيانات الواردة في الجدول أدناه. ثم استعمل النموذج لإيجاد الكمية المتبقية من المبيد بعد 180 يوم.



20 الوحدة 1 الدوال الأسية واللوغاريتمية

تدرب على اختبار

31. يبين الجدول أدناه معلومات عن الحساب المصرفي لخمسة مستثمرين. في حال لم تحدث أي عملية سحب، أي من العبارات التالية صحيحة؟ اختر كل ما ينطبق.

فائدة مركبة	t (بالسنوات)	r	P	المستثمر
ربع سنوية	12	1.5%	4 000	محمود
شهرية	8	3%	2 500	طارق
سنوية	15	5%	7 200	إيمان
متصلة	6	4.5%	2 100	منصور
نصف سنوية	20	3.5%	3 800	خولة

Ⓐ بعد 12 سنة، سيببلغ رصيد محمود في حسابه المصرفي QR 4 788.33.

Ⓑ بعد 8 سنوات، سيببلغ رصيد طارق في حسابه المصرفي QR 3 177.17.

Ⓒ بعد 15 سنة، سيببلغ رصيد إيمان في حسابها المصرفي QR 15 218.67.

Ⓓ بعد 6 سنوات، سيببلغ رصيد منصور في حسابه المصرفي QR 2 750.93.

Ⓔ بعد 20 سنة، سيببلغ رصيد خولة في حسابها المصرفي QR 7 629.00.

32. **اختبار SAT/ACT** استثمر راشد مبلغًا من المال في حساب مصرفي بفائدة مركبة متصلة معدلها 3% ،

ما الزمن اللازم ليتضاعف رصيد راشد في حسابه المصرفي؟

Ⓐ سنتان تقريبًا Ⓑ 10 سنوات تقريبًا

Ⓒ 23 سنة تقريبًا Ⓓ 46 سنة تقريبًا

Ⓔ 67 سنة تقريبًا

33. **مهمة أدائية** تريد جميلة شراء جهاز لرياضة المشي

سعره QR 2 400، وسوف تستعمل بطاقتها الائتمانية في

عملية الشراء. يتقاضى المصرف على استعمال بطاقة الائتمان

فائدة شهرية مركبة معدلها 17.5% ، وليس مطلوبًا من جميلة

تحديد حد أدنى للدفعات الشهرية.

الجزء A أوجد قيمة الفائدة التي ستدفعها جميلة إذا انتظرت سنة كاملة قبل دفع كامل الرصيد.

الجزء B أوجد قيمة الفائدة الإضافية التي ستدفعها جميلة إذا انتظرت سنتين كاملتين قبل دفع كامل الرصيد.

الجزء C إذا كانت الإجابتان تمثلان الفائدة عن مدة

سنة واحدة، فلماذا الإجابة في الجزء B أكبر من الإجابة

في الجزء A؟

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم. تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس. كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليقًا متميزًا يستفيد منه الطلاب، كلٌّ بحسب مستواه. سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

ملاحظات

This image shows a full page of blank, lined paper. It features approximately 20 evenly spaced horizontal blue lines across its entire width. The lines are thin and consistent in color, set against a plain white background. There are no margins, text, or other markings present on the page.

الدرس 1-3 اللوغاريتمات

بناء المصطلحات

العربية | الإنجليزية

مراجعة المصطلحات

- دالة أسية | $exponential function$
- معكوس الدالة | $inverse function$

المصطلحات الجديدة

- لوغاريتم | $logarithm$
- دالة لوغاريتمية | $logarithmic function$
- لوغاريتم اعتيادي | $common logarithm$
- لوغاريتم طبيعي | $natural logarithm$

نشاط المصطلحات

نشط معرفة الطلاب السابقة عن معكوسات الدوال يجعلهم يجدون معكوسات دالتين أو ثلاث دوال خطية أو تربيعية، ثم ربط ذلك بالعلاقة بين الدوال الأسية واللوغاريتمية.

نظرة عامة على الدرس

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على:

- ✓ فهم العلاقة العكسية بين الأسس واللوغاريتمات.
- ✓ استعمال اللوغاريتمات لحل نماذج أسية.
- ✓ إيجاد قيم اللوغاريتمات باستعمال التكنولوجيا.

الفهم الأساس

الدالة اللوغاريتمية هي معكوس الدالة الأسية. يمكن إيجاد اللوغاريتمات عبر تحديد الأس الذي يجب رفع الأساس إليه بحيث يساوي نتيجة معطاة.

سابقاً في هذه الوحدة، تمكّن الطلاب من:

- تفسير الخصائص الأساسية للدوال الأسية.
- استعمال الدوال الأسية لنمذجة العلاقات.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من:

- فهم العلاقة بين الأسس واللوغاريتمات واستعمال هذه العلاقة لحل المسائل.
- إيجاد قيم اللوغاريتمات الاعتيادية والطبيعية وحل المعادلات التي تتضمن لوغاريتمات.
- لاحقاً في هذه الوحدة، سيتمكّن الطلاب من:
- إيجاد قيم المقادير اللوغاريتمية باستعمال خواص اللوغاريتمات.

يركز هذا الدرس على الدمج بين الاستيعاب المفاهيمي والمهارة الإجرائية والطلاقة.

- يتدرب الطلاب على إيجاد قيم اللوغاريتمات لفهم العلاقة العكسية بين الأسس واللوغاريتمات.

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير ممارسات الرياضيات

بزر منطقياً بطريقة تجريدية وكمية

يفهم الطلاب الكميات والعلاقات التي تربط بينها أثناء استكشافهم العلاقة العكسية بين اللوغاريتمات والأسس وعند إيجادهم قيم اللوغاريتمات الاعتيادية والطبيعية.

ابحث عن البنية واستعملها

يبحث الطلاب عن البنية العامة للأسس واللوغاريتمات وعن الأنماط فيها، ويطبقون القواعد الرياضية لإيجاد قيم اللوغاريتمات.

انقد و اشرح

محور تركيز التدريس يستعمل الطلاب معرفتهم بقوى العدد 10 لإيجاد طريقة لحل معادلة أسية.

قبل البدء بالحل طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزز التفكير المنطقي ومهارات حل المسائل

س: ماذا الذي تلاحظه بشأن العلاقة بين قوة الهزة الأرضية وارتفاع الموجة الزلزالية؟
[كلما ازدادت قيمة x بمقدار 1، ازدادت قيمة y بمقدار قوة واحدة للعدد 10]

أثناء الحل مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البناء في تعلم الرياضيات

س: ما وجه التشابه بين حلّي سالم وخالد؟

[قدّر كلا الطالبين قوة زلزال سعة موجته الزلزالية 5 500، وربما اعتقد كلاهما مبدئيًا أن قيمة x يجب أن تكون في المنتصف بين 3 و 4، غير أن سالم استعمل المعادلة للتحقق من إجابته وتحسينها.]

س: متى تكون طريقة حل كل من الطالبين ملائمة أكثر؟

[تستعمل طريقة خالد عندما يكون تقدير الإجابة مقبولًا. أما عندما يكون المطلوب إجابة أكثر دقة، فإن طريقة سالم هي الأفضل.]

للطلاب سريعى الإنجاز

س: استعمل الطريقة التي تفضّلها لإيجاد قوة هزة أرضية ارتفاع موجتها الزلزالية 400
[398] $\approx 10^{2.6}$ ، 316 $\approx 10^{2.5}$ ، 251 $\approx 10^{2.4}$ ؛ إذن، قوة هزة أرضية ارتفاع موجتها الزلزالية 400 هي 2.6 تقريبًا.]

بعد إنجاز الحل طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

يسر مناقشة صفية بالطلب من الطلاب أن يشاركوا أفكارهم عن كيفية إيجاد القيمة الدقيقة لقوة الهزة الأرضية المطلوبة.

س: كيف تحل المعادلة $y = 10x$ ؟

[عوض $y = 5500$ في المعادلة لإيجاد x .]

س: هل يمكن تطبيق الطريقة نفسها لحل هذه المعادلة؟ وضح إجابتك.

[كلا؛ لا يمكن حل المعادلة $y = 10^x$ بقسمة طرفيها على 10

لأن x أس وليس عاملاً.]

كتاب الطالب، صفحة 21

1-3 اللوغاريتمات Logarithms

أستطيع... إيجاد قيم اللوغاريتمات وتبسيطها

المصطلحات

- logarithm
- دالة لوغاريتمية
- logarithmic function
- لوغاريتم اعتيادي
- common logarithm
- لوغاريتم طبيعي
- natural logarithm

انقد و اشرح

نُحدث الزلازل موجات اهتزازية عبر الأرض. تربط المعادلة $y = 10^x$ بين ارتفاع موجة زلزالية، أو سعتها y ، بالميكرونيات وقوة الهزة الأرضية x ، التي يمكن أن تسببها.

استعمل خالد وسالم طريقتين مختلفتين لإيجاد قوة زلزال سعة موجته الزلزالية 5 500 ميكرون.

السعة y	القوة x
100	2
1 000	3
5 500	?
10 000	4

سالم

$y = 10^x$

$10^3 = 1\ 000$
 $10^4 = 10\ 000$
 $10^{3.5} \approx 3\ 162$
 $10^{3.7} \approx 5\ 012$
 $10^{3.8} \approx 6\ 310$
 $10^{3.74} \approx 5\ 500$

قوة الزلزال 3.74 تقريبًا.

خالد

يقع العدد 5 500 في المنتصف بين العددين 1 000 و 10 000

يقع العدد 3.5 في المنتصف بين العددين 3 و 4

قوة الزلزال 3.5 تقريبًا.

نموذج من أعمال الطلاب

A. عندما يكون ارتفاع الموجة الزلزالية 100 000 تكون قوة الزلزال 5

لأن $10^5 = 100\ 000$

B. تعطي طريقة خالد تقديرًا تقريبًا، لكنها لا تصلح إذا كنا بحاجة إلى إيجاد قيمة أكثر دقة. تعطي طريقة سالم تقديرًا أكثر دقة، على الرغم من أن طريقة "خمن وتحقق" ليست الطريقة الأكثر كفاءة.

C. القيمة الدقيقة لقوة الزلزال هي قيمة x عندما $10^x = 5\ 500$

استعمل مع انقد و اشرح

عادات التفكير

بزر منطقيًا استنتج خالد أنه بما أن العدد 5 500 يقع في المنتصف بين 1 000 و 10 000، فإن قيمة قوة الهزة الأرضية يجب أن تقع في المنتصف بين 3 و 4، ما الخطأ في تبرير خالد؟

[تتزايد الدوال الأسية أسّيًا، أي أنها لا تتزايد بمعدل ثابت. قيمة التزايد بين $10^{3.5}$ و 10^4 أكبر من قيمته بين 10^3 و $10^{3.5}$]

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلم مركز

ذكر الطلاب بأنهم تعرّفوا سابقاً إلى كيفية إيجاد بعض العمليات العكسية، لكنهم لم يتعلموا بعد كيفية إيجاد عكس العملية الأسية. سيدرس الطلاب اللوغاريتمات على أنها عكس العملية الأسية، ويستعملون هذه المعرفة لتفسير الصيغ التي تتضمن لوغاريتمات.

فهم اللوغاريتمات

مثال 1

وضع أهداف في الرياضيات لتعلم مركز

س: ما أوجه التشابه والاختلاف بين حل المعادلة $2^x = 8$ وحل المعادلة $2x = 8$ ؟
[التشابه: نستعمل في كلتا المعادلتين العمليات العكسية؛ الاختلاف: العملية العكسية المستعملة لحل $2x = 8$ هي القسمة والعملية العكسية المستعملة لحل $2^x = 8$ هي اللوغاريتم.]

س: يمكن حساب قيمة x في $2^x = 8$ من دون كتابة المعادلة في الصورة $\log_2 8 = x$. متى قد يكون من الضروري استعمال هذه الطريقة؟
[من الضروري أحياناً استعمال معكوس الدالة الأسية لحل المسائل الأكثر صعوبة.]

٨. ما شدة زلزال سعة موجته الاهتزازية 100 000 ميكرون؟ وضح كيف عرفت ذلك.

٩. **ابن الحجج الرياضية** أنقذ عمل خالد وسالم. هل كلنا طرقتي الحل صحيحتان؟ هل يمكن تحسين أي من الطريقتين؟

١٠. صف كيف تكتب القيمة الفعلية لقوة الزلزال المطلوب إيجادها.

السؤال الأساس ما هي اللوغاريتمات وكيف يمكن إيجاد قيمها؟

الاستيعاب المفاهيمي

مثال 1 فهم اللوغاريتمات

حلّ المعادلتين $2^x = 8$ و $2x = 8$

يمكنك استعمال العمليات العكسية لحل المعادلة الأولى. $\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$ $x = 4$ القسمة عكس الضرب، لذا يمكنك قسمة طرفي المعادلة لإيجاد الحل.

العملية المستعملة في المعادلة $2^x = 8$ عملية أسية. لحلّ هذه المعادلة، يجب إجراء عكس العملية الأسية للإجابة عن السؤال: "إلى أي أس يجب رفع الأساس 2 للحصول على 8؟"

عكس رفع عدد إلى أس يُسمى "لوغاريتم".
لحلّ المعادلة $2^x = 8$ ، يمكنك كتابة $\log_2 8 = x$ هذه المعادلة تقرأ: "لوغاريتم العدد 8 للأساس 2"

حلّ المعادلة يعطي $\log_2 8 = 3$ لأن $2^3 = 8$

استعمل البنية

إن إنشاء الرمز $\log_2 x$ لتمثيل الأس الذي ترفع إليه 2 للحصول على x يشبه إنشاء رمز الجذر التربيعي $\sqrt{x}$ لتمثيل عدد يمكنك تربيعه للحصول على x .

ينج في الصفحة التالية

تابع المثال 1

حاول أن تحلّ! الإجابات

1. $x = \log_8 y$

مثال 2 التحويل بين الصورة الأسية والصورة اللوغاريتمية

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: لماذا قد تجد أحيانًا أن من الضروري كتابة معادلة أسية في الصورة اللوغاريتمية أو العكس؟

[تتضمن صورتان نفس المعلومات. قد تفضل إحدى الصورتين عندما يكون المطلوب إيجاد قيمة المتغير.]

س: ما المعادلة الأسية والمعادلة اللوغاريتمية اللتان تبيّنان العلاقة بين الأعداد 2, 5, 25؟
[الأساس هو 5، والأس هو 2، والنتيجة هي 25؛ لذا فإن المعادلة اللوغاريتمية هي $\log_5 25 = 2$ والمعادلة الأسية هي $5^2 = 25$]

حاول أن تحلّ! الإجابات

2. a. $\log_7 343 = 3$
b. $4^2 = 16$

خطأ شائع

حاول أن تحلّ! 2 قد يخطئ بعض الطلاب في تحديد مواقع الأعداد المختلفة عند تحويل المعادلة من صورة إلى أخرى.
على سبيل المثال، بدلًا من كتابة $2^5 = 32$ في الصورة $\log_2 32 = 5$ ، قد يكتب الطلاب الصورة اللوغاريتمية كما يلي: $\log_2 5 = 32$.
وضّح أجزاء المقدار المختلفة بتلوينها أو باستعمال مخطط.

استعمل مع المثالين 1 و 2

عادات التفكير

تواصل بدقة اكتب جملة تصف معنى المعادلة $\log_a b = c$

[b يساوي a مرفوعًا إلى القوة c.]

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 2 اطرح أمام الطلاب المتقدمين تحدّيًا إضافيًا بالطلب منهم إعادة كتابة معادلات أسية ولوغاريتمية تتضمن متغيرات.

س: اكتب المعادلة $y = x^5$ في الصورة اللوغاريتمية.
[$\log_x y = 5$]

س: اكتب المعادلة $\log_3(n + 2) = n - 5$ في الصورة الأسية.
[$3^{n-5} = n + 2$]

س: ما قيمة n التي تحقق المعادلة $\log_3(n + 2) = n - 5$ ؟
[7]

تابع المثال 1

يعرّف **لوغاريتم** x للأساس b كما يلي:

$$\log_b x = y \text{ إذا وفقط إذا } b^y = x, \text{ حيث } x > 0, b \neq 1, b > 0$$

الدالة اللوغاريتمية $y = \log_b x$ هي معكوس الدالة الأسية $b^x = y$.

حاول أن تحلّ! 1. أوجد الصورة اللوغاريتمية للمعادلة $8^2 = y$.

المفهوم الصورة الأسية والصورة اللوغاريتمية

نبيّن الصورة الأسية أن **الأساس** مرفوعًا إلى **أس** يساوي **النتيجة**.

$$a^b = c$$

نبيّن الصورة اللوغاريتمية أن لوغاريتم **النتيجة** **للأساس** المعطى يساوي **الأس**.

$$\log_a c = b$$

عند كتابة معادلة أسية في الصورة اللوغاريتمية، العدد الذي كان النتيجة في المعادلة الأسية يسمى غالبًا "النتيجة".

نصيحة دراسية

هل تتذكّر كيفية كتابة "عائلات حقائق" للعمليات المترابطة مثل الجمع والطرح؟ فكر في الصورة الأسية والصورة اللوغاريتمية كأنهما "عائلة حقائق" للأعداد الثلاثة المعطاة.

مثال 2 التحويل بين الصورة الأسية والصورة اللوغاريتمية

أ. أوجد الصورة اللوغاريتمية للعبارة $3^4 = 81$

الأساس هو 3، **والأس** هو 4، **والنتيجة** هي 81 في الصورة اللوغاريتمية،

$$\log_3 81 = 4 \rightarrow 3^4 = 81$$

إذن، الصورة اللوغاريتمية للعبارة $3^4 = 81$ هي $\log_3 81 = 4$.

ب. أوجد الصورة الأسية للعبارة $\log_{10} 1\,000 = 3$

الأساس هو 10، والأس هو 3، والنتيجة هي 1 000 في الصورة اللوغاريتمية،

$$\log_{10} 1\,000 = 3 \rightarrow 10^3 = 1\,000$$

إذن، الصورة الأسية للعبارة $\log_{10} 1\,000 = 3$ هي $10^3 = 1\,000$

حاول أن تحلّ! 2. أ. أوجد الصورة اللوغاريتمية للعبارة $7^3 = 343$

ب. أوجد الصورة الأسية للعبارة $\log_4 16 = 2$

مثال 3 إيجاد قيم اللوغاريتمات

دعم عملية التحدي البناء في تعلم الرياضيات

س: هل يجب أن تكون جميع العبارات اللوغاريتمية موجبة؟
[كلا؛ وفق تعريف اللوغاريتم، يجب أن يكون الأساس موجبًا. ويجب أن تكون النتيجة أيضًا موجبة لأن رفع أي عدد موجب إلى أس يعطي عددًا موجبًا. لكن خواص الأسس تنص على أن $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$ ، لذا يمكن أن يكون الأس سالبًا.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

3. a. -4 b. غير معروفة c. 9

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: ما وجه الاختلاف بين الجزء a من مسألة "حاول أن تحلّ" والجزء B من المثال؟
[في الجزء a من مسألة "حاول أن تحلّ"، النتيجة كسر، بينما في الجزء b من المثال، الأساس كسر.]

مثال 4 إيجاد قيم اللوغاريتمات الاعتيادية واللوغاريتمات الطبيعية

طرح أسئلة هادفة

س: لماذا يمكن استعمال الصورة الأسية للعبارة للتحقق من الإجابات؟
[الصورة الأسية للعبارة هي معكوس صورتها اللوغاريتمية. يمكن استعمال الصورة الأسية للتحقق من الصورة اللوغاريتمية بنفس طريقة استعمال عملية الضرب للتحقق من نتيجة عملية قسمة.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

4. a. 2.5065 b. 7.1025 c. -0.7696

استعمل مع المثالين 3 و 4

عادات التفكير

بّر منطقياً ما هي قيم المتغير x التي تجعل $\log x$ أو $\ln x$ معرفًا؟
[$x > 0$]

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 3 قد يجد بعض الطلاب صعوبة في فهم كيف يمكن التفكير في مقدار لوغاريتمي بدلالة معادلة أسية قد يساعد في إيجاد قيم اللوغاريتمات.

س: هل يجب أن يتضمن المقدار متغيرًا ليكون بالإمكان إيجاد قيمته؟
[كلا، يمكن إيجاد قيم المقادير العددية أيضًا.]

س: إذا طلب منك إيجاد ثلاثة أمثال العدد 4، فهل يمكن كتابة " $3 \times 4 = ?$ "
[نعم]

س: هل يمكن استعمال نفس هذا المنطق، بالإضافة إلى معرفة كيفية التحويل بين الصورتين الأسية واللوغاريتمية، لإيجاد قيمة $\log_4 64$ ووضّح إجابتك.
[نعم؛ $\log_4 64 = ?$ يعني $4^? = 64$ ؛ $4^3 = 64$ ، إذن $\log_4 64 = 3$.]

مثال 3 إيجاد قيم اللوغاريتمات

أوجد قيمة كل مقدار لوغاريتمي أدناه.

A. $\log_5 125$	B. $\log_{\frac{1}{4}} 16$
فكّر: $5^? = 125$	فكّر: $\left(\frac{1}{4}\right)^? = 16$
بما أن: $5^3 = 125$ ، فإن $\log_5 125 = 3$	بما أن: $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 16$ ، فإن $\log_{\frac{1}{4}} 16 = -2$
C. $\log_3 0$	D. $\log_2 2^8$
فكّر: $3^? = 0$	فكّر: $2^? = 2^8$
بما أن لا وجود لقوة هنا ليكون الناتج 0، إذن، $\log_3 0$ ليست معروفة.	بما أن: $2^8 = 2^8$ ، فإن $\log_2 2^8 = 8$

عقم

مخرجة أي دالة أسية في الصورة $y = b^x$ ، عندما $b > 0$ ، عدد موجب دائمًا. لذا يجب أن تكون مدخلة الدالة اللوغاريتمية عددًا موجبًا أيضًا.

حاول أن تحلّ! 3. أوجد قيمة كل مقدار لوغاريتمي أدناه.

- a. $\log_5 \left(\frac{1}{81}\right)$ b. $\log_7(-7)$ c. $\log_5 5^9$

المفهوم اللوغاريتمات الاعتيادية واللوغاريتمات الطبيعية

يسمى اللوغاريتم للأساس 10 **اللوغاريتم الاعتيادي** ويُكتب $\log x$ باعتبار أن الأساس 10 موجود ضمنيًا.

يسمى اللوغاريتم للأساس e **اللوغاريتم الطبيعي** ويُكتب $\ln x$.

هذا يعني أن $\log_{10} x$ و $\log x$ تعنيان الشيء نفسه، وكذلك $\log_e x$ و $\ln x$ تعنيان الشيء نفسه أيضًا.

مثال 4 إيجاد قيم اللوغاريتمات الاعتيادية واللوغاريتمات الطبيعية

أوجد قيمة كل مقدار لوغاريتمي أدناه. قَرّب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

A. $\log 900$	$10^{2.9542} \approx 900$
$\log 900 \approx 2.9542$	
B. $\ln e$	
$\ln e = 1$	$e^1 = e$
C. $\ln (-1.87)$	$e^{-1.87} = -1.87$
$\ln (-1.87)$	

تحقق من الإجابة بكتابة العبارة في الصورة الأسية وإيجاد قيمتها.

log(900)	2.954242509
ln(e)	1
ln(-1.87)	Error

لا يوجد أس إذا رفعنا e إليه نحصل على عدد سالب، لذا فإن $\ln (-1.87)$ غير معرف.

حاول أن تحلّ! 4. أوجد قيمة كل مقدار لوغاريتمي أدناه. قَرّب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

- a. $\log 321$ b. $\ln 1215$ c. $\log 0.17$

الدرس 1-3 اللوغاريتمات 23

مثال 5 حل معادلات تتضمن لوغاريتمات

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: ما أوجه الشبه والاختلاف بين حل المعادلات الأسية واللوغاريتمية وحل المعادلات الخطية؟

[يتطلب حل أي معادلة من هذه المعادلات استعمال العمليات العكسية. لحل المعادلات الخطية، نستعمل العمليتين العكسيتين الضرب/القسمة أو العمليتين العكسيتين الجمع/الطرح. لحل المعادلات الأسية نستعمل اللوغاريتمات، والعكس بالعكس.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

5. a. 34

b. 0.079

مثال 5

حل معادلات تتضمن لوغاريتمات

حل المعادلتين التاليتين. قرب إجابتك إلى أقرب جزء من ألف.

خطا شائع

تذكّر أن 10 ليس معاملاً، إنما هو أساس. لا يمكنك أن تقسم طرفي المعادلة على 10 ومن ثم إضافة 1 لإيجاد x .

A. $25 = 10^{x-1}$

$25 = 10^{x-1}$

$\log 25 = x - 1$

$1 + \log 25 = x$

$2.398 \approx x$

حول إلى الصورة اللوغاريتمية

استعمل خاصية الجمع

استعمل الحاسبة لإيجاد القيمة

B. $\ln(2x + 3) = 4$

$\ln(2x + 3) = 4$

$2x + 3 = e^4$

$2x + 3 \approx 54.598$

$2x \approx 51.598$

$x \approx 25.799$

حول إلى الصورة الأسية

استعمل الحاسبة لإيجاد القيمة

استعمل خاصية الجمع

استعمل خاصية الضرب

حاول أن تحلّ! 5. حلّ المعادلتين التاليتين. قرب الإجابة إلى أقرب جزء من ألف.

a. $\log(3x - 2) = 2$

b. $e^{x+2} = 8$

24 الوحدة 1 الدوال الأسية واللوغاريتمية

حل مسائل باستعمال اللوغاريتمات

مثال 6

طرح أسئلة هادفة

س: كيف يساعد تحويل شكل المعادلة على إيجاد قوة الزلزال؟
[يمكن تحويل المعادلة من الصورة الأسية إلى معادلة خطية تتضمن لوغاريتمًا. ثم إيجاد قيمة اللوغاريتم وحل المعادلة الخطية في خطوتين إضافيتين لمعرفة قوة الزلزال.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

6. قوة الزلزال = 7.5

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: هل تعتقد أن قوة الزلزال في مسألة "حاول أن تحلّ" أكبر أم أصغر من قوة الزلزال في المثال؟
[أكبر لأن $4.2 \times 10^{20} > 1.8 \times 10^{23}$]

استعمل مع المثالين 5 و 6

عادات التفكير

بزر منطقياً كيف تساعد اللوغاريتمات على حل معادلة المتغير فيها أس؟

[تسمح اللوغاريتمات بإعادة كتابة المقدار بدلالة المتغير.]

مثال 6 حل مسائل باستعمال اللوغاريتمات

يمكن تقدير الطاقة الزلزالية، x ، بالجول استنادًا إلى قوة الزلزال، m ، باستعمال الصيغة $x = 10^{1.5m + 12}$. أوجد قوة زلزال طاقته الزلزالية 4.2×10^{20} جول.

ضع

أحسب

فتسر

حل المعادلة لإيجاد m .

اكتب المعادلة الأصلية

اكتب المعادلة في الصورة اللوغاريتمية

أوجد قيمة اللوغاريتم

حل لإيجاد m

إذن، قوة الزلزال هي 5.75 تقريبًا.

تحقق من الإجابة: $10^{1.5(5.75) + 12} \approx 4.2 \times 10^{20}$

حاول أن تحلّ! 6. أوجد قوة زلزال طاقته الزلزالية 1.8×10^{23} جول.

مقياس الطاقة الزلزالية

2.5 أو أصغر

2.5 إلى 5.4

5.5 إلى 6

6.1 إلى 6.9

7.0 إلى 7.9

8.0 أو أكبر

تعزيز المهارات اللغوية (استعمل مع المثال 6)

الكتابة مستوى 3 اطلب من الطلاب كتابة تعريف كل من "الطاقة الزلزالية" و"الجول" و"قوة الزلزال"، ثم اطلب منهم رسم مخطط يوضح العلاقة بين هذه المصطلحات.

س: وضح كيف ترتبط الطاقة الزلزالية بالجول والقوة.
[تُقاس الطاقة الزلزالية بالجول. هناك ارتباط موجب قوي بين الطاقة الزلزالية وقوة الزلزال.]

ملخص المفهوم اللوغاريتمات

س: وضح العلاقة بين اللوغاريتمات والأسس.
[اللوغاريتمات والأسس عمليتان عكسيتان.]

س: متى يكون من المفيد التحويل بين الصورتين الأسية واللوغاريتمية؟

[من المفيد إعادة كتابة معادلة أسية في الصورة اللوغاريتمية عندما يتضمن الأس متغيرًا، حيث يمكن إيجاد قيمة اللوغاريتم وحل المعادلة الخطية الناتجة بسهولة. كما أنه من المفيد إعادة كتابة معادلة لوغاريتمية في الصورة الأسية عندما تتضمن النتيجة متغيرًا، حيث يمكن إيجاد قيمة الأس لقوة أساسها 10 أو e وحل المعادلة الخطية الناتجة بسهولة.]

عبر عن فهمك | طبق فهمك

خطأ شائع

التمرين 11 قد يعتقد بعض الطلاب أن e متغير وليس ثابتًا. وضح لهم أن e هو عدد غير نسبي يسمى عدد أولر. قارن بين e و π لمساعدة الطلاب على فهم أن e يمثل عددًا محددًا قيمته 2.718 تقريبًا.

الإجابات

1. اللوغاريتمات هي أسس يمكن إيجاد قيمها بكتابتها في الصورة الأسية.
2. قد يكون أحمد وضع إشارة السالب خارج المقدار، وهذه خطوة غير صحيحة.
3. الأساس في اللوغاريتمات الاعتيادية هو العدد 10، بينما الأساس في اللوغاريتمات الطبيعية هو e.
4. يمكن تحويل المعادلة إلى الصورة اللوغاريتمية، $t = \log 656$ ، التي يمكن استعمالها لحل المعادلة أيضًا.
5. $\log_2 \left(\frac{1}{64} \right) = -6$
6. $\ln 54.6 = 4$
7. $10^{2.301} \approx 200$
8. $e^{3.22} \approx 25$
9. 3
10. -2
11. 5

12. $\ln \frac{7}{4}$ ، أو 0.5596

ملخص المفهوم اللوغاريتمات

الصورة اللوغاريتمية	الصورة الأسية
$\log_b y = x$	$b^x = y$
لوغاريتم النتيجة للأساس b يساوي الأس.	الأساس مرفوعًا إلى أس يساوي نتيجة.
$\log_5 81 = 4$	$5^4 = 81$

عبر عن فهمك

1. السؤال الأساسي ما هي اللوغاريتمات وكيف يمكن إيجاد قيمها؟
2. حل الخطأ قال أحمد إن المقدار $\log_5 (-25)$ ينشط إلى -2، وضح خطأ أحمد المحتمل.
3. المصطلحات وضح أوجه الاختلاف بين اللوغاريتم الاعتيادي واللوغاريتم الطبيعي.
4. فكر وتأمل في الحل كيف يمكن للوغاريتمات أن تساعد على حل معادلة مثل $510^x = 656$ ؟

طبق فهمك

- في التمرينين 5 و 6، اكتب العبارة الأسية في الصورة اللوغاريتمية.
5. $2^{-6} = \frac{1}{64}$
 6. $e^4 \approx 54.6$
- في التمرينين 7 و 8، اكتب العبارة اللوغاريتمية في الصورة الأسية.
7. $\log 200 \approx 2.301$
 8. $\ln 25 \approx 3.22$
- في التمارين 9-11، أوجد قيمة المقدار.
9. $\log_4 64$
 10. $\log \frac{1}{100}$
 11. $\ln e^5$
12. حل المعادلة $4e^x = 7$ لإيجاد قيمة x.

تدرّب وحلّ مسائل دليل المهام

أساسي	متقدم
13-42, 47-57	13-20, 25-57

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	19-22	1
2	23-30	1
3	31-38	1
	16, 55, 56	2
	17	3
4	39-44	1
	13, 15, 18	3
5	14, 45-50	2
6	51-54	2
	57	3

الإجابات

13. مثل المعادلة $y = e^x$ بيانًا واستعمل التمثيل البياني لإيجاد قيمة تقريبية للمتغير x عندما $y = 65$.
14. لم يحوّل محمد المعادلة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية بشكل صحيح. الحل الصحيح هو $t = \ln 6.125$.
15. 3.5؛ المقدار $\log_3 50$ هو مقدار مكافئ للمعادلة $3^x = 50$ ، لذا عليك إيجاد قيمة x عندما $y = 50$.
16. $\{x : 0 < x < 1\}$
17. نعم؛ $3^{-3} = \frac{1}{27}$
18. الأس في اللوغاريتم الطبيعي هو e وليس 10

19. $y = \log_4 x$

20. $y = \log x$

21. $y = \log_7 x$

22. $y = \log_8 x$

23. $\log_3 6561 = 8$

24. $\ln 0.0498 \approx -3$

25. $\log_5 1 = 0$

26. $\log_7 343 = 3$

27. $10^{-2} = \frac{1}{100}$

28. $8^2 = 64$

29. $e^5 = 148.41$

30. $2^{-5} = \frac{1}{32}$

تدرّب وحلّ مسائل

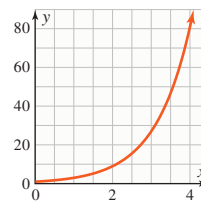
عزّز فهمك

13. **فكر وثابر في الحل** إذا كان المفتاح LN في حاسبتك معطلًا، كيف يمكنك استعمال حاسبتك لإيجاد قيمة المقدار $\ln 65$ ؟

14. **حلّ الخطأ** صف خطأ محمد في حل المعادلة الأسية التالية، وصحّحه.

$$\begin{aligned} 16e^t &= 98 \\ e^t &= 6.125 \\ 6.125t &= \ln e \\ t &= \frac{\ln e}{6.125} \end{aligned}$$

15. **مهارات التفكير العليا** استعمل التمثيل البياني للمعادلة $y = 3^x$ لتقدير قيمة $\log_3 50$. وضح إجابتك.



16. **عقم** ما قيمة x التي تجعل العبارة $\log_4 x < 0$ صحيحة؟

17. **استعمل البنية** يقول حمد إن $\log_3 \left(\frac{1}{27}\right)$ يُبسط إلى -3، هل هو على صواب؟ وضح إجابتك.

18. **استعمل البنية** وضح لماذا $\ln 1000$ لا يساوي 3

تدرّب

في التمارين 19-22، اكتب معكوس الدالة الأسية. انظر المثال 1

19. $y = 4^x$

20. $y = 10^x$

21. $y = 7^x$

22. $y = a^x$

في التمارين 23-26، اكتب العبارة في الصورة اللوغاريتمية.

انظر المثال 2

23. $3^8 = 6561$

24. $e^{-3} \approx 0.0498$

25. $5^0 = 1$

26. $7^3 = 343$

في التمارين 27-30، اكتب العبارة في الصورة الأسية.

انظر المثال 2

27. $\log \frac{1}{100} = -2$

28. $\log_8 64 = 2$

29. $\ln 148.41 \approx 5$

30. $\log_2 \frac{1}{32} = -5$

في التمارين 31-38، أوجد قيمة المقدار اللوغاريتمي. انظر المثال 3

31. $\log_5 \frac{1}{125}$

32. $\log_6 (-216)$

33. $\log_3 3^4$

34. $\log_2 32$

35. $\log_9 729$

36. $\log_8 \frac{1}{64}$

37. $\log_7 0$

38. $\log_7 7^a$

في التمارين 39-44، استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة المقدار. قَرّب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة آلاف. انظر المثال 4

39. $\log 78.5$

40. $\log 0.24$

41. $\ln (-37)$

42. $\ln 41.5$

43. $\log 12$

44. $\ln 3$

في التمارين 45-50، حل المعادلة. قَرّب الإجابة إلى أقرب جزء

من عشرة آلاف. انظر المثالين 5 و 6

45. $\log(7x + 6) = 3$

46. $2.75e^t = 38.6$

47. $\ln(3x - 1) = 2$

48. $10^{t+1} = 50$

49. $1.5e^t = 27$

50. $\log(x - 3) = -1$

51. إذا أودع المبلغ QR 250 في حساب مصرفي بفائدة سنوية متصلة معدلها 4%، ما الزمن اللازم ليصبح QR 600؟ قَرّب الإجابة إلى أقرب سنة.

الدرس 1-3 اللوغاريتمات 27

43. 1.0792

44. 1.0986

31. -3

32. غير معروفة

45. 142

46. 2.6417

33. 4

34. 5

47. 2.7964

48. 0.6990

35. 3

36. -2

49. 2.8904

50. 3.1

37. 38. a غير معروفة

39. 1.8949

40. -0.6198

51. 22 سنة

41. 42. 3.7257 غير معروفة

الإجابات

52. حساب بدر

53. a. قوة الزلزال تساوي 7.9

b. 31 009 857 kWh

c. 16 705 kWh

54. a. 183°F

b. 19 دقيقة

57. الجزء A الحساب 1: $A = 400e^{0.08t}$

الحساب 2: $A = 500 + 75t$

الجزء B نعم؛ يتزايد الحساب 2 بمعدل ثابت، بينما يتزايد الحساب 1 بمعدل متزايد، وبالتالي فإن الرصيد في الحساب 1 سيتخطى الرصيد في الحساب 2 بعد فترة معينة من الزمن؛ بعد 20 سنة تقريباً.

تدرب وحل مسائل

طبق

52. **نموذج** استثمر خليفة QR 1 000 في حساب مصرفي بفائدة مركبة سنوية متصلة معدلها 4.75%، واستثمر بدر QR 1 200 في حساب مصرفي بفائدة مركبة سنوية متصلة معدلها 4.25%، حساب أي منهما سينمو ليصل إلى QR 1 800 أولاً؟

53. **بئر منطقيًا** يُحتسب مقياس "ريختر" للزلازل باستعمال النموذج $R = 0.67 \log(0.37E) + 1.46$ ، حيث E هي الطاقة (بالكيلوواط-ساعة) التي يطلقها الزلزال.

a. اوجد مقياس الزلزال الذي يطلق طاقة مقدارها 11 800 000 كيلوواط-ساعة.
قرب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.

b. ما كمية الطاقة التي يطلقها زلزال شدته 8.2 على مقياس ريختر؟ قرب الإجابة إلى أقرب عدد كلي.

c. ما كمية الطاقة التي يجب أن يطلقها زلزال ليتسبب في تصدع الجدران؟ قرب الإجابة إلى أقرب عدد كلي.



54. **بئر منطقيًا** إذا كانت الدالة $c(t) = 108e^{-0.08t} + 75$ تعطي درجة حرارة كوب من القهوة، بالفهرنهايت، فُذِّم إلى سائق من نافذة مقهى قبل t دقيقة.

a. اوجد درجة حرارة القهوة لحظة تقديمها إلى السائق من النافذة.

b. بعد كم دقيقة تصبح درجة حرارة القهوة 98 درجة فهرنهايت؟ قرب الإجابة إلى أقرب دقيقة.

تدرب على اختبار

55. إذا كان $x < 0$ ، أي مما يلي صحيح؟ اختر كل ما ينطبق.

A $b < 0$

B $x < 0$

C $b > 0$

D $x > 0$

E $x < 1$

56. **اختبار SAT/ACT** في المعادلة $\log_3 a = b$ ، إذا كان b عددًا كليًا، أي مما يلي لا يمكن أن يكون قيمة a؟

A 1

B 3

C 6

D 9

E 81

57. **مهمة أدائية** أودع منصور مبلغين من المال في حسابين مصرفيين منفصلين. المبلغ الذي في الحساب المصرفي الأول يتراكم بفائدة مركبة متصلة، والمبلغ الذي في الحساب الثاني لا يتراكم بفائدة متصلة. لم يتم منصور بأي سحبات من الحسابين خلال السنوات الست الأولى.

السنة	الحساب 1 الرصيد (QR)	الحساب 2 الرصيد (QR)
0	400	500
1	433.31	575
2	469.40	650
3	508.50	725
4	550.85	800
5	596.72	875

الجزء A اكتب دالة تعطي الرصيد في كل حساب بدلالة عدد السنوات t، منذ فتح الحساب.
صف كيف ينمو الرصيد في كل حساب.

الجزء B هل سيتخطى الرصيد في الحساب 1 الرصيد في الحساب 2؟ وضح إجابتك. إذا كان الأمر كذلك، متى سيحدث ذلك؟

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم. تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس. كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليقًا متميزًا يستفيد منه الطلاب، كلٌّ بحسب مستواه. سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

ملاحظات

[illegible]

الدوال اللوغاريتمية

الدرس 1-4

نظرة عامة على الدرس

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على:

- ✓ تمثيل الدوال اللوغاريتمية وتفسير خصائصها.
- ✓ كتابة وتفسير معكوسات الدوال الأسية واللوغاريتمية.

الفهم الأساس

تكشف العلاقة العكسية بين الدوال الأسية واللوغاريتمية خصائص التمثيلات البيانية لهذين النوعين من الدوال. يمكن استعمال الدوال اللوغاريتمية لنمذجة العديد من المواقف الحياتية.

سابقاً في هذه الوحدة، تمكّن الطلاب من:

- كتابة معكوس دالة أسية باستعمال رمز اللوغاريتم.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من:

- توسيع فهمهم للعلاقة العكسية بين الدوال الأسية واللوغاريتمية من خلال إيجاد خصائص التمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية، بالإضافة إلى تفسير النماذج اللوغاريتمية ومعكوساتها.

لاحقاً في هذه الوحدة، سيتمكّن الطلاب من:

- استعمال معرفتهم بخواص الأسس، بالإضافة إلى فهمهم للعلاقة العكسية بين الأسس واللوغاريتمات، لتحديد خواص اللوغاريتمات.

يركز هذا الدرس على الدمج بين المهارة الإجرائية والطلاقة والتطبيق.

- يستعمل الطلاب خصائص الدوال اللوغاريتمية لتمثيل تحويلات الدالة الرئيسة بيانياً.
- يقوم الطلاب بتفسير ومقارنة الدوال اللوغاريتمية كوسيلة لفهم النماذج التي تربط بين تكاليف الإعلانات وإيرادات المبيعات ونماذج ارتفاعات الطائرة.

بناء المصطلحات

العربية | الإنجليزية

مراجعة المصطلحات

- خط تقارب | *asymptote*
- السلوك الطرفي | *end behavior*
- انعكاس | *reflection*

نشاط المصطلحات

راجع المصطلحات من خلال عرض التمثيل البياني لدالة أسية والطلب من الطلاب تحديد "المجال" و "المدى" و "المقطع x " و "خط التقارب" و "السلوك الطرفي" للدالة. إذا اقتضت الحاجة، اطلب من الطلاب إكمال الجمل الآتية.

1. النقطة التي يتقاطع عندها التمثيل البياني مع أحد المحورين تسمى _____ .
[مقطع]

2. المستقيم الذي يقاربه التمثيل البياني عندما تتزايد القيمة المطلقة للمتغير x أو للمتغير y يسمى _____ .
[خط تقارب]

3. يصف _____ طريقة تصرّف التمثيل البياني عند اقتراب x من المالنهاية الموجبة أو السالبة. [السلوك الطرفي]

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير ممارسات الرياضيات

نموذج

يستعمل الطلاب المعادلات والتمثيلات البيانية لوصف وتفسير نتائج مواقف رياضية مثل تكاليف الإعلانات وارتفاعات الطائرة.

ابحث عن البنية واستعملها

يطبق الطلاب القواعد الرياضية العامة لتحويل التمثيل البياني للدوال اللوغاريتمية ويستعملون البنية لتحديد ذلك لأن الدالة اللوغاريتمية هي معكوس الدالة الأسية حيث تمثيلاتها البيانية هي انعكاس للدوال الأسية في المحور $y = x$.

استكشف وبرز منطقياً

محور تركيز التدريس يستعمل الطلاب معرفتهم بالتمثيلات البيانية والمعكوسات لتحديد العلاقة بين مجال العلاقات العكسية ومداهما، الأمر الذي يعزز فهم الطلاب للعلاقة بين الدوال الأسية واللوغاريتمية.

قبل البدء بالحلّ طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزز التفكير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: ما أوجه الشبه والاختلاف بين التمثيلات البيانية؟

[كل من التمثيلات البيانية الثلاثة قطع مكافئ رأسه النقطة (0, 0)، لكن اتجاه فتحة كل منها مختلف.]

أثناء الحلّ مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البناء في تعلم الرياضيات

س: كيف يساعد التمثيلان البيانيان للدالتين المتعاكستين $y = 2x + 4$ و $y = \frac{x}{2} - 2$ على فهم هذه المسألة؟

[كل من التمثيلين البيانيين لهاتين الدالتين الخطيتين المتعاكستين هو انعكاس للآخر في المستقيم الذي معادلته $y = x$ وليس في المحور x . يمكن تطبيق هذه الفكرة نفسها لتحديد القطعين المكافئين اللذين كل منهما معكوس الآخر.]

س: كيف يمكن تمثيل مجال ومدى كل تمثيل بياني لمقارنتها؟
[اكتب مجال ومدى كل تمثيل بياني في صورة متباينة.]

للطلاب سريعى الإنجاز

س: ادرس التمثيل البياني الذي ليس معكوس التمثيلين البيانيين الآخرين. صف هذا التمثيل البياني مقارنةً بأحد التمثيلين البيانيين الآخرين. ثم صف التمثيل البياني لمعكوس الدالة التي معكوسها غير مبيّن.

[التمثيل البياني الثالث هو انعكاس للتمثيل البياني الأول في المحور x . التمثيل البياني للمعكوس هو قطع مكافئ رأسه (0, 0) واتجاه فتحته إلى اليسار.]

بعد إنجاز الحلّ طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح عند استعمال لغة الرياضيات

س: ماذا تلاحظ بشأن التمثيلين البيانيين المتعاكسين؟

[كل من التمثيلين البيانيين المتعاكسين انعكاس للآخر في المستقيم الذي معادلته $y = x$.]

استعمل مع استكشف وبرز منطقياً

عادات التفكير

تواصل بدقة ما العلاقة بين النقاط الواقعة على التمثيلين البيانيين للدالتين المتعاكستين؟

[قيم x في إحدى الدالتين هي قيم y في معكوسها، وقيم y في هذه الدالة هي قيم x في معكوسها.]

كتاب الطالب، صفحة 29

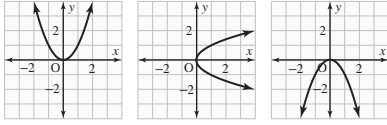
1-4

الدوال اللوغاريتمية Logarithmic Functions

استطع... تمثيل الدوال اللوغاريتمية وإيجاد معادلات معكوسات الدوال الأسية واللوغاريتمية.

استكشف وبرز منطقياً

قارن بين التمثيلات البيانية أدناه.



A. أي تمثيلين بيانيين يمثل كل منهما معكوس الآخر؟ وضح إجابتك.

B. **ابحث عن العلاقات** ما العلاقة بين مجال ومدى التمثيلين البيانيين المتعاكسين؟

السؤال الأساسي كيف تظهر العلاقة بين الدوال الأسية واللوغاريتمية في الخصائص الأساسية للتمثيل البياني لكل منهما؟

نموذج من أعمال الطلاب

A. التمثيلان البيانيان اللذان إلى اليسار متعاكسان. عند النظر إلى هذين التمثيلين البيانيين نلاحظ أن التمثيل البياني الأيسر يتضمن النقاط التالية:
(-1, 1) و (0, 0) و (1, 1) وأن التمثيل البياني الأوسط يتضمن النقاط التالية: (1, 1) و (0, 0) و (-1, -1).

بما أن قيم x في كل من التمثيلين البيانيين هي قيم y في التمثيل البياني الآخر وبالعكس، فإن كلا من التمثيلين البيانيين معكوس الآخر.

B. مجال التمثيل البياني الأيسر هو كل الأعداد الحقيقية، وهو يساوي مدى التمثيل البياني الأوسط. مدى التمثيل البياني الأيسر هو $y > 0$ ، وهو مكافئ لمجال التمثيل البياني الأوسط، $x > 0$.

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلم مركز

ذكر الطلاب بالعلاقة العكسية بين الدوال اللوغاريتمية والأسية. وضح لهم أن فهم هذه العلاقة سيساعدهم على تحديد واستعمال الخصائص الأساسية للتمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية.

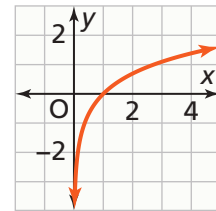
مثال 1 تحديد الخصائص الأساسية للدوال اللوغاريتمية

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: عند تمثيل الدالة $y = \log_2 x$ بيانيًا، كيف يساعدك البدء بتمثيل الدالة $y = 2^x$ بيانيًا؟
[يمكن استعمال العلاقة العكسية بين الدالتين الأسية واللوغاريتمية لتمثيل الدالة اللوغاريتمية بيانيًا.]

حاول أن تحل! الإجابات

1. a.



المجال: $\{x : x > 0\}$

المدى: جميع الأعداد الحقيقية

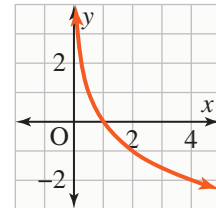
المقطع: $x: 1$

خط التقارب: المحور y

السلوك الطرفي: عندما $x \rightarrow 0$ ، فإن $y \rightarrow -\infty$

عندما $x \rightarrow \infty$ ، فإن $y \rightarrow \infty$

b.



المجال: $\{x : x > 0\}$

المدى: جميع الأعداد الحقيقية

المقطع: $x: 1$

خط التقارب: المحور y

السلوك الطرفي: عندما $x \rightarrow 0$ ، فإن $y \rightarrow -\infty$

عندما $x \rightarrow \infty$ ، فإن $y \rightarrow \infty$

السؤال الأساس كيف تظهر العلاقة بين الدوال الأسية واللوغاريتمية في الخصائص الأساسية للتمثيل البياني لكل منهما؟

مثال 1

تحديد الخصائص الأساسية للدوال اللوغاريتمية

مثل الدالة $y = \log_2 x$ بيانيًا، ثم حدد المجال والمدى والمقطع x وخط التقارب لهذه الدالة، وصف السلوك الطرفي للتمثيل البياني.

أنشئ جدول قيم للدالة $y = 2^x$.

x	-2	-1	0	1	2
y	0.25	0.5	1	2	4

الدالتان $y = 2^x$ و $y = \log_2 x$ عكسيتان، لذا ابدأ بإنشاء جدول قيم للدالة $y = 2^x$.

بذل بين قيم x و y المتناظرة. هذه الأزواج المرتبة تمثل الدالة $y = \log_2 x$.

x	0.25	0.5	1	2	4
y	-2	-1	0	1	2

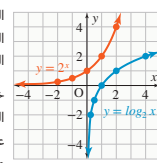
مثل الأزواج المرتبة بيانيًا.

لا تقبل الدالة اللوغاريتمية إلا القيم الموجبة للمدخل.

المجال: $\{x : x > 0, x \in \mathbb{R}\}$
المدى: كل الأعداد الحقيقية
المقطع: $x: 1$

بقترب التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية من المحور y الذي معادلته $x = 0$ لكنه لا يلامسه.

خط التقارب: المحور y
السلوك الطرفي: عندما $x \rightarrow 0$ ، فإن $y \rightarrow -\infty$ ، وعندما $x \rightarrow \infty$ ، فإن $y \rightarrow \infty$.



استعمل البنية

إن الدالتين $y = 2^x$ و $y = \log_2 x$ عكسيتان، وكل تمثيل بياني هو انعكاس للآخر في المستقيم الذي معادلته $y = x$.

حاول أن تحل! 1. مثل بيانيًا كلا من الدوال أدناه، وحدد المجال والمدى والمقطع x للدالة، ثم صف السلوك الطرفي للتمثيل البياني.

a. $y = \ln x$

b. $y = \log_3 x$

مثال 2 تمثيل تحويلات الدوال اللوغاريتمية بيانيًا

مثال 2

استعمال التمثيلات الرياضية والربط بينها

س: ما أوجه التشابه والاختلاف بين تحويلات التمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية وتحويلات التمثيلات البيانية للدوال الأسية؟
[التشابه: $-3 = h$ يعني إزاحة إلى اليسار؛ الاختلاف: تحدد قيمة h مقدار إزاحة خط التقارب للدالة اللوغاريتمية، بينما قيمة k هي التي تحدد مقدار إزاحة خط التقارب للدالة الأسية.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

2. a. إزاحة 4 وحدات إلى الأعلى.
b. تمدد رأسي مقداره 5 وحدات.

استعمل مع المثالين 1 و 2

عادات التفكير

استعمل البنية هل للتمثيل البياني لأي من الدالتين $y = \ln x + 4$ أو $y = \ln(x + 4)$ مقطع مختلف عن مقطع الدالة الرئيسية $y = \ln x$ ؟ وضح إجابتك.

[المقطع x للدالة $y = \ln x + 4$ يختلف عن المقطع x للدالة $y = \ln x$ ، كما أن ليس للدالة $y = \ln x + 4$ مقطع y . والمقطع x للدالة $y = \ln(x + 4)$ يختلف عن المقطع x للدالة $y = \ln x$ ، والدالة $y = \ln(x + 4)$ لها مقطع y .]

مثال 3 معكوسات الدوال الأسية واللوغاريتمية

مثال 3

دعم عملية التحدي البناء في تعلم الرياضيات

س: لماذا الإزاحة الأفقية في المعادلة الأسية تصبح إزاحة رأسية في معكوسها؟
[لأن قيم x و y تتبادل مواقعها في الدوال المتعكسة. لذا فإن التحويل الذي يؤثر في قيم x للدالة الأصلية يؤثر في قيم y لمعكوس الدالة.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

3. a. $y = \log_3 x - 2$
b. $y = 7^{x+2}$

30 الوحدة 1 الدوال الأسية واللوغاريتمية

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 3 اطلب من الطلاب استكشاف كيفية إيجاد معكوسات الدوال التي تتضمن إزاحتين.

- اطلب من الطلاب إيجاد معكوسات الدوال التالية.

- $f(x) = 2^{x+3} - 3$ [$f^{-1}(x) = \log_2(x + 3) - 3$]
- $g(x) = \log_4(x - 4) - 1$ [$g^{-1}(x) = 4^{x+1} + 4$]
- $h(x) = -\log(x + 1) + 6$ [$h^{-1}(x) = 10^{6-x} - 1$]

س: ما العلاقة بين التمثيلات البيانية لهذه الدوال والتمثيلات البيانية لمعكوساتها؟
[التمثيلات البيانية للمعكوسات هي انعكاسات للدوال الأصلية في المستقيم الذي معادلته $y = x$]

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 2 قد يواجه بعض الطلاب صعوبة في مقارنة التمثيل البياني لدالة بالتمثيل البياني للدالة الرئيسية.

- اطلب من الطلاب التدرّب على إيجاد المقطع x أو خط التقارب لكل دالة.

س: أوجد المقطع x للدالة $g(x) = \log(x - 5)$.
[6]

س: أوجد خط التقارب للدالة $h(x) = \log(x + 3)$.
[$x = -3$]

س: ما وجه المقارنة بين التمثيل البياني للدالة $h(x) = \log(x + 3)$ والتمثيل البياني للدالة الرئيسية $f(x) = \log x$ ؟
[التمثيل البياني للدالة $h(x)$ هو إزاحة للتمثيل البياني للدالة $f(x)$ بمقدار 3 وحدات إلى اليسار.]

مثال 4 تفسير معكوس صيغة تتضمن لوغاريتمات

مثال 4

طرح أسئلة هادفة

س: لماذا تحتاج إلى طرح 25 من طرفي المعادلة اللوغاريتمية وقسمة طرفيها على 12 قبل كتابتها في الصورة الأسية؟

[استنادًا إلى التعريف، $\log_b x = y$ إذا وفقط إذا $b^y = x$. لذا، لكتابة المعادلة في الصورة الأسية، يجب عزل الحد اللوغاريتمي أولاً.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

4. كلما ازدادت تكلفة الإعلانات، تزداد الإيرادات الشهرية لوغاريتميًا. نموذج إجابة: حدد قيمة معينة للإيرادات، ثم استعمل النموذج لتحديد المبلغ الذي يجب إنفاقه على الإعلانات لتحقيق هذه القيمة.

استعمل مع المثالين 3 و 4

عادات التفكير

عقم كيف توضّح، بعبارتك الخاصة، كيفية إيجاد معكوس دالة لوغاريتمية؟

[خل المعادلة لإيجاد المتغير الآخر من خلال عزل اللوغاريتم، وكتابة المعادلة في الصورة الأسية، ثم اعزل المتغير المطلوب إيجاد قيمته.]

مثال 5 مقارنة دالتين لوغاريتميتين

مثال 5

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: ما وجه الشبه بين إيجاد متوسط معدل التغير لفترة زمنية وإيجاد معدل تغير، أو ميل، المستقيم الذي يربط بين نقطتين؟ [العملية هي نفسها، ففي الحالتين نستعمل صيغة الميل.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

5. الطائرة A؛ يزداد ارتفاع الطائرة A بمتوسط معدل تغير أكبر من متوسط معدل التغير في ارتفاع الطائرة B في الفترة الواقعة بين 10 و 15 دقيقة من الإقلاع، وبما أن كلتا الطائرتين تتبعان نموذجًا لوغاريتميًا، فإن الطائرة A ستستمر في الارتفاع بمتوسط معدل تغير أكبر.

استعمل مع المثال 5

عادات التفكير

ابحث عن العلاقات كيف يتغير متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = \log x$ بتزايد قيمة x ؟ [يتناقص متوسط معدل التغير كلما ازدادت قيمة x .]

مثال 4 تفسير معكوس صيغة تتضمن لوغاريتمات

تستعمل إحدى الشركات الدالة أدناه للربط بين إيرادات المبيعات R وتكاليف الإعلانات a (بالآلاف الريالات). تمثل R الإيرادات بالآلاف الريالات.

وتمثل a تكاليف الإعلانات بالآلاف الريالات.

$$R = 12 \log(a + 1) + 25$$

ما معادلة معكوس هذه الصيغة؟ أي معادلة هي الأسهل استعمالًا لإيجاد قيمة a المناسبة لقيمة R معينة؟

$$R = 12 \log(a + 1) + 25$$

$$R - 25 = 12 \log(a + 1)$$

$$\frac{R - 25}{12} = \log(a + 1)$$

$$a + 1 = 10^{\frac{R - 25}{12}}$$

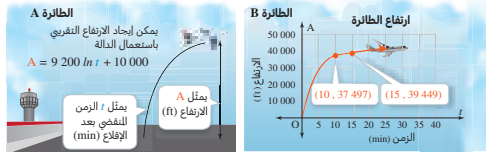
$$a = 10^{\frac{R - 25}{12}} - 1$$

إذن، معكوس الصيغة أعلاه هو $a = 10^{\frac{R - 25}{12}} - 1$ ، ومن الأسهل استعمال المعكوس لإيجاد a عندما يكون R معروفًا.

حاول أن تحلّ! 4. ماذا يحدث للإيرادات الشهرية عندما تزداد تكلفة الإعلانات؟ كيف يمكنك تحديد الميزانية المثالية للإعلانات؟ وضّح إجابتك.

مثال 5 مقارنة دالتين لوغاريتميتين

يمكن استعمال الدوال اللوغاريتمية لإيجاد الارتفاع التقريبي لطائرة بمرور الزمن. أي من الطائرتين يظهر ارتفاعها معدل التغير الأكبر في الفترة $10 \leq t \leq 15$ ؟



الخطوة 1 أوجد متوسط معدل التغير في ارتفاع الطائرة A. أوجد $A(10)$ و $A(15)$ باستعمال الدالة المعطاة للطائرة A.

الخطوة 2 أوجد متوسط معدل التغير في ارتفاع الطائرة B. استعمل النقطتين المعطاتين في التمثيل البياني للطائرة B.

إذن، في الفترة الواقعة بين 10 min و 15 min بعد الإقلاع، يكون متوسط معدل التغير في ارتفاع الطائرة A أكبر من متوسط معدل التغير في ارتفاع الطائرة B.

حاول أن تحلّ! 5. في رأيك، ارتفاع أي من الطائرتين يتغير بوتيرة أسرع في الفترة $15 \leq t \leq 20$ ؟ وضّح تبريرك المنطقي.

الدرس 1-4 الدوال اللوغاريتمية 31

نصيحة دراسية

إيجاد الصيغة العكسية، لا تبذل بين المتغيرين، بل أوجد قيمة a بدلالة R . لكل من المتغيرين a و R معنى محدد في هذا السياق ولا يمكن التبدل بينهما.

نصيحة دراسية

متوسط معدل التغير هو نسبة التغير في الارتفاع إلى التغير في الزمن في الفترة المعطاة.

الكتابة مستوى 3 اطلب من أحد الطلاب حمل بطاقة عليها علامة X ومن طالب آخر حمل بطاقة عليها الحرف Y . اطلب منهم الحضور إلى مقدمة الغرفة وتبادل البطاقتين، ثم اسأل الطلاب:

س: ما الكلمة التي تم توضيحها الآن؟ [بذل بين]

س: اكتب تعريف كل من المصطلحين "بذل بين" و "اعكس" بعبارتك الخاصة. ثم وضّح العلاقة بين هذين المصطلحين. [راجع عمل الطلاب.]

الاستماع مستوى 2 اطلب من الطلاب الاستماع إلى تعريف "المعكوس" ثم الإجابة عن السؤال الآتي. المعكوس هو عكس الشيء أو مقلوبه.

س: ما معنى المصطلح "معكوس" في الرياضيات؟ [يشير المصطلح "معكوس" في الرياضيات إلى العمليات العكسية مثل الجمع والطرح، وكذلك إلى التبدل بين قيم x و y في الدوال.]

تعزيز المهارات اللغوية

استعمل مع المثال 3

التحدث مستوى 1

س: ماذا تعني العبارة "بذل بين"؟ [بادل، اعكس، اقلب]

ملخص المفهوم الدوال اللوغاريتمية

س: ما العلاقة بين مجال ومدى الدالة $y = \log x$ ومجال ومدى الدالة $y = 10^x$ ؟
[مجال $y = \log x$ هو مدى $y = 10^x$ ومدى $y = \log x$ هو مجال $y = 10^x$]

س: كيف يتأثر المقطع x وخط تقارب الدالة $y = \log x$ عند إزاحة التمثيل البياني بمقدار 3 وحدات إلى اليمين؟

[إزاح كل من المقطع x وخط التقارب أيضًا 3 وحدات إلى اليمين.
المقطع x يصبح 4 وخط التقارب $x = 3$]

عبر عن فهمك | طبق فهمك

خطأ شائع

التمرين 5 قد يتجاهل بعض الطلاب وجود -1 قبل إضافة $1\frac{1}{2}$ فيكتبون المعادلة في الصورة $g(x) = \ln x + 1\frac{1}{2}$ بدلًا من $g(x) = \ln x + \frac{1}{2}$. وضح لهم أن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \ln x - 1$ هو إزاحة للتمثيل البياني للدالة $h(x) = \ln x$ بمقدار وحدة واحدة إلى الأسفل، لذا فإن إزاحة هذه الدالة بمقدار $1\frac{1}{2}$ وحدة إلى الأعلى هو نفس إزاحة $h(x)$ بمقدار $\frac{1}{2}$ وحدة إلى الأعلى.

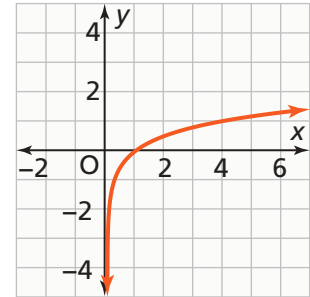
الإجابات

1. مجال الدالة اللوغاريتمية هو نفس مدى الدالة الأسية، ومدى الدالة اللوغاريتمية هو نفس مجال الدالة الأسية. للدالة اللوغاريتمية مقطع x يساوي 1، في حين أن للدالة الأسية مقطع y يساوي 1

2. كل الأعداد الحقيقية هو مدى الدالة. مجال الدالة هو $\{x : x > 0\}$.

3. التمثيل البياني للدالة g هو انعكاس للتمثيل البياني للدالة f في المحور x .

4.



المجال: $\{x : x > 0\}$

المدى: جميع الأعداد الحقيقية

المقطع $x: 1$

خط التقارب: المحور y

السلوك الطرفي: عندما $x \rightarrow 0$ ، فإن $y \rightarrow -\infty$

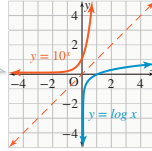
عندما $x \rightarrow \infty$ ، فإن $y \rightarrow \infty$

5. $g(x) = \ln x + \frac{1}{2}$

6. $x = e^{\frac{y}{5}} - 1$ ؛ هذه الدالة تعطي قيمة x ، أي عدد الدقائق بعد إصدار اللعبة، بدلالة عدد عمليات التنزيل بالمتات، y .

ملخص المفهوم الدوال اللوغاريتمية

بيانات



كل من الدالتين معكوس للدالة الأخرى، لذا فإن التمثيل البياني لكل منهما هو انعكاس للتمثيل البياني للدالة الأخرى في المستقيم الذي معادلته $y = x$.

معادلات

$y = 10^x$

$y = \log x$

الخصائص الأساسية

المجال: كل الأعداد الحقيقية
المدى: $\{y : y > 0, y \in \mathbb{R}\}$
المقطع $y: 1$
خط التقارب: المحور x

المجال: $\{x : x > 0, x \in \mathbb{R}\}$
المدى: كل الأعداد الحقيقية
المقطع $x: 1$
خط التقارب: المحور y

السلوك الطرفي

عندما $x \rightarrow -\infty$ ، فإن $y \rightarrow 0$
عندما $x \rightarrow \infty$ ، فإن $y \rightarrow \infty$

عندما $x \rightarrow 0$ ، فإن $y \rightarrow -\infty$
عندما $x \rightarrow \infty$ ، فإن $y \rightarrow \infty$

طبق فهمك

- مثل الدالة $y = \log_4 x$ بيانيًا، وحدد مجالها ومدنها، وكذلك المقاطع وخطوط التقارب، إن وجدت. ثم صف السلوك الطرفي للتمثيل البياني.
- اكتب معادلة الدالة g ، التي يمكن وصفها بأنها إزاحة رأسية بمقدار $1\frac{1}{2}$ وحدة إلى الأعلى للدالة $f(x) = \ln x - 1$.
- تعطي الدالة $y = 5 \ln(x + 1)$ قيمة y ، التي تمثل عدد عمليات تنزيل إحدى الألعاب، بمئات المرات، بعد x دقيقة من إصدارها. أوجد معادلة المعكوس وفسر معناها.

جاري التنزيل...

عملية تنزيل

x دقيقة

عبر عن فهمك

- السؤال الأساسي** كيف تظهر العلاقة بين الدوال الأسية واللوغاريتمية في الخصائص الأساسية للتمثيل البياني لكل منهما؟
- حلل الخطأ** تقول ليلى أن مجال الدالة $y = \log_3 x$ هو كل الأعداد الحقيقية. بين خطأ ليلى وصححه.
- تواصل بدقة** ما العلاقة بين التمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_5 x$ والتمثيل البياني للدالة $g(x) = -\log_5 x$ ؟

تدرّب وحل مسائل دليل المهام

أساسي	متقدم
7-22, 25-31	7-12, 15-31

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	12-15	1
2	8, 11, 16-18, 29	2
3	19-24, 30	1
3	7, 9	2
4	10, 25, 27, 31	2
5	26	2
5	28	3

الإجابات

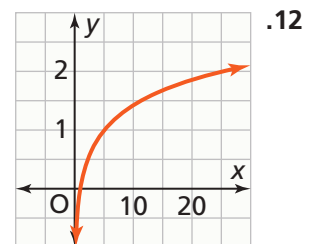
7. كلا؛ المقطع x للدالة الزرقاء لا يساوي المقطع y للدالة الحمراء.

8. التمثيل البياني للدالة g هو إزاحة بمقدار 7 وحدات إلى اليمين للتمثيل البياني للدالة f .

9. عند إعادة كتابة معكوس الدالة في الصورة اللوغاريتمية، كان على خالد وضع $x - 2$ داخل قوسين. معكوس الدالة الصحيح هو: $f^{-1}(x) = \log_5(x - 2) + 6$

10. معكوس الدالة هو $w = \log_{1.6} m - 2$ ؛ ويمثل عدد الأسابيع المنقضية على افتتاح المركز بدلالة عدد الأعضاء m .

11. $g(x) = \log_3(x - 2) + 1$



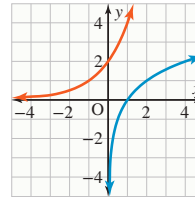
المجال: $\{x : x > 0\}$
المدى: جميع الأعداد الحقيقية
المقطع x : 1

خط التقارب: المحور y
السلوك الطرفي: عندما $x \rightarrow 0$ ، فإن $y \rightarrow -\infty$
عندما $x \rightarrow \infty$ ، فإن $y \rightarrow \infty$

تدرّب وحل مسائل

عزّز فهمك

7. **ابحث عن العلاقات** هل كل من الدالتين اللوغاريتمية والأسية أدناه معكوس للآخرى؟ وضح إجابتك.



8. **تواصل بدقة** ما العلاقة بين التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية $g(x) = \log_2(x - 7)$ والتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_2 x$ ؟ وضح إجابتك.

9. **حلل الخطأ** صف وصحح خطأ خالد عند كتابته لمعادلة معكوس الدالة الأسية $2 + 5^{x-6} = f(x)$ كما هو مبين أدناه.

اكتب الدالة في الصورة $y = f(x)$

بذل بين x و y

اطرح 2 من طرفي المعادلة

أعد كتابة الدالة في الصورة اللوغاريتمية

أضف 6 إلى طرفي المعادلة

بسط

$y = 5^{x-6} + 2$

$x = 5^{y-6} + 2$

$x - 2 = 5^{y-6}$

$y - 6 = \log_5(x - 2)$

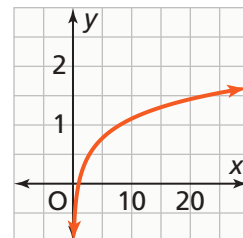
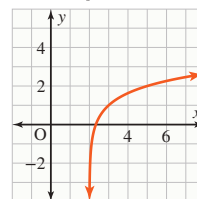
$y = \log_5(x - 2) + 6$

$y = \log_5 x + 4$

$f^{-1}(x) = \log_5 x + 4$

10. **فكر وثابر في الحل** يمكن نمذجة عدد الأعضاء m الذين انضموا إلى مركز تدريب جديد بعد w أسابيع من افتتاحه باستعمال المعادلة $m = 1.6^{w+2}$ ، حيث $0 \leq w \leq 10$ ، أوجد معكوس الدالة، ثم اشرح ما يمثل.

11. **استعمل البنية** التمثيل البياني أدناه هو تحويل للتمثيل البياني للدالة الرئيسة $f(x) = \log_3 x$. اكتب معادلة هذا التمثيل البياني.



تدرّب

في التمارين 12-15، مَثِّل الدالة بيانيًا، وحدّد مجالها ومداهما، وكذلك المقاطع وخطوط التقارب إن وجدت، ثم صف السلوك الطرفي للتمثيل البياني. انظر المثال 1

12. $y = \log_5 x$

13. $y = \log_8 x$

14. $y = \log_{\frac{3}{10}} x$

15. $y = \log_{0.1} x$

في التمرينين 16 و 17، صف التمثيل البياني للدالة بدلالة تحويلات الدالة الرئيسة $f(x) = \log_6 x$. قارن بين خط التقارب والمقطع x للدالة الرئيسة؟ انظر المثال 2

16. $g(x) = \frac{1}{2} \log_6 x$

17. $g(x) = \log_6(-x)$

18. صف العلاقة بين التمثيل البياني للدالة $f(x) = \ln x$ والتمثيل البياني للدالة $g(x) = -\ln(x + 0.5)$

انظر المثال 2

في التمارين 19-24، أوجد معادلة معكوس الدالة. انظر المثال 3

19. $f(x) = 5^{(x-3)}$

20. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

21. $f(x) = 6^{(x+7)}$

22. $f(x) = \log_2(8x)$

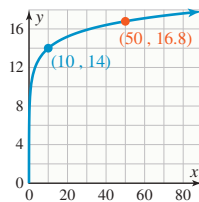
23. $f(x) = \ln(x + 3) - 1$

24. $f(x) = 4 \log_2(x - 3) + 2$

25. يمكن تقدير ارتفاع طائرة y ، بالأقدام، بعد t دقيقة من إقلاعها باستعمال الدالة $y = 5000 \ln(0.5t) + 8000$ ، متى يكون من السهل استعمال المعادلة الجديدة التي كتبتها بدلًا من المعادلة الأصلية؟ انظر المثال 4

26. أوجد متوسط معدل التغير للدالة الممثلة بيانيًا أدناه في الفترة $10 \leq x \leq 50$ ، ثم قارن بينه وبين متوسط معدل التغير للدالة $y = 3 \log x + 12$ في نفس الفترة.

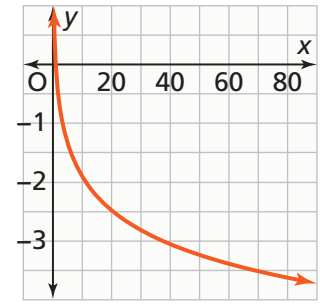
انظر المثال 5



الدرس 1-4 الدوال اللوغاريتمية 33

المجال: $\{x : x > 0\}$
المدى: جميع الأعداد الحقيقية
المقطع x : 1
خط التقارب: المحور y
السلوك الطرفي: عندما $x \rightarrow 0$ ، فإن $y \rightarrow -\infty$
عندما $x \rightarrow \infty$ ، فإن $y \rightarrow \infty$

الإجابات



المجال: $\{x : x > 0\}$

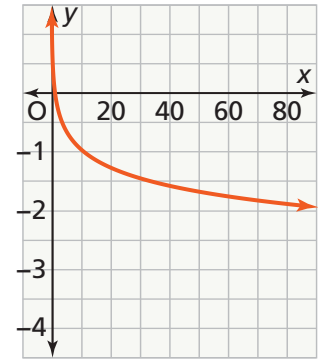
المدى: جميع الأعداد الحقيقية

المقطع $x: 1$

خط التقارب: المحور y

السلوك الطرفي: عندما $x \rightarrow 0$ ، فإن $y \rightarrow -\infty$

عندما $x \rightarrow \infty$ ، فإن $y \rightarrow \infty$



المجال: $\{x : x > 0\}$

المدى: جميع الأعداد الحقيقية

المقطع $x: 1$

خط التقارب: المحور y

السلوك الطرفي: عندما $x \rightarrow 0$ ، فإن $y \rightarrow -\infty$

عندما $x \rightarrow \infty$ ، فإن $y \rightarrow \infty$

16. تضيق رأسي بمعامل مقداره $\frac{1}{2}$ ؛

خط التقارب: المحور y (نفس الدالة الرئيسية)

المقطع $x: 1$ (نفس الدالة الرئيسية)

17. انعكاس في المحور y ؛

خط التقارب: المحور y (نفس الدالة الرئيسية)

المقطع $x: -1$ (مختلف عن الدالة الرئيسية)

18. انعكاس للدالة $f(x)$ في المحور x ثم إزاحة بمقدار

0.5 وحدة إلى اليسار.

19. $f^{-1}(x) = \log_5 x + 3$

20. $f^{-1}(x) = \log_2 x + 1$

21. $f^{-1}(x) = \log_6 x - 7$

22. $f^{-1}(x) = \frac{2^x}{8}$

23. $f^{-1}(x) = e^{x+1} - 3$

24. $f^{-1}(x) = 2^{\frac{(x-2)}{4}} + 3$

25. $t = 2e^{\frac{(y-8000)}{5000}}$ ، استعمل هذه المعادلة الجديدة

عندما يكون ارتفاع الطائرة معطى لكن زمن الإقلاع غير معطى.

26. 0.07; 0.05

تدرب و حل مسائل

طبق

27. نموذج نُستعمل المعادلة $r = 90 - 25 \log(t + 1)$ لنمذجة

مخزون المعلومات المتبقي r لتلميذ بعد حضوره دورة تقوية في مادة الفيزياء، حيث r علامة التلميذ (في صورة نسبة مئوية) و t تمثل عدد الأشهر بعد الدورة.

a. أنشئ جدولاً لقيم الأزواج المرتبة التي تمثل

$r = 90 - 25 \log(t + 1)$ مقرباً القيم إلى أقرب جزء

من عشرة. ثم ارسم التمثيل البياني للدالة في المستوى الإحداثي باستعمال هذه الأزواج المرتبة.

(يمكنك استعمال الحاسبة البيانية للتحقق من النتائج.)

b. أوجد معادلة معكوس الدالة. ثم فسر معناها.

28. مهارات التفكير العليا يبين الشكل أدناه أن الزلازل تحدث

تحت سطح الأرض عند نقطة F (مركز الزلزال)، النقطة E،

التي تقع على سطح الأرض فوق مركز الزلزال مباشرة، تسمى

المركز السطحي. تسجل محطة رصد الزلازل في النقطة S

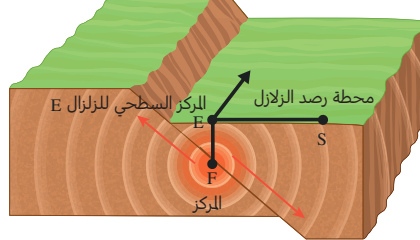
موجات الطاقة التي يولدها الزلزال. يمكن حساب قوة الموجة

السطحية، M، للزلزال باستعمال الصيغة:

$$M = \log\left(\frac{A}{T}\right) + 1.66(\log D) + 3.3$$

في هذه الصيغة تمثل A سعة تحرك الأرض بالميكرومتر

(μm)، و T الدورة بالثواني، و D قياس ES بالدرجات.



a. أوجد قوة الموجة السطحية للزلزال إذا كان

$D = 100^\circ$ ، $T = 2 \text{ s}$ ، و $A = 700 \mu\text{m}$

b. في الصيغة، $20^\circ < D \leq 160^\circ$ ، ما مقدار تأثير طول

ES في قوة الموجة السطحية؟ وضح إجابتك.

34. الوحدة 1 الدوال الأسية واللوغاريتمية

تدرب على اختبار

29. الدالة $h(x) = \ln(x + 2) - 1$ هي تحويل للدالة

$g(x) = \ln(x)$ ، أي مما يلي صحيح؟

اختر كل ما ينطبق.

A. الدالة h إزاحة للدالة g بمقدار وحدتين إلى الأعلى.

B. الدالة h إزاحة للدالة g بمقدار وحدتين إلى اليمين.

C. الدالة h إزاحة للدالة g بمقدار وحدتين إلى اليسار.

D. الدالة h إزاحة للدالة g بمقدار وحدة واحدة إلى الأسفل.

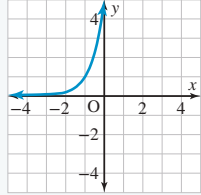
E. الدالة h إزاحة للدالة g بمقدار وحدة واحدة إلى اليسار.

F. خط التقارب الرأسي ينتقل وحدتين إلى اليسار.

G. خط التقارب الرأسي ينتقل وحدتين إلى اليمين.

30. اختبار SAT/ACT التمثيل البياني أدناه يمثل الدالة الأسية

$f(x) = 5^{x+1}$ ، أي من الدوال التالية تمثل معكوسها، $f^{-1}(x)$ ؟



A. $f^{-1}(x) = 1 + \log_5 x$ C. $f^{-1}(x) = \log_5(x - 1)$

B. $f^{-1}(x) = \log_5 x - 1$ D. $f^{-1}(x) = \log_5(x + 1)$

31. مهمة أدائية تُستعمل الدالة اللوغاريتمية

$M(d) = 5 \log d + 2$ لإيجاد القوة القصوى لتلسكوب، حيث

d طول قطر عدسة التلسكوب (mm) الذي يُستعمل للرصد.

الجزء A أوجد القوة القصوى لتلسكوب طول قطر عدسته 40 mm

الجزء B أوجد معادلة معكوس هذه الدالة.

الجزء C فسر لماذا قد يرغب علماء الفلك باستعمال

معكوس هذه الدالة. بَرِّ إجابتك.

الجزء D أوجد طول قطر عدسة تلسكوب قوتها القصوى

13.5 باستعمال معكوس هذه الدالة. تحقق من إجابتك

باستعمال جدول الدالة في الحاسبة البيانية.

28. a. سعة الموجة الزلزالية تساوي 9.2

b. يمكن لطول القوس زيادة قوة الموجة الزلزالية بين

2.2 و 3.7، مما يعني أن طول القوس يزيد قوة

الموجة الزلزالية 1.5 كحد أقصى.

31. الجزء A القوة القصوى للتلسكوب تساوي 10

الجزء B $d = 10^{\frac{(M-2)}{5}}$

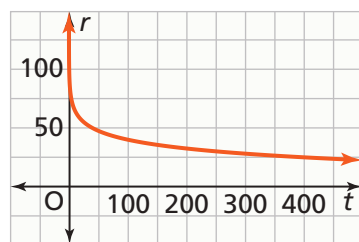
الجزء C يمكن لعلماء الفلك استعمال هذه الدالة

لإيجاد قطر عدسة التلسكوب بمعلومية القوة

القصوى للتلسكوب.

الجزء D 199.5 mm

27. a. راجع عمل الطلاب



t	r
9	65
99	40
200	32.5
300	28
400	24.9

b. $t = 10^{\frac{(r-90)}{(-25)}} - 1$ ، عدد الأشهر المنقضية على

بدء الدورة بدلالة مخزون التلميذ r .

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم. تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس. كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليقًا متميزًا يستفيد منه الطلاب، كلٌّ بحسب مستواه. سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

ملاحظات

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

الدرس 1-5

خواص اللوغاريتمات

نظرة عامة على الدرس

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على:

- ✓ استعمال خواص اللوغاريتمات لإعادة كتابة المقادير اللوغاريتمية.
- ✓ استعمال صيغة تغيير الأساس لإيجاد قيم مقادير لوغاريتمية وحل معادلات.

الفهم الأساس

يمكن استعمال خصائص اللوغاريتمات لإعادة كتابة المقادير اللوغاريتمية وإيجاد قيم اللوغاريتمات من خلال تغيير خصائص الأساس.

سابقًا في هذه الوحدة، تمكّن الطلاب من:

- استعمال العلاقة العكسية بين الدوال الأسية واللوغاريتمية لتعريف اللوغاريتمات وتمثيلها بيانيًا.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من:

- استعمال العلاقة العكسية بين الدوال الأسية واللوغاريتمية لإثبات خواص اللوغاريتمات.
- تبسيط وفك المقادير الجبرية باستعمال خواص اللوغاريتمات.

لاحقًا في هذه الوحدة، سيتمكّن الطلاب من:

- استعمال خواص اللوغاريتمات لحل معادلات أسية ولوغاريتمية.

يركز هذا الدرس على الدمج بين الاستيعاب المفاهيمي والمهارة الإجرائية والطلاقة.

- يفهم الطلاب خواص اللوغاريتمات ويربطونها بخواص العمليات والأسس.
- يوجد الطلاب قيم مقادير لوغاريتمية.

بناء المصطلحات

مراجعة المصطلحات

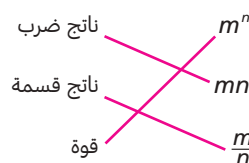
- لوغاريتم | $\logarithm$
- قوة | $power$
- ناتج الضرب | $product$
- ناتج القسمة | $quotient$

المصطلحات الجديدة

- صيغة تغيير الأساس | $change\ of\ base\ formula$

نشاط المصطلحات

في هذا الدرس، يطبق الطلاب خواص اللوغاريتمات لإعادة كتابة المقادير اللوغاريتمية. راجع المصطلحات "ناتج الضرب" و "ناتج القسمة" و "قوة" للتمهيد لتعلّم خواص اللوغاريتمات. ثم اطلب من الطلاب إكمال نشاط التوصيل لاختيار المصطلح الذي يصف العلاقة بين n و m في كل مقدار.



نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير ممارسات الرياضيات

بزر منطقيًا بطريقة تجريدية وكمية

يستعمل الطلاب صيغة لوغاريتمية لإيجاد تركيز أيونات الهيدروجين في الأمطار الحمضية.

ابحث عن البنية واستعملها

يطبق الطلاب القواعد الرياضية العامة التي تتعلق بخواص اللوغاريتمات لإعادة كتابة المقادير اللوغاريتمية وحل معادلات.

استكشف وبتّر منطقياً

محور تركيز التدريس يستنتج الطلاب إحدى خواص اللوغاريتمات عندما يدركون أن مجموع لوغاريتمي عددين يساوي لوغاريتم ناتج ضرب هذين العددين.

قبل البدء بالحلّ طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التفكير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

الجزء A

س: ما هي بعض خصائص التمثيل البياني للدالة $y = \log x$ ؟
[المقطع x للتمثيل البياني هو 1 وخط التقارب هو المحور y .]

س: ما أنواع المسائل التي يفيد التمثيل البياني أو الجدول في حلها؟
[نموذج إجابة: المسائل التي تتطلب إيجاد نمط.]

أثناء الحلّ مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البناء في تعلم الرياضيات

س: ماذا تلاحظ بشأن النقاط المبينة على التمثيل البياني؟
[قيمتا الإحداثي x أي 3 و 5 هما من عوامل العدد 15]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: اختر أربعة أعداد غير أولية، ثم أوجد لوغاريتم كل عدد ولوغاريتمات كل زوج من عواملها. أنشئ جدولاً بالنتائج التي حصلت عليها. هل هذه النتائج هي نفس النتائج التي حصلت عليها في الجزء B؟
[نعم؛ مجموع لوغاريتمي كل زوج من العوامل يساوي لوغاريتم العدد المرتبط بهما.]

بعد إنجاز الحلّ طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

اطلب من الطلاب مشاركة إجاباتهم عن سؤالي الجزأين B و C. قد يجد بعض الطلاب صعوبة في استعمال ما اكتشفوه في الجزء B للإجابة عن سؤال الجزء C

س: ماذا تلاحظ بشأن قيم $\log x$ في الجدول؟
[مجموع قيمتي $\log x$ الأوليتين يساوي قيمة $\log x$ الثالثة.]

س: كيف طبقت ما اكتشفته في الجزء B على الجزء C؟
[نموذج إجابة: في الجزء B، اكتشفت أن مجموع لوغاريتمي عاملين يساوي لوغاريتم ناتج ضربهما. بما أن العددين 3 و 15 من عوامل العدد 45، توقع أن $\log 45 = \log 3 + \log 15$ يساوي $\log 3 + \log 15$. وبالمثل، توقع أيضاً أن $\log 75 = \log 3 + \log 25$ يساوي $\log 3 + \log 5 + \log 15$.]

استعمل مع استكشف وبتّر منطقياً

عادات التفكير

عمّم هل تعتقد أن العلاقات التي وجدتها في فقرة "استكشف وبتّر منطقياً" تنطبق على اللوغاريتمات الطبيعية؟ أعط مثلاً على ذلك.

[نعم؛ $\ln 3 + \ln 5 = \ln 15$.]

كتاب الطالب، صفحة 35

1-5

خواص اللوغاريتمات
Properties of Logarithms

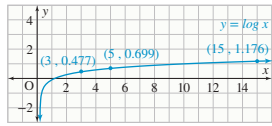
استطيع... استعمال خواص اللوغاريتمات لإعادة كتابة المقادير.

المصطلحات

• صيغة تغيير الأساس
change of base formula

استكشف وبتّر منطقياً

انظر إلى التمثيل البياني للدالة $y = \log x$ والأزواج المرتبة المبينة عليه.



A. أكمل الجدول أدناه.

x	3	5	15
$\log x$			

B. **ابحث عن العلاقات** ما العلاقة بين الأعداد 3 و 5 و 15؟ ما العلاقة بين لوغاريتمات 3 و 5 و 15؟

C. ماذا تتوقع أن تكون قيمة كل من $\log 45$ و $\log 75$ ؟ وضح إجابتك.

السؤال الأساسي كيف نستخدم خواص اللوغاريتمات لتبسيط المقادير وحل المعادلات اللوغاريتمية؟

نموذج من أعمال الطلاب

A.

x	3	5	15
$\log x$	0.477	0.699	1.176

B. $3 \times 5 = 15$ ، إذن، العددين 3 و 5 من عوامل العدد 15

$0.477 + 0.699 = 1.176$ ، إذن $\log 3 + \log 5 = \log 15$.

C. بما أن $45 = 3 \times 15$ ، فإن $\log 45$ يساوي $\log 3 + \log 15$ ،

وهذا يعني أن $\log 45$ يساوي 1.653

وبالمثل، $\log 75$ يساوي 1.875

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلم مركز

يفهم الطلاب أنه، كما في الأسس، هناك خصائص خاصة للضرب والقسمة والقوى مرتبطة باللوغاريتمات. سيكتشف الطلاب أثناء عملهم على أمثلة هذا الدرس أن هذه الخصائص مفيدة لإعادة كتابة المقادير وحل المعادلات الأسية.

س: ماذا تلاحظ بشأن خاصية الضرب لللوغاريتمات؟

[اللوغاريتم ناتج ضرب عاملين يساوي مجموع لوغاريتمي هذين العاملين.]

مثال 1 إثبات إحدى خواص اللوغاريتمات

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: لماذا استعملت المعادلتان $x = \log_b m$ و $y = \log_b n$ لبدء البرهان؟

[يمكن إعادة كتابة هذين المقدارين كمعادلتين أسيتين بأساس مشترك.

يمكن بعد ذلك جمع الأسس لإكمال البرهان.]

حاول أن تحل! الإجابات

1. ليكن $x = \log_b m$ و $y = \log_b n$ ، إذن، $b^x = m$ و $b^y = n$.

$$\frac{b^x}{b^y} = \frac{m}{n}$$

$$b^{x-y} = \frac{m}{n}$$

$$x - y = \log_b \left(\frac{m}{n} \right)$$

$$\log_b m - \log_b n = \log_b \left(\frac{m}{n} \right)$$

كيف تستعمل خواص اللوغاريتمات لتبسيط المقادير وحل المعادلات اللوغاريتمية؟

السؤال الأساس

المفهوم خواص اللوغاريتمات

بالنسبة للأعداد الموجبة b و m و n ، حيث $b \neq 1$ ، نطبق الخواص التالية.

$$\log_b mn = \log_b m + \log_b n$$

خاصية الضرب لللوغاريتمات

$$\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$$

خاصية القسمة لللوغاريتمات

$$\log_b m^a = a \log_b m$$

خاصية القوة لللوغاريتمات

نصيحة دراسية

بالنسبة لللوغاريتم الطبيعي، نطبق الخواص التالية:

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln(a^b) = b \ln(a)$$

مثال 1 إثبات إحدى خواص اللوغاريتمات

كيف يمكنك إثبات خاصية الضرب لللوغاريتمات؟

ليكن $x = \log_b m$ و $y = \log_b n$ ، إذن $b^x = m$ و $b^y = n$.

$$b^x \cdot b^y = m \cdot n$$

اضرب المقدار b^x في b^y

$$b^{x+y} = mn$$

اجمع الأسس

$$x + y = \log_b mn$$

أعد كتابة المعادلة في الصورة اللوغاريتمية

$$\log_b m + \log_b n = \log_b mn$$

عوض

حاول أن تحل! 1. أثبت خاصية القسمة لللوغاريتمات.

مثال 2 فكّ المقادير اللوغاريتمية

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: لماذا قد يكون من المفيد معرفة كيفية فكّ المقادير اللوغاريتمية؟
[قد يكون من الأسهل حل المعادلات اللوغاريتمية عند كتابة طرفي المعادلة في الصيغة التحليلية.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

2. a. $3 \log_7 r + 4 \log_7 t - \log_7 v$
b. $\ln 7 - 2 \ln 3 - 2 \ln 5 = \ln 7 - 2 \ln 15$

مثال 3 كتابة مقدار في صورة لوغاريتم واحد

طرح أسئلة هادفة

س: كيف ترتبط عملية فكّ المقادير اللوغاريتمية وعملية كتابة مقدار في صورة لوغاريتم واحد؟
[عملية كتابة المقادير اللوغاريتمية في صورة لوغاريتم واحد هي عكس عملية فكّ المقادير اللوغاريتمية.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

3. a. $\log_2 \left(\frac{c^5}{n^7} \right)$
b. $\ln 98$

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: هل من الضروري تطبيق خواص اللوغاريتمات في ترتيب معين؟
[نموذج إجابة: نعم، لا يمكن تطبيق خاصية القسمة للوغاريتمات قبل تطبيق خاصية القوة للوغاريتمات.]

استعمل مع المثالين 2 و 3

عادات التفكير

فكر وثابر في الحل باستعمال حقيقة أن $\log 2 \approx 0.3010$ و $\log 3 \approx 0.4771$ ، أوجد $\log 18$. وضح إجابتك.

[1.2553 تقريباً؛ بما أن $18 = 2 \times 3 \times 3$ ، فإن $\log 18 = \log 2 + \log 3 + \log 3$]

مثال 2 فكّ المقادير اللوغاريتمية

كيف يمكنك استعمال خواص اللوغاريتمات لفكّ المقدارين التاليين؟

A. $\log_5(a^2b^7)$

$$\log_5(a^2b^7) = \log_5(a^2) + \log_5(b^7)$$

$$= 2 \log_5 a + 7 \log_5 b$$

خاصية الضرب للوغاريتمات
خاصية القوة للوغاريتمات

B. $\ln \left(\frac{25}{3} \right)$

$$\ln \left(\frac{25}{3} \right) = \ln \left(\frac{5^2}{3} \right)$$

$$= \ln(5^2) - \ln 3$$

$$= 2 \ln 5 - \ln 3$$

أعد كتابة البسط في صورة قوة
خاصية القسمة للوغاريتمات
خاصية القوة للوغاريتمات

حاول أن تحلّ! 2. استعمل خواص اللوغاريتمات لفكّ المقدارين التاليين.

a. $\log_7 \left(\frac{r^3t^4}{v} \right)$

b. $\ln \left(\frac{7}{225} \right)$

فكر وثابر في الحل

يطلب فكّ المقادير اللوغاريتمية استعمال خواص مختلفة. انظر إلى المقدار الكلي أولاً لتحديد نتائج الخواص الذي ستستعمله.

مثال 3 كتابة مقدار في صورة لوغاريتم واحد

اكتب كل مقدار مما يلي في صورة لوغاريتم واحد.

A. $4 \log_4 m + 3 \log_4 n - \log_4 p$

$$4 \log_4 m + 3 \log_4 n - \log_4 p$$

$$= \log_4(m^4) + \log_4(n^3) - \log_4 p$$

$$= \log_4(m^4 n^3) - \log_4 p$$

$$= \log_4 \left(\frac{m^4 n^3}{p} \right)$$

خاصية القوة للوغاريتمات
خاصية الضرب للوغاريتمات
خاصية القسمة للوغاريتمات

B. $3 \ln 2 - 2 \ln 5$

$$3 \ln 2 - 2 \ln 5 = \ln(2^3) - \ln(5^2)$$

$$= \ln \left(\frac{2^3}{5^2} \right)$$

$$= \ln \left(\frac{8}{25} \right)$$

خاصية القوة للوغاريتمات
خاصية القسمة للوغاريتمات
بتسط الأساس

حاول أن تحلّ! 3. اكتب كل مقدار مما يلي في صورة لوغاريتم واحد.

a. $5 \log_5 c - 7 \log_5 n$

b. $2 \ln 7 + \ln 2$

لصحة دراسية

تذكر أن كل خاصية من خواص اللوغاريتمات ترتبط بعملية مختلفة. يشير الجمع إلى خاصية الضرب، والطرح إلى خاصية القسمة، والضرب في ثابت إلى خاصية القوة.

مثال 4 تطبيق خواص اللوغاريتمات

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: ماذا تمثّل الإشارة + في الرمز H^+ ؟ هل يؤثر ذلك في طريقة حل المعادلة؟
 H^+ هو تركيز أيونات الهيدروجين في محلول معيّن. تشير + إلى أن شحنة أيونات الهيدروجين موجبة. الرمز H^+ عبارة عن كمية متغير، وبالتالي لا تؤثر الإشارة + في طريقة حل المعادلة.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

4. 10^{-3} مول لكل لتر، أو 0.001 مول لكل لتر.

استعمل مع المثال 4

عادات التفكير

عقم ما أنواع الأعداد التي لوغاريتماتها سالبة؟ وضح إجابتك.

[لبعض الكسور لوغاريتمات سالبة، لأن الأساس المرفوع إلى أس سالب يساوي ناتج قسمة العدد 1 على ذلك المقدار الأسّي.]

مثال 5 إيجاد قيم المقادير اللوغاريتمية بتغيير الأساس

طرح أسئلة هادفة

س: ماذا يمثل كل متغير عند استعمال خاصية القوة للوغاريتمات؟
 $[m = 2 \text{ و } b = 10 \text{ و } n = \log_2 3]$

حاول أن تحلّ! الإجابات

5. a. 2.807

b. 0.683

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: هل عليك اتباع جميع الخطوات الموضحة في المثال لحل مسألة "حاول أن تحلّ"؟
 وضح إجابتك.

[كلا؛ يوضح المثال كيفية اشتقاق صيغة تغيير الأساس. لحل مسألة "حاول أن تحلّ"، يمكننا استعمال الصيغة مباشرة.]

مثال 4 تطبيق خواص اللوغاريتمات

تطبيق

يقيس الرقم الهيدروجيني pH تركيز أيونات الهيدروجين، الذي يُرمز له بالرمز H^+ ، في محلول معيّن. يقاس هذا التركيز بوحدة المول لكل لتر، وذلك باستعمال الصيغة: $pH = \log \frac{1}{[H^+]}$

أوجد تركيز أيونات الهيدروجين في الأمطار الحمضية.

عوض $pH = 4.5$

خاصية القسمة

حلّ لإيجاد $[H^+]$

اكتب المعادلة في الصورة الأسية

إذن، تركيز أيونات الهيدروجين في الأمطار الحمضية هو $0.0000316 \approx 10^{-4.5}$ مول لكل لتر.

حاول أن تحلّ! 4. أوجد تركيز أيونات الهيدروجين في لتر واحد من عصير البرتقال.

مثال 5 إيجاد قيم المقادير اللوغاريتمية بتغيير الأساس

كيف يمكنك استعمال لوغاريتمات أساسها 10 لإيجاد قيم لوغاريتمات أساسها 2؟

إيجاد قيمة $\log_2 3$ باستعمال الحاسبة، يجب كتابة $\log_2 3$ بدلالة لوغاريتمات أساسها 10

اضرب $\log_2 3$ في 1 في الصورة $\frac{\log_2 3 \cdot \log_2 2}{\log_2 2}$

خاصية القوة للوغاريتمات

بما أن $2^{\log_2 3} = 3$ ، فإن البسط

نشط إلى $\log_2 3$

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة المقدار

هذا يوضح صيغة تغيير الأساس:

بالنسبة للأعداد الموجبة a, b, m ، عندما $a \neq 1$ و $b \neq 1$ فإن $\log_a m = \frac{\log_b m}{\log_b a}$.

حاول أن تحلّ! 5. قذّر قيمة كل لوغاريتم أدناه، ثم استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة اللوغاريتم.

قرب الإجابة إلى أقرب جزء من ألف.

a. $\log_2 7$

b. $\log_3 3$

خطا شائع

المقدار $\log \frac{1}{[H^+]}$ يساوي $\log 1 - \log [H^+]$ وليس $\log [1 - H^+]$.

نصيحة دراسية

لقسمة اللوغاريتمات على الحاسبة باستعمال مقدار واحد، تأكد من وضع الأقواس في أماكنها الصحيحة. لإيجاد قيمة $\log_2 3$ ، اضغط على: $[\text{LOG}] [3] [D] [=] [\text{LOG}] [2] [D] [\text{ENTER}]$.

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 5 يواجه بعض الطلاب صعوبة في فهم صيغة تغيير الأساس.

• اطلب من الطلاب تحليل كل خطوة من خطوات عملية اشتقاق صيغة تغيير الأساس.

س: ما الهدف من ضرب الطرف الأيمن للمعادلة اللوغاريتمية في $\frac{\log 2}{\log 2}$ الذي يساوي 1؟

[لا يمكن إيجاد قيم اللوغاريتمات ذات الأساس 2 في معظم الحاسبات، لذا فإن الضرب

في $\frac{\log 2}{\log 2}$ يشكّل الخطوة الأولى في إعادة كتابة المقدار بأساس يساوي 10]

س: اشرح كيفية الانتقال من الخطوة الثانية إلى الخطوة الثالثة.

[الأسس واللوغاريتمات عمليتان متعاكستان، لذا فإن الأس $\log_2$ في المقدار

$\log_2 2$ يلغي مفعول الأساس 2، ليبقى $\log 3$ وحده.]

س: لماذا يمكن إيجاد قيمة $\frac{\log 3}{\log 2}$ باستعمال الحاسبة؟

[الأساس في اللوغاريتمين هو 10، ويمكن إيجاد قيم اللوغاريتمات التي أساسها 10

باستعمال الحاسبة.]

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 3 اطلب من الطلاب استكشاف تأثير الأقواس على كتابة المقادير في صورة لوغاريتم واحد.

• اكتب المقدار التالي على السبورة:

$$4 \log x + 3 \log 2 - (2 \log y + \log 5)$$

س: اكتب هذا المقدار في صورة لوغاريتم واحد.

$$[\log \left(\frac{8x^4}{5y^2} \right)]$$

س: اكتب $4 \log x + 3 \log 2 - 2 \log y + \log 5$ في صورة لوغاريتم واحد.

$$[\log \left(\frac{40x^4}{y^2} \right)]$$

س: كيف تغيرت طريقة كتابة المقدار $(4 \log x + 3 \log 2 - (2 \log y + \log 5))$ في

صورة لوغاريتم واحد بعد إزالة القوسين؟

[إزالة القوسين غيرت المقدار بحيث يتضمن المقام عاملاً واحداً.]

استعمال صيغة تغيير الأساس

مثال 6

إدراج مهام تعزّز التفكير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: لماذا يمكن حل المعادلة باستعمال اللوغاريتمات ذات الأساس 10 واللوغاريتمات الطبيعية؟

[بحسب صيغة تغيير الأساس، يجب أن يكون الأساس موجباً ولا يساوي 1 لذا يمكن استعمال اللوغاريتمات ذات الأساس 10، e، أو أي أساس آخر.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

1. $\left(\frac{\log 15}{\log 3} \right); 2.465$

خطأ شائع

حاول أن تحلّ! 6 قد يلجأ الطلاب إلى قسمة طرفي المعادلة على أساس القوة بدلاً من استعمال اللوغاريتمات. أكدّ لهم أن هذه المعادلة معادلة أسية وأن اللوغاريتمات هي معكوس الأسس.

استعمل مع المثالين 5 و 6

عادات التفكير

استعمل الأدوات المناسبة لماذا صيغة تغيير الأساس مفيدة عند إيجاد قيمة لوغاريتم باستعمال الحاسبة؟

[لا تحتوي الحاسبات العادية على خيار إيجاد لوغاريتم لعدد ذو أساس ليس 10 أو e، لذا فإن صيغة تغيير الأساس توفر طريقة لإيجاد قيمة المقدار باستعمال الحاسبة.]

ملخص المفهوم خواص اللوغاريتمات

س: ما فائدة خواص اللوغاريتمات في حل المسائل؟
[تساعد خواص اللوغاريتمات على إعادة كتابة اللوغاريتمات في صور مفيدة أكثر لحل مسائل معينة، ويمكن استعمال صيغة تغيير الأساس لتقدير قيمة اللوغاريتم.]

عبّر عن فهمك | طبّق فهمك

خطأ شائع

التمرين 5 قد يستعمل الطلاب خاصية الضرب بشكل غير صحيح لكتابة المقدار في الصورة $\ln(30st)$ بدلاً من $\ln(s^5t^6)$. وضح لهم أن أول خطوة هي كتابة $5 \ln s + 6 \ln t$ في الصورة $\ln s^5 + \ln t^6$ باستعمال خاصية الضرب لللوغاريتمات.

الإجابات

- 1. تساعد خواص اللوغاريتمات على تبسيط المقادير اللوغاريتمية المركبة.
- 2. إن تغيير الأساس إلى الأساس 10 يجعل إيجاد قيمة المقدار باستعمال الحاسبة أسهل.
- 3. استعملت أسماء الأس الخطأ للعدد c . المقدار الصحيح هو: $2 \log_4 c + 5 \log_4 d$
- 4. $2 \log_6 7 - \log_6 5$
- 5. $\ln(s^5t^6)$
- 6. $10^{-8.9}$ أو 1.259×10^{-9}

ملخص المفهوم خواص اللوغاريتمات

خاصية الضرب	خاصية القسمة	خاصية القوة	تغيير الأساس
$\log_b(mn) = \log_b m + \log_b n$	$\log_b\left(\frac{m}{n}\right) = \log_b m - \log_b n$	$\log_b(m^n) = n \cdot \log_b m$	$\log_a m = \frac{\log_b m}{\log_b a}$
لوغاريتم ناتج ضرب عددين يساوي مجموع لوغاريتمي هذين العددين.	لوغاريتم ناتج قسمة عددين يساوي الفرق بين لوغاريتمي هذين العددين.	لوغاريتم عدد مرفوع إلى أس يساوي ناتج ضرب الأس في لوغاريتم العدد.	اللوغاريتم الذي أساسه b لعدد يساوي لوغاريتم أساسه a للعدد مقسوماً على لوغاريتم أساسه a للعدد b .
$\log_2 20 = \log_2 4 + \log_2 5$	$\log_{10}\left(\frac{2}{3}\right) = \log_{10} 2 - \log_{10} 3$	$\log_3 16 = 4 \cdot \log_3 2$	$\log_5 7 = \frac{\log 7}{\log 5}$

عبّر عن فهمك

- 1. السؤال الأساسي كيف نستعمل خواص اللوغاريتمات لتبسيط المقادير وحل المعادلات اللوغاريتمية؟
- 2. المصطلحات لماذا من الشائع تغيير الأساس إلى الأساس 10 عند تطبيق صيغة تغيير الأساس مع أن ذلك ليس ضرورياً؟
- 3. حلل الخطأ تقول أسماء أن مفكوك المقدار $\log_4(c^2d^3)$ هو $5 \log_4 c + 5 \log_4 d$ بين خطأ أسماء وضح.

طبّق فهمك

- 4. استعمل خواص اللوغاريتمات لفك المقدار $\log_6\left(\frac{49}{5}\right)$.
- 5. استعمل خواص اللوغاريتمات لكتابة المقدار $5 \ln s + 6 \ln t$ في صورة لوغاريتم واحد.
- 6. استعمل الصيغة $\text{pH} = \log \frac{1}{[\text{H}^+]}$ لكتابة مقدار يمثل تركيز أيونات الهيدروجين في وعاء يحتوي على بيكربونات الصودا إذا علمت أن الرقم الهيدروجيني pH في المحلول يساوي 8.9

تدرب و حل مسائل دليل المهام

أساسي	متقدم
7-27, 32-40	7-15, 20-40

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	13	3
2	14-17	1
	7, 9	2
3	18-22, 39	1
	8, 11, 37	2
4	23, 36, 40	2
5	24-29, 38	1
	12	2
6	30-35	1
	10	2

الإجابات

7. قم بفك المقدار ثم عوض القيم التقريبية في المقدار لتجد أن القيمة التقريبية للوغاريتم $\log_3 \left(\frac{2}{5}\right)$ تساوي -0.834
8. لفك المقدار، افصل العوامل الموجودة داخل اللوغاريتم إلى مجموع لوغاريتمات هذه العوامل. لكتابة مقدار في صورة لوغاريتم واحد، ادمج اللوغاريتمات الموجودة في المجموع في لوغاريتم ناتج الضرب.
9. $y = \log \left(\frac{1}{x}\right) = \log 1 - \log x$
 $= 0 - \log x = -\log x$
10. تستطيع لطيفة التحقق مما إذا كان $6^{2.387} = 72$
11. استعمل سالم العدد 2 أشأ بدلاً من $\frac{1}{2}$ ، المقدار الصحيح هو $\log_3 2y^{\frac{1}{2}}$.
12. استعملت دانة صيغة تغيير الأساس بشكل غير صحيح.
13. ليكن $\log_b (m^n) = x$

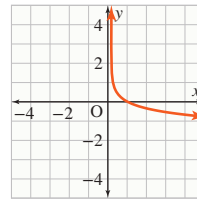
$$\begin{aligned} b^x &= m^n \\ (b^x)^{\frac{1}{n}} &= (m^n)^{\frac{1}{n}} \\ b^{\frac{x}{n}} &= m \\ \frac{x}{n} &= \log_b m \\ x &= n \log_b m \\ \log_b (m^n) &= n \log_b (m) \end{aligned}$$

14. $\log_5 2 - \log_5 3$
15. $\log_6 2 + 5 \log_6 m + 3 \log_6 n$
16. $\ln 2 + 5 \ln x$
17. $\log_2 x - \log_2 5 - \log_2 y$

تدرب و حل مسائل

عزز فهمك

7. استعمل البنية وضح كيفية استعمال $\log_3 2 \approx 0.631$ و $\log_3 5 \approx 1.465$ لإيجاد القيمة التقريبية للوغاريتم $\log_3 \left(\frac{2}{5}\right)$ دون تطبيق صيغة تغيير الأساس.
8. تواصل بدقة اشرح معنى "فك مقدار لوغاريتمي". ما العلاقة بين فك المقادير اللوغاريتمية وكتابة المقادير اللوغاريتمية في صورة لوغاريتم واحد؟
9. مهارات التفكير العليا التمثيلان البيانيان للذاتين $y = \log \left(\frac{1}{x}\right)$ و $y = -\log x$ مبيّنان أدناه. لاحظ أن التمثيل البياني هو نفسه للمعادلتين. استعمل خواص اللوغاريتمات لتوضيح لماذا التمثيل البياني هو نفسه للمعادلتين.



10. تواصل بدقة استعملت لطيفة صيغة تغيير الأساس لحل المعادلة $6^x = 72$ فوجدت أن $x = 2.387$ كيف تستطيع لطيفة التحقق من صحة إجابتها؟
11. حل الخطأ صف وضح خطأ سالم عند كتابته للمقدار اللوغاريتمي التالي بدلالة لوغاريتم واحد كما يلي.

$$\log_3 2 + \frac{1}{2} \log_3 y = \log_3 2y^2$$

X

12. حل الخطأ تريد دانة إيجاد قيمة تقريبية للمقدار $\log_2 9$ باستعمال الحاسبة، فأدخلت المقدار المكافئ $\frac{\ln 2}{\ln 9}$ ، لكن القيمة العشرية ليست قريبة من القيمة التقديرية التي وجدتتها وهي 3، أين أخطأت دانة؟

$$\log_2 9 = \frac{\ln 2}{\ln 9}$$

X

40 الوحدة 1 الدوال الأسية واللوغاريتمية

تدرب

13. استعمل خواص الأسس لإثبات خاصية القوة للوغاريتمات. انظر المثال 1

في التمارين 14-17، استعمل خواص اللوغاريتمات لفك المقدار. انظر المثال 2

14. $\log_5 \left(\frac{2}{3}\right)$
15. $\log_6 (2m^5n^3)$
16. $\ln 2x^5$
17. $\log_2 \left(\frac{x}{5y}\right)$

في التمارين 18-22، استعمل خواص اللوغاريتمات لكتابة المقدار في صورة لوغاريتم واحد. انظر المثال 3

18. $9 \ln x - 6 \ln y$
19. $\log_5 6 + \frac{1}{2} \log_5 y$
20. $2 \log 10 + 4 \log (3x)$
21. $\frac{1}{3} \ln 27 - 3 \ln (2y)$
22. $8 \log_3 2 + 5 \log_3 c + 7 \log_3 d$

23. استعمل خواص اللوغاريتمات لتبين أن بالإمكان كتابة المقدار $\text{pH} = \log \frac{1}{[\text{H}^+]}$ في الصورة $\text{pH} = -\log [\text{H}^+]$. انظر المثال 4

في التمارين 24-29، استعمل صيغة تغيير الأساس لإيجاد قيمة اللوغاريتم. قارب إلى أقرب جزء من ألف. انظر المثال 5

24. $\log_4 9$
25. $\log_6 5$
26. $\ln 3$
27. $\log_2 7$
28. $\log_9 12$
29. $\ln 23$

في التمارين 30-35، استعمل صيغة تغيير الأساس لحل المعادلة وإيجاد قيمة x . أعط الحل الدقيق في صورة لوغاريتم، ثم حلًا تقريبيًا مقربًا إلى أقرب جزء من ألف. انظر المثال 6

30. $3^x = 4$
31. $5^x = 11$
32. $8^x = 10$
33. $2^x = 30$
34. $7^x = 100$
35. $4^x = 55$

25. 0.898
26. 1.099
27. 2.807
28. 1.131
29. 3.135
30. $\left(\frac{\log 4}{\log 3}\right)$; 1.262
31. $\left(\frac{\log 11}{\log 5}\right)$; 1.490
32. $\left(\frac{\log 10}{\log 8}\right)$; 1.107

18. $\ln \left(\frac{x^9}{y^6}\right)$
19. $\log_5 (6y^{\frac{1}{2}})$
20. $\log (8 \cdot 100x^4)$
21. $\ln \left(\frac{3}{8y^3}\right)$
22. $\log_3 (256c^5d^7)$
23. $\text{pH} = \log \left(\frac{1}{[\text{H}^+]}\right) = \log 1 - \log [\text{H}^+]$
 $= 0 - \log [\text{H}^+] = -\log [\text{H}^+]$
24. 1.585

الإجابات

33. $\left(\frac{\log 30}{\log 2}\right); 4.907$

34. $\left(\frac{\log 100}{\log 7}\right); 2.367$

35. $\left(\frac{\log 55}{\log 4}\right); 2.891$

36. a. 80 dB
b. 10^{-8} W/m^2

c. 10 000 مرة

37. a. $A = \log(5t^2)$

b. 4 325 شخصاً

40. الجزء A 2.3

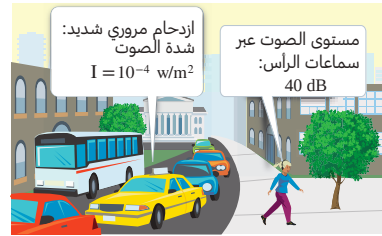
الجزء B تزيد $10^{0.9}$ مرة، أو 7.94 مرة تقريباً.

الجزء C 150 مرة

تدرب وحل مسائل

طبق

36. **فكر وثابر في الحل** يُقاس مستوى الصوت بوحدة الديسيبل. نمذج الدالة $L(I) = 10 \log \frac{I}{I_0}$ مستوى صوت شدته I (بوحدة W/m^2)، حيث I_0 تمثل شدة صوت يُسمع بالكاد (10^{-12} W/m^2 تقريباً).



a. أوجد مستوى الديسيبل للصوت الذي تصدره السيارات في ازدحام مروري شديد.

b. أوجد شدة الصوت الذي تصدره آلة موسيقية يُعزف عليها بقوة 40 ديسيبل.

c. كم مرة تزيد شدة الصوت الناتجة من زحمة السير عن شدة صوت الموسيقى؟

37. **نمذج** جمع محمد بيانات عن عدد الحضور في مدينة ألعاب ودرجات الحرارة القصوى اليومية. لاحظ أن المعادلة $A = 2 \log t + \log 5$ تنمذج القيمة التقريبية لعدد الحضور A بالآلاف الأشخاص، في مدينة الألعاب، عندما تكون درجة الحرارة القصوى اليومية t فهرنهايت.

a. استعمل خواص اللوغاريتمات لتبسيط الصيغة التي توصل إليها محمد.

b. تبين الصورة أدناه درجات الحرارة القصوى اليومية في بعض أيام الأسبوع.



ما عدد الحضور المتوقع يوم الأربعاء؟
قرب الإجابة إلى أقرب عدد كلي.

تدرب على اختبار

38. صل كل مقدار بالمقدار المكافئ له.

- I. $\log_4 20$ B A. $\log_2 20 - \log_2 4$
II. $2 \log_2 5$ C B. $\log_4 2 + \log_4 10$
III. $\log_2 5$ A C. $\frac{\log 25}{\log 2}$
IV. $4 \log_4 2$ D D. $\log_2 4$

39. **اختبار SAT/ACT** استعمل خواص اللوغاريتمات لكتابة المقدار التالي بدلالة لوغاريتم واحد.

$$2(\log_3 20 - \log_3 4) + 0.5 \log_3 4$$

- A. $\log_3 4$
B. $\log_3 5$
C. $\log_3 25$
D. $\log_3 50$

40. **مهمة أدائية** تُقاس قوة الزلازل، أو شدتها، باستعمال مقياس ريختر. تُنمذج قوة زلزال سعة موجته الزلزالية A بالدالة:

$$R(A) = \log \frac{A}{A_0}$$

حيث A_0 تمثل سعة أصغر زلزال قابل للكشف.

الجزء A إذا حدث زلزال سعته أكبر بمقدار 200 مرة من سعة أصغر زلزال قابل للكشف A_0 ، أوجد قوة هذا الزلزال على مقياس ريختر.

الجزء B كم مرة تقريباً تزيد سعة زلزال شدته 6.8 درجة على مقياس ريختر عن سعة زلزال شدته 5.9 درجة على مقياس ريختر؟

الجزء C إذا كانت شدة أحد الزلازل أكبر من شدة زلزال آخر بمقدار 150 مرة، بكم تزيد شدة الزلزال الأكثر شدة عن شدة الزلزال الأقل شدة؟

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم. تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس. كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليقًا متميزًا يستفيد منه الطلاب، كلٌّ بحسب مستواه. سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

المعادلات الأسية واللوغاريتمية

نظرة عامة على الدرس

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على:

- ✓ استعمال اللوغاريتمات في كتابة حلول النماذج الأسية.
- ✓ حل المعادلات الأسية واللوغاريتمية.

الفهم الأساس

يمكن حل بعض المعادلات الأسية بإعادة كتابة طرفي المعادلة بأساس مشترك. بالنسبة لغيرها من المعادلات، تُعد إعادة كتابة المعادلة باستعمال اللوغاريتمات وتطبيق خواص اللوغاريتمات طريقة أكثر فعالية.

سابقًا في هذه الوحدة، تمكّن الطلاب من:

- تبسيط وفكّ المقادير والمعادلات باستعمال خواص اللوغاريتمات.

في هذا الدرس، يتمكّن الطلاب من:

- استعمال بنية المقادير الأسية واللوغاريتمية لتحديد طرائق إعادة كتابتها في صور أخرى.
- إنشاء وحل المعادلات الأسية واللوغاريتمية وبناء الحجج الرياضية لتبرير طرائق الحل.

يركز هذا الدرس على الدمج بين الاستيعاب المفاهيمي والمهارة الإجرائية والطلاقة.

- يوشع الطلاب فهمهم لخواص اللوغاريتمات ليشمل خاصية المساواة للمعادلات اللوغاريتمية.
- يستعمل الطلاب فهمهم لخواص اللوغاريتمات في حل المعادلات الأسية واللوغاريتمية.

بناء المصطلحات

العربية | الإنجليزية

المصطلحات الجديدة

- معادلة أسية | *exponential equation*
- معادلة لوغاريتمية | *logarithmic equation*

نشاط المصطلحات

ساعد الطلاب على مراجعة المصطلحين "خطي" و"تربيعي". إن اقتضت الحاجة، اطلب من الطلاب تحديد نوع المعادلات المبينة أدناه.

 $y = x^3 - 4$: [تكعيبية] $y = 2 \cdot 5^x$: [أسية] $y = \frac{1}{2}x + 5$: [خطية] $y = 5 - 3x + 3x^2$: [تربيعية] $\log x = \log (2x - 1)$: [لوغاريتمية] $7x - 1 = 13$: [خطية] $4^{(2x-1)} = 7^{(x+2)}$: [أسية] $0.5x^2 + 2 = -x^2 + 4x$: [تربيعية]

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير ممارسات الرياضيات

بتر منطقيًا بطريقة تجريدية وكمية

يهتم الطلاب بمعنى الكميات عند تحديد القيم التي يجب تعويضها عن كل متغير لمعرفة الزمن اللازم للسيطرة على انتشار النيران المنطلعة في عدد معين من الفدادين.

ابحث عن البنية واستعملها

يبحث الطلاب عن أنماط لتحديد ما إذا كان عليهم استعمال اللوغاريتم الطبيعي، أم اللوغاريتم الاعتيادي لحل المعادلات الأسية. يستعملون البنية لإيجاد معدل الفائدة السنوي الذي ينتج عنه مبلغ متوقع من المال.

نموذج وناقش

محور تركيز التدريس يكتب الطلاب معادلات أسية لنمذجة بيانات المبيعات ويحددون متى تتجاوز مبيعات أحد النموذجين مبيعات النموذج الآخر. يدرك الطلاب حاجتهم إلى طرق فعالة لحل المعادلات الأسية.

قبل البدء بالحلّ

طلاب الصف مجتمعين

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: في رأيك، لماذا استعمال نموذج أسي أفضل من استعمال نموذج خطي أو تربيعي لحل هذه المسألة؟

[بما أن المبيعات لا تتزايد بمعدل ثابت، لذا فإن استعمال نموذج خطي لن يكون مجديًا. يبدو أيضًا أن المبيعات ستستمر في التزايد مع تزايد الإقبال على هذين المنتجين. بما أن البيانات لا تتضمن مؤشرات إلى تراجع المبيعات، فإن استعمال نموذج تربيعي أيضًا لا يعدّ منطقيًا.]

أثناء الحلّ

مجموعات صغيرة

دعم عملية التحدي البناء في تعلم الرياضيات

س: كيف تعرف أن مبيعات الأجهزة من النموذج B ستخطي مبيعات الأجهزة من النموذج A؟

[معدل تزايد مبيعات النموذج B أكبر من معدل تزايد مبيعات النموذج A. إذن، في النهاية ستكون مبيعات الأجهزة من النموذج B أكبر من مبيعات الأجهزة من النموذج A.]

س: كيف يمكن استعمال المعادلتين لتحديد متى سيتوقف المتجر عن بيع أجهزة من النموذج A؟

[أوجد قيمة y لكل من المعادلتين اللتين تنمذجان مبيعات الأجهزة لأعداد مختلفة من الأسابيع إلى أن تجد الأسبوع الذي تكون فيه مبيعات الأجهزة من النموذج A أقل من مبيعات الأجهزة من النموذج B.]

للطلاب سريعي الإنجاز

س: مثل المعادلتين اللتين كتبتهما بيانيًا. هل يؤكد التمثيلان البيانيان النتائج التي توصلت إليها؟ وضح إجابتك.

[نعم؛ تشير نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين إلى الزمن الذي تبدأ فيه مبيعات الأجهزة من النموذج B بتجاوز مبيعات الأجهزة من النموذج A. كما أن قيمة الإحداثي x تتطابق مع النتيجة.]

بعد إنجاز الحلّ

طلاب الصف مجتمعين

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

اطلب من الطلاب مشاركة إجاباتهم عن الجزء A.

س: لماذا أعطت طرق مختلفة نفس الإجابة عن الجزء B؟

[على الرغم من أن طرق إيجاد المعادلات قد تكون مختلفة، إلا أن المعادلات نفسها يجب أن تكون متشابهة إلى حد ما.]

كتاب الطالب، صفحة 43

1-6

المعادلات الأسية
واللوغاريتمية

Exponential and
Logarithmic Equations

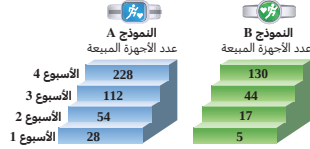
استطيع... حل المعادلات الأسية
واللوغاريتمية.

المصطلحات

- معادلة أسية
exponential equation
- معادلة لوغاريتمية
logarithmic equation

نموذج وناقش

يبيع صاحب متجر للمعدات الرياضية نموذجين جديدين من أجهزة تتبع اللياقة البدنية. يكفي إلقاء نظرة سريعة على البيانات أدناه لملاحظة أن مبيعات كلا النموذجين في تزايد. لكن، لسوء الحظ، مساحة مخزن البضائع في المتجر محدودة، لذا قرر مدير المتجر أن يتوقف عن بيع أجهزة من النموذج A عندما تتجاوز مبيعات النموذج B مبيعات النموذج A.



A. **نموذج** أوجد معادلة دالة أسية تنمذج مبيعات كل نموذج، ثم اشرح كيف توصلت إلى المعادلة.
B. بالاستناد إلى المعادلة التي كتبتها، حدّد متى سيتوقف المتجر عن بيع أجهزة من النموذج A.

السؤال الأساس كيف تساعدك خصائص اللوغاريتمات والأسس على حل المعادلات؟

المفهوم خاصة المساواة للمعادلات الأسية

نموذج من أعمال الطلاب

A. باستعمال الحاسبة، نوجد نموذج الانحدار الأسّي لكل مجموعة من البيانات.

النموذج الأسّي للنموذج A هو $y = 13.6266(2.0180)^x$

والنموذج الأسّي للنموذج B هو $y = 1.6408(2.9801)^x$

B. مثل المعادلتين بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية. يتقاطع التمثيلان البيانيان عند

$x = 6$ تقريبًا، لذا سيتوقف المتجر عن بيع أجهزة من النموذج A بعد 6 أسابيع.

استعمل مع نموذج وناقش

عادات التفكير

ابحث عن العلاقات كيف تعرف أن بيانات المبيعات يجب نمذجتها بدالة أسية؟

[عند حساب كل من الانحدار الخطي والتربيعي والأسّي، نجد أن قيمة معامل الارتباط r هي الأعلى في النموذج الأسّي، لذا فإن النموذج الأسّي هو الأكثر دقة لنمذجة البيانات.]

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلم مركز

ذكر الطلاب بأن العلاقة بين الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية علاقة عكسية. سيكتشف الطلاب فائدة ذلك عند حل المعادلات أثناء عملهم على أمثلة هذا الدرس.

حل المعادلات الأسية باستعمال أساس مشترك

مثال 1

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: لماذا أعدنا كتابة كل طرف من طرفي المعادلة في صورة مكافئة لها أساسها العدد 2؟
[لحل معادلة أسية، يجب أن يكون الأساس في طرفي المعادلة هو نفسه.]

س: هل يمكن إعادة كتابة طرفي المعادلة باستعمال $\frac{1}{2}$ أو 4 أو 10 أساسًا مشتركًا بدلًا من 2؟

[يمكن إعادة كتابة طرفي المعادلة باستعمال $\frac{1}{2}$ أو 4 أساسًا مشتركًا. كما يمكن إعادة كتابتهما باستعمال 10 أساسًا مشتركًا، لكن الأساس 10 يعقد المعادلة أكثر بدلًا من تسهيل حلها.]

حاول أن تحل! الإجابات

- a. 2
b. $-\frac{1}{2}$

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: ما الأساس الذي استعملته لمعادلة الجزء a؟ لمعادلة الجزء b؟

[استعملت العدد 5 لمعادلة الجزء a لأنه عامل مشترك بين العددين 25 و 125؛ واستعملت العدد 10 لمعادلة الجزء b لأنه عامل مشترك بين العددين 0.001 و 10]

كيف تساعدك خصائص اللوغاريتمات والأسس على حل المعادلات؟

السؤال الأساس

المفهوم: خاصية المساواة للمعادلات الأسية

بالرموز: إذا كان $b > 0$ و $b \neq 1$ ، فإن $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا $x = y$.

لفظيًا: إذا تساوت قوتان لهما نفس الأساس، فإن أسيهما متساويان، إذا تساوى أسا قوتين لهما نفس الأساس، فإن القوتين متساويتان.

المصطلحات

المعادلة الأسية هي المعادلة التي تتضمن متغيرات في أسسها.

مثال 1: حل المعادلات الأسية باستعمال أساس مشترك

حل المعادلة $4^{3x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+7}$.

اكتب المعادلة الأصلية $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+7} = 4^{3x}$

أعد كتابة طرفي المعادلة بأساس مشترك $(2^{-1})^{x+7} = (2^2)^{3x}$

خاصية قوة القوة $2^{-x-7} = 2^{6x}$

خاصية المساواة للمعادلات الأسية $-x - 7 = 6x$

أضف x إلى طرفي المعادلة $-7 = 7x$

اقسم طرفي المعادلة على 7 $-1 = x$

حاول أن تحل! 1. حل المعادلتين التاليتين باستعمال أساس مشترك.

a. $25^{3x} = 125^{x+2}$

b. $0.001 = 10^{6x}$

الدرس 1-6 المعادلات الأسية واللوغاريتمية 43

مثال 2 إعادة كتابة المعادلات الأسية باستعمال اللوغاريتمات

إدراج مهام تعزّز التفكير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: لماذا المقدار $10^{(\log 17)}$ مكافئ للعدد 17؟
[لأن الأس واللوغاريتم عمليتان عكسيتان]

حاول أن تحلّ! الإجابات

$$2. \log 5^x = \log 12$$

استعمل مع المثال 2

عادات التفكير

تواصل بدقة ما الذي يجب أن يكون صحيحاً بخصوص التعبيرات الأسية لجعل الأسس متساوية في مقدارين أسيين متساويين؟

[يجب أن يكون أساسا المقدارين متكافئين.]

مثال 3 حل المعادلات الأسية باستعمال اللوغاريتمات

طرح أسئلة هادفة

س: لماذا طرحنا $\log 3$ و $\log 5$ من طرفي المعادلة؟

[للمقدارين $x \log 3$ و $x \log 5$ عامل مشترك هو x بالإضافة إلى أن $\log 3$ عدد ثابت. بطرح هذين الحدين من طرفي المعادلة وإخراج x عاملاً مشتركاً، يمكن حل المعادلة.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

$$3. \frac{\log 7}{(3 \log 2 - \log 7)} \text{ أو } 14.57 \text{ تقريباً.}$$

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: وضح كيف استعملت خاصية التوزيع لحل المعادلة.

[استعملت خاصية التوزيع لضرب $\log 7$ في $(x + 1)$. ثم استعملت مرة أخرى لإخراج x عاملاً مشتركاً من $(3x \log 2 - x \log 7)$]

الاستيعاب المفاهيمي

مثال 2 إعادة كتابة المعادلات الأسية باستعمال اللوغاريتمات

كيف يمكنك إعادة كتابة المعادلة $17 = 4^x$ باستعمال اللوغاريتمات؟

لا يوجد أساس مشترك بين العددين 17 و 4، لذا أكتب كلا منهما باستعمال إحدى قوى العدد 10
أكتب المعادلة الأصلية
 $10^{\log 17} = 10^{\log 4^x}$
أعد كتابة المعادلة باستعمال قوى العدد 10
خاصية المساواة للمعادلات الأسية
 $\log 17 = \log 4^x$
إن إعادة كتابة المقادير باستعمال اللوغاريتمات يساعد على حل أنواع كثيرة من المسائل.

حاول أن تحلّ! 2. أعد كتابة المعادلة $5^x = 12$ باستعمال اللوغاريتمات.

المفهوم خاصية المساواة للمعادلات اللوغاريتمية

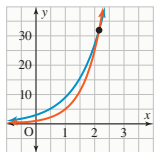
بالرموز إذا كان $x > 0$ و $y > 0$ ، فإن $\log_x x = \log_y y$ إذا فقط إذا $x = y$.

لفظياً إذا تساوى لوغاريتمان (أو أسان) لهما نفس الأساس، تكون النتيجة (النتائج) بحسب لوغاريتميهما (متساويتين، وإذا تساوت نتيجة لهما نفس الأساس، يكون لوغاريتمهما الكميّتين (أو أساهما) متساويين.

مثال 3 حل المعادلات الأسية باستعمال اللوغاريتمات

حل المعادلة $3^{x+1} = 5^x$

أكتب المعادلة الأصلية
خاصية المساواة للمعادلات اللوغاريتمية
خاصية القوة للوغاريتمات
استعمل خاصية التوزيع
اعزل المتغير ثم حلّ بإخراج العامل المشترك x
افسم
أوجد قيمة x



تحقق

عوض 2.15 في المعادلة الأصلية:

$$3^{2.15+1} \approx 3^{3.15} \approx 31.8$$

$$5^x \approx 5^{2.15} \approx 31.8$$

إذن، نقطة تقاطع التمثيلين البيانيين هي (2.15, 31.8) تقريباً.

حاول أن تحلّ! 3. حل المعادلة $2^{3x} = 7^{x+1}$

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 3 اطلب من الطلاب استكشاف حل المعادلات الأسية متعددة الخطوات.

• اطلب من الطلاب حل المعادلات التالية وتقريب إجاباتهم إلى أقرب جزء من ألف.

$$1. 15 = 6^{2x} - 9 \quad [0.887]$$

$$2. 5^{x-5} + 1 = 4 \quad [5.683]$$

$$3. 2^{2x+1} - 6 = -3 \quad [0.293]$$

س: ماذا ستفعل أولاً لحل هذه المعادلات؟

[أعد كتابة المعادلة بحيث يكون الحد الأسّي في أحد طرفي المعادلة والحد الثابت في الطرف الآخر.]

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 2 يواجه بعض الطلاب صعوبة في إعادة كتابة المعادلات باستعمال اللوغاريتمات.

• اطلب من الطلاب إعادة كتابة المعادلات التالية باستعمال اللوغاريتمات.

$$1. 5^x = 16 \quad [x \log 5 = \log 16]$$

$$2. 2^{2x-3} = 19 \quad [(2x-3) \log 2 = \log 19]$$

$$3. 4^{3x} = 6^{x-2} \quad [3x \log 4 = (x-2) \log 6]$$

س: ما الخاصية التي استعملتها لإعادة كتابة كل معادلة؟

[خاصية القوة للوغاريتمات.]

استعمال نموذج أسي

مثال 4

طرح أسئلة هادفة

س: كيف تعرف أن جميع النسب بين أعداد الفدادين المتتالية تساوي 1.8؟
[بما أن عدد الدقائق يتزايد بمقدار 1، لذا نقسم عددين متتاليين من الفدادين لإيجاد النسب].

س: لماذا معرفة أن جميع النسب تساوي 1.8 تعني أن معدل انتشار النار b يساوي 1.8 أيضًا؟

[عندما تكون النسب بين قيم y متساوية، فمن الأفضل استعمال نموذج أسي تكون فيه قيمة b هي النسبة الثابتة].

حاول أن تحل! الإجابات

4. 5.5 دقيقة تقريبًا

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: هل تتوقع أن تكون الإجابة أكبر أم أصغر من الإجابة في المثال؟ وضح إجابتك.
[أصغر؛ يجب أن يستغرق انتشار الحريق في مساحة مقدارها 100 فدان زمنًا أقل من زمن انتشاره في مساحة مقدارها 160 فدان. ولكن، بما أن النار تنتشر أسيًا، يجب أن لا يكون الفرق بين الزمنين كبيرًا].

استعمل مع المثال 4

عادات التفكير

استعمل البنية ما فائدة استعمال اللوغاريتمات في حل المعادلات الأسية؟

[تسمح لك اللوغاريتمات بإخراج المتغير من الأس ودمجه في المقدار، الأمر الذي يمكنك من إيجاد قيمة المتغير].

تعزيز المهارات اللغوية

استعمل مع المثال 4

القراءة مستوى 1 اطلب من الطلاب قراءة فقرة "فشر" من حل المثال، ثم اطلب منهم البحث عن معنى كلمة "تحقق" في قاموس.

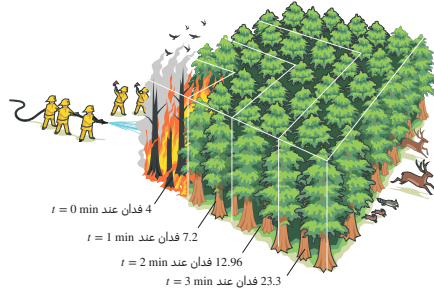
س: ما معنى كلمة "تحقق"؟ [افحص، تأكد]

تطبيق

مثال 4

استعمال نموذج أسي

يبين الشكل أدناه معدل انتشار النار لأحد حرائق الغابات مع مرور الزمن. يستطيع فريق الإطفاء السيطرة على نيران لا تزيد سعة انتشارها عن 160 فدانًا من دون الاستعانة بفريق إطفاء أخرى. أوجد الزمن، بالدقائق، اللازم لخروج النار عن السيطرة في حال لم يستعن فريق الإطفاء بفريق إطفاء أخرى. قُرب إجابتك إلى أقرب دقيقة.



استعمل النموذج $y = ab^x$ ، حيث y عدد الفدادين، و a عدد الفدادين الابتدائي، و b معدل انتشار النار، و t عدد الدقائق منذ اشتعال النيران.

بما أن النسبة بين أعداد الفدادين المتتالية هي 1.8، فإن قيمة b في نموذج النمو الأسي تساوي 1.8، إذن النموذج هو $160 = 4(1.8)^t$

حل المعادلة لإيجاد قيمة t .

اكتب المعادلة الأصلية

اقسم الطرفين على 4

خاصية المساواة للمعادلات اللوغاريتمية

خاصية القوة للوغاريتم

اعزل المتغير t

أوجد قيمة t

$$160 = 4(1.8)^t$$

$$40 = (1.8)^t$$

$$\log 40 = \log (1.8)^t$$

$$\log 40 = t \log 1.8$$

$$\frac{\log 40}{\log 1.8} = t$$

$$6.276 \approx t$$

$$4(1.8)^{6.276} \approx 160.01$$

$$4(1.8)^{6.276} \approx 160.01$$

إذن، لدى فريق الإطفاء أكثر من 6 دقائق بقليل للسيطرة على النيران قبل الاستعانة بفريق إطفاء أخرى.

حاول أن تحل! 4. كم دقيقة يستغرق انتشار النيران في مساحة مقدارها 100 فدانًا؟

الدرس 1-6 المعادلات الأسية واللوغاريتمية 45

الكتابة مستوى 2 ناقش معنى كلمة "فدان" وكيفية لفظها.

س: ما الوحدات الأخرى التي تُستعمل لقياس المساحة؟
[نماذج إجابة: إنش مربع، قدم مربع، ياردة مربعة، سنتمتر مربع، متر مربع]

س: اختر زميلًا من زملائك، وتبادلا الأدوار في استعمال وحدات المساحة التي ناقشناها، بما فيها "الفدان"، في جملة مكتملة. [استمع إلى الطلاب وهم يستعملون وحدات المساحة كما ينبغي في جمل مكتملة].

التحدث مستوى 3 ناقش معنى كلمة "انتشار".

س: كيف يوضح المخطط، الذي يبين كيفية انتشار النيران، على أن النيران تنتشر أسيًا؟ [الجزء الذي يبين عدد الفدادين المحترقة خلال عدد معين من الدقائق في المخطط يشير إلى أن النيران تنتشر أسيًا؟]

س: هل تعني كلمة "انتشار" (أو المصطلح "نمو") "النمو الأسي" دائمًا أم يمكن للتمثيلات البيانية الخطية والتربيعية أيضًا أن تبين النمو؟ وضح إجابتك. [المصطلح "نمو" لا يعني دائمًا النمو الأسي. التمثيلات البيانية للمعادلات الخطية أيضًا يمكن أن تظهر معدل نمو ثابت. كذلك التمثيلات البيانية للمعادلات التربيعية تُظهر معدل النمو المتغير، لكن ليس الأسي].

مثال 5 حل المعادلات اللوغاريتمية

بناء الطلاقة الإجرائية انطلاقًا من الاستيعاب المفاهيمي

س: ما هو الحل غير المقبول وكيف نصل إليه؟
[الحل غير المقبول هو جذر المعادلة المحوّل الذي ليس جذرًا للمعادلة الأصلية. ونحصل عليه عندما نحوّل معادلة لحلها، بغض النظر عن مجال المعادلة الأصلية.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

5. a. 9 (حل غير مقبول)
b. $-\frac{1}{2}$

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: لماذا 5- حل غير مقبول في الجزء a، لكن $-\frac{1}{2}$ حل مقبول في الجزء b؟
[في الجزء b، ينتج عن قيمة x السالبة أساس موجب للوغاريتم الطبيعي. بينما في الجزء a، ينتج عن قيمة x السالبة أساس سالب للوغاريتم، وهذا غير مقبول.]

خطأ شائع

حاول أن تحلّ! 5 قد يعتقد الطلاب أن $x = -\frac{1}{2}$ حل غير مقبول لأنه سالب، فيجيبون أن المعادلة في الجزء b ليس لها حل. ذكّرهم بأن المعادلة لا تتضمن $\ln x$ ، بل تتضمن $\ln(-4x-1)$ و $\ln(4x^2)$. عند تعويض $x = -\frac{1}{2}$ نحصل على أساس موجب.

مثال 6 حل المعادلات اللوغاريتمية والأسية بتمثيلها بيانيًا

إدراج مهام تعزّز التبرير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: هل يمكن افتراض أن $y_1 = x - 2$ و $y_2 = \log(2x+1)$ وصّح إجابتك.
[نعم؛ إن ترتيب إدخال المعادلات في الحاسبة غير مهم. ستبقى الدالتان ممثلتان بيانيًا في نفس النافذة وستكون نقاط تقاطعهما مرئية.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

6. a. $x \approx -1.205$
b. $x \approx 0.336$ أو $x \approx 8.156$

استعمل مع المثالين 5 و 6

عادات التفكير

عقّم لخص خطوات حل المعادلات اللوغاريتمية.

[إذا كان للوغاريتمات نفس الأساس، ساو بين الحدود اللوغاريتمية وحل المعادلة الناتجة. إذا كانت أساسات اللوغاريتمات مختلفة، طبق صيغة تغيير الأساس لتوحيد أساسات المقادير اللوغاريتمية، ثم حل المعادلة. إذا كانت معاملات المتغير حدودًا لوغاريتمية، قم بتجميع الحدود المتشابهة، وحلّها إلى عوامها، ثم حل المعادلة.]

مثال 5 حل المعادلات اللوغاريتمية

حل المعادلة $\ln(x^2 - 16) = \ln(6x)$

$$\ln(x^2 - 16) = \ln(6x)$$

$$x^2 - 16 = 6x$$

$$x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$(x-8)(x+2) = 0$$

$$x = 8 \text{ أو } -2$$

تحقق عوض القيمتين في المعادلة الأصلية.

$$x = 8$$

$$\ln(8^2 - 16) = \ln(6 \cdot 8)$$

$$\ln(48) = \ln(48) \checkmark$$

بما أن اللوغاريتمات ليست معرّفة للقيم السالبة، إذن $x = 8$ هو الحل الوحيد. الحل $x = -2$ غير مقبول.

حاول أن تحلّ! 5. حل المعادلتين التاليتين.

a. $\log_5(x^2 - 45) = \log_5(4x)$

b. $\ln(-4x - 1) = \ln(4x^2)$

المصطلحات

تتضمن **المعادلة اللوغاريتمية** لوغاريتمًا واحدًا أو أكثر للمقادير التي تتضمن متغيرات.

مثال 6

حل المعادلات اللوغاريتمية والأسية بتمثيلها بيانيًا

حل المعادلة $\log(2x+1)^5 = x - 2$

ليكن $y_1 = 5 \log(2x+1)$ و $y_2 = x - 2$.

مثل المعادلتين بيانيًا.

استعمل المفتاح "INTERSECT" في الحاسبة البيانية لإيجاد نقطتي التقاطع، إذن، نقطتا التقاطع، إلى أقرب جزء من ألف، هما $(-0.329, -2.329)$ و $(8.204, 6.204)$.

تحقق

$$\log(2(-0.329) + 1)^5 = -0.329 - 2$$

$$\log(0.342)^5 = -2.329$$

$$-2.329 = -2.329 \checkmark$$

$$\log(2(8.204) + 1)^5 = 8.204 - 2$$

$$\log(17.408)^5 = 6.204$$

$$6.204 = 6.204 \checkmark$$

إذن، الحلان هما $x \approx -0.329$ و $x \approx 8.204$.

حاول أن تحلّ! 6. حل المعادلتين التاليتين بتمثيلهما بيانيًا. قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من ألف.

a. $3(2)^{x+2} - 1 = 3 - x$

b. $\ln(3x - 1) = x - 5$

46 الوحدة 1 الدوال الأسية واللوغاريتمية

ملخص المفهوم المعادلات الأسية واللوغاريتمية

س: أعط مثالاً يبيّن كيف يساعد استعمال خاصية المساواة للمعادلات اللوغاريتمية على تبسيط خطوات حل المعادلات اللوغاريتمية.
[تسمح خاصية المساواة للمعادلات اللوغاريتمية بتحويل معادلة لوغاريتمية إلى معادلة تربيعية قابلة للتحليل].

س: كيف يمكن حل معادلة أسية بتمثيلها بيانيًا؟
[ساو طرفي المعادلة بالمتغير y ثم مثل الدالتين الناتجتين بيانيًا. ثم ابحث عن نقاط تقاطع التمثيلين البيانيين].

عبر عن فهمك | طبق فهمك

خطأ شائع

التمرين 6 قد لا يتحقق الطلاب من وجود حلول غير مقبولة. اطلب من الطلاب التحقق من الحلول بتعويضها في المعادلة الأصلية. على سبيل المثال، اللوغاريتمات غير معرفة للقيم السالبة، لذا فإن أي حل يؤدي إلى أخذ لوغاريتم عدد سالب هو حل غير مقبول.

الإجابات

1. تساعد اللوغاريتمات والأسس على حل المعادلات التي لحدودها أساسات مختلفة.
2. منصور ليس على صواب. تتضمن المعادلة متغيرًا في الأساس لا في الأس.
3. نستعمل خاصية القوة لنقل الأس إلى خارج اللوغاريتم، ثم نقسم طرفي المعادلة على الأس لإعادة كتابة المعادلة في الصورة الأسية وحلها.
4. 2
5. -8.84
6. -4 (حل غير مقبول)، 11
7. 6
8. -3.82
9. 13 308 أرنبًا

ملخص المفهوم المعادلات الأسية واللوغاريتمية

خاصية المساواة للمعادلات اللوغاريتمية	خاصية المساواة للمعادلات الأسية	جبريًا
إذا كان b عددًا موجبًا غير العدد 1 ، فإن $\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذا $x = y$.	إذا كان b عددًا موجبًا غير العدد 1 ، فإن $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا $x = y$.	
إذا تساوى لوغاريتمان لهما نفس الأساس ، تكون النتيجةان متساويتين.	إذا تساوى أسان ، فإن القوتين اللتين لهما نفس الأساس متساويتان.	لنظرًا
إذا كان $x = 8$ ، فإن $\log_3 x = \log_3 8$.	إذا كان $x = 4$ ، فإن $2^x = 2^4$.	عدديًا

طبق فهمك

- في التمارين 4-8، حل المعادلة. قرب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم الأمر. ثم حدّد الحلول غير المقبولة.
1. $16^{3x} = 256^{x+1}$
 2. $6^{x+2} = 4^x$
 3. $\log_5 (x^2 - 44) = \log_5 (7x)$
 4. $\log_2 (3x - 2) = 4$
 5. $4^{2x} = 9^{x-1}$
 6. 9. مزرعة أرانب بها 200 أرنبًا في العام 2015 ويزداد عدد الأرانب بنسبة 30% سنويًا. كم سيكون عدد الأرانب في المزرعة عام 2031؟

عبر عن فهمك

1. السؤال الأساسي كيف تساعدك خصائص اللوغاريتمات والأسس على حل المعادلات؟
2. المصطلحات يقول منصور أن $x^2 + 3 = 12$ معادلة أسية. هل منصور على صواب؟ وضح إجابتك.
3. تواصل بدقة كيف يمكن أن تساعدك خصائص اللوغاريتمات على حل معادلة مثل $\log_6 (8x - 2)^3 = 12$ ؟

تدرب و حل مسائل دليل المهام

أساسي	متقدم
10-34, 39-46	10-19, 24-46

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	16-21, 45	1
3	22-27	1
	10, 11, 14	2
4	13, 28, 41, 42	2
5	29-37, 44	1
	12, 15	2
	43, 46	3
6	38-40	2

الإجابات

10. اللوغاريتم الاعتيادي؛ يمكننا استعمال أي منهما، لكن استعمال اللوغاريتم الاعتيادي أسهل لوجود العدد 10 في أحد طرفي المعادلة.
11. لا يتضمن الطرفان في المعادلة الأولى أساسين متساويين. يمكن تعديل الحدين في المعادلة الثانية بحيث يصبح لهما نفس الأساس.
12. الجمع، خاصية الضرب للوغاريتمات، خاصية المساواة للمعادلات اللوغاريتمية، إيجاد مفكوك، الطرح، التحليل إلى العوامل؛ الحلان صحيحان، لكن 1- حل غير مقبول.
13. لحل المعادلة عندما $A = 0$ ، يحتاج إبراهيم إلى إيجاد اللوغاريتم الطبيعي للصفر، وهو غير معرّف.
14. تتيح لنا هذه الخاصية إعادة كتابة الأسس في صورة نواتج ضرب، مما يمكننا من حل المعادلة.
15. 5- حل غير مقبول

16. 1
17. 0.6833
18. -1.5; 3
19. -0.4286
20. 6
21. 5
22. 1.4406
23. 4.5101
24. -0.5638
25. -3.1699

تدرب و حل مسائل

عزّز فهمك

10. **استعمل البنية** هل ستستعمل اللوغاريتم الطبيعي أم الاعتيادي عند حل المعادلة $10^{x+2} = 78$ ؟ هل من الممكن استعمال أي منهما؟ وضح إجابتك.

11. **فكر وتأبّر في الحل** اشرح لماذا اللوغاريتمات ضرورية لحل المعادلة $3^{x+2} = 8$ ، لكنها ليست ضرورية لحل المعادلة $3^{x+2} = 27^{4x}$.

12. **بزر منطقياً** حلّت هيا المعادلة $\log_3(x+1) - \log_3(x-6) = \log_3(2x+2)$ كما هو مبين أدناه. بزر كل خطوة من خطوات حل المعادلة في عمل هيا. هل كلا حلّي المعادلة مقبولان؟ وضح إجابتك.

$$\begin{aligned} \log_3(x+1) - \log_3(x-6) &= \log_3(2x+2) \\ \log_3(x+1) &= \log_3(2x+2) + \log_3(x-6) \\ \log_3(x+1) &= \log_3(2x+2)(x-6) \\ (x+1) &= (2x+2)(x-6) \\ x+1 &= 2x^2 - 10x - 12 \\ 0 &= 2x^2 - 11x - 13 \\ x &= 6.5 \text{ أو } x = -1 \end{aligned}$$

13. **حل الخطأ** تعطي الدالة $A = 20e^{-0.40t}$ عدد ملليجرامات الدواء في جسم الشخص بعد t ساعة من تناوله. عوّض إبراهيم القيمة $A = 0$ لإيجاد عدد الساعات اللازمة لخروج كل الدواء من الجسم. ما خطأ إبراهيم؟ وضح إجابتك.

14. **روابط في الرياضيات** وضح أهمية استعمال خاصية القوة للوغاريتمات في حل المعادلات الأسية.

15. **حل الخطأ** أوجد خطأ طالب عند حلّه المعادلة اللوغاريتمية أدناه.

$$\begin{aligned} \log(x+3) + \log x &= 1 \\ \log x(x+3) &= 1 \\ x(x+3) &= 10^1 \\ x^2 + 3x - 10 &= 0 \\ (x-2)(x+5) &= 0 \\ x &= 2, -5 \end{aligned}$$

48 الوحدة 1 الدوال الأسية واللوغاريتمية

تدرب

في التمارين 16-21، أوجد جميع حلول المعادلة. قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة آلاف. انظر المثال 1

16. $3^{2-3x} = 3^{5x-6}$
17. $7^{3x} = 54$
18. $25^{x^2} = 125^{x+3}$
19. $4^{3x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+5}$
20. $4^{2x+1} = 4^{3x-5}$
21. $6^{x-2} = 216$

في التمارين 22-27، أوجد جميع حلول المعادلة. قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة آلاف. انظر المثال 2 و 3

22. $2^{3x-2} = 5$
23. $4 + 5^{6-x} = 15$
24. $6^{3x+1} = 9^x$
25. $-3 = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 12$
26. $3^{2x-3} = 4^x$
27. $4^{x+2} = 8^{x-1}$

28. يريد سعيد استثمار مبلغ QR 1 000 في حساب مصرفي بفائدة مركبة سنوية متصلة بهدف أن يصبح رصيده QR 2 500 بعد 10 سنوات. أوجد الفائدة المركبة السنوية المتصلة التي تحقق هدف سعيد. قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من مئة. انظر المثال 4

في التمارين 29-37، أوجد جميع حلول المعادلة. قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من ألف. انظر المثال 5

29. $\log_2(4x+5) = \log_2 x^2$
30. $2 \ln(3x-2) = \ln(5x+6)$
31. $\log_4(x^2-2x) = \log_4(3x+8)$
32. $\ln(5x-2) = \ln(x-1)$
33. $\ln(2x^2+5x) = \ln(2x+7)$
34. $2 \log(x+1) = \log(x+1)$
35. $\log_2 x + \log_2(x-3) = 2$
36. $\log_2(3x-2) = \log_2(x-1) + 4$
37. $\log_6(x^2-2x) = \log_6(2x-3) + \log_6(x+1)$

في التمارين 38-40، حل المعادلة بتمثيلها بيانياً. قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من ألف. انظر المثال 6

38. $\log(5x-3)^2 = x-4$
39. $\ln(2x) = 3x-5$
40. $\log(4x) = x + \log x$

34. 0؛ -1 (حل غير مقبول)

35. -1؛ 4 (حل غير مقبول)

36. 1.077

37. 1.303 (حل غير مقبول)، -2.303 (حل غير مقبول)

38. $x \approx 0.604$ و $x \approx 7.012$

39. $x \approx 2.153$ و $x \approx 0.003$

40. $x \approx 0.602$

26. 4.0643

27. 7

28. 0.09

29. -1؛ 5

30. -0.1111 (حل غير مقبول)؛ 2

31. -1.2749؛ 6.2749

32. 0.25 (حل غير مقبول)

33. 1.266؛ -2.766 (حل غير مقبول)

الإجابات

41. 2045

42. 0.068

43. a. 500

b. 1 000 000 فدان

46. الجزء A $f(t) = 94.62 - 15 \log(t + 1.1)$

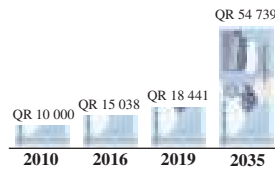
الجزء B 8 سنوات تقريباً

تدرب وحل مسائل

طبق

41. **نموذج** تتمذج الدالة $P = 250\,000e^{0.013t}$ عدد السكان في إحدى المدن، حيث t عدد السنوات بدءاً من العام 2000، في أي سنة سيبلغ عدد سكان هذه المدينة 450 000 نسمة؟ قُرب إجابتك إلى أقرب سنة.

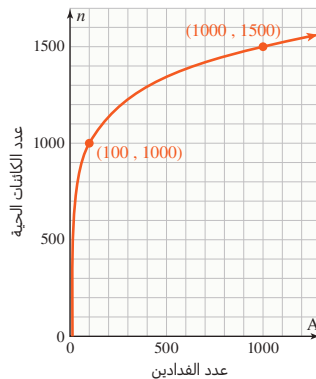
42. **استعمل البنية** استثمر جاسم QR 10 000 في حساب تقاعد سنة 2010، ثم توقع كم سيصبح هذا المبلغ بعد عدة سنوات على افتراض أن الفائدة مركبة متصلة تُحسب سنوياً. لاحقاً عندما نظر إلى البيانات، لم يستطع تذكر معدل الفائدة الذي استعمله في توقعاته. استعمل البيانات أدناه لتحديد معدل الفائدة الذي استعمله جاسم.



43. **مهارات التفكير العليا** يستعمل عالم أحياء النموذج $n = k \log(A)$ ليحصى عدد الكائنات الحية، n ، التي يمكنها العيش في قطعة أرض مساحتها A . بتغير الثابت k تبعاً لنوع الفصيلة.

a. استعمل التمثيل البياني لإيجاد قيمة الثابت k للفصيلة التي يدرسها العالم.

b. أوجد مساحة قطعة الأرض، بالفدادين، التي يمكن أن يعيش فيها 3 000 كائن من هذه الفصيلة.



تدرب على اختبار

44. أي من المعادلات التالية لها نفس الحل؟ اختر كل ما ينطبق.

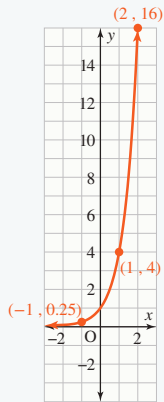
● $\log_8(x^2 - 15) = \log_8(2x)$

Ⓑ $\ln(12x + 2) = \ln(2x - 3)$

Ⓒ $\log_2 x + \log_2(x + 4) = 5$

● $\log_3(15x + 6)^2 = 8$

Ⓔ $\log_4(3x - 5) = 2$

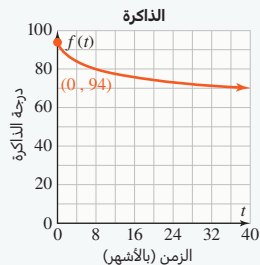


45. **اختبار SAT/ACT** بيّن الشكل المجاور التمثيل البياني للدالة $y = 4^x$. حدّد متى تكون الدالة المبيّنة في التمثيل البياني أكبر من الدالة $y = 2^{3x-1}$.

- Ⓐ $x > 1$
 ● $x < 1$
 Ⓒ $x > -1$
 Ⓓ $x < -1$

46. **مهمة أدائية** أجرى أستاذ جامعي تجربة لإيجاد العلاقة بين الزمن والذاكرة، وتوصل إلى أن النموذج

$f(t) = t_0 - 15 \log(t + 1.1)$ يعطي مقدار ما يتذكره الطالب بعد t شهر إذا كان مقدار الذاكرة الابتدائية t_0 .



الجزء A اكتب نموذجاً يمثل طالتاً له الذاكرة الابتدائية المعطاة.

الجزء B بعد كم سنة تقريباً يصبح مقدار ذاكرة هذا الطالب 65؟

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم. تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس. كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليقًا متميزًا يستفيد منه الطلاب، كلٌّ بحسب مستواه. سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

الوحدة 1

الدوال الأسية واللوغاريتمية

مراجعة الوحدة

تقديم السؤال الأساس

كيف تُستعمل الدوال الأسية واللوغاريتمية لنمذجة المواقف وحل المسائل؟

عند كتابة الطلاب للإجابة على السؤال الأساس، شجعهم على تضمين أمثلة تدعم إجاباتهم. ابحث عن الحقائق الآتية عند مناقشة الإجابات.

- تُستعمل النماذج الأسية لتمثيل مواقف تتضمن نموًا أسّيًا أو اضمحلالًا أسّيًا.
- الدوال اللوغاريتمية هي معكوسات للدوال الأسية. لإيجاد قيمة لوغاريتم، أعد كتابته في الصورة الأسية.
- تساعد خواص اللوغاريتمات على تبسيط المقادير اللوغاريتمية المركبة وحل المعادلات الأسية التي أساسيات الحدود الأسية فيها مختلفة.

الإجابات

- اللوغاريتم الطبيعي
- الدالة الأسية
- معامل الاضمحلال
- صيغة تغيير الأساس
- اللوغاريتم الاعتيادي
- دالة لوغاريتمية
- المجال: كل الأعداد الحقيقية؛ المدى: $y > 0$ ؛ المقطع $y: 400$ ؛
خط التقارب: $y = 0$ ؛ السلوك الطرفي: عندما $x \rightarrow -\infty$ فإن $y \rightarrow \infty$ ،
عندما $x \rightarrow \infty$ فإن $y \rightarrow 0$.
- المجال: كل الأعداد الحقيقية؛ المدى: $y > 0$ ؛ المقطع $y: 2$ ؛
خط التقارب: $y = 0$ ؛ السلوك الطرفي: عندما $x \rightarrow -\infty$ فإن $y \rightarrow 0$ ،
عندما $x \rightarrow \infty$ فإن $y \rightarrow \infty$.

10. QR 1 558.17

11. QR 13 784.20

12. المجال: كل الأعداد الحقيقية؛ المدى: $y > 0$ ؛ المقطع $y: 0.5$ ؛
خط التقارب: $y = 0$.

مراجعة الوحدة

السؤال الأساس للوحدة

1. كيف تُستعمل الدوال الأسية واللوغاريتمية لنمذجة المواقف وحل المسائل؟

الوحدة 1

مراجعة المصطلحات

اختر المصطلح الصحيح لإكمال كل جملة.

2. أساس _____ هو e .

3. تُكتب في الصورة $f(x) = a \cdot b^x$.

4. في الدالة الأسية $f(x) = a \cdot b^x$ ، عندما $0 < b < 1$ ، العدد b يُسمى _____.

5. تُستعمل _____ لإيجاد قيم اللوغاريتمات التي أساسها لا يساوي 10 أو e .

6. أساس _____ هو 10.

7. معكوس الدالة الأسية هو _____.

- معامل الاضمحلال
- الدالة الأسية
- دالة لوغاريتمية
- معامل النمو
- اللوغاريتم الاعتيادي
- اللوغاريتم الطبيعي
- صيغة تغيير الأساس

مراجعة المفاهيم والمهارات

الدرس 1-1 خصائص الدوال الأسية

مراجعة سريعة

الدالة الأسية هي أي دالة في الصورة $f(x) = a \cdot b^x$. إذا كان $a > 1$ و $b > 1$ ، تكون الدالة دالة نمو أسّي، وإذا كان $a > 0$ و $0 < b < 1$ ، تكون الدالة دالة اضمحلال أسّي.

مثال

استثمر خالد QR 4 000 في حساب مصرفي بفائدة مركبة سنوية معدلها 2.5%، كم سيصبح رصيد خالد في حسابه المصرفي بعد 5 سنوات؟

اكتب نموذج دالة النمو الأسّي واستعمله.

$$A(t) = a(1 + r)^t$$

$$A(5) = 4\,000(1 + 0.025)^5$$

$$A(5) = 4\,000(1.025)^5$$

$$A(5) = 4\,525.63$$

إذن، سيصبح رصيد خالد في حسابه المصرفي بعد 5 سنوات QR 4 525.63.

تدرب وحلّ مسائل

في التمرينين 8 و 9، حدّد المجال والمدى والمقطع وخط التقارب والسلوك الطرفي للدالة الأسية.

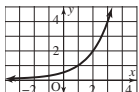
8. $f(x) = 400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

9. $f(x) = 2 \cdot (3)^x$

10. **بزر منطقيًا** استثمرت سارة مبلغ QR 1 400 بفائدة مركبة سنوية معدلها 1.8% لمدة 6 سنوات. أوجد جملة المبلغ في نهاية السنة السادسة.

11. **نمذج** اشترى فواز دراجة نارية بمبلغ QR 25 000. يتناقص سعر الدراجة بمعدل 18% سنويًا. أوجد سعر الدراجة بعد مرور 3 سنوات.

12. في التمثيل البياني المجاور، حدّد المجال والمدى والمقطع وخط التقارب.



13. QR 13 849.69
14. QR 6 057.19
15. QR 8 801.33
16. $f(x) = 35.12(1.18)^x$
17. $f(x) = 21.01(1.37)^x$
18. QR 16 559.53

النماذج الأسية

الدرس 1:2

مراجعة سريعة

عند استثمار مبلغ معين في حساب مصرفي بفائدة مركبة، تُضاف الفائدة المستحقة إلى المبلغ الأصلي إما ربع سنوي، وإما شهريًا، وإما يوميًا. نستخدم الصيغة $A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ لحساب جملة المبلغ بعد مرور فترة معينة من الزمن على إيداع المبلغ الأصلي في الحساب المصرفي. ويمكن أن تكون الفائدة المركبة متصلة أيضًا. ونستخدم الصيغة $A = Pe^{rt}$ لحساب جملة المبلغ عند استثمار مبلغ معين في حساب مصرفي بفائدة مركبة متصلة. يمكن استعمال الحاسبة لإيجاد نموذج أسّي لمجموعة من البيانات.

مثال

استثمر جابر QR 2 500 في حساب مصرفي بفائدة سنوية معدلها 2.4%، إذا كانت الفائدة مركبة ربع سنوية، كم سيصبح رصيد جابر في حسابه المصرفي بعد 6 سنوات؟

استعمل الصيغة $A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$

عوض قيم A, P, n, r

$A = 2\,500 \left(1 + \frac{0.024}{4}\right)^{4(6)}$

بسط $A = 2\,500 (1.006)^{24}$

استعمل الحاسبة $A = 2\,885.97$

إذن، سيصبح رصيد جابر بعد 6 سنوات QR 2 885.97 تقريبًا.

تدرب وحل مسائل

- في التمارين 13-15، أوجد جملة المبلغ في الحساب المصرفي في نهاية الفترة الزمنية المعطاة.
13. فائدة مركبة ربع سنوية، $P = \text{QR } 12\,000$ ، $r = 3.6\%$ ، $t = 4$ سنوات
14. فائدة مركبة شهرية، $P = \text{QR } 5\,000$ ، $r = 2.4\%$ ، $t = 8$ سنوات
15. فائدة مركبة متصلة، $P = \text{QR } 7\,500$ ، $r = 1.6\%$ ، $t = 10$ سنوات

في التمرينين 16 و 17، اكتب نموذجًا أسّيًا باستعمال النقاط المعطاة.

16. (12, 256) و (13, 302)
17. (3, 54) و (4, 74)

18. **نموذج** استثمر والد جاسم مبلغًا من المال عند ولادته في حساب مصرفي لتغطية نفقات تعليمه. يوضح الجدول أدناه كيفية نمو الحساب المصرفي بمرور الزمن.

عدد السنوات	المبلغ (QR)
1	2 250
3	2 525
6	3 480
7	4 400
9	6 000
13	9 250

ما القيمة المتوقعة لجملة المبلغ في الحساب المصرفي بعد 18 سنة؟

مراجعة الوحدة

الإجابات

19. $\log_4 64 = 3$

20. $\log 100 = 2$

21. $6^3 = 216$

22. $e^x = 20$

23. -2

24. 4

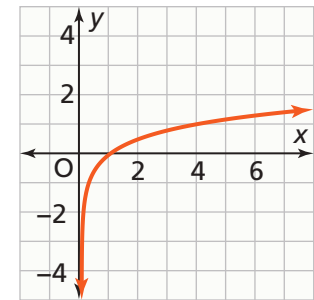
25. 2.798

26. -0.598

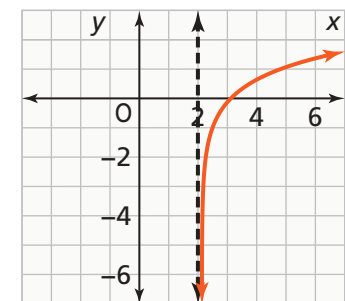
27. 9

28. 49

29. المجال: $x > 0$ ؛ المدى: كل الأعداد الحقيقية؛ المقطع x : 1؛ خط التقارب: $x = 0$ ؛ السلوك الطرفي: عندما $x \rightarrow 0$ فإن $y \rightarrow -\infty$ ، وعندما $x \rightarrow \infty$ فإن $y \rightarrow \infty$.



30. المجال: $x > 2$ ؛ المدى: كل الأعداد الحقيقية؛ المقطع x : 3؛ خط التقارب: $x = 2$ ؛ السلوك الطرفي: عندما $x \rightarrow 2$ فإن $y \rightarrow -\infty$ ، وعندما $x \rightarrow \infty$ فإن $y \rightarrow \infty$.



31. $f^{-1}(x) = \log_8 x + 2$

32. $f^{-1}(x) = \log_5 8x + 2$

الدرس 1-3 اللوغاريتمات

مراجعة سريعة

اللوغاريتم هو أس. اللوغاريتم الذي أساسه 10 يسمى اللوغاريتم الاعتيادي، واللوغاريتم الذي أساسه e يسمى اللوغاريتم الطبيعي. يمكن إعادة كتابة المقادير الأسية في الصورة اللوغاريتمية، كما يمكن إعادة كتابة المقادير اللوغاريتمية في الصورة الأسية. يمكن إعادة كتابة المقدار $125 = 5^3$ في الصورة $\log_5 125 = 3$ ويمكن إعادة كتابة المقدار $\log 1000 = 3$ في الصورة $10^3 = 1000$.

مثال

أوجد قيمة $\log_2 \frac{1}{8}$.

اكتب معادلة $\log_2 \frac{1}{8} = x$
أعد كتابة المعادلة في الصورة الأسية $2^x = \frac{1}{8}$
أعد كتابة المعادلة بأساس مشترك $2^x = 2^{-3}$
بما أن للمقدارين نفس الأساس، إذن الأسان متساويان $x = -3$

تدرب وحل مسائل

استعمل البنية في التمارين 19-22، اكتب المعادلة في الصورة اللوغاريتمية إذا كانت معطاة في الصورة الأسية، واكتب المعادلة في الصورة الأسية إذا كانت معطاة في الصورة اللوغاريتمية.

19. $4^3 = 64$ 20. $10^2 = 100$

21. $\log_6 216 = 3$ 22. $\ln 20 = x$

في التمرينين 23 و 24، أوجد قيمة المقدار اللوغاريتمي.

23. $\log_8 \frac{1}{64}$ 24. $\log_3 81$

استعمل الأدوات المناسبة في التمرينين 25 و 26، استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة المقدار. قرب الإجابة إلى أقرب جزء من ألف.

25. $\log 628$ 26. $\ln 0.55$

في التمرينين 27 و 28، أوجد قيمة المقدار اللوغاريتمي.

27. $\log_5 5^9$ 28. $7^{\log_7 49}$

الدرس 1-4 الدوال اللوغاريتمية

مراجعة سريعة

كل دالة لوغاريتمية هي معكوس لدالة أسية.

مثال

أوجد معكوس الدالة $f(x) = 10^{x-2}$. حدد المقاطع وخطوط التقارب إن وجدت.

اكتب المعادلة في الصورة $y = f(x)$
بذل بين x و y : $y = 10^{x-2}$
اكتب المعادلة في الصورة اللوغاريتمية $x - 2 = \log y$
حل لإيجاد قيمة y : $y = \log x + 2$

إذن، معكوس هذه الدالة هو $f^{-1}(x) = \log x + 2$.
المقطع x يساوي $\frac{1}{100}$ ، وخط التقارب هو المحور y .

تدرب وحل مسائل

ابحث عن العلاقات في التمرينين 29 و 30، مثل الدالة بيانياً، وحدد مجالها ومدنها، وكذلك المقاطع وخطوط التقارب إن وجدت، ثم صف السلوك الطرفي للممثل البياني.

29. $f(x) = \log_4 x$ 30. $f(x) = \ln(x - 2)$

استعمل البنية في التمرينين 31 و 32، أوجد معادلة معكوس الدالة.

31. $f(x) = 8^{x-2}$ 32. $f(x) = \frac{5^{x-2}}{8}$

33. $\log \left(\frac{r^3 t}{s^2} \right)$

34. $\ln 4$

35. 1.792

36. 2.183

37. $\frac{\log 200}{\log 5}$; 3.292

38. $\frac{\log 486}{\log 7}$; 3.179

39. -2

40. 0

41. -1.151

42. 8.220

43. 9

44. 8

45. $\frac{9}{2}$

46. 0.069

الدرس 1-5 خواص اللوغاريتمات

مراجعة سريعة

يمكن استعمال خواص اللوغاريتمات لفك مقدار لوغاريتمي إلى عدة مقادير لوغاريتمية، أو لكتابة عدة مقادير لوغاريتمية في صورة لوغاريتم واحد. يمكن استعمال صيغة تغيير الأساس لإيجاد لوغاريتمات لأعداد أساسها لا يساوي 10 أو e .

مثال

استعمل خواص اللوغاريتمات لفك المقدار $\log_6 \frac{x^3 y^8}{z}$

$$\begin{aligned} \log_6 \frac{x^3 y^8}{z} &= \log_6 x^3 y^8 - \log_6 z \\ &= \log_6 x^3 + \log_6 y^8 - \log_6 z \\ &= 3 \log_6 x + 8 \log_6 y - \log_6 z \end{aligned}$$

تدرب وحل مسائل

استعمل البنية في التمرينين 33 و 34، استعمل خواص اللوغاريتمات لكتابة كل مقدار في صورة لوغاريتم واحد.

33. $3 \log r - 2 \log s + \log t$

34. $2 \ln 3 + 4 \ln 2 - \ln 36$

في التمرينين 35 و 36، أوجد قيمة اللوغاريتم.

35. $\log_4 12$

36. $\log_7 70$

فكر وثابر في الحل في التمرينين 37 و 38، استعمل صيغة تغيير الأساس لحل المعادلة وإيجاد قيمة x . اكتب الحل الدقيق في صورة لوغاريتم، ثم أعط حلًا تقريبيًا مقربًا إلى أقرب جزء من ألف.

37. $5^x = 200$

38. $7^x = 486$

الدرس 1-6 المعادلات الأسية واللوغاريتمية

مراجعة سريعة

يمكن حل معادلة أسية بإيجاد اللوغاريتم لطرفي المعادلة. يمكن حل معادلة لوغاريتمية بتجميع الحدود اللوغاريتمية في لوغاريتم واحد، ثم تحويل المعادلة اللوغاريتمية إلى معادلة أسية.

مثال

حل المعادلة $7^{2x} = 10^{x+1}$

$$\begin{aligned} 7^{2x} &= 10^{x+1} \\ \log 7^{2x} &= \log 10^{x+1} \\ 2x \log 7 &= (x+1) \log 10 \\ 2x \log 7 &= x + 1 \\ 2x \log 7 - x &= 1 \\ x(2 \log 7 - 1) &= 1 \\ x &= \frac{1}{2 \log 7 - 1} \\ x &\approx 1.449 \end{aligned}$$

أوجد اللوغاريتم الاعتيادي لطرفي المعادلة.

خاصية القوة للوغاريتمات

$$\log 10 = 1$$

اطرح x من طرفي المعادلة

حلل بإخراج x

اقسم طرفي المعادلة على

$$2 \log 7 - 1$$

استعمل الحاسبة

تدرب وحل مسائل

في التمارين 39-42، أوجد جميع حلول المعادلة. قرب الإجابات إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

39. $2^{5x+1} = 8^{x-1}$

40. $9^{2x+3} = 27^{x+2}$

41. $3^{x-2} = 5^{x-1}$

42. $7^{x+1} = 12^{x-1}$

في التمارين 43-45، أوجد جميع حلول المعادلة. قرب الإجابات إلى أقرب جزء من عشرة آلاف.

43. $\log_5 (3x - 2)^4 = 8$

44. $\ln(x^2 - 32) = \ln(4x)$

45. $\log_6 (2x - 1) = 2 - \log_6 x$

46. **نمذج** يريد سعيد استثمار مبلغ QR 1 500 في حساب مصرفي بحيث يصبح QR 3 000 بعد 10 سنوات. ما معدل الفائدة السنوية المركبة المتصلة التي تحقق هدف سعيد؟ قرب إجابتك إلى أقرب جزء من ألف.

الوحدة 2

المتتاليات والمتسلسلات

مقدمة الوحدة

الوحدة 2

Topic Vocabulary

- sequence
- arithmetic sequence
- common difference
- recursive formula
- explicit formula
- series
- arithmetic series
- sigma notation
- geometric sequence
- common ratio
- geometric series

مصطلحات الوحدة

- متتالية
- متتالية حسابية
- فرق ثابت
- صيغة ارتدادية
- صيغة صريحة
- متسلسلة
- متسلسلة حسابية
- رمز المجموع
- متتالية هندسية
- نسبة ثابتة
- متسلسلة هندسية

الوحدة 2 المتتاليات والمتسلسلات 55

الوحدة 2

المتتاليات والمتسلسلات

السؤال الأساسي

كيف تستعمل المتتاليات والمتسلسلات الحسابية والهندسية لنمذجة مواقف وحل المسائل؟

نظرة عامة على الوحدة

2-1 المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

2-2 المتتاليات والمتسلسلات الهندسية

2-1 Arithmetic Sequences and Series

2-2 Geometric Sequences and Series

الوحدة 2 المتتاليات والمتسلسلات 54

السؤال الأساسي للوحدة

كيف تستعمل المتتاليات والمتسلسلات الحسابية والهندسية لنمذجة مواقف وحل المسائل؟

ارجع إلى السؤال الأساسي للوحدة أثناء دراسة الوحدة، واقرأ الملاحظات المتعلقة بالإجابة عن السؤال في الصفحة 77 (مراجعة الوحدة) من دليل المعلم.

الوحدة 2

المتتاليات والمتسلسلات

مشروع STEM

نظرة عامة على المشروع

في هذا المشروع، يستكشف الطلاب أن البكتيريا تتكاثر وفق متتالية هندسية. بعد أن يكتشف الطلاب الصيغة الصريحة للمتتالية الهندسية لتكاثر البكتيريا، سوف يستعملونها لحساب التكاثر البكتيري.

تقديم المشروع

قدّم المشروع بمناقشة حقيقة أن البكتيريا موجودة في كل مكان، وأن بعضًا من أنواعها مفيدة للإنسان، وبعضها الآخر مضرة للإنسان.

يمكنك استعمال الأسئلة أدناه لتوجيه النقاش.

س: أين تعيش البكتيريا؟ وما حجم الخلية البكتيرية الواحدة؟

تعيش البكتيريا في كل مكان، فهي تعيش في الهواء، وفي أجسام الحيوانات والبشر، وفي التربة والمياه، ويمكن العثور عليها على أسطح جميع الأشياء. الخلايا البكتيرية صغيرة جدًا ولا يمكن رؤيتها إلا باستعمال المجهر، إلى درجة أنك إذا وضعت آلاف البكتيريا جنبًا إلى جنب، فقد لا تملأ سوى طرف ممحاة القلم الرصاص.

س: كيف يستفيد جسم الإنسان من البكتيريا المفيدة، وكيف يتعامل مع البكتيريا الضارة؟

ثمة بكتيريا مفيدة في الجهاز الهضمي للإنسان، وتعمل على هضم الطعام وتحليله ليتمكن جسم الإنسان من استعماله. كما أن البكتيريا المفيدة تساعد على القضاء على بعض الكائنات الحية المسببة للأمراض. من ناحية أخرى، تسبب البكتيريا الضارة، التي تعيش في جسم الإنسان، أمراضًا مثل التهاب الحلق العقدي والسل والكوليرا وغيرها من الأمراض. ويعود السبب في ذلك إلى أن بعض البكتيريا الضارة تنتج ذيفانات (سمومًا حيوية) على شكل مواد كيميائية حادة، وهذه الذيفانات (السموم) تقضي على الخلايا الحية. وثمة أنواع من البكتيريا الضارة تهاجم الأنسجة بشكل مباشر وتدمرها. غير أن الجهاز المناعي في جسم الإنسان يهاجم هذه البكتيريا ويشكل سدًا دفاعيًا يمنع هذه البكتيريا الضارة من مهاجمة خلايا جسم الإنسان. من هنا تبرز أهمية أن يتمتع جسم الإنسان بجهاز مناعي قوي.

س: كيف تتكاثر البكتيريا في البيئات المختلفة؟

تتكاثر خلية البكتيريا من خلال عملية التكاثر الذاتي، حيث يتكوّن جدار في منتصف الخلية يقسمها إلى خليتين صغيرتين تنقسمان بدورهما إلى أربع خلايا، وهكذا. هذه العملية تسمى "الانشطار الثنائي". يتضاعف عدد البكتيريا في المستعمرات البكتيرية خلال فترة من الزمن تسمى "زمن التوليد". يختلف زمن التوليد باختلاف نوع البكتيريا. يتراوح "زمن التوليد" لمعظم أنواع البكتيريا من 20 إلى 60 دقيقة.

تنفيذ المشروع

وضح للطلاب أن عليهم إيجاد طريقة غير مباشرة لحساب التكاثر البكتيري من خلال استكشاف الصيغة الصريحة للمتتالية الهندسية التي تتكاثر وفقها البكتيريا. هذه الصيغة الصريحة تربط بين عدد البكتيريا في مستعمرة بكتيرية بعد 24 ساعة لكل نوع من أنواع البكتيريا التي بحث عنها الطلاب عبر الإنترنت (N_t)، والعدد الابتدائي لكل نوع من أنواع البكتيريا في المستعمرة التي تعيش فيها (N_0)، وعدد الانشطارات التي تحصل في فترة زمن التوليد خلال 24 ساعة (n). احرص على أن يتوصل الطلاب إلى الصيغة الصريحة التالية للمتتالية الهندسية:

$$N_t = N_0 \times 2^n$$

على سبيل المثال: إذا كان زمن التوليد 20 min فسوف تنقسم الخلية 3 مرات كل ساعة، أي أن عدد الانشطارات خلال 24 ساعة هو 72، وبالتالي: $N_t = N_0 \times 2^{72}$

مشروع STEM

الوحدة 2

هل تعلم؟



البكتيريا كائنات حية مجهرية، لا تنتمي إلى فصيلة النباتات، ولا إلى فصيلة الحيوانات. البكتيريا موجودة في بيئات مختلفة على سطح الأرض: في المياه والتربة، وفي أجسام الحيوانات وأجسام البشر، لا سيما في الجهاز الهضمي لجسم الإنسان.

تعيش البكتيريا في مستعمرات كبيرة تصل أعدادها إلى ملايين. فحرام واحد من التراب يحتوي على ما يقارب 40 مليون خلية بكتيرية، ومليتر واحد من المياه العذبة يحتوي على مليون خلية بكتيرية تقريبًا.

وبرّج العلماء أن عدد البكتيريا الإجمالي على كوكب الأرض يتجاوز خمسة تريليون 5×10^{30} ، بكتيريا، أما طولها فلا يتجاوز بضعة الميكرومترات.

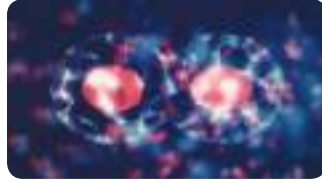
تُصنّف البكتيريا ضمن بدائيات النوى، وهي الكائنات الأكثر انتشارًا على سطح الأرض.

كيف تتكاثر البكتيريا؟

غالبًا ما تتكاثر البكتيريا نتيجة لعملية تسمى **الانشطار الثنائي** (Binary fission). وهذه العملية لا تتطلب وجود ذكر وأنثى، بل تتكاثر الخلية من تلقاء ذاتها، عن طريق نسخها لجميع مكوناتها، ثم نقل هذه المكونات بما في ذلك الحمض النووي الريبوزي منقوص الأكسجين إلى الاتجاه الآخر منها. بعدها ينمو جدار الخلية من منتصفها ويقسم الخلية إلى خليتين صغيرتين تنقسمان بدورهما إلى أربع خلايا، وهكذا. تستغرق العملية التي يتضاعف أثنائها عدد البكتيريا في مجتمع فترة من الزمن تسمى "زمن التوليد" (generation time).

يختلف زمن التوليد باختلاف نوع البكتيريا.

لحساب التكاثر البكتيري، يلجأ العلماء المتخصصون إلى طريقة العدّ المباشر، وذلك باستعمال المجهر أو باستعمال "أغشية الترشيح" (Membrane Filtration). لكن هناك حاجة إلى إيجاد طريقة أخرى، غير طريقة العدّ المباشر، لحساب هذا النمو.



مهتمك: حساب التكاثر البكتيري

ستعمل أنت وزملاؤك على إيجاد طريقة، غير طريقة العدّ المباشر، تتيح لكم حساب التكاثر البكتيري.

ابحث عبر الإنترنت عن أنواع من البكتيريا تعيش في بيئات مختلفة، مع تحديد زمن توليد كل نوع منها، والعدد الابتدائي للمستعمرة التي يعيش فيها كل نوع منها، ثم احسب النمو البكتيري لكل نوع من أنواع البكتيريا هذه خلال 24 ساعة باستعمال المتتاليات المناسبة ووضح الخطوات التي اتبعتها.



56 الوحدة 2 مشروع STEM

الدرس 2-1 المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

نظرة عامة على الدرس

الهدف

سيكون الطلاب قادرين على:

- ✓ تحديد الفرق الثابت في المتتاليات الحسابية.
- ✓ كتابة المتتاليات الحسابية في الصيغتين الارتدادية والصريحة.
- ✓ إنشاء متتاليات حسابية إذا أعطي تمثيلها البياني، أو وصف العلاقة بين حدودها أو بين زوجين من المدخلات والمخرجات.

الفهم الأساس

المتتالية الحسابية هي متتالية عددية الفرق بين كل حدين متتاليين فيها ثابت. المتسلسلة الحسابية هي مجموع الحدود في متتالية حسابية غير منتهية، ويمكن إيجادها باستعمال الصيغة الصريحة للمجموع.

في الصفوف السابقة، تمكن الطلاب من:

- إنشاء دوال متعددة التعريف وتمثيلها بيانيًا.

في هذا الدرس، يتمكن الطلاب من:

- كتابة القاعدة العامة لمتتالية حسابية مكتوبة بصيغة ارتدادية في صورة دالة متعددة التعريف، ثم تحويل الصيغة الارتدادية للمتتالية إلى الصيغة الصريحة.

لاحقًا في هذه الوحدة، سيتمكن الطلاب من:

- كتابة المتتاليات الهندسية في الصيغتين الارتدادية والصريحة والتحويل بين الصيغتين.

يركز هذا الدرس على الدمج بين المهارة الإجرائية والطلاقة والتطبيق.

- يحدد الطلاب الفرق الثابت في متتالية حسابية ويستعملونه لكتابة متسلسلة حسابية في الصيغة الارتدادية. ثم يستعملون هذه الصيغة الارتدادية لإيجاد نمط وكتابة الصيغة الصريحة للمتتالية.
- يستعمل الطلاب المتتاليات الحسابية لحل مسائل من واقع الحياة، مثل إيجاد عدد المقاعد في قاعة محاضرات حيث يتزايد عدد المقاعد من صف إلى آخر.

بناء المصطلحات

المصطلحات الجديدة

- متتالية | *sequence*
- متتالية حسابية | *arithmetic sequence*
- فرق ثابت | *common difference*
- صيغة ارتدادية | *recursive definition*
- صيغة صريحة | *explicit definition*
- متسلسلة | *series*
- متسلسلة حسابية | *arithmetic series*
- رمز المجموع | *sigma notation*

نشاط المصطلحات

ابدأ بمناقشة المصطلحين "المتتالية" و "المتسلسلة".
وَصِّح للطلاب أن المتسلسلة هي ناتج جمع الحدود في متتالية.

س: تشكّل الأعداد 1 و 2 و 4 و 8 و 16 متتالية. اكتب المتسلسلة المناظرة لهذه المتتالية.
[1 + 2 + 4 + 8 + 16]

ثم وَصِّح أن المتتالية الحسابية هي متتالية الفرق بين كل حدين متتاليين فيها ثابت.

اطلب من الطلاب كتابة متتالية حسابية الفرق الثابت فيها يساوي 2، ثم اطلب منهم كتابة المتسلسلة المناظرة لهذه المتتالية.

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

تطبيق ممارسات الرياضيات

ابن الحجج الرياضية

يستعمل الطلاب تعريف المتتالية الحسابية لتحديد وتوضيح المنطق الخاطئ الذي ينتج عنه متتالية مسماة بشكل غير صحيح.

ابحث عن البنية واستعملها

يبحث الطلاب عن الأنماط عندما يتعرفون على الفرق الثابت في متسلسلة من خلال كتابة جميع الحدود فيها.

استكشف وبرّر منطقيًا

محور تركيز التدريس يصف الطلاب طرائق مختلفة لإيجاد أنماط الأعداد، وذلك لبناء أساس لفهم المتتاليات الحسابية.

قبل البدء بالحلّ

إدراج مهام تعزّز التفكير المنطقي ومهارات حلّ المسائل

س: ماذا تلاحظ بشأن القيم الواردة في الجدول؟

[قيم المدخلات تتزايد بمقدار 1، وقيم المخرجات تتزايد بمقدار 4]

أثناء الحلّ

دعم عملية التحدي البناء في تعلم الرياضيات

س: كيف يمكنك تمثيل البيانات في الجدول بطريقة أخرى؟

[يمكنك تعيين الأزواج المرتبة للمدخلات والمخرجات في المستوى الإحداثي.]

س: عيّّن الأزواج المرتبة في المستوى الإحداثي، ثم ارسم خطًا يصل بين جميع النقاط.

ماذا تلاحظ؟

[تقع جميع النقاط على خط مستقيم. معادلة المستقيم هي نفس المعادلة

التي كتبته سمر.]

للطلاب سريعى الإنجاز

س: فكّر في الأزواج المرتبة التالية: $(0, 3), (1, 5), (2, 7), (3, 9), (4, 11)$.

صف طريقتين مختلفتين لإيجاد المخرجات، ثم قارن بين هاتين الطريقتين.

[يمكنك إيجاد المخرجات باستعمال التمثيل البياني. عيّّن هذه النقاط ولاحظ أن قيمة

y تزداد بمقدار 2 كلما ازدادت قيمة x بمقدار 1، يمكنك كذلك إيجاد معادلة لتمثيل

الأزواج هذه المرتبة؛ على سبيل المثال، $f(x) = 2x + 3$]

بعد إنجاز الحلّ

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: ما أوجه الاختلاف التي تلاحظها بين طريقتي هند وسمر في حل المسألة؟

[في طريقة هند، لإيجاد قيمة المخرجة المطلوبة يجب معرفة قيمة المخرجة التي

تسبقها مباشرة. في طريقة سمر، يمكنك حساب قيمة المخرجة المطلوبة مباشرة.]

كتاب الطالب، صفحة 57

2-1

المتتاليات والمتسلسلات
الحسابية
Arithmetic Sequences
and Series

أستطيع... تفسير المتتاليات
والمتسلسلات الحسابية.

- المصطلحات**
- متتالية
 - متتالية حسابية
 - فرق ثابت
 - صيغة ازديادية
 - sequence
 - arithmetic sequence
 - common difference
 - recursive formula

انقد وشرح

المدخلة	المخرجة
0	1
1	5
2	9
3	13
4	17

نظرت هند وسمر إلى جدول البيانات المجاور
ثم كتبت كل منهما ما يلي:

كتبت هند:

$$f(1) = 1 + 4 = 5$$

$$f(2) = f(1) + 4 = 5 + 4 = 9$$

$$f(3) = f(2) + 4 = 9 + 4 = 13$$

$$f(4) = f(3) + 4 = 13 + 4 = 17$$

كتبت سمر: $g(x) = 1 + 4x$

A. صف النمط الذي وجدته هند لإيجاد قيمة المخرجة.

B. صف النمط الذي وجدته سمر لإيجاد قيمة المخرجة.

C. **استعمل البنية** قارن بين الطريقتين. أيهما أكثر فائدة لإيجاد العدد الذي رتبته 100 في القائمة؟ لماذا؟

نموذج من أعمال الطلاب

A. بحثت هند عن النمط في الأعداد ووجدت أن كل عدد يزيد عن العدد الذي يسبقه

مباشرة بمقدار 4

B. استعملت سمر معادلة لحساب العدد التالي في القائمة.

C. كلتا الطريقتين صالحة للاستعمال. لكن طريقة سمر مفيدة أكثر لإيجاد قيمة

الحد 100 لأن بإمكانك أن تحسب $g(100)$ بسرعة وسهولة بهذه الطريقة. أما إذا

استعملت طريقة هند فعليك إيجاد القيم من $f(1)$ إلى $f(99)$ لتتمكن بعد ذلك

من حساب $f(100)$.

استعمل مع انقد وشرح

عادات التفكير

استعمل البنية أوجد متوسط معدل التغير بين بضعة أزواج من النقاط. ماذا يمكنك أن

تستنتج عن الدالة الممثلة في الجدول؟

[متوسط معدل التغير يساوي 4 دائمًا، وبالتالي فإن هذه القيم تمثّل على الأرجح

دالة خطية.]

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلم مركز

عزف الطلاب بالمتتاليات الحسابية، ووضح لهم أنهم سيتعلمون كتابة المتتاليات الحسابية وإيجاد مجموع حدود المتتاليات الحسابية.

فهم المتتاليات الحسابية

مثال 1

بناء المهارة الإجرائية انطلاقًا من الاستيعاب المفاهيمي

الجزء A

س: هل يمكن أن يكون أحد الحدود في متتالية حسابية أصغر من الحد الذي يسبقه مباشرة؟
[نعم؛ يمكن أن يكون الفرق الثابت في متتالية حسابية عددًا سالبًا. إذا كان الفرق الثابت في متتالية حسابية عددًا سالبًا، يكون كل حد فيها أصغر من الحد الذي يسبقه مباشرة.]

ما المتتالية الحسابية، وكيف تمثل وتجد حدودها ومجموع هذه الحدود؟

السؤال الأساس

فهم المتتاليات الحسابية

أ. هل المتتالية أدناه حسابية؟ إذا كانت كذلك، أوجد الفرق الثابت، ثم أوجد الحد التالي في المتتالية.

3, 8, 13, 18, 23, ...

إنها **متتالية**، أي أنها دالة مجالها الأعداد الطبيعية.

أنشئ جدولًا يوضح رتبة الحد، والمجال، والحد، أو المدى.

الحد	رتبة الحد
3	1
8	2
13	3
18	4
23	5
?	6

+5
+5
+5
+5

الفرق بين كل حدين متتاليين في المدى هو 5

المتتالية الحسابية هي متتالية الفرق بين كل حدين متتاليين فيها ثابت.

هذا الفرق يُسمى **الفرق الثابت**، أو d .

المتتالية المعطاة هي متتالية حسابية الفرق الثابت فيها هو $d = 5$.

إذن، الحد التالي في المتتالية هو $23 + 5 = 28$ ، أي 28

ينبع في الصفحة التالية

- صيغة صريحة
- explicit formula
- series
- متسلسلة
- متسلسلة حسابية
- arithmetic series
- sigma notation
- رمز المجموع

الاستيعاب المفاهيمي

خطأ شائع

يُحسب الفرق الثابت دائمًا بطرح أي حد في المتتالية من الحد الذي يليه مباشرة، $d = a_n - a_{n-1}$.

تابع المثال 1

الجزء B

س: ماذا تلاحظ عند استعمال الصيغة الارتدادية لمتتالية حسابية؟
[عندما تريد إيجاد حد معين في متتالية، يجب إيجاد قيمة الحد الذي يسبقه مباشرة.
قد يتطلب ذلك إيجاد قيم جميع الحدود في المتتالية بدءًا من قيمة الحد الأول.]

الجزء C

س: كيف يمكنك تحديد ما إذا كان نمط ما يشكّل متتالية حسابية؟
[يمكنك طرح كل حد من الحد الذي يسبقه مباشرة. إذا كانت نواتج الطرح جميعها متساوية، هذا يعني أن الفرق بين الحدود ثابت، وبالتالي المتتالية حسابية.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

1. **a.** نعم؛ $a_n = \begin{cases} 25, & n = 1 \\ a_{n-1} - 5, & n > 1 \end{cases}$ ؛ الحد التالي هو 5
- b.** لا

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: هل يمكن أن تكون الحدود في متتالية حسابية أعدادًا سالبة؟
[نعم؛ يمكن أن تكون الحدود في متتالية حسابية سالبة. يمكن أن يكون الحد الأول في متتالية عددًا سالبًا، أو يمكن أن يكون الفرق الثابت في متتالية عددًا سالبًا، وفي الحالتين تكون الحدود في المتتالية أعدادًا سالبة.]

تابع المثال 1

B. اكتب صيغة يمكن استعمالها لإيجاد الحد التالي في المتتالية.

يمكن تمثيل كل حد بالدالة $f(n)$ حيث يمثل n رتبة الحد.

إذن، عندما $n = 1$ ، فإن $f(1) = 3$

إذا كان $n > 1$ ، فإن كل حد يساوي ناتج جمع الحد الذي يسبقه مباشرة مع العدد 5

$$f(2) = f(1) + 5$$

$$f(3) = f(2) + 5$$

$$f(n) = f(n-1) + 5$$

اكتب الصيغة العامة للمتتالية الحسابية في صورة دالة متعددة التعريف:

$$f(n) = \begin{cases} f(1), & n = 1 \\ f(n-1) + d, & n > 1 \end{cases}$$

هذه هي **الصيغة الارتدادية** للمتتالية الحسابية، حيث يعزّف كل حد من خلال العمليات الحسابية المطبقة على الحد الذي يسبقه مباشرة.

نقطة طريقة أخرى لكتابة الصيغة الارتدادية وهي استعمال الترميز السفلي.

$$a_n = \begin{cases} a_1, & n = 1 \\ a_{n-1} + d, & n > 1 \end{cases}$$

يشير الترميز السفلي إلى رتبة الحد.

C. هل المتتالية ... 4, 7, 10, 13, 16، حسابية؟ إذا كانت كذلك، اكتب صيغتها الارتدادية.

الفرق الثابت، d ، هو 3،
إذن هذه متتالية حسابية.

$$a_1 = 4$$

$$a_n = \begin{cases} 4, & n = 1 \\ a_{n-1} + 3, & n > 1 \end{cases}$$

الصيغة الارتدادية لهذه المتتالية هي:

حاول أن تحلّ! 1. هل كل من المتتاليتين التاليتين متتالية حسابية؟ إذا كانت كذلك، اكتب صيغتها الارتدادية، ثم أوجد الحد التالي.

- a.** 25, 20, 15, 10, ... **b.** 2, 4, 7, 12, 13, ...

نصيحة دراسية

المتتالية الحسابية هي دالة، لذا يمكنك كتابة حدودها باستعمال رمز الدالة.

التحويل بين الصيغة الارتدادية والصيغة الصريحة

مثال 2

طرح أسئلة هادفة

س: ما وجه المقارنة بين الصيغة الصريحة والصيغة الارتدادية؟

[تبيّن كلنا الصيغتين الفرق الثابت والحد الأول في المتتالية. يمكنك استعمال الصيغة الصريحة لإيجاد قيمة أي حد من حدود المتتالية من دون الحاجة إلى حساب قيم جميع الحدود السابقة.]

س: متى قد ترغب في استعمال الصيغة الارتدادية للمتتالية بدلاً من صيغتها الصريحة؟

[قد تكون الصيغة الارتدادية خياراً أفضل عندما تريد كتابة جميع الحدود في متتالية حتى حد معيّن]

حاول أن تحلّ! الإجابات

2. a. $a_n = 45 - 2(n - 1)$

b. $a_n = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ a_{n-1} + 7, & n > 1 \end{cases}$

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: عند التحويل بين الصيغة الارتدادية والصيغة الصريحة، ماذا يجب أن تفعل أولاً؟

[يجب أن تحدد الفرق الثابت والحد الأول في المتتالية.]

التحويل بين الصيغة الارتدادية والصيغة الصريحة

مثال 2

A. إذا كانت الصيغة الارتدادية لمتتالية هي $a_n = \begin{cases} 3, & n = 1 \\ a_{n-1} + 0.5, & n > 1 \end{cases}$ ، أوجد صيغتها الصريحة.

نسمح **الصيغة الصريحة**، التي نكتب في الصورة $a_n = a_1 + d(n - 1)$ ، بإيجاد أي حد في المتتالية من دون معرفة الحد الذي يسبقه مباشرة. استعمال الصيغة الارتدادية للمتتالية لإيجاد نمط:

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 3 + 0.5$$

$$a_3 = a_2 + 0.5 = (3 + 0.5) + 0.5 = 3 + 2(0.5)$$

$$a_4 = a_3 + 0.5 = (3 + 2(0.5)) + 0.5 = 3 + 3(0.5)$$

لا يُضاف الفرق الثابت إلى الحد الأول، في الحد الثاني يُضاف الفرق الثابت مرة واحدة إلى الحد الأول، وفي الحد الثالث يُضاف الفرق الثابت مرتين إلى الحد الأول، وهكذا.

استعمل البنية

بما أن $a_2 = a_1 + 0.5$ ، استعمال التعويض لتبسيط المقدار.

أذن الصيغة الصريحة هي $a_n = 3 + (n - 1)(0.5)$.

بصورة عامة الصيغة الصريحة للمتتالية الحسابية هي $a_n = a_1 + d(n - 1)$.

B. إذا كانت الصيغة الصريحة لمتتالية حسابية هي $a_n = 16 - 3(n - 1)$ ، أوجد الصيغة الارتدادية للمتتالية.

الفرق الثابت d يساوي -3 و $a_1 = 16$.

أذن، الصيغة الارتدادية لهذه المتتالية هي $a_n = \begin{cases} 16, & n = 1 \\ a_{n-1} - 3, & n > 1 \end{cases}$.

حاول أن تحلّ! 2. A. إذا كانت الصيغة الارتدادية هي $a_n = \begin{cases} 45, & n = 1 \\ a_{n-1} - 2, & n > 1 \end{cases}$ ، فما صيغتها الصريحة؟

B. إذا كانت الصيغة الصريحة لمتتالية هي $a_n = 1 + 7(n - 1)$ ، فما صيغتها الارتدادية؟

مثال 3 حل مسائل تتضمن متتاليات حسابية

طرح أسئلة هادفة

س: كيف يمكنك إيجاد الصيغة الصريحة لمتتالية إذا كنت لا تعرف الفرق الثابت؟
[إذا كنت تعرف قيمتي حدّين من حدود المتتالية، يمكنك استعمالهما لحساب الفرق الثابت.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

3. a. $a_n = 1 + \frac{1}{6}(n - 1)$
b. 4 mi

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: ما الطريقة التي يمكنك استعمالها لإيجاد الصيغة الصريحة للمتتالية؟
[يمكنك تعويض 1 عن a_1 ، و 2 عن a_n ، و 7 عن n في الصيغة الصريحة العامة وحلها لإيجاد قيمة d . يمكنك بعد ذلك كتابة الصيغة الصريحة بتعويض 1 عن a_1 و $\frac{1}{6}$ عن d .]

خطأ شائع

حاول أن تحلّ! 3 قد يخطئ بعض الطلاب في تعويض القيم في الصيغة الصريحة فيكتبونها في الصورة $(1 - 7)d + 2 = 1$ ، التي نتیجتها هي $d = -\frac{1}{6}$.
اطلب من الطلاب توضيح إجاباتهم في سياق الموقف. بما أن المسافة التي ركضتها هدى في اليوم السابع أكبر من المسافة التي ركضتها في اليوم الأول، فإن الفرق الثابت يجب أن يكون عدداً موجباً.

استعمل مع الأمثلة 1 و 2 و 3

عادات التفكير

استعمل البنية كيف يمكنك استعمال الصيغة الارتدادية لمتتالية حسابية لإيجاد قيمة الحد 120؟

[حوّل الصيغة الارتدادية إلى الصيغة الصريحة، ثم استعمل الصيغة الصريحة لحساب a_{120} .]

تطبيق

مثال 3

حل مسائل تتضمن متتاليات حسابية



تحتوي قاعة محاضرات في مدرسة ثانوية على 18 مقعداً في الصف الأول و 26 مقعداً في الصف الخامس. أعداد المقاعد في الصفوف تشكّل متتالية حسابية.

A. أوجد الصيغة الصريحة لهذه المتتالية.

تنص المسألة على أن $a_1 = 18$ و $n = 5$ و $a_5 = 26$.

اكتب الصيغة الصريحة العامة

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

$$26 = 18 + d(5 - 1)$$

$$26 = 18 + 4d$$

$$8 = 4d$$

$$2 = d$$

عدد المقاعد في كل صف أكثر بمقعدين من عدد المقاعد في الصف الذي يسبقه مباشرة.

إذن، الصيغة الصريحة للمتتالية هي $a_n = 18 + 2(n - 1)$.

B. أوجد عدد المقاعد في الصف الثاني عشر.

اكتب الصيغة الصريحة

$$a_n = 18 + 2(n - 1)$$

$$a_{12} = 18 + 2(12 - 1)$$

$$a_{12} = 40$$

إذن، يحتوي الصف الثاني عشر على 40 مقعداً.

3. حاول أن تحلّ! تندرّب هدى من أجل سباق الجري. تشكل المسافات التي تركضها أثناء التدريب متتالية حسابية، حيث ركضت مسافة 1 mi في اليوم الأول و 2 mi في اليوم السابع.

a. ما الصيغة الصريحة لهذه المتتالية؟

b. ما المسافة التي ركضتها هدى في اليوم 19؟

مثال 4 إيجاد مجموع متسلسلة حسابية

مثال 4

طرح أسئلة هادفة

س: من أين جاءت $S_5 \cdot 2$ ؟
[من جمع المتتالية S_5 مع نفسها، وناتج جمع أي قيمة مع نفسها يساوي ناتج ضربها في 2]

س: لماذا كتب العدد 14 في صورة $1 + 13$ بدلاً من مجموع عددين مضافين آخرين ناتج جمعهما يساوي 14؟

[الحدان الأول والأخير في هذه المتتالية هما 1 و 13، ويُستعمل الحدان الأول والأخير في الصيغتين الارتدادية والصريحة، لذلك من المنطقي استعمالهما عددين مضافين ناتج جمعهما 14]

س: ما وجه الشبه بين الصيغة العامة لمجموع متسلسلة حسابية ومتوسط الأعداد فيها؟
[في الصيغة العامة لمجموع المتسلسلة يُضرب مجموع الحدين الأول والأخير في المتسلسلة في نصف عدد الحدود فيها. ونحصل على نفس النتيجة بإيجاد متوسط جميع الحدود وضربه في العدد الكلي للحدود.]

حاول أن تحل! الإجابات

4. a. 168
b. 161

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: كيف يمكنك إيجاد مجموع المتسلسلة الواردة في الجزء (b) باستعمال الصيغة العامة؟
هل هناك أي طريقة أخرى لإيجاد المجموع؟
[قبل استعمال الصيغة العامة لإيجاد مجموع المتسلسلة، يجب أن تعدّ الحدود لإيجاد قيمة الحد العام n ، ثم يمكنك استعمال الصيغة العامة لإيجاد المجموع. يمكنك أيضًا إيجاد مجموع المتسلسلة بجمع قيم جميع حدودها.]

مثال 4 إيجاد مجموع متسلسلة حسابية

أ. ما مجموع الحدود في المتتالية الحسابية 1, 4, 7, 10, 13 الحسابية؟

ما الصيغة العامة لمجموع متسلسلة حسابية؟

المتسلسلة المنتهية هي مجموع الحدود في المتتالية المنتهية. **المتسلسلة الحسابية**

المنتهاية هي مجموع الحدود في المتتالية الحسابية المنتهية. لإيجاد مجموع n من الأعداد في متتالية حسابية، يمكنك استعمال الصيغة الارتدادية أو جمع الحدود ببساطة.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n$$

$$1 + 4 + 7 + 10 + 13 = 35$$

هذا يمثل مجموعًا جزئيًا لمتسلسلة لأنه مجموع عدد منتهٍ، n ، من حدودها.

لإيجاد مجموع متسلسلة عدد حدودها كبير، يمكنك استعمال الصيغة الصريحة للمجموع.

الخطوة 1 لإيجاد الصيغة الصريحة للمجموع، استعمال خاصية الإبدال في الجمع وأعكس ترتيب الحدود في المتسلسلة الارتدادية.

$$S_5 = 13 + 10 + 7 + 4 + 1$$

عوّض قيم الحدود من المتسلسلة.

الخطوة 2 اجمع المقدارين اللذين يمثلان المتسلسلة، أي اجمع الحد الأول مع الحد الأخير والحد الثاني مع الحد قبل الأخير، وهكذا.

$$\begin{array}{r} S_5 = 1 + 4 + 7 + 10 + 13 \\ + S_5 = 13 + 10 + 7 + 4 + 1 \\ \hline 2S_5 = 14 + 14 + 14 + 14 + 14 \end{array}$$

الخطوة 3 بنشط

$$2 \cdot S_5 = 5(14)$$

$$S_5 = \frac{5(1 + 13)}{2}$$

لاحظ أن 14 هو مجموع الحدين الأول والأخير أو $a_1 + a_5$.

الخطوة 4 اكتب الصيغة العامة.

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

B. أوجد مجموع حدود المتتالية الحسابية 2, 6, 10, 14, 18, 22

$$n = 6 \quad a_1 = 2 \quad a_n = 22$$

استعمل الصيغة العامة لإيجاد مجموع الحدود.

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}, \quad S_6 = \frac{6(2 + 22)}{2} = \frac{144}{2} = 72$$

إذن، مجموع الحدود في المتتالية يساوي 72

حاول أن تحل! 4. أوجد مجموع الحدود في كل من المتسلسلات الحسابية التالية.

a. متسلسلة تنضفن 12 حدًا، حيث $a_1 = 3$ و $a_{12} = 25$
b. 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 4 اطلب من الطلاب إيجاد مجموع متسلسلات مكوّنة من خليط من الأعداد الموجبة والسالبة.

1. أوجد مجموع متسلسلة عدد حدودها 11، حيث $a_1 = 17$ و $a_{11} = -23$. [-33]
2. أوجد مجموع متسلسلة عدد حدودها 15، حيث $a_1 = -35$ و $a_{15} = 63$. [210]
3. أوجد مجموع المتسلسلة -20، -14، -8، -2، 4، 10، 16، 22 [8]

استعمال رمز المجموع

مثال 5

طرح أسئلة هادفة

س: متى تجد مجموع متسلسلة بكتابة جميع حدودها؟
[تجد مجموع متسلسلة بكتابة جميع حدودها عندما يكون عدد الحدود صغيراً.]

س: هل يمكنك إيجاد مجموع متسلسلة من دون معرفة عدد حدودها؟
[لا؛ لإيجاد مجموع متسلسلة يجب إما معرفة قيمة كل حد فيها أو استعمال الصيغة الصريحة للمتسلسلة التي تتطلب معرفة عدد حدودها، أي n .]

حاول أن تحلّ! الإجابات

5. a. 299
b. $\sum_{i=1}^8 5i + 3; 204$

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: كيف يمكنك تحديد عدد الحدود في المتسلسلة $8 + 13 + 18 + \dots + 43$ ؟
[من الحدود المعطاة، يمكنك إيجاد قيمة كل من a_1 و a_n و d . عوض هذه القيم في الصيغة الصريحة للمتتالية، ثم حل لإيجاد قيمة n .]

المفهوم رمز المجموع

يمكن كتابة مجموع n حدود متتالية باستعمال **رمز المجموع** Σ (ونقرأ سيجما):

$$\sum_{i=1}^n a_i$$

يمثل الرمز السفلي i رتبة الحد في ناتج المجموع الجزئي. وهنا يأخذ الرمز السفلي القيم من 1 إلى n ، وهي رتبة الحد الأخير في المجموع الجزئي للمتسلسلة. قيمة الحد الذي رتبته i هي a_i .
يمكنك استعمال الصيغة الصريحة للمتتالية بدلاً من a_i .

استعمال رمز المجموع

$$\text{A. أوجد } \sum_{i=1}^9 (2i - 6)$$

أوجد المجموع بكتابة جميع الحدود في المتسلسلة.

$$\begin{aligned} a_1 &= 2(1) - 6 = -4 & a_4 &= 2(4) - 6 = 2 & a_7 &= 2(7) - 6 = 8 \\ a_2 &= 2(2) - 6 = -2 & a_5 &= 2(5) - 6 = 4 & a_8 &= 2(8) - 6 = 10 \\ a_3 &= 2(3) - 6 = 0 & a_6 &= 2(6) - 6 = 6 & a_9 &= 2(9) - 6 = 12 \\ \sum_{i=1}^9 (2i - 6) &= S_9 = -4 - 2 + 0 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = 36 \end{aligned}$$

ابحث عن العلاقات
يمكنك أن تلاحظ بسهولة أن الفرق الثابت في المتسلسلة يساوي 2

B. اكتب المتسلسلة $2 + 9 + 16 + \dots + 79$ باستعمال رمز المجموع، ثم أوجد هذا المجموع.

الخطوة 1 أوجد قيمة n لإيجاد عدد الحدود في المتسلسلة:

$$d = 7, a_n = 79, a_1 = 2$$

اكتب الصيغة الصريحة

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

$$79 = 2 + (7)(n - 1)$$

$$a_n = 79, d = 7, a_1 = 2$$

$$77 = (7)(n - 1)$$

بسط

$$11 = n - 1$$

بسط

$$n = 12$$

حل

إذن، يوجد 12 حدًا في المتسلسلة.

الخطوة 2 اكتب الصيغة الصريحة لحدود المتسلسلة.

$$a_n = 2 + 7(n - 1) = 7n - 5$$

الخطوة 3 اكتب المتسلسلة باستعمال رمز المجموع.

الرمز i هو رقم الحد من 1 إلى $n = 12$.

الصيغة الصريحة تعطي $a_i = 7i - 5$

$$\sum_{i=1}^{12} (7i - 5)$$

ينص في الصفحة التالية

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 5 قد يواجه الطلاب صعوبة في استعمال مفهوم رمز المجموع.
اطلب من الطلاب التدرب على كتابة المتسلسلات باستعمال رمز المجموع.

- استعمل الخاصية المعطاة لكتابة المتسلسلة في صورة رمز المجموع.

1. $a_1 = 5, d = 3, n = 15$ $\left[\sum_{i=1}^{15} 3i + 2 \right]$
2. $a_1 = 8, d = -2, n = 13$ $\left[\sum_{i=1}^{13} 10 - 2i \right]$
3. $a_1 = 15, d = 4, n = 10$ $\left[\sum_{i=1}^{10} 11 + 4i \right]$

استعمال متسلسلة حسابية منتهية

مثال 6

طرح أسئلة هادفة

س: ما المعلومات المعطاة لإيجاد مجموع العلب المستعملة لبناء الهرم؟
[تم إعطاء عدد العلب في كل من الصفوف الثلاثة الأولى والعدد الاجمالي للصفوف.]

س: ماذا يجب أن تجد لحساب مجموع العلب في واجهة العرض الزجاجية؟
يجب إيجاد الفرق الثابت أولاً، وباستعمال المعلومات المعطاة والفرق الثابت يمكنك كتابة الصيغة الصريحة لمجموع المتسلسلة لحساب عدد العلب في واجهة العرض.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

6. 480

استعمل مع الأمثلة 4 و 5 و 6

عادات التفكير

فكر وثابر في الحل ما مجموع أول 50 عدد كلي فردي؟ وضح كيف وجدت الإجابة.

[2 500، الصيغة الصريحة تعطي $a_i = 2i - 1$ ، ويتراوح الرمز السفلي بين 1 و 50]

تابع المثال 5

الخطوة 4 أوجد مجموع المتسلسلة.

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$S_{12} = \frac{12(2 + 79)}{2} = 486$$

إذن، نكتب المتسلسلة باستعمال رمز المجموع كما يلي: $\sum_{i=1}^{12} (7i - 5)$ وبالتالي فإن مجموع المتسلسلة يساوي 486

حاول أن تحلّ! 5. أوجد مجموع المتسلسلة $\sum_{i=1}^{13} (3i + 2)$.

6. اكتب المتسلسلة $8 + 13 + 18 + \dots + 43$ باستعمال رمز المجموع، ثم أوجد هذا المجموع.

مثال 6 استعمال متسلسلة حسابية منتهية

يعرض أحد المتاجر هزناً من العلب في واجهة العرض الزجاجية. يحتوي الصف العلوي على علية واحدة، والصف الثاني على علبتين، والصف الثالث على 3 علب. إذا كان الهرم مكوناً من 10 صفوف من العلب، أوجد مجموع عدد العلب المستعملة لبناء الهرم.

تشكل أعداد العلب في صفوف الهرم متسلسلة حسابية الفرق الثابت فيها يساوي 1

الخطوة 1 أوجد a_{10} و a_1

$$a_1 = 1$$

$$a_{10} = a_1 + d(n - 1)$$

$$= 1 + 1(10 - 1)$$

$$= 10$$

الخطوة 2 استعمل الصيغة الصريحة لإيجاد مجموع المتسلسلة.

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$S_{10} = \frac{10(1 + 10)}{2} = 55$$

إذن، يحتوي الهرم على 55 علية.

تطبيق

نصيحة دراسية

بما أنك تعرف قيم n و a_1 و a_{10} ، يمكنك استعمال الصيغة الصريحة لإيجاد مجموع المتسلسلة بدقة.

حاول أن تحلّ! 6. درج في مركز تجاري يزداد عرض درجانه نزولاً من الأعلى، حيث تتكوّن

الدرجة العليا من 15 بلاطة، والدرجة الثانية من 17 بلاطة، والدرجة الثالثة من 19 بلاطة، وهكذا. إذا كان الدرج يتكوّن من 16 درجة، فما عدد البلاطات المستعملة في الدرج كله؟

تعزيز المهارات اللغوية (استعمل مع المثال 6)

الكتابة مستوى 1 انظر إلى الأعداد التي تشير إلى المواقع في المثال: يحتوي الصف الثاني على علبتين؛ والصف الثالث على 3 علب. الهرم مكون من 10 صفوف من العلب.

س: توجد في الصف العلوي علية واحدة. ما العدد الذي يمكن استعماله لوصف الصف العلوي؟

[الأول]

اطلب من الطلاب استعمال الصيغة لإيجاد عدد العلب في الصف الثالث، والرابع، والخامس، حتى الصف العاشر. اعرض الأعداد "الترتيبية" وأوجد مجموع القيم لتوضيح أن هذه الصيغة فعالة.

القراءة مستوى 2 اطلب من الطلاب قراءة عنوان المثال والوصف المكتوب بخط غامق لموقف المسألة. تكلم عن المصطلح "منتهية" واطلب من الطلاب تحديد المعلومات الواردة في نص المسألة التي تشير إلى أن المسألة تتعلق بمتسلسلة حسابية منتهية.

س: ماذا يعني المصطلح "منتهية"؟

[متسلسلة عدد حدودها منته أو الحد الأخير فيها معروف.]

س: أي جزء من الوصف يشير إلى أن المتتالية الحسابية منتهية؟

["الهرم مكون من 10 صفوف من العلب"]

س: أي مصطلح يعني ليس منتهية؟

[غير منته]

الاستماع مستوى 3 ساعد الطلاب على تصوّر هرم العلب الموضح في المثال. امنح الطلاب قوالب أو وسائل يدوية مرصوفة لنمذجة ترتيب ما وصفته لهم. اطلب من الطلاب الاستماع إليك وأنت تعطيهم التعليمات عن عدد العلب التي يجب رصها في كل صف لإنشاء أهرامات بترتيبات مختلفة.

س: ما وجه الاختلاف بين الهرم المكوّن من علب، كما هو موصوف في المثال، وأهرامات مصر؟

[ينحدر هرم العلب ضمن بُعدين فقط (الطول والعرض)، بينما أهرامات مصر ثلاثية الأبعاد لها قاعدة مربعة.]

س: هل يمكن رص العلب لتكوين هرم مربع؟

[نعم]

س: ما عدد العلب التي ستكون الطبقة السفلية لهرم مربع

مكوّن من 10 صفوف؟

[100]

ملخص المفهوم المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

س: ماذا تلاحظ عندما تنظر إلى الصيغة الارتدادية والصيغة الصريحة ورمز المجموع؟
[جميعها تستعمل القيم n و a_1 و a_n]

عبر عن فهمك | طبق فهمك

خطأ شائع

التمرين 11 قد يعتقد بعض الطلاب أن الإجابة هي 54 لأنه الحد السابع في المتتالية. اطلب من الطلاب تحديد الفرق الثابت والمبلغ المودع في نهاية شهر يوليو. يجب أن يدركوا أن مجموع مبلغَي الشهرين الأولين أكبر من QR 54، إذا لزم الأمر، اطلب من الطلاب حساب المبلغ المودع في نهاية كل شهر وجمع هذه المبالغ للتحقق من عملهم عند استعمال صيغة مجموع المتسلسلة.

الإجابات

1. إذا كانت المسألة تتضمن مجموعة من الأعداد الفرق بينها ثابت، يمكنك إيجاد صيغة صريحة واستعمالها لحل المسألة.
2. المتتالية الحسابية هي مجموعة من الأعداد الفرق بين كل حدين متتاليين فيها ثابت. المتسلسلة الحسابية هي مجموع الأعداد في متتالية حسابية.
3. النمط هو $1, 2, 3, \dots$ ، ونلاحظ في هذا النمط عدم وجود فرق ثابت بين الحدود المتتالية، وبالتالي هذه ليست متتالية حسابية.
4. أوجد قيمة $2n + 1$ إذا كان $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ، ثم اجمع الإجابات الخمس لإيجاد المجموع النهائي.

5. $\frac{1}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2$
6. $-5; -19, -24, -29$
7. $12; 263, 275, 287$
8. $-1; -8, -9, -10$
9. $2.2; 12.9, 15.1, 17.3$
10. $8; 23, 31, 39$
11. QR 1 176

ملخص المفهوم المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

في المتتالية الحسابية يكون كل حد مساوياً للحد السابق بالإضافة إلى ثابت d ، يُسمى الفرق الثابت.

الصيغة الارتدادية	الصيغة الصريحة	المتسلسلة الحسابية
جبرياً	صيغة المجموع:	
$a_n = \begin{cases} a_1, & n = 1 \\ a_{n-1} + d, & n > 1 \end{cases}$	$a_n = a_1 + d(n - 1)$	$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$
عددياً	عندما $a_1 = 1$ و $d = 7$ ، فإن:	عندما $a_1 = 90$ و $d = -4$ ، فإن:
$a_2 = 1 + 7 = 8$ $a_3 = 8 + 7 = 15$ $a_4 = 15 + 7 = 22$ وهكذا ...	$a_2 = 90 - 4(2 - 1) = 86$ $a_3 = 90 - 4(3 - 1) = 82$ $a_4 = 90 - 4(4 - 1) = 78$ وهكذا ...	$\sum_{i=1}^8 (5i - 2)$ $= 3 + 8 + 13 + 18 + 23 + 28 + 33 + 38$ $= 164$ $S_8 = \frac{8(3 + 38)}{2} = 164$ أو

عبر عن فهمك

1. السؤال الأساسي ما المتتالية الحسابية، وكيف تمثل وتحد حدودها ومجموع هذه الحدود؟
2. المصطلحات بماذا تختلف المتتاليات الحسابية عن المتسلسلات الحسابية؟
3. حل الخطأ يقول خالد إن المتتالية $0, 1, 3, 6, \dots$ متتالية حسابية، وأن الحد التالي فيها هو 10 أوجد خطأ خالد ووضحه.
4. تواصل بدقة كيف يمكنك إخبار شخص ما بكيفية حساب $\sum_{n=1}^5 (2n + 1)$ ؟

طبق فهمك

في التمارين 5-10، أوجد الفرق الثابت والحدود الثلاثة التالية في كل متتالية حسابية.

5. $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \dots$
6. $6, 1, -4, -9, -14, \dots$
7. $215, 227, 239, 251, \dots$
8. $-4, -5, -6, -7, \dots$
9. $4.1, 6.3, 8.5, 10.7, \dots$
10. $-17, -9, -1, 7, 15, \dots$

11. في شهر يونيو أودعت في حساب توفيرك الخاص بالعطلات مبلغ QR 120 ثم أودعت شهرياً مبلغاً يزيد على المبلغ المودع في الشهر السابق بمقدار QR 16 حتى نهاية السنة. كم من النقود ستدخر حتى نهاية شهر ديسمبر؟

تدرّب وُحْل مسائل دليل المهام

أساسي	متقدم
12-27, 29, 31, 33-40	12-17, 19, 21, 23-40

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	18-21, 36	1
	13	2
2	22-25	1
	12	2
	15	3
3	14, 17, 26, 35	2
4	27, 28	1
5	29, 30	1
6	16, 31-34, 37, 38	2

الإجابات

12. قد تتنوّع الإجابات.

نموذج إجابة: $17, 11, 5, -1, \dots$
 الصيغة الصريحة: $a_n = 17 - 6(n - 1)$
 الصيغة الارتدادية: $a_n = \begin{cases} 17, & n = 1 \\ a_{n-1} - 6, & n > 1 \end{cases}$

13. الفرق الثابت هو قيمة التغير الثابت بين الحدود المتتالية في متتالية حسابية. نموذج إجابة: في المتتالية الحسابية $2, 4, 6, 8, \dots$ الفرق الثابت هو العدد الموجب 2

14. 9 عمليات بيع على الأقل

15. كتبت كل من هدى وندى الصيغة الصحيحة. يمكن تبسيط صيغة هدى للحصول على صيغة ندى.

16. 440

17. a. $a_n = 2 + 0.3(n - 1)$

b. اليوم 38

18. نعم؛ 10؛ 50

19. نعم؛ -11؛ 53

20. لا

21. نعم؛ 4؛ 19

22. $a_n = \begin{cases} 2, & n = 1 \\ a_{n-1} + 2, & n > 1; a_n = 2 + 2(n - 1) \end{cases}$

23. $a_n = \begin{cases} -2, & n = 1 \\ a_{n-1} + 7, & n > 1; a_n = -2 + 7(n - 1) \end{cases}$

24. $a_n = \begin{cases} 0, & n = 1 \\ a_{n-1} + \frac{1}{8}, & n > 1; a_n = \frac{1}{8}(n - 1) \end{cases}$

تدرّب وُحْل مسائل

عزّز فهمك

12. **استعمل البنية** اكتب متتالية حسابية بأربعة حدود على الأقل، وصفها باستعمال الصيغتين الصريحة والارتدادية.

13. **حلّ الخطأ** تقول مها إن الفرق الثابت في متتالية حسابية عدد سالب دائماً، وذلك وفقاً لتعريف "الفرق". لماذا مها على خطأ؟ اكتب متتالية حسابية لإثبات أنها مخطئة.

14. **استعمل البنية** ستدفع إحدى الشركات لراشد مبلغ QR 120 عن أول عملية بيع، مع زيادة مقدارها QR 31.5 لكل عملية بيع تليها، أي أنه سيجني QR 151.5 من عملية البيع الثانية، و QR 183 من عملية البيع الثالثة، وهكذا. كم عملية بيع يجب أن يجري راشد ليجني QR 2 000 على الأقل؟

15. **مهارات التفكير العليا** تحاول كل من هدى وندى إيجاد الصيغة الصريحة للمتتالية الحسابية $-1, 6, 13, \dots$
 كتبت هدى: $a_n = -1 + 7(n - 1)$
 وكتبت ندى: $a_n = 7n - 8$
 أيهما كتبت الصيغة الصحيحة؟ وضح إجابتك.

16. **نموذج** افترض أنك تريد بناء درج مكون من 10 درجات. يلزم لبناء الدرجة العليا 8 قطع إسمنتية، ولبناء الدرجة السفلى 80 قطعة إسمنتية. إذا كانت أعداد القطع الإسمنتية تشكل متتالية حسابية، أوجد العدد الكلي للقطع الإسمنتية اللازمة لبناء الدرج.

17. **نموذج** مع اقتراب موعد سباق نصف الماراثون، قفز خليفة التدرّب بصورة يومية حتى موعد السباق، وهو يعتزم الركض مسافة 2 mi في اليوم الأول ومسافة 3.2 mi في اليوم الخامس.

a. أوجد الصيغة الصريحة لهذه المتتالية.
 b. أي يوم من أيام التدريب سيركض خليفة مسافة نصف الماراثون البالغة 13.1 mi؟



تدرّب

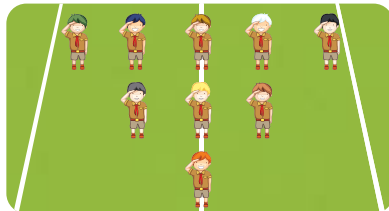
في التمارين 18-21، حدّد ما إذا كانت المتتالية حسابية أم لا. إذا كانت كذلك، أوجد الفرق الثابت، ثم أوجد الحد التالي في المتتالية. انظر المثال 1

18. 10, 20, 30, 40, ... 19. 97, 86, 75, 64, ...
 20. 1, 4, 9, 16, ... 21. 3, 7, 11, 15, ...

في التمارين 22-25، حوّل من الصيغة الارتدادية إلى الصيغة الصريحة أو العكس. انظر المثال 2

22. $a_n = \begin{cases} 2, & n = 1 \\ a_{n-1} + 2, & n > 1 \end{cases}$
 23. $a_n = -2 + 7(n - 1)$ 24. $a_n = \frac{1}{8}(n - 1)$
 25. $a_n = \begin{cases} -4, & n = 1 \\ a_{n-1} - 4, & n > 1 \end{cases}$

26. يبدأ أعضاء فريق الكشف عرساً يقدمونه بالاصطفاف على شكل هرم. يحتوي الصف الأول على عضو واحد، ويحتوي الصف الثالث على 5 أعضاء. انظر المثال 3
 a. أوجد الصيغة الصريحة لهذه المتتالية.
 b. أوجد عدد الأعضاء في الصف الثامن.



في التمرينين 27 و 28، أوجد مجموع المتسلسلة الحسابية بمعلومية عدد حدودها وقيمة كل من a_n و a_1

انظر المثال 4

27. 10 حدود و $a_1 = 4$ و $a_{10} = 31$
 28. 15 حدّاً و $a_1 = 17$ و $a_{15} = 129$

في التمرينين 29 و 30، أوجد مجموع المتسلسلة. انظر المثال 5

29. $\sum_{n=1}^{11} (3 + 2n)$ 30. $\sum_{n=1}^{12} \left(\frac{n}{2} - 9\right)$

31. يزداد عدد المقاعد في إحدى القاعات كلما ابتعد الصف عن المنصة. يحتوي الصف الأمامي على 24 مقعداً، والصف الثاني على 29 مقعداً، والصف الثالث على 34 مقعداً. إذا كان عدد الصفوف 35 صفّاً، أوجد عدد المقاعد في القاعة. انظر المثال 6

الدرس 2-1 المتتاليات والمتسلسلات الحسابية 65

25. $a_n = \begin{cases} -4, & n = 1 \\ a_{n-1} - 4, & n > 1; a_n = -4 - 4(n - 1) \end{cases}$

26. a. $a_n = 1 + 2(n - 1)$
 b. 15

27. 175

28. 1 095

29. 165

30. -69

31. 3 815

الإجابات

32. 105

33. 6 409 ft

34. a. لا؛ المجموع هو 450 حاسوبًا محمولًا فقط.

b. العيوب: أجهزة الحاسوب المحمولة في السنة الأولى قد تتعطل قبل أن يحصل جميع الطلاب على حاسوب محمول. المزايا: تقسيم التكلفة.

35. a. $a_n = 18 + 3(n - 1)$

b. $a_1 = 18; a_n = a_{n-1} + 3$

c. 63 تمرين ضغط

d. 648 تمرين ضغط

36. الأعداد التي تنتمي إلى المتتالية: 60, 39, 81

الأعداد التي لا تنتمي إلى المتتالية: 68, 75

38. الجزء A $a_n = 175 + 28(n - 1)$

الجزء B 724.5 جرامًا

الجزء C 31 أسبوعًا

تدرب و حل مسائل

طبق

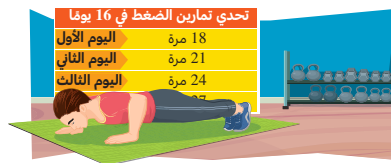
32. فكر وناظر في الحل صنع فنان لوحة فسيفساء مثلثة الشكل. يحتوي الصف العلوي على قطعة زجاجية ملونة واحدة، والصف الثاني على قطعتين، والصف الثالث على 3 قطع. إذا كانت اللوحة مكونة من 14 صفًا، فكم قطعة زجاجية ملونة استعملت لصنع هذه اللوحة؟

33. نمذج يقطع سائق سيارات سباق مسافة 34 ft في الثانية الأولى من السباق، ثم يقطع مسافة 3.5 ft إضافية في كل ثانية لاحقة. أوجد المسافة، بالأقدام، التي يقطعها السائق خلال 52 ثانية.

34. ابن الحجج الرياضية قرر مجلس إدارة إحدى المدارس أن ينفق من أموال ميزانية التكنولوجيا السنوية هذه السنة على شراء 90 حاسوبًا محمولًا ليستعملها الطلاب، كما قرر أن يشتري كل سنة 40 حاسوبًا محمولًا جديدًا. a. قرر المجلس أيضًا وجوب أن يكون كل طالب في المدرسة قد حصل على حاسوبه الخاص مع انقضاء السنوات العشر القادمة. إذا كان عدد طلاب هذه المدرسة 500، هل هدف المجلس قابل للتحقيق؟ وضح إجابتك. b. اذكر بعضًا من مزايا وعيوب شراء أجهزة الحاسوب المحمول للطلاب بهذه الطريقة؟ إذا كان في مقدورك تغيير الخطة، كيف ستغيرها؟

35. فكر وناظر في الحل بدأ سعيد تحدي تمارين الضغط بتنفيذ التمرين 18 مرة في اليوم الأول من أكتوبر، و 21 مرة في اليوم الثاني من أكتوبر، و 24 مرة في اليوم الثالث من أكتوبر، وهكذا حتى يوم 16 أكتوبر، حيث قام بتمارين الضغط النهائية في التحدي.

- اكتب صيغة صريحة لنمذجة عدد تمارين الضغط التي نَفَّذَهَا سعيد كل يوم.
- اكتب صيغة ارتدادية لنمذجة عدد تمارين الضغط التي نَفَّذَهَا سعيد كل يوم.
- ما عدد تمارين الضغط التي نَفَّذَهَا سعيد يوم 16 أكتوبر.
- ما مجموع عدد تمارين الضغط التي نَفَّذَهَا سعيد من 1 أكتوبر إلى 16 أكتوبر.



تدرب على اختبار

36. أي من الأعداد أدناه تنتمي إلى المتتالية الحسابية 4, 11, 18, 25, 32, ...؟ اكتب الأعداد في المربع المناسب.

60	68	75	39	81
تنتمي إلى المتتالية				
لا تنتمي إلى المتتالية				

37. اختبار SAT/ACT يبيع هاشم مجلات من خلال التوصيل للمنازل. في يومه الأول باع 12 مجلة، وينوي أن يبيع كل يوم 5 مجلات أكثر من اليوم الذي قبله. إذا كان هدف هاشم يتحقق من خلال بيع المجلات لمدة 10 أيام فكم عدد المجلات التي سيبيعها؟

- A 314 B 345 C 415 D 474 E 505

38. مهمة أدالية بريي إبراهيم النحل في بستانه. يوضح المخطط أدناه عدد النحل في الأسابيع الأربعة الأولى. لنفترض أن تعداد النحل سوف يستمر بالزيادة بنفس المعدل.



الجزء A اكتب الصيغة الصريحة للمتتالية.

الجزء B إذا كانت كتلة النحلة الواحدة 1.5 جرامًا، فما هي الكتلة الكلية للنحل في نهاية الأسبوع الثاني عشر؟

الجزء C عندما يصل عدد النحل إلى 1 015، لا يعود الفقير يتسع لها. بعد كم أسبوعًا يصبح عدد النحل أكبر من أن يتسع له الفقير؟ برز إجابتك.

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم. تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس. كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليقًا متميزًا يستفيد منه الطلاب، كلٌّ بحسب مستواه. سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

ملاحظات

[illegible]

المتتاليات والمتسلسلات الهندسية

نظرة عامة على الدرس

الهدف

يصبح الطلاب قادرين على:

- ✓ إنشاء متتالية هندسية إذا أعطي تمثيلها البياني أو جدول أو علاقة.
- ✓ التحويل بين الصيغتين الارتدادية والصريحة للمتتاليات الهندسية.
- ✓ استعمال صيغة مجموع المتسلسلات الهندسية المنتهية لحل مسائل.

الفهم الأساس

المتتالية الهندسية هي متتالية عددية تربط بين كل حدين متتاليين فيها نسبة ثابتة، r . المتسلسلة الهندسية هي مجموع عدد معين من الحدود في متتالية هندسية.

سابقًا في هذه الوحدة، تمكن الطلاب من:

- كتابة المتتاليات الحسابية بالصيغة الارتدادية والتحويل من الصيغة الارتدادية إلى الصيغة الصريحة.
- في هذا الدرس، يتمكن الطلاب من:
- كتابة المتتاليات الهندسية بالصيغة الارتدادية والصيغة الصريحة والتحويل بين هاتين الصيغتين.
- إيجاد مجموع متسلسلة هندسية.

يؤكد هذا الدرس على الدمج بين المهارة الإجرائية والطلاقة والتطبيق.

- يستعمل الطلاب النسبة الثابتة في المتتاليات الهندسية، ويستعملونها لكتابة متسلسلة هندسية بالصيغة الارتدادية. كما يستعملون أيضًا نمطًا لكتابة الصيغة الصريحة لمتتالية.
- يستعمل الطلاب المتتاليات الهندسية والمتسلسلات لحل مسائل من واقع الحياة.

بناء المصطلحات

مراجعة المصطلحات

- متتالية حسابية | *arithmetic sequence*
- متسلسلة حسابية | *arithmetic series*

المصطلحات الجديدة

- متتالية هندسية | *geometric sequence*
- نسبة ثابتة | *common ratio*
- متسلسلة هندسية | *geometric series*

نشاط المصطلحات

ساعد الطلاب على تذكر الفرق بين "المتتاليات الحسابية" و"المتسلسلات الحسابية". وضح لهم أن الحدود المتتالية في المتتاليات الهندسية والمتسلسلات الهندسية، بدلاً من أن يربط بينها "فرق ثابت"، تربط بينها "نسبة ثابتة". اطلب من الطلاب إكمال نشاط التوصليل لمساعدتهم على التمييز بين هذه المصطلحات الأربعة.

1, 3, 9, 27, ...	متتالية حسابية
2 + 4 + 6 + 8, ...	متسلسلة حسابية
2, 4, 6, 8, ...	متتالية هندسية
1 + 3 + 9 + 27, ...	متسلسلة هندسية

نظرة عامة على المعايير في الرياضيات

معايير ممارسات الرياضيات

بتر منطقياً بطريقة تجريدية وكمية

يستعمل الطلاب العمليات الحسابية بمرونة عند ضرب طرفي معادلة تمثل متسلسلة هندسية في النسبة الثابتة r .

استكشف وبّر منطقياً

محور تركيز التدريس يستكشف الطلاب كيفية كتابة المقادير الجبرية التي تستند إلى الأوصاف التي تنتج نسب ثابتة. تمهيداً لكتابة تعريف للمتتالية الهندسية، يقارن الطلاب بين عدد النقاط التي يحصل عليها العملاء.

قبل البدء بالحلّ

إدراج مهام تعزز التفكير المنطقي ومهارات حل المسائل

س: هل يمكن تمثيل كل من العرضين بمتتالية حسابية؟
[لا؛ الفرق بين الحدود المتتالية في كلتا المتتاليتين ليس ثابتاً.]

أثناء الحلّ

دعم عملية التحدي البناء في تعلم الرياضيات

س: كيف يمكنك حساب النقاط التي يحصل عليها العملاء من العرض A لأي يوم معطى إذا كنت تعرف عدد نقاط اليوم الذي يسبقه مباشرة؟ ومن العرض B؟
[بالنسبة للعرض A، اضرب عدد نقاط اليوم السابق في 2، وبالنسبة للعرض B، اضرب عدد نقاط اليوم السابق في 3]

للطلاب سريعى الإنجاز

س: بذل بين عدد النقاط التي يقدّمها العرضان في اليوم الأول. كيف تتغير إجاباتك عن الأسئلة؟
[العرض A: $A = 1(2)^{x-1}$ ؛ العرض B: $B = 10(3)^{x-1}$ ؛ في اليوم السابع سيكون عدد نقاط العرض B أكبر من عدد نقاط العرض A. العرض $A = 64$ نقطة؛ العرض $B = 290 = 7$ نقطة.]

بعد إنجاز الحلّ

تيسير التعبير الصحيح في لغة الرياضيات

س: كيف حدّدت العرض الذي يقدّم نقاطاً أكثر في اليوم السابع؟
[احسب عدد النقاط التي يقدّمها كل من العرضين في اليوم الأول، ثم اضربه في الزيادة المعطاة لتحديد عدد النقاط التي يحصل عليها العملاء في اليوم الثاني. استعمل عدد النقاط في اليوم الثاني لحساب عدد النقاط في اليوم الثالث. أكمل هذه العملية حتى حساب عدد النقاط في اليوم السابع.]

استعمل مع استكشف وبّر منطقياً

عادات التفكير

بّر منطقياً هل يقدّم العرض B نقاطاً أكثر من العرض A دائماً؟ وضح إجابتك.

[لا؛ من اليوم 1 إلى اليوم 6، يقدّم العرض A نقاطاً أكثر.]

كتاب الطالب، صفحة 67

استكشف وبّر منطقياً

العرض A

10 نقاط اليوم!

عدد نقاط الأيام القادمة = $2 \times$ عدد نقاط اليوم السابق

العرض B

نقطة واحدة اليوم!

عدد نقاط الأيام القادمة = $3 \times$ عدد نقاط اليوم السابق

قدم أحد المتاجر لعملائه عرضين لجميع النقاط كما يلي:

A. ما المقدار الذي يمثّل عدد النقاط التي يحصل عليها العملاء يومياً من العرض A؟

B. ما المقدار الذي يمثّل عدد النقاط التي يحصل عليها العملاء يومياً من العرض B؟

C. **بّر منطقياً** أي العرضين يقدم نقاطاً أكثر في اليوم السابع؟ وضح إجابتك.

2-2

المتتاليات والمتسلسلات الهندسية

Geometric Sequences and Series

استطيع... تحديد المتتاليات والمتسلسلات الهندسية وكتابتها واستعمالها.

المصطلحات

- متتالية هندسية
- geometric sequence
- common ratio
- نسبة ثابتة
- متسلسلة هندسية
- geometric series

السؤال الأساس

كيف يمكنك تمثيل واستعمال المتتاليات والمتسلسلات الهندسية؟

مثال 1

تحديد المتتاليات الهندسية

A. هل المتتالية المبينة في الجدول أدناه متتالية هندسية؟ إذا كانت كذلك، اكتب صيغتها الارتدادية.

نموذج من أعمال الطلاب

A. $A = 10(2)^{x-1}$

B. $B = 1(3)^{x-1}$

C. العرض B؛ يقدّم العرض A في اليوم السابع 640 نقطة، بينما العرض B يقدّم 729 نقطة.

تقديم السؤال الأساس

وضع أهداف في الرياضيات لتعلّم مركز

عزف الطلاب بالمتتاليات والمتسلسلات الهندسية، وذكرهم بأنهم تعلّموا سابقاً عن المتتاليات والمتسلسلات الحسابية. وضح لهم أنهم سيتعلمون كتابة المتتاليات الهندسية وإيجاد مجموع المتسلسلات الهندسية.

مثال 1 تحديد المتتاليات الهندسية

طرح أسئلة هادفة

س: ما أوجه الشبه والاختلاف بين المتتاليات الهندسية والمتتاليات الحسابية؟

[مجال كل من المتتاليات الهندسية والحسابية هو جميع الأعداد الطبيعية. العلاقة

التي تربط بين أي حدين متتاليين في المتتالية هي نفسها في المتتالية كلها. في

المتتاليات الحسابية، الفرق بين أي حدين متتاليين ثابت. بينما في المتتاليات الهندسية،

النسبة بين أي حدين متتاليين ثابتة.]

س: إذا كان الحد السادس في المتتالية هو 964، فهل تبقى المتتالية هندسية؟

[لا؛ كي تكون المتتالية هندسية، يجب أن تكون النسبة بين أي حدين متتاليين

هي نفسها.]

المتتالية الهندسية هي متتالية تكون فيها النسبة بين كل حد والحد الذي يسبقه مباشرة ثابتة. هذه النسبة تسمى **النسبة الثابتة**، r .

لاحظ العلاقة بين الحدود في المتتالية:

الحد (a_n)	رتبة الحد (n)
4	1
12	2
36	3
108	4
324	5

كل حد يساوي 3 أمثال
الحد الذي يسبقه مباشرة.

هذه المتتالية متتالية هندسية، وذلك لأن عندما $n = 1$ ، فإن $a_1 = 4$ و $r = 3$ و $a_2 = a_1 \cdot 3$.

$$a_2 = a_1 \cdot 3$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot 3$$

الحد الأول

رتبة الحد

$$a_n = \begin{cases} 4, & n = 1 \\ 3a_{n-1}, & n > 1 \end{cases}$$

الصيغة الإزديادية لهذه المتتالية هي $a_n = \begin{cases} 4, & n = 1 \\ 3a_{n-1}, & n > 1 \end{cases}$.

كل حد a_n في المتتالية يساوي ناتج ضرب الحد الذي

يسبقه مباشرة a_{n-1} في النسبة الثابتة.

النسبة الثابتة

$$a_n = \begin{cases} a_1, & n = 1 \\ a_{n-1} \cdot r, & n > 1 \end{cases}$$

إذن، الصيغة الإزديادية العامة للمتتالية الهندسية هي $a_n = \begin{cases} a_1, & n = 1 \\ a_{n-1} \cdot r, & n > 1 \end{cases}$.

يتبع في الصفحة التالية

تابع المثال 1

حاول أن تحلّ! الإجابات

1. a. لا

b. نعم؛ $a_n = \begin{cases} -1.5, & n = 1 \\ a_{n-1}(-0.5), & n > 1 \end{cases}$

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: عندما تكون النسبة الثابتة في متتالية هندسية سالبة، لماذا تتناوب إشارتنا الموجب والسالب بين الحدود المتتالية؟
[تتناوب إشارتنا الموجب والسالب بين الحدود المتتالية لأن ناتج ضرب عدد سالب في النسبة الثابتة السالبة هو عدد موجب، وعند ضرب هذا العدد الموجب في النسبة الثابتة السالبة يكون ناتج الضرب عددًا سالبًا. وهذا النمط يستمر.]

مثال 2 التحويل بين الصيغتين الارتدادية والصريحة

طرح أسئلة هادفة

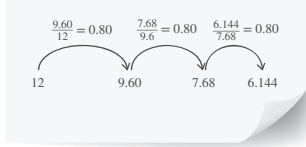
س: لماذا قوة النسبة الثابتة في التعريف الصريح للمتتالية الهندسية $n - 1$ بدلًا من n ؟
[قيمة a_1 ليست مضروبة في النسبة الثابتة. لذا ضربت النسبة الثابتة في نفسها لعدد من المرات هو أقل من n بمرة واحدة.]

س: ما المعلومات المشتركة بين الصيغتين الارتدادية والصريحة؟
[يعطي تعريف كلتا الصيغتين قيمة الحد الأول للمتتالية والنسبة الثابتة.]

تابع المثال 1

B. هل المتتالية ... 12, 9.6, 7.68, 6.144, ... متتالية هندسية؟ إذا كانت كذلك، اكتب صيغتها الارتدادية.

أوجد النسبة بين كل حدين متتاليين.



نلاحظ أن النسبة بين كل حدين متتاليين ثابتة.

إذن، هذه متتالية هندسية حيث $a_1 = 12$ و $r = 0.8$.

الصيغة الارتدادية لهذه المتتالية هي: $a_n = \begin{cases} 12, & n = 1 \\ 0.8a_{n-1}, & n > 1 \end{cases}$

حاول أن تحلّ! 1. حدّد ما إذا كانت كل متتالية أدناه متتالية هندسية أم لا. إذا كانت كذلك، اكتب الصيغة الارتدادية للمتتالية.

a. 1.22, 1.45, 1.68, 1.91, ...

b. -1.5, 0.75, -0.375, 0.1875, ...

مثال 2

التحويل بين الصيغتين الارتدادية والصريحة

A. إذا كانت الصيغة الارتدادية لمتتالية هندسية هي $a_n = \begin{cases} 5, & n = 1 \\ \frac{1}{2}a_{n-1}, & n > 1 \end{cases}$ ، أوجد صيغتها الصريحة.

الحد الأول هو 5، والنسبة الثابتة هي $\frac{1}{2}$.

الصيغة الارتدادية العامة هي $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1}$. استعمل هذه الصيغة لإيجاد النمط:

$$a_1 = 5$$

حدّد الحد الأول

$$a_2 = 5 \left(\frac{1}{2} \right)$$

اضرب الحد الأول في النسبة الثابتة مرة واحدة

$$a_3 = a_2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right) = \left(5 \left(\frac{1}{2} \right) \right) \left(\frac{1}{2} \right) = 5 \left(\frac{1}{2} \right)^2$$

اضرب الحد الأول في النسبة الثابتة مرتين

$$a_4 = a_3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right) = \left(5 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) \left(\frac{1}{2} \right) = 5 \left(\frac{1}{2} \right)^3$$

اضرب الحد الأول في النسبة الثابتة ثلاث مرات

نستنتج من هذا النمط أن الصيغة الصريحة للمتتالية هي: $a_n = 5 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$.

الصيغة الصريحة العامة للمتتالية الهندسية هي: $a_n = a_1 r^{n-1}$.

ينبع في الصفحة التالية

المصطلحات

تذكّر أن الصيغة الصريحة تتيح لك إيجاد أي حد في المتتالية من دون الحاجة إلى معرفة الحد الذي يسبقه مباشرة.

2. 2, 8b, 32b², 128b³, ...

$$a_n = \begin{cases} 2, & n = 1 \\ 4ba_{n-1}, & n > 1 \end{cases} \quad \text{[الصيغة الارتدادية]}$$

$$[a_n = 2(4b)^{n-1}] \quad \text{الصيغة الصريحة}$$

س: ماذا تلاحظ بشأن هاتين المتتاليتين؟

[في المتتالية الأولى، الحد الأول يتضمن b. في المتتالية الثانية، النسبة الثابتة تتضمن b.]

الطلاب المتقدمون

استعمل مع المثال 2 اطلب من الطلاب كتابة الصيغتين الصريحة والارتدادية للمتتاليتين التاليتين، بمعلومية حدود المتتالية.
اكتب الصيغة الارتدادية والصيغة الصريحة للمتتالية الهندسية.

1. 2b, 8b, 32b, 128b, ...

$$a_n = \begin{cases} 2b, & n = 1 \\ 4a_{n-1}, & n > 1 \end{cases} \quad \text{[الصيغة الارتدادية]}$$

$$[a_n = 2b(4)^{n-1}] \quad \text{الصيغة الصريحة}$$

تابع المثال 2

حاول أن تحل! الإجابات

$$2. \text{ a. } a_n = 12\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\text{ b. } a_n = \begin{cases} 6 & , n = 1 \\ 1.2a_{n-1} & , n > 1 \end{cases}$$

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: أيهما أسهل في رأيك: إيجاد الصيغة الصريحة من الصيغة الارتدادية، أم إيجاد الصيغة الارتدادية عندما تكون الصيغة الصريحة معطاة؟ وضح إجابتك.
[نموذج إجابة: الأسهل هو كتابة الصيغة الارتدادية انطلاقاً من الصيغة الصريحة. يمكنك بسهولة تحديد قيمة كل من r و a_1 والتعويض فيهما.]

حل مسائل تتضمن متتاليات هندسية

مثال 3

طرح أسئلة هادفة

س: لكتابة الصيغة الصريحة لمتتالية هندسية، عليك أن تعرف قيمة الحد الأول والنسبة الثابتة. أي منهما معطى في المسألة؟ ماذا عليك أن تحسب باستعمال المعلومات المعطاة؟
[الحد الأول هو المعطى في المسألة. عليك حساب النسبة الثابتة.]

س: كيف يمكنك استعمال الصيغة الصريحة لمتتالية هندسية لتحديد عدد الأشخاص المتصل بهم في الجولة الثامنة؟
[عوض $n = 8$ في الصيغة الصريحة وبسط المقدار.]

تابع المثال 2

B. إذا كانت الصيغة الصريحة لمتتالية هندسية هي $a_n = 3(2)^{n-1}$ ، أوجد صيغتها الارتدادية. نلاحظ من الصيغة الصريحة أن $a_1 = 3$ و $r = 2$.

إذن، الصيغة الارتدادية لهذه المتتالية هي $a_n = \begin{cases} 3 & , n = 1 \\ 2a_{n-1} & , n > 1 \end{cases}$.

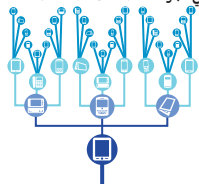
2. a. إذا كانت الصيغة الارتدادية لمتتالية هندسية هي $a_n = \begin{cases} 12 & , n = 1 \\ \frac{1}{3}a_{n-1} & , n > 1 \end{cases}$ ، أوجد صيغتها الصريحة.

b. إذا كانت الصيغة الصريحة لمتتالية هندسية هي $a_n = 6(1.2)^{n-1}$ ، أوجد صيغتها الارتدادية.

حل مسائل تتضمن متتاليات هندسية

تطبيق

تتشكل شجرة الهاتف عندما يتصل شخص بعدد معين من الأشخاص، ثم يتصل كل شخص من هؤلاء الأشخاص بنفس العدد من الأشخاص، وهكذا. في شجرة الهاتف المبينة أدناه بلغ عدد الأشخاص المتصل بهم في الجولة الخامسة 243 شخصاً.



A. اكتب الصيغة الصريحة للمتتالية لإيجاد عدد الأشخاص المتصل بهم في كل جولة.

نلاحظ من شجرة الهاتف أعلاه أن $a_1 = 3$ و $a_5 = 243$. استعمال الصيغة الصريحة لإيجاد

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$243 = 3r^{5-1}$$

$$81 = r^4$$

$$3 = r$$

$$n = 5, a_5 = 243, a_1 = 3$$

$$a_n = 3(3)^{n-1}$$

$$a_n = 3(3)^{n-1}$$

ابحث عن العلاقات

لاحظ أن معادلة الصيغة الصريحة هي نفس الصيغة لمعادلة دالة أسية.

ينبع في الصفحة التالية

الدرس 2-2 المتتاليات والمتسلسلات الهندسية 69

تعزيز المهارات اللغوية (استعمل مع المثال 3)

الكتابة مستوى 1 اعرض كلا من العبارات التالية على السبورة. ثم اطلب من الطلاب رسم مخطط لتمثيل كل استعمال لكلمة "شجرة".

- شجرة تفاح
- شجرة عوامل العدد 24
- مخطط الشجرة لرمي عملة معدنية 3 مرات
- شجرة الهاتف

س: املاً الفراغات التالية لوصف معنى شجرة الهاتف:

_____ شخص واحد بعدة أشخاص لإبلاغهم خبر.
كل شخص من هؤلاء يتصل _____ من الأشخاص لنشر الخبر. تستمر هذه العملية حتى يصبح _____ الأشخاص على اللانحة متصلاً بهم.
[يتصل، بمزيد، جميع]

الاستماع مستوى 3 اقرأ تعريف كل من المصطلحين "ضمني" (أي التعبير المضمّر، غير الصريح) و "صريح" (أي التعبير الواضح والكامل) بصوت عالٍ. وزّع على الطلاب بطاقات مكتوب على وجهها الأمامي "ضمني" وعلى وجهها الخلفي "صريح". اطلب من الطلاب الاستماع إلى المواقف التالية، واستعمال البطاقات لتحديد المصطلح الذي ينطبق على كل موقف.

س: يطلب معلم من الطلاب الاستعداد لإجراء اختبار مفاجئ، حتى يزيلوا كتبهم من على الأدراج ويخرجوا أقلامهم.
[ضمني]

س: إذا عدت إلى المنزل بعد حظر التجول، سوف تعاقب.
[صريح]

س: قالت والدته جابر: "ستمرض إذا ارتدّيت السروال القصير عندما تمطر." لذا غيّر جابر ملابسه.
[ضمني]

تابع المثال 3

حاول أن تحلّ! الإجابات

3. عدد البكتيريا في العيّنة في اليوم السابع من التجربة هو 3^{14} خلية بكتيرية.

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: كيف يمكن أن يكون $a_{10} = 3^{20}$ إذا كان الحد الأول لا يساوي 3؟
[الحد الأول هو 9، وهو يساوي 3^2]

استعمل مع الأمثلة 1 و 2 و 3

عادات التفكير

استعمل الأدوات المناسبة كيف يمكنك استعمال الصيغة الارتدادية لمتتالية هندسية لإيجاد قيمة الحد الذي رتبته 19 أو الحد التاسع عشر؟

[استعمل الصيغة الارتدادية لكتابة الصيغة الصريحة للمتتالية، ثم أوجد قيمة الصيغة الصريحة عندما $n = 19$].

مثال 4

صيغة المجموع لمتسلسلة هندسية منتهية

طرح أسئلة هادفة

س: لماذا تضرب طرفي المعادلة الثانية في r عند إيجاد مجموع متسلسلة هندسية منتهية؟
[تضرب طرفي المعادلة الثانية في r لتكوين معادلة يمكنك طرحها من المعادلة الأصلية.
طرح هاتين المعادلتين يحذف معظم الحدود في المجموع باستثناء الحد الأول في المعادلة الأصلية والحد الأخير في المعادلة الجديدة.]

تابع المثال 3

B. ما عدد الأشخاص الذين تم الاتصال بهم في الجولة الثامنة من شجرة الهاتف؟
استعمل الصيغة الصريحة واخل المعادلة عندما $n = 8$.

$$a_7 = a_1 r^{n-1}$$

$$a_8 = 3(3)^{8-1}$$

$$a_8 = 3(3)^7$$

$$a_8 = 6561$$

عوض $n = 8$ وبسط

إذن، عدد الأشخاص المتصل بهم في الجولة الثامنة هو 6561 شخصاً.

حاول أن تحلّ! 3. يمكن استعمال متتالية هندسية لوصف نكائر البكتيريا في تجربة علمية. بدأ سالم تجربة علمية على عينة مكونة من 9 خلايا بكتيرية في اليوم الأول، وفي اليوم العاشر بلغ عدد الخلايا البكتيرية في العينة 3^{20} خلية بكتيرية. ما عدد البكتيريا في العينة في اليوم السابع من التجربة؟

الاستيعاب المفاهيمي

فكر وتأبّر في الحل

لاحظ أن ضرب طرفي المعادلة في r يعطي معادلة ثانية لها نفس عدد حدود المعادلة الأصلية. كيف يساعدك ذلك على حذف بعض الحدود لإيجاد مقدار يمثل مجموع متسلسلة هندسية منتهية؟

مثال 4 صيغة المجموع لمتسلسلة هندسية منتهية

A. كيف يمكنك إيجاد المجموع لمتسلسلة هندسية منتهية؟

المتسلسلة الهندسية هي مجموع حدود متتالية هندسية.

تمثل S_n مجموع حدود متتالية هندسية عدد حدودها n .

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \dots + a_1 r^{n-1}$$

$$rS_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \dots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n$$

$$S_n - rS_n = a_1 - a_1 r^n$$

$$S_n(1 - r) = a_1(1 - r^n)$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{(1 - r)}$$

حل لإيجاد S_n

B. اكتب المتسلسلة $\sum_{n=1}^7 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ في الصورة التحليلية بحيث تظهر كل حدودها. وأوجد مجموعها.

تذكر كيفية استعمال رمز المجموع ($\sum$) لتمثيل المتسلسلة.

$$\sum_{n=1}^n a_1 r^{n-1} = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \dots + a_1 r^{n-1} = \frac{a_1(1 - r^n)}{(1 - r)}$$

المتسلسلة هي $3 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \frac{16}{27} + \frac{32}{81} + \frac{64}{243}$ لإيجاد المجموع لهذه المتسلسلة، استعمل صيغة المجموع لمتسلسلة هندسية منتهية

$$\text{حيث } a_1 = 3, r = \frac{2}{3}, \text{ و } n = 7$$

$$S_7 = \frac{3\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^7\right)}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{2059}{243}$$

إذن، مجموع المتسلسلة يساوي $\frac{2059}{243}$.

يمكنك التحقق من النتيجة من خلال جمع الحدود مباشرة.

$$3 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \frac{16}{27} + \frac{32}{81} + \frac{64}{243} = \frac{2059}{243}$$

يتبع في الصفحة التالية

70 الوحدة 2 المتتاليات والمتسلسلات

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

استعمل مع المثال 4 قد يواجه الطلاب صعوبة في تعويض القيم في المقادير وتبسيطها. اطلب من الطلاب التدرب على تعويض القيم في المقادير وتبسيطها.

1. عوض $x = 3$ و $y = \frac{1}{4}$ في المقدار $x(1 - y)$ ثم بسطه. $\left[\frac{9}{4}\right]$

2. عوض $x = \frac{4}{9}$ و $y = \frac{2}{3}$ في المقدار $\frac{1-x}{1-y}$ ثم بسطه. $\left[\frac{5}{3}\right]$

3. عوض $x = \frac{3}{4}$ و $y = \frac{3}{8}$ في المقدار $2x - 3y$ ثم بسطه. $\left[\frac{3}{8}\right]$

4. عوض $x = -2$ و $y = 5$ في المقدار $\frac{2}{3x} - \frac{y}{6}$ ثم بسطه. $\left[-\frac{7}{6}\right]$

5. عوض $x = -1$ و $y = 3$ في المقدار $\frac{x(x+y)}{y}$ ثم بسطه. $\left[-\frac{2}{3}\right]$

6. عوض $x = 0.1$ و $y = 0.2$ في المقدار $3.2x + 4.5y$ ثم بسطه. [1.22]

حاول أن تحل! الإجابات

4. a. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{9}{2} + \frac{27}{2} + \frac{81}{2}, \frac{121}{2}$
b. $\sum_{n=1}^6 -2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}; -\frac{728}{243}$

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: لماذا من المفيد البدء بإيجاد قيمتي a_1 و r عند كتابة متسلسلة هندسية باستعمال رمز المجموع؟
[لكتابة متسلسلة هندسية باستعمال رمز المجموع، يجب تعويض قيمتي a_1 و r في الصيغة.]

خطأ شائع

حاول أن تحل! 4 عند كتابة المتسلسلة باستعمال رمز المجموع، قد يكتب الطلاب الأس على أنه n بدلاً من $n - 1$.
اطلب من الطلاب تعويض $n = 1$ في المقدار للتأكد من أن هذه القيمة تساوي a_1 .

مثال 5 عدد الحدود في متسلسلة هندسية منتهية

طرح أسئلة هادفة

س: لماذا تحتاج إلى استعمال اللوغاريتمات لحل هذه المعادلة؟
[المعادلة هي معادلة أسية، ولعزل المتغير في الأس يجب أخذ لوغاريتم كل طرف من المعادلة.]

حاول أن تحل! الإجابات

5. a. 9 حدود
b. 5 حدود

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: كيف يمكنك التحقق من صحة إجابتك؟
[عوض القيمة التي وجدتها في الصيغة الصريحة للمتسلسلة الهندسية ثم بسط. هذه القيمة يجب أن تساوي الحد الأخير في المتسلسلة.]

تابع المثال 4

حاول أن تحل! 4. اكتب المتسلسلة $\sum_{n=1}^5 \frac{1}{2}(3)^{n-1}$ في الصورة التحليلية، ثم أوجد المجموع.
b. اكتب المتسلسلة $\left(\frac{-2}{243}\right) + \dots + \left(\frac{-2}{3}\right) - 2$ باستعمال رمز المجموع، ثم أوجد قيمة المجموع.

مثال 5

عدد الحدود في متسلسلة هندسية منتهية

A. أوجد عدد الحدود في المتسلسلة الهندسية $200 + 300 + 450 + \dots + 7688.7$

بما أن المتسلسلة هندسية، إذن $r = 1.5$. استعمل الصيغة الصريحة لإيجاد عدد الحدود n .

$$7688.7 = 200(1.5)^{n-1}$$

$$38.4435 = (1.5)^{n-1}$$

$$\log 38.4435 = \log (1.5)^{n-1}$$

$$\log 38.4435 = (n-1) \log (1.5)$$

$$\frac{\log 38.4435}{\log 1.5} = n-1$$

$$n = \frac{\log 38.4435}{\log 1.5} + 1$$

$$n \approx 10$$

إذن، عدد الحدود في هذه المتسلسلة الهندسية هو 10

B. مجموع متسلسلة هندسية يساوي 11 718، وحدها الأول 3، والنسبة الثابتة 5، ما عدد الحدود في هذه المتسلسلة؟

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{(1-r)}$$

$$11718 = \frac{3(1-5^n)}{(1-5)}$$

$$-46872 = 3(1-5^n)$$

$$-15624 = 1-5^n$$

$$5^n = 1 + 15624$$

$$\log (5^n) = \log 15625$$

$$n \log 5 = \log 15625$$

$$n = \frac{\log 15625}{\log 5}$$

$$n = 6$$

إذن، عدد الحدود في هذه المتسلسلة هو 6

حاول أن تحل! 5. ما عدد الحدود في المتسلسلة الهندسية $768 + 6 + 12 + \dots + 768$

b. مجموع متسلسلة هندسية يساوي 155، وحدها الأول 5، والنسبة الثابتة 2، ما عدد الحدود في هذه المتسلسلة؟

خطأ شائع

تذكر أن النسبة الثابتة هي ناتج قسمة أي حد في المتسلسلة على الحد الذي يسبقه، وليس على الحد الذي يليه.

عوض الحد الأخير في المتسلسلة في الصيغة الصريحة لإيجاد قيمة n .

عوض S_n و a_1 و r في صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية لإيجاد n

بعد عزل الحد الأسّي، أوجد لوغاريتم كلا طرفي المعادلة

استعمال متسلسلة هندسية منتهية

مثال 6

طرح أسئلة هادفة

س: كيف تستعمل القيمة 6 سنوات وقيمة معدل الفائدة السنوية 4.5% لحل المسألة؟
[إنك تستعمل عدد الأشهر ومعدل الفائدة الشهرية لحساب الدفعة الشهرية. لذا حوّل عدد السنوات ومعدل الفائدة السنوية إلى عدد أشهر ومعدل فائدة شهرية لحلّ المسألة.]

س: كيف يساعدك فهم المتسلسلات الهندسية المنتهية على حلّ هذه المسألة؟
[من دون متسلسلة هندسية منتهية، يجب أن تحسب 72 قيمة منفردة وتجمعها. استعمال الصيغة لحساب مجموع متسلسلة هندسية يبسط هذه العملية ويسمح بحساب الدفعة الشهرية بكفاءة أكبر.]

حاول أن تحلّ! الإجابات

6. QR 917.90 تقريبًا

استنباط الدليل على تفكير الطلاب واستعماله

س: لماذا من المفيد توقع ما إذا كان مجموع الدفعات أكبر أم أصغر من المبلغ الأصلي؟
[بسبب الفائدة على القرض، سيكون مجموع الدفعات أكبر من المبلغ الأصلي. توقع ذلك يساعدك على التحقق من معقولية إجابتك.]

استعمل مع الأمثلة 4 و 5 و 6

عادات التفكير

فكر وثابر في الحلّ لماذا استعمال صيغة أسهل من حساب الحدود العشرة كلها ثم جمعها؟
[نموذج إجابة: إن جمع 10 أعداد يمكن أن يكون مملاً، ويصبح مملاً أكثر كلما تزايدت الأعداد. إن استعمال صيغة يتيح لك حساب مجموع الحدود في بضعة خطوات.]

تطبيق

مثال 6 استعمال متسلسلة هندسية منتهية

تريد أسماء اقتراض مبلغ QR 24 000 لمدة 6 سنوات بفائدة سنوية معدلها 4.5% لشراء حصة من أسهم شركة لتصنيع مقطورات الطعام. كم ستبلغ دفعاتها الشهرية؟



صيغة حساب الدفعة الشهرية هي $A = \frac{P}{\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{1+i}\right)^k}$ ، حيث A الدفعة الشهرية، و P المبلغ

الأصلي أو مبلغ القرض، و n عدد الأشهر، و i معدل الفائدة الشهرية. معدل الفائدة السنوية هي 4.5%، لذا يجب عليك قسمة هذه النسبة على 12 للحصول على معدل الفائدة الشهرية. بالنسبة إلى فرض أسماء، $P = 24\,000$ و $n = 72$ و $i = 0.00375$. عوض هذه القيم في الصيغة.

المقام هو متسلسلة هندسية منتهية حيث $a_1 \approx 0.996$ و $r \approx 0.996$.

$$\sum_{k=1}^{72} \left(\frac{1}{1+0.00375}\right)^k \approx \frac{0.996(1-0.996^{72})}{(1-0.996)} \approx 62.417$$

أوجد المجموع

احسب الآن مبلغ الدفعة الشهرية:

$$A \approx \frac{24\,000}{62.417} \approx 384.51$$

إذن، مبلغ الدفعة الشهرية هو QR 384.51 تقريبًا.

حاول أن تحلّ! 6. أوجد الدفعة الشهرية لفرض بقيمة QR 40 000 لمدة 4 سنوات بفائدة سنوية معدلها 4.8%

استعمل الأدوات المناسبة

يمكنك استعمال خاصية الذاكرة في الحاسبة لاستعمال قيم أكثر دقة بدلاً من القيم التقريبية المستعملة هنا.

ملخص المفهوم المتتاليات والمتسلسلات الهندسية

س: ما وجه المقارنة بين الصيغة الصريحة للمتتاليات الهندسية والدوال الأسية؟
[تتضمّن كل من المتتاليات الهندسية والدوال الأسية قيمة مرفوعة إلى قوة متغيرة.
مجال المتتاليات الهندسية هو كل الأعداد الطبيعية. مجال الدوال الأسية هو كل الأعداد الحقيقية.]

عبر عن فهمك | طبّق فهمك

خطأ شائع

التمرين 6 قد يجد الطلاب بشكل غير صحيح أن النسبة الثابتة هي $\frac{1}{4}$ -
اطلب من الطلاب التحقق من النسبة الثابتة التي وجدوها بضرب الحد الأول في
النسبة الثابتة والتحقق من أن إجاباتهم تتطابق مع المتتالية المعطاة.

الإجابات

- إذا كانت المتتالية مكوّنة من مجموعة أعداد لها نسبة ثابتة، يمكنك إنشاء صيغة صريحة واستعمالها لتوسيع المتتالية أو حلّ المسألة.
- اعتقد فهد أن النسبة الثابتة تساوي 7، لكن (7) 0 لا يساوي 7، وبالتالي المتتالية ليست هندسية.
- الفرق الثابت والنسبة الثابتة كلاهما نمط متكرر في المتتاليات العددية. الفرق الثابت يُضاف إلى الحدود، أما النسبة الثابتة فتُضرب في الحدود.
- الحدود تتزايد؛ الحدود تتناقص.
5. -2; 32, -64, 128
6. $\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, -\frac{1}{64}$
7. 3; 64.8, 194.4, 583.2
8. -5; 1 250, -6 250, 31 250
9. 0.5; 6.25, 3.125, 1.5625
10. 160 نقطة؛ 310 نقاط.

ملخص المفهوم المتتاليات والمتسلسلات الهندسية

في المتتاليات الهندسية، النسبة بين كل حد والحد الذي يسبقه مباشرة ثابتة، r . وبالتالي فإن ناتج ضرب أي حد في متتالية هندسية في r يساوي الحد الذي يليه مباشرة.
المتتالية ... 1, 5, 25, 125, 625 هي متتالية هندسية، حيث $r = 5$.

لفظيًا	جبريًا	مثال
كل حد في المتتالية يساوي r أمثال الحد الذي يسبقه مباشرة.	الصيغة الزائدة لمتتالية هندسية هي $a_n = \begin{cases} a_1, & n = 1 \\ a_{n-1} \cdot r, & n > 1 \end{cases}$	$a_n = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 5a_{n-1}, & n > 1 \end{cases}$
الحد الرابع في المتتالية يساوي ناتج ضرب الحد الأول في النسبة الثابتة 3 مرات.	الصيغة الصريحة هي $a_n = a_1 r^{n-1}$	$a_n = 1(5)^{n-1}$
يمكنك إيجاد مجموع عدد معين من الحدود في متسلسلة هندسية.	مجموع متسلسلة هندسية منتهية يساوي: $\sum_{m=1}^n a_1 r^{m-1} = \frac{a_1(1-r^n)}{(1-r)}$	مجموع الحدود الخمسة الأولى يساوي: $\frac{1(1-5^5)}{1-5} = \frac{-3124}{-4} = 781$

عبر عن فهمك

- السؤال الأساسي** كيف يمكنك تمثيل واستعمال المتتاليات والمتسلسلات الهندسية؟
- حلّ الخطأ** يقول فهد أن المتتالية ... 0, 7, 49, 343 هي متتالية هندسية، وأن العدد التالي فيها هو 2 401 أوجد خطأ فهد ووضحه.
- المصطلحات** صف أوجه الشبه والاختلاف بين الفرق الثابت والنسبة الثابتة.
- استعمل البنية** ماذا يحدث لحدود متتالية إذا كان a_1 موجباً و $r > 1$ ؟ وماذا يحدث لها إذا كان $0 < r < 1$ ؟ وضح إجابتك.

طبّق فهمك

في التمارين 5-9، أوجد النسبة الثابتة والحدود الثلاثة التالية في كل متتالية هندسية.

5. 2, -4, 8, -16, ...
6. -64, -16, -4, -1, ...
7. 0.8, 2.4, 7.2, 21.6, ...
8. 2, -10, 50, -250, ...
9. 100, 50, 25, 12.5, ...
10. في لعبة فيديو، يحقق اللاعبون 10 نقاط عند إكمال المرحلة الأولى وضعف عدد هذه النقاط لكل مرحلة إضافية. ما عدد النقاط التي يحققها اللاعب مقابل إكماله المرحلة الخامسة من اللعبة؟ ما العدد الكلي للنقاط؟



تدرّب واخل مسائل دليل المهام

أساسي	متقدم
11-30, 33-44	11-20, 23-44

تحليل التمارين

المثال	التمارين	العمق المعرفي
1	16-21, 42	1
	11	2
2	22-26	1
	13	2
3	15, 27, 39, 40	2
4	28-35	1
	12	2
5	36, 41	1
6	14, 37, 38	2
	43, 44	3

الإجابات

11. صحيح؛ إذا كان الحدان الأولان موجبين، يجب أن تكون النسبة الثابتة موجبة.
12. لقد جمع الحدين 5 و 6 مغا. الإجابة الصحيحة هي 432
13. تحقق من إجابات الطلاب.

14. 33 ft

15. 59 049

16. نعم؛ $a_n = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ -3a_{n-1}, & n > 1 \end{cases}$

17. نعم؛ $a_n = \begin{cases} 3, & n = 1 \\ -5a_{n-1}, & n > 1 \end{cases}$

18. لا

19. نعم؛ $a_n = \begin{cases} 24, & n = 1 \\ \frac{1}{3}a_{n-1}, & n > 1 \end{cases}$

20. لا

21. نعم؛ $a_n = \begin{cases} 10, & n = 1 \\ 4a_{n-1}, & n > 1 \end{cases}$

22. $a_n = \begin{cases} 1\,024, & n = 1 \\ \frac{1}{2}a_{n-1}, & n > 1 \end{cases}$

23. $a_n = 2(-2)^{n-1}$

24. $a_n = \begin{cases} 35, & n = 1 \\ 2a_{n-1}, & n > 1 \end{cases}$

25. $a_n = \begin{cases} -6, & n = 1 \\ -3a_{n-1}, & n > 1 \end{cases}$

تدرّب واخل مسائل

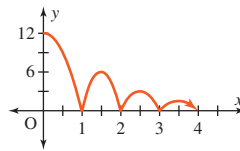
عزّز فهمك

11. **بُزّ منطقيًا** صح أم خطأ: إذا كان الحدان الأول والثاني في متتالية هندسية موجبين، فإن الحد الثالث موجب أيضًا. وضح إجابتك.

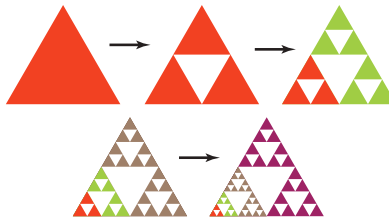
12. **حلّ الخطأ** الحد الأول في متتالية هندسية هو 4 ويزداد أسّيًا بمعامل مقداره 3، كتب مبارك الحدود وقال إن مجموع الحدّين الرابع والخامس هو 1 296، أوجد خطأ مبارك وصرّحه.

13. **ابن الحجج الرياضية** اكتب متتالية هندسية لها أربعة حدود على الأقل، ثم اكتب صيغتها الصريحة والارتدادية. ثم وضح كيف يمكنك إثبات أنها متتالية هندسية.

14. **مهارات التفكير العليا** يلقي ماهر كرة، مصنوعة من المطاط الصلب، من ارتفاع 12 ft، في كل مرة ترد فيها الكرة، تصل إلى ارتفاع يساوي 50% من الارتفاع السابق. أوجد مجموع المسافات الرأسية التي تقطعها الكرة نزولًا وصعودًا عند ارتطامها بالأرض للمرة الرابعة.



15. **نمذج** "مثلث سابربينسكي" عبارة عن مثلث كسريات، ويُرسم بتقسيم مثلث متطابق إلى أربع قطع متطابقة، وقصّ القطعة المركزية لتبقى ثلاثة مثلثات أصغر من المثلث الأصلي. ثم يتم تكرار العملية على كل مثلث فنحصل على مثلثات أصغر من سابقتها. إذا تابعنا هذا النمط، ما عدد المثلثات التي نحصل عليها إذا كررنا هذه العملية 10 مرات؟



74 الوحدة 2 المتتاليات والمتسلسلات

تدرّب

في التمارين 16-21، حدّد ما إذا كانت المتتالية هندسية أم لا. إذا كانت كذلك، اكتب صيغتها الارتدادية. انظر المثال 1

16. 1, -3, 9, -27, ... 17. 3, -15, 75, -375, ...
18. 4, 5, 6, 7, ... 19. 24, 8, $\frac{8}{3}$, $\frac{8}{9}$, ...
20. 2, 4, 6, 8, ... 21. 10, 40, 160, 640, ...

في التمارين 22-26، حوّل من الصيغة الارتدادية إلى الصيغة الصريحة أو العكس. انظر المثال 2

22. $a_n = 1\,024\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

23. $a_n = \begin{cases} 2, & n = 1 \\ -2a_{n-1}, & n > 1 \end{cases}$

24. $a_n = 35(2)^{n-1}$

25. $a_n = -6(-3)^{n-1}$

26. $a_n = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ \frac{2}{3}a_{n-1}, & n > 1 \end{cases}$

27. يشكّل تكاثر أعداد البكتيريا في تجربة علمية من يوم إلى يوم متتالية هندسية. إذا كان عدد البكتيريا في اليوم الأول 100، وأصبح عددها في اليوم الثامن 12 800 أوجد عدد البكتيريا في اليوم الرابع. انظر المثال 3

في التمارين 28-31، اكتب كل متسلسلة في الصورة التحليلية، ثم أوجد المجموع. انظر المثال 4

28. $\sum_{n=1}^6 4(2)^{n-1}$

29. $\sum_{n=1}^{20} 6(2)^{n-1}$

30. $\sum_{n=1}^7 -4(3)^{n-1}$

31. $\sum_{n=1}^{12} (-4)^{n-1}$

في التمارين 32-35، اكتب كل متسلسلة باستعمال رمز المجموع، ثم أوجد المجموع. انظر المثال 4

32. $8 + 16 + 32 + \dots + 1\,024$

33. $-7 - 42 - 252 - \dots - 54\,432$

34. $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{80}$

35. $4 - 12 + 36 - \dots + 2\,916$

36. مجموع متسلسلة هندسية يساوي 31.75، وحدها الأول 16، والنسبة الثابتة 0.5، أوجد عدد الحدود في هذه المتسلسلة. انظر المثال 5

37. أوجد الدفعة الشهرية لقرض بقيمة QR 12 000 لمدة 7 سنوات بفائدة سنوية معدلها 2.7%. انظر المثال 6

34. $\sum_{n=1}^5 \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; $\frac{31}{80}$

35. $\sum_{n=1}^7 4(-3)^{n-1}$; 2 188

36. 7

37. QR 156.94

26. $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

27. 800

28. 252

29. 6 291 450

30. -4 372

31. -3 355 443

32. $\sum_{n=1}^8 8(2)^{n-1}$; 2 040

33. $\sum_{n=1}^6 -7(6)^{n-1}$; -65 317

الإجابات

38. لا، سيكون في حسابها المصرفي QR 1 928.91 فقط.

39. a. 155
b. 1 562

40. QR 36 847.5

41. 7

43. الجزء A QR 476.2

الجزء B QR 3 162.00

تدرب وحل مسائل

طبق

38. **نمذج** فتحت جهينة حساباً مصرفياً لتدخر بعض المال لدفعة أولى لشراء سيارة. أودعت أول مرة QR 250، وتنوي أن تودع في الحساب كل شهر مبلغاً أكبر من المبلغ الذي أودعته في الشهر السابق بمعدل 10%

تريد جهينة أن يصبح المبلغ في حسابها المصرفي QR 2 000 بعد 6 أشهر. هل ستحقق هدفها؟

39. **فكر وثابر في الحل** أسس هاشم مؤخرًا شركة تنظيف. يستعمل هاشم الأحاديث المتداولة شفهيًا لعملائه الحاليين عن عمله للترويج لشركته. لديه حاليًا سبعة عملاء.

a. أعرب خمسة من عملائه عن رضاهم عن التعامل معه، وأخبر كل منهم صديقين له عن ذلك في الشهر التالي. وأخبر كل شخص من هؤلاء صديقين في الشهر التالي، وتكرر هذا الأمر على مدى خمسة أشهر. افترض أن أحدًا منهم لم يسمع بشركة هاشم من أكثر من شخص، ما عدد الأشخاص الذين مروا بتجربة مرضية في التعامل مع شركته أو سمعوا بها؟

b. أخبر كل من العميلين غير الراضيين خمسة أشخاص عن تجربته في الشهر التالي. وأخبر كل شخص من هؤلاء خمسة أشخاص آخرين بذلك، وتكرر هذا الأمر على مدى خمسة أشهر. افترض أن أحدًا منهم لم يسمع بشركة هاشم من أكثر من شخص، ما عدد الأشخاص الذين مروا بتجربة غير مرضية في التعامل مع شركته أو سمعوا بها؟

40. **نمذج** اشترى راشد دراجة نارية بقيمة QR 60 000. إذا كانت قيمة الدراجة النارية تنخفض بنسبة 15% في بداية كل سنة، كم ستصبح قيمتها بعد ثلاث سنوات؟

القيمة	الزمن
QR 60 000	0 سنة
	1 سنة
	2 سنة
	3 سنة

تدرب على اختبار

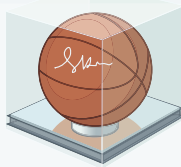
41. الحد الأول في متسلسلة هندسية هو -1، والنسبة الثابتة هي -2، املأ الفراغ بالعدد المناسب لإكمال الجملة. إذا كان مجموع المتسلسلة يساوي -43، فإن عدد الحدود في المتسلسلة هو ؟ 7

42. **اختبار SAT/ACT** ما قيمة الحد الذي رتبته 11 في المتتالية الهندسية التالية؟

- $\frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \dots$
- (A) 3^4
(B) 3^5
(C) 3^6
(D) 3^7
(E) 3^8

43. **مهمة أدائية** يريد أحد هواة جمع كرات السلة أن يشتري كرة سلة عليها توقيع لاعب محترف، لذا أخذ يدخر المال في خزانة في منزله، بحيث يدخر كل سنة مبلغًا يزيد عن مبلغ السنة السابقة بنسبة 4%، وفي السنة السادسة وضع QR 580 في الخزانة، واكتشف أنه قد جمع من المال ما يكفي لشراء كرة السلة.

السعر = مذكرات 5 سنوات + QR 580.00



الجزء A ما المبلغ الذي ادخره في السنة الأولى؟

الجزء B ما المبلغ الذي دفعه مقابل كرة السلة الموقعة؟ قَرِّب النتيجة إلى أقرب ريال قطري.

إن تقويم استيعاب الطلاب للمفاهيم ومراعاة التمايز عند تعيين التمارين للطلاب اثنان من أفضل الممارسات في التعليم. تسمح نتائج التقويم للمعلم بتحديد نقاط الضعف في استيعاب الطلاب للمفاهيم والتركيز عليها عند إعادة التدريس. كما تسمح التمارين المصنفة وفقًا للمستوى بأن يختار المعلم تدريبات تتناسب مع النتائج الفردية لأداء الطلاب، فيوفّر بذلك تعليقًا متميزًا يستفيد منه الطلاب، كلٌّ بحسب مستواه. سينجز محتوى هذه الخطوة في نسخة قادمة.

الوحدة 2

المتتاليات والمتسلسلات

مراجعة الوحدة

تقديم السؤال الأساس

كيف تستعمل المتتاليات والمتسلسلات الحسابية والهندسية لنمذجة مواقف وحل المسائل؟

عند كتابة الطلاب للإجابة على السؤال الأساس، شجعهم على تضمين أمثلة تدعم إجاباتهم. ابحث عن الحقائق الآتية عند مناقشة الإجابات.

- تُستعمل المتتاليات الحسابية لنمذجة مواقف من واقع الحياة تتضمن ترتيب الأشياء أو الصور أو غير ذلك ترتيبًا عدديًا. يشتمل هذا الترتيب على نمط يمكن من خلاله الحصول على أي حد في هذا الترتيب بإضافة عدد ثابت إلى الحد الذي يسبقه مباشرة.
- تُستعمل المتتاليات الهندسية لنمذجة مواقف من واقع الحياة تتضمن ترتيب الأشياء أو الصور أو غير ذلك ترتيبًا عدديًا. يشتمل هذا الترتيب على نمط يربط بين كل حدين متتاليين في هذا الترتيب بنسبة ثابتة.
- تُستعمل المتسلسلات الحسابية لنمذجة مواقف من واقع الحياة تشتمل على متتاليات حسابية، وتتطلب هذه المواقف إيجاد مجموع قيم الحدود في متتالية حسابية.
- تُستعمل المتسلسلات الهندسية لنمذجة مواقف من واقع الحياة تشتمل على متتاليات هندسية، وتتطلب هذه المواقف إيجاد مجموع قيم الحدود في متتالية هندسية.

الإجابات

2. المتتالية
3. الصيغة الارتدادية
4. الصيغة الصريحة
5. المتسلسلة

مراجعة الوحدة

السؤال الأساس للوحدة

1. كيف تستعمل المتتاليات والمتسلسلات الحسابية والهندسية لنمذجة مواقف وحل المسائل؟

الوحدة 2

مراجعة المفطلحات

اختر المصطلح الصحيح لإكمال كل جملة مما يلي.

- الصيغة الصريحة
- المتسلسلة
- الصيغة الارتدادية
- المتتالية
- النسبة الثابتة
- الفرق الثابت

2. _____ هي دالة مجالها الأعداد الطبيعية.
3. _____ للمتتالية هي الصيغة التي يعرّف فيها كل حد من خلال العملية الحسابية المطبقة على الحد الذي يسبقه مباشرة.
4. تسمح _____ بإيجاد أي حد في المتتالية من دون معرفة الحد الذي يسبقه مباشرة.
5. _____ هي مجموع الحدود في المتتالية.

مراجعة المفاهيم والمهارات

الدرس 2-1 المتتاليات والمتسلسلات الحسابية

مراجعة سريعة

المتتالية الحسابية هي متتالية الفرق بين كل حدين متتاليين فيها ثابت. هذا الفرق يُسمى الفرق الثابت.

$$a_n = \begin{cases} a_1, & n = 1 \\ a_{n-1} + d, & n > 1 \end{cases}$$

الصيغة الاندداية: $a_n = a_1 + (n-1)d$

المتسلسلة الحسابية المنتهية هي مجموع حدود متتالية حسابية منتهية.

مثال

اكتب الصيغة الصريحة للمتتالية التالية: ... 22, 17, 12, 7
ثم أوجد الحد السادس.

أوجد الفرق الثابت $d = -5$

عوض $a_1 = 22$ و $d = -5$ في $a_n = 22 + (n-1)(-5)$

بسط $a_n = 22 - 5(n-1)$

عوض $n = 6$ $a_6 = 22 - 5(6-1)$

حل لإيجاد الحد السادس $a_6 = -3$

تدرب وحل مسائل

في التمرينين 6 و 7، أوجد الفرق الثابت والحد التالي في المتتالية الحسابية المعطاة.

6. 3, 15, 27, 39, ... 7. 19, 13, 7, 1, ...

في التمرينين 8 و 9، أوجد الصيغتين الاندداية والصريحة للمتتالية.

8. 5, 9, 13, 17, 21, ... 9. 25, 18, 11, 4, -3

في التمرينين 10 و 11، أوجد مجموع المتتالية الحسابية بمعلومية عدد حدودها وقيمة كل من a_n و a_1 .

10. 8 حدود، $a_8 = 74$, $a_1 = 2$

11. 12 حدًا، $a_{12} = 10$, $a_1 = 87$

في التمرينين 12 و 13، أوجد مجموع المتسلسلة.

12. $\sum_{n=1}^9 (1 + 3n)$ 13. $\sum_{n=1}^6 (5n - 2)$

14. **فكر وثابر في الحل** تم ترتيب مكعبات على شكل هرم. يحتوي الصف العلوي على مكعب واحد، والصف الثاني على 3 مكعبات، والصف الثالث على 5 مكعبات، إذا كان الهرم يتكوّن من 9 صفوف من المكعبات، أوجد عدد المكعبات المستعملة لبناء الهرم.

6. $d = 12; 51$

7. $d = -6; -5$

8. $a_n = \begin{cases} 5, & n = 1 \\ a_{n-1} + 4, & n > 1 \end{cases}; a_n = 5 + 4(n-1)$

9. $a_n = \begin{cases} 25, & n = 1 \\ a_{n-1} - 7, & n > 1 \end{cases}; a_n = 25 - 7(n-1)$

10. 304

11. 582

12. 144

13. 93

14. 81 مكعبًا

مراجعة الوحدة

الإجابات

15. لا، ليست متتالية هندسية.

16. نعم، إنها متتالية هندسية.

$$17. a_n = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1}$$

$$18. a_n = \begin{cases} -2 & , n = 1 \\ 5a_{n-1} & , n > 1 \end{cases}$$

$$19. 1530$$

$$20. 121\frac{40}{81}$$

21. 10 230 -؛ من أصل عشرة حدود في كل متسلسلة، الحدود التسعة الأخيرة في المتسلسلة الأولى هي نفس الحدود التسعة الأولى في المتسلسلة الثانية، وبالتالي الفرق بين هذه الحدود يساوي الصفر. يبقى الحد الأول في المتسلسلة الأولى والحد الأخير في المتسلسلة الثانية. إذن، الفرق بين مجموعي المتسلسلتين يساوي:

$$10 - 10240 = -10230$$

22. 17 190 سنة

المتتاليات والمتسلسلات الهندسية

الدرس 2-2

تدرب وحلّ مسائل

في التمرينين 15 و 16، حدّد ما إذا كانت المتتالية هندسية أم لا.

$$15. 2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots \quad 16. 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$$

في التمرينين 17 و 18، حدّد بين الصيغتين الصريحة والارتدادية.

$$17. a_n = \begin{cases} \frac{1}{8} & , n = 1 \\ \frac{3}{2} a_{n-1} & , n > 1 \end{cases}$$

$$18. a_n = -2(5)^{n-1}$$

في التمرينين 19 و 20، أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية.

$$19. \sum_{n=1}^8 6(2)^{n-1}$$

$$20. \sum_{n=1}^8 81 \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}$$

21. ابحث عن العلاقات أوجد الفرق:

$$\sum_{n=1}^{10} 10(2)^{n-1} - \sum_{n=1}^{10} 20(2)^{n-1}$$

وفتح كيف وجدت إجابتك.

22. فكر وثابر في الحل نصف عمر الكربون C-14،

يساوي 5730 سنة، أي الزمن اللازم لتحلل نصف عينة منه أو اضمحلالها.

عينة كتلتها 24 جراماً من الكربون C-14، أوجد الزمن اللازم لاضمحلالها بحيث يبقى منها 3 جرامات فقط.

مراجعة سريعة

المتتالية الهندسية هي متتالية النسبة بين كل حدين متتاليين فيها ثابتة. يُعتبر عنها بصيغة صريحة أو بصيغة ارتدادية.

المتسلسلة الهندسية هي مجموع الحدود في متتالية هندسية.

مثال

متتالية هندسية معرّفة في الصورة التالية:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{9} & , n = 1 \\ 3a_{n-1} & , n > 1 \end{cases}$$

ما مجموع أول عشرة حدود في المتتالية؟

$$a_n = \frac{1}{9}(3)^{n-1}$$

اكتب الصيغة الصريحة

$$a_{10} = \frac{1}{9}(3)^9 = 2187$$

أوجد الحد العاشر

$$S_{10} = \frac{\frac{1}{9}(1-3^{10})}{(1-3)} = 3280\frac{4}{9}$$

احسب المجموع