

الوحدة 1



المتاليات والمتسلسلات

مع تطوّر الحواسيب والأجهزة الإلكترونية، ومع فورة التواصل الرقمي عبر الإنترنت عمومًا ومواقع التواصل الاجتماعي خصوصًا، تطوّرت وحدات الذاكرة في الأجهزة الإلكترونية من هواتف وغيرها لاستيعاب الوسائط المتعدّدة التي تستلزم حفظ المعلومات وتخزينها وإرسالها أو تلقّيها، لا سيّما الأجهزة التي تستعمل الرقاقات الإلكترونية. وقد طال هذا التطوّر مختلف أنواع الذاكرات الرقمية الدائمة منها والمؤقتة. إلّا أنّ جميع أنواع الذاكرات، على اختلاف وحدات قياسها، تتألف من 2^n وحدة تخزين، حيث n عدد طبيعي. هذه الأعداد $1, 2, 2^2, 2^3, \dots$ تشكّل تتاليًا عدديًا يسمح بالتعرّف إلى القيم الدقيقة لسعة وحدات التخزين الرقمية. على سبيل المثال، 1 ميغابايت تساوي 2^{10} كيلوبايت، أي 1 024 كيلوبايت، وليس 1 000 كيلوبايت كما يعتقد كثيرون.

1.1 المتاليات

1.2 المتاليات الحسابية

1.3 المتاليات الهندسية

1.4 رمز المجموع والمتسلسلات

Sequences

المتتاليات

1.1

تعريف المتتاليات

إحدى أكثر الطرق شيوعاً لدراسة الأنماط في الرياضيات هي النظر إلى التتالي المرتب للأعداد،
لنتأمل النمط الهندسي في الأشكال التالية:



يتضمن كل شكل مثلي عدد النقاط التي في الشكل الذي يسبقه، ففي الشكل الأول نقطة واحدة وفي الشكل الثاني نقطتان وفي الشكل الثالث 4 نقاط وفي الرابع 8 نقاط. وهكذا ...
إن هذه الأعداد مرتبة بعضها وراء بعض إلى حد معين أو إلى اللانهاية على النحو ... 1, 2, 4, 8،
تسمى **متتالية**. كل عدد في المتتالية يسمى **حدًا**. العدد الأول في المتتالية يسمى **الحد الأول**،
وترتيب حد ما في المتتالية يسمى **رتبة الحد**.

هذه بعض الأمثلة على المتتاليات:

1. 5, 10, 15, 20, 25

2. 2, 4, 8, 16, 32, ..., 2^n , ...

3. $\left\{ \frac{1}{n} ; n = 1, 2, 3, \dots \right\}$

4. $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$, (والتي تُختصر أحياناً بالرمز $\{a_n\}$)

أولى هذه المتتاليات هي **متتالية منتهية** لأن لها عدداً محدوداً من الحدود، والثلاث الأخرى هي **متتاليات غير منتهية**، لأنه ليس لأي منها عدد محدود من الحدود. لاحظ أن في المتتاليتين (2) و (3) بإمكاننا إعطاء قاعدة تُعرّف العدد الذي ترتيبه n في المتتالية بدلالة n . وتُسمى هذه القاعدة **الحد العام** للمتتالية أما في المتتالية (4) فلا توجد قاعدة. يمكننا استخدام صيغة الترميز (a_n) لتحديد الحد العام لمتتالية غير منتهية. بهذا المعنى، يمكن اعتبار المتتالية غير المنتهية دالة تنتج عدداً وحيداً (a_n) لكل عدد طبيعي n .

تعريف المتتالية

المتتالية $\{a_n\}$ هي دالة مجالها الأعداد الطبيعية أو مجموعة جزئية منها، ومداها مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية.

قيم المجال لدالة المتتالية المنتهية هي أرقام الحدود $1, 2, 3, 4, \dots, n$ وقيم المدى يرمز لها كما يلي: $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$

ما ستتعلمه

- تعريف المتتاليات
- الصيغة الارتدادية للمتتالية

... ولماذا

تنشأ عن معالجة الكثير من المسائل العلمية أنماط ذات أعداد تُقدّم على نحو التتالي والتتابع. ولذلك، فإن دراسة هذه الأنماط يؤدي إلى نتائج رياضية ذات أهمية علمية كبيرة.

معايير الدرس

11A.1.1

11A.1.4

11A.1.9

المصطلحات

sequence	• متتالية
term	• الحد
first term	• الحد الأول
order of term	• رتبة الحد
finite sequence	• متتالية منتهية
infinite sequence	• متتالية غير منتهية
general term	• الحد العام
recursive formula	• صيغة ارتدادية

الحد الأول

قد يكون الحد الأول لبعض المتتاليات a_0 بدلاً من a_1 حينما يكون ذلك أكثر تناسلاً مع معطيات هذه المتتالية.

الهدف

سيتمكن الطلاب من التعبير عن المتتاليات باستعمال الحد العام أو الصيغة الارتدادية. كما سيتمكنون من حل مسائل من واقع الحياة باستعمال المتتاليات.

إرشاد

الأعداد الطبيعية هي $1, 2, 3, \dots$ ويرمز إليها بالمجموعة N . وتُكتب: $N = \{1, 2, 3, \dots\}$

دليل الدرس

1. تعريف المتتاليات المنتهية وغير المنتهية. إيجاد قيم حدود المتتاليات باستعمال الحد العام
2. الصيغة الارتدادية للمتتاليات. إيجاد قيم حدود المتتاليات باستعمال الصيغة الارتدادية
3. التعرف على متتالية فيبوناتشي. حل مسائل من واقع الحياة تتضمن المتتاليات

تحفيز

اطلب من الطلاب إيجاد الحد الذي رتبته 100 في المتتالية ... 7, 10, 13, 16, (304)

ملاحظة تعليمية

قد يواجه الطلاب بعض الصعوبات في تحويل قيم المتتالية إلى أزواج مرتبة من النقاط من أجل تمثيل المتتالية بيانيًا. لذا من المفيد أن تطلب منهم أن يتدربوا أولاً على متتالية يكون الإحداثي x للنقطة هو رتبة الحد فيها، والإحداثي y هو قيمة الحد.

سؤال للتفكير

س: لمعرفة قيمة أحد حدود المتتالية $a_n = n^2 - 1$ ، هل نحتاج إلى معرفة قيم الحدود التي قبله؟
نموذج إجابة:
كلا، لأن بإمكاننا إيجاد قيمة أي حد في المتتالية بتعويض رقم رتبته في صيغة الحد العام.

مثال 1 إيجاد حدود متتالية باستعمال الحد العام

لتكن المتتالية $\{a_n\}$ حيث $a_n = n^2 - 1$ لكل $n \geq 1$

A. هل هذه المتتالية منتهية؟ وضح إجابتك.

B. أوجد الحدود الستة الأولى من المتتالية $\{a_n\}$ والحد رقم 100

C. مثل المتتالية $\{a_n\}$ بيانيًا.

الحل

A. المتتالية $\{a_n\}$ ليست منتهية، لأنّ رتب حدودها هي مجموعة غير منتهية من الأعداد الطبيعية.

B. الحد العام للمتتالية هو $a_n = n^2 - 1$

عوض $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ في الحد العام لتحصل على الحدود الستة الأولى:

$$a_1 = 1^2 - 1 = 0, a_2 = 3, a_3 = 8, a_4 = 15, a_5 = 24, a_6 = 35$$

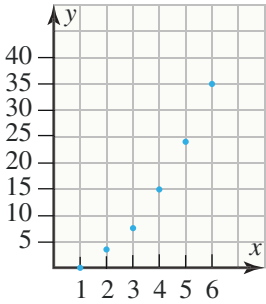
عوض 100 لتحصل على الحد رقم 100

$$a_{100} = 9999$$

C. لتمثيل المتتالية بيانيًا، عتّن على المستوى

الإحداثي النقاط الست التالية:

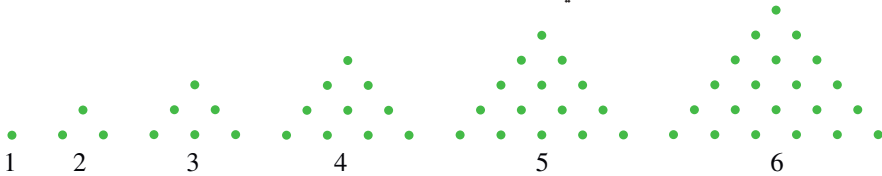
$$(1, 0), (2, 3), (3, 8), (4, 15), (5, 24), (6, 35)$$



حاول أن تحل التمرين 1

الصيغة الارتدادية للمتتالية

تعدّ صيغة الحد العام الأسهل في التعامل معها، ولكن هناك طرق أخرى للتعبير عن المتتاليات. لنأخذ نمط النقاط في الأشكال أدناه:



الشكل (1) يمثل نقطة واحدة، الشكل (2) يمثل 3 نقاط، الشكل (3) يمثل 6 نقاط،
نلاحظ أن أعداد النقاط في الأشكال على الترتيب هي متتالية فيها:

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 6, a_4 = 10, a_5 = 15, a_6 = 21$$

كذلك نلاحظ أن: $a_1 = 1$

$$a_2 = 3 = 1 + 2 = a_1 + 2$$

$$a_3 = 6 = 3 + 3 = a_2 + 3$$

$$a_4 = 10 = 6 + 4 = a_3 + 4$$

يمكن استنتاج العلاقة بين هذه الأعداد كما يلي:

$$a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + n, n \geq 2$$

بعد تعيين قيمة الحد الأول للمتتالية، تمكّننا من تحديد الحدود التالية ارتداديًا واستنتاج صيغة تربطها بالحدود السابقة. وتسمى هذه الصيغة **بالصيغة الارتدادية** للمتتالية.

تنبيه

عند كتابة تعريف الصيغة الارتدادية لمتتالية، قد يكتب الطلاب عبارة الصيغة الارتدادية فقط، من دون الانتباه إلى كتابة قيمة الحد الأول.

الصيغة الارتدادية للمتتالية

هي تعبير عن المتتالية يربط الحد a_n بحدّ أو أكثر من الحدود التي تسبقه، بمعلومية قيمة الحدّ الأول أو قيم أكثر من حدّ.

يمكن معرفة قيمة كل من حدود المتتالية باستعمال الصيغة الارتدادية.

مثال 2

إيجاد حدود المتتالية باستعمال الصيغة الارتدادية

A. أوجد الحدود الستة الأولى والحدّ الذي رتبته 100 للمتتالية التالية المعرّفة بالصيغة الارتدادية.

$$b_1 = 3, b_n = b_{n-1} + 2, n \geq 2$$

B. أوجد الحدود الخمسة الأولى للمتتالية.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 3 \\ a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$$

الحل

A. أوجد حدًا واحدًا في كلّ مرة. ابدأ بالحدّ $b_1 = 3$ ومن ثمّ أوجد كلّ من الحدود اللاحقة بإضافة العدد 2 إلى قيمة الحد الذي يسبقه مباشرة.

$$b_1 = 3$$

$$b_2 = b_1 + 2 = 5$$

$$b_3 = b_2 + 2 = 7$$

$$b_4 = b_3 + 2 = 9$$

$$b_5 = b_4 + 2 = 11$$

$$b_6 = b_5 + 2 = 13$$

إرشاد

إن العلاقة بين a_n و a_{n+1} تمثّل العلاقة بين أيّ حدّين متتاليين، بالتالي فهي نفسها العلاقة بين a_n و a_{n-1} .

سؤال للتفكير

س: هل أي متتالية $\{a_n\}$ صيغتها الارتدادية $a_n = a_{n-1} + 2$ مساوية للمتتالية $\{b_n\}$ ؟
نموذج إجابة:
كلا، إلا إذا كان $a_1 = b_1 = 3$.

الحدّ المئة يقع بعد 99 حدًا من الحدّ الأول، ما يعني أن بإمكاننا معرفة قيمته مباشرةً بإضافة العدد 2، 99 مرة، إلى العدد 3

$$b_{100} = 3 + 99 \times 2 = 201$$

B. $a_1 = 1$

$$a_2 = 3$$

$$a_3 = 2a_2 - a_1$$

$$= 2 \times 3 - 1$$

$$= 5$$

$$a_4 = 2a_3 - a_2$$

$$= 2 \times 5 - 3$$

$$= 7$$

$$a_5 = 2a_4 - a_3$$

$$= 2 \times 7 - 5$$

$$= 9$$

حاول أن تحل التمرين 2

DO NOT PRINT

DO NOT PRINT

مثال 3 الصيغة الارتدادية لمتتالية فيبوناتشي

A. إذا كانت ... 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, الحدود الأولى من متتالية فيبوناتشي، أوجد الصيغة الارتدادية لهذه المتتالية.

B. استعمل الصيغة الارتدادية لمتتالية فيبوناتشي لإيجاد a_{12} .

الحل

A. نأخذ:

$$a_1 = a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8, a_7 = 13, a_8 = 21$$

نلاحظ ما يلي:

$$a_3 = a_2 + a_1$$

$$a_4 = a_3 + a_2$$

$$a_5 = a_4 + a_3$$

$$a_6 = a_5 + a_4$$

$$a_7 = a_6 + a_5$$

$$a_8 = a_7 + a_6$$

(تابع)

الحد العام

الحدّ الذي رتبته n يقع بعد $n - 1$ حدًا من الحدّ الأول، ما يعني أن بإمكاننا معرفة قيمته مباشرةً بإضافة العدد 2، $(n - 1)$ مرة، إلى العدد 3، إذن يُمكن إيجاد الحد العام للمتتالية في الفرع A على الشكل:

$$b_n = 3 + 2(n - 1)$$

متتالية فيبوناتشي

يمكن لمتتالية فيبوناتشي تفسير العديد من أنماط النمو الطبيعية للنباتات والحيوانات.

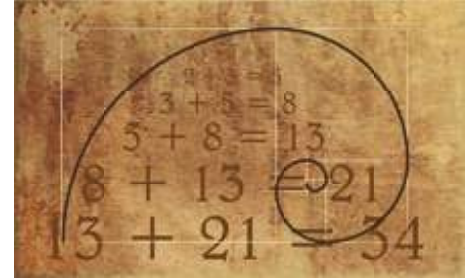


كما أنها تعطي تفسيرات واضحة للعديد من الأنماط الحلزونية في الطبيعة كحلزونات الأعاصير وبذور دوار الشمس. وكذلك فإن نسب حدودها المتتالية تعطي قيمًا تقريبية هامة للنسبة الذهبية ϕ التي تفسر العديد من أنماط الأبعاد ولا سيّما في جسم الإنسان.

DO NOT PRINT

الحد العام لمتتالية فيبوناتشي

رغم أن الصيغة الارتدادية لمتتالية فيبوناتشي بسيطة للغاية إلا أن الحد العام لها $b_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$ يبدو معقدًا.



أي أن كل حد من هذه المتتالية ينتج عن مجموع الحدين السابقين بدءًا من الحد الثالث ومنه نستنتج أن الصيغة الارتدادية لمتتالية فيبوناتشي هي:

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3 \end{cases}$$

B. عوّض $n = 9$ في الصيغة الارتدادية

$$a_9 = a_8 + a_7 \quad \text{عوّض } a_7 = 13 \text{ و } a_8 = 21$$

$$= 21 + 13 \quad \text{بسّط}$$

$$= 34 \quad \text{إذن، } a_9 = 34$$

عوّض $n = 10$ في الصيغة الارتدادية

$$a_{10} = a_9 + a_8 \quad \text{عوّض } a_8 = 21 \text{ و } a_9 = 34$$

$$= 34 + 21 \quad \text{بسّط}$$

$$= 55 \quad \text{إذن، } a_{10} = 55$$

عوّض $n = 11$ في الصيغة الارتدادية

$$a_{11} = a_{10} + a_9 \quad \text{عوّض } a_9 = 34, a_{10} = 55$$

$$= 55 + 34 \quad \text{بسّط}$$

$$= 89 \quad \text{إذن، } a_{11} = 89$$

عوّض $n = 12$ في الصيغة الارتدادية

$$a_{12} = a_{11} + a_{10} \quad \text{عوّض } a_{10} = 55, a_{11} = 89$$

$$= 89 + 55 \quad \text{بسّط}$$

$$= 144 \quad \text{إذن، } a_{12} = 144$$

حاول أن تحل التمرين 3

يمكن الاستفادة من المتتاليات، ولا سيما في صيغها الارتدادية، في دراسة العديد من الأنماط المالية والتجارية، كتغير الأسعار وقيم الأرصدة المصرفية والاستثمارات وكذلك في احتساب الأقساط وقيم الديون المتبقية في عمليات التقسيط، وفي ما يلي مثال على إحدى هذه الأنماط.

مثال 4 الشراء بالتقسيط

اشترى خالد سيارة فدفد من ثمنها مبلغًا وبقي من الثمن QR 80 000 على أن يدفعه في صورة أقساط شهرية. إذا كانت الصيغة $n \geq 2$, $a_n = 1.005 a_{n-1} - 2 500$ تمثل المبلغ المتبقي من ثمن السيارة بعد n دفعة، أوجد قيمة المبلغ الذي سوف يبقى من ثمنها بعد تسديد 5 دفعات، مقربًا إلى أقرب ريال.

الحل

المبلغ المتبقي من ثمن السيارة بعد الدفعة الأولى يساوي QR 80 000

إذن، الحد الأول من المتتالية a_n هو $a_1 = 80 000$

$$a_2 = 1.005a_1 - 2 500 \quad \text{عوض } n = 2$$

$$= (1.005)(80 000) - 2 500 \quad \text{عوض } a_1 = 80 000$$

$$= 77 900 \quad \text{بسّط}$$

$$a_2 = \text{QR } 77 900 \quad \text{إذن،}$$

$$a_3 = 1.005a_2 - 2 500 \quad \text{عوض } n = 3$$

$$= (1.005)(77 900) - 2 500 \quad \text{عوض } a_2 = 77 900$$

$$= 75 789.5 \quad \text{بسّط}$$

$$a_3 = \text{QR } 75 789.5 \quad \text{إذن،}$$

$$a_4 = 1.005a_3 - 2 500 \quad \text{عوض } n = 4$$

$$= (1.005)(75 789.5) - 2 500 \quad \text{عوض } a_3 = 75 789.5$$

$$= 73 668.4475 \quad \text{بسّط}$$

$$a_4 = \text{QR } 73 668.4475 \quad \text{إذن،}$$

$$a_5 = 1.005a_4 - 2 500 \quad \text{عوض } n = 5$$

$$= (1.005)(73 668.4475) - 2 500 \quad \text{عوض } a_4 = 73 668.4475$$

$$= 71 536.78974 \quad \text{بسّط}$$

$$a_5 = \text{QR } 71 536.78974 \quad \text{إذن،}$$

وبالتالي، المبلغ المتبقي من ثمن السيارة بعد تسديد 5 دفعات هو QR 71 537 تقريبًا.

سؤال للتفكير

س: كيف نعرف عدد الحدود التي يجب إيجاد قيمها؟

نموذج إجابة:

a_n تمثل المبلغ الباقي بعد n دفعة، وبالتالي يجب إيجاد a_5 التي تمثل المبلغ الباقي بعد 5 دفعات. وبما أن الصيغة الارتدادية هي الحد a_n بدلالة الحد الذي يسبقه a_{n-1} ، كان علينا إيجاد a_4 ، وصولًا إلى a_2 ، الذي نجده بدلالة a_1 ، الذي تمثل قيمته المبلغ الأصلي المتبقي.

مراجعة سريعة 1.1

في التمارين 1-6، أوجد الحد الذي يلي مباشرة آخر حد مبيّن في المتتالية:

1. 2, 5, 8, 11, ... 14
2. 5, 10, 15, 20, 25, ... 30
3. 4, 7, 12, 19, ... 28
4. $1, \frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{7}{16}, \frac{9}{25}, \dots \frac{11}{36}$
5. $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots -\frac{1}{243}$
6. 1, 4, 7, 10, 13, ... 16

في التمارين 7-10، أوجد قيمة الحد a_{10}

7. $a_n = \frac{n}{n+1} \frac{10}{11}$
8. $a_n = 5(2^{n-1})$ 2 560
9. $a_9 = 17, a_n = 32 - a_{n-1}$ 15
10. $a_n = \frac{n^2}{2^n} \frac{100}{1024} = \frac{25}{256}$

الدرس 1.1 التمارين

1. لتكن $a_n = \frac{4}{2^n}$ المتتالية لكل $n \geq 1$

a. هل هذه المتتالية منتهية؟ وضح إجابتك.

b. أوجد الحدود الأربعة الأولى.

c. مثل دالة المتتالية بيانياً في المستوى الإحداثي.

2. إذا كانت $a_n = 2a_{n-1} + 1$ لكل $n \geq 2$ ، $a_1 = -1$

أوجد الحدود الخمسة الأولى للمتتالية.

3. a. إذا كانت 2, 3, 5, 8, 12, 17 الحدود الأولى من المتتالية

$\{a_n\}$ ، أوجد الصيغة الارتدادية لهذه المتتالية.

b. استعمل الصيغة الارتدادية لهذه المتتالية لتوجد a_{10} .

4. أراد منصور إيداع QR 30 000 في أحد المصارف على أن

تضاف قيمة الفائدة إلى المبلغ الأصلي a_0 في نهاية كل سنة.

إذا كانت الصيغة $a_n = 1.06a_{n-1} - 250$ لكل $n \geq 2$ ، تمثل

جملة المبلغ بعد n سنة، أوجد جملة المبلغ بعد مرور

4 سنوات.

في التمارين 5-7، أوجد الحدود الخمسة الأولى للمتتالية باستعمال الحد العام.

5. $a_n = 2n - 5$ $a_1 = -3, a_2 = -1, a_3 = 1, a_4 = 3, a_5 = 5$

6. $a_n = 4 \times 2^{-n}$ $a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = \frac{1}{2}, a_4 = \frac{1}{4}, a_5 = \frac{1}{8}$

7. $a_n = 4 \times (n + 2)$ $a_1 = 12, a_2 = 16, a_3 = 20, a_4 = 24, a_5 = 28$

8. أوجد الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية:

$$\begin{cases} a_1 = 1 & a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 7 \\ a_n = 2a_{n-1} + 1, n \geq 2 \end{cases}$$

في التمارين 9-11، أوجد الحدود الخمسة الأولى لكل متتالية.

$$9. \begin{cases} a_1 = 3 & a_1 = 3, a_2 = 7, a_3 = 11, a_4 = 15, a_5 = 19 \\ a_n = a_{n-1} + 4, n \geq 2 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} u_1 = 0 & u_1 = 0, u_2 = 3, u_3 = \frac{3}{7}, u_4 = \frac{21}{13}, u_5 = \frac{39}{55} \\ u_{n+1} = \frac{3}{2u_n + 1}, n \geq 1 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} b_1 = 2 & b_1 = 2, b_2 = 8, b_3 = 17, b_4 = 29, b_5 = 44 \\ b_n = b_{n-1} + 3n, n \geq 2 \end{cases}$$

12. أوجد الحدود الخمسة الأولى للمتتالية. ماذا تلاحظ؟

$$a. \begin{cases} a_1 = 5 & a_1 = 5, a_2 = 7, a_3 = 9, a_4 = 11, a_5 = 13 \\ a_n = a_{n-1} + 2, n \geq 2 \end{cases}$$

$$b. b_n = 2n + 3 \quad b_1 = 5, b_2 = 7, b_3 = 9, b_4 = 11, b_5 = 13$$

المتتالية $\{a_n\}$ هي نفس المتتالية $\{b_n\}$

13. أوجد تعريفاً ممكنًا بالصيغة الارتدادية للمتتالية:

1, 5, 9, 13, ...

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 4, n \geq 2 \end{cases} \text{ مباشرة.}$$

14. أوجد تعريفاً ممكنًا بالصيغة الارتدادية للمتتالية:

18, 15, 12, 9, ...

$$\begin{cases} a_1 = 18 \\ a_n = a_{n-1} - 3, n \geq 2 \end{cases} \text{ يسبقه مباشرة.}$$

22. ما الصيغة الارتدادية لمتتالية الأعداد الصحيحة $a_n = n$ ؟

23. $\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_{n+1} = b_n + 3, n \geq 1 \end{cases}$ هي الصيغة الارتدادية لمتتالية.

a. أوجد الحدود العشرة الأولى.

b. هل يمكن استنتاج صيغة الحد العام للمتتالية؟
وَصِّحْ إجابتك.

24. **الحصالة** حصل أحمد يوم العيد على ما مجموعه QR 140

ووضع المبلغ في حصالة جديدة. وعدته أمه بإعطائه QR 50
إضافيًا كل شهر.

هل تشكل المبالغ المتراكمة متتالية ما؟ ناقش الموضوع واكتب
صيغة الحد العام والصيغة الارتدادية للمتتالية إن استطعت.

25. **نشاط جماعي** ناقش مع زملائك في الصف السؤال:

هل مفهوم زيادة الفائدة البسيطة السنوية يشكل متتالية ما؟

26. لتكن المتتالية التالية $(n \geq 1)$ حيث $a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$

هي أحد حدود متتالية فيبوناتشي $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}$

a. أوجد الحدود العشرة الأولى من $\{a_n\}$.

b. أثبت أن $a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$ حيث $n \geq 2$.

أسئلة اختبار معيارية

27. **صواب أم خطأ** يقول صالح إن المتتاليتين التاليتين متطابقتان:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + 3, n \geq 2 \end{cases}, \begin{cases} b_1 = 2 \\ b_n = 2b_{n-1} + 3, n \geq 2 \end{cases}$$

هل هذا صواب أم خطأ؟ بَرِّرْ إجابتك.
خطأ. قيمة الحد الأول في المتتاليتين ليست نفسها.

28. **صواب أم خطأ** تقول لطيفة إن الصيغة الارتدادية للمتتالية:

$$u_1 = 2, u_n = 4u_{n-1} - 3 \text{ هي } 2, 5, 8, 11, 14, \dots$$

هل هذا صواب أم خطأ؟ بَرِّرْ إجابتك. **خطأ** $u_1 = 2, u_2 = 5$

$$u_3 = 17 \neq 8$$

29. **اختيار من متعدد** إذا كانت الصيغة الارتدادية للمتتالية u_n هي

$$\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_n = u_{n-1} + 4 \end{cases} \text{ فإن الحد الذي رتبته 100 يساوي: } B$$

A. 204

B. 402

C. 104

D. 303

15. أوجد تعريفًا ممكنًا بالصيغة الإرتدادية للمتتالية:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{3} \\ a_n = \frac{1}{4} a_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$$

باحتمساب النسبة بين كل حد والحد الذي يسبقه مباشرة.

16. أوجد تعريفًا ممكنًا بالصيغة الإرتدادية للمتتالية:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{3} \\ a_n = -\frac{1}{2} a_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$$

باحتمساب النسبة بين كل حد والحد الذي يسبقه.

17. لاحظ المتتالية $a_n = \frac{n+1}{n}$ هل يمكن أن يكون العدد 3

أحد حدودها؟ بَرِّرْ إجابتك.

18. **الأعداد الفردية** أوجد الصيغة الارتدادية لمتتالية الأعداد

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 2, n \geq 2 \end{cases} \quad 1, 3, 5, 7, \dots$$

19. **الأعداد الزوجية**

a. أوجد الصيغة الارتدادية لمتتالية الأعداد الطبيعية الزوجية

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + 2, n \geq 2 \end{cases} \quad 2, 4, 6, 8, \dots$$

b. يتن كيف يمكن أن تكون العلاقة $a_n = a_{n-1} + 2$ هي نفسها

لمتتاليتي الأعداد الفردية والزوجية مع أنهما مختلفتان.

الحد الأول مختلف.

20. لنأخذ المتتالية المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + (n+1), n \geq 1 \end{cases}$$

a. أوجد الحدود الخمسة الأولى.

b. هل هذه المتتالية معرفة بصيغة الحد العام؟ بالصيغة

الارتدادية؟ بَرِّرْ إجابتك.

c. المتتالية $\{b_n\}$ معرفة بدلالة المتتالية $\{a_n\}$ كما يلي:

$$b_n = a_{n+1} - a_n$$

أوجد صيغة الحد العام للمتتالية $\{b_n\}$.

d. استنتج أن الصيغة الارتدادية للمتتالية $\{a_n\}$ هي:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 3 \\ a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 1, n \geq 2 \end{cases}$$

21. المتتالية $\{a_n\}$ معرّفة بصيغة الحد العام $a_n = \frac{n^2+n}{2}$

a. أثبت أن $a_{n+1} = a_n + (n+1)$

b. استنتج من الفرع (a) السابق الصيغة الارتدادية

لهذه المتتالية.

30. اختيار من متعدد يبين الجدول التالي التكاثر المتوقع لنوع من البكتيريا بعد أعداد مختلفة من الساعات.

عدد الساعات (n)	1	2	3	4	5
عدد البكتيريا	19	38	57	76	95

الحد العام للمتتالية التي تمثل تكاثر هذا النوع من البكتيريا بمرور الزمن هو: D

A. $a_n = 19n + 19$

B. $a_n = n + 19$

C. $a_n = \frac{1}{19}n$

D. $a_n = 19n$

استكشاف

31. الكتابة للتعلم هل تسلسل الأرقام الأولية بشكل متتالية؟ بّر إجابتك. نعم. لأن الأعداد الأولية يمكن أن تعرف من خلال دالة مجالها الأعداد الصحيحة الموجبة.

32. الكتابة للتعلم تعلمت هند تزيين أواني الضيافة في منزلها، وصارت تزيين أنية كل ثلاثة أيام. قررت هند أن تستمر بتزيين الأواني وتخزينها حتى موسم الأعياد لتبيعها بسعر جيد. هل يشكل عدد الأواني المزينة متتالية؟ إذا كانت الإجابة نعم، هل هذه المتتالية منتهية أم غير منتهية؟

توسيع الأفكار

33. المتتالية الثابتة المتتالية $\{a_n\}$ معرّفة بصيغتها الارتدادية حدها الأول a_1 و $a_{n+1} = \frac{2a_n + 4}{a_n - 1}$. أوجد قيمة a_1 كي تكون المتتالية ثابتة (أي إن قيمة a_n لا تتغير مهما تكن رتبة الحد).

34. تعرّف المتتالية: $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n} \right)$

a. أوجد الحدود العشرة الأولى لهذه المتتالية وقارنها بحدود متتالية فيبوناتشي.

b. بّيّن أن $3 \pm \sqrt{5} = \frac{(1 \pm \sqrt{5})^2}{2}$

c. استخدم نتيجة (b) لتتحقق من أن F_n تحقق تعريف الصيغة الارتدادية لمتتالية فيبوناتشي.

35. المتتالية $\{a_n\}$ معرّفة بصيغتها الارتدادية:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 2a_n + 3 \end{cases}$$

أوجد القيمة α بحيث تحقق المتتالية $b_n = a_n + \alpha$ الصيغة

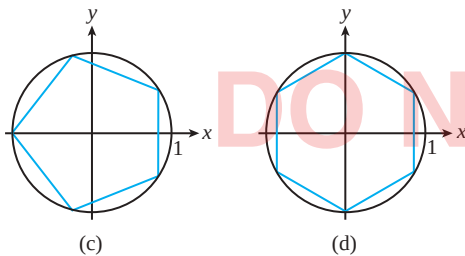
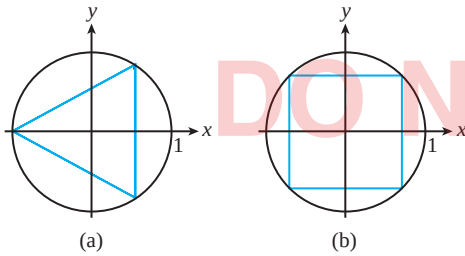
$$b_{n+1} = 2b_n$$

36. علاقة بين الهندسة والمتتاليات في المخططات التالية،

تقع رؤوس المضلعات المنتظمة على دوائر الوحدة

($r = 1$)، بحيث أنّ لكل مضلع حرقاً متعامداً مع الجزء

الموجب من المحور x.



أثبت أنّه يمكن تمثيل محيط كل مضلع في المخطط أعلاه بالمتتالية:

$$a_n = 2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

حيث n هو عدد أحرف المضلع.

إجابات أسئلة التمارين 1.1

21. a. $a_{n+1} = \frac{(n+1)^2 + (n+1)}{2}$
 $= \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$

$a_n + n + 1 = \frac{n^2 + n}{2} + n + 1$
 $= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2}$
 $= \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$

إذن، $a_{n+1} = a_n + n + 1$

b. بما أن $a_{n+1} = a_n + n + 1$ ، فإن $a_n = a_{n-1} + n$

$a_{n+1} - a_n = a_n + n + 1 - a_{n-1} - n$ ، $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 1$

إذن، $\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 3 \\ a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 1, n \geq 2 \end{cases}$

22. $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 1, n \geq 1 \end{cases}$

23. a. $b_1 = 2, b_2 = 5, b_3 = 8, b_4 = 11, b_5 = 14$
 $b_6 = 17, b_7 = 20, b_8 = 23, b_9 = 26, b_{10} = 29$
b. $b_{n+1} = 3n + 2$

عند الحد b_{n+1} نكون قد أضفنا العدد 2 إلى ثلاثة أمثال n .

24. نعم، $\begin{cases} a_1 = 140 \\ a_{n+1} = a_n + 50, n \geq 1 \end{cases}$ ، $a_n = 50n + 90$

25. نحصل على المتتالية $a_{n+1} = a_n + r$ حيث a_1 المبلغ الأصلي المودع، و r قيمة الفائدة السنوية الثابتة على المبلغ، و n عدد السنوات.

26. a. $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = \frac{3}{2}, a_4 = \frac{5}{3}, a_5 = \frac{8}{5}$

$a_6 = \frac{13}{8}, a_7 = \frac{21}{13}, a_8 = \frac{34}{21}, a_9 = \frac{55}{34}, a_{10} = \frac{89}{55}$

b. $a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = \frac{F_n}{F_n} + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$

32. نعم، لأن عدد الأواني المزينة a_n بدلالة عدد الأيام n يساوي ناتج قسمة العدد n على العدد 3:

$a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 1, a_5 = 1, a_6 = 2, \dots$

المتتالية a_n منتهية.

33. $a_2 = a_1$

$\frac{2a_1 + 4}{a_1 - 1} = a_1$

$2a_1 + 4 = a_1^2 - a_1$

$a_1^2 - 3a_1 - 4 = 0$

$(a_1 + 1)(a_1 - 4) = 0$

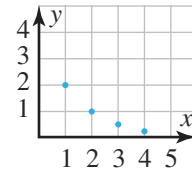
$a_1 = 4$ أو $a_1 = -1$

1. a. كلا، لأن مجالها هو $\mathbb{N}$

b. $a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = \frac{1}{2}, a_4 = \frac{1}{4}$

c. لتمثيل المتتالية بيانيًا، عيّن النقاط الأربع التالية في المستوى الإحداثي:

$(1, 2), (2, 1), (3, \frac{1}{2}), (4, \frac{1}{4})$



2. $a_1 = -1, a_2 = -1, a_3 = -1, a_4 = -1, a_5 = -1$

3. a. $\begin{cases} a_1 = 2, a_2 = 3 \\ a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 1, n \geq 3 \end{cases}$

b. $a_{10} = 47$

4. $a_1 = 1.06a_0 - 250$
 $= 1.06 \times 30\,000 - 250$
 $= 31\,550$

$a_2 = 1.06a_1 - 250$
 $= 33\,193$

$a_3 = 1.06a_2 - 250$
 $= 34\,934.58$

$a_4 = 1.06a_3 - 250$
 $= 36\,780.65$

QR 36 780.65

17. غير ممكن:

$\frac{n+1}{n} = 3$
 $n+1 = 3n$
 $n = \frac{1}{2}$

20. a. $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 6, a_4 = 10, a_5 = 15$

b. غير معرفة بصيغة الحد العام ولا بالصيغة الارتدادية، لأن الحد a_{n+1} معرف بدلالة a_n و n في الوقت نفسه.

c. $b_n = n + 1$

d. $b_n = n + 1 = b_{n-1} + 1$

إذن، $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1} + 1$

$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 1$

$a_1 = 1, a_2 = 3$

$a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 1, n \geq 2$

الصيغة الارتدادية هي:

34. a. $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8$
 $F_7 = 13, F_8 = 21, F_9 = 34, F_{10} = 55$

الحدود كلها مطابقة لحدود متتالية فيبوناتشي.

b.
$$\frac{(1 + \sqrt{5})^2}{2}$$

$$= \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{2}$$

$$= 3 + \sqrt{5}$$

$$\frac{(1 - \sqrt{5})^2}{2}$$

$$= \frac{1 - 2\sqrt{5} + 5}{2}$$

$$= 3 - \sqrt{5}$$

c. $F_n + F_{n-1}$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{(1 + \sqrt{5})^n}{2^n} - \frac{(1 - \sqrt{5})^n}{2^n} + \frac{(1 + \sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1}} - \frac{(1 - \sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1}} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{(1 + \sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1 \right) - \frac{(1 - \sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} + 1 \right) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{(1 + \sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1}} \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) - \frac{(1 - \sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1}} \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{(1 + \sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1}} \times \frac{(1 + \sqrt{5})^2}{2} - \frac{(1 - \sqrt{5})^{n-1}}{2^{n-1}} \times \frac{(1 - \sqrt{5})^2}{2} \right]$$

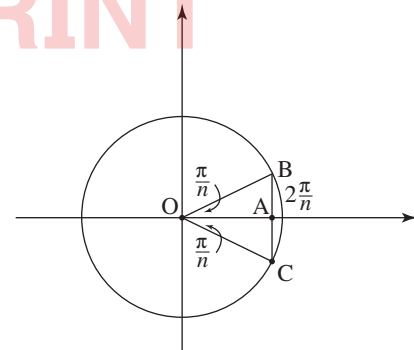
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{(1 + \sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{(1 - \sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}} \right]$$

$$= F_{n+1}$$

35. $b_{n+1} = 2b_n$
 $a_{n+1} + \alpha = 2(a_n + \alpha)$
 $a_{n+1} - 2a_n = \alpha$
 $\alpha = 3$

36. يمكننا أن نلاحظ من المثلث أدناه أن طول ضلع واحد من مضلع (عدد أضلاعه n) هو $2 \sin \frac{\pi}{n}$ وبالتالي فإن محيط المضلع يساوي:

$$a_n = 2n \sin \frac{\pi}{n}$$



$$\frac{AB}{1} = \sin \frac{\pi}{n}$$

$$BC = 2AB = 2 \sin \frac{\pi}{n}$$

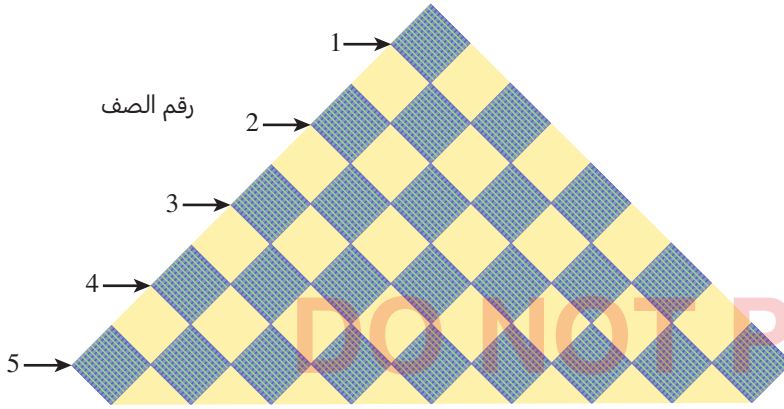
Arithmetic Sequences

المتتاليات الحسابية

1.2

تعريف المتتالية الحسابية

يصمّم مصمم أزياء قماشًا مزخرفًا كما في الشكل التالي:



ما ستتعلمه

- تعريف المتتالية الحسابية
- صيغة الحد العام للمتتالية الحسابية

... ولماذا

تمثّل المتتاليات ذات الفرق الثابت نوعًا مهمًا من المتتاليات، ولها جملة من الخواص المهمة رياضياً وتطبيقياً حيث تستعمل في حل مسائل حياتية.

معايير الدرس

11A.1.2

11A.1.4

11A.1.9

المصطلحات

- الفرق الثابت common difference
- متتالية حسابية arithmetic sequence
- صيغة الحد العام general term formula

الهدف

سيتمكّن الطلاب من كتابة المتتاليات الحسابية في الصيغتين الصريحة والارتدادية.

دليل الدرس

1. تعريف المتتالية الحسابية

2. كتابة الحد العام للمتتالية الحسابية

تحفيز

اطلب من الطلاب إيجاد الحد الذي رتبته مئة في المتتالية ... 7, 10, 13, 16, (304)

نشاط المصطلحات

عرّف المتتالية الحسابية بأنها مجموعة مرتبة من الأعداد تكون بإضافة عدد ثابت إلى كل عدد فيها للحصول على العدد الذي يليه مباشرة. قد يعتقد بعض الطلاب أن كل مجموعة من الأعداد المرتبة في نسق معين تكون متتالية حسابية. اطلب منهم أن يصلوا بين كل مجموعة من الأعداد أدناه والعبارة التي تصفها وصفاً صحيحاً.

2, 5, 8, 11, 14, ... ← متتالية غير حسابية
2, 5, 3, 8, 1, ... ← متتالية حسابية
2, 4, 8, 16, 32, ... ← ليست متتالية

أراد إيجاد نمط عددي يسمح له بمعرفة عدد المربعات المزخرفة مهما كان رقم الصف في قطعة القماش كبيراً.

بما أنه من الطبيعي جداً إيجاد الأنماط في تتالي مرتّب من الأعداد، أنشأ الجدول المبين أدناه :

رقم الصف	1	2	3	4	5
عدد المربعات المزخرفة في الصف	1	3	5	7	9

لاحظ أنّ الفرق بين كل عدد من أعداد المربعات المزخرفة والعدد الذي يسبقه مباشرة ثابت،

أي إنّ $2 = 9 - 7 = 7 - 5 = 5 - 3 = 3 - 1$ ، هذا الفرق يسمى **الفرق الثابت**

ويرمز له بالرمز d .

ومتتالية الأعداد ... 1, 3, 5, 7, 9, تسمى **متتالية حسابية**.

لكي تحصل على الصيغة الارتدادية لهذه المتتالية الحسابية، اكتب الحد a_n في صورة مجموع الحد الذي يسبقه a_{n-1} والفرق الثابت 2

يمكنك التعبير عن المتتالية في الصف الثاني من الجدول بالصيغة الارتدادية التالية:

$$a_n = \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n-1} + 2, n \geq 2 \end{cases}$$

المتتالية الحسابية

تكون المتتالية $\{a_n\}$ متتالية حسابية إذا كان الفرق بين كل حد والحد الذي يسبقه مباشرة

ثابتاً، ويُسمى الفرق الثابت ويُرمز له بالرمز d ، أي إنّ $d = a_n - a_{n-1}$

يُعتبر عن الصيغة الارتدادية للمتتالية الحسابية: $a_n = \begin{cases} a_1 \\ a_{n-1} + d, n \geq 2 \end{cases}$

أسئلة للتفكير

س: هل يمكن أن يكون أحد الحدود في متتالية حسابية أصغر من الحد الذي يسبقه مباشرة؟

نموذج إجابة:

نعم، لأن الفرق الثابت في المتتالية الحسابية قد يكون عددًا سالبًا، وفي هذه الحالة يكون كل حد من حدود المتتالية أصغر من الحد الذي يسبقه مباشرة.

س: كيف يمكنك تحديد ما إذا كان نسق ما من الأعداد يكون متتالية حسابية أم لا؟

نموذج إجابة:

يكفي أن تطرح كل عدد من هذه الأعداد من العدد الذي يليه، أو تجد ناتج كل حد مطروحًا منه الحد الذي يسبقه.

فإذا كانت نواتج الطرح جميعها متساوية فهذا يعني أن الفرق ثابت وأن نسق الأعداد متتالية حسابية.

مثال 1 الصيغة الارتدادية للمتتالية الحسابية

A. هل المتتالية ... 4, 7, 10, 13, 16, متتالية حسابية؟ إن كانت كذلك، اكتب الصيغة الارتدادية للمتتالية.

B. هل المتتالية ... 3, 5, 7, 11, 13, متتالية حسابية؟ برّر إجابتك.

الحل

A. 4, 7, 10, 13, 16, ...

بما أن $7 - 4 = 10 - 7 = 13 - 10 = 16 - 13 = 3$ ، فإن الفرق بين كل حد والحد الذي يسبقه مباشرة ثابت، وعليه فالمتتالية حسابية وفرقها الثابت $d = 3$.

الصيغة الارتدادية لهذه المتتالية هي:

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = a_{n-1} + 3, n \geq 2 \end{cases}$$

B. 3, 5, 7, 11, 13, ...

أوجد الفرق بين كل حدّين متتاليين

$$5 - 3 = 2$$

$$7 - 5 = 2$$

$$11 - 7 = 4$$

بما أن الفرق ليس ثابتًا، فإن المتتالية ليست حسابية.

حاول أن تحل التمرين 33

يمكنك استعمال الصيغة الارتدادية لمتتالية حسابية كي توجد حدود هذه المتتالية تباغًا. وفي هذه الحالة يتم إيجاد قيمة كل حدّ بالرجوع إلى الحدّ السابق له، وبالتالي فإن إيجاد حدّ ما من متتالية حسابية باستعمال الصيغة الارتدادية يتطلب بالضرورة معلومية الحدّ الذي يسبقه مباشرة.

مثال 2 الهرم المدرج

ارتفاع كل درجة في الهرم المدرج العائد لحضارة المايا هو 26 cm، كما تشير الصورة.



تمثل المتتالية ... a_3, a_2, a_1 ارتفاعات درجات الهرم عن سطح الأرض.

A. ما قيمة a_1 ؟

B. هل هذه المتتالية متتالية حسابية؟ إذا كانت كذلك، أوجد صيغتها الارتدادية.

C. أوجد ارتفاع الدرجة الثالثة عن سطح الأرض.

الحل

A. a_1 تمثل ارتفاع الدرجة الأولى، إذن $a_1 = 26$.

B. الفرق بين كل حد والحد الذي يسبقه مباشرة هو مقدار ارتفاع درجة واحدة ويساوي 26 cm وهو الفرق الثابت d ، وهذا يعني أن المتتالية متتالية حسابية. الحد الأول منها $a_1 = 26$.

إذن، الصيغة الارتدادية لهذه المتتالية هي:

$$\begin{cases} a_1 = 26 \\ a_{n+1} = a_n + 26, n \geq 1 \end{cases}$$

$$a_2 = a_1 + 26$$

$$a_2 = 26 + 26 = 52$$

$$a_3 = a_2 + 26$$

$$a_3 = 52 + 26 = 78$$

C. الصيغة الارتدادية

$$a_1 = 26 \text{ عوض}$$

الصيغة الارتدادية

$$a_2 = 52 \text{ عوض}$$

إذن، ارتفاع الدرجة الثالثة هو 78 cm

تحذير

يمكن أن تعرف الصيغة $a_n = a_{n-1} + d$ أكثر من صيغة وذلك حسب قيمة a_1 .

للطلاب سريعى الإنجاز

(مع المثال 2) دع الطلاب يتدربون على إيجاد أي حد من حدود متتالية حسابية.

س: أوجد الحد الخامس في المتتالية المعروفة

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = a_{n-1} + 5 \end{cases} \text{ بالصيغة}$$

نموذج إجابة:

$$a_5 = 24 \text{ الحد الخامس}$$

س: أوجد الحد السادس في المتتالية المعروفة

$$\begin{cases} a_1 = 17 \\ a_n = a_{n-1} - 4 \end{cases} \text{ بالصيغة}$$

نموذج إجابة:

$$a_6 = -3 \text{ الحد السادس}$$

س: أوجد الحد الخامس في المتتالية المعروفة

$$\begin{cases} a_1 = 23 \\ a_n = a_{n-1} + 8 \end{cases} \text{ بالصيغة}$$

نموذج إجابة:

$$a_5 = 55 \text{ الحد الخامس}$$

حاول أن تحل التمرين 6

صيغة الحد العام للمتتالية الحسابية

عرفنا أن المتتالية الحسابية تُكتب بالصيغة الارتدادية:

$$a_n = \begin{cases} a_1 \\ a_{n-1} + d, n \geq 2 \end{cases}$$

حيث d هو الفرق الثابت.

إذن،

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 + 1d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

نلاحظ بعد المتابعة أن **صيغة الحد العام** للمتتالية هي:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

صيغة الحد العام للمتتالية الحسابية

صيغة الحد العام للمتتالية الحسابية هي:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

حيث:

a_1 : الحد الأول للمتتالية.

d : الفرق الثابت.

n : رتبة الحد.

a_n : الحد الذي رتبته n .

مثال 3 استعمال صيغة الحد العام لمتتالية حسابية

A. يوضح الجدول أدناه تكلفة استئجار دراجة هوائية. كيف يمكنك التعبير عن التكلفة باستعمال صيغة الحد العام؟

عدد أيام الاستئجار	1	2	3	4
تكلفة الاستئجار	26	38	50	62

B. ما تكلفة استئجار دراجة مدة 10 أيام؟

C. كيف يرتبط الحد العام للمتتالية الحسابية بدالة خطية؟

(تابع)

الحل

A. نلاحظ في الجدول أعلاه أن الحد الأول $a_1 = 26$ والفرق الثابت $d = 62 - 50 = 50 - 38 = 38 - 26 = 12$ ، إذن المتتالية حسابية. لإيجاد تكلفة استئجار دراجة هوائية مدة n من الأيام، اكتب صيغة الحد العام للمتتالية.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$= 26 + (n - 1)12$$

$$= 26 + 12n - 12$$

$$= 14 + 12n$$

صيغة الحد العام

عوض $a_1 = 26, d = 12$

خاصية التوزيع

بسط

الحد العام $a_n = 14 + 12n$ يعطي تكلفة استئجار دراجة هوائية لمدة n من الأيام.

B. استعمال الحد العام لإيجاد الحد العاشر في المتتالية.

$$a_n = 14 + 12n$$

$$a_{10} = 14 + 12(10)$$

$$= 134$$

عوض $n = 10$

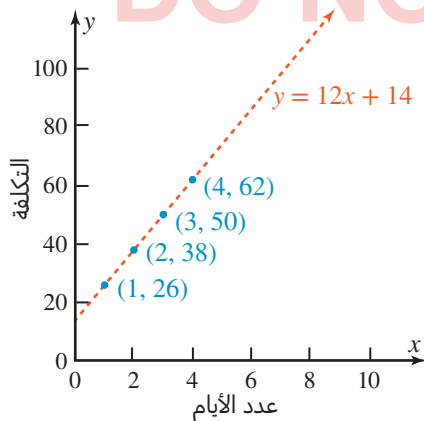
الحد العاشر في المتتالية هو 134

إذن، تكلفة استئجار دراجة مدة 10 أيام هي QR 134.

C. توضح الصيغة $a_n = 14 + 12n$ أن التكلفة، a_n ، دالة لعدد الأيام، n ، التي يتم فيها استئجار الدراجة. يمكنك كتابة ذلك في صورة دالة خطية،

$$f(n) = 12n + 14, n \in \mathbb{N}$$

وعند المقارنة بالمستقيم الذي معادلته $y = 12x + 14$ يكون الفرق الثابت للمتتالية، 12، يساوي ميل المستقيم في الرسم البياني أدناه وجميع النقاط التي تمثل حدود المتتالية تقع على الخط المستقيم.



أسئلة للتفكير

س: لماذا يعدّ التعبير عن المتتاليات الحسابية بالصيغة الصريحة أكثر فعالية من التعبير عنها بالصيغة الارتدادية؟

نموذج إجابة:

لأن إيجاد أي حد في متتالية حسابية باستعمال الصيغة الارتدادية يتطلب إيجاد قيم كل الحدود التي قبله، في حين يمكنك، باستعمال الصيغة الصريحة، إيجاد قيمة الحد الذي تريد إيجاد قيمته مباشرة، من دون الحاجة إلى إيجاد قيم الحدود الأخرى.

س: كيف يمكنك استعمال الجدول لمعرفة تكلفة استئجار دراجة مدة عشرة أيام؟

نموذج إجابة:

يمكنك توسيع الجدول ليشمل الأعداد من 1 إلى 10، وتحديد التكلفة بإضافة 12 إلى العدد السابق حتى نهاية الجدول.

س: لماذا تختلف قيمة الحد الأول في المتتالية عن قيمة المقطع y للدالة الخطية التي تمثلها؟

نموذج إجابة:

لأن الحد الأول في المتتالية هو قيمة الدالة الخطية عند $x = 1$ ، أما المقطع y فهو قيمتها عند $x = 0$.

المتتالية الحسابية نموذج يصف بدقة العديد من المسائل العلمية المشتملة بطبيعتها على قوائم عددية ذات فرق ثابت، مثل الزيادة السنوية لإنتاج مؤسسة ما، أو حساب الارتفاعات في الدراسة الهندسية للمباني.

مثال 4 الصيغة العامة بمعلومية الصيغة الارتدادية

الصيغة الارتدادية لارتفاع الدرجة n عن سطح الأرض في الدرج المبين أدناه هي

$$a_1 = 7, a_n = a_{n-1} + 4, n \geq 2$$



- A. أوجد الحد العام الذي يمثل ارتفاع الدرجة n عن سطح الأرض.
B. ما ارتفاع الدرجة العشرين عن سطح الأرض؟

الحل

A. استعمل الصيغة الارتدادية لإيجاد معلومات عن المتتالية.

$$\begin{cases} a_1 = 7 \\ a_n = a_{n-1} + 4, n \geq 2 \end{cases}$$

$$a_1 = 7, d = 4$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = 7 + (n-1)(4)$$

$$a_n = 4n + 3$$

الحد العام الذي يمثل ارتفاع الدرجة n عن سطح الأرض هو $a_n = 4n + 3$

B. لإيجاد ارتفاع الدرجة العشرين عن سطح الأرض اكتب الحد العام $a_n = 4n + 3$

$$a_{20} = 4(20) + 3$$

$$= 83$$

إذن، ارتفاع الدرجة العشرين عن سطح الأرض يساوي 83

سؤال للتفكير

س: كيف يمكن إيجاد الصيغة الصريحة لمتتالية

باستعمال صيغتها الارتدادية؟

نموذج إجابة:

تمكننا الصيغة الارتدادية من إيجاد قيمة الحد الأول

والفرق الثابت في المتتالية.

عادات التفكير

س: وضح كيف يمكن إيجاد قيمة أي حد من حدود

متتالية باستعمال صيغتها الارتدادية.

نموذج إجابة:

(إذا كنت تعرف قيمة الحد الأول للمتتالية، يمكنك إيجاد

قيمة أي حد آخر فيها باستعمال الصيغة الارتدادية.

أوجد قيمة الحد الثاني بإضافة الفرق الثابت إلى قيمة

الحد الأول، وكرر هذه العملية حتى إيجاد قيمة الحد

المطلوب).

تتوقّر لك أحياناً معطيات عن حدّين أو أكثر من متتالية حسابية، كحجم الإنتاج أو زيادة عدد السكان بين عامين متتاليين أو متباعدين. هل تكفي هذه المعطيات لإيجاد الحد العام والصيغة الارتدادية لهذه المقادير إذا كانت تتبع نمطاً حسابياً؟

مثال 5 صيغة متتالية حسابية بمعلومية حدّين منها

متتالية حسابية حدّاتها الثاني والخامس هما 3 و 24 على التوالي. أوجد الحد العام لهذه المتتالية.

الحل

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

صيغة الحد العام

بالنعويض بالعدد 5 و 2 عن n فإنّ

$$a_5 = a_1 + 4d$$

$$a_1 + 4d = 24 \quad (1)$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_1 + d = 3 \quad (2)$$

$$(a_1 + 4d) - (a_1 + d) = 24 - 3$$

$$3d = 21$$

$$d = 7$$

وبما أنّ $a_1 + d = 3$ ، فإنّ $a_1 = -4$

الحد العام للمتتالية هو:

$$a_n = 7(n - 1) - 4 \text{ أو } a_n = 7n - 11$$

العلاقة بين حدّين في متتالية حسابية

يمكننا ملاحظة أن العلاقة بين أيّ حدّين في متتالية

حسابية تشبه العلاقة بين أيّ حدّ فيها وحدّها الأول:

$$a_s = a_t + (s - t)d, s \geq t$$

سؤال للتفكير

س: إذا علمنا أن العددين 8 و 11 هما حدان متتاليان في

متتالية حسابية، لكننا لا نعرف رتبتهما، فهل يمكننا

إيجاد الحد العام لهذه المتتالية؟

نموذج إجابة:

كلا؛ يمكن أن نعرف الفرق الثابت وهو $11 - 8 = 3$ ،

لكننا لا نستطيع معرفة قيمة الحد الأول، وبالتالي

لا يمكننا إيجاد الحد العام لأن صيغته هي:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

حاول أن تحل التمرين 19

في العديد من المسائل الحياتية التي تتبع نمطاً حسابياً نحتاج إلى معرفة عدد الحدود بمعلومية بعض منها، كمعرفة عدد الأشهر اللازمة لإنهاء عملية تقسيط معينة، أو معرفة عدد الأسابيع اللازمة لنمو شجرة ما حتى ارتفاع معين.

مثال 6 إيجاد عدد الحدود في متتالية حسابية

أوجد عدد حدود المتتالية الحسابية $6, 2, -2, \dots, -194$

الحل

لدينا: $a_1 = 6, a_2 = 2, a_3 = -2, \dots, a_n = -194$

الفرق الثابت

$$d = a_n - a_{n-1}$$

$$= a_2 - a_1$$

$$= 2 - 6$$

$$= -4$$

$$عوض $a_2 = 2, a_1 = 6$$$

احسب

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$-194 = 6 + (n - 1)(-4)$$

$$-200 = -4n + 4$$

$$n = 51$$

استعمل صيغة الحد العام

$$عوض $a_n = -194, a_1 = 6$$$

$$d = -4$$

بسط

إذن، عدد حدود المتتالية الحسابية 51

حاول أن تحل التمرين 21

إرشاد

إذا كانت المتتالية منتهية فإن رتبة الحد الأخير فيها تمثل عدد حدود هذه المتتالية.

سؤال للتفكير

س: إذا كان $m < n$ ، فهل يمكننا كتابة الحد a_n بدلالة كل من a_m و $(m - n)$ والفرق الثابت d لمتتالية حسابية؟
نموذج إجابة:

نعم،

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_m = a_1 + (m - 1)d$$

إذن،

$$a_n - a_m = (n - m)d$$

$$a_n = a_m + (n - m)d$$

متابعة

دع الطلاب يناقشون إجابيات وسلبيات تمثيل المتتاليات بيانياً.

ملاحظات على التمارين

التمارين 1-30، يوضح تعريف كل المصطلحات المتعلقة بالمتتاليات الحسابية: "الفرق الثابت"، "الحد العام"، "الصيغة الارتدادية".
التمارين 31-34، تدرب الطالب على أنماط من الاختبارات.

التقييم المستمر

التقييم الذاتي:

التمارين 2, 7, 11, 13, 17, 20, 25

مراجعة سريعة 1.2

7. أوجد الحد العام لمتتالية الأعداد الصحيحة الفردية.

$$1, 3, 5, 7, \dots \quad a_n = 2n - 1; n \geq 1$$

8. أوجد الحد العام لمتتالية الأعداد الصحيحة الزوجية.

$$2, 4, 6, 8, \dots \quad a_n = 2n; n \geq 1$$

في التمرينين 1 و 2، أوجد الفرق الثابت للمتتالية الحسابية.

$$1. 3, 6, 9, 12, 15, \dots \quad d = 3 \quad 2. 45, 54, 63, 72, 81, \dots \quad d = 9$$

في التمارين 3-6، حدّد ما إذا كانت المتتالية حسابية. إذا كانت كذلك، أوجد الفرق الثابت فيها.

$$3. 1, 15, 29, 43, 57, \dots$$

متتالية حسابية؛ $d = 14$

$$5. 3, 6, 9, 15, 18, \dots$$

ليست متتالية حسابية.

$$4. 1, -2, 3, -4, 5, \dots$$

ليست متتالية حسابية.

$$6. 93, 86, 79, 72, 65, \dots$$

متتالية حسابية؛ $d = -7$

الدرس 1.2 التمارين

$$9. -2, 2, 6, 10, \dots$$

$$10. 29, 25, 21, 17, \dots$$

$$11. -6, 3, 12, 21, \dots$$

$$12. 10.07, 9.95, 9.83, 9.71, \dots$$

في التمرينين 13 و 14، أوجد الحد العام والحد العاشر للمتتالية الحسابية.

$$13. \begin{cases} a_1 = 8 \\ a_n = a_{n-1} + 15, n \geq 2 \end{cases} \quad 14. \begin{cases} a_1 = 9 \\ a_n = a_{n-1} + 6, n \geq 2 \end{cases}$$

15. أوجد الحد العام للمتتالية الحسابية:

$$100, 97, 94, 91, \dots$$

16. أوجد الحد العام للمتتالية الحسابية الذي يحقق

$$2, \frac{3}{4}, \frac{-1}{2}, \frac{-7}{4}, \dots$$

17. أوجد الحد العام للمتتالية الحسابية الذي يحقق $a_1 = 13$ و $a_7 = -23$.

18. أوجد الحد العام للمتتالية الحسابية الذي يحقق $a_1 = 299$ و $a_5 = 300$.

19. أوجد الحد العام للمتتالية الحسابية الذي يحقق $a_5 = 6$ و $a_{14} = 42$.

20. أوجد الحد العام للمتتالية الحسابية الذي يحقق $a_3 = -40$ و $a_9 = -18$.

في التمارين 1-4، حدّد ما إذا كانت المتتالية حسابية. إذا كانت كذلك، أوجد الفرق الثابت وحدّها الخمسين. وإذا لم تكن كذلك، برّر السبب.

$$1. a_n = 2n - 3$$

$$2. b_n = n + 2$$

$$3. \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_n = c_{n-1} + 2, n \geq 2 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 3u_{n-1} + 2, n \geq 2 \end{cases}$$

5. أوجد الصيغة الارتدادية للمتتالية الحسابية:

$$1, 4, 7, 10, 13, \dots$$

6. أوجد الصيغة الارتدادية للمتتالية الحسابية، ثم أوجد حدّها السادس.

$$2, -5, -12, -19, \dots$$

في التمرينين 7 و 8، أوجد الصيغة الارتدادية للمتتالية الحسابية.

$$7. a_n = 10 + 8n$$

$$8. a_n = 108 - n$$

لكل متتالية حسابية في التمارين 9-12، أوجد:

a. الحد العام.

b. الحد الثامن.

c. كيف يرتبط الحد العام للمتتالية بدالة خطية.

29. **نشاط جماعي** ضع مع زميل لك قائمة بأمثلة وتطبيقات من الحياة الواقعية تعتقد أنها تمثل متتاليات حسابية. بّرر سبب كون أمثلك وتطبيقاتك تمثل متتاليات حسابية في رأيك.

30. **سباق سيارات** اجتاز سائق سيارة سباق 10 m في الثانية الأولى من أحد السباقات. بفرض أن السائق اجتاز 50 m في كل ثانية إضافية في السباق، أوجد طول المسافة، بالمتري، التي اجتازها سائق السيارة بعد مرور 56 ثانية على بدء السباق.

أسئلة اختبار معيارية

31. **صواب أم خطأ** إذا كان الحدان الأولان لمتتالية حسابية موجبين، فإن الحد الثالث يكون موجبًا أيضًا. بّرر إجابتك.

32. **صواب أم خطأ** المتتالية ... 6, 2, -2, -6, -10, -14, متتالية حسابية. بّرر إجابتك.

33. **اختيار من متعدد** أي المتتاليات أدناه متتالية حسابية؟

- A. 1, 3, 5, 7, 11, ...
- B. 4, 6, 9, 13, 18, ...
- C. 8, 15, 22, 29, 36, ...
- D. 3, 6, 12, 24, 48, ...

34. **اختيار من متعدد** إذا كان أول حدين من متتالية حسابية هما العددان 2 و 8، فإن حدها الرابع هو:

- A. 20
- B. 26
- C. 64
- D. 128
- E. 256

في التمارين 21-26، لديك أول ثلاثة حدود والحد الأخير من المتتالية الحسابية. أوجد عدد حدود المتتالية.

21. 3, 9, 15, ..., 525

22. 9, 3, -3, ..., -201

23. $3\frac{1}{8}$, $4\frac{1}{4}$, $5\frac{3}{8}$, ..., $14\frac{3}{8}$

24. $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{4}$, 2, ..., $\frac{15}{2}$

25. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, ..., $2\frac{5}{6}$

26. $1 - k$, $1 + k$, $1 + 3k$, ..., $1 + 19k$

27. **تصميم واجهة خشبية** يصمم جمال واجهة خشبية تغطي أحد جدران منزله بالكامل. تتكون الواجهة من لوح خشبي ارتفاعه 90 cm، تعلوه 5 صفوف من الألواح الخشبية المتساوية بارتفاع 40 cm لكل منها. استعمل الصيغة الارتدادية للمتتاليات الحسابية لإيجاد ارتفاع الجدار.



28. **نمو الأشجار في غابة الأمازون** يبلغ معدل نمو نوع معين من الأشجار في غابة الأمازون 2.3 cm في الأسبوع الواحد. أوجد المتتالية الحسابية التي تمثل حدودها طول إحدى هذه الأشجار على مدى أسابيع السنة القادمة على افتراض أن طولها الحالي هو 7 m، ثم أوجد الحدود الأربعة الأولى والحددين الأخيرين لهذه المتتالية.



استكشاف

35. **الكتابة للتعلم** في إحدى الألعاب الإلكترونية، على اللاعب أن يحقق 500 5 نقطة لينتهي المرحلة الأولى. ولينتقل من أي مرحلة إلى المرحلة التي تليها مباشرةً عليه أن يحقق 250 3 نقطة إضافية. إذا أردت تمثيل المسألة بمتتالية حسابية، ما العدد الذي يمثل a_1 ؟ ماذا يمثل n ؟ اكتب صيغة الحد العام والصيغة الارتدادية التي تمثل هذه الحالة.

36. **الكتابة للتعلم** ماذا يمكنك أن تعرف عن حدود متتالية حسابية إذا كان الفرق الثابت فيها سالبًا؟

توسيع الأفكار

37. **إيجاد موقع الحد** إذا كان الحد الأول لمتتالية حسابية هو -7 ، والفرق الثابت فيها 3، فهل العدد 803 9 أحد حدود هذه المتتالية؟ إذا كان كذلك، ما موقعه في المتتالية؟

38. **قيمة الحد** إذا كان الحد الأول لمتتالية حسابية هو 689 9، والحد 100 هو 996 8، والحد 110 هو 926 8، فهل العدد 1 أحد حدود هذه المتتالية؟ إذا كان كذلك، ما موقعه فيها؟

39. **إيجاد موقع الحد** إذا كان الحد الأول لمتتالية حسابية هو العدد 2، والحد 30 هو العدد 147، فهل العدد 995 أحد حدود هذه المتتالية؟ إذا كان كذلك، ما موقعه فيها؟

40. ثلاثة أصدقاء هوايتهم المشتركة جمع الطوابع. لاحظ أحدهم أن أعداد الطوابع الموجودة في حوزة كل منهم تتبع نمط متتالية حسابية بفرق ثابت قدره 50 طابعًا. أوجد عدد الطوابع لدى كل من الأصدقاء الثلاثة إذا كان مجموع ما لديهم يساوي 900 طابع.



إجابات أسئلة التمارين 1.2

20. $a_n = \frac{11}{3}n - 51$

21. $n = 88$

22. $n = 36$

23. $n = 11$

24. $n = 25$

25. $n = 16$

26. $n = 11$

27. 250 cm

28. $\begin{cases} a_1 = 700 \\ a_n = a_{n-1} + 2.3; n \geq 2 \end{cases}$

$a_1 = 700 \text{ cm}, a_2 = 702.3 \text{ cm}, a_3 = 704.6 \text{ cm}, a_4 = 706.9 \text{ cm},$

$a_{51} = 815 \text{ cm}, a_{52} = 817.3 \text{ cm}$

29. نموذج إجابة: يتزايد عدد المقاعد في صالات المسارح بمقدار مقعدين من صف إلى آخر كلما ابتعدنا عن خشبة المسرح. ويشكل عدد المقاعد هذا متتالية حسابية لأن الفرق بين عدد مقاعد صفين متتاليين هو عدد ثابت.

30. $a_n = a_1 + (n-1)d, a_n = 50n - 40$

$a_{56} = 2760 \text{ m}$

31. خطأ، والدليل على ذلك المتتالية $4, 1, -2, -5, \dots$

32. صواب، لأن الفرق بين الحدود المتتالية ثابت ويساوي 4

33. C

34. A

35. يمثل a_1 عدد النقاط التي يجب على اللاعب أن يحققها لينتهي المرحلة الأولى. يمثل n عدد المراحل.

$\begin{cases} a_1 = 5500 \\ a_n = a_{n-1} + 3250, n \geq 2 \end{cases}$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_n = 5500 + (n-1)3250, a_n = 3250n + 2250$

36. عندما يكون الفرق الثابت في متتالية حسابية عددًا سالبًا، تكون المتتالية متناقصة، وقيم حدودها تتناقص من حد إلى آخر.

37. $\begin{cases} a_1 = -7 \\ a_n = a_{n-1} + 3, n \geq 2 \end{cases}$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$9803 = -7 + (n-1)3$

$n = 3271$

1. $a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = 3, a_4 = 5, \dots d = 2$

$a_{50} = a_1 + (n-1)d = 97$

2. $b_1 = 3, b_2 = 4, b_3 = 5, b_4 = 6, \dots d = 1$

$b_{50} = b_1 + (n-1)d = 52$

3. $d = 2$

$c_{50} = c_1 + (n-1)d = 97$

4. $u_1 = 1, u_2 = 5, u_3 = 17, u_4 = 53, \dots$

بما أن الفرق بين الحدود المتتالية ليس ثابتًا، إذن المتتالية ليست حسابية.

5. $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 3, n \geq 2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} - 7, n \geq 2 \end{cases} \quad a_6 = -33$

7. $\begin{cases} a_1 = 18 \\ a_n = a_{n-1} + 8, n \geq 2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} a_1 = 107 \\ a_n = a_{n-1} - 1, n \geq 2 \end{cases}$

9. a. $a_n = 4n - 6$

b. $a_8 = 26$

c. $f(n) = 4n - 6, n \in \mathbb{N}$

10. a. $a_n = 33 - 4n$

b. $a_8 = 1$

c. $f(n) = 33 - 4n, n \in \mathbb{N}$

11. a. $a_n = 9n - 15$

b. $a_8 = 57$

c. $f(n) = 9n - 15, n \in \mathbb{N}$

12. a. $a_n = 10.19 - 0.12n$

b. $a_8 = 9.23$

c. $f(n) = 10.19 - 0.12n, n \in \mathbb{N}$

13. $a_n = 15n - 7$

$a_{10} = 143$

14. $a_n = 6n + 3$

$a_{10} = 63$

15. $a_n = 103 - 3n$

16. $a_n = 3.25 - 1.25n$

17. $a_n = 19 - 6n$

18. $a_n = 0.25n + 298.75$

19. $a_n = 4n - 14$

إذن، 9 803 أحد حدود المتتالية لأن n عدد صحيح.

رتبة الحد في المتتالية هي 3 271

$$38. \quad a_n = a_1 + (n - 1)d;$$

$$a_{100} = a_1 + (99)d$$

$$8\,996 = 9\,689 + (99)d$$

$$1 = 9\,689 + (n - 1)(-7)$$

$$n = 1\,385$$

إذن، العدد 1 هو أحد حدود المتتالية لأن n عدد صحيح.

رتبة الحد في هذه المتتالية هي 1 385

$$39. \quad a_n = a_1 + (n - 1)d;$$

$$a_{30} = 2 + 29d = 147$$

$$d = \frac{145}{29} = 5$$

$$995 = 2 + (n - 1)(5)$$

$$n = 199.6$$

n ليس عددًا صحيحًا، إذا، العدد 995 ليس من حدود هذه المتتالية.

40. ليكن x = عدد الطوابع لدى الصديق الأول

إذن، $x + 50$ = عدد الطوابع لدى الصديق الثاني

و $x + 100$ = عدد الطوابع لدى الصديق الثالث

$$x + (x + 50) + (x + 100) = 900$$

$$x = 250$$

$$x + 50 = 300$$

$$x + 100 = 350$$

Geometric Sequences

المتتاليات الهندسية

1.3

المتتالية الهندسية

قدّم أحد المتاجر لعملائه عرضين لتجميع النقاط كما يلي:



في أي يوم سيكون عدد النقاط في العرض B أكبر من عدد النقاط في العرض A؟

ما ستتعلمه

- تعريف المتتالية الهندسية
- صيغة الحد العام للمتتالية الهندسية

...ولماذا

تُعد المتتاليات الهندسية نوعًا مهمًا من المتتاليات ولها خواص رياضية ذات تطبيقات مهمة في واقع الحياة.

معايير الدرس

11A.1.3

11A.1.4

11A.1.9

المصطلحات

- متتالية هندسية
- نسبة ثابتة
- geometric sequence
- common ratio

الهدف

سيتمكن الطلاب من كتابة المتتاليات الهندسية في الصيغتين الصريحة والارتدادية.

دليل الدرس

1. تعريف المتتالية الهندسية
2. كتابة صيغة الحد العام للمتتالية الهندسية

تحفيز

اطلب من الطلاب إيجاد قيمة الحد العاشر في المتتالية $(\frac{1}{32})$ 16, 8, 4, 2, ...

نشاط المصطلحات

ذكر الطلاب بالفرق بين المتتاليات الحسابية والهندسية. اشرح لهم أن في المتتاليات الهندسية، بدلًا من أن يكون الفرق بين الحدود المتتالية ثابتًا، النسبة بينها هي الثابتة. ثم اطلب منهم وصل كل مصطلح أدناه بالمتتالية التي تصفها.

- متتالية هندسية
- متتالية حسابية
- 2, 4, 6, 8, 10, ...
- 5, 10, 20, 40, 80, ...

المتتالية الهندسية

تكون المتتالية $\{a_n\}$ هندسية إذا كانت النسبة بين كل حد والحد الذي يسبقه مباشرة ثابتة وتسمى "النسبة الثابتة" ويُرمز لها بالرمز r ، أي أن $a_n \neq 0$ ، $r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ الصيغة الارتدادية للمتتالية الهندسية:

$$a_n = \begin{cases} a_1 \\ r \times a_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$$

مثال 1 الصيغة الارتدادية للمتتالية الهندسية

A. هل المتتالية ... 4, 12, 36, 108, متتالية هندسية؟
إذا كانت كذلك، اكتب الصيغة الارتدادية للمتتالية ثم أوجد الحد التالي.

B. هل المتتالية ... 1, 4, 9, 16, 25, متتالية هندسية؟ بزر إجابتك.

الحل

A. لاحظ العلاقة بين كل حدّين متتالين في المتتالية:

$$\frac{12}{4} = \frac{36}{12} = \frac{108}{36} = 3$$

إذن، النسبة بين كل حدّ والحدّ الذي يسبقه مباشرة ثابتة.

هذه المتتالية هي متتالية هندسية، حيث $a_1 = 4$ ، $r = 3$
الصيغة الارتدادية لهذه المتتالية هي:

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = 3a_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$$

لإيجاد الحدّ التالي، اضرب العدد 108 في النسبة الثابتة 3:

$$108 \times 3 = 324$$

إذن، الحدّ التالي يساوي 324

B. أوجد النسبة بين كل حدّين متتالين في المتتالية:

$$\frac{4}{1} = 4$$

$$\frac{9}{4} = 2.25$$

بما أنّ النسبة ليست ثابتة، فإنّ المتتالية ليست هندسية.

حاول أن تحل التمرين 1

تتبع الأعداد في أنماط متعددة متتاليات هندسية، مثل عدد متابعي مواقع التواصل الاجتماعي أو متصفحي موقع إلكتروني معين أو عدد الخلايا المتكاثرة في مدة معينة وغيرها. وهذا ما يمكننا بالتالي من توقّع هذه الأعداد في وقت ما من المستقبل.

مساعدة دراسية

لاحظ أن النسبة الثابتة r في المتتالية الهندسية تؤدي دور الفرق الثابت d في المتتاليات الحسابية. ففي حين يُضاف d إلى كل حد سابق في المتتالية الحسابية، تُضرب r في كل حد سابق في المتتالية الهندسية.

أسئلة للتفكير

س: ما أوجه الشبه والاختلاف بين المتتالية الهندسية والمتتالية الحسابية؟
نموذج إجابة:

الحدود في كلتا المتتاليتين أعداد حقيقية، وترتبط بين الحدود المتتالية في كلتيهما علاقة ثابتة. وجه الاختلاف بين المتتاليتين هو أن الفرق بين الحدود المتتالية في المتتالية الحسابية ثابت، بينما في المتتالية الهندسية النسبة بين الحدود المتتالية ثابتة.

س: إذا كان الحد السادس في المتتالية المذكورة في الجزء (A) هو 964، هل تبقى المتتالية هندسية؟
نموذج إجابة:

كلا، لأن ذلك يخل بالنسبة التي تربط بين الحدود المتتالية فيها، إذ لن تعود هذه النسبة ثابتة.

تزايد المتتالية الهندسية وتناقصها

إذا كانت القيمة المطلقة للنسبة الثابتة أكبر من 1، فإن القيم المطلقة لحدود المتتالية تتزايد. أما إذا كانت القيمة المطلقة للنسبة الثابتة أصغر من 1 وأكبر من 0، فإن القيم المطلقة لحدود المتتالية تتناقص.



مثال 2 مواقع التواصل الاجتماعي

يتضاعف عدد متابعي أحد مواقع التواصل الاجتماعي كل أسبوع.
تمثل المتتالية ... a_1, a_2, a_3 عدد متابعي الموقع كل أسبوع.

A. هل هذه المتتالية هندسية؟ إذا كانت كذلك، أوجد صيغتها الارتدادية.

B. أوجد عدد متابعي الموقع في الأسبوع الرابع.

الحل

A. بما أن عدد المتابعين يتضاعف كل أسبوع، إذن $a_n = 2a_{n-1}$ أي أن $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 2$
نلاحظ أن النسبة بين كل حد والحد الذي يسبقه مباشرة ثابتة وتساوي 2
إذن، المتتالية متتالية هندسية حدها الأول $a_1 = 5$ والنسبة الثابتة لها $r = 2$.

إذن، الصيغة الارتدادية:

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = 2a_{n-1} \end{cases}, \quad n \geq 2$$

$$a_2 = 2a_1 = 2 \times 5 = 10$$

$$a_3 = 2a_2 = 2 \times 10 = 20$$

$$a_4 = 2a_3 = 2 \times 20 = 40$$

إذن، عدد متابعي الموقع في الأسبوع الرابع هو 40 متابعاً.

حاول أن تحل التمرين 2

صيغة الحد العام للمتتالية الهندسية

نعلم الآن أن لكل متتالية هندسية صيغة ارتدادية هي:

$$\begin{cases} a_1 \\ a_n = ra_{n-1} \end{cases}, \quad n \geq 2$$

حيث r هي النسبة الثابتة لها.
إذن،

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = r a_1$$

$$a_3 = r a_2 = r(r a_1) = r^2 a_1$$

$$a_4 = r(a_3) = r(r^2 a_1) = r^3 a_1$$

يمكننا ملاحظة أن الحد العام هو: $a_n = r^{n-1} a_1$

سؤال للتفكير

س: هل تختلف العلاقة بين a_n و a_{n-1} إذا كانت قيمة

الحد الأول 2؟

نموذج إجابة:

لا تختلف العلاقة بين a_n و a_{n-1} بتغير قيمة الحد

الأول، بل تبقى

$$a_n = 2a_{n-1}$$

عدد سكان الأرض

في مطلع العام 2019 بلغ عدد سكان الأرض 7.67 مليار نسمة تقريباً. بالتالي، إذا بقي عدد متابعي هذا الموقع يتضاعف بنفس النسبة فسيصبح كل سكان الأرض من متابعي هذا الموقع في أقل من سنة!

صيغة الحد العام للمتتالية الهندسية

صيغة الحد العام للمتتالية الهندسية هي:

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

حيث:

a_1 : الحد الأول للمتتالية.

r : النسبة الثابتة.

n : رتبة الحد.

a_n : الحد الذي رتبته n .

مثال 3 إيجاد الحد العام والصيغة الارتدادية لمتتالية هندسية

لكل من المتتاليتين الهندسيتين، أوجد النسبة الثابتة، والحد العاشر، والحد العام.

A. 3, 6, 12, 24, 48, ...

B. $10^{-3}, 10^{-1}, 10^1, 10^3, 10^5, \dots$

الحل

A. النسبة الثابتة بين حدود المتتالية هي 2،

$$a_{10} = 3 \times 2^{10-1} = 3 \times 2^9 = 1536$$

المتتالية معرّفة بالحد العام: $a_n = 3 \times 2^{n-1}$

B. بتطبيق قانون الأسس،

$$\frac{10^{-1}}{10^{-3}} = 10^{-1-(-3)} \\ = 10^2$$

إذن النسبة الثابتة للمتتالية هي 10^2

$$a_{10} = 10^{-3} \times (10^2)^{10-1} = 10^{-3+18} = 10^{15}$$

المتتالية معرّفة بالحد العام:

$$a_n = 10^{-3} \times (10^2)^{n-1}$$

$$= 10^{-3} \times 10^{2n-2}$$

$$= 10^{-3+2n-2}$$

$$= 10^{2n-5}$$

خاصية قوة القوة

خاصية ضرب الأسس

بسّط

حاول أن تحل التمرين 6

أسئلة للتفكير

س: لماذا قوة النسبة الثابتة في صيغة الحد العام

$n-1$ بدلاً من n ؟

نموذج إجابة:

لأن عدد الخطوات من a_1 إلى a_n هو $n-1$ وليس n .

س: ما المعلومات التي توفرها كل من الصيغة الصريحة والصيغة الارتدادية على حد سواء؟

نموذج إجابة:

كلتا الصيغتين تعطي قيمة الحد الأول والنسبة الثابتة.

للطلاب سريع الإنجاز

(مع المثال 2) دع الطلاب يتدربون على إيجاد الصيغة

الصريحة والصيغة الارتدادية للمتتاليات الهندسية.

س: أوجد الصيغة الارتدادية والصيغة الصريحة لكل من المتتاليتين الهندسيتين التاليتين.

1. $2b, 8b, 32b, 128b, \dots$

نموذج إجابة:

$$\begin{cases} a_1 = 2b \\ a_n = 4a_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$$

الصيغة الصريحة: $a_n = 2b(4)^{n-1}$

2. $2, 8b, 32b^2, 128b^3, \dots$

نموذج إجابة:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 4ba_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$$

الصيغة الصريحة: $a_n = 2(4b)^{n-1}$

بعد التأكد من اتباع أعداد نموذج ما نمطاً هندسياً، ومن خلال تحليل هذا النموذج، يمكننا استخدام خصائص المتتاليات الهندسية لدراسة ذلك النموذج.

مثال 4 اتصالات

أرسل أحمد إلى اثنين من أصدقائه رسالة نصية تتضمن بعض النصائح الطبية، وكتب في آخرها: "أرسل هذه الرسالة إلى ثلاثة أشخاص آخرين لتعم الفائدة". وبالفعل، أخذ كل متلقٍ لهذه الرسالة يرسلها إلى ثلاثة أشخاص آخرين، وهكذا...



A. أوجد الحد العام للمتتالية التي تمثل عدد الرسائل المرسلة في كل دفعة.

B. أوجد عدد الرسائل في الدفعة الثامنة.

الحل

A. المتتالية ... 2, 6, 18, 54 هي متتالية هندسية حدها الأول هو عدد الرسائل الأولى وهو

رسالتان: $a_1 = 2$ ونسبتها الثابتة هي: $r = 3$.

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_n = 2 \times 3^{n-1}$$

$$a_n = 2 \times 3^{n-1}$$

$$a_8 = 2 \times 3^{8-1}$$

$$= 2 \times 3^7$$

$$= 4 \ 374$$

صيغة الحد العام

$$\text{عوض } a_1 = 2, r = 3$$

B. الحد العام

$$\text{عوض } n = 8$$

إذن، عدد الرسائل في الدفعة الثامنة هو 4 374 رسالة.

حاول أن تحل التمرين 8

أسئلة للتفكير

س: لكتابة الصيغة الارتدادية لمتتالية هندسية، نحتاج

إلى معرفة قيمة الحد الأول والنسبة الثابتة. أي من

هاتين القيمتين معطاة في المسألة، وأيها يجب

استنتاجها؟

نموذج إجابة:

الحد الأول هو المعطى ويجب استنتاج النسبة الثابتة.

س: كيف يمكنك استعمال الصيغة الصريحة لمعرفة

عدد الرسائل في الدفعة الثامنة؟

نموذج إجابة:

عوض $n = 8$ في الصيغة الصريحة وبسطها.

قد تتوافر لديك معطيات عن حدّين أو أكثر من متتالية هندسية، فهل من الممكن إيجاد حدّها العام انطلاقًا من هذه المعطيات؟ المثال التالي يوضح هذه المسألة.

مثال 5 الحد العام لمتتالية هندسية بمعلومية حدّين فيها

متتالية هندسية حدّاها الثاني والخامس هما 3 و 24 على التوالي.
أوجد الحد العام لهذه المتتالية.

الحل

صيغة الحدّ العام هي: $a_n = a_1 \times r^{n-1}$

بالتعويض بالعدد 2 و 5 عن n ، فإن:

$$a_2 = a_1 \times r^1 = 3$$

$$a_5 = a_1 \times r^4 = 24$$

بالقسمة لدينا

$$\frac{a_1 r^4}{a_1 r^1} = \frac{24}{3}$$

$$r^3 = 8$$

$$r = 2$$

وبما أن $a_1 r^1 = 3$ ، فإن $a_1 = \frac{3}{2}$

الحد العام للمتتالية هو:

$$a_n = \frac{3}{2} (2)^{n-1}$$

$$= 3 \times 2^{n-2}$$

إذن الحد العام للمتتالية هو $a_n = 3(2)^{n-2}$

سؤال للتفكير

س: إذا استبدلنا الحد الخامس بالحد السادس.

هل تتغير قيم حدود المتتالية كليًا؟

نموذج إجابة:

نعم، عند استبدال الحد الخامس بالحد السادس

نحصل على $r^4 = 8$ ، أي أن $r = \pm\sqrt[4]{8}$ ، وهو ليس عددًا

طبيعيًا. وبالتالي فإن قيم كثيرة من حدود المتتالية

ستصبح أعدادًا حقيقية غير طبيعية. أما في الحالة الأولى

فكل الأعداد طبيعية.

حاول أن تحل التمرين 10

كثيرًا ما نحتاج لمعرفة عدد حدود متتالية هندسية لتحليل دلالة هذا العدد وفقًا لنموذج معين.
المثال التالي يبيّن طريقة إيجاد عدد حدود متتالية هندسية.

مثال 6 إيجاد عدد الحدود في متتالية هندسية

أوجد عدد حدود المتتالية الهندسية الآتية:

4, 12, 36,, 2 916

الحل

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

صيغة النسبة الثابتة

$$r = \frac{a_2}{a_1}$$

عوض $n = 2$

$$r = \frac{12}{4}$$

عوض $a_2 = 12$, $a_1 = 4$

$$r = 3$$

إذن، النسبة الثابتة للمتتالية هي $r = 3$
إيجاد عدد الحدود في المتتالية الهندسية

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

صيغة الحد العام

$$2916 = 4(3^{n-1})$$

عوض

$$729 = 3^{n-1}$$

بسط

$$3^6 = 3^{n-1}$$

أساس مشترك

$$6 = n - 1$$

$$n = 7$$

إذن، عدد حدود هذه المتتالية هو 7

حاول أن تحل التمرين 12

إيجاد قيمة متغير

ترتبط العلاقة $a_n = a_1 r^{n-1}$ بين قيمة الحد a_n ورتبته n والحد الأول a_1 و النسبة الثابتة r ، وإذا كنا نعرف ثلاثة من هذه القيم، يمكننا تحديد القيمة الرابعة.

سؤال للتفكير

س: ما القاعدة العامة التي يمكن استعمالها لحل هذا النوع من المسائل؟

نموذج إجابة:

القاعدة هي إيجاد الحد a_n بدلالة الحد a_m لأن $(m < n)$ و $n - m > 0$ ، ويمكن استنتاج هذه القاعدة من صيغة الحد العام:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_m = a_1 r^{m-1}$$

$$\frac{a_n}{a_m} = r^{n-m}$$

$$a_n = a_m r^{n-m}$$

إذن،

متابعة

أسأل الطلاب عن الفائدة من تمثيل المتتاليات الهندسية بيانياً.

ملاحظات على التمارين

التمارين 1-17، توضّح تعريف كل المصطلحات المتعلقة بالمتتاليات الهندسية: النسبة الثابتة، الحد العام، الصيغة الارتدادية. التمارين 18-21، تدرب الطالب على أنماط من الاختبارات.

التقييم المستمر

التقييم الذاتي:

التمارين 2, 4, 6, 9, 10, 13

مراجعة سريعة 1.3

في التمارين 1-4، حدد ما إذا كانت المتتالية هندسية. إذا كانت كذلك، أوجد النسبة الثابتة لها.

$$1. \frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, \dots$$

$$2. 1, 1, 2, 3, 5, \dots$$

ليست متتالية هندسية. $r = 3$ متتالية هندسية ؟

$$3. 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, \dots$$

ليست متتالية هندسية.

$$4. \frac{1}{2}, 2, 8, 32, 128, \dots$$

متتالية هندسية ؟ $r = 4$

في التمارين 5-8، أوجد النسبة الثابتة للمتتالية الهندسية.

$$5. 9, 18, 36, 72, 144, \dots$$

$$r = 2$$

$$6. 6, 9, 13.5, 20.25, 30.375, \dots$$

$$r = 1.5$$

$$7. -1, 3, -9, 27, -81, \dots$$

$$r = -3$$

$$8. 0.1, 0.2, 0.4, 0.8, 1.6, 3.2, \dots$$

$$r = 2$$

في التمرينين 9 و 10، أوجد الحد العام للمتتالية الهندسية.

$$9. \begin{cases} a_1 = 7 \\ a_n = 6a_{n-1} \end{cases}, n \geq 2 \quad a_n = 7 \times 6^{n-1}$$

$$10. \begin{cases} a_1 = 100 \\ a_n = \frac{4}{5}a_{n-1} \end{cases}, n \geq 2 \quad a_n = 100 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

في التمرينين 11 و 12، أوجد الصيغة الارتدادية للمتتالية الهندسية.

$$11. a_n = \frac{1}{5}(10)^{n-1} \quad \begin{cases} a_1 = \frac{1}{5} \\ a_n = 10 \times a_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$$

$$12. a_n = \frac{2}{3}(5)^{n-1} \quad \begin{cases} a_1 = \frac{2}{3} \\ a_n = 5 \times a_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$$

التمارين

الدرس 1.3

11. متتالية هندسية حدها الأول 7 وحدها الخامس 4 375،
أوجد الحدود الثلاثة الواقعة بين هذين الحدين.
اكتب جميع الإجابات الممكنة.

12. أوجد عدد حدود المتتالية الهندسية التالية:

5, 10, 20,, 640

13. أوجد عدد حدود المتتالية الهندسية التالية:

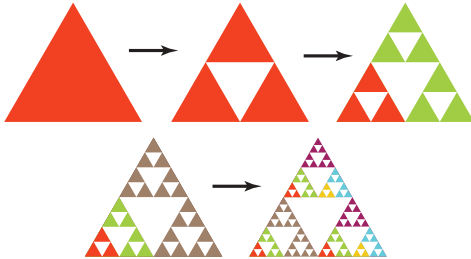
16, 4, 1,, $\frac{1}{64}$

14. في العينة المبينة في الرسم أدناه تتناقص أعداد البكتيريا بنسبة $\frac{2}{3}$ كل ساعة. اكتب الحد العام للمتتالية الهندسية التي تمثل التناقص في عدد البكتيريا.
بعد مرور كم ساعة يصبح عدد البكتيريا أقل من 1 000؟



15. "مثلث سايرينسكي" عبارة عن مثلث كسريات، ويُرسم بتقسيم مثلث متطابق الأضلاع إلى أربع قطع متطابقة، وقص القطعة المركزية لتبقى ثلاثة مثلثات أصغر منه. ثم يتم تكرار العملية على كل مثلث فنحصل على مثلثات أصغر من سابقتها.
على كم مثلث نحصل إذا كررنا هذه العملية 10 مرات؟

$a_{10} = 19\ 683$



16. نصف العمر إن نصف العمر لمادة "ثوريوم-232"

هو 14 مليار سنة.

أنشئ جدولاً يبين تآكل نصف العمر لعينة من مادة

"ثوريوم-232" من 16 جرام إلى 1 جرام.

اكتب في العمود الأول الزمن بالسنوات مبتدئاً بـ $t = 0$,

واكتب في العمود الثاني الكتلة بالجرام.

ما نوع المتتالية التي تمثلها معطيات كل عمود؟

1. أوجد النسبة الثابتة والصيغة الارتدادية للمتتالية الهندسية:

$$10, 20, 40, 80, \dots \quad r = 2, \begin{cases} a_1 = 10 \\ a_n = 2 \times a_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$$

2. أوجد الصيغة الارتدادية للمتتالية الهندسية التالية، ثم أوجد الحد الخامس فيها.

$$80, -40, 20, -10, \dots \quad r = -\frac{1}{2}, \begin{cases} a_1 = 80 \\ a_n = (-\frac{1}{2}) \times a_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}, a_5 = 5$$

في التمارين 3-7، أوجد الحد العام للمتتالية الهندسية.

3. 3, 6, 12, 24, ... $r = 2, a_n = 3 \times (2)^{n-1}$

4. 5, -5, 5, -5, ... $r = -1, a_n = 5 \times (-1)^{n-1}$

5. 4, 12, 36, 108, ... $r = 3, a_n = 4 \times (3)^{n-1}$

6. 3, -6, 12, -24, ... $r = -2, a_n = 3 \times (-2)^{n-1}$

7. -6, -3, $-\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{4}$, ... $r = 0.5, a_n = -6 \times (0.5)^{n-1}$

8. انتشرت على الإنترنت الخدعة البصرية المبينة في الصورة أدناه، وتزايد عدد مشاركات الرابط في متتالية هندسية كما هو موضح. اكتب صيغة الحد العام لتحديد عدد مشاركات الرابط بعد مرور 8 ساعات.



9. متتالية هندسية، النسبة الثابتة لها 5 وحدها الأول 5،

أوجد الحد العام للمتتالية ثم أوجد الحد الثالث.

10. متتالية هندسية حدها الأول 3 وحدها السادس 96،

أوجد الحد العام والصيغة الارتدادية لهذه المتتالية.

توسيع الأفكار

24. **تطبيق صيغة الحد العام والصيغة الارتدادية** بلغ عدد زائري مهرجان الطعام المحلي السنوي 1 250 زائراً في السنة الأولى، ثم أخذ عددهم يتناقص 20% سنوياً ابتداءً من السنة الثانية.



أسئلة اختبار معيارية

17. **نشاط جماعي** أنشئ مع زميل لك قائمة بأمثلة وتطبيقات من الحياة الواقعية تعتقد أن لها تمثلاً بمتتاليات هندسية. بّرر سبب كون أمثلك عبارة عن متتاليات هندسية.
نموذج إجابة: استثمار مبلغ في حساب فائدة مركبة.

18. **صواب أم خطأ** إذا كان الحدان الأول والثاني في متتالية هندسية موجبين، يكون الحد الثالث موجباً أيضاً. بّرر إجابتك.

19. **صواب أم خطأ** المتتالية 0, 7, 49, 343, ... متتالية هندسية. بّرر إجابتك، وماذا تستنتج؟ خطأ، لأن $\frac{a_2}{a_1}$ نسبة غير محددة.

20. **اختيار من متعدد** الحد العام للمتتالية الهندسية

.... 360, 180, 90, 45, 22.5 هو: D

A. $a_n = \frac{1}{2}(360)^{n-1}$

B. $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1})$

C. $a_n = 360(a_{n-1})^{n-1}$

D. $a_n = 360\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

E. $a_n = 360 + \frac{1}{2}(a_{n-1})$

21. **اختيار من متعدد** قيمة الحد الحادي عشر في المتتالية

الهندسية ... $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$ هي: D

A. 3^4

B. 3^5

C. 3^6

D. 3^7

E. 3^8

استكشاف

22. **الكتابة للتعليم** ماذا تلاحظ بالنسبة لحدود متتالية هندسية

حدها الأول موجب والنسبة الثابتة لها أكبر من 1؟
ماذا يحصل إذا كانت النسبة الثابتة أصغر من 1 وأكبر من 0؟
وَصِّحْ إجابتك.

23. **الكتابة للتعليم** اكتب متتالية هندسية لها أربعة حدود على الأقل، ثم اكتب صيغة الحد العام وصيغتها الارتدادية، ثم وَصِّحْ كيف يمكنك التحقق من أنها متتالية هندسية.

إجابات أسئلة التمارين 1.3

16.

زمن سنة	كتلة بالجرام
0	16
14	8
28	4
42	2
56	1

العمود الأول يمثل الزمن بمليار السنين، وهو متتالية حسابية .

العمود الثاني يمثل الكتلة بالجرامات، وهو متتالية هندسية.

18. صواب، إذا كان الحدان الأول والثاني موجبين، تكون النسبة الثابتة موجبة.

وبما أن الحد الثالث هو ناتج ضرب الحد الثاني في النسبة الثابتة،

فهو إذن عدد موجب.

22. $r > 1$: تكون المتتالية متزايدة وقيم حدودها تتزايد.

$0 < r < 1$: تكون المتتالية متناقصة وقيم حدودها تتناقص.

23. $a_1 = -6, a_2 = -3, a_3 = -\frac{3}{2}, a_4 = -\frac{3}{4}$

$$\begin{cases} a_1 = -6 \\ a_n = \frac{1}{2} \times a_{n-1}, n \geq 2 \\ a_n = -6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{cases}$$

يمكن التحقق من أنها متتالية هندسية إذا كانت نسبة كل حد إلى

الحد السابق له مباشرة مقدارًا ثابتًا.

24. a. $\begin{cases} a_1 = 1\,250 \\ a_n = (0.8) \times a_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$

$$a_1 = 1\,250$$

$$a_2 = 1\,000$$

$$a_3 = 800$$

$$a_4 = 640$$

$$a_5 = 512$$

b. $a_{10} \approx 168$

25. $a_1 = 1, a_2 = 5, a_3 = 13, a_4 = 29, a_5 = 61$

a. المتتالية a_n ليست حسابية لأن الفرق بين الحدود المتتالية فيها ليس ثابتًا.

المتتالية a_n ليست هندسية لأن النسبة بين الحدود المتتالية فيها ليست ثابتة.

b. الحدود الثلاثة الأولى هي: $b_1 = 4, b_2 = 8, b_3 = 16$

c. المتتالية b_n متتالية هندسية لأن النسبة بين الحدود المتتالية فيها ثابتة

$$b_n = 4 \times 2^{n-1} = 2^{n+1} \text{؛ 2 تساوي}$$

d. الحد العام a_n للمتتالية هو $2^{n+1} - 3$

8. $\begin{cases} a_1 = 20 \\ a_n = 4 \times a_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$
 $a_n = 20 \times 4^{n-1}$
 $a_8 = 20 \times 4^7 = 327\,680$

9. $a_n = 5 \times 5^{n-1}$
 $a_3 = 5 \times 5^2 = 125$

10. $a_6 = a_1 \times r^{6-1}$
 $96 = 3 \times r^5$
 $r = 2$

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = 2a_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$$

11. $a_5 = a_1 \times r^{5-1}$
 $4\,375 = 7 \times r^4$
 $r = \pm 5$

$$r = 5$$

$$a_2 = 5 \times a_1 = 5 \times 7 = 35$$

$$a_3 = 5 \times a_2 = 5 \times 35 = 175$$

$$a_4 = 5 \times a_3 = 5 \times 175 = 875$$

$$\text{أو } r = -5$$

$$a_2 = -5 \times a_1 = -5 \times 7 = -35$$

$$a_3 = -5 \times a_2 = -5 \times (-35) = 175$$

$$a_4 = -5 \times a_3 = -5 \times 175 = -875$$

12. $r = 2$
 $640 = 5 \times 2^{n-1}$
 $128 = 2^{n-1}$
 $n = 8$

13. $r = \frac{1}{4}$
 $\frac{1}{64} = 16 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$
 $\frac{1}{1\,024} = \frac{1}{4}$
 $n = 6$

14. $a_n = 3\,000\,000 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$
 $a_7 > 1\,000, a_8 < 1\,000$

إذن، بعد مرور 8 ساعات يصبح عدد البكتيريا أقل من 1 000

Sigma Notation and Series

رمز المجموع والمتسلسلات

1.4

رمز المجموع

يتم تصميم مسرح على نحو يكون فيه عدد المقاعد في الصف الأول a_1 ومن ثم يزيد عدد المقاعد في كل صف لاحق مقعدين اثنين. وهكذا يكون عدد المقاعد في الصف الثاني هو $a_2 = a_1 + 2$ وفي الثالث $a_3 = a_2 + 2$... إلخ.

تشكل أعداد المقاعد في كل صف من صفوف المسرح متتالية، وإذا افترضنا أن عدد الصفوف في المسرح هو n ، يكون عدد المقاعد الكلي في هذا المسرح هو مجموع حدود المتتالية a_1 و a_2 و a_3 ... و a_n

ويُعبّر عن مجموع حدود المتتالية $\{a_n\}$ بالرموز في الصورة $\sum_{k=1}^n a_k$ حيث $(\sum)$ ويُقرأ (سيجما) هو **رمز المجموع**.

ما ستتعلمه

- رمز المجموع
- المتسلسلة الحسابية
- المتسلسلة الهندسية
- المتسلسلة الهندسية غير المنتهية

... ولماذا

كثيراً ما تكون بعض المسائل العلمية، لا سيما تلك التي تتعلق بالتكاثف في علوم الأحياء، مرتبطةً بمجموع حدود المتتاليات.

معايير الدرس

11A.1.5

11A.1.6

11A.1.7

11A.1.8

11A.1.9

المصطلحات

- رمز المجموع
- متسلسلة
- متسلسلة منتهية
- متسلسلة غير منتهية
- مجموع جزئي
- متسلسلة حسابية
- متسلسلة هندسية
- متسلسلة متقاربة
- متسلسلة متباعدة
- متسلسلة هندسية غير منتهية
- sigma notation series
- finite series
- infinite series
- partial sum
- arithmetic series
- geometric series
- convergent series
- divergent series
- infinite geometric series

رمز المجموع

يُرمز لمجموع حدود المتتالية $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ بالرمز:

$$\sum_{k=1}^n a_k$$

ويُقرأ كما يلي:

مجموع الحدود a_k من $k = 1$ إلى $k = n$ ، حيث k هو متغير الجمع.

مثال 1 استعمال الرمز $\sum$

أوجد قيمة كل مما يلي:

A. $\sum_{i=1}^4 (2i - 6)$

B. $\sum_{k=3}^6 (2k^2 + 1)$

C. $\sum_{k=1}^4 k3^k$

الحل

A. أوجد المجموع بكتابة كل حدود المتتالية.

$$a_1 = 2(1) - 6 = -4 \quad a_3 = 2(3) - 6 = 0$$

$$a_2 = 2(2) - 6 = -2 \quad a_4 = 2(4) - 6 = 2$$

$$\sum_{i=1}^4 (2i - 6) = -4 - 2 + 0 + 2 = -4$$

$$\sum_{i=1}^4 (2i - 6) = -4 \text{، إذن،}$$

(تابع)

سيجما

إن أصل شكل رمز المجموع $\sum$ هو حرف «الشين» الفينيقي الذي كان يكتب في صورة W. وفي القرن الرابع قبل الميلاد، استعمل الرمز $\sum$ في المخطوطات اليونانية وكان أكثر شيوعاً بالحرف C، ثم شاع استعماله في القرون الوسطى وكان يُطلق عليه اسم «سيجما القمر» نظراً لشكله الذي يشبه الهلال. ثم عاد ليكتب أحياناً مع ثلاثة خطوط متوازية صغيرة تمر من خلاله، إلى أن اتخذ شكله الحالي تدريجياً.

خصائص رمز المجموع

لرمز المجموع خصائص تتناسب مع العمليات الجبرية، وينشأ عن ذلك سلاسة في استعماله في معالجة المسائل المختلفة.

1. $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$
2. $\sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k$
3. $\sum_{k=1}^n C a_k = C \times \sum_{k=1}^n a_k$ ، حيث C عدد ثابت
4. $\sum_{k=1}^n C = nC$ ، حيث C عدد ثابت

الهدف

سيتمكن الطلاب من استعمال رمز المجموع (Σ) ، وإيجاد مجموع قيم بعض من حدود متتالية حسابية أو هندسية. كذلك سيتمكنون من إيجاد مجموع قيم كل حدود بعض المتاليات الهندسية.

إرشاد

حدود المتتالية قد تُسمى أحياناً حدود المتسلسلة التي تعزفها تلك المتتالية.

دليل الدرس

1. شرح مفهوم رمز المجموع والمتسلسلة الحسابية
2. المتسلسلة الهندسية (المنتهية وغير المنتهية)

تحفيز

دع الطلاب يخمنون مجموع حدود المتتالية $(1) \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

نشاط المصطلحات

اطلب من الطلاب أن يحاولوا فهم المصطلح "متسلسلة" وأن يربطوا بينه وبين المصطلح "متتالية".

أسئلة للتفكير

- س: متى لا يكون استعمال رمز المجموع ممكناً؟
نموذج إجابة:
- عندما لا تربط بين الحدود التي يُراد جمعها قاعدة ثابتة.
- س: هل يمكن إيجاد مجموع عدد غير معلوم من الحدود؟
نموذج إجابة:
- كلا، لأن إيجاد مجموع الحدود يتطلب جمعها كلها، وكتابة صيغة الحد العام، ثم إجراء عملية الجمع، وهذا غير ممكن إلا بمعرفة عدد الحدود المراد جمعها.

$$\sum_{k=3}^6 (2k^2 + 1) \quad \text{B. رمز المجموع}$$

$$= (2(3)^2 + 1) + (2(4)^2 + 1) + (2(5)^2 + 1) + (2(6)^2 + 1) \quad \text{عوض}$$

$$= 19 + 33 + 51 + 73 \quad \text{بسط}$$

$$= 176$$

$$\sum_{k=3}^6 (2k^2 + 1) = 176, \text{ إذن}$$

$$\text{C. رمز المجموع}$$

$$\sum_{k=1}^4 k3^k$$

$$= (1 \times 3^1) + (2 \times 3^2) + (3 \times 3^3) + (4 \times 3^4) \quad \text{عوض}$$

$$= 3 + 18 + 81 + 324 \quad \text{بسط}$$

$$= 426$$

$$\sum_{k=1}^4 k3^k = 426, \text{ إذن}$$

حاول أن تحل التمرين 1

المتسلسلة هي مجموع لحدود متتالية ما ويمكننا استخدام رمز المجموع للتعبير عنها.

فإذا كانت $\{a_k\}$ متتالية فإن $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ تمثل متسلسلة تنتج عن جمع حدود هذه المتتالية. وإذا كانت المتتالية منتهية تكون المتسلسلة المرتبطة بها والناتجة عن جمع حدودها

متسلسلة منتهية ويعبر عنها بالرمز $\sum_{k=1}^n a_k$ ، أما إذا كانت المتتالية غير منتهية فإن مجموع كل

حدودها يمكن أن يكون معرّفًا ويسمى **متسلسلة غير منتهية** ويعبر عنها بالرمز $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

ويمكن إيجاد **المجموع الجزئي** لمتسلسلة غير منتهية بجمع أول n حد من حدود المتتالية

$$\text{ويرمز له بالرمز } S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

المتسلسلة الحسابية

إحدى أشهر القصص التي تحكى في الرياضيات، هي تلك التي تتعلق بعالم الرياضيات الألماني "كارل فريدريك جاوس" (1777-1855) (Gauss) الذي ظهرت عنده مظاهر النبوغ في سن مبكر. في هذه القصة، يطلب المعلم من طلابه جمع كل الأعداد الطبيعية من 1 إلى 100، وبينما كان الطلاب قد بدأوا ليؤمّم بكتابة المسألة، توجه "جاوس" إلى معلمه وهو يحمل ورقة كتب عليها الحل ووضعها على مكتب معلمه قائلاً بأدب وثقة: "ها هي الإجابة".



بدأ المعلم مراجعة إجابات الطلاب، وكانت كلها خطأ، ثم نظر في النهاية إلى ورقة "جاوس" الموضوعة على المكتب وكانت المفاجأة أن العدد المكتوب فيها كان 5050، وهو الإجابة الصحيحة.

نشاط استكشافي 1 نبوغ "جاوس" "Gauss"

التحدي في هذا التحقق هو إيجاد مجموع الأعداد الطبيعية من 1 إلى 100، بدون استعمال الآلة الحاسبة.

1. اكتب على ورقة مقدار الجمع $1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$

2. اكتب تحته مباشرة نفس مقدار الجمع لكن بالترتيب المعكوس $100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1$

3. اجمع كل عددين مصطفين رأسياً $(1 + 100)$ ، $(2 + 99)$ ، ...، وتحقق من أنك تحصل على نفس القيمة مئة مرة.

4. أوجد ناتج ضرب هذه القيمة في مئة.

5. اشرح لماذا يكون نصف القيمة التي حصلنا عليها في الفرع (4) هو الإجابة الصحيحة. هل يمكنك أن تحدد قيمة هذا النصف بدون آلة حاسبة؟

إذا كانت هذه القصة صحيحة، فإن "جاوس" قد فطن إلى الحقيقة الرياضية التي كانت معروفة قبل ذلك الزمن: إذا كتبنا حدود متتالية حسابية على سطر، وكتبنا تحته نفس الحدود بترتيب معكوس، فإن جمع كل حدين متناظرين رأسياً يعطي نفس الناتج. إذن، مجموع الحدود يساوي نصف هذا الناتج مضروباً في عددها.

المتسلسلة الحسابية هي جمع لحدود متتالية حسابية $\{a_n\}$: بحيث يكون مجموعها الجزئي هو:

$$\sum_{i=1}^n a_i$$

صيغة مجموع المتسلسلة الحسابية المنتهية

إذا كانت المتسلسلة الحسابية معروفة من خلال المتتالية الحسابية $\{a_n\}$ فإن مجموعها الجزئي $\sum_{i=1}^n a_i$ يُعطى بالصيغة:

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d) \text{ أو}$$

حيث

n : عدد حدود المتسلسلة

d : الفرق الثابت

a_1 : الحد الأول

a_n : الحد الأخير

للطلاب الذين يعانون من صعوبات

(مع المثال 1) قد يجد بعض الطلاب صعوبة في فهم رمز المجموع وكيفية استعماله. دعهم يتدربون على ذلك من خلال كتابة مجاميع باستعمال الرمز (Σ) . اكتب مجموع كل من المتتاليات التالية حتى الحد n .

1. $a_1 = 5, d = 3, n = 5 \quad \left[\sum_{i=1}^5 (3i + 2) \right]$

2. $a_1 = 8, d = -2, n = 13 \quad \left[\sum_{i=1}^{13} (10 - 2i) \right]$

3. $a_1 = 15, d = 4, n = 10 \quad \left[\sum_{i=1}^{10} (11 + 4i) \right]$

توسيع الاستكشاف

دع الطلاب يعيدون كتابة المتتالية

$$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$$

والمتتالية $100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1$

باستعمال رمز المجموع. ثم ناقشهم في الخصائص التالية:

1. $\sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)$

2. $\sum_{k=1}^n ca_k = c \sum_{k=1}^n a_k$

وعلاقة ذلك بعقيدة عالم الرياضيات "جاوس".

البرهان

يمكننا بناء المتتالية بالتقدم ابتداءً من الحد a_1 وزيادة d في كل مرة، كما باستطاعتنا بناؤها بالتراجع انطلاقاً من الحد a_n ونقصان d في كل مرة.

هكذا نحصل على صيغتين للمجموع الذي نحن بصدد إيجادها:

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-1)d)$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + (a_n - (n-1)d)$$

وعند الجمع رأسيًا، نحصل على:

$$2 \sum_{k=1}^n a_k = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n)$$

$$2 \sum_{k=1}^n a_k = n(a_1 + a_n)$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

وبتعويض $a_1 + (n-1)d$ عن a_n ، نحصل على الصيغة البديلة:

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$$

يمكن إيجاد مجموع متسلسلة حسابية باستعمال إحدى هاتين الصيغتين.

مثال 2 جمع حدود متتالية حسابية

يتألف الصف الأمامي من القسم الجانبي في أحد الملاعب الرياضية من 8 مقاعد. وكل صف من الصفوف التي تليه يتألف من مقعدين أكثر من الصف الذي يسبقه مباشرةً. إذا كان الصف الأخير يتألف من 24 مقعدًا، فما عدد المقاعد التي يتألف منها هذا القسم؟

الحل

أعداد المقاعد في الصفوف تشكل متتالية حسابية، حيث:

$$a_1 = 8, a_n = 24, d = 2$$

لإيجاد عدد المقاعد نجد عدد الصفوف n والتي تمثل عدد حدود المتتالية،

وذلك بالتعويض في $a_n = a_1 + (n-1)d$ نجد أن:

$$24 = 8 + (n-1)(2)$$

$$16 = (n-1)(2)$$

$$8 = n-1$$

$$n = 9$$

(تابع)

أسئلة للتفكير

س: ما المعلومات المعطاة التي تتيح لك إيجاد عدد المقاعد؟

نموذج إجابة:

عدد المقاعد في الصف الأول a_1 ، وعدد المقاعد في الصف الأخير a_n ، والفرق الثابت d ، حيث يمكن إيجاد عدد الصفوف باستعمال هذه المعطيات، ثم إيجاد عدد المقاعد.

س: ما المعلومات التي تحتاج إلى معرفتها لإيجاد عدد المقاعد؟

نموذج إجابة:

نحتاج إلى معرفة عدد المقاعد في الصف الأول وعددها في الصف الأخير والفرق الثابت، أو إلى عدد المقاعد في الصف الأول والفرق الثابت وعدد الصفوف.

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \quad \text{طبّق صيغة مجموع المتسلسلة الحسابية المنتهية}$$

$$S_9 = \frac{9}{2} (8 + 24) \quad \text{عوّض}$$

$$S_9 = 144$$

إذن، العدد الإجمالي للمقاعد في القسم يساوي 144 مقعدًا.

حاول أن تحل التمرين 10

يمكن إيجاد عدد حدود متسلسلة حسابية إذا تجاوز مجموعها قيمة معطاة.

سؤال للتفكير

س: كيف نعرف أن $\sum_{k=1}^n (4k + 4)$ متسلسلة حسابية؟
نموذج إجابة:

المتتالية $a_n = 4n + 4$ متتالية حسابية لأن

$$a_{n+1} - a_n = 4(n+1) + 4 - (4n + 4) = 4$$

وهي قيمة ثابتة.

مثال 3

إيجاد رتبة الحد في متسلسلة حسابية

إذا كان: $\sum_{k=1}^n (4k + 4)$ المجموع الجزئي لمتسلسلة حسابية، أوجد رتبة الحد الذي عنده يكون قد تجاوز مجموع حدودها العدد 465

الحل

أوجد الحدّين a_1 و a_2 بتعويض $k = 1$ و $k = 2$ على التوالي في الحدّ العام للمتسلسلة

$$4k + 4$$

$$a_1 = 4(1) + 4 = 8$$

$$a_2 = 4(2) + 4 = 12$$

$$d = 12 - 8 = 4 \quad \text{الفرق الثابت :}$$

$$d = 4, \quad \text{إذن،}$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

$$465 = \frac{n}{2} [2 \times 8 + (n-1)4]$$

$$930 = n [16 + 4n - 4]$$

$$930 = n [12 + 4n]$$

$$4n^2 + 12n - 930 = 0$$

صيغة مجموع المتسلسلة الحسابية

$$d = 4, a_1 = 8, S_n = 465$$

بسّط

اجمع

بسّط

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 15024$$

$$n_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$n_2 \approx 13.8$$

$$n_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$n_1 \approx -16.8$$

أوجد حلّي المعادلة

بالتعويض

بما أنّ قيمة n صحيحة وموجبة، فإنّ عدد الحدود 14

حاول أن تحل التمرين 15

المتسلسلة الهندسية

المتسلسلة الهندسية هي جمع حدود متتالية هندسية $\{a_n\}$: بحيث يكون مجموعها الجزئي هو:

$$\sum_{i=1}^n a_i$$

نشاط استكشافي 2 إيجاد ناتج الجمع لحدود متتالية هندسية

هدفك في هذا النشاط الاستكشافي هو إيجاد مجموع حدود المتتالية الهندسية: 1, 3, 9, 27, 81, 243، دون استعمال الآلة الحاسبة.

1. اكتب المجموع $S = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243$

2. اكتب المجموع مضروباً في النسبة الثابتة 3

3. اطرح $3S - S$ من خلال طرح الحدود رأسياً.

4. أوجد قيمة S . هل يمكنك استنتاج قاعدة عامة؟

لقد كان بإمكاننا أن نجد المجموع في الاستكشاف السابق بطريقة اعتيادية، أي بطريقة متدرجة، غير أننا نلاحظ أن ضرب مجموع حدود المتتالية في النسبة الثابتة ينتج عنه جمع آخر يشبه المجموع الأصلي، يفترق عنه بحد أو حدين، وهذا ما يجعلنا قادرين على إيجاد قاعدة ثابتة لهذا الجمع تمكننا من الحصول على قيمته مهما ازداد عدد الحدود التي نجمعها.

صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية المنتهية

إذا كانت المتسلسلة الهندسية معرّفة من خلال المتتالية الهندسية $\{a_n\}$ فإن مجموعها الجزئي $\sum_{i=1}^n a_i$ يُعطى بالصيغة:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

حيث a_1 الحد الأول للمتتالية الهندسية و r النسبة الثابتة للمتتالية الهندسية $r \neq 1$ ، و n عدد حدود المتسلسلة الهندسية.

يمكن أيضاً كتابة صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية كما يلي:

$$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}$$

إرشاد

إذا كانت $r = 1$ ، فإن جميع حدود المتتالية الهندسية تكون مساوية لحدّها الأول a_1 ، وبالتالي فإن مجموع أول n حد من حدود المتتالية يكون $S_n = na_1$.

البرهان

$$\begin{aligned}
 S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n \\
 r S_n &= r a_1 + r a_2 + \dots + r a_n \\
 &= a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1} \\
 r S_n - S_n &= (a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1}) - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \\
 &= a_{n+1} - a_1 \\
 S_n(r - 1) &= a_1 r^n - a_1 \\
 S_n &= a_1 \times \frac{r^n - 1}{r - 1} \\
 &= a_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}, r \neq 1
 \end{aligned}$$

مثال 4 مجموع حدود متتالية هندسية

أوجد مجموع حدود المتتالية الهندسية: $4, -\frac{4}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{27}, \dots, 4\left(-\frac{1}{3}\right)^{10}$

الحل

يمكننا ملاحظة أن $a_1 = 4$ وأن $r = -\frac{1}{3}$

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

$$a_n = 4\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$4\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$4\left(-\frac{1}{3}\right)^{10} = 4\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$10 = n - 1$$

$$n = 11$$

صيغة الحد العام

$$r = -\frac{1}{3}$$

بما أن الحد الذي رتبته n هو

فإن،

وبالتالي

مما يعني أن

بتطبيق صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية المنتهية، نجد أن:

$$S_{11} = \frac{4\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{11}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} \approx 3.000016935$$

سؤال للتفكير

نلاحظ أن S_n عدد موجب. هل ثمة عدد m بحيث يكون

S_n عددًا سالبًا؟

نموذج إجابة:

كلا، لاحظ أن

$$S_m = \frac{4\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^m\right)}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}, m \geq 1$$

بما أن القيمة المطلقة للعدد $\left(-\frac{1}{3}\right)^m$ أصغر من واحد وأكبر من صفر، فإن S_m عدد موجب لكل $m \geq 1$.

حاول أن تحل التمرين 17

يمكننا استعمال صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية المنتهية لإيجاد قيمة متغير فيها.

مثال 5 إيجاد قيمة متغير في متسلسلة هندسية

A. إذا كان S_n المجموع الجزئي لمتسلسلة هندسية معرّفة من خلال المتتالية $\{a_n\}$ و $S_{10} = 73\ 810$ والنسبة الثابتة لها $r = -3$ ، أوجد الحد الأول للمتتالية a_1 .

B. متسلسلة هندسية منتهية مجموع حدودها 699 050 وحدّها الأول 2 وحدّها الأخير 524 288، أوجد النسبة الثابتة لها.

الحل

A. صيغة المجموع الجزئي لمتسلسلة هندسية

$$S_{10} = \frac{a_1(1 - (-3)^{10})}{1 - (-3)}$$

عوض $r = -3$ ، $n = 10$

$$73\ 810 = \frac{a_1(1 - 59\ 049)}{4}$$

احسب

$$73\ 810 = -14\ 762 a_1$$

بسط

$$a_1 = -5$$

حل المعادلة

إذن، الحد الأول للمتسلسلة الهندسية $a_1 = -5$

$$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}$$

B. صيغة المجموع الجزئي لمتسلسلة هندسية

$$S_{10} = \frac{a_1 - a_{10} r}{1 - r}$$

عوض $n = 10$

$$699\ 050 = \frac{2 - 524\ 288 \times r}{1 - r} \quad S_{10} = 699\ 050, a_{10} = 524\ 288, a_1 = 2$$

عوض $a_1 = 2$

$$349\ 525 = \frac{1 - 262\ 144 \times r}{1 - r}$$

بالقسمة على العدد 2

$$349\ 525(1 - r) = 1 - 262\ 144r$$

بالضرب التبادلي

$$349\ 524 = 87\ 381r$$

بسط

$$r = \frac{349\ 524}{87\ 381}$$

بالقسمة

$$r = 4$$

حل المعادلة

إذن، النسبة الثابتة $r = 4$

سؤال للتفكير

س: هل تحتاج إلى معرفة مجموع الحدود العشرة الأولى لإيجاد النسبة الثابتة؟

نموذج إجابة:

كلا، لكننا في هذه الحالة سنكون مضطرين إلى إيجاد النسبة الثابتة باستعمال الحد الأول $a_1 = 2$ والحد العاشر $a_{10} = 524\ 288$ وذلك باستعمال القاعدة

$$a_{10} = a_1 r^9$$

$$r^9 = \frac{a_{10}}{a_1}$$

$$r = \sqrt[9]{\frac{a_{10}}{a_1}} = \sqrt[9]{\frac{524\ 288}{2}}$$

$$r = \sqrt[9]{262\ 144}$$

وسنكون مضطرين كذلك إلى استعمال الحاسبة لمعرفة أن $r = 4$

أما بمعرفة مجموع الحدود العشرة، فإن المعادلة التي تعطي قيمة r تصبح جبرية بدلاً من أن تكون معادلة أسية نحتاج إلى استعمال الحاسبة لحلها.

المتسلسلة الهندسية غير المنتهية

إذا أردنا إيجاد مجموع أول n حد من متسلسلة هندسية حدها الأول $a_1 = 3$ والنسبة الثابتة لها $r = \frac{2}{3}$

$$\sum_{k=1}^n 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)}$$

نلاحظ أنه كلما كبرت قيمة n ، اقتربت القيمة $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ من الصفر وبالتالي يقترب المجموع من العدد $3 \times \frac{1-0}{1-\left(\frac{2}{3}\right)} = 9$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = 9$$

هذه الحقيقة نعتبر عنها كما يلي: $\sum_{k=1}^n a_k$ يقترب من قيمة S كلما كبرت قيمة n ، فإننا نعتبر عن القيمة S بما يلي:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

ونسُميها مجموع متسلسلة غير منتهية، وتكون **المتسلسلة متقاربة**. وفي غير تلك الحالة تكون **المتسلسلة متباعدة**.

وبنفس الطريقة يمكن إيجاد صيغة مجموع **متسلسلة هندسية غير منتهية** حدها الأول a_1 ونسبتها الثابتة r كما يلي:

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$$

عندما تكون $|r| < 1$ ، تقترب قيمة r^n من الصفر كلما كبرت قيمة n . ويكون لدينا إذن:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{a_1}{1-r}$$

في هذه الحالة تكون المتسلسلة الهندسية متقاربة.

عندما تكون $|r| > 1$ ، فإن قيمة $|r^n|$ تكبر إلى ما لا نهاية في هذه الحالة تكون المتسلسلة الهندسية متباعدة.

مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية

تكون المتسلسلة الهندسية $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$ ، $a \neq 0$ متقاربة إذا وفقط إذا كانت $|r| < 1$.

ويكون مجموعها

$$S = \frac{a}{1-r}$$

a : الحد الأول

r : النسبة الثابتة

سؤال للتفكير

س: كيف يمكننا أن نثبت تجريبيًا أن

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$$

نموذج إجابة:

يكفي أن نأخذ ورقة بيضاء، ولنفترض أن مساحتها

تساوي 1، ونقسمها إلى نصفين متساويين ونكتب

على أحدهما $\frac{1}{2}$ ، ثم نقسم النصف الآخر إلى نصفين

متساويين ونكتب على أحدهما $\frac{1}{4}$ ، ونتابع هذه العملية

عدة مرات.

نقوم، بعد ذلك، بتجميع هذه القصاصات لإعادة تكوين

الورقة الأصلية قبل تقسيمها، وعندئذ سنلاحظ أن الورقة

(التي مساحتها تساوي 1) تساوي مجموع كل أجزائها،

أي أن

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

وبالتالي فإن $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$

مثال 6

إيجاد مجموع متسلسلة هندسية غير منتهية متقاربة

لكل مما يلي يتن ما إذا كانت المتسلسلة متقاربة، ثم أوجد مجموعها إذا كانت متقاربة.

A. $\sum_{k=1}^{\infty} 3(0.75)^{k-1}$

B. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-4}{5}\right)^{k-1}$

C. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^k$

الحل

A. هذه المتسلسلة غير المنتهية هي مجموع حدود متتالية هندسية حذها الأول

$$a = 3 \text{ ونسبتها الثابتة } r = 0.75$$

بما أن $|r| = 0.75 < 1$ ، فإن المتسلسلة هي متسلسلة هندسية غير منتهية ومتقاربة،

إذن:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{a}{1-r} \quad \text{مجموع المتسلسلة الهندسية المتقاربة}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 3(0.75)^{k-1} = \frac{3}{1-0.75} \quad \text{عوض}$$

$$= 12 \quad \text{بسط}$$

إذن، مجموع هذه المتسلسلة يساوي 12

B. هذه المتسلسلة غير المنتهية هي مجموع حدود متتالية هندسية حذها الأول $a_1 = 1$

$$\text{ونسبتها الثابتة } r = \frac{-4}{5}$$

بما أن $|r| = \left|\frac{-4}{5}\right| = \frac{4}{5} < 1$ ، فإن المتسلسلة هي متسلسلة هندسية غير منتهية ومتقاربة. إذن،

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{a}{1-r} \quad \text{مجموع المتسلسلة الهندسية المتقاربة}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-4}{5}\right)^{k-1} = \frac{1}{1-\left(\frac{-4}{5}\right)} \quad \text{عوض}$$

$$= \frac{5}{9} \quad \text{بسط}$$

إذن، مجموع هذه المتسلسلة يساوي $\frac{5}{9}$

(تابع)

C. هذه المتسلسلة غير المنتهية هي مجموع حدود متتالية هندسية حذها الأول

$$a_1 = \frac{\pi}{2} \text{ ونسبتها الثابتة } r = \frac{\pi}{2}$$

بما أن $|r| = \frac{\pi}{2} > 1$ ، إذن المتسلسلة متباعدة.

إذن، مجموع هذه المتسلسلة يكبر إلى المالا نهاية.

حاول أن تحل التمرين 27

يمكننا استعمال المتسلسلات الهندسية غير المنتهية لإعادة كتابة الأعداد العشرية الدورية في صورة كسور اعتيادية.

مثال 7

كتابة كسر عشري دوري في صورة كسر اعتيادي

A. اكتب $0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 \dots$ في صورة كسر اعتيادي.

B. اكتب $0.583333\dots$ في صورة كسر اعتيادي.

C. اكتب $0.234234234\dots$ في صورة كسر اعتيادي.

الحل

A. يشكّل المجموع متسلسلة هندسية لامتناهية حدها الأول $a = 0.1$

والنسبة الثابتة فيها هي $r = 0.1 = \frac{1}{10} < 1$

بما أن $|r| = \frac{1}{10}$ ، نستعمل صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية المتقاربة:

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{9}$$

B. نعيد كتابة هذا العدد كما يلي:

$$0.58333 \dots = 0.58 + 0.003 + 0.0003 + 0.00003 + 0.000003 + \dots$$

$$= \frac{58}{100} + (0.003 + 0.0003 + 0.00003 + \dots)$$

المجموع بين القوسين هو لحدود متسلسلة هندسية غير منتهية حدها الأول

$$a = 0.003 \text{ والنسبة الثابتة لها } r = \frac{0.0003}{0.003} = \frac{1}{10}$$

بما أن $|r| = \frac{1}{10} < 1$ فإننا نستعمل صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية المتقاربة:

$$S = \frac{a}{1-r} \text{ صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية المتقاربة}$$

(تابع)

إرشاد

يمكن كتابة الكسر العشري الدوري $0.234234\dots$ بطريقة النقاط $0.2\bar{3}4$ أو بالشرطة 0.234 حيث يتم وضع شرطة للدلالة على الأرقام الدورية.

سؤال للتفكير

س: هل يمكنك إيجاد الكسر الاعتيادي المكافئ للعدد الكسري $2.342342342\dots$ ؟
نموذج إجابة:

نعم، هذا العدد يساوي $2.342342342 \times 10 \dots$
أي أنه يساوي $\frac{260}{111} \times 10 = \frac{2600}{111}$

متابعة

أسأل الطلاب ما إذا كانت هناك متسلسلة حسابية غير منتهية متقاربة؟
نموذج إجابة:

فقط عندما تكون قيم كل حدودها 0، أي أن الحد الأول 0 والفرق الثابت 0 أيضًا.

ملاحظات على التمارين

التمارين 8-15، تبيّن وتشرح المفاهيم المتعلقة بالمتسلسلات الحسابية.

التمارين 16-34، تبيّن وتشرح المفاهيم المتعلقة بالمتسلسلات الهندسية، والمتسلسلات الهندسية غير المنتهية المتقاربة وما يتعلق بها من إيجاد صورة الكسر الاعتيادي لعدد معين.

التمارين 42-45، تدرب الطالب على أنماط من الاختبارات.

التقييم المستمر

التقييم الذاتي:

التمارين 8، 10، 15، 19، 22، 29، 34

$$S = \frac{0.003}{1 - \frac{1}{10}} \quad \text{عوض } r = \frac{1}{10}, a = 0.003$$

$$S = \frac{0.003 \times 10}{9} \quad \text{احسب}$$

$$= \frac{1}{300} \quad \text{بسط}$$

$$\frac{58}{100} + \frac{1}{300} = \frac{175}{300} = \frac{7}{12} \quad \text{إذن، الكسر الاعتيادي للعدد ... 0.58333 يساوي:}$$

$$0.58333 \dots = \frac{7}{12} \text{ أي}$$

C. يمكن كتابة هذا العدد في صورة مقدار جمع:

$$0.234 + 0.000234 + 0.000000234 + \dots$$

$$= \frac{234}{1000} + \frac{234}{1000^2} + \frac{234}{1000^3} + \dots$$

$$= \frac{234}{1000} + \left(1 + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000^2} \dots \right)$$

يشكل المجموع بين القوسين متسلسلة هندسية غير منتهية حدها الأول $a = 1$

$$\text{والنسبة الثابتة لها } r = \frac{1}{1000}$$

بما أن $|r| = \frac{1}{1000}$ فإننا نستعمل صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية المتقاربة:

$$S = \frac{a}{1-r}$$

$$= \frac{234}{1000} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{1000}} \right) = \frac{234}{1000} \times \frac{1000}{999} = \frac{234}{999} = \frac{26}{111}$$

$$\text{إذن، } 0.234234234\dots = \frac{26}{111}$$

حاول أن تحل التمرين 34

مراجعة سريعة 1.4

في التمارين 6-8، أوجد مجموع حدود المتتالية الحسابية.

6. $-7, -3, 1, 5, 9, 13$ $S_6 = 18$

7. $-8, -1, 6, 13, 20, 27$ $S_6 = 57$

8. $8, 3, -2, -7, -12, -17$ $S_6 = -27$

في التمرينين 9 و 10، أوجد مجموع حدود المتتالية الهندسية.

9. $3, 6, 12, 24, 48, 96$ $S_6 = 189$

10. $5, 15, 45, 135, 405, 1215$ $S_6 = 1820$

في التمارين 1-5، اكتب المجموع باستعمال رمز المجموع، على افتراض أن النمط يستمر بنفس الطريقة.

1. $-7 - 1 + 5 + 11 + \dots + 53 + (6n - 13)$ $\sum_{i=1}^n 6i - 13$

2. $2 + 5 + 8 + 11 + \dots + 29 + (3n - 1)$ $\sum_{i=1}^n 3i - 1$

3. $1 + 4 + 9 + \dots + (n + 1)^2$ $\sum_{i=0}^n (i + 1)^2$

4. $1 + 8 + 27 + \dots + (n + 1)^3$ $\sum_{i=0}^n (i + 1)^3$

5. $6 - 12 + 24 - 48 + \dots + 6(-2)^{n-1}$ $\sum_{i=1}^n 6(-2)^{i-1}$

التمارين

الدرس 1.4

19. $42, -7, \frac{7}{6}, \dots, 42\left(-\frac{1}{6}\right)^8$ $S_9 \approx 36$

في التمارين 20-23، حدّد ما إذا كانت المتتالية حسابية أم هندسية، ثم أوجد مجموع الحدود n الأولى من المتتالية.

20. $2, 5, 8, \dots, n = 10$ $S_{10} = 155$ متتالية حسابية،

21. $14, 8, 2, \dots, n = 9$ $S_9 = -90$ متتالية حسابية،

22. $4, -2, 1, \frac{1}{2}, \dots, n = 12$ $S_{12} \approx 2.7$ متتالية هندسية،

23. $6, -3, \frac{3}{2}, \frac{-3}{4}, \dots, n = 11$ $S_{11} \approx 4$ متتالية هندسية،

24. إذا كان S_n المجموع الجزئي لمتسلسلة هندسية و $S_{15} = 43\ 692$ والنسبة الثابتة لها $r = -2$ ، أوجد حدّها الأول a_1 .

25. متسلسلة هندسية منتهية مجموع حدودها 65 535 وحدّها

الأول 3 وحدّها الأخير 49 152، أوجد النسبة الثابتة لها. $r = 4$

في التمارين 26-31، حدّد ما إذا كانت المتسلسلة الهندسية متقاربة. إذا كانت كذلك، أوجد مجموعها.

26. $6 + 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \dots$ $r = \frac{1}{2} < 1$, $S = \frac{a}{1-r} = 12$

27. $4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \dots$ $r = \frac{1}{3} < 1$, $S = \frac{a}{1-r} = 6$

28. $\frac{1}{64} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \dots$ $r = 2 > 1$ متسلسلة متباعدة،

29. $\frac{1}{48} + \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{9}{16} + \dots$ $r = 3 > 1$ متسلسلة متباعدة،

30. $\sum_{j=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{4}\right)^j$ $r = \frac{1}{4} < 1$, $S = \frac{a}{1-r} = 1$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} 5\left(\frac{2}{3}\right)^n$ $r = \frac{2}{3} < 1$, $S = \frac{a}{1-r} = 10$

في التمارين 32-34، اكتب الكسر العشري الدوري في صورة كسر اعتيادي.

32. $0.\overline{52}$

33. $0.4\overline{53}$

34. $3.01\overline{37}$

في التمارين 1-7، أوجد قيمة المجموع.

1. $\sum_{k=1}^6 (3k-1)$ $S_6 = 57$

2. $\sum_{k=1}^3 (2k^2-1)$ $S_3 = 25$

3. $\sum_{k=1}^4 \frac{k}{k^2+1}$ $S_4 = \frac{122}{85}$

4. $\sum_{i=3}^6 \frac{i(i+1)}{2}$ $S_6 = 52$

5. $\sum_{k=1}^5 \frac{1}{k(k+1)}$ $S_5 = \frac{5}{6}$

6. $\sum_{k=1}^3 \frac{2k}{k+3}$ $S_3 = 2.3$

7. $\sum_{k=4}^6 \frac{2k-6}{k}$ $S_6 = 2.3$

في التمرينين 8 و 9، أوجد مجموع حدود المتتالية الحسابية، بدلالة عدد الحدود وقيم a_1 و a_n المعطاة:

8. عشرة حدود، $a_{10} = 31$, $a_1 = 4$ $S_{10} = \frac{10}{2}(4+31) = 175$

9. خمسة عشر حدًا، $a_{15} = 129$, $a_1 = 17$ $S_{15} = \frac{15}{2}(17+129) = 1\ 095$

في التمارين 10-13، أوجد مجموع حدود كل من المتتاليات الحسابية.

10. $1, 2, 3, 4, \dots, 80$ $n = 80$, $S_{80} = \frac{80}{2}(1+80) = 3\ 240$

11. $2, 4, 6, 8, \dots, 70$ $n = 35$, $S_{35} = \frac{35}{2}(2+70) = 1\ 260$

12. $117, 110, 103, \dots, 33$ $n = 13$, $S_{13} = \frac{13}{2}(117+33) = 975$

13. $111, 108, 105, \dots, 27$ $n = 29$, $S_{29} = \frac{29}{2}(111+27) = 2\ 001$

14. في المتسلسلة التالية: $17 + 20 + 23 \dots$ أوجد رتبة الحد الذي عنده يكون المجموع الجزئي قد تجاوز العدد 678

15. في المتسلسلة التالية: $-18 - 11 - 4 \dots$ أوجد رتبة الحد الذي عنده يكون المجموع الجزئي قد تجاوز العدد 2 335

في التمارين 16-19، أوجد مجموع حدود المتتالية الهندسية.

16. $3, 6, 12, \dots, 12\ 288$ $S_{13} = 24\ 573$

17. $5, 15, 45, \dots, 98\ 415$ $S_{10} = 147\ 620$

18. $42, 7, \frac{7}{6}, \dots, 42\left(\frac{1}{6}\right)^8$ $S_9 \approx 50.4$

35. يريد المهندس أحمد بناء الدرج المؤدي إلى البناء الرئيسي



لإحدى المدارس. يتألف الدرج من عشر درجات. يلزم لبناء الدرجة العليا 8 قطع إسمنتية، ولبناء الدرجة السفلى 80 قطعة إسمنتية. إذا كانت أعداد هذه القطع الإسمنتية تشكل متتالية حسابية، أوجد مجموع عدد القطع الإسمنتية التي يحتاج إليها المهندس أحمد لبناء الدرج.

36. مجموع الحدود العشرة الأولى لمتتالية حسابية يساوي 210، ومجموع حدودها العشرة الثانية يساوي 610، أوجد حدها الأول وفرقها الثابت.

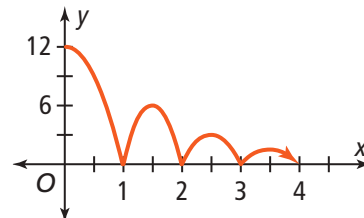
37. **فرقة الاستعراض** تبدأ فرقة الاستعراض المدرسية استعراضها بتشكيل مجسم هرمي الشكل. يقف أحد أعضاء الفرقة في رأس الهرم، وخمسة آخرون في الصف الثالث.

a. اكتب صيغة المجموع الجزئي للمتسلسلة الحسابية التي تعبر عن تزايد عدد الواقفين في صفوف الاستعراض، من صف إلى الصف الذي يليه مباشرة.

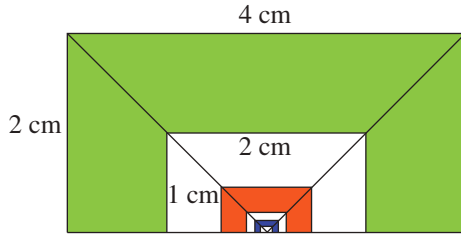
b. إذا كان عدد صفوف الشكل الهرمي ثمانية صفوف، أوجد مجموع عدد المشاركين في هذا الاستعراض.

38. **في المختبر** في أحد الاختبارات العلمية، تشكل أعداد البكتيريا المتكاثرية من يوم إلى آخر متتالية هندسية. إذا كان عدد البكتيريا في اليوم الأول 100، وأصبح عددها في اليوم الثامن 12 800 أوجد عدد البكتيريا في اليوم الرابع.

39. **الكرة** يُسقط ماهر كرة مطاطية من ارتفاع 12 ft، وكانت في كل مرة تصطدم فيها الكرة بالأرض ترتد إلى 50% من الارتفاع السابق. أوجد مجموع المسافات الرأسية التي ستقطعها نزولاً و صعوداً عند ارتطامها بسطح الأرض للمرة الرابعة، ثم أوجد إجمالي المسافات الرأسية المقطوعة في ارتداداتها حتى يتوقف ارتداد الكرة.



40. رُسم مستطيل أطوال أبعاده 4 في 2 ثم رُسم في داخله مستطيل آخر أطوال أبعاده 2 في 1 كما هو مبين في الشكل أدناه. ثم تكرر هذا الإجراء عددًا من المرات ثم تمّ تلوين قسم من كل ثاني مستطيل كما هو مبين في الشكل أدناه.



a. أوجد المساحة الإجمالية للمناطق الملونة في الشكل.

b. إذا تمّ تكرار هذا الإجراء عددًا غير منتهٍ من المرات، أوجد المساحة الإجمالية للمناطق الملونة.

41. **تربية النحل** يربي إبراهيم النحل في بستانه.



كان عدد النحلات في الأسبوع الأول من فصل الربيع 175 نحلة، وفي الأسبوع الثاني 203، وفي الأسبوع الثالث 231، وفي الأسبوع الرابع 259 نحلة. لنفترض أن تعداد النحل

سيستمرّ ازديادًا بنفس الوتيرة في فصل الربيع.

a. اكتب الحد العام لهذه المتتالية.

b. إذا كانت كتلة النحلة الواحدة 1.5 جرامًا، أوجد كتلة كل النحلات في نهاية الأسبوع الثاني عشر.

c. عندما يصل عدد النحلات إلى 1 015، تصبح خلية النحل غير كافية لها مجتمعة. بعد مرور كم أسبوع سيضطر إبراهيم لتوسعة خلية النحل؟ برّر إجابتك.

أسئلة اختبار معيارية

47. **الكتابة للتعلم** إذا كانت $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ متتاليتين هندسيتين،

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k \right)$$
 هل يكون:

توسيع الأفكار

48. **متتالية ومتسلسلة فيبوناتشي** أكمل الجدول أدناه، حيث F_n هو الحد الذي رتبته n من متتالية فيبوناتشي، و S_n هو المجموع الجزئي الذي رتبته n من متسلسلة فيبوناتشي. ضع تخمينًا بالاعتماد على المؤشر العددي في الجدول.

$$S_n = \sum_{k=1}^n F_k$$

n	F_n	S_n	$F_{n+2} - 1$
1	1		
2	1		
3	2		
4			
5			
6			
7			
8			
9			

49. **الأعداد المثلثية** الأعداد التي تُكتب في الصورة

$1 + 3 + \dots + n$ تسمى أعدادًا مثلثية لأنها تسمح بإيجاد الأعداد في المصفوفات المثلثية كما في الشكل أدناه:

○	○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○ ○
	○	○ ○	○ ○ ○	○ ○ ○ ○
		○	○ ○	○ ○ ○
			○	○ ○
				○
1	3	6	10	15

a. اشرح لماذا يوضح الرسم أدناه أن العدد المثلثي الذي رتبته n يمكن كتابته بالصيغة $\frac{n(n+1)}{2}$

○	○	○	○	○	●
○	○	○	○	●	●
○	○	○	●	●	●
○	○	●	●	●	●
○	●	●	●	●	●

b. أثبت الصيغة السابقة جبريًا باستعمال مجموع المتتالية الحسابية المنتهية.

42. **صواب أم خطأ** في المتتالية $\{a_n\}$ والتي تمثل الأعداد الفردية:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2, n \geq 2 \end{cases}$$

المجموع لأول 31 حد فيها $S_n = 961$. برّر إجابتك.

43. **صواب أم خطأ** إن مجموع الأعداد الكلية، التي هي من مضاعفات العدد 3 والواقعة بين 1 و 500 يساوي 41 583، برّر إجابتك.

44. **اختيار من متعدد** $3^{-1} + 3^{-2} + 3^{-3} + \dots + 3^{-n} + \dots =$

- A. $\frac{1}{2}$
B. $\frac{1}{3}$
C. $\frac{2}{3}$
D. $\frac{3}{2}$

45. **اختيار من متعدد** إذا كانت $\sum_{k=1}^{\infty} x^k = 4$ فإن قيمة x تساوي: D

- A. 0.2
B. 0.25
C. 0.4
D. 0.8

استكشاف

46. **الكتابة للتعلم** قرر مجلس إدارة إحدى المدارس أن يشتري هذه السنة 90 حاسوبًا محمولًا ليستعملها الطلاب، كما قرر أن يشتري كل سنة 40 حاسوبًا محمولًا جديدًا. قرر المجلس أيضًا وجوب أن يكون كل طالب في المدرسة قد حصل على حاسوبه الخاص مع انقضاء السنوات العشر القادمة. إذا كان عدد طلاب هذه المدرسة 500، هل هدف المجلس قابل للتحقيق؟

إجابات أسئلة التمارين 1.4

36. $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

$$S_{10} = 5(2a_1 + 9d)$$

$$42 = 2a_1 + 9d \quad (1)$$

$$S_{20} - S_{10} = 610$$

$$S_{20} = 210 + 610 = 820$$

$$S_{20} = 10(2a_1 + 19d)$$

$$82 = 2a_1 + 19d \quad (2)$$

بحل المعادلتين (1) و (2) نحصل على قيمة كل من a_1 و d

$$d = 4, a_1 = 3$$

37. a. $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$a_3 = a_1 + (3-1)d$$

$$5 = 1 + 2d$$

$$2 = d$$

$$S_n = n^2$$

b. $S_8 = 8^2 = 64$

38. $a_n = a_1 \times r^{n-1}$

$$12\,800 = 100 \times r^7$$

$$128 = r^7$$

$$2 = r$$

$$a_4 = 800$$

39. مجموع المسافات الرأسية التي ستقطعها نزولاً وصعوداً عند ارتطامها بسطح الأرض للمرة الرابعة هو:

$$12 + 2 \times (6 + 3 + 1.5) = 33$$

إجمالي المسافات الرأسية المقطوعة حتى يتوقف ارتداد الكرة هو: $S = 12 + 2 \times \frac{a}{1-r} = 12 + 2 \times \frac{6}{1-\frac{1}{2}} = 36$ أي 36 ft

14. $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = 678$

$$1.5n^2 + 15.5n - 678 = 0$$

$$n_1 \approx -27.04 \text{ و } n_2 \approx 16.71$$

بما أن قيمة n صحيحة وموجبة، فإن عدد الحدود 17

15. $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = 2\,335$

$$3.5n^2 - 21.5n - 2\,335 = 0$$

$$n_1 \approx -22.94 \text{ و } n_2 \approx 29.08$$

بما أن قيمة n صحيحة وموجبة، فإن عدد الحدود 30

32. $0.\overline{52} = 0.52 + 0.0052 + 0.000052 + \dots$

$$0.\overline{52} = \frac{52}{100} \left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \dots \right)$$

$$0.\overline{52} = \frac{52}{100} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{100} \right)^{i-1} \right) = \frac{52}{100} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{52}{99}$$

33. $0.4\overline{53} = 0.4 + 0.053 + 0.00053 + 0.0000053 + \dots$

$$0.4\overline{53} = \frac{4}{10} + \frac{53}{1\,000} \left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10\,000} + \dots \right)$$

$$0.4\overline{53} = \frac{4}{10} + \frac{53}{1\,000} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{100} \right)^{i-1} \right) = \frac{4}{10} + \frac{53}{1\,000} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{449}{990}$$

34. $3.01\overline{37} = 3 + 0.01 + 0.0037 + 0.000037 + \dots$

$$3.01\overline{37} = 3 + \frac{1}{100} + \frac{37}{10\,000} \left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10\,000} + \dots \right)$$

$$3.01\overline{37} = 3 + \frac{1}{100} + \frac{37}{10\,000} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{100} \right)^{i-1} \right)$$

$$= 3 + \frac{1}{100} + \frac{37}{10\,000} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{29\,836}{9\,900} = \frac{7\,459}{2\,475}$$

35. $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{10}{2}(8 + 80) = 440$

لبناء الدرج يحتاج المهندس إلى 440 قطعة إسمنتية.

48.

n	F_n	S_n	$F_{n+2} - 1$
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	4	4
4	3	7	7
5	5	12	12
6	8	20	20
7	13	33	33
8	21	54	54
9	34	88	88

نستنتج أن $S_n = F_{n+2} - 1$

49. a. نلاحظ أن عدد الأعمدة هو $n + 1$ وعدد الصفوف هو n ، وبالتالي فإن

عدد النقاط هو $n(n + 1)$ ، وبما أن العدد المثلثي هو عدد النقاط البيضاء فقط فهذا يعني أن $\frac{n(n+1)}{2}$

b. الأعداد الصحيحة تكون متتالية حسابية، والأعداد المثلثية هي

جمع لحدود متتالية الأعداد الصحيحة، أي أن:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2 \times 1 + (n-1) \times 1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

40. a. المساحة الإجمالية للمناطق الملونة تشكل متسلسلة هندسية

$$\sum_{i=1}^n 8 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{i-1}$$

حسب الشكل، المساحة الإجمالية الملونة تساوي

$$S_6 = \frac{a_1 - a_6 r}{1 - r} = \frac{8 - \left(-\frac{1}{128}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)}$$

أي $S_6 = 6.4 \text{ cm}^2$ تقريباً.

b. المتسلسلة الهندسية التي تمثل المساحة الإجمالية هي متسلسلة

متقاربة، وذلك لأن $|r| < 1$ وبالتالي فإن $S = \frac{a}{1-r} = 6.4$

41. a. إنها متتالية حسابية حدّها العام $a_n = 147 + 28n$

b. في نهاية الأسبوع الثاني عشر يكون عدد النحلات $a_{12} = 483$

وبالتالي فإن كتلة كل النحلات تساوي $483 \times 1.5 = 724.5$

أي 724.5 جرام.

c. $1015 = 175 + (n-1)28$ ، وهذا يعني أن إبراهيم سيضطر

لتوسعة القفبر في نهاية الأسبوع 31

42. صواب؛ مجموع حدود المتتالية الحسابية $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

إذا كانت $n = 31$ يساوي $961 = \frac{31}{2}(2 + 30 \times 2)$

43. صواب، الحد الأول يساوي 3 والحد الأخير يساوي 498:

$$a_n = 3 + 3(n-1), 498 = 3n, n = 166$$

إذن مجموع الأعداد الكلية بين 1 و 500 التي هي مضاعفات العدد 3:

$$S_{166} = \frac{166}{2}(3 + 498) = 41\,583$$

$$46. \begin{cases} a_1 = 90 \\ a_n = a_{n-1} + 40, n \geq 2 \end{cases}$$

$$a_{10} = 450$$

الهدف غير قابل للتحقيق لأن $450 < 500$

47. إذا كانت $\{a_n\}$ متتالية هندسية النسبة الثابتة فيها هي r

وكانت $\{b_n\}$ متتالية هندسية النسبة الثابتة فيها هي R

فإن المتتالية $\{a_n b_n\}$ متتالية هندسية النسبة الثابتة فيها هي $r \times R$

وبالتالي:

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \frac{a_1 b_1 - a_n b_n rR}{1 - rR}$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}$$

$$\sum_{k=1}^n b_k = \frac{b_1 - b_n R}{1 - R}$$

نستنتج من ذلك أن

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \frac{a_1 b_1 - a_n b_n rR}{1 - rR} \neq \left(\sum_{k=1}^n a_k\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k\right)$$

الوحدة 1 مراجعة الوحدة

في التمرينين 1 و 2، أوجد الحدود الست الأولى والحد الأربعين من المتتالية.

$$1. a_n = \frac{n^2 - 1}{n + 1}$$

$$2. b_k = \frac{(-2)^k}{k + 1}$$

في التمارين 3-7، أوجد الحدود الست الأولى والحد الثاني عشر من المتتالية.

$$3. \begin{cases} a_1 = -1 \\ a_n = a_{n-1} + 3, n \geq 2 \end{cases}$$

4. متتالية حسابية فيها $a_1 = -5$ و $d = 1.5$

5. متتالية هندسية فيها $a_1 = 3$ و $r = \frac{1}{3}$

$$6. \begin{cases} v_1 = -3 \\ v_2 = 1 \\ v_k = v_{k-2} + v_{k-1}, k \geq 3 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} w_1 = -3 \\ w_2 = 2 \\ w_k = w_{k-2} + w_{k-1}, k \geq 3 \end{cases}$$

في التمارين 8-11، المتاليات هي إما حسابية وإما هندسية. أوجد الحد العام. حدّ الفرق الثابت أو النسبة الثابتة.

$$8. 1, -1, 1, -1, 1, \dots$$

$$9. 10, 12, 14.4, 17.28$$

$$10. \frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1, \dots$$

$$11. \begin{cases} a_1 = -11 \\ a_n = a_{n-1} + 4.5, n \geq 2 \end{cases}$$

12. الحدّان الرابع والتاسع من متتالية هندسية هما 192- و 608 على التوالي. أوجد حدّها العام.

13. الحدّ الرابع من متتالية حسابية هو 17 والحدّ السابع هو 5 أمثال الحدّ الثاني. أوجد حدّها العام.

في التمرينين 14 و 15، أوجد مجموع حدود المتتالية الحسابية.

$$14. 13, 9, 5, 1, -3, -7, -11$$

$$15. 2.5, -0.5, -3.5, \dots, -75.5$$

في التمرينين 16 و 17، أوجد مجموع حدود المتتالية الهندسية.

$$16. 4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots$$

$$17. 2, 6, 18, \dots, 39366$$

في التمرينين 18 و 19، أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتالية الحسابية أو الهندسية.

$$18. 2187, 729, 243, \dots$$

$$19. 94, 91, 88, \dots$$

في التمرينين 20 و 21، مثلّ المتتالية بيانيًا.

$$20. a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$$

$$21. a_n = 2n^2 - 1$$

22. **فائدة** يضع جاسم مبلغ \$150 نهاية كل شهر في حساب

مصرفي يعود عليه بفائدة مركبة شهرية 8%

في نهاية السنة العاشرة يكون رصيده في الحساب، بالدولار:

$$150 \left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^0 + 150 \left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^1 + \dots + 150 \left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^{119}$$

استعمل صيغة مجموع حدود متتالية هندسية منتهية لإيجاد الرصيد.

في التمارين 23-26، حدّد ما إذا كانت المتسلسلة الهندسية متقاربة.

إذا كانت كذلك، أوجد مجموعها.

$$23. \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

$$24. \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^i$$

$$25. \sum_{k=0}^{\infty} 5 \left(\frac{6}{5}\right)^k$$

$$26. \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-3n}$$

في التمارين 27-32، اكتب الكسر العشري الدوري في صورة كسر اعتيادي.

$$27. 0.\overline{768}$$

$$28. 0.\overline{51}$$

$$29. 0.\overline{791}$$

$$30. 4.\overline{028}$$

$$31. 0.\overline{467}$$

$$32. 2.\overline{853}$$

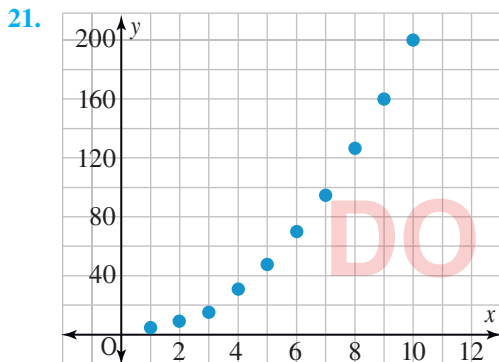
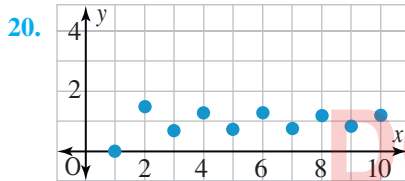
17. $S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}$

$S_{10} = \frac{2 - (39366)(3)}{1 - 3} = 59\,048$

18. $a_{10} = 2187 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

$S_{10} = \frac{a_1 - a_{10}r}{1 - r} = \frac{2187 - \left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)} \approx 3280.44$

19. $S_{10} = \frac{10}{2}(2 \times 94 + 9 \times (-3)) = 805$



22. $S_{120} = \frac{150 - 150\left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^{119} \left(1 + \frac{0.08}{12}\right)}{1 - \left(1 + \frac{0.08}{12}\right)} = \$27\,441.9$

23. المتسلسلة متقاربة، $S = \frac{3}{2}$

24. المتسلسلة الهندسية متقاربة لأن $|r| = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 1$ ، $S \approx 1.36$

25. المتسلسلة الهندسية متباعدة لأن $|r| = \left(\frac{6}{5}\right) > 1$

26. المتسلسلة الهندسية متقاربة لأن $|r| = \left(\frac{1}{8}\right) < 1$ ، $S = \frac{8}{7}$

27. $0.\overline{768} = 0.768 + 0.000768 + 0.000000768 + \dots$

$0.\overline{768} = \frac{768}{1000} \left(1 + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000000} + \dots\right)$

$0.\overline{768} = \frac{768}{1000} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1000}^{i-1}\right) = \frac{768}{1000} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{768}{999} = \frac{256}{333}$

28. $0.\overline{51} = 0.51 + 0.0051 + 0.000051 + \dots$

$0.\overline{51} = \frac{51}{100} \left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \dots\right)$

$0.\overline{51} = \frac{51}{100} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{100}^{i-1}\right) = \frac{51}{100} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{51}{99} = \frac{17}{33}$

1. $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 4, a_6 = 5, a_{40} = 39$

2. $b_1 = -1, b_2 = \frac{4}{3}, b_3 = -2, b_4 = \frac{16}{5}, b_5 = -\frac{16}{3}, b_6 = \frac{64}{7}, b_{40} = 26\,817\,356\,775$

3. $a_1 = -1, a_2 = 2, a_3 = 5, a_4 = 8, a_5 = 11, a_6 = 14, a_{12} = 32$

4. $a_1 = -5, a_2 = -3.5, a_3 = -2, a_4 = -0.5, a_5 = 1, a_6 = 2.5, a_{12} = 11.5$

5. $a_1 = 3, a_2 = 1, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{9}, a_5 = \frac{1}{27}, a_6 = \frac{1}{81}, a_{12} = \frac{1}{59\,049}$

6. $v_1 = -3, v_2 = 1, v_3 = -2, v_4 = -1, v_5 = -3, v_6 = -4, v_{12} = -76$

7. $w_1 = -3, w_2 = 2, w_3 = -1, w_4 = 1, w_5 = 0, w_6 = 1, w_{12} = 13$

8. متتالية هندسية. النسبة الثابتة: $r = -1$
الحد العام: $a_n = 1 \times (-1)^{n-1}$

9. متتالية هندسية. النسبة الثابتة: $r = 1.2$
الحد العام: $a_n = 10 \times (1.2)^{n-1}$

10. متتالية هندسية. النسبة الثابتة: $r = -2$
الحد العام: $a_n = \frac{1}{8} \times (-2)^{n-1}$

11. متتالية حسابية. الفرق الثابت: $d = 4.5$
الحد العام: $a_n = 4.5n - 15.5$

12. $a_9 = a_4 \times (r)^{9-5}, r = -4, a_1 = 3, a_n = 3 \times (-4)^{n-1}$

13. $a_7 = a_4 + 3d, a_7 = a_2 + 5d, a_7 = 5a_2 = 17 + 3d,$

$5a_2 = a_2 + 5d, d = \frac{4}{5}a_2$

$d = \frac{68}{13}, a_1 = \frac{17}{13}, a_n = \frac{68}{13}n - \frac{51}{13}$

14. $n = 7, S_7 = \frac{7}{2}((13 + -11)) = 7$

15. $a_n = a_1 + (n-1)d$

$-75.5 = 2.5 + (n-1)(-3)$

$n = 27$

$S_{27} = \frac{27}{2}(2(2.5) + (26)(-3)) = -985.5$

16. $S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}$

$S_6 = \frac{4 - \left(-\frac{1}{8}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = 2.625$

الوحدة 1 الإجابات

29. $0.79\overline{1} = 0.79 + 0.001 + 0.0001 + \dots$

$$0.79\overline{1} = 0.79 + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \dots$$

$$\begin{aligned} 0.79\overline{1} &= 0.79 + \frac{1}{1000} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{10}^{i-1} \right) \\ &= 0.79 + \frac{1}{1000} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{712}{900} = \frac{178}{225} \end{aligned}$$

30. $4.0\overline{28} = 4 + 0.028 + 0.00028 + 0.0000028 + \dots$

$$\begin{aligned} 4.0\overline{28} &= 4 + \frac{28}{1000} + \frac{28}{100000} + \frac{28}{10000000} + \dots \\ &= 4 + \frac{28}{1000} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{3988}{990} = \frac{1994}{495} \end{aligned}$$

31. $0.4\overline{67} = 0.4 + 0.067 + 0.00067 + \dots$

$$\begin{aligned} 0.4\overline{67} &= 0.4 + \frac{67}{1000} + \frac{67}{100000} + \dots \\ &= 0.4 + \frac{67}{1000} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{463}{990} \end{aligned}$$

32. $2.\overline{853} = 2 + 0.853 + 0.000853 + 0.000000853 + \dots$

$$\begin{aligned} 2.\overline{853} &= \frac{853}{1000} \left(1 + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000000} + \dots \right) \\ 0.\overline{853} &= 2 + \frac{853}{1000} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1000}^{i-1} \right) \\ &= 2 + \frac{853}{1000} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{2851}{999} \end{aligned}$$

الوحدة 1 تقويم

1. أوجد الحدود الست الأولى والحد الثاني عشر من المتتالية:

$$\begin{cases} b_1 = 5 \\ b_k = 2b_{k-1}, k \geq 2 \end{cases}$$

في التمرينين 2 و 3 المتتاليات هي إمّا حسابية وإمّا هندسية. أوجد الحد العام. حدّد الفرق الثابت أو النسبة الثابتة.

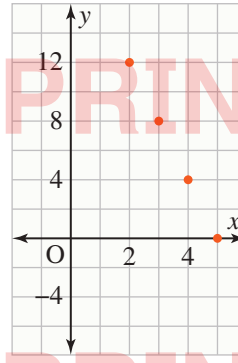
2. $-5, -1, 3, 7, \dots$

3. $\begin{cases} b_1 = 7 \\ b_n = \frac{1}{4} b_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$

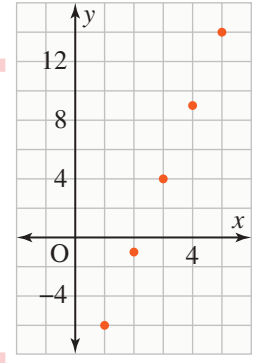
في التمارين 4-6، أوجد الصيغة الارتدادية وصيغة الحد العام لكل متتالية حسابية.

4. $-15, -6, 3, 12, 21, \dots$

5.



6.



في التمرينين 7 و 8، أوجد الصيغة الارتدادية وصيغة الحد العام لكل متتالية هندسية.

7. $1, -3, 9, -27, \dots$

8. $24, 8, \frac{8}{3}, \frac{8}{9}, \dots$

في التمارين 9-11، أوجد مجموع حدود المتتالية الحسابية.

9. 10 حدود، $a_1 = 4, a_{10} = 31$

10. 15 حدًا، $a_1 = 17, a_{15} = 129$

11. $\sum_{n=1}^{12} \left(\frac{n}{2} - 9 \right)$

في التمارين 12-14، أوجد مجموع حدود المتتالية الهندسية.

12. $8 + 16 + 32 + \dots + 1024$

13. $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{80}$

14. $4 - 12 + 36 - \dots + 2916$

في التمارين 15-17، حدد ما إذا كانت المتسلسلة الهندسية متقاربة. إذا كانت كذلك، أوجد مجموعها.

15. $\sum_{k=1}^{\infty} 3(0.5)^k$

16. $\sum_{k=0}^{\infty} 2\left(\frac{-3}{5}\right)^k$

17. $\sum_{j=1}^{\infty} (\sqrt{2})^j$

18. اكتب $0.425425425\dots$ في صورة كسر اعتيادي.

19. اكتب $0.735555\dots$ في صورة كسر اعتيادي.

20. مجموع حدود متسلسلة هندسية 31.75 ، إذا كان حدّها الأول 16 ، ونسبتها الثابتة 0.5 ، فكم عدد حدود هذه المتسلسلة؟

21. يزداد عدد المقاعد في إحدى قاعات المحاضرات مع ابتعاد الصف عن المنصة. إذا كان عدد المقاعد في الصف الأول 24 مقعدًا، وفي الصف الثاني 29 مقعدًا، وفي الصف الثالث 34 مقعدًا، وكان العدد الكلي للصفوف في القاعة 35 صفًا، أوجد عدد المقاعد الكلي فيها.

الوحدة 1 الإجابات

19. $0.73\overline{5} = 0.73 + 0.005 + 0.0005 + \dots$

$$0.73\overline{5} = 0.73 + \frac{5}{1000} + \frac{5}{10000} + \dots$$

$$0.73\overline{5} = 0.73 + \frac{5}{1000} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{10}^{i-1} \right) = 0.73 + \frac{5}{1000} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$= \frac{662}{900} = \frac{331}{450}$$

20. $S_n = \frac{16 - a_n(0.5)}{1 - 0.5} = 31.75, a_n = \frac{1}{4}$

$$a_n = a_1 r^{n-1}, \frac{1}{4} = 16 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$n = 7$$

21. $S_{35} = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$

$$S_{35} = \frac{35}{2} (2 \times 24 + 34 \times 5) = 3\,815$$

1. $b_1 = 5, b_2 = 10, b_3 = 20, b_4 = 40, b_5 = 80, b_6 = 160, b_{12} = 10\,240$

2. متتالية حسابية. الفرق الثابت: $d = 4$

الحد العام: $a_n = 4n - 9$

3. متتالية هندسية. النسبة الثابتة: $r = \frac{1}{4}$

الحد العام: $b_n = 7 \times \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1}$

4. $\begin{cases} a_1 = -15 \\ a_n = a_{n-1} + 9, n \geq 2 \end{cases}$

$$a_n = 9n - 24$$

5. $\begin{cases} a_1 = 16 \\ a_n = a_{n-1} - 4, n \geq 2 \\ a_n = 16 + (n-1)(-4) \end{cases}$

6. $\begin{cases} a_1 = -6 \\ a_n = a_{n-1} + 5, n \geq 2 \end{cases}$

$$a_n = 5n - 11$$

7. $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = -3a_{n-1}, n \geq 2 \\ a_n = 1 \times (-3)^{n-1} \end{cases}$

8. $\begin{cases} a_1 = 24 \\ a_n = \frac{1}{3}a_{n-1}, n \geq 2 \\ a_n = 24 \times \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \end{cases}$

9. $S_{10} = \frac{10}{2} (4 + 31) = 175$

10. $S_{15} = \frac{15}{2} (17 + 129) = 1\,095$

11. $S_{12} = \frac{12}{2} (-8.5 - 3) = -69$

12. $S_8 = \frac{8 - 1024(2)}{1 - 2} = 2\,040$

13. $S_5 = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{80} \left(\frac{1}{2} \right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{31}{80}$

14. $S_7 = \frac{4 - 2916(-3)}{1 - (-3)} = 2\,188$

15. المتسلسلة الهندسية متقاربة لأن $|r| = 0.5 < 1$, $S = 3$

16. المتسلسلة الهندسية متقاربة لأن $|r| = \frac{3}{5} < 1$, $S = \frac{5}{4}$

17. المتسلسلة الهندسية متباعدة لأن $|r| = \sqrt{2} > 1$

18. $0.42\overline{5} = 0.425 + 0.000425 + 0.00000425 + \dots$

$$0.42\overline{5} = \frac{425}{1000} \left(1 + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000000} + \dots \right)$$

$$0.42\overline{5} = \frac{425}{1000} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1000}^{i-1} \right) = \frac{425}{1000} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{425}{999}$$

نمذجة النمو السكاني باستعمال المتتاليات

في هذا المشروع، سوف تستعمل الصيغ الارتدادية والمتتاليات المتعلقة بها كي تكتشف الاتجاهات في المجتمعات الانسانية والحيوانية. في الحقيقة، سوف تستعمل بعض تقنيات النمذجة التي يستعملها الديموغرافيون وعلماء الحياة البرية.

استكشافات

1. **تعداد سكان دولة قطر** المتتالية الحسابية هي المرادف المنفصل للدالة الخطية. كل من المتتالية الحسابية والدالة الخطية تفترض وجود معدل تغير جمعي ثابت.

a. بحسب تقرير إحصائي صادر عن الأمم المتحدة، فإنّ العدد الرسمي لسكان دولة قطر كان 0.474 مليون نسمة في العام 1990، و 1.759 مليون نسمة في العام 2010. كم كان معدّل التغير السنوي في عدد السكان من العام 1990 إلى العام 2010؟

b. التعداد الرسمي لسكان دولة قطر كان 0.591 مليون نسمة في العام 2000. لنفترض أنّ $\{p_n\}$ متتالية حسابية تمثّل تعداد السكان في قطر (بالملايين) بعد n سنة من العام 2000. تحقّق من أنّ $p_0 = 0.591$. هذا هو **الشرط الابتدائي** (الحد الأول) للمتتالية.

c. استعمل إجابتك على الجزء (a) لكتابة صيغة ارتدادية للمتتالية $\{p_n\}$.

d. اكتب صيغة الحد العام للمتتالية الحسابية $\{p_n\}$ مفترضاً أنّ $p_0 = 0.591$.

e. استعمل المعلومات من الأجزاء (b)، (c)، (d) لتقدير عدد سكان دولة قطر في الأعوام 2010، 2015، 2020.

2. **تعداد سكان العالم** يوضح الجدول التالي تقدير مكتب التعداد السكاني في الولايات المتحدة للأعداد الرئيسية لسكان العالم. لنفترض أنّ $\{w_n\}$ متتالية هندسية تمثّل تعداد السكان في العالم (بالمليارات) بعد n سنة من العام 1959. استعمل $w_0 = 3.00$ كشرط ابتدائي للمتتالية.

السنة	تعداد السكان (بالمليارات)
1959	3
1974	4
1987	5
1999	6
2012	7

a. بافتراض نسبة نمو سنوي في عدد سكان العالم مقدارها 1.62%، اكتب صيغة ارتدادية للمتتالية $\{w_n\}$.

b. اكتب الحد العام للمتتالية الهندسية $\{w_n\}$ في الجزء (a).

c. استعمل الصيغة من الجزء (b) لتقدير عدد سكان العالم في الأعوام 2010، 2015، 2020.

d. نسبة النمو السنوي الفعلي في عدد سكان العالم تراجعت من 2.22% سنة 1963 إلى 1.09% سنة 2013، لذا فإن متتالية هندسية جديدة يمكن أن تكون أكثر ملاءمة من المتتالية السابقة في تقدير أعداد السكّان في السنوات الأخيرة.

استعمل المعطيات في الجدول والمتتالية الهندسية الجديدة لتقدير عدد سكان العالم في الأعوام 2010، 2015، 2020

3. **تعداد أسماك الخيشوم الأزرق** يوجد 1 100 سمكة خيشوم أزرق في بحيرة تاواغا حاليًا (السنة 0). كل عام، تتناقص أعداد هذه الأسماك بنسبة 25% بفعل تأثيري الموت والصيد، وفي نهاية كل عام، يتم إضافة 800 سمكة خيشوم أزرق إلى البحيرة. لنفترض أن $\{b_n\}$ هي متتالية تمثل عدد أسماك الخيشوم الأزرق في البحيرة بعد n سنة قادمة.

a. اكتب صيغة ارتدادية للمتتالية $\{b_n\}$.

b. مثل بيانات المتتالية $\{b_n\}$ كمتغير مع الوقت (أي كدالة بقيمة الوقت n).

c. أثبت أن المتتالية $b_n = 3\,200 - a_n$ هي متتالية هندسية محدّدًا نسبتها الثابتة وحدّها الأول.

d. أوجد الحد العام للمتتالية $\{a_n\}$ ثم أثبت أن $b_n = 3\,200 - 2\,100(0.75)^n$

e. كم يصبح عدد أسماك الخيشوم الأزرق في البحيرة على المدى الطويل؟

4. **نموذج تعداد المفترس - الفريسة** في البرية، ترتبط أعداد الأنواع المفترسة، كالثعالب، بأنواع الفرائس، كالأرانب، فتكون أعدادهما مرتبطة في ما بينها.

لنفترض أن أعداد الأرانب في الوقت n هو u_n

$$u_n = u_{n-1}(1 + a - bv_{n-1})$$

لنفترض أن أعداد الثعالب في الوقت n هو v_n

$$v_n = v_{n-1}(1 + cu_{n-1} - d)$$

حيث

a: نسبة تزايد أعداد الأرانب في حال عدم وجود ثعالب: 0.047

b: نسبة قتل الثعالب للأرانب: 0.0011

c: نسبة تزايد أعداد الثعالب في حال وجود أرانب: 0.00019

d: نسبة موت الثعالب في حال عدم وجود أرانب: 0.032

لنفترض أن الشروط الابتدائية هي أرانب $u_0 = 288$

وثعالب $v_0 = 63$

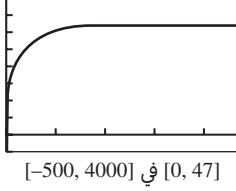
a. مثل المتتاليتين $\{u_n\}$ و $\{v_n\}$ بدلالة الوقت n وذلك على نفس المستوى الإحداثي.

b. مثل العلاقة $\{v_n\}$ مقابل $\{u_n\}$ على نفس المستوى الإحداثي.

c. اكتب بعض الجمل لتصف ما توصلت إليه. هل تعتقد أن أيًا من النوعين سيندثر؟ لم، ولم لا؟ إذا اندثر نوع الثعالب فماذا سيحلّ بأعداد الأرانب؟ اشرح معتمدًا على النموذج.

3. a. $b_n = (100\% - 25\%)b_{n-1} + 800 = 0.75b_{n-1} + 800$

b.



c. $a_n = 3200 - b_n$ أي أن $a_{n-1} = 3200 - b_{n-1}$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{3200 - b_n}{3200 - b_{n-1}} = \frac{3200 - (0.75b_{n-1} + 800)}{3200 - b_{n-1}} = \frac{2400 - 0.75b_{n-1}}{3200 - b_{n-1}}$$

$$= \frac{0.75(3200 - b_{n-1})}{3200 - b_{n-1}} = 0.75$$

إذن المتتالية $a_n = 3200 - b_n$ متتالية هندسية نسبتها الثابتة 0.75

وحدها الأول $a_0 = 3200 - b_0 = 3200 - 1100 = 2100$

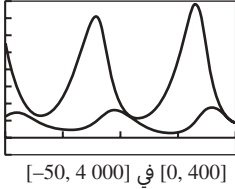
d. $a_n = 2100(0.75)^n$

بما أن $a_n = 3200 - b_n$

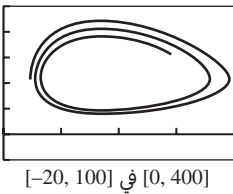
فإن $b_n = 3200 - a_n = 3200 - 2100(0.75)^n$

e. عندما $n \rightarrow \infty$ ، $(0.75)^n \rightarrow 0$ ، إذن يصبح عدد الأسماك على المدى البعيد 3200

4. a.



b.



c. قد تتنوع الإجابات.

1. a. $\frac{1.759 - 0.474}{2010 - 1990} = 0.06425$

إذن، معدل التغير السنوي في عدد السكان يساوي

64 250 نسمة سنوياً.

b. بما أن n يساوي عدد السنوات المنقضية منذ العام 2000، فإن $n = 0$ أي أن p_0 يمثل عدد السكان في ذلك العام.

إذن، $p_0 = 0.591$

c. $p_n = p_{n-1} + 0.06425$

d. $p_n = 0.06425n + 0.5910$

e. $p_{2010} = 0.06425(10) + 0.5910 = 1.2335$

$p_{2015} = 0.06425(15) + 0.5910 = 1.55475$

$p_{2020} = 0.06425(20) + 0.5910 = 1.876$

إذن عدد سكان دولة قطر في الأعوام 2010 و 2015 و 2020 هو على الترتيب: 1 233 500 و 1 554 750 و 1 876 000 نسمة.

2. a. $w_n = w_{n-1} + 0.0162w_{n-1} = 1.0162w_{n-1}$

b. $w_n = w_0 (1.0162)^n = 3.00 \times (1.0162)^n$

c. $w_{51} = 3.00 \times (1.0162)^{51} \approx 6.8086$

$w_{56} = 3.00 \times (1.0162)^{56} \approx 7.3783$

$w_{61} = 3.00 \times (1.0162)^{61} \approx 7.9956$

إذن، عدد سكان العالم في الأعوام 2010 و 2015 و 2020 هو على الترتيب:

6.8086 و 7.3783 و 7.9956 مليار نسمة تقريباً.

d. $w_4 = 3.00 \times (1.0162)^4 \approx 3.20$ عدد السكان في سنة 1963

بما أن النسبة تراجعت من 2.22% عام 1963 إلى 1.09%

عام 2013

أي أن نسبة التراجع $\frac{2.22 - 1.09}{50} \% = 0.0226\%$ في السنة الواحدة.

تساوي النسبة التقريبية عام 2010:

$2.22\% - 47 \times 0.0226 = 1.1578\%$

$w_{47} = 3.2 \times (1.01578)^{47} \approx 6.68$

$w_5 = 6.68 \times (1.0109)^5 \approx 7.05$

$w_{10} = 6.68 \times (1.0109)^{10} \approx 7.45$

إذن عدد سكان العالم في الأعوام 2010، 2015 و 2020 هو على

الترتيب:

6.68، 7.05 و 7.45 مليار نسمة تقريباً.

الوحدة 2



الدوال والعمليات عليها

أحد المبادئ الأساسية في الاقتصاد هو أن قيمة المال ليست ثابتة، وإنما هي دالة بدلالة الزمن. ولأن الثروات تتحقق أو تزول من قبل أناس يحاولون استشراف مستقبل قيمة المال، فإنه يتم إيلاء الكثير من العناية للقياسات الكمية كمؤشر أسعار المستهلك، والذي يمثل قياساً أساسياً للتضخم في مختلف القطاعات الاقتصادية. فيما يلي، ستنتم دراسة الدوال وتمثيلاتها البيانية والعمليات عليها وكيفية الاستفادة منها في مختلف المجالات ولاسيما الاقتصادية منها.

2.1 الدوال وخصائصها

2.2 العمليات على الدوال

2.3 الدوال العكسية

2.4 تحويلات التمثيلات البيانية للدوال

Functions and Their Properties

الدوال وخصائصها

2.1

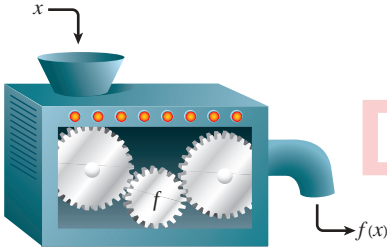
تعريف الدالة ورمزها

في الرياضيات وتطبيقاتها الكثير من الأمثلة على صيغ تربط متغيرات عددية بعضها ببعض، واستعمال مفهوم الدالة ورمزها هو أفضل ما يمكن للتعبير عن العلاقات بين هذه المتغيرات. فمفهوم الدالة هو بالفعل مفهوم بسيط، ولو لم يكن كذلك لكان استُبدل عبر الزمن بما هو أبسط منه. في ما يلي تعريف الدالة.

تعريف الدالة

الدالة من المجموعة D إلى المجموعة R قاعدة تعين لكل عنصر من D عنصرًا واحدًا فقط من R .
تُسمى مجموعة المدخلات D **مجال** الدالة، بينما تُسمى مجموعة المخرجات R **مدى** الدالة.

هناك طرق متعددة لفهم مبدأ الدوال. إحدى هذه الطرق هي النظر إلى الدالة كأنها آلة (الشكل 2.1.1) ندخل فيها قيمًا (x) من المجال فتحولها الآلة (الدالة f هنا) إلى قيم (y) في المدى.

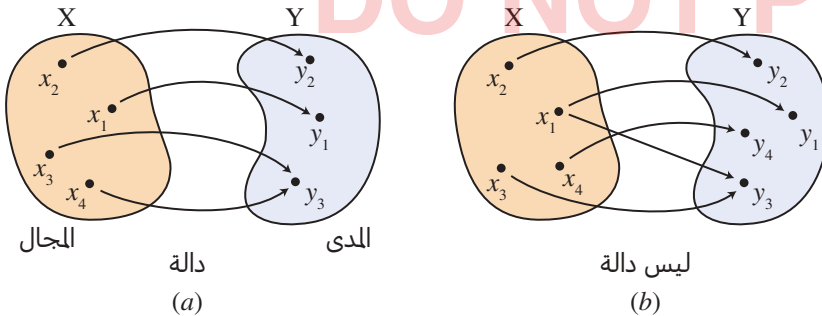


الشكل 2.1.1

للتعبير عن أن y نتجت عن تطبيق الدالة f على القيمة x ، نستعمل رمز الدالة الذي اعتمدته أويلر $y = f(x)$ ، الذي يُقرأ: " y يساوي f لـ x " أو "**قيمة f عند x** ".
 x يُسمى **متغيرًا مستقلًا**، ويسمى y **متغيرًا تابعًا**.

يمكن أيضًا النظر إلى الدالة كأنها مخطط بين عناصر المجال والمدى. يمثل الشكل 2.1.2(a) دالة تعين لكل عنصر من المجال X عنصرًا واحدًا وواحدًا فقط من المدى Y . أما الشكل

(b) فهو لا يمثل دالة لأن العنصر x_1 لا يرتبط بعنصر واحد وواحد فقط في Y .



الشكل 2.1.2 يوضح الشكل (a) أن المخطط من X إلى Y يُمثل دالة، فيما المخطط الموضح في الشكل (b) من X إلى Y ليس دالة.

إن ارتباط كل عنصر في المجال بعنصر واحد وواحد فقط في المدى مبدأ أساسي في دراسة الدوال فإذا أعطينا بعض المعلومات عن الدالة، مثلًا $f(2) = 8$ ، فإن ذلك يمنع من القول أن $f(2) = 4$ لأنه يناقض ما نعرفه عن هذه الدالة. لذلك لا يمكن أن نُعرّف دالة بصيغة قابلة للـ ليس كصيغة $f(x) = 3x \pm 2$ على سبيل المثال.

ما ستتعلمه

- تعريف الدالة ورمزها
- المجال والمدى
- الاتصال هندسيًا
- التزايد والتناقص
- القيم القصوى المحلية
- التناظر
- خطوط التقارب

... ولماذا

تشكل الدوال وتمثيلاتها البيانية أساسًا لفهم الرياضيات والتطبيقات التي يمكن أن تستعملها في حياتك اليومية أو أثناء دراستك.

معياري الدرس

11A.3.1

المصطلحات

- المجال الضمني implied domain
- المجال المناسب relevant domain
- القيمة العظمى المحلية local maximum
- القيمة الصغرى المحلية local minimum
- دالة زوجية even function
- دالة فردية odd function
- خط تقارب أفقي horizontal asymptote
- خط تقارب رأسي vertical asymptote

الهدف

سيتمكن الطلاب من تمثيل الدوال باستعمال جدول وجبريًا وبيانيًا. سيتمكنون كذلك من تحديد المجال والمدى للدوال ودراسة خصائصها كالقيم القصوى والتناظر وخطوط التقارب.

دليل الدرس

1. تعريف الدالة وصيغتها، المجال والمدى، الاتصال هندسيًا
2. الدوال المتزايدة والمتناقصة، القيم القصوى المحلية
3. التناظر، خطوط التقارب

تحفيز

أسأل الطلاب لماذا يكون مهمًا أن نستطيع تحديد متى يكون التمثيل البياني لدالة ما على الحاسبة معقولًا.

لمحة تاريخية

يعود مصطلح الدالة بشكل عام إلى جوتفريد ليبنز (1646-1716)، أحد رواد حساب التفاضل والتكامل. وكان اهتمامه بوضع الأسس الواضحة للتعبير عن الدوال وعملياتها من أهم مساهماته في التقدم العلمي، وهذا ما يقتر أننا ما زلنا نستعمل أسس التعبير هذه عند دراسة الرياضيات حتى اليوم. ومن المُلغَت، أن ليونارد أويلر (1707-1783)، وليس ليبنز، هو من أدخل الرمز المعروف $f(x)$.

سؤال للتفكير

س: حدّد المتغير المستقل والمتغير التابع في الصيغة $y = x^2$.

نموذج إجابة:

x هو المتغير المستقل و y هو المتغير التابع.

ملاحظة تعليمية

التعود على مفهوم الدالة مهم للغاية للاستعداد لدراسة التحليل الرياضي. يمكن الرسم البياني على الحاسبة الطلاب من إحراز فهم غير مسبوق لمفهوم الدوال.

تنبيه

يحتاج الطلاب الذين لم يتعرفوا بعد على مفهوم الدوال إلى مزيد من الوقت في هذا القسم. من المفيد تذكير الطلاب أن قيمة y تعتمد على قيمة x .

مثال 1 تعريف دالة

هل الصيغة $y = x^2$ تعرّف y على أنها دالة للمتغير x ؟ برّر إجابتك.

الحل

نعم، y هي دالة للمتغير x ، يمكن أن نكتب هذه الصيغة باستعمال رمز الدالة $f(x) = x^2$ عندما نعطي قيمًا للمتغير x في الدالة فإن القيمة المخرجة هي قيمة وحيدة تساوي مربع x وليس هناك أي لبس في فهم ما هو مربع x .

حاول أن تحل التمرين 2

تمثيل الدوال بيانيًا طريقة أخرى مفيدة لدراسة الدوال. يتكوّن التمثيل البياني للدالة $y = f(x)$ من مجموعة جميع النقاط $(x, f(x))$ حيث x عنصر من مجال f . لتكوين هذه الأزواج المرتبة التي تبين منحنى الدالة $y = f(x)$ ، نوائم قيم المجال الواقعة على المحور x مع قيم المدى المناظرة لها على المحور y .

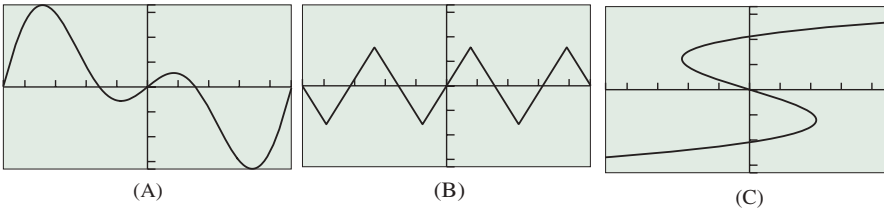
اختبار الخط الرأسي

يمثل المنحنى (وهو مجموعة نقاط (x, y)) في المستوى الإحداثي xy منحنى لدالة فقط إذا تقاطع مع أي خط رأسي بنقطة واحدة على الأكثر.

من الواضح أن اختبار الخط الرأسي يختبر فيما إذا كان التمثيل البياني يعتبر تمثيلًا بيانيًا لدالة أم لا، كما سنرى في المثال التالي:

مثال 2 تمييز التمثيل البياني للدوال

أي من التمثيلات البيانية الثلاثة أدناه ليس تمثيلًا بيانيًا لدالة؟ كيف يمكنك تحديد ذلك؟



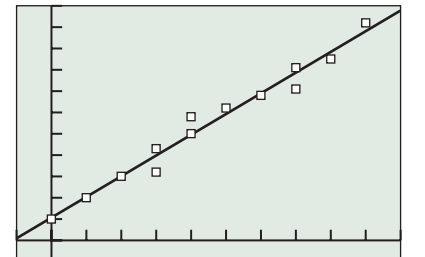
الحل

(A) لا يوجد خط رأسي يتقاطع مع المنحنى البياني في أكثر من نقطة واحدة لذا فالتمثيل هو تمثيل بياني لدالة.
(B) لا يوجد خط رأسي يتقاطع مع المنحنى البياني في أكثر من نقطة واحدة لذا فالتمثيل هو تمثيل بياني لدالة.

(تابع)

تنبيه

عند الانتقال من النموذج العددي إلى النموذج الجبري، نستعمل غالبًا دالة لتقريب أزواج البيانات التي تخالف تعريفنا للدالة. في الشكل 2.1.3 نرى أن العديد من أزواج نقاط البيانات تفشل في اختبار الخط الرأسي لكن يتم تقريبها بدرجة جيدة باستعمال دالة خطية.



الشكل 2.1.3

التمثيل في (C) ليس تمثيلًا بيانيًا لدالة، لأنه يوجد ثلاث نقاط مختلفة على المنحنى البياني الإحداثي x لها 0، إذن المنحنى البياني لا يعين قيمة واحدة محددة عندما $x = 0$. (في الواقع، نلاحظ أنه يوجد أعداد كثيرة بين -2 و 2، يعين لها التمثيل البياني قيمًا متعددة).

حاول أن تحل التمرين 4

المجال والمدى

غالبًا ما تعرّف الدالة جبريًا من خلال صيغة صريحة بدلالة قيم المتغير في المجال. غير أن هذه الصيغة تعتبر عن الموقف الحياتي بصورة كاملة بدون تحديد دقيق للمجال الفعلي للدالة. مثلاً، يمكننا تعريف حجم كرة بدلالة نصف قطرها باستعمال الصيغة:

$$V(r) = \frac{4}{3} \pi r^3$$

هذه الصيغة معرّفة لجميع الأعداد الحقيقية، لكن دالة الحجم غير معرّفة لقيم المتغير r السالبة. لذا، إذا كان غرضنا دراسة دالة الحجم، فعلينا أن نحصر مجالها بقيم المتغير r الموجبة.

توافق بشأن المجال

عمومًا، المجال الفعلي للدالة هو مجال صيغتها الجبرية، ويسمى **المجال الضمني**. وبالنسبة إلى النماذج، سنستعمل مجالاً يناسب الموقف، ويسمى **المجال المناسب**.

مثال 3 إيجاد مجال دالة

أوجد مجال كل دالة:

A. $f(x) = \sqrt{x+3}$

B. $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-5}$

C. $A(s) = \frac{\sqrt{3}}{4} s^2$ إذا كانت $A(s)$ مساحة مثلث متطابق الأضلاع، و s طول كل ضلع.

الحل

حل جبريًا

A. لا يمكن للمجذور أن يكون سالبًا.
نكتب إذن: $x+3 \geq 0$ ونحل لنجد $x \geq -3$.
إذن مجال الدالة هو $[-3, \infty[$.

(تابع)

سؤال للتفكير

س: هل يمكن أن يكون في التمثيل البياني لدالة نقطتان لهما نفس الإحداثي x ؟
نموذج إجابة:
كلا، لأن صيغة الدالة تعطي لكل قيمة x قيمة y واحدة.

نشاط المصطلحات

قم بإعداد الطلاب لفهم المجال والمدى من خلال مراجعة المصطلحات: "فترة"، "متباينة"، "أعلى"، "أدنى". يتّين أن تحديد المجال والمدى يعتمد على وصف يستعمل المتباينات أو الفترات، وأن رمز الفترة، يعتبر عن مجموعة من الأعداد الحقيقية التي تقع بين عددين يمثلان حدّي الفترة. دع الطلاب يميزون بين المجال والمدى.
حدّد مجال ومدى كل من الدوال:

- a. $f(x) = 3x + 7$
- b. $g(x) = x^2 + 1$
- c. $k(x) = 5x - 3$
- d. $h(x) = 2x^2 - 5$

نموذج إجابة:

a. المجال	$]-\infty, \infty[$
المدى	$]-\infty, \infty[$
b. المجال	$]-\infty, \infty[$
المدى	$[1, \infty[$
c. المجال	$]-\infty, \infty[$
المدى	$]-\infty, \infty[$
d. المجال	$]-\infty, \infty[$
المدى	$[-5, \infty[$

تعلّم تعاوني

ربما يجد بعض الطلاب صعوبة في استيعاب مفهومي المجال والمدى. أوجد فرصة تسمح بمناقشة وتسجيل المجال والمدى لعدد من الدوال، وذلك من خلال عمل الطلاب ضمن مجموعات، وهذا ما يمكنهم من مساعدة بعضهم البعض ويعطيهم دفعة في فهم الأنشطة الاستكشافية.

الجذر الزوجي

أي مجذور للجذر الزوجي لا يمكن أن يكون سالبًا أبدًا.

إرشاد

الرمز "U" ، يُقرأ "اتحاد" ويعني أن عناصر المجموعتين تندمج معًا لتشكيل مجموعة واحدة.

سؤال للتفكير

س: من دون إيجاد المجال، هل ينتمي العدد -7 إلى مجال الدالة $f(x) = \sqrt{x+3}$ ؟
نموذج إجابة:

كلا، لأن تعويض x بالعدد -7 يؤدي إلى مجذور سالب لجذر زوجي وهذا غير مقبول.

ملاحظة تعليمية

قد يكون من الضروري مراجعة رمز الاتحاد حين تكون المجموعات على شكل فترات.

تنبيه

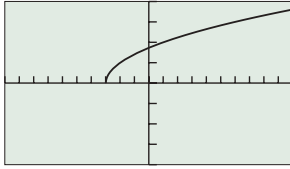
قد تُظهر بعض الآلات الحاسبة خطأ رأسيًا غير متوقع يمر بالمحور x عند $x = a$ عندما لا تكون a في مجال الدالة. يمثل هذا الخط، الذي يجب ألا يكون موجودًا، شكلًا آخر من أشكال الخلل في برنامج التمثيل البياني على الآلة الحاسبة، ويتجاهله، نلاحظ أن a ليس في المجال، كما هو متوقع.

B. لا يمكن للمجذور في البسط أن يكون سالبًا، إذن $x \geq 0$.
كذلك لا يمكن أن يساوي مقام الكسر صفرًا، إذن $x \neq 5$.
هكذا يكون مجال الدالة هو الفترة $[0, \infty[$ ما عدا العدد 5،
وهو ما يمكن كتابته على شكل اتحاد مجموعتين: $[0, 5[\cup]5, \infty[$.

C. مجال الصيغة الجبرية هو $]-\infty, \infty[$ غير أن النمذجة تمنع من إعطاء s قيمًا سالبة.
إذن، مجال A هو الفترة $[0, \infty[$.

تحقق بيانيًا

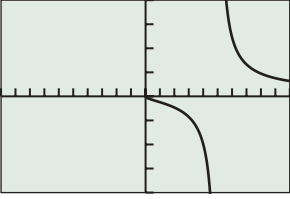
يمكننا دعم إجاباتنا في (A) و (B) بالتمثيل البياني، إذ يجب ألا ترسم الآلة الحاسبة (أو برامج الرسم الإلكتروني) نقاطًا حيث لا تكون الدالة معرّفة.



$[-10, 10]$ في $[-4, 4]$

(a)

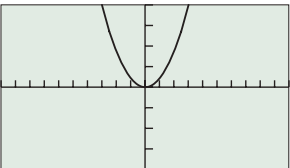
A. نلاحظ أن التمثيل البياني للدالة $y = \sqrt{x+3}$ (الشكل a) يبين فقط النقاط حيث $x \geq -3$ كما هو متوقع.



$[-10, 10]$ في $[-4, 4]$

(b)

B. التمثيل البياني للدالة $y = \frac{\sqrt{x}}{x-5}$ (الشكل b) يبين فقط النقاط حيث $x \geq 0$ و $x \neq 5$ كما هو متوقع.



$[-10, 10]$ في $[-4, 4]$

(c)

C. التمثيل البياني للدالة $y = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$ (الشكل c) يبين المجال غير المحدود للصيغة الجبرية للدالة: كل الأعداد الحقيقية.

لا وسيلة لجعل الآلة الحاسبة تبين أن s هو طول ضلع المثلث ويفترض لذلك أن يكون عددًا موجبًا.

حاول أن تحل التمرين 7

عادةً، يكون إيجاد المدى لدالة مهمة أكثر صعوبة من إيجاد المجال لهذه الدالة، وذلك على الرغم من أن الأمور تبدو متشابهة من وجهة النظر البيانية: لإيجاد المجال علينا أن نحدد القيم على المحور x التي يقابلها نقاط على منحنى الدالة ولإيجاد المدى علينا أن نحدد القيم على المحور y التي يقابلها نقاط على منحنى الدالة. يمكننا استعمال المعالجة الجبرية والبيانية معًا لإنتاج مقارنة مهمة كي نحدد المدى للدالة، كما في المثال 4

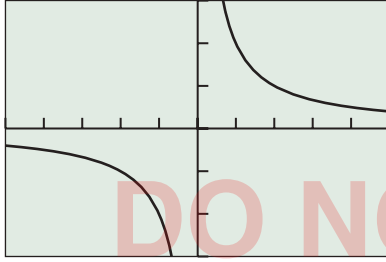
مثال 4 إيجاد مدى دالة

أوجد مدى الدالة $f(x) = \frac{2}{x}$

الحل

حل بيانيًا

التمثيل البياني للدالة $y = \frac{2}{x}$ مبين في الشكل أدناه.



$[-5, 5]$ في $[-3, 3]$

من الواضح أن $x = 0$ غير موجود في مجال الدالة (لأنه كما هو متوقع لا يمكن لمقام الكسر أن يساوي صفرًا).

من الواضح أيضًا أن مدى الدالة هو كل مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء 0

تأكد جبريًا

يمكن أن نؤكد أن 0 ليس في مدى الدالة باستعمال المعادلة $\frac{2}{x} = 0$

$$\frac{2}{x} = 0$$

$$2 = 0 \times x$$

$$2 = 0$$

بما أن $2 = 0$ لا يمكن أن تصح أبدًا، فإن المعادلة $\frac{2}{x} = 0$ لا يمكن أن تصح أبدًا. إذن $y = 0$ ليس في مدى الدالة.

كيف يمكننا من جهة أخرى أن نتأكد من أن كل الأعداد الحقيقية الأخرى موجودة في مدى الدالة؟

ليكن $k \neq 0$ أي عدد حقيقي آخر. حل المعادلة $\frac{2}{x} = k$.

$$\frac{2}{x} = k$$

$$2 = k \times x$$

$$x = \frac{2}{k}$$

كما تلاحظ، لا مشكلة في احتساب قيمة x في هذه الحالة. وعليه 0 هو العدد الوحيد غير الموجود في المدى.

إذن، المدى هو $]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$.

سؤال للتفكير

س: هل يمكننا القول إن أي عدد لا ينتمي إلى مجال الدالة لا يمكن أن يكون في مداها؟

نموذج إجابة:

كلا، فالعدد 4 لا ينتمي إلى مجال الدالة

لكنه موجود في مداها لأن $f(x) = \sqrt{x-5}$ ، لكنه موجود في مداها لأن

$$f(21) = \sqrt{21-5} = \sqrt{16} = 4$$

رمز الدالة

عادة لا يستعمل برنامج التمثيل البياني رمز الدالة.

لذا يتم إدخال الدالة $f(x) = x^2 + 1$ في صورة

$y_1 = x^2 + 1$. في بعض برامج التمثيل البياني، يمكن

إيجاد قيمة f عند $x = 3$ عن طريق إدخال $y_1(3)$ على

الشاشة الرئيسية. في برامج أخرى، $y_1(3)$ يعني

$$y_1 \times 3$$

ملاحظة تعليمية

تمكّن الحاسبة البيانية الحديثة من خلال التمثيل البياني

للدوال من التعرف على الكثير من الظواهر العلمية التي

يمكن نمذجتها باستعمال الدوال، وهذا مهم لأن الطلاب

سوف يجدون أنفسهم مضطرين لتمثيل الدوال التي

تمثل بعض الظواهر بيانيًا.

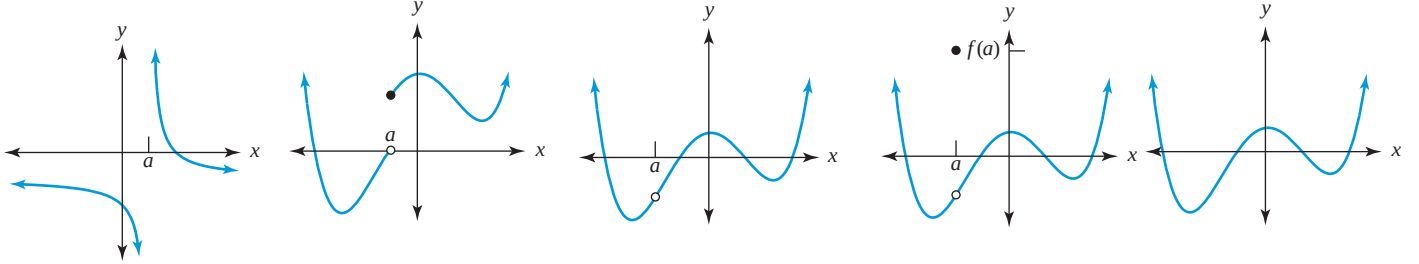
نشاط تمثيلي

ارسم منحنى دالة يكون مجالها $[-5, -1] \cup [2, 4]$

ومداها $[-4, -1] \cup [1, \infty[$.

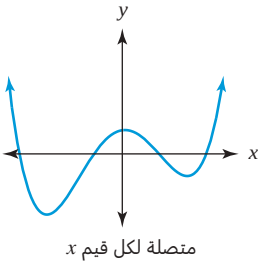
الاتصال هندسيًا

أحد أهم خواص الدوال التي نمذج سلوكًا من واقع الحياة هو أنها متصلة. من الناحية البيانية، تكون الدالة متصلة عند نقطة إذا لم يكن في تمثيلها البياني انفصال عند هذه النقطة. يمكننا توضيح هذا المفهوم ببعض التمثيلات البيانية.



DO NOT PRINT

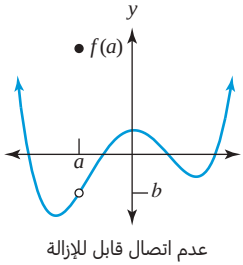
لننظر إلى هذه المنحنيات كل على حدة:



متصلة لكل قيم x

التمثيل البياني المجاور متصل عند جميع النقاط. لاحظ أن التمثيل البياني ليس به انقطاع.

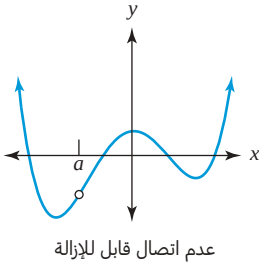
DO NOT PRINT



عدم اتصال قابل للإزالة

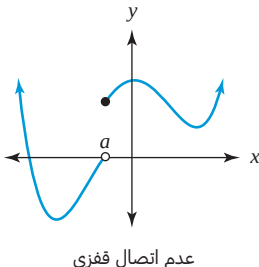
التمثيل البياني المجاور متصل في كل مكان ما عدا "الفجوة" عند $x = a$. ويسمى هذا "عدم اتصال قابل للإزالة" لأنه يمكن إعادة اتصال المنحنى من خلال إعادة تعريف الدالة $f(x)$ عند $x = a$ على النحو $f(a) = b$ وذلك لسد الفجوة.

DO NOT PRINT



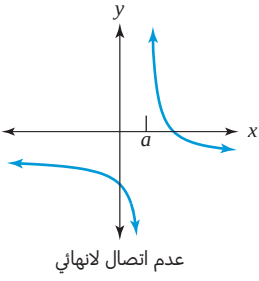
عدم اتصال قابل للإزالة

التمثيل البياني المجاور أيضًا هو من حالات عدم الاتصال القابل للإزالة عند $x = a$. بل أكثر من ذلك، الشكل يبيّن أن $f(x)$ غير معرّفة عند $x = a$. غير أننا مع ذلك يمكننا استعادة الاتصال من خلال إعادة تعريف الدالة $f(x)$ عند $x = a$ بطريقة مناسبة.



عدم اتصال قفزي

الشكل المجاور، مثال على عدم اتصال غير قابل للإزالة. لأنه يوجد أكثر من مجرد فجوة عند $x = a$ ، يوجد قفزة في قيم الدالة تجعل من المستحيل سد الفراغ بنقطة واحدة $(a, f(a))$ ، بغض النظر عن مقدار محاولتنا لإعادة تعريف الدالة $f(a)$. يعرّف هذا النوع من عدم الاتصال على أنه "عدم اتصال قفزي".



يمثل الشكل المجاور بيانيًا دالة تُظهر "عدم اتصال لانهائي" عند $x = a$ ، وهو بالتأكيد غير قابل للإزالة. لأنه يوجد أكثر من مجرد فجوة عند $x = a$ ، بل إن الدالة على يمين ويسار a تتجه إلى موجب مالانهاية وسالب مالانهاية ومن المستحيل سد الفراغ بنقطة واحدة.

ملاحظة تعليمية

لا حاجة هنا إلى فهم دقيق لمفهوم النهايات، فالغاية من إدخال هذا المفهوم هنا هي فقط إيضاح معنى الاتصال هندسيًا.

الاستخدام المحدود للنهايات

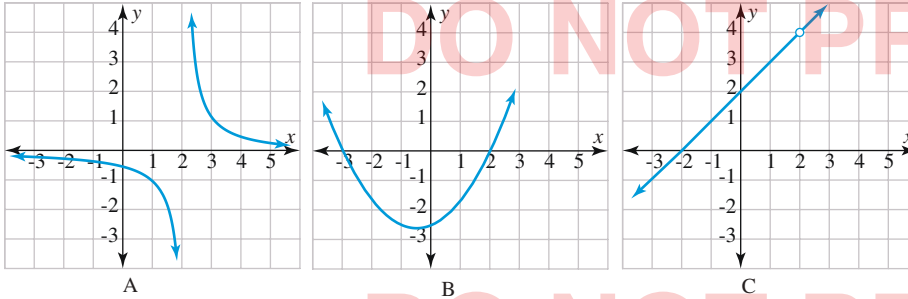
رغم أن مفهوم "النهاية" سهل الفهم، إلا أنه من الممكن إيجاد صعوبة في فهم التعريف الجبري للنهاية وهو تعريف ستم معالجته لاحقًا.

المفهوم الهندسي البسيط لتمثيل بياني غير منقطع عند نقطة معيّنة يصبح مفهومًا أكثر صعوبة إذا ما أردنا التعبير عنه بلغة جبرية. مفتاح الفكرة هو ما تقدمه الصور من أننا نريد بالاتصال أن تفسر النقطة $(x, f(x))$ من أية جهة لتعبر النقطة $(a, f(a))$ من غير أن تفقدها. نقول إن $f(x)$ تقترب من $f(a)$ كلما اقتربت x من a .

يعكس رمز "النهاية" هذا السلوك البياني للدالة بشكل طبيعي وسيستعمل هذا الرمز لاحقًا لوصف سلوك الدالة بدءًا من تعريف الاتصال.

مثال 5 تحديد نقاط عدم الاتصال

حدد ما إذا كان كل منحنى يمثل دالة غير متصلة عند النقطة $x = 2$.
حدد نوع عدم الاتصال.



الحل

A. الدالة الممثلة في الشكل A غير معرّفة عند $x = 2$ ، ومن ثم تكون غير متصلة عند هذه النقطة. وعدم الاتصال هنا لانهائي.

B. الدالة الممثلة في الشكل B هي دالة تربيعية تمثيلها البياني عبارة عن قطع مكافئ، وهو تمثيل بياني ليس به إنقطاعات في مجال الدالة الذي يضم جميع الأعداد الحقيقية. إذن، الدالة متصلة عند جميع قيم x .

C. الدالة الممثلة في الشكل C غير معرّفة عند $x = 2$ ولذا لا يمكن أن تكون متصلة هناك. التمثيل البياني يشبه التمثيل البياني للمستقيم $y = x + 2$ في ما عدا وجود فجوة عند موضع النقطة $(2, 4)$. وهذا عدم اتصال قابل للإزالة.

سؤال للتفكير

س: ما معنى إزالة عدم الاتصال؟

نموذج إجابة:

فقط عندما يكون الاتصال متمثلًا بفجوة هي عبارة عن نقطة، تكون إزالة عدم الاتصال ممكنة وذلك بإضافة هذه النقطة. في الرسم البياني C، تضاف النقطة $(2, 4)$ إلى المنحنى، فنحصل على دالة تتطابق مع المنحنى في جميع النقاط وتزبد عليه فتصبح معرّفة عند $x = 2$ وهي تساوي 4

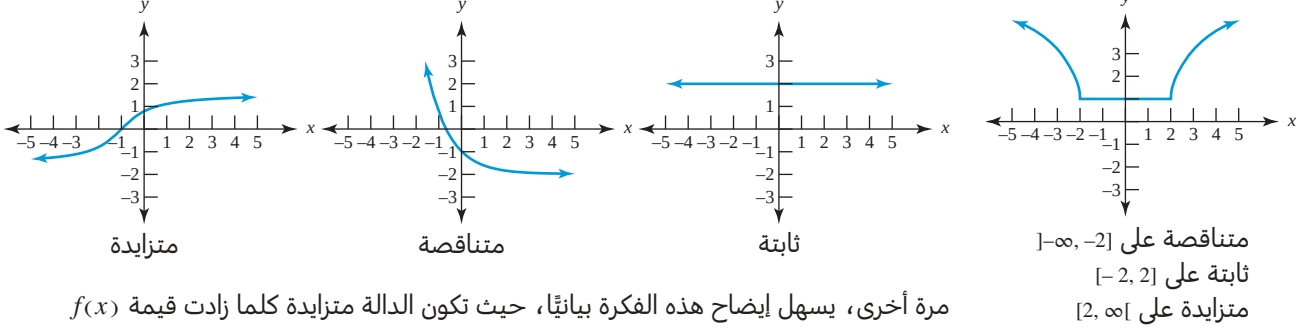
ملاحظة تعليمية

في الفرع C من مثال 5 نستعمل دائرة صغيرة لإبراز الفجوة عند $x = 2$. في بعض الحاسبات البيانية قد لا تكون هذه الفجوة واضحة وذلك يعتمد على نوع الحاسبة وقياسات نافذة العرض.

حاول أن تحل التمرين 12

التزايد والتناقص

هناك مفهوم آخر للدوال يسهل فهمه بيانيًا وهو خاصية التزايد أو التناقص أو الثبات في فترة ما. نبين هذا المفهوم من خلال بعض التمثيلات البيانية:



مرة أخرى، يسهل إيضاح هذه الفكرة بيانيًا، حيث تكون الدالة متزايدة كلما زادت قيمة $f(x)$ بزيادة x ، وتكون الدالة متناقصة كلما قلت قيمة $f(x)$ بزيادة x ، لكن كيف يمكننا تحديد هذه الخواص للدوال جبريًا؟ يساعد الاستكشاف 1 على التمهيد للتعريف الجبري.

نشاط استكشافي 1 البيانات المتزايدة والمتناقصة والثابتة

1. في جداول البيانات العددية الثلاثة الموضحة أدناه، أي منها ينمذج دالة (a) متزايدة، (b) متناقصة، (c) ثابتة؟

X	Y1	X	Y2	X	Y3
-2	12	-2	3	-2	-5
-1	12	-1	1	-1	-3
0	12	0	0	0	-1
1	12	1	-2	1	1
3	12	3	-6	3	4
7	12	7	-12	7	10

القائمة Δ على الآلة الحاسبة

قد تساعدك الآلة الحاسبة في الأعداد الواردة في الاستكشاف 1، إذ تتضمن بعض الآلات الحاسبة عملية "القائمة Δ" التي تحسب التغيرات أثناء تحركك إلى أسفل في إحدى القوائم. على سبيل المثال، يخزن الأمر $\Delta \text{List}(L1) \rightarrow L3$ الفروق من $L1$ إلى $L3$. لاحظ أن $\Delta \text{List}(L1)$ دائمًا أقصر بإدخال واحد من $L1$ نفسها.

توسيع الاستكشاف

كُنْ جدولًا يبين قيم الدالة $f(x) = x^2$. حدّد قيم x حيث تكون الدالة متزايدة وحدّد قيم x حيث تكون متناقصة.

2. كَوْن قائمة ΔY_1 ، التغيّر في قيم Y_1 أثناء انتقالك من أعلى إلى أسفل القائمة.

أثناء الانتقال من $Y_1 = a$ إلى $Y_1 = b$ ، يكون التغيّر $\Delta Y_1 = b - a$.

كتر الأمر مع قيم Y_2 و Y_3 .

ΔY_1	ΔX	يتغيّر X من	ΔY_2	ΔX	يتغيّر X من	ΔY_3	ΔX	يتغيّر X من
1	1	-2 إلى -1	1	1	-2 إلى -1	1	1	-2 إلى -1
1	1	-1 إلى 0	1	1	-1 إلى 0	1	1	-1 إلى 0
1	1	0 إلى 1	1	1	0 إلى 1	1	1	0 إلى 1
2	2	1 إلى 3	2	2	1 إلى 3	2	2	1 إلى 3
4	4	3 إلى 7	4	4	3 إلى 7	4	4	3 إلى 7

3. ما الذي ينطبق على نواتج قسمة $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$ لدالة متزايدة؟ لدالة متناقصة؟ لدالة ثابتة؟

4. أين رأيت ناتج قسمة $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$ سابقًا؟ هل يعزز هذا إجاباتك في الجزء 3؟

سيساعدك تحليل نواتج قسمة $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$ في الاستكشاف على فهم التعريف التالي.

تعريف الدالة المتزايدة، المتناقصة والثابتة على فترة

تكون الدالة f **متزايدة** في فترة ما، إذا أدى التغيّر الموجب في x إلى تغيّر موجب في $f(x)$ ، لأي نقطتين في الفترة.

تكون الدالة f **متناقصة** في فترة ما، إذا أدى التغيّر الموجب في x إلى تغيّر سالب في $f(x)$ ، لأي نقطتين في الفترة.

تكون الدالة f **ثابتة** في فترة ما، إذا أدى التغيّر الموجب في x إلى عدم تغيّر $f(x)$ ، لأي نقطتين في الفترة.

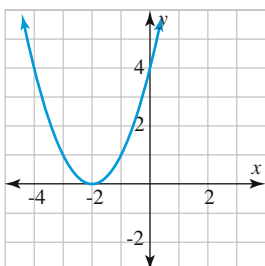
ملاحظة تعليمية

ينبغي أن يفهم الطلاب أنه إذا كانت الدالة f متزايدة على فترة معينة، يكون $f(x_1) < f(x_2)$ لكل $x_1 < x_2$ في الفترة. هذا يعني أن أي مستقيم يصل بين نقطتين على منحنى الدالة هو ذو ميل موجب. ينبغي أن يفهم الطلاب أيضًا أنه إذا كانت الدالة f متناقصة على فترة معينة، يكون $f(x_1) > f(x_2)$ لكل $x_1 < x_2$ في الفترة. هذا يعني أن أي مستقيم يصل بين نقطتين على منحنى الدالة هو ذو ميل سالب.

مثال 6 تحديد فترات التزايد والتناقص لدالة

حدد لكل دالة الفترات التي تتزايد فيها والفترات التي تتناقص فيها.

A. $f(x) = (x + 2)^2$

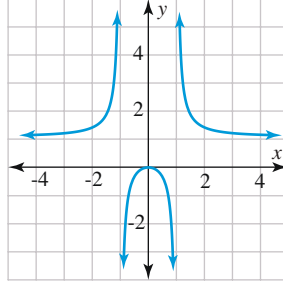


(تابع)

ملاحظات على الأمثلة

اشرح كيف يرتبط التمثيل البياني للدالة بتعريف الدالة المتزايدة على فترة والمتناقصة على فترة.

B. $g(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$



الحل

A. نلاحظ من خلال التمثيل البياني أن الدالة f تتناقص في الفترة $[-\infty, -2]$ وتزايد في الفترة $[-2, \infty]$.

B. نلاحظ من خلال التمثيل البياني أن الدالة g تتزايد في الفترة $[-\infty, -1]$ وتتناقص مرة أخرى في $[0, 1]$ ، وتتناقص مرة أخرى في $[1, \infty]$.
(الفترات مفتوحة عند -1 و 1 ، لأن الدالة غير معرفة عند هاتين القيمتين).

حاول أن تحل التمرين 14

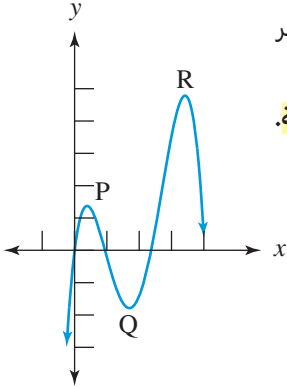
سؤال للتفكير

س: الدالة g متناقصة في الفترة $[0, 1]$ وكذلك في الفترة $[1, \infty]$. هل يمكن القول إنها متناقصة في الفترة $[0, \infty]$ ؟
نموذج إجابة:
كلا، يكفي أن نلاحظ مثلاً أن $g(0) < g(2)$.

إرشاد

لاحظ أننا قمنا بتضمين -2 في الفترتين. لا تقلق من أن يؤدي ذلك إلى بعض التناقضات حول ما يحدث عند -2 ، لأننا نتحدث فقط عن الدوال المتزايدة والمتناقصة في الفترات، و -2 هي نقطة فحسب.

القيم القصوى المحلية



تتميز الكثير من التمثيلات البيانية بوجود قمم وقيعان عندما تتغير من التزايد إلى التناقص والعكس. يمكن تصنيف كل من القيم القصوى المحلية إلى **قيمة عظمى محلية** أو **قيمة صغرى محلية**. ويمكن رؤية الفرق بسهولة بيانياً.

يوضح الشكل المجاور تمثيلاً بيانياً به ثلاث قيم قصوى محلية: قيمتان عظميان محليتان عند النقطتين P و R وقيمة صغرى محلية عند Q.

هذا مفهوم آخر من مفاهيم الدوال الذي رؤيته بيانياً أسهل من وصفه جبرياً. لاحظ أن قيمة عظمى محلية ليست بالضرورة

القيمة العظمى للدالة في مجالها الكلي، إنما هي أكبر قيمة للدالة في فترة معينة.

كذلك فقيمة صغرى محلية ليست بالضرورة القيمة الصغرى للدالة في مجالها الكلي، إنما هي أصغر قيمة للدالة في فترة معينة.

لقد سبق وذكرنا أن أفضل طريقة لدراسة سلوك التزايد والتناقص تتضمن حساب التفاضل والتكامل، وليس من الغريب أن ينطبق نفس الشيء على القيم القصوى المحلية. سنكتفي بشكل عام في هذا المقرر بتحديد القيم القصوى المحلية من خلال التمثيل البياني، على الرغم من أنه يمكن أحياناً إجراء التأكد الجبري عند معرفة المزيد عن دوال معينة.

القيم القصوى المحلية

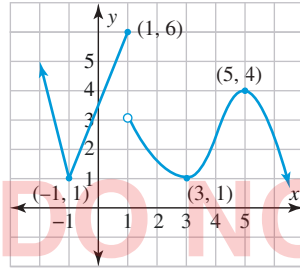
القيمة العظمى المحلية للدالة f هي قيمة $f(c)$ التي تكون أكبر من أو تساوي جميع قيم المدى للدالة f في فترة مفتوحة تتضمن c .

القيمة الصغرى المحلية للدالة f هي قيمة $f(c)$ التي تكون أصغر من أو تساوي جميع قيم المدى للدالة f في فترة مفتوحة تتضمن c .

يُطلق على القيم القصوى المحلية أيضًا اسم **القيم القصوى النسبية**.

مثال 7 تحديد القيم القصوى المحلية

وَضِّحْ ما إذا كانت كل نقطة محددة تُعرِّف قيمة صغرى محلية أم قيمة عظمى محلية أم لا تعرف أيًا منهما. وحدد فترات تزايد الدالة وتناقصها.



الحل

عند النقطة $(-1, 1)$ للدالة قيمة صغرى محلية هي $y = 1$ وكذلك عند النقطة $(3, 1)$ وهي $y = 1$.

عند النقطة $(1, 6)$ للدالة قيمة عظمى محلية هي $y = 6$ وكذلك عند النقطة $(5, 4)$ وهي $y = 4$.

الدالة متناقصة في الفترات $[-\infty, -1]$ و $[1, 3]$ و $[5, \infty]$.

الدالة متزايدة في الفترات $[-1, 1]$ و $[3, 5]$.

حاول أن تحل التمرين 18

استعمال برنامج التمثيل البياني لإيجاد القيم القصوى المحلية

معظم برامج التمثيل البياني الحديثة تتضمن وظائف البحث عن "القيم العظمى" و "الصغرى" التي تحدد القيم القصوى المحلية وذلك عن طريق البحث عن تغيرات الإشارة في Δy . ليس من السهل العثور على القيم القصوى المحلية من خلال تكبيرها، لأن التمثيلات البيانية تتمدد وتخفي السلوك الذي تبحث عنه. إذا استعملت هذه الطريقة، فحافظ على تضيق النافذة الرأسية للحفاظ على بعض الانحناء في التمثيل البياني.

سؤال للتفكير

س: هل تُعتبر القيم العظمى المحلية أكبر قيم للدالة

على مجالها؟

نموذج إجابة:

كلا، لأن الدالة تتزايد إلى ما لانهاية من الجهة اليسرى

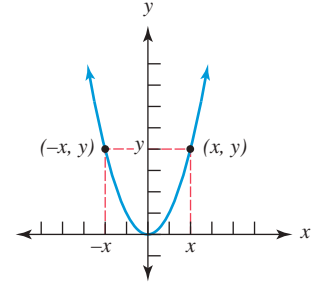
(كلما تناقص الإحداثي x).

التناظر

من حيث المفهوم البياني، تحمل كلمة "التناظر" في الرياضيات نفس المعنى الذي تدل عليه في الفن: حيث تبدو الصورة (التمثيل البياني في هذه الحالة) "متماثلة" عند رؤيتها بأكثر من طريقة. والمثير في التناظر الرياضي أنه يمكن تمييزه عددًا وجبريًا أيضًا. سندرس ثلاثة أنواع خاصة من التناظر، يمكن التعرف على كل منها بسهولة من تمثيل بياني أو جدول قيم أو صيغة جبرية، بمجرد معرفة ما نبحث عنه. ونظرًا إلى أننا نريد التركيز في هذا القسم على الروابط بين النماذج الثلاثة (البيانية والعديدية والجبرية)، سنشرح التناظرات المتنوعة في النماذج الثلاثة جنبًا إلى جنب.

التناظر بالنسبة إلى المحور y مثال: $f(x) = x^2$

بيانيًا



عدديًا

x	y
-3	9
-2	4
-1	1
1	1
2	4
3	9

جبريًا

لجميع قيم x الموجودة في مجال الدالة f ،

$$f(-x) = f(x)$$

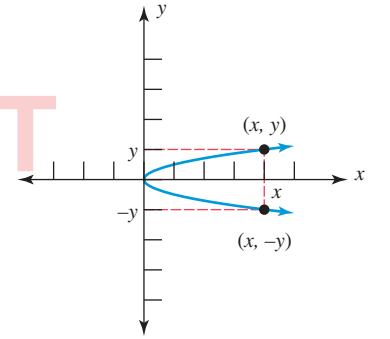
الدالة التي تحقق هذه الخاصية (على سبيل المثال

 x^n ، حيث n عدد زوجي) هي **دالة زوجية**.

DO NOT PRINT

التناظر بالنسبة إلى المحور x مثال: $x = y^2$

بيانيًا



عدديًا

x	y
9	-3
4	-2
1	-1
1	1
4	2
9	3

جبريًا

التمثيلات البيانية التي بها هذا النوع من التناظر

ليست دوالاً (باستثناء الدالة الصفرية)، لكن يمكن

أن نقول إن النقطة $(x, -y)$ موجودة على التمثيلالبياني متى وجدت النقطة (x, y) على

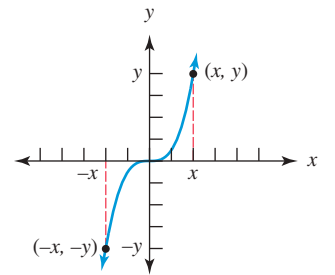
التمثيل البياني.

DO NOT PRINT

التناظر بالنسبة إلى نقطة الأصل

مثال: $f(x) = x^3$

بيانيًا



عدديًا

x	y
-3	-27
-2	-8
-1	-1
1	1
2	8
3	27

جبريًا

لجميع قيم x الموجودة في مجال الدالة f ،

$$f(-x) = -f(x)$$

الدالة التي تحقق هذه الخاصية (على سبيل المثال

 x^n ، حيث n عدد فردي) هي **دالة فردية**.

مثال 8 تحديد الدوال الزوجية والدوال الفردية

حدد ما إذا كانت كل من الدوال التالية فردية أم زوجية أم ليست أيًا منهما.

A. $f(x) = x^2 - 3$

B. $g(x) = x^2 - 2x - 2$

C. $h(x) = \frac{x^3}{4 - x^2}$

الحل

A. حل جبريًا

نجد $f(-x)$

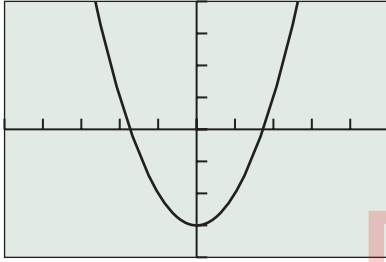
$$f(-x) = (-x)^2 - 3 = x^2 - 3$$

$$= f(x)$$

بما أن $f(-x) = f(x)$ صحيحة لجميع قيم x ، إذن الدالة f زوجية.

تحقق بيانيًا

التمثيل البياني موضح في الشكل المجاور. ويبدو بشكل واضح تناظر الرسم البياني حول المحور y ، إذن، الدالة زوجية.



$[-5, 5]$ في $[-4, 4]$

B. حل جبريًا

نجد $g(-x)$

$$g(-x) = (-x)^2 - 2(-x) - 2$$

$$= x^2 + 2x - 2$$

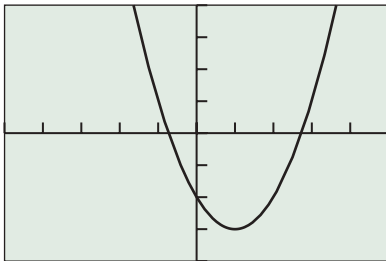
بمقارنة الدالة $g(-x)$ مع الدالة $g(x) = x^2 - 2x - 2$ نجد أن $g(-x) \neq g(x)$ لذا نستنتج أن الدالة $g(x)$ ليست زوجية.

وبمقارنة الدالة $g(-x)$ مع الدالة $-g(x) = -x^2 + 2x + 2$ نجد أن $g(-x) \neq -g(x)$ لذا نستنتج أن الدالة $g(x)$ ليست فردية.

إذن، الدالة $g(x)$ ليست زوجية ولا فردية.

تحقق بيانيًا

التمثيل البياني موضح في الشكل المجاور وهو غير متناظر لا بالنسبة للمحور y ولا بالنسبة لنقطة الأصل. إذن، الدالة ليست زوجية ولا فردية.



$[-5, 5]$ في $[-4, 4]$

(تابع)

تنبيه

قد لا ينتبه بعض الطلاب إلى أن الدالة يمكن أن لا تكون فردية ولا زوجية. اضرب لهم مثلًا دالة مثل $f(x) = x^3 - x^2$ لا تكون زوجية ولا فردية.

سؤال للتفكير

س: ما الفرق بين استعمال مصطلحي "فردية" و "زوجية" للدوال واستعمالهما للأعداد؟ نموذج إجابة:

الأعداد إما فردية وإما زوجية، في حين كثير من الدوال لا تكون فردية ولا زوجية. الدالة g هي مثال على ذلك.

ملاحظة تعليمية

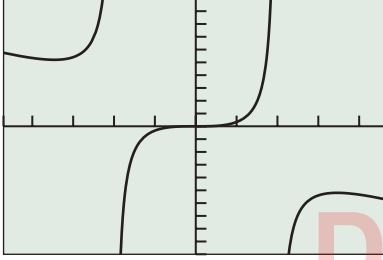
يمكننا استعمال سلك معدني ممدد على طول منحنى الدالة لتبين معنى تناظر الدالة الفردية. إذا دار السلك (المتخذ شكل المنحنى) حول نقطة الأصل بزاوية 180° ، فإنه سيعود ويتطابق مع منحنى الدالة من جديد.

C. حل جبريًا

نجد $h(-x)$

$$h(-x) = \frac{(-x)^3}{4 - (-x)^2} = \frac{-x^3}{4 - x^2} = -h(x)$$

بما أن $h(-x) = -h(x)$ صحيحة لجميع قيم x ما عدا ± 2 ، (غير الموجودة في مجال h) إذن الدالة h فردية.



في $[-4.7, 4.7]$ في $[-10, 10]$

تحقق بيانيًا

التمثيل البياني موضح في الشكل المجاور ويبدو بشكل واضح تناظره حول نقطة الأصل. إذن، الدالة h فردية.

حاول أن تحل التمرين 25

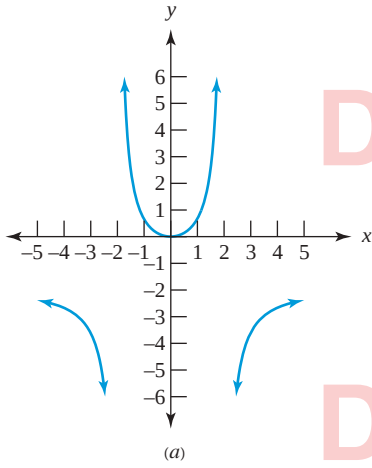
خطوط التقارب

في الشكل المجاور 2.1.4a ادرس التمثيل البياني للدالة

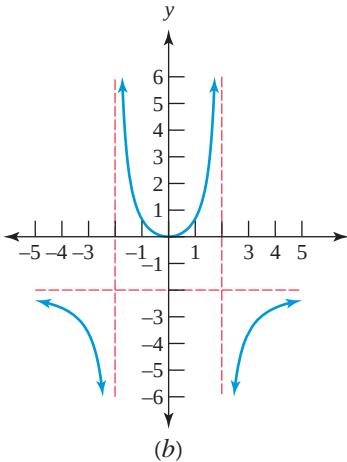
$$f(x) = \frac{2x^2}{4 - x^2}$$

يبدو أن التمثيل البياني يتمدد إلى اليمين واليسار، ويقترب من الخط الأفقي $y = -2$. نطلق على هذا الخط اسم **خط تقارب أفقي**.

بنفس الطريقة، يبدو أن التمثيل البياني يتمدد إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويقترب من الخطين الرأسيين $x = 2$ و $x = -2$. نطلق على كل خط من هذه الخطوط **خط تقارب رأسي**.



(a)



(b)

الشكل 2.1.4 التمثيل البياني للدالة

$$f(x) = \frac{2x^2}{4 - x^2}$$

وخطوط التقارب الممثلة بخطوط متقطعة.

خطوط التقارب الأفقية والرأسية

الخط المستقيم $y = b$ هو خط تقارب أفقي للتمثيل البياني للدالة $y = f(x)$ ، إذا كانت قيم $f(x)$ تقترب من b عند إقتراب قيم x من $+\infty$ أو $-\infty$.

الخط المستقيم $x = a$ هو خط تقارب رأسي للتمثيل البياني للدالة $y = f(x)$ ، إذا كانت قيم $f(x)$ تقترب من $+\infty$ أو $-\infty$ عند اقتراب قيم x من a من أي اتجاه.

أسئلة للتفكير

س: ما أقصى عدد لخطوط التقارب الأفقي للدالة؟ لماذا؟

نموذج إجابة:

إنّان، لأن الدالة يمكن أن يكون لها خط تقارب أفقي فقط عندما تقترب قيمة x من سالب مالانهاية أو موجب مالانهاية.

س: متى يكون للدالة خط تقارب أفقي واحد؟

نموذج إجابة:

عند اقتراب $f(x)$ من نفس القيمة L ، عندما تقترب قيمة x من سالب مالانهاية أو موجب مالانهاية.

مثال 9 تحديد خطوط التقارب للتمثيل البياني

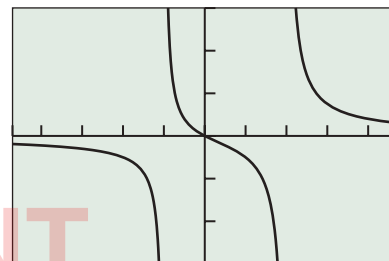
حدّد خطوط التقارب الرأسية أو الأفقية للتمثيل البياني للدالة $y = \frac{x}{x^2 - x - 2}$

الحل

ناتج القسمة $\frac{x}{x^2 - x - 2} = \frac{x}{(x+1)(x-2)}$ غير معرّف عند $x = -1$ و $x = 2$ ، مما يجعلهما موقعين ممكنين لخطوط تقارب رأسية. يبين التمثيل البياني في الشكل 2.1.5 توضيحاً لخطوط التقارب الرأسية لكل من $x = -1$ و $x = 2$.

بالنسبة إلى قيم x الكبيرة، يكون البسط (وهو عدد كبير) عددًا صغيرًا بالمقارنة مع المقام (هو ناتج ضرب عددين كبيرين)، مما يشير إلى أنه كلما زادت قيمة x تقترب قيمة y أكثر فأكثر من الصفر يدل هذا على وجود خط تقارب أفقي عند $y = 0$.

يبين التمثيل البياني في الشكل المجاور توضيحاً لوجود خط تقارب أفقي عند $y = 0$ عندما قيم x تقترب من ∞ . يشير نفس المنطق إلى أنه كلما اقتربت قيم x من سالب مالانهاية فإن قيم y تقترب من الصفر مما يشير إلى وجود نفس خط التقارب الأفقي عندما قيم x تقترب من $-\infty$. مرة أخرى، يوفر التمثيل البياني دعماً لهذا.



الشكل 2.1.5 في $[-4.7, 4.7]$ في $[-3, 3]$

الشكل 2.1.5

ملاحظات على التمارين

التمارين 5-12، تركز على المجال والمدى، واتصال الدالة.

التمارين 13-22، تركز على التزايد والتناقص للدالة والقيم القصوى المحلية.

التمارين 36-40، تدرب الطالب على أنماط من الاختبارات.

التقييم المستمر

التقييم الذاتي:

التمارين 5, 9, 12, 15, 19, 25, 31

حاول أن تحل التمرين 30

$$\text{بشكل عام يكون للتمثيل البياني للدالة النسبية } f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

خط تقارب أفقي معادلته

$$\begin{cases} y = 0, & n < m \\ y = \frac{a_n}{b_m}, & n = m \end{cases}$$

ولا يوجد خط تقارب أفقي للدالة عندما تكون $n > m$

ويكون للتمثيل البياني للدالة $f(x)$ خط تقارب رأسي عند كل صفر من أصفار المقام بعد كتابة الكسر في أبسط صورة.

مراجعة سريعة 2.1

في التمارين 5-10، أوجد جبريًا جميع قيم x التي تجعل المقدار الجبري غير معرف. ادمع إجابتك بالتمثيل البياني.

5. $\frac{x}{x-16}$ $x=16$
6. $\frac{x}{x^2-16}$ $x=\pm 4$
7. $\sqrt{x-16}$ $x < 16$
8. $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-1}$ $x=\pm 1$
9. $\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{3-x}}$ $x < -2$ أو $x \geq 3$
10. $\frac{x^2-2x}{x^2-4}$ $x=\pm 2$

في التمارين 1-4، حل المعادلة أو المتباينة.

1. $x^2 - 16 = 0$ $x = \pm 4$
2. $x - 10 < 0$ $x < 10$
3. $9 - x^2 = 0$ $x = \pm 3$
4. $5 - x \leq 0$ $x \geq 5$

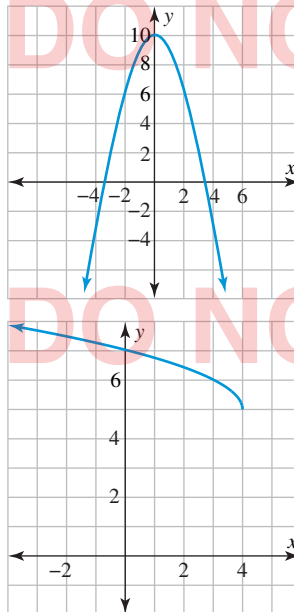
التمارين 2.1

في التمارين 5-8، أوجد جبريًا مجال الدالة.

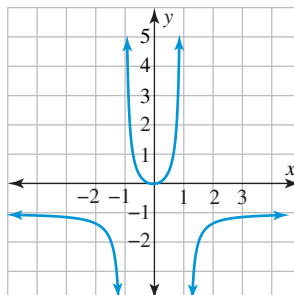
5. $f(x) = \frac{3x-1}{(x+3)(x-1)}$ $]-\infty, -3[\cup]-3, 1[\cup]1, \infty[$
6. $g(x) = \frac{x}{x^2-5x}$ $]-\infty, 0[\cup]0, 5[\cup]5, \infty[$
7. $h(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{(x+1)(x^2+1)}$ $]-\infty, -1[\cup]-1, 4[$
8. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{5}{x-3}$ $]-\infty, 0[\cup]0, 3[\cup]3, \infty[$

في التمارين 9-11، استعمل التمثيل البياني للدالة لإيجاد مدى الدالة.

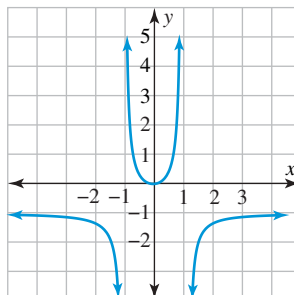
9. $f(x) = 10 - x^2$ $]-\infty, 10]$



10. $g(x) = 5 + \sqrt{4-x}$ $[5, \infty[$



11. $f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$ $]-\infty, -1[\cup]0, \infty[$



في التمارين 1-3، حدد ما إذا كانت الصيغة تحدد y كدالة للمتغير x ، إذا لم تكن كذلك، اشرح السبب.

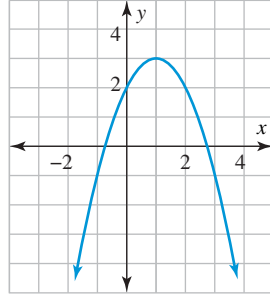
1. $y = \sqrt{x-4}$ دالة
2. $x = 2y^2$ ليست دالة: $x = 8 \Rightarrow y = \pm 2$
3. $x = 2 - y$ دالة

4. استعمل اختبار الخط الرأسي لتحديد ما إذا كان المنحنى يُعد تمثيلًا بيانيًا لدالة.

- a. دالة
- b. ليس دالة
- c. ليس دالة
- d. دالة

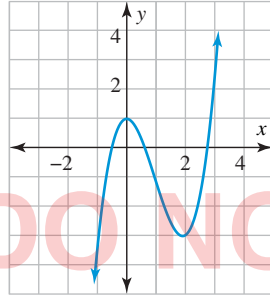
15. $g(x) = 3 - (x - 1)^2$

الدالة متزايدة في الفترة
 $]-\infty, 1]$ ، ومتناقصة في الفترة
 $[1, \infty[$.



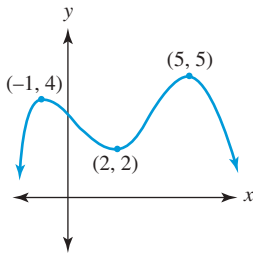
16. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

الدالة متزايدة في الفترتين $[2, \infty[$ و
 $]-\infty, 0]$ ، ومتناقصة في الفترة $[0, 2]$.

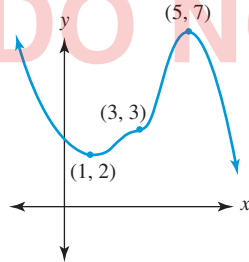


في التمرينين 17 و 18، وضح ما إذا كانت كل نقطة محددة تعزف
 قيمة صغرى محلية أم قيمة عظمى محلية أو لا تعرف أيًا منهما،
 وحدد فترات تزايد الدالة وتنقصها.

17.

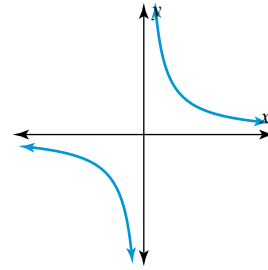


18.

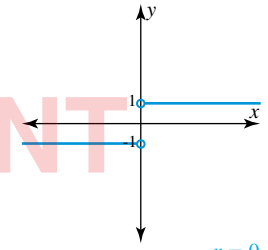


12. حدد ما إذا كان لكل دالة نقطة عدم اتصال عند $x = 0$.
 في حالة وجود عدم اتصال، حدد نوعه.

a. $g(x) = \frac{3}{x}$



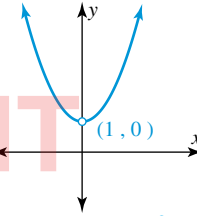
b. $f(x) = \frac{|x|}{x}$



عدم اتصال لانهائي عند $x = 0$

عدم اتصال قفزي عند $x = 0$

c. $h(x) = \frac{x^3 + x}{x}$

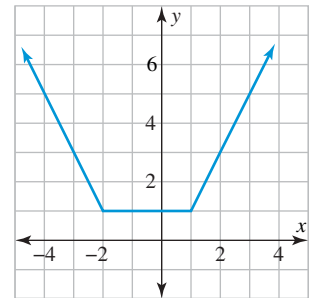


عدم اتصال قابل للإزالة عند $x = 0$

في التمارين 13-16، استعمل التمثيل البياني لتحديد فترات التزايد
 والتناقص والثبات للدالة.

13. $g(x) = |x + 2| + |x - 1| - 2$

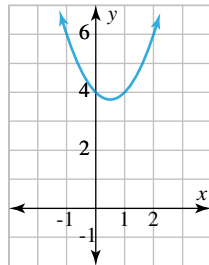
الدالة متناقصة في الفترة
 $]-\infty, -2]$ ، وثابتة في الفترة
 $[-2, 1]$ ، ومتزايدة في الفترة
 $[1, \infty[$.



في التمارين 19-22، استعمل التمثيل البياني لكل دالة لإيجاد القيم
 العظمى والصغرى المحلية وقيم x التي توجد عندها بشكل تقريبي.

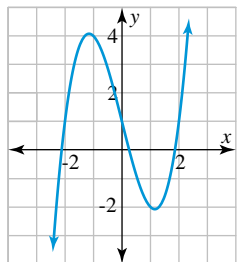
19. $f(x) = 4 - x + x^2$

قيمة صغرى محلية تساوي 3.8 تقريبًا عند $x = 0.5$



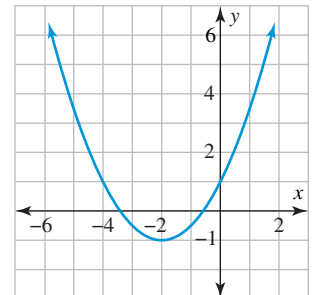
20. $g(x) = x^3 - 4x + 1$

- قيمة صغرى محلية تساوي -2 تقريبًا
 عند: $x \approx 1.2$
- قيمة عظمى محلية تساوي 4 تقريبًا
 عند: $x \approx -1.3$



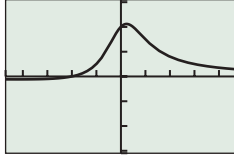
14. $h(x) = 0.5(x + 2)^2 - 1$

الدالة متناقصة في الفترة
 $]-\infty, -2]$ ، ومتزايدة في
 $[-2, \infty[$.



في التمرينين 33 و 34، صل الدالة بالتمثيل البياني المناسب عن طريق دراسة خطوط التقارب. التمثيلان البيانيان موضحان في نفس نافذة العرض.

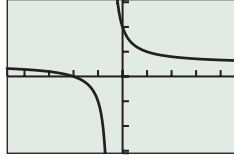
33. $y = \frac{x+2}{2x+1}$
b



[-3.1, 3.1] في [-4.7, 4.7]

(a)

34. $y = \frac{x+2}{2x^2+1}$
a



[-3.1, 3.1] في [-4.7, 4.7]

(b)

35. **الكتابة للتعلم** وضح سبب أنه لا يمكن أن يكون للتمثيل البياني أكثر من خطّي تقارب أفقيين.

أسئلة اختبار معيارية

36. **صواب أم خطأ** التمثيل البياني للدالة f معرف لمجموعة جميع النقاط $(x, f(x))$ ، حيث x موجودة في مجال f . برّر إجابتك.

37. **صواب أم خطأ** العلاقة التي تكون متناظرة بالنسبة إلى المحور x لا يمكن أن تكون دالة. برّر إجابتك.

38. **اختيار من متعدد** أي دالة مما يلي متصلة؟ B

A. عدد الطلاب الملتحقين بمدرسة معينة كدالة للزمن.

B. درجة الحرارة في الهواء الطلق كدالة للزمن.

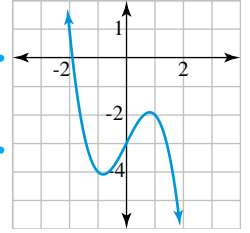
C. تكلفة البريد كدالة لوزن الخطاب.

D. سعر السهم كدالة للزمن.

E. عدد عبوات العصير المباعة في ملعب كرة القدم كدالة لدرجة الحرارة الخارجية.

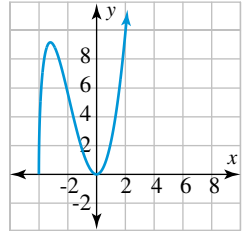
21. $h(x) = -x^3 + 2x - 3$

- قيمة صغرى محلية تساوي -4 تقريباً عند: $x \approx -0.9$
- قيمة عظمى محلية تساوي -2 تقريباً، عند: $x \approx 0.8$



22. $h(x) = x^2 \sqrt{x+4}$

- قيمة صغرى محلية تساوي 0 عند: $x = 0$
- قيمة عظمى محلية تساوي 9 تقريباً، عند: $x \approx -3.2$



في التمارين 23-28، حدد ما إذا كانت الدالة زوجية أم فردية أم ليست أيًا منهما.

23. $f(x) = 2x^4$

زوجية

24. $g(x) = x^3$

فردية

25. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$

زوجية

26. $g(x) = \frac{3}{1+x^2}$

زوجية

27. $f(x) = 2x^3 - 3x$

فردية

28. $f(x) = x^3 + 0.04x^2 + 3$

ليست زوجية ولا فردية

في التمارين 29-32، استعمل طريقة من اختيارك لإيجاد جميع خطوط التقارب الأفقية والرأسية للدالة.

29. $f(x) = \frac{x}{x-1}$

خط تقارب رأسي $x = 1$ ، خط تقارب أفقي $y = 1$.

30. $q(x) = \frac{x-1}{x}$

خط تقارب رأسي $x = 0$ ، خط تقارب أفقي $y = 1$.

31. $g(x) = \frac{x+2}{3-x}$

خط تقارب رأسي $x = 3$ ، خط تقارب أفقي $y = -1$.

32. $q(x) = \frac{4}{x^2+1}$

لا يوجد خطوط تقارب رأسية، خط تقارب أفقي $y = 0$.

42. **نشاط جماعي** كَوْن مع زملائك في الصف مجموعات من اثنين أو ثلاثة. ارسم التمثيل البياني لدالة، لكن لا تظهره لزملائك في المجموعة. باستعمال لغة الدوال (كما في التمرين السابق)، صف الدالة التي رسمتها تمامًا. تبادل الأوصاف مع زملائك الآخرين في المجموعة ولاحظ ما إذا كان بإمكان كل منكم رسم التمثيل البياني الذي رسمه الآخرون.

توسيع الأفكار

43. **الكتابة للتعلم** الدالة المتصلة f مجالها جميع الأعداد الحقيقية. إذا كان $f(-1) = 5$ و $f(1) = -5$ ، وضح لماذا يجب أن يكون للدالة f صفرًا واحدًا على الأقل في الفترة $[-1, 1]$. يمكن تعميم هذا كخاصية للدوال المتصلة تُعرف باسم "نظرية القيمة الوسطية".

44. **إثبات نظرية** أثبت أن التمثيل البياني لكل دالة فردية مجالها جميع الأعداد الحقيقية يجب أن يمر بنقطة الأصل.

45. **إيجاد المدى** مثل بيانيًا الدالة $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{2x^2 + 1}$.

a. ما خط التقارب الأفقي الظاهر للتمثيل البياني؟

b. بناءً على التمثيل البياني الذي رسمته، حدد المدى الظاهر للدالة f .

c. أثبت جبريًا أن $1.5 < \frac{3x^2 - 1}{2x^2 + 1} \leq -1$ لجميع قيم x ومن ثم أكد تخمينك في الجزء (b).

39. **اختيار من متعدد** أي مما يلي دالة غير متصلة؟ C

A. الارتفاع الذي توجد عليه كدالة للزمن أثناء الطيران من الدوحة إلى بيروت.

B. زمن السفر من مدينة الوكرة إلى مدينة الشمال كدالة لسرعة القيادة.

C. عدد الكرات التي يمكن استيعابها بالكامل في صندوق معين كدالة لنصف قطر الكرات.

D. مساحة الدائرة كدالة لنصف القطر.

E. وزن طفل كدالة للزمن بعد الولادة.

40. **اختيار من متعدد** أي مما يلي دالة متناقصة؟ C

A. درجة الحرارة في الهواء الطلق كدالة للزمن.

B. مؤشر داو جونز الصناعي كدالة للزمن.

C. ضغط الهواء في الغلاف الجوي للأرض كدالة للارتفاع.

D. سكان العالم منذ 1900 كدالة للزمن.

E. ضغط المياه في المحيط كدالة للعمق.

استكشاف

41. **نشاط جماعي** ارسم (يدويًا) التمثيل البياني للدالة f التي مجالها جميع الأعداد الحقيقية والتي تحقق جميع الشروط التالية:

a. f متصلة لجميع قيم x .

b. f متزايدة في الفترة $[0, \infty)$ وفي الفترة $(-\infty, 3]$.

c. f متناقصة في الفترة $[0, 3]$ وفي الفترة $[5, \infty)$.

d. $f(0) = f(5) = 2$.

e. $f(3) = 0$.

إجابات أسئلة التمارين 2.1

17. عظمى محلية: $(-1, 4)$ ، صغرى محلية: $(2, 2)$ ، عظمى محلية: $(5, 5)$.

الدالة متزايدة في $[-1, 2]$ ومتناقصة في $[2, 5]$ ومتناقصة في $[5, \infty[$

18. صغرى محلية: $(1, 2)$ ، ليست قيمة قصوى: $(3, 3)$ ، عظمى محلية: $(5, 7)$.

الدالة متناقصة في $[-1, 1]$ و متزايدة في $[1, 5]$ و متناقصة في $[5, \infty[$

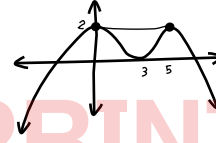
35. لأن خط التقارب الأفقي الأول تحدده قيمة $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ إن وجدت، وخط التقارب الثاني تحدده قيمة $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ إن وجدت.

36. صواب، لأن لكل قيمة من قيم x في مجال الدالة f هناك قيمة

للدالة تساوي $f(x)$ إذن التمثيل البياني للدالة f معرّف لمجموعة النقاط $(x, f(x))$.

37. صواب، لأن اختبار الخط الراسي يعطي نقطتين على المنحنى لهما نفس الإحداثي x .

41.



43. منحنى الدالة هو خط يصل النقطة $(-1, 5)$ بالنقطة $(1, -5)$. وبالتالي سيقطع هذا الخط المحور x هذا يعني جبريًا أن للدالة صفر في الفترة $[-1, 1]$.

44. لدينا: $f(-x) = -f(x)$

عوض $x = 0$ $f(-0) = -f(0)$

$f(0) = -f(0)$

$2f(0) = 0$

$f(0) = 0$

45. ارسم بالحاسبة.

a. $y = \frac{3}{2}$

b. $\left[-1, \frac{3}{2}\right[$

c. $\frac{3x^2-1}{2x^2+1} - (-1) = \frac{3x^2-1}{2x^2+1} + 1 = \frac{5x^2}{2x^2+1} \geq 0$

$$\frac{3x^2-1}{2x^2+1} - \frac{3}{2} = \frac{6x^2-2-6x^2-3}{2(2x^2+1)} < 0$$

$$\frac{3x^2-1}{2x^2+1} \geq -1 \text{، إذن،}$$

$$\frac{3x^2-1}{2x^2+1} < \frac{3}{2} \text{، إذن،}$$

$$\text{إذن، } -1 \leq \frac{3x^2-1}{2x^2+1} < \frac{3}{2} \text{، أي أن } -1 \leq f(x) < \frac{3}{2}$$

و هذه النتيجة تؤكد مدى الدالة f في الفرع b .

Operations on Functions

2.2 العمليات على الدوال

دمج الدوال جبريًا

للدوال عمليات جبرية تعتمد على نفس العمليات التي نطبقها على الأعداد الحقيقية (الجمع والطرح والضرب والقسمة). إحدى طرق تكوين دوال جديدة هي تطبيق تلك العمليات باستعمال التعريفات التالية.

تعريف جمع الدوال وطرحها وضربها وقسمتها

افترض أن f و g دالتان لهما مجالان متقاطعان. إذن لكل قيم x في التقاطع، تتحدد العمليات الجبرية لكل من الدالتين f و g وفق القواعد الآتية:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

الجمع:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

الطرح:

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

الضرب:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$$

القسمة:

في كل حالة، يتكون مجال الدالة الجديدة من كل الأعداد التي تنتمي في الوقت نفسه إلى مجال f ومجال g ، أي إن مجال الدالة الجديدة هو تقاطع مجالي الدالتين.

ووفق ما ذكر، تُستثنى أصفار المقام من مجال ناتج القسمة.

علامة "+" في العبارة " $(f + g)(x)$ " يشير إلى عملية جديدة تمامًا تُسمى جمع الدوال. فهو يكون دالة جديدة، $f + g$ ، من الدوال المعطاة f و g . ومثل أي دالة، تتحدد $f + g$ بما تفعله، فهي تربط قيمة x من المجال، بقيمة $f(x) + g(x)$ من المدى.

لاحظ أن علامة "+" في " $f(x) + g(x)$ " تمثل العملية المعروفة لجمع الأعداد الحقيقية.

إذن، مع قيام نفس الرمز بأدوار مختلفة على كل جانب من إشارة المساواة، تضم التعريفات أعلاه تفاصيل أكثر مما يبدو للوهلة الأولى. لحسن الحظ، فإن هذه التعريفات سهلة التطبيق.

$$1. 3a$$

$$2. r + s$$

نموذج إجابة:

$$1. f(3a) = (3a + 1)^2 = 9a^2 + 6a + 1$$

$$2. f(r + s) = (r + s + 1)^2 = r^2 + s^2 + 2rs + 2r + 2s + 1$$

ما ستتعلمه

- دمج الدوال جبريًا
- تركيب الدوال

... ولماذا

أغلب الدوال التي ستقابلها في حساب التفاضل والتكامل وفي واقع الحياة يمكن إنشاؤها بدمج أو بتعديل دوال أخرى.

معايير الدرس

11A.4.1

11A.4.3

المصطلحات

- تركيب الدوال composition of functions

الهدف

سوف يتمكن الطلاب من بناء دوال جديدة من خلال إجراء العمليات على الدوال الأساسية، الجمع والطرح والضرب والقسمة، وكذلك من خلال تركيب الدوال.

دليل الدرس

1. دمج الدوال جبريًا

2. تركيب الدوال

إرشاد

الرمز " $\cap$ "، يُقرأ "تقاطع" ويشير إلى مجموعة العناصر المشتركة (المتشابهة) في المجموعتين.

تحفيز

اسأل الطلاب: إذا كان لدى شخص ما حساب مصرفي فائدته منمذجة بالدالة $f(t) = 250t$ وحساب آخر فائدته منمذجة بالدالة $g(t) = 420t$. كيف يمكن كتابة الدالة التي تعطي قيمة الفائدة الإجمالية لكلا الحسابين؟ نموذج إجابة:

$$h(t) = 670t$$

نشاط المصطلحات

اطلب من الطلاب أن يراجعوا مفهوم التعويض لكي يستعدوا لفهم تركيب الدوال.

بداية، اطلب منهم أن يناقشوا كيف يمكن أن يبتن التعويض ما إذا كان عدد ما هو حل للمعادلة.

(عوض المتغير وانظر إذا كانت النتيجة صحيحة).

ثم قم بمساعدة الطلاب على تطوير مفهوم التعويض من خلال إعطائهم الدالة $f(x) = (x + 1)^2$ ليقوموا بشرح كيف يمكن تعويض ما يلي:

مثال 1 تعريف دوال جديدة جبريًا

افترض أن $f(x) = x^2$ و $g(x) = \sqrt{x+1}$.

أوجد صيغًا للدوال التالية وحدد مجال كل منها.

- A. $f + g$
 B. $f - g$
 C. $f \times g$
 D. $\frac{f}{g}$
 E. $g \times g$

الحل

نحدد في البداية أن مجال f هو كل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ وأن مجال g هو $[-1, \infty[$.
 يتداخل هذان المجالان، ويكون التقاطع هو $[-1, \infty[= \mathbb{R} \cap [-1, \infty[$
 إذن:

A. $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + \sqrt{x+1}$

ومجالها $[-1, \infty[$

B. $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - \sqrt{x+1}$

ومجالها $[-1, \infty[$

C. $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = x^2 \sqrt{x+1}$

ومجالها $[-1, \infty[$

D. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$

ومجالها $[-1, \infty[$.

لاحظ أن الفترة مفتوحة عند -1 لأن وجود المقدار $x + 1$ في المقام يعني أنه غير معرف عند $x = -1$

E. $(g \times g)(x) = g(x) \times g(x) = (\sqrt{x+1})^2$

ومجالها $[-1, \infty[$

لاحظ أنه يمكننا التعبير عن $(g \times g)(x)$ بشكل أبسط في الصورة $(g \times g)(x) = x + 1$
 غير أن التبسيط لن يُغير من حقيقة أن مجال $g \times g$ هو $[-1, \infty[$ (وفق التعريف).

في ظروف أخرى، من الممكن أن يكون مجال الدالة $h(x) = x + 1$ كل الأعداد الحقيقية،
 لكن في هذه الحالة هذا غير ممكن، فهي ناتج ضرب دالتين لكل منهما مجالاً مقيداً.

حاول أن تحل التمرين 3

أسئلة للتفكير

س: كيف ندمج دالتين في إطار الجمع أو الطرح؟
 نموذج إجابة:

ندمج الحدود المشابهة في كلتا الدالتين.

س: ما الرمز الجديد المستعمل في المثال للتعبير عن جمع، طرح، ضرب، وقسمة الدالتين وماذا يعني؟
 نموذج إجابة:

$$(f + g)(x) \text{ تعني } f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) \text{ تعني } f(x) - g(x)$$

$$(f \times g)(x) \text{ تعني } f(x) \times g(x)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \text{ تعني } \frac{f(x)}{g(x)}$$

س: كيف يمكن أن يكون مجال الدالة g مختلفًا عن مجال الدالة $\frac{f}{g}$ ؟
 نموذج إجابة:

يمكن أن يكون في مجال الدالة g قيم تساوي الدالة عندها الصفر. غير أن هذه القيم لا يمكن أن تنتمي إلى مجال الدالة $\frac{f}{g}$

س: كيف يمكن إيجاد مجال الدالة $\frac{f}{g}$ ؟
 نموذج إجابة:

أولاً نحدد ناتج تقاطع مجالي f و g ، ثم نحذف منه القيم التي تساوي الصفر عند الدالة g .
 س: هل يمكن استنتاج قاعدة عامة لإيجاد المجال من هذا المثال؟

نموذج إجابة:

مجال الدالة، الناتجة عن جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة دالتين، هو ناتج تقاطع مجالي الدالتين باستثناء أصفار الدالة المقسوم عليها في حال القسمة.

تنبيه

يعتقد بعض الطلاب أن شكل الدالة الناتجة من إجراء عملية جبرية على دالتين يكفي لمعرفة مجالها، وهذا غير صحيح. يكفي أن نلاحظ أن شكل الدالة $(g \times g)(x) = (\sqrt{x+1})^2 = x + 1$ يشير إلى أن مجالها هو كل الأعداد الحقيقية، مع أن مجالها هو الفترة $[-1, \infty[$.

للطلاب سريعى الإنجاز

اطلب من الطلاب إيجاد مجالات نواتج القسمة التالية حيث

$$f(x) = x^2 + 2x - 3$$

$$g(x) = x^2 - 1$$

$$h(x) = x^2 + 4x + 3$$

a. $\frac{f}{g+h}$

نموذج إجابة:

المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $x \neq -1$

للطلاب سريعى الإنجاز

b. $\frac{f-g}{g}$

نموذج إجابة:

المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $x \neq 1$ و $x \neq -1$

c. $\frac{h-g}{g-f}$

نموذج إجابة:

المجال هو مجموعة الأعداد الحقيقية x حيث $x \neq 1$

أسئلة للتفكير

س: كيف تجد أصفار كل مقام؟

نموذج إجابة:

حل معادلة المقام يساوي الصفر.

س: كيف تؤثر أصفار المقام على مجال الدالة؟

نموذج إجابة:

تُستثنى أصفار المقام من مجال الدالة.

إرشاد

يمكن استعمال خاصيتي التوزيع والإبدال لجمع وضرب الدوال لأن هذه العمليات ترتكز على جمع وضرب الأعداد الحقيقية.

أسئلة للتفكير

س: كيف يشمل حل هذا المثال على ضرب الدوال؟

نموذج إجابة:

في المثال ثلاث دوال: الطلب، السعر، والإيرادات. إذا كان سعر كل هاتف هو x وعدد الهواتف المباعة هو d ، يكون $d \cdot x$ هو إيرادات الشركة.

س: كيف نضرب دالتين؟

نموذج إجابة:

نضرب كل حد من الدالة الأولى بكل حد من الدالة الثانية، ثم ندمج الحدود المشابهة.

س: بالنسبة لدالة الطلب $d(x)$ ودالة الثمن $p(x)$ ،هل $d(x) \times p(x)$ يساوي $p(x) \times d(x)$ ؟

نموذج إجابة:

نعم، لأن الضرب له الخاصية الإبدال.

يمكن أن تعطي العمليات على الدوال مقادير جديدة ذات دلالة كما سترى في المثال التالي.

مثال 2 ضرب الدوال

تنتج شركة نوعًا جديدًا من الهواتف الذكية بالسعر x لكل هاتف، بالريال القطري. إذا علمت أن الطلب d ، بالوحدات المباعة، هو $d(x) = 5\,000 - 40x$ ، أي أن $d(x)$ هو عدد الهواتف المطلوبة للبيع في فترة محددة. ما هي إيرادات الشركة المتوقعة من مبيع الهواتف الذكية بدلالة السعر x ؟



الحل

إيرادات الشركة ستكون مساوية لناتج ضرب الطلب في سعر الهاتف الواحد.

$$\text{الطلب} \times \text{السعر} = \text{الإيرادات}$$

الطلب هو الدالة $d(x)$ ، السعر هو الدالة $p(x)$.

$$\text{ضرب الدالتين هو ضرب } (p \times d)(x) = p(x) \times d(x)$$

صيغة دالة السعر $p(x) = x$ ومجالها $x \geq 0$ لأن سعر الهاتف الواحد لا يمكن أن يكون عددًا سالبًا.

صيغة دالة الطلب $d(x) = 5\,000 - 40x$ ومجالها $x \leq 125$ ذلك لأن الطلب لا يمكن أن يكون عددًا سالبًا،

$$5\,000 - 40x \geq 0$$

$$-40x \geq -5\,000$$

$$x \leq 125$$

صيغة دالة الإيرادات R هي $R(x) = x(5\,000 - 40x)$ ومجالها هو تقاطع مجالي

الدالتين p و d ، أي $0 \leq x \leq 125$

$$R(x) = x(5\,000 - 40x)$$

$$= 5\,000x - 40x^2$$

إذن، الإيرادات التي ستحققها الشركة بدلالة سعر الهاتف تتمثل

$$\text{بالدالة } R(x) = 5\,000x - 40x^2 \text{، حيث } 0 \leq x \leq 125$$

تركيب الدوال

لا يصعب معرفة أن الدالة $\sqrt{\frac{1}{x}}$ تتكوّن من الدالتين الأساسيتين $\frac{1}{x}$ و $\sqrt{x}$ ، لكن هذه الدالة غير ناتجة عن جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة هاتين الدالتين الأساسيتين ، وإنما تنتج عن اندماج الدالتين ببساطة بوضعهما وفق الترتيب التالي:
دالة المقلوب أولاً ، ثم دالة الجذر التربيعي.
عملية دمج الدوال هذه ، التي ليس لها نظير في جبر الأعداد الحقيقية ، تُسمى **تركيب الدوال**.

تركيب الدوال

افترض أن f و g دالتان ، وأن مجال الدالة f يتقاطع مع مدى الدالة g
يُشار إلى تركيب f بعد g ، بالرمز $f \circ g$ ، ويتحدد بالقاعدة:

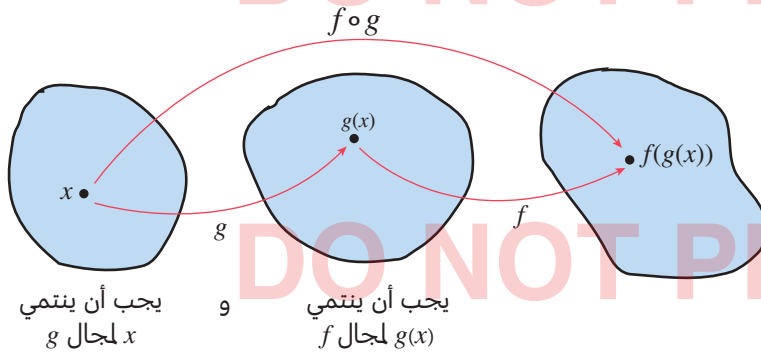
$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

يتكون مجال الدالة $f \circ g$ من كل قيم x التي في مجال g والتي تعيّن قيم $g(x)$ في مجال f
(انظر الشكل 2.2.1).

يرمز إلى تركيب g بعد f بالرمز $g \circ f$ ، ويعرف بصورة مشابهة لطريقة تعريف $f \circ g$.

ملاحظة تعليمية

تذكر أن تربط ما بين $f \circ g$ و $f(g(x))$ وتشارك في نطق
" f بعد g " أو " f عند g عند " x مع الطلاب.



الشكل 2.2.1 في التركيب $f \circ g$ ، يتم تطبيق g أولاً و f تالياً ، وذلك بعكس الترتيب الذي نقرأ به الرموز.

يمكن تطبيق دالة على دالة أخرى لإيجاد صيغة دالة جديدة كليًا، كما ستري في المثال التالي.

مثال 3 تطبيق دالة على دالة أخرى

لتكن الدالتان $f(x) = x^2$ و $g(x) = x + 1$

A. أوجد قيمة $f(g(3))$

B. أوجد صيغة $f(g(x))$

الحل

$$\begin{aligned} g(3) &= 3 + 1 = 4 \\ f(g(3)) &= f(4) \\ &= 4^2 \\ &= 16 \end{aligned}$$

A. طبق صيغة g
طبق صيغة f على النتيجة
استعمل صيغة f
بسط
إذن، $f(g(3)) = 16$

$$\begin{aligned} g(x) &= x + 1 \\ f(g(x)) &= f(x + 1) \\ &= (x + 1)^2 \\ &= x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

B. طبق صيغة g
طبق صيغة f على النتيجة
استعمل صيغة f
استعمل مفكوك $(a + b)^2$
إذن، $f(g(x)) = x^2 + 2x + 1$

حاول أن تحل التمرين 13

يوضح المثال الآتي أن المجال يختلف عند تركيب دالتين بترتيبين مختلفين.

مثال 4 إيجاد مجال تركيب دالتين

لتكن الدالتان $f(x) = x^2 - 1$ و $g(x) = \sqrt{x}$

أوجد مجال كل مما يلي:

A. $(g \circ f)(x)$

B. $(f \circ g)(x)$

(تابع)

سؤال للتفكير

س: ما الفرق بين $f(g(x))$ و $f(x) \times g(x)$ ؟

نموذج إجابة:

$f(x) \times g(x)$ هو حاصل الضرب بين القيمتين $f(x)$ و $g(x)$ ، أما $f(g(x))$ فهي قيمة الدالة f عند القيمة $g(x)$ كمغبر للدالة f .

سؤال للتفكير

س: إذا كان $g \circ f$ معرفًا، فهل هذا يعني أن $f \circ g$ معرف؟
نموذج إجابة:

كلا، مثلًا: $f(x) = x^2 - 4$ ، $g(x) = \sqrt{x}$ و $f \circ g$ معرف لأن $g(x)$ تنتمي إلى مجال f ، بينما $f \circ g$ غير معرف لأن $f(x)$ لا تنتمي دائمًا إلى مجال g :
 $g \circ f(1) = \sqrt{1^2 - 4} = \sqrt{-3}$ وهو غير ممكن.

الحل

A. اتبع الخطوات التالية لإيجاد مجال $(g \circ f)$ الخطوة 1 أوجد مجال $f(x)$ مجال الدالة $f(x) = x^2 - 1$ هو كل الأعداد الحقيقية، أي $D_f =]-\infty, \infty[$ الخطوة 2 أوجد مجال $g(x)$ مجال الدالة $g(x) = \sqrt{x}$ هو كل الأعداد الحقيقية غير السالبة،أي $D_g = [0, \infty[$ الخطوة 3 أوجد قيم x في مجال الدالة f حيث $f(x)$ تنتمي إلى مجال $g(x)$ ،مما يعني أن نستثني قيم x في مجال الدالة f حيث $f(x)$ لا تنتمي إلىمجال g . تمثل المجموعة الناتجة مجال $g \circ f$.بما أن مجال الدالة g هو $D_g = [0, \infty[$ ، فإن $f(x)$ تنتمي إلى مجال g عندما تكون $f(x) \geq 0$ أي $x^2 - 1 \geq 0$ لدراسة إشارة $x^2 - 1$ ، ابدأ بإيجاد جذورها:

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1 \text{ أو } x = -1$$

تكون إشارة $x^2 - 1$ مطابقة لإشارة معامل x^2 ، خارج الفترة التي يحدها جذرا $x^2 - 1$ إذن، $x^2 - 1 \geq 0$ لكل x في $[1, \infty[\cup]-\infty, -1]$ إذن، مجال $(g \circ f)$ هو $[1, \infty[\cup]-\infty, -1]$.B. لإيجاد مجال $(f \circ g)$ ، اتبع الخطوات التالية:الخطوة 1 أوجد مجال $g(x)$ مجال الدالة $g(x) = \sqrt{x}$ هو كل الأعداد الحقيقية غير السالبة،أي $D_g = [0, \infty[$ الخطوة 2 أوجد مجال f مجال الدالة $f(x) = x^2 - 1$ هو كل الأعداد الحقيقية،أي $D_f =]-\infty, \infty[$ الخطوة 3 أوجد قيم x في مجال الدالة g حيث $g(x)$ تنتمي إلى مجال f ،مما يعني أن نستثني قيم x في مجال الدالة g حيث $g(x)$ لا تنتمي إلىمجال f . تمثل المجموعة الناتجة مجال $f \circ g$.بما أن مجال الدالة f هي مجموعة الأعداد الحقيقية، فإن جميع قيم $g(x)$ تنتمي إلى مجال الدالة f .بما أن قيم $g(x)$ معرفة في المجال $[0, \infty[$ ، فإن مجال $(f \circ g)$ هو $[0, \infty[$.

سؤال للتفكير

س: إذا كان مجال f هو $]-\infty, \infty[$ ومداها $]-1, 1[$ ،ومجال g هو $]-1, 1[$ ومداها $]-\infty, \infty[$ ، فما مجال $g \circ f$ ؟ وما مجال $f \circ g$ ؟

نموذج إجابة:

مجال $g \circ f$ هو $]-1, 1[$ مجال $f \circ g$ هو $]-\infty, \infty[$

عادات التفكير

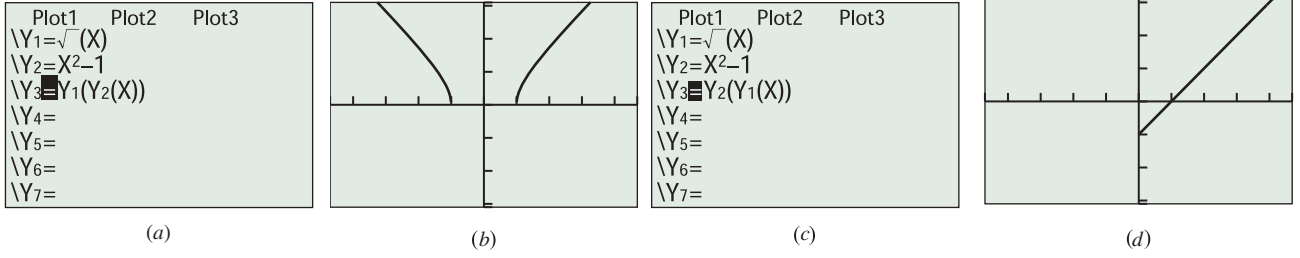
لتكن $f(x) = \frac{1}{3}(x - 2)$ و $g(x) = 3x + 2$. أوجد $g \circ f$ و $f \circ g$. هل هما متطابقتان؟ إذا كانتا كذلك، فهل هذا

دليل على أن تركيب الدوال عملية لها الخاصية الإبدالية؟

نموذج إجابة:

 $f(g(x)) = x$ ، $g(f(x)) = x$ في هذه الحالة $f \circ g = g \circ f$. لكن مثلاً واحدًا لا يكفي ليكون دليلًا على

أن تركيب الدوال عملية لها الخاصية الإبدالية.



الشكل 2.2.2

في أغلب الحالات تكون $f \circ g$ و $g \circ f$ دالتين مختلفتين (أي أن، "تركيب الدوال لا يكون إبدالياً").

ملاحظة على المثال

ذكر الطلاب أولاً بأنه لكي تتساوى دالتان يجب أن يكون لهما نفس المجال، وتكون قيمتا الدالتين متساويتين لكل قيمة من قيم x في المجال المشترك.

أسئلة للتفكير

س: ما الطريقة التي تتبعها لإيجاد $(f \circ g)(x)$ ؟

نموذج إجابة:

نعوض قيمة $g(x)$ مكان المتغير x في الدالة $f(x)$ ، ثم نطبق العمليات التي تشتمل عليها الدالة f لإيجاد النتيجة.

س: أوجد $(f \circ g)(0)$ و $(g \circ f)(0)$. هل هناك تناقض مع

الحل في المثال؟

نموذج إجابة:

$(f \circ g)(0) = (g \circ f)(0) = 1$. لا يوجد تناقض لأن $f \circ g \neq g \circ f$ لا تعني أنهما غير متساويتين عند كل قيم x .

مثال 5 تركيب الدوال

لنكن الدالتان $f(x) = \frac{1}{x-1}$ و $g(x) = \frac{2}{3x-2}$.

أوجد $(f \circ g)(x)$ و $(g \circ f)(x)$ وحدد مجال كل منهما وتحقق من أن الدالتين $(f \circ g)$ و $(g \circ f)$ ليستا متماثلتين.

الحل

أوجد $(f \circ g)(x)$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{2}{3x-2}\right) = \frac{3x-2}{-3x+4}$$

أوجد $(g \circ f)(x)$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{2x-2}{-2x+5}$$

أوجد مجال $f \circ g$:

الخطوة 1 أوجد مجال الدالة g .

$$\text{مجال الدالة } g(x) = \frac{2}{3x-2} \text{ هو }]-\infty, \frac{2}{3}[\cup]\frac{2}{3}, \infty[$$

الخطوة 2 أوجد مجال الدالة f .

$$\text{مجال الدالة } f(x) = \frac{1}{x-1} \text{ هو }]-\infty, 1[\cup]1, \infty[$$

الخطوة 3 أوجد قيم x في مجال الدالة g حيث $g(x)$ تنتمي إلى مجال f .

قيم x في مجال الدالة g يجب أن لا تساوي $\frac{2}{3}$ ، أي $x \neq \frac{2}{3}$.

بما أن مجال الدالة f هو $]1, \infty[\cup]-\infty, 1[$ أي $x \neq 1$ ، فإن $g(x)$ تنتمي

إلى مجال الدالة f عندما تكون $g(x) \neq 1$ ، أي $\frac{2}{3x-2} \neq 1$

$$3x - 2 \neq 2$$

$$x \neq \frac{4}{3}$$

وهكذا فإن قيم x التي يجب أن نستثنىها من مجال $(f \circ g)$ هي:

$$x = \frac{4}{3} \quad \text{و} \quad x = \frac{2}{3}$$

(تابع)

إذن، مجال $f \circ g$ هو $]-\infty, \frac{2}{3}[\cup]\frac{2}{3}, \frac{3}{4}[\cup]\frac{3}{4}, \infty[$

اتباع الطريقة ذاتها لإيجاد مجال $g \circ f$:

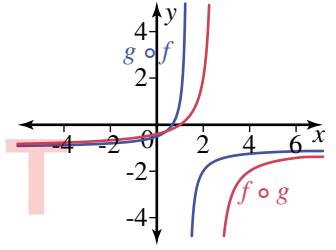
مجال $g \circ f$ هو $]-\infty, 1[\cup]1, \frac{5}{2}[\cup]\frac{5}{2}, \infty[$

نلاحظ أن $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$

تكفي ملاحظة أن مجالي الدالتين مختلفان لكي نستنتج أن الدالتين ليستا متماثلتين.

حاول أن تحل التمرين 25

يمكننا أيضًا أن ندرس التمثيلين البيانيين للدالتين $(f \circ g)$ و $(g \circ f)$ في مثال 5 في المستوى الإحداثي المجاور. كما نرى، فإن التمثيلين ليسا متطابقين، كما أن مجالي الدالتين مختلفان.



نشاط استكشافي 1 تمارين على التركيب

يمكن تركيب إحدى دوال f التي في القائمة B مع إحدى دوال g التي في القائمة C لإنتاج كل من الدوال الأساسية التي في القائمة A.

هل يمكنك مطابقة القوائم بالطريقة المناسبة دون حاسبة التمثيل البياني؟ إذا كنت تواجه صعوبة، فجرب الأمر باستعمال حاسبة التمثيل البياني.

A	B	C
$f \circ g$	f	g
x	$\sqrt{x}$	$\frac{x+3}{2}$
x^2	$ 2x+4 $	$x^{0.6}$
$ x $	$2x-3$	$\frac{(x-2)(x+2)}{2}$
x^3	x^5	x^2

للطلاب الذين يواجهون صعوبات

(مع المثال 5) ساعد الطلاب في التركيز على بعض الأفكار من خلال مناقشة السؤالين التاليين.

1. ماذا تعني $f(g(x))$ ؟

أوجد قيمة $g(x)$ على شكل قيمة عددية أو على شكل عبارة، ثم قم بإيجاد قيمة f لهذه القيمة أو لهذه العبارة.

2. ماذا تعني $g(f(x))$ ؟

أوجد قيمة $f(x)$ على شكل قيمة عددية أو على شكل عبارة، ثم قم بإيجاد قيمة g لهذه القيمة أو لهذه العبارة.

في المثال السابق، جرى تركيب دالتين لتكوين دوال جديدة. أحياناً نحتاج إلى عكس العملية. أي قد نبدأ بدالة h ونقوم بتفكيكها لإيجاد الدوال التي تركيبها يُنتج h .

مثال 6 تفكيك الدوال

لكل دالة h ، أوجد دالتين g و f بحيث $h(x) = f(g(x))$ ، بشرط أن لا تكون أي منهما

الدالة المحايدة $I(x) = x$

A. $h(x) = (x + 1)^2 - 3(x + 1) + 4$

B. $h(x) = \sqrt{x^3 + 1}$

الحل

A. يمكننا ملاحظة أن الدالة h تكون تربيعية في $x + 1$.

افترض أن $f(x) = x^2 - 3x + 4$ وأن $g(x) = x + 1$ فإن:

$$h(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2 - 3(x + 1) + 4$$

B. يمكننا ملاحظة أن الدالة h عبارة عن الجذر التربيعي للدالة $x^3 + 1$.

افترض أن $f(x) = \sqrt{x}$ وأن $g(x) = x^3 + 1$ فإن:

$$h(x) = f(g(x)) = f(x^3 + 1) = \sqrt{x^3 + 1}$$

حاول أن تحل التمرين 26

غالبًا ما يوجد أكثر من طريقة واحدة لتفكيك دالة ما. على سبيل المثال، من الطرق البديلة

لتفكيك $h(x) = \sqrt{x^3 + 1}$ في المثال 6B، هو أن نفترض $f(x) = \sqrt{x + 1}$ و $g(x) = x^3$.

إذن، $h(x) = f(g(x)) = f(x^3) = \sqrt{x^3 + 1}$

سؤال للتفكير

س: هل يمكن تفكيك الدالة $h(x)$ بطريقة أخرى؟

نموذج إجابة:

نعم، يمكننا كتابة الدالة $h(x)$ في (A):

$$h(x) = [(x + 2) - 1]^2 - 3[(x + 2) - 1] + 4$$

وبالتالي، $h(x) = f \circ g$ حيث $g(x) = x + 2$

$$f(x) = (x - 1)^2 - 3(x - 1) + 4 = x^2 - 5x + 8$$

يمكن استعمال تركيب الدوال لاختيار المناسب من العروض بعد نمذجتها على شكل دوال.



مثال 7 النمذجة باستعمال تركيب الدوال

يعلن متجر "الثوب الأنيق" عن حسومات عبر وسائل التواصل الاجتماعي. يسمح المتجر لعملائه بالإفادة من حسومات متعدّدة، ليس عليهم سوى إخبار أمين الصندوق بالترتيب الذي يرغبون به لتطبيق الحسومات المبينة في الصورة:

خصم QR 5 من المبلغ، وخصم 10% من الثمن. في زيارتك القادمة للمتجر، ما ترتيب الحسومات الذي ينبغي لك أن تطلبه؟

الحل

اكتب دوالاً لنمذجة الحسومات، مفترضاً أنّ x يمثل قيمة المشتريات.

الخصم الأول يمكن تمثيله بالدالة f ذات الصيغة:

$$f(x) = x - 5$$

الخصم الثاني يمكن تمثيله بالدالة g ذات الصيغة:

$$g(x) = x - 0.1x$$

$$= 0.9x$$

بتطبيق الخصم الأول ثم الثاني، تكون قد طبقت الدالة $g \circ f$ وصيغتها:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x - 5) \\ &= 0.9(x - 5) \\ &= 0.9x - 4.5\end{aligned}$$

بتطبيق الخصم الثاني ثم الأول، تكون قد طبقت الدالة $f \circ g$ وصيغتها:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(0.9x) \\ &= 0.9x - 5\end{aligned}$$

إذن، بما أنّ $0.9x - 5 < 0.9x - 4.5$ فإنّ الترتيب الثاني سيكون الأمثل.

سؤال للتفكير

س: كيف يؤثر الترتيب في الحسم؟
نموذج إجابة:

في حالة الحسم بنسبة مئوية، تزداد قيمة الحسم كلما ازدادت قيمة المشتريات. أما الحسم بمقدار QR 5 فهو ثابت بغض النظر عن قيمة المشتريات. بالتالي تكون قيمة الحسم أكبر قبل حسم QR 5 من المبلغ.

ملاحظة تعليمية

تساعد النمذجة على حل المشكلة. فإذا قمنا بنمذجة التنزيلات من خلال الدوال، سيتبيّن للزيائن تسلسل الدوال في التركيب الذي يؤدي إلى نوع التنزيلات الأفضل.

متابعة

اسأل: إذا كانت f و g دالتين متعاكستين، وكانت $f(3) = 7$ ، أوجد $g(3)$ و $g(7)$ إذا كان هذا ممكناً ($g(7) = 3$).

ملاحظات على التمارين

التمارين 1-7، إجراء عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة للدوال.
التمارين 12-25، توجد تركيب الدوال.
التمارين 36-40، تدرب الطالب على أنماط من الاختبارات.

التقييم المستمر

التقييم الذاتي:

التمارين 3, 5, 7, 14, 18

مراجعة سريعة 2.2

5. $f(t) = \sqrt{5-t} \quad]-\infty, 5]$ 6. $h(x) = \sqrt{1-x^2} \quad [-1, 1]$

7. $g(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-1}} \quad]\frac{1}{2}, \infty[$

في التمارين 1-7، أوجد مجال الدالة وعبر عنه برمز الفترة.

1. $g(x) = 2 \quad]-\infty, \infty[$

2. $f(x) = \frac{x-2}{x+3} \quad]-\infty, -3[\cup]-3, \infty[$

3. $f(t) = \frac{t+5}{t^2+1} \quad]-\infty, \infty[$

4. $f(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, \infty[$

التمارين

الدرس 2.2

في التمارين 1-3، أوجد صيغًا للدوال $f+g$ و $f-g$ و $g \times f$. واذكر مجال كل منها.

1. $g(x) = x^2$

$f(x) = 2x - 1$

2. $g(x) = 3 - x$

$f(x) = (x-1)^2$

3. $g(x) = x + 3$

$f(x) = \sqrt{x+5}$

في التمارين 4-7، أوجد صيغًا للدالتين $\frac{f}{g}$ و $\frac{g}{f}$. واذكر مجال كل منها.

4. $g(x) = x^2$

$f(x) = \sqrt{x+3}$

5. $g(x) = \sqrt{x+4}$

$f(x) = \sqrt{x-2}$

6. $g(x) = \sqrt{1-x^2}$

$f(x) = x^2$

7. $g(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$

$f(x) = x^3$

8. افترض أن الطلب d ، بالوحدات المبيعة، على نوع من القمصانلشركة بالسعر x ، بالريال القطري، هو $d(x) = 2670 - 16x$ a. إذا كانت السعر $\times$ الطلب = الإيرادات، اكتب قاعدة الدالة $R(x)$ التي تمثل الإيرادات المتوقعة للشركة من مبيعات

نوع من القمصان. ثم اذكر مجال هذه الدالة.

b. إذا كان السعر QR 160، فكم تبلغ الإيرادات التي ستحققها

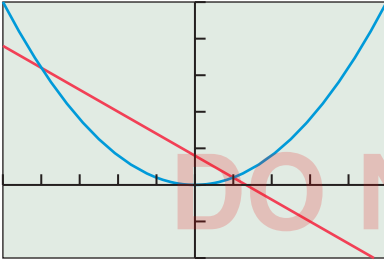
الشركة؟

9. افترض أن الطلب d ، على منتج كلفته x ، بالريال القطري يمكننمذجته بالدالة: $d(x) = -0.25x^2 + 1000$ أما السعر p ، لمبيع ذلك المنتج فهو معطى بالدالة

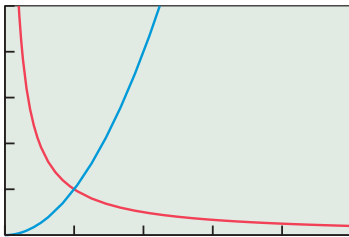
$P(x) = x + 16$

أوجد دالة الإيرادات $R(x)$.10. التمثيلان البيانيان للدالتين $f(x) = x^2$ و $g(x) = 4 - 3x$ مبينتان أدناه في نافذة العرض $[-5, 5]$ في $[-10, 25]$. ارسمالتمثيل البياني للفرق $(f-g)(x)$ بإضافة إحداثيات y مباشرة من التمثيلات البيانية. ثم مثل الفرق بيانيًا على حاسبتك وانظر

كم كان تمثيلك قريبًا. ارسم باستعمال الحاسبة

 $[-5, 5]$ في $[-10, 25]$ 11. التمثيلان البيانيان للدالتين $f(x) = x^2$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ مبينتان أدناهفي نافذة العرض $[0, 5]$ في $[0, 5]$.ارسم التمثيل البياني للمجموع $(f+g)(x)$ بإضافة إحداثيات y مباشرة من التمثيلات البيانية. ثم مثل المجموع بيانيًا على

حاسبتك وانظر كم كان تمثيلك قريبًا. ارسم باستعمال الحاسبة

 $[0, 5]$ في $[0, 5]$



31. يقدم متجر سلع رياضية تخفيضات صيفية على ألواح التزلج. جاسم مهتم بلوح تزلج يبلغ سعره في العادة QR 1 600. يقدم المتجر خصمًا فورًا قدره QR 200، بالإضافة إلى خصم بنسبة 10% ما الترتيب الذي ينبغي أن يعتمد في تطبيق هذه العروض الخاصة على سعر لوح التزلج حتى يتحقق لجاسم الإفادة المثلى؟ وضح إجابتك.

32. ينال كل عضو في برنامج مكافآت متجر

للألعاب خصمًا مقداره 20% على قيمة مشترياته. تخضع جميع المبيعات في المتجر إلى ضريبة بيع مقدارها 6% اكتب دالة لنمذجة الخصم ودالة لنمذجة ضريبة المبيع ثم اوجد صيغة الدالة التي تعطي السعر النهائي الذي يدفعه عضو في برنامج المكافآت.

33. **بالونات الرصد الجوي** يتمدد بالون رصد جوي كروي أثناء

ارتفاعه بشكل ملحوظ بفعل انخفاض الضغط الجوي.

افترض أن طول نصف القطر r يزيد بالمعدل 0.03 in/s وأن $r = 48 \text{ in}$ عندما يكون الزمن $t = 0$.

أوجد معادلة نموذج الحجم V للبالون عندما يكون الزمن t وأوجد الحجم عندما $t = 300 \text{ s}$.

34. **كرة الثلج** يخزن جلال كمية من كرات الثلج طول قطر كل منها

4 in في ثلاجة، وهو غير مدرك أن ميزة إزالة الثلج الذاتية في

الثلاجة ستفقد كل كرة ثلج 1 in^3 من حجمها كل 40 يومًا.

تذكر بلال ما خزّنه بعد سنة واحدة (افترض أنها تساوي 360

يومًا) وذهب لاستعادتها. كم كان طول قطر الواحدة منها عندئذٍ؟

35. **التصوير بالقمير الصناعي** تلتقط كاميرا قمر صناعي صورة

مستطيلة الشكل. إنَّ أبعاد أصغر منطقة يمكن تصويرها على

شكل مستطيل هي 5 km في 7 km ، عند تصغير لقطة الكاميرا،

يزيد الطول l والعرض w للمستطيل بمعدل

2 km/s ، كم يستغرق الأمر لتصبح المساحة المصوّرة على

الأقل 5 أمثال أصغر منطقة يمكن تصويرها؟

في التمرينين 12 و 13 لتكن الدالتان: $f(x) = 4x - 5$ و

$$g(x) = -7x$$

12. a. أوجد قيمة $f(g(3))$

b. أوجد صيغة $f(g(x))$

13. a. أوجد قيمة $g(f(2))$

b. أوجد صيغة $g(f(x))$

في التمارين 14-17، أوجد $(g \circ f)(-2)$ و $(f \circ g)(3)$.

14. $g(x) = x + 1$ $f(x) = 2x - 3$

15. $g(x) = 2x - 3$ $f(x) = x^2 - 1$

16. $g(x) = \sqrt{x+1}$ $f(x) = x^2 + 4$

17. $g(x) = 9 - x^2$ $f(x) = \frac{x}{x+1}$

في التمارين 18-25، أوجد $f(g(x))$ و $g(f(x))$ ومجال كل منهما.

18. $g(x) = x - 1$ $f(x) = 3x + 2$

19. $g(x) = \frac{1}{x-1}$ $f(x) = x^2 - 1$

20. $g(x) = \sqrt{x+1}$ $f(x) = x^2 - 2$

21. $g(x) = \sqrt{x}$ $f(x) = \frac{1}{x-1}$

22. $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ $f(x) = x^2$

23. $g(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$ $f(x) = x^3$

24. $g(x) = \frac{1}{3x}$ $f(x) = \frac{1}{2x}$

25. $g(x) = \frac{1}{x-1}$ $f(x) = \frac{1}{x+1}$

في التمارين 26-30، أوجد $g(x)$ و $f(x)$ بحيث يمكن وصف الدالة

في الصورة $y = f(g(x))$ بشرط أن لا تكون أي منهما الدالة المحايدة

(قد يوجد أكثر من حل ممكن).

26. $y = \sqrt{x^2 - 5x}$

27. $y = (x^3 + 1)^2$

28. $y = |3x - 2|$

29. $y = \frac{1}{x^3 - 5x + 3}$

30. $y = (x - 3)^5 + 2$

أسئلة اختبار معيارية

36. صواب أم خطأ يتكون مجال دالة ناتج القسمة $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ من كل الأعداد التي تنتمي إلى كل من مجال الدالة f ومجال الدالة g . بزر إجابتك. خطأ، ما عدا أصفار g

37. صواب أم خطأ يتكون مجال دالة ناتج الضرب $(f \times g)(x)$ من كل الأعداد التي تنتمي إما إلى مجال الدالة f أو إلى مجال الدالة g . بزر إجابتك. خطأ، المجال هو المشترك بينهما

38. اختيار من متعدد افترض أن f و g دالتان يتكوّن مجال كل منهما من كل الأعداد الحقيقية. أي العبارات الآتية ليست بالضرورة صوابًا؟ C

- A. $(f + g)(x) = (g + f)(x)$
- B. $(f \times g)(x) = (g \times f)(x)$
- C. $f(g(x)) = g(f(x))$
- D. $(f - g)(x) = -(g - f)(x)$
- E. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

39. اختيار من متعدد إذا كانت $f(x) = x - 7$ و $g(x) = \sqrt{4 - x}$ فما مجال الدالة $\frac{f}{g}$ ؟ A

- A. $]-\infty, 4[$
- B. $]-\infty, 4]$
- C. $]4, \infty[$
- D. $[4, \infty[$
- E. $]4, 7[\cup]7, \infty[$

40. اختيار من متعدد إذا كانت $f(x) = x^2 + 1$ إذن $(f \circ f)(x)$ تساوي: E

- A. $2x^2 + 2$
- B. $2x^2 + 1$
- C. $x^4 + 1$
- D. $x^4 + 2x^2 + 1$
- E. $x^4 + 2x^2 + 2$

استكشاف

41. المطابقة بين ثلاثة قوائم وُفق كل دالة من f مع دالة من g ومجال من D بحيث $(f \circ g)(x) = x^2$ مع المجال D .

f	g	D
$(x^2 + 2)^2$	$\sqrt{2 - x}$	$x \neq 0$
$(x^2 - 2)^2$	$x + 1$	$x \neq 1$
$\frac{1}{(x - 1)^2}$	$\frac{1}{x - 1}$	$[2, \infty[$
$x^2 - 2x + 1$	$\sqrt{x - 2}$	$]-\infty, 2]$
$\left(\frac{x + 1}{x}\right)^2$	$\frac{x + 1}{x}$	$]-\infty, \infty[$

42. كن بارقًا في g افترض أن $f(x) = x^2 + 1$ أوجد دالة g حيث يكون:

- a. $(f \times g)(x) = x^4 - 1$
- b. $(f + g)(x) = 3x^2$
- c. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = 1$
- d. $f(g(x)) = 9x^4 + 1$
- e. $g(f(x)) = 9x^4 + 1$

توسيع الأفكار

43. تحديد العنصر المحايد العنصر المحايد لعملية على الدوال هو عبارة عن دالة إذا أجريت العملية عليها وعلى دالة معطاة f تعطي نفس الدالة f . أوجد الدوال المحايدة للعمليات الآتية:

a. جمع الدوال. أي أوجد دالة g بحيث يكون:

$$(f + g)(x) = (g + f)(x) = f(x)$$

b. ضرب الدوال. أي أوجد دالة g بحيث يكون:

$$(f \times g)(x) = (g \times f)(x) = f(x)$$

c. تركيب الدوال. أي أوجد دالة g بحيث يكون:

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = f(x)$$

44. هل تركيب الدوال تجميعي؟ سبق وعرفت أن تركيب الدوال

ليس إبدالًا، أي إن، $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.

لكن هل تركيب الدوال تجميعي؟

أي، هل $((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ (g \circ h))(x)$ ؟

وضّح إجابتك. نعم

إجابات أسئلة التمارين 2.2

19. $(f \circ g)(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - 1,]-\infty, 1[\cup]1, \infty[$

$(g \circ f)(x) = \frac{1}{x^2 - 2},]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, \infty[$

20. $(f \circ g)(x) = x - 1, [-1, \infty[$

$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 1},]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$

21. $(f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}, [0, 1[\cup]1, \infty[$

$(g \circ f)(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - 1},]1, \infty[$

22. $(f \circ g)(x) = 1 - x^2, [-1, 1]$

$(g \circ f)(x) = \sqrt{1 - x^4}, [-1, 1]$

23. $(f \circ g)(x) = 1 - x^3,]-\infty, \infty[$

$(g \circ f)(x) = \sqrt[3]{1 - x^9},]-\infty, \infty[$

24. $(f \circ g)(x) = \frac{3x}{2},]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$

$(g \circ f)(x) = \frac{2x}{3},]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$

25. $(f \circ g)(x) = \frac{x-1}{x},]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, \infty[$

$(g \circ f)(x) = \frac{-x-1}{x},]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, \infty[$

26. $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = x^2 - 5x$

27. $f(x) = x^2, g(x) = x^3 + 1$

28. $f(x) = |x|, g(x) = 3x - 2$

29. $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = x^3 - 5x + 3$

30. $f(x) = x^5 + 2, g(x) = x - 3$

31. دالة خصم 200 QR هي: $f(x) = x - 200$

دالة خصم 10% هي: $g(x) = x - 0.1x = 0.9x$

بتطبيق الخصم الأول ثم الثاني نحصل على

$$(g \circ f)(1600) = 0.9(1600 - 200) = 0.9 \times 1400 = 1260$$

بتطبيق الخصم الثاني ثم الأول نحصل على

$$(f \circ g)(1600) = 0.9 \times 1600 - 200 = 1440 - 200 = 1240$$

إذن الخيار الثاني هو الأفضل.

32. $f(x) = x - 0.2x = 0.8x, g(x) = x + 0.06x = 1.06x$

دالة السعر النهائي هي: $(f \circ g)(x) = 0.8 \times 1.06x = 0.84x$

33. $r(t) = 0.02t + 48$

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi(0.03t + 48)^3$$

$$V(300) = \frac{4}{3}\pi(57)^3 \approx 775734.6 \text{ in}^3$$

1. $(g + f)(x) = x^2 + 2x - 1,]-\infty, \infty[$

$(g - f)(x) = x^2 - 2x + 1,]-\infty, \infty[$

$(g \times f)(x) = 2x^3 - x^2,]-\infty, \infty[$

2. $(g + f)(x) = x^2 - 3x + 4,]-\infty, \infty[$

$(g - f)(x) = -x^2 + x + 2,]-\infty, \infty[$

$(g \times f)(x) = (3 - x)(x - 1)^2,]-\infty, \infty[$

3. $(g + f)(x) = x + 3 + \sqrt{x + 5},]-5, \infty[$

$(g - f)(x) = x + 3 - \sqrt{x + 5},]-5, \infty[$

$(g \times f)(x) = (x + 3)\sqrt{x + 5},]-5, \infty[$

4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x^2},]-3, 0[\cup]0, \infty[$

$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x+3}},]-3, \infty[$

5. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+4}}, [2, \infty[$

$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-2}},]2, \infty[$

6. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}},]-1, 1[$

$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}, [-1, 0[\cup]0, 1]$

7. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^3}{\sqrt[3]{1-x^3}},]-\infty, 1[\cup]1, \infty[$

$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x^3},]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$

8. a. $R(x) = 2670x - 16x^2,]0, 166.88]$

b. QR 17 600

9. $R(x) = (x + 16)(-0.25x^2 + 1000)$

12. a. -89

b. $-28x - 5$

13. a. -21

b. $-28x + 35$

14. $(f \circ g)(3) = 5, (g \circ f)(-2) = -6$

15. $(f \circ g)(3) = 8, (g \circ f)(-2) = 3$

16. $(f \circ g)(3) = 8, (g \circ f)(-2) = 3$

17. $(f \circ g)(3) = 0, (g \circ f)(-2) = 5$

18. $(f \circ g)(x) = 3x - 1,]-\infty, \infty[$

$(g \circ f)(x) = 3x + 1,]-\infty, \infty[$

34. طول القطر 4

تفقد الكرة من حجمها في السنة (360 يوم) 9 in^3 حجمها الأصلي $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi 2^3 \approx 33.51 \text{ in}^3$ حجمها الجديد $V' = V - 9 = 24.51$ $V' = \frac{4}{3}\pi r'^3 \Rightarrow r'^3 = \frac{3V'}{4\pi} = 5.85$ إذن، طول القطر الجديد هو $2r' \approx 3.6 \text{ in}$

35. $(2t + 5)(2t + 7) \geq 5(5 \times 7)$

$4t^2 + 24t - 140 \geq 0$

$t \geq 3.6 \text{ s}$

41. $f(x) = (x^2 + 2)^2, g(x) = \sqrt{x - 2}, D = [2, \infty[$

$f(x) = (x^2 - 2)^2, g(x) = \sqrt{2 - x}, D =]-\infty, 2]$

$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}, g(x) = \frac{x+1}{x}, D : x \neq 0$

$f(x) = x^2 - 2x + 1, g(x) = x + 1, D =]-\infty, \infty]$

$f(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^2, g(x) = \frac{1}{x-1}, D : x \neq 1$

42. a. $g(x) = x^2 - 1$

b. $g(x) = 2x^2 - 1$

c. $g(x) = x^2 + 1$

d. $g(x) = 3x^2$

e. $g(x) = 9(x-1)^2 + 1$

43. a. $g(x) = 0$

b. $g(x) = 1$

c. $g(x) = x$

Inverse Functions

الدوال العكسية

2.3

العلاقة العكسية

ماذا يحدث عندما نعكس إحداثيات كل الأزواج المرتبة في العلاقة؟ من الواضح أننا نحصل على علاقة أخرى، لأنه ثمة مجموعة أخرى من الأزواج المرتبة، لكن هل تحمل أي تشابه مع العلاقة الأصلية؟ إذا كانت العلاقة الأصلية عبارة عن دالة، فهل ستكون العلاقة الجديدة دالة أيضًا؟ تذكر أن العلاقة هي أي مجموعة من الأزواج المرتبة (x, y) ، حيث x هو المتغير المستقل و y هو المتغير التابع. تتكوّن **العلاقة العكسية** عندما تنعكس أدوار المتغير المستقل والمتغير التابع. فلو أخذنا العلاقة الموضحة في الجدول أدناه:

x	y
-2	1
-1	4
0	3
1	1

ستكون العلاقة العكسية ممثلة بالجدول التالي:

x	y
1	-2
4	-1
3	0
1	1

لاحظ أنّ العلاقة الأصلية هي دالة لأن كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر واحد فقط من المدى. في حين أنّ العلاقة العكسية ليست دالة، لأن العدد 1 من المجال يرتبط بالعنصرين -2 و 1 من المدى.

العلاقة العكسية

الزوج المرتب (a, b) ينتمي للعلاقة R إذا وفقط إذا كان الزوج المرتب (b, a) ينتمي للعلاقة العكسية. والتي يرمز لها بالرمز R^{-1}
أي أنّ: $(b, a) \in R^{-1} \iff (a, b) \in R$

لاحظ أن مجال العلاقة العكسية هو مدى العلاقة الأصلية، كذلك إنّ مدى العلاقة العكسية هو مجال العلاقة الأصلية.

ما ستتعلمه

- العلاقة العكسية
- الدالة العكسية
- الدالة العكسية على مجال محدد

... ولماذا

يمكن فهم بعض الدوال بالشكل الأفضل على أنها معكوس للدوال التي نعرفها بالفعل، ولإيجاد القيم المدخلة لدالة ما بمعرفة القيم المخرجة.

معيّار الدرس

11A.4.2

المصطلحات

- العلاقة العكسية
- انعكاس
- الدالة العكسية
- inverse relation
- reflection
- inverse function

الهدف

سوف يتمكن الطلاب من إيجاد العلاقات العكسية للعلاقات والدوال العكسية للدوال.

دليل الدرس

- العلاقة العكسية
- الدالة العكسية
- الدالة العكسية على مجال محدد

تحفيز

أسأل الطلاب: كيف ترتبط الدالتان $f(x) = x^3$ و $g(x) = \sqrt[3]{x}$ إحداها بالآخرى؟ نموذج إجابة:

$x = g(y)$ إذا وفقط إذا $y = f(x)$.

أسئلة للتفكير

س: كيف يؤدي تبديل القيم في جدول إلى تحديد العلاقة العكسية؟ نموذج إجابة:

في العلاقة الأصلية، يمثل العمود x المتغير المستقل ويمثل العمود y المتغير التابع. عندما نقوم بتبديل القيم تنتقل قيم المتغير التابع إلى مكان المتغير المستقل وبالعكس، فنحصل على العلاقة العكسية.

س: في أي حالة تكون العلاقة العكسية دالة، ومتى لا تكون العلاقة نفسها دالة؟ نموذج إجابة:

يمكن للعلاقة العكسية أن تكون دالة إذا كانت كل قيمة من قيم المتغير التابع تظهر مرة واحدة في العلاقة عدا ذلك لا تكون العلاقة العكسية دالة.

نشاط المصطلحات

أطلب من الطلاب أن يفكروا في ما يفهمونه حول "العكس" عندما يتعلق الأمر بالعمليات العكسية. استفد من هذا الفهم لتقدم لهم مصطلحي "العلاقات العكسية" و "الدوال العكسية".

اربط كل زوج بالمصطلح الذي يدل عليه.

الجمع (+)، الطرح (-) علاقات عكسية
 $f(x) = x - 8$ ، $f(x) = x + 8$ عمليات عكسية
 $(6, 4)$ ، $(4, 6)$ دوال عكسية

أسئلة للتفكير

س: لماذا تُكتب العلاقة العكسية للدالة $f(x) = x^2$ باستعمال $\pm$ ؟ هل تمثل هذه العلاقة دالة؟ نموذج إجابة:

يتضمن مجال الدالة $f(x) = x^2$ أعدادًا سالبة وأعدادًا موجبة، وبالتالي إذا أهملنا $\pm$ فإن الأعداد السالبة في المجال لن تظهر في العلاقة العكسية. لا تمثل هذه العلاقة دالة لأن هناك أكثر من قيمة للمتغير التابع y عند كل قيمة للمتغير x .

س: كيف يمكن أن نؤكد من خلال التمثيل البياني أن معكوس الدالة ليس بدالة؟ نموذج إجابة:

يبين التمثيل البياني للعلاقة العكسية أكثر من قيمة لـ y مقابل كل قيمة لـ x ، وهذا يعني أنها ليست دالة.

س: كيف يرتبط التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2x + 1$ بالتمثيل البياني لدالتها العكسية $y = \frac{x-1}{2}$ ؟ نموذج إجابة:

التمثيل البياني للدالة العكسية هو انعكاس التمثيل البياني للدالة f حول المستقيم $y = x$.

للطلاب سريع الإنجاز

(مع المثال 1): اجعل الطلاب يستكشفون كيفية إيجاد العلاقات العكسية لدوال بدرجات أعلى. اكتب معادلة تمثل معكوس كل دالة. هل المعكوس دالة؟

1. $f(x) = x^4 - 2$
 لا، $y = \pm \sqrt[4]{x+2}$.

2. $g(x) = x^5 + 5$
 نعم، $y = \sqrt[5]{x-5}$.

3. $h(x) = x^6$
 لا، $y = \pm \sqrt[6]{x}$.

مثال 1 إيجاد معادلة علاقة عكسية

لتكن $f(x) = x^2$

A. كيف يمكنك التعبير عن العلاقة العكسية للدالة f جبريًا؟

B. كيف ترتبط تمثيلات $y = x^2$ و $y = \pm \sqrt{x}$ البيانية؟

الحل

A. $f(x) = x^2 \rightarrow y = x^2$

$x = y^2$

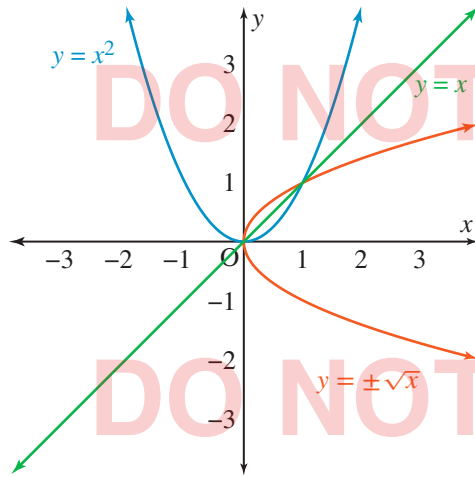
$y = \pm \sqrt{x}$

بدل أدوار x و y

حل لإيجاد y

إذن، يمكن التعبير عن معكوس الدالة f جبريًا بالمعادلة $y = \pm \sqrt{x}$

B. مثل بيانيًا كل من العلاقتين $y = x^2$ و $y = \pm \sqrt{x}$ ، ماذا تلاحظ؟



بما أن مدى الدالة f هو $y \geq 0$ فإن مجال معكوس الدالة هو $x \geq 0$.

نلاحظ أن التمثيل البياني لمعكوس الدالة f هو انعكاس التمثيل البياني للمعادلة $y = x^2$ حول المستقيم $y = x$.

حاول أن تحل التمرين 1

إيجاد العلاقة العكسية جبريًا في المثال 1 كان سهلًا نسبيًا، لكن ذلك لا ينطبق على الكثير من الحالات.

أما إيجاد التمثيل البياني للعلاقة العكسية، فهو أكثر سهولة، وذلك باستعمال الخاصية التالية:

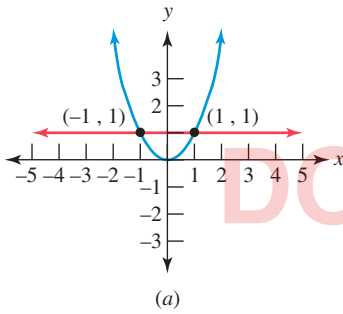
مبدأ الانعكاس العكسي

النقطتان (a, b) و (b, a) في المستوى الإحداثي متناظرتان بالنسبة إلى الخط $y = x$. كل من النقطتين (a, b) و (b, a) تمثل **انعكاسًا** للأخرى حول الخط $y = x$.

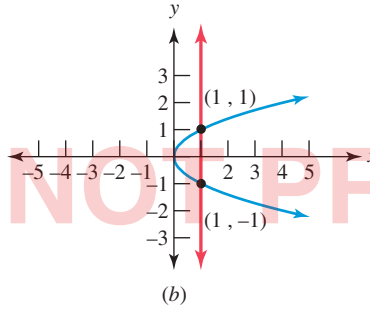
ملاحظة تعليمية

قد يحتاج بعض الطلاب أن يلتفت إلى أنه عند البحث عن العلاقة العكسية من المهم أن ننظر إلى تحول النقاط، وذلك من خلال التنبيه إلى أن (a, b) ينتمي إلى العلاقة وأن (b, a) ينتمي إلى العلاقة العكسية، وهذا مهم لفهم العلاقة العكسية.

سيكون اهتمامنا منصبًا على العلاقات العكسية التي تشكّل دوالًا. يثبت اختبار الخط الرأسي أن التمثيل البياني للمعكوس الوارد في الشكل 2.3.1(b) ليس دالة، لأنه تم ربط قيمتين مختلفتين للمتغير y مع نفس القيمة للمتغير x . هذه نتيجة مباشرة لحقيقة أن في العلاقة الأصلية في الشكل 2.3.1(a) ارتبطت قيمتين مختلفتين للمتغير x مع نفس القيمة للمتغير y .



(a)



(b)

الشكل 2.3.1 يكافئ اختبار الخط الرأسي للعلاقة العكسية في (b) اختبار الخط الأفقي للعلاقة الأصلية في (a).

التمثيل البياني للمعكوس يفشل في اختبار الخط الرأسي عند فشل التمثيل البياني الأصلي في اختبار الخط الأفقي. هذا يعطينا اختبارًا للعلاقات التي تكون معكوساتها دوالًا.

اختبار الخط الأفقي

إن معكوس علاقة هو دالة إذا وفقط إذا كان كل خط أفقي يقطع التمثيل البياني للعلاقة الأصلية في نقطة واحدة على الأكثر.

سؤال للتفكير

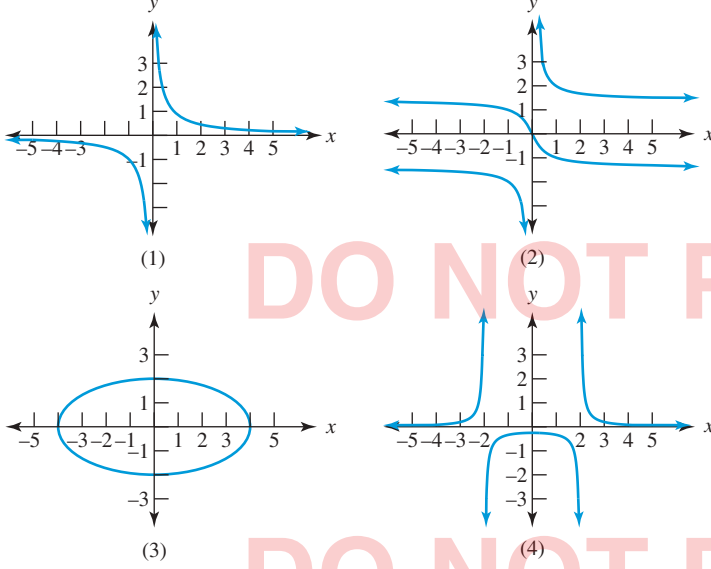
س: هل هناك علاقة بين اختبار الخط الرأسي واختبار الخط الأفقي؟
 نموذج إجابة:
 كلا، فالمنحنى قد يجتاز الاختبارين أو يفشل في أحدهما أو كليهما.

مثال 2 تطبيق اختبار الخط الأفقي

أي من التمثيلات البيانية (1) - (4) في الشكل أدناه هي تمثيلات بيانية لـ

A. علاقات عبارة عن دوال؟

B. علاقات لها معكوسات عبارة عن دوال؟



الحل

A. التمثيلان البيانيان (1) و (4) هما تمثيلان بيانيان لدالتين لأنهما يجتازان اختبار الخط الرأسي.

التمثيلان البيانيان (2) و (3) ليسا تمثيلين بيانيين لدالتين لأنهما يفشلان في اختبار الخط الرأسي.

B. التمثيلان البيانيان (1) و (2) تمثيلان بيانيان لعلاقيتين معكوساهما دالتان لأنهما يجتازان اختبار الخط الأفقي.

يفشل التمثيلان البيانيان (3) و (4) في اختبار الخط الأفقي، لذا فإن علاقتهما العكسيتين ليستا دالتين.

حاول أن تحل التمرين 2

الدالة العكسية

إنّ الدالة التي يكون معكوسها دالة أيضًا، يجتاز تمثيلها البياني اختباري الخط الرأسي والخط الأفقي (مثل التمثيل البياني في الرسم (1) من المثال 2). هذه الدالة هي دالة **واحد لواحد**، لأن كل قيمة من قيم x ترتبط مع قيمة وحيدة من قيم y وكل قيمة من قيم y ترتبط بقيمة وحيدة من قيم x .

إذا كانت العلاقة العكسية للدالة f ، هي أيضًا دالة، فإنّها يُطلق عليها اسم **الدالة العكسية** للدالة f ، ويرمز لها بالرمز $f^{-1}(x)$.

الدالة العكسية

إذا كانت f دالة واحد إلى واحد مجالها D ومداها R ، فإن الدالة العكسية للدالة f ، التي يشار إليها بالرمز f^{-1} ، هي دالة مجالها R ومداها D معرّفة من خلال

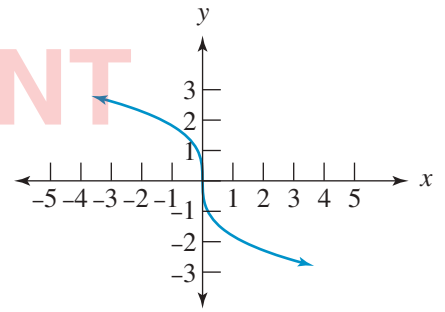
$$f^{-1}(b) = a \quad \text{إذا وفقط إذا كان} \quad f(a) = b$$

تنبيه بشأن صيغة الدالة

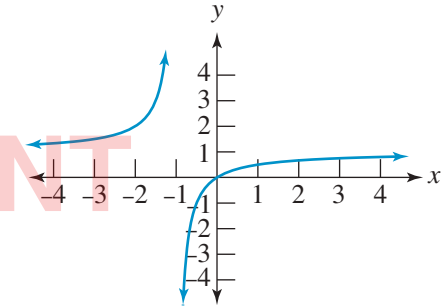
اقرأ الرمز f^{-1} "معكوس f " ويجب عدم الخلط بينه وبين مقلوب f . إذا كانت f دالة، فإن الرمز f^{-1} يمكن أن يعني فقط معكوس f . يجب كتابة مقلوب f في الصورة $\frac{1}{f}$.

عادات التفكير

فكر بالصيغة $f(x) = 2x + 1$ على شكل طريق للأعداد. ابدأ بـ x ، اضرب بـ 2، واجمع 1 كيف يمكنك وصف طريق النتيجة رجوعاً إلى x ؟ نموذج إجابة: ابدأ بـ $f(x)$ ، اطرح 1، ثم اقسم الناتج على 2.



الشكل 2.3.2



الشكل 2.3.3

سؤال للتفكير

س: إذا استبدلنا الدالة $f(x) = \sqrt[3]{4x}$ في المثال بالدالة $g(x) = -\sqrt{4x}$ فهل يبقى معكوسها دالة؟ نموذج إجابة: نعم، لأن g هي دالة واحد لواحد في مجالها.

مثال 3 إيجاد دالة عكسية جبرياً

A. أوجد معادلة $f^{-1}(x)$ إذا كان $f(x) = -\sqrt[3]{4x}$

B. أوجد معادلة $f^{-1}(x)$ إذا كان $f(x) = \frac{x}{x+1}$

الحل

A. يوضح التمثيل البياني للدالة f الوارد في الشكل 2.3.2 أن f هي دالة واحد لواحد، وهي تحقق المعادلة $y = -\sqrt[3]{4x}$ ، إذا فالدالة العكسية $f^{-1}(x)$ تحقق المعادلة $x = -\sqrt[3]{4y}$ (بتبديل x و y). إذا حللنا هذه المعادلة الأخيرة لإيجاد قيمة y ، فسنحصل على صيغة $f^{-1}(x)$.

$$x = -\sqrt[3]{4y}$$

$$x^3 = -4y$$

$$y = \frac{-x^3}{4}$$

قم بالتكعيب
اقسم على -4

$$\text{إذن، } f^{-1}(x) = \frac{-x^3}{4}$$

B. يوضح التمثيل البياني للدالة f الوارد في الشكل 2.3.3 أن f هي دالة واحد لواحد. الدالة الأصلية تحقق المعادلة $y = \frac{x}{x+1}$. إذا كانت f حقاً دالة واحد لواحد، فإن الدالة العكسية f^{-1} تحقق المعادلة $x = \frac{y}{y+1}$ (لاحظ أننا فقط نبديل x و y). إذا حللنا هذه المعادلة الجديدة لإيجاد قيمة y ، فستكون لدينا صيغة لـ $f^{-1}(x)$:

$$x = \frac{y}{y+1}$$

$$x(y+1) = y$$

$$xy + x = y$$

$$xy - y = -x$$

$$y(x-1) = -x$$

$$y = \frac{-x}{x-1}$$

$$y = \frac{x}{1-x}$$

اضرب في $(y+1)$

خاصية التوزيع

افصل حدود y

حلل بإخراج y عاملاً مشتركاً

اقسم على $x-1$

اضرب البسط والمقام في -1

$$\text{إذن، } f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$$

حاول أن تحل التمرين 6

ملاحظة تعليمية

يحتاج بعض الطلاب إلى التذكير أنه لفهم معكوس علاقة ما علينا النظر إلى ما يحصل للنقاط. كيف تتحول النقاط (a, b) إلى النقاط (b, a) في معكوسها.

من الممكن استعمال التمثيل البياني للدالة f لإنشاء رسم بياني للدالة f^{-1} دون إجراء أي عمليات جبرية، وذلك بفضل مبدأ الانعكاس العكسي للعلاقات.

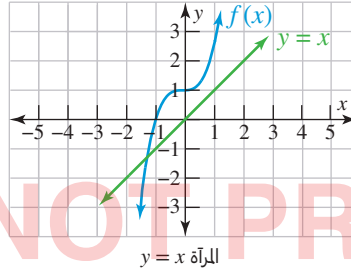
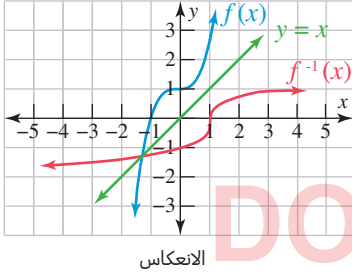
مثال 4 إيجاد دالة عكسية بيانيًا

في الشكل أدناه، حدّد ما إذا كانت الدالة دالة واحد لواحد. إذا كانت كذلك، ارسم التمثيل البياني لمعكوسها.



الحل

بما أن التمثيل البياني للدالة f يجتاز اختبار الخط الأفقي، فإن f دالة واحد لواحد. لا يلزمنا إيجاد صيغة لـ $f^{-1}(x)$. كل ما يلزمنا هو إيجاد انعكاس التمثيل البياني المعطى حول الخط $y = x$. ويمكن القيام بذلك هندسيًا. تخيل مرآة على طول الخط $y = x$ وارسم انعكاسًا للتمثيل البياني المعطى في المرآة.



حاول أن تحل التمرين 7

طريقة أخرى

ثمة طريقة أخرى لتصور هذه العملية وهي تخيل رسم التمثيل البياني على لوح زجاجي كبير. تخيل دورانًا للوح الزجاجي حول الخط $y = x$ بحيث يتبدل موقع المحور x الموجب مع موقع المحور y الموجب. (يجب تدوير الجزء الخلفي من اللوح الزجاجي إلى الجزء الأمامي ليحدث هذا). عندئذٍ يصبح التمثيل البياني للدالة f هو التمثيل البياني لـ f^{-1} .

إرشاد

للمساعدة في الرسم نحدد نقاطًا على الرسم البياني المعطى ثم نرسم انعكاس تلك النقاط عبر المرآة $(y = x)$.

سؤال للتفكير

س: كيف نثبت أن النقطتين $A(a, b)$ و $B(b, a)$ متناظرتان

عبر المحور $y = x$ ؟

نموذج إجابة:

نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة $\overline{AB}$ هي

$M(\frac{a+b}{2}, \frac{b+a}{2})$ وتنتمي إلى المحور $y = x$.

ميل المستقيم (AB) هو $\frac{a-b}{b-a} = -1$ وهذا يعني أن

الزاوية بين (AB) والمستقيم $y = x$ (حيث ميله 1)

قائمة، وهذا يعني أن B تنأظر مع A حول المستقيم

$y = x$.

تذكير

إذا كان ناتج ضرب مبلي مستقيمين يساوي -1 يكون

هذان المستقيمين متعامدين.

ثقة ارتباط طبيعي بين المعكوسات وتركيب الدوال يعطي تصورًا أوضح للعمل الفعلي للمعكوس: إنه "يلغي" عمل الدالة الأصلية. وهذا يؤدي إلى القاعدة الآتية:

قاعدة التركيب العكسي

الدالة f هي دالة واحد لواحد ودالتها العكسية هي الدالة g إذا وفقط إذا كانت

$$\text{لجميع قيم } x \text{ في مجال الدالة } g: f(g(x)) = x$$

$$\text{ولجميع قيم } x \text{ في مجال الدالة } f: g(f(x)) = x$$

مثال 5 التحقق من الدوال العكسية

A. أثبت جبريًا أن $f(x) = x^3 + 1$ و $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ دالتان متعاكستان.

B. هل الدالتان $f(x) = x^2 + 5$ و $g(x) = \sqrt{x} - 5$ متعاكستان؟ بزر إجابتك.

الحل

A. نستعمل قاعدة التركيب العكسي

$$f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x-1}) = (\sqrt[3]{x-1})^3 + 1 = x - 1 + 1 = x$$

$$g(f(x)) = g(x^3 + 1) = \sqrt[3]{(x^3 + 1) - 1} = \sqrt[3]{x^3} = x$$

بما أن هذه المعادلات صحيحة لجميع قيم x ، فإن قاعدة التركيب العكسي تضمن أن f و g كل منهما معكوس للآخر.

لا يتعين عليك فعل الكثير لإيجاد دعم بياني لهذا التحقق الجبري، لأن التمثيلين البيانيين لهاتين الدالتين موضحان في المثال 4

B. نستعمل قاعدة التركيب العكسي

$$f(g(x)) = f(\sqrt{x} - 5)$$

$$= (\sqrt{x} - 5)^2 + 5$$

$$= x - 10\sqrt{x} + 25 + 5$$

$$= x - 10\sqrt{x} + 30$$

$$g(f(x)) = g(x^2 + 5)$$

$$= \sqrt{x^2 + 5} - 5$$

بما أن $f(g(x)) \neq g(f(x))$ ، وأيًا من $f(g(x))$ أو $g(f(x))$ لا يساوي x ،

فإن الدالتين ليستا متعاكستين.

أسئلة للتفكير

س: هل الترتيب في تركيب الدوال مهم عند التحقق من أن إحداهما هي معكوس الأخرى؟
نموذج إجابة:

كلا، علينا فقط أن نيسط قيمة $f(g(x))$

أو $g(f(x))$ بغض النظر عن ترتيبهما.

س: كيف يرتبط تركيب الدالة ومعكوسها بمنحنى الدالة بالنسبة لمنحنى معكوسها؟
نموذج إجابة:

تركيب الدالة ومعكوسها يساوي x ومنحنى معكوس

الدالة هو انعكاس منحنى الدالة حول المستقيم $y = x$.

س: كيف يمكن مقارنة معكوس الدوال مع العمليات العكسية؟
نموذج إجابة:

عندما نجمع عددًا مع نظيره الجمعي،

يكون الناتج 0، وهو العنصر المحايد لعملية الجمع.

وعندما نضرب عددًا بمقلوبه نحصل على 1،

وهو العنصر المحايد للضرب. وكذلك عندما نركب دالة

مع معكوسها، نحصل على x وهي دالة التطابق التي هي

أيضًا الدالة المحايدة لعملية تركيب الدوال.

سؤال للتفكير

س: هل يمكن أن تكون الدالة متعاكسة مع نفسها؟

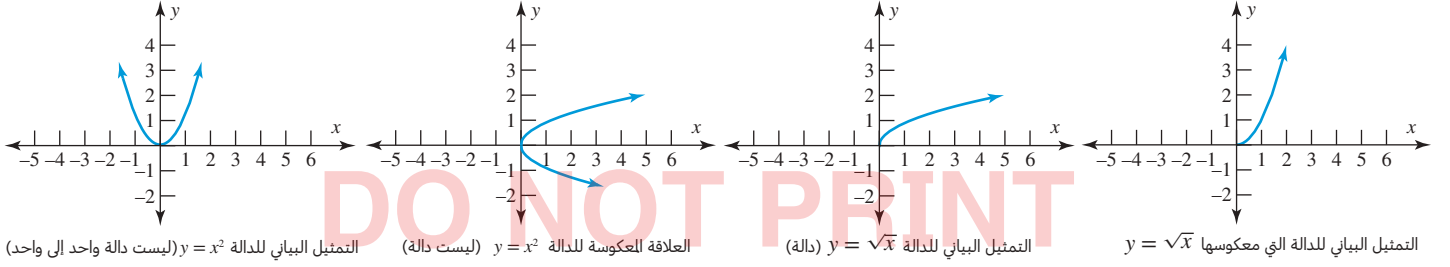
نموذج إجابة:

نعم، على سبيل المثال: $f(x) = \frac{1}{x}$ متعاكسة مع

نفسها، $f \circ f(x) = x$.

الدالة العكسية على مجال محدد

بعض الدوال مهمة جدًا لدرجة أننا بحاجة إلى دراسة معكوساتها حتى لو لم تكن دوال واحد لواحد. من الأمثلة الجيدة على ذلك دالة الجذر التربيعي، التي هي "معكوس" للدالة التربيعية. غير أنها ليست معكوسًا للدالة التربيعية بأكملها، لأن القطع المكافئ يفشل في اختبار الخط الأفقي. يبيّن الشكل 2.3.4 أن الدالة $y = \sqrt{x}$ هي الدالة العكسية للدالة $y = x^2$ على مجال محدد هو $x \geq 0$.



الشكل 2.3.4 ليس للدالة $y = x^2$ دالة عكسية. ولكن الدالة $y = \sqrt{x}$ هي دالة عكسية للدالة $y = x^2$ على المجال المحدد $[0, \infty)$.

أخذ المجالات في الحسبان يضيف تحسينًا إلى الطريقة الجبرية لإيجاد المعكوس الواردة في المثال 3، والتي نلخصها الآن كما يلي:

كيف نجد الدالة المعكوسة جبريًا

بمعرفة صيغة الدالة f ، تابع كما يلي لإيجاد صيغة للدالة f^{-1} .

1. قرّر أنه توجد دالة f^{-1} من خلال التحقق من أن f دالة واحد لواحد. اذكر أي قيود على مجال f . (لاحظ أنه قد يكون من الضروري فرض قيود للحصول على نسخة واحد لواحد من الدالة f).

2. بدّل x و y في الصيغة $y = f(x)$

3. حل لإيجاد y لتحصل على الصيغة $y = f^{-1}(x)$. اذكر أي قيود على مجال f^{-1} .

أسئلة للتفكير

س: هل يجب أن نقيّد مجال أي دالة للحصول على دالة

عكسية؟

نموذج إجابة:

كلا، نقوم بذلك فقط إذا كان للدالة نفس القيمة لأكثر من قيمة للمتغير x .

س: كيف يمكن أن نقيّد مجال الدالة $f(x) = x^2$

للحصول على دالة عكسية؟

نموذج إجابة:

إذا اقتصرنا على المجال $x \geq 0$ ،

تكون الدالة العكسية $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

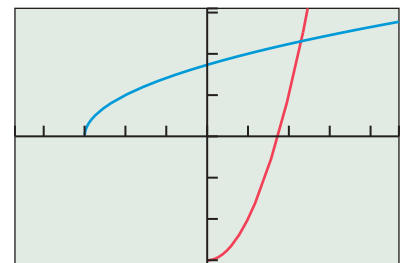
مثال 6 إيجاد دالة عكسية جبريًا

أثبت أن $f(x) = \sqrt{x+3}$ لها دالة عكسية وأوجد قاعدة لـ $f^{-1}(x)$. اذكر أي قيود على مجالي f و f^{-1} .

الحل

التمثيل البياني للدالة f يجتاز اختبار الخط الأفقي، إذن f لها دالة عكسية (الشكل 2.3.5).

لاحظ أن f لها المجال $[-3, \infty)$ والمدى $[0, \infty)$.



$[-4.7, 4.7]$ في $[-3.1, 3.1]$

الشكل 2.3.5

(تابع)

لإيجاد f^{-1} نكتب:

$$y = \sqrt{x+3} \quad \text{حيث } x \geq -3, y \geq 0$$

$$x = \sqrt{y+3} \quad \text{حيث } y \geq -3, x \geq 0$$

$$x^2 = y + 3 \quad \text{حيث } y \geq -3, x \geq 0$$

$$y = x^2 - 3 \quad \text{حيث } x \geq 0, y \geq -3$$

بذل x و y

قم بالتربيع

حل لإيجاد y

$$\text{إذن } x \geq 0, f^{-1}(x) = x^2 - 3$$

يبين الشكل 2.3.5 الدالتين.

لاحظ قيد المجال $x \geq 0$ المفروض على القطع المكافئ $y = x^2 - 3$.

حاول أن تحل التمرين 22

سؤال للتفكير

س: متى يكون للدالة ومعكوسها المجال نفسه؟

نموذج إجابة:

إذا كان مجال الدالة ومداها متماثلين.

عادات التفكير

يقول حمد إن الدالتين $f(x) = (x-2)^2 + 5$ و $g(x) = \sqrt{x-5} + 2$ متعاكستان. يقول كرم أنهما

متعاكستان فقط في جزء محدود من المجال. أي منهما

محق؟ اشرح.

نموذج إجابة:

كرم هو المحق. الدالتان متعاكستان إذا اقتصر مجال f

على $x \geq 2$

سؤال للتفكير

س: كيف يمكن أن نتحقق من أنك قد كتبت قاعدة r

بصيغة سليمة؟

نموذج إجابة:

عوض صيغة r في القاعدة الأصلية، ثم بسط، يجب أن

تحصل ببساطة على V .

س: كيف تكون العلاقة بين القاعدة الأصلية والمستنتجة

مشابهة للعلاقة بين الدالة ومعكوسها؟

نموذج إجابة:

عندما نعوض القاعدة المستنتجة في القاعدة الأولى

نحصل على القيمة الأصلية، وهو ما يحصل عندما نرغب

الدالة مع معكوسها.

عادات التفكير

س: ما هو المتغير التابع في القاعدة $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

وما هو المتغير التابع في القاعدة $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$ ؟

نموذج إجابة:

r, V

للطلاب الذين يواجهون صعوبات

(مع المثال 7) لدى بعض الطلاب صعوبات في استنتاج

القاعدة العكسية للعلاقات الخطية. دع الطلاب يحاولون

حل ما يلي:

$$1. \text{ أعد كتابة } a + 2b = 6 \text{ للحصول على } b.$$

$$b = \frac{6-a}{2}$$

$$2. \text{ أعد كتابة } 3x - y = -5 \text{ للحصول على } y.$$

$$y = 3x + 5$$

$$3. \text{ أعد كتابة } m = 4n - 7 \text{ للحصول على } n.$$

$$n = \frac{m+7}{4}$$

مثال 7 إعادة كتابة الصيغة

فنان نحت يصنع مجسمًا من الجليد

لكوكب الأرض لأحد المعارض.

وقد صنع قالبًا يسع 4.5 L من الجليد.

كم سيساوي نصف قطر مجسم الجليد

إذا ملأ القالب بأكمله؟

الحل

لحساب حجم الشكل الكروي

باستعمال الصيغة $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

أعد كتابة الصيغة لإيجاد طول نصف القطر.

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = V$$

$$\pi r^3 = \frac{3}{4}V$$

$$r^3 = \frac{3}{4\pi}V$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}V}$$

بما أن اللتر هو وحدة قياس السعة، أو الحجم، فيمكن التعبير عنه باستعمال وحدات

الطول المكعبة. عندما تحسب الجذر التكعيبي لمقدار يتضمن الحجم بوحدة الطول

المكعبة، فإن وحدات الناتج ستكون الوحدات الصحيحة لوصف الطول.

التر الواحد يساوي 1000 cm^3 ، إذن 4.5 L تساوي 4500 cm^3

(تابع)

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}V}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} \times 4500}$$

$$\approx 10.2$$

عوّض بالعدد 4500 عن V

إعادة كتابة المعادلة لتوضيح r بدلالة V يشبه إيجاد المعكوس. وفي الواقع، أنت تبدل أدوار المتغير التابع والمتغير المستقل. ففي المعادلة الأصلية $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ، يمكنك ملاحظة كيف أن قيمة V تعتمد على قيمة r ، وفي المعادلة الناتجة $r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}V}$ ، يمكنك ملاحظة كيف يمكن تحديد قيمة r بواسطة قيمة معينة للحجم V وكيف أنها تعتمد على هذه القيمة. سيكون نصف قطر قالب مجسم الجليد 10.2 cm تقريباً.

حاول أن تحل التمرين 25

متابعة

أسأل: إذا كانت f و g دالتين متعاكستين، وكانت $f(3) = 7$ ، أوجد $g(3)$ و $g(7)$ إذا كان هذا ممكناً. ($g(7) = 3$)

ملاحظات على التمارين

التمارين 6-1، تبين العلاقة العكسية والدوال العكسية. التمارين 7-10، تركز على اختبار الخط الأفقي وإيجاد الدالة العكسية بيانياً. التمارين 28-31، تدرب الطالب على أنماط من الاختبارات.

التقييم المستمر

التقييم الذاتي:

التمارين 5، 11، 14، 19، 24، 27

مراجعة سريعة 2.3

في التمارين 1-10، حل المعادلة لإيجاد y .

5. $x = \frac{y-2}{y+3}$ $y = \frac{3x+2}{1-x}$

7. $x = \frac{2y+1}{y-4}$ $y = \frac{4x+1}{x-2}$

9. $x = \sqrt{y+3}$ ، $y \geq -3$
 $y = x^2 - 3$ ، $x \geq 0$

6. $x = \frac{3y-1}{y+2}$ $y = \frac{2x+1}{3-x}$

8. $x = \frac{4y+3}{3y-1}$ $y = \frac{x+3}{3x-4}$

10. $x = \sqrt{y-2}$ ، $y \geq 2$
 $y = x^2 + 2$ ، $x \geq 0$

1. $x = 3y - 6$ $y = \frac{1}{3}x + 2$

2. $x = 0.5y + 1$ $y = 2x - 2$

3. $x = y^2 + 4$ $y = \pm \sqrt{x-4}$

4. $x = y^2 - 6$ $y = \pm \sqrt{x+6}$

الدرس 2.3 التمارين

1. لتكن $f(x) = (x+1)^2$

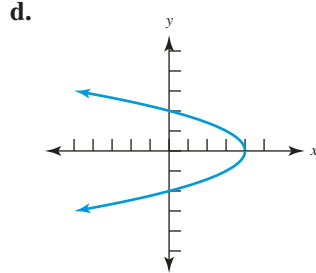
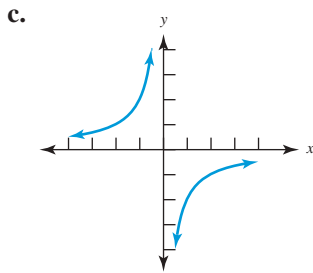
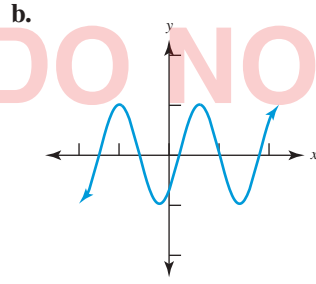
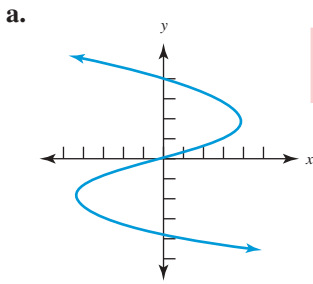
a. كيف يمكنك إيجاد العلاقة العكسية للدالة f جبرياً؟

b. كيف ترتبط تمثيلات $y = (x+1)^2$ و $y = \pm\sqrt{x} - 1$ البيانية؟

2. أي من التمثيلات البيانية (a)، (b)، (c)، (d) أدناه هي تمثيلات بيانية لـ:

i. علاقات عبارة عن دوال؟

ii. علاقات لها معكوسات عبارة عن دوال؟



في التمارين 19-24، أوجد صيغة $f^{-1}(x)$. اذكر أي قيود على مجال f و f^{-1} .

19. $f(x) = \sqrt{x-3}$

20. $f(x) = \sqrt{x+2}$

21. $f(x) = x^3$

22. $f(x) = \sqrt{x^3+5}$

23. $f(x) = \sqrt[3]{x+5}$

24. $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$

25. اشترى مدير مطعم مخاريط للآيس كريم. أوجد صيغة لطول نصف القطر، r ، لمخروط بدلالة حجمه، V . ثم أوجد طول نصف قطر مخروط إذا كان حجمه يساوي $290\pi \text{ cm}^3$ وارتفاعه 15 cm



26. **تحويل العملات** في مايو من عام 2013 كان سعر الصرف

لتحويل الدولار الأمريكي (x) إلى يورو (y)، $y = 0.76x$.

a. كم المبلغ باليورو الذي تحصل عليه نظير \$100 أمريكي؟

b. ما الدالة العكسية وما التحويل الذي تمثله؟

c. في ربيع عام 2013، تناول سائح غداءً فخماً في منطقة

بروفنس في فرنسا، حيث طلب من قائمة ذات سعر ثابت

يبلغ 48 يورو. كم كان ذلك المبلغ يساوي بالدولار الأمريكي؟

27. **تحويل درجة الحرارة** صيغة تحويل درجة الحرارة المئوية (x)

إلى درجة الحرارة بالكلفن هي $k(x) = x + 273.16$. وصيغة

تحويل درجة الحرارة بالفهرنهايت (x) إلى درجة الحرارة المئوية

هي $c(x) = \left(\frac{5}{9}\right)(x - 32)$

a. أوجد صيغة لـ $c^{-1}(x)$. ما الغرض من استعمال

هذه الصيغة؟

b. أوجد $(k \circ c)(x)$. ما الغرض من استعمال هذه الصيغة؟

في التمارين 3-6، أوجد صيغة $f^{-1}(x)$.

3. $f(x) = 3x - 6$

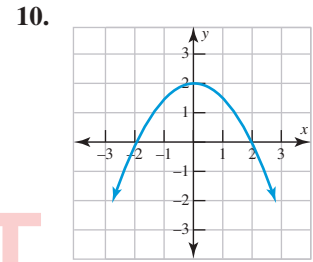
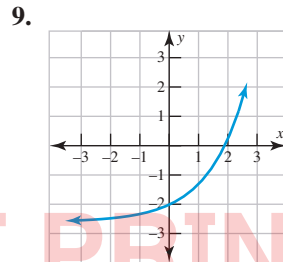
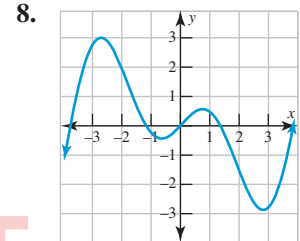
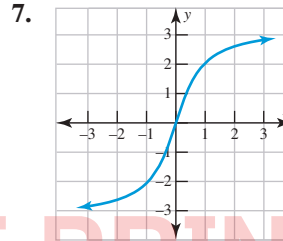
4. $f(x) = 2x + 5$

5. $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$

6. $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$

في التمارين 7-10، حدّد ما إذا كانت الدالة دالة واحد لواحد.

إذا كانت كذلك، ارسم التمثيل البياني لمعكوسها.



في التمارين 11-18، بيّن ما إذا كانت f و g دالتين متعاكستين.

11. $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = \frac{x+2}{3}$ متعاكستان

12. $f(x) = \frac{x+3}{4}$, $g(x) = 4x - 3$ متعاكستان

13. $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ متعاكستان

14. $f(x) = \frac{7}{x}$, $g(x) = \frac{7}{x}$ متعاكستان

15. $f(x) = \frac{x+1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x-1}$ متعاكستان

16. $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$, $g(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ متعاكستان

17. $f(x) = 2x - 9$, $g(x) = \frac{1}{2}x + 9$ غير متعاكستين

18. $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{3}}$, $g(x) = 3x^2 - 4$ غير متعاكستين

أسئلة اختبار معيارية

28. صواب أم خطأ إذا كانت f هي دالة واحد لواحد، مجالها D ومداها R ، إذن f^{-1} هي دالة واحد لواحد، مجالها R و مداها D . برّر إجابتك.

29. صواب أم خطأ $f \circ f^{-1}$ هي الدالة المحايدة. برّر إجابتك.

30. اختيار من متعدد أي دالة مما يلي هي معكوس الدالة C ؟ $f(x) = 3x - 2$

A. $g(x) = \frac{x}{3} + 2$

B. $g(x) = 2 - 3x$

C. $g(x) = \frac{x+2}{3}$

D. $g(x) = \frac{x-3}{2}$

E. $g(x) = \frac{x-2}{3}$

31. اختيار من متعدد أي دالة مما يلي هي معكوس الدالة A ؟ $f(x) = x^3 + 1$

A. $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$

B. $g(x) = \sqrt[3]{x} - 1$

C. $g(x) = x^3 - 1$

D. $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$

E. $g(x) = 1 - x^3$

استكشاف

32. خصائص الدوال التي ترثها معكوسات الدوال هناك بعض خصائص الدوال التي ترثها دوال المعكوس (حين تكون موجودة) تلقائياً، والبعض الآخر الذي لا ترثه. لنفترض أن لدى f دالة المعكوس f^{-1} . ناقش جبرياً أو بيانياً (ليس برهاناً نظامياً دقيقاً) لتبرهن أن كل الخصائص التالية للدالة f هي أيضاً خصائص للدالة f^{-1} .

a. f متصلة.

b. f هي دالة واحد لواحد.

c. f هي دالة فردية (بيانياً، متناظرة بالنسبة لنقطة الأصل).

d. f متزايدة.

33. خصائص الدوال التي لا ترثها معكوسات الدوال هناك بعض

خصائص الدوال التي لا ترثها بالضرورة دوال المعكوس، حتى لو كانت موجودة. لنفترض أن لدى f دالة المعكوس f^{-1} .

لكل من الخصائص التالية، أعط مثالاً لتبين أنه يمكن أن يكون للدالة f هذه الخاصية دون أن تكون أيضاً للدالة f^{-1} .

a. f لها خط تقارب أفقي.

b. f لها مجال هو كل الأعداد الحقيقية.

c. f لها عدم اتصال قابل للإزالة عند $x = 5$.

توسيع الأفكار

34. مقياس «Baylor» لمعدل العلامات الدالة المستخدمة

لتحويل معدل العلامات المدرسية وفق مقياس "Baylor" لتصبح معدلات من 4، هي:

$$y = \left(\frac{3}{30} (x - 65) \right)^{\frac{1}{1.7}} + 1$$

مجال هذه الدالة هو $[65, 100]$. أي علامة تحت 65 سوف تحول تلقائياً إلى صفر.

a. أوجد معكوس هذه الدالة جبرياً. ماذا يمكن أن تكون وظيفة هذه الدالة؟

b. هل هناك شروط تحدد مجال معكوس الدالة؟

c. تحقق من خلال الآلة الحاسبة من أن الدالة التي وجدت في (a) هي فعلاً معكوس الدالة المعطاة أولاً.

35. نشاط جماعي (تابع للتمرين السابق) يسمى العدد 1.7 الذي

يظهر في مكانين في قاعدة المقياس السابق عامل المقياس (k) . يمكن تغيير قيمة k بحيث يتغير منحنى الدالة فيما تبقى النقاط (65.1) و (95.4) ثابتة وحيث اعتقد أن العلامة الأدنى 65 ينبغي أن تصبح 1 على المقياس الجديد بينما العلامة 95 ينبغي أن تصبح 4 على هذا المقياس. اختار المجلس الأكاديمي $k = 1.7$ بوصفه العامل الذي ينتج المقياس الأكثر إنصافاً، وذلك بعد تجرب عدة قيم أخرى. حاول أن تعطي k قيمًا بين 1 و 2، وأوجد نوع المنحنى حين يكون $k = 1$. هل توافق مقياس "Baylor" أن $k = 1.7$ هو الأكثر إنصافاً؟

إجابات أسئلة التمارين 2.3

26. a. يورو 76

1. a. $y = \pm\sqrt{x} - 1$

b. $f^{-1}(x) = \frac{x}{0.76}$ تحويل اليورو إلى دولار

b. متناظران حول المحور $y = x$

c. 63.16 دولار

2. i. b, c

ii. a, c, d

27. a. تحويل الدرجة المئوية إلى فهرنهايت: $C^{-1}(x) = \frac{9}{5}x + 32$

b. تحويل الفهرنهايت إلى كلفن: $k \circ C(x) = \frac{9}{5}(x - 32) + 273.16$

28. صواب، لأن كل قيمة y في المدى يقابلها قيمة واحدة x في المجال بحيث $f(x) = y$ وهذا يعرف دالة واحد لواحد هي f^{-1} .

29. صواب، لأن $f \circ f^{-1}(x) = x$

32. a. f^{-1} متصلة لأنها تتناظر مع f .

b. f^{-1} واحد لواحد لأنها تتناظر مع f .

c. f^{-1} دالة فردية لأنها متناظرة بالنسبة لنقطة الأصل.

d. لتكن $x_1 < x_2$ ، إذا كان $f^{-1}(x_1) \geq f^{-1}(x_2)$ ، فإن $f(f^{-1}(x_1)) \geq f(f^{-1}(x_2))$ ، إذن $x_1 \geq x_2$ لأن f متزايدة. إذن، $f^{-1}(x_1) \leq f^{-1}(x_2)$.

33. سوف نتعرف فيما بعد على الدالة $f(x) = 2^x$ التي يبين تمثيلها البياني أنها دالة واحد لواحد وأن مجالها كل الأعداد الحقيقية ومداها هو $[0, \infty)$.

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ، إذن، للدالة f خط تقارب أفقي وليس لها خط تقارب رأسي. وبما أن f^{-1} تتناظر معها حول المحور $y = x$ ، فإن لها خط تقارب رأسي وليس لها خط تقارب أفقي.

b. مجال f هو كل الأعداد الحقيقية، ومداها هو $[0, \infty)$ ، إذن مجال معكوسها هو $[0, \infty)$.

c. لنفترض أن نقطة عدم الاتصال للدالة هي $(5, 3)$ ، إذن نقطة عدم الاتصال للدالة f^{-1} هي $(3, 5)$. إذن f^{-1} لها عدم اتصال عند $x = 3$ وليس عند $x = 5$.

34. a. تحويل المعدلات من مقياس (Baylor من 4) إلى معدل العلامات المدرسية المئوية (من مئة).

$$y = \frac{30}{1.7}(x - 1)^{1.7} + 65$$

b. نعم، $x \in [1, 4.28]$

c. مثل تركيب الدالتين بيانًا باستعمال حاسبة بيانية وتحقق من أنها $y = x$ على $[65, 100]$ أو $[1, 4.28]$ حسب الترتيب.

35. تكون الدالة خطية عندما $k = 1$. تختلف الآراء حول أفضل قيمة للمتغير k .

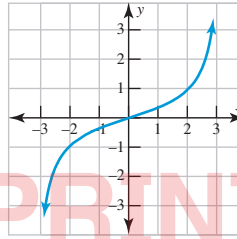
3. $f^{-1}(x) = \frac{x}{3} + 2$

4. $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$

5. $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{-x+2}$

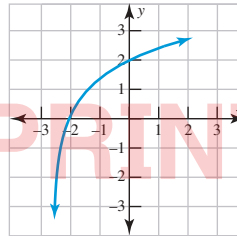
6. $f^{-1}(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

7. واحد لواحد، متناظر حول $y = x$.



8. ليست واحد لواحد

9. واحد لواحد، متناظر حول $y = x$.



10. ليست واحد لواحد

19. $f^{-1}(x) = x^2 + 3$ ، مجال f هو $[3, \infty)$ ، مجال f^{-1} هو $[0, \infty)$.

20. $f^{-1}(x) = x^2 - 2$ ، مجال f هو $[-2, \infty)$ ، مجال f^{-1} هو $[0, \infty)$.

21. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ ، مجال f هو $[-\infty, \infty)$ ، مجال f^{-1} هو $[-\infty, \infty)$.

22. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5}$ ، مجال f هو $[-\sqrt[3]{5}, \infty)$ ، مجال f^{-1} هو $[0, \infty)$.

23. $f^{-1}(x) = x^3 - 5$ ، مجال f هو $[-\infty, \infty)$ ، مجال f^{-1} هو $[-\infty, \infty)$.

24. $f^{-1}(x) = x^3 + 2$ ، مجال f هو $[-\infty, \infty)$ ، مجال f^{-1} هو $[-\infty, \infty)$.

25. $r(V) = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$, $r \approx 7.6$ cm

Graphical Transformation

تحويلات التمثيلات البيانية للدوال

2.4

التحويلات الهندسية

الدوال التالية كلها مختلفة:

$$y = x^2$$

$$y = (x - 3)^2$$

$$y = 1 - x^2$$

$$y = x^2 - 4x + 5$$

على الرغم من اختلاف التمثيلات البيانية لهذه الدوال، إلا أنها جميعها تتماثل في الشكل والقياس: أي أن الشكل نفسه مرسوم في مواقع مختلفة.

إن تغيير المقدار الجبري للدالة يؤدي إلى تغيير في شكل وموقع وأبعاد منحناها (تمثيلها البياني)، وهذا يؤكد حتمًا الربط بين المقدار الجبري للدالة ومنحناها.

سوف نربط في هذا الدرس بين التمثيلات البيانية (المنحنيات) لعدة دوال باستخدام مفهوم

التحويلات الهندسية. تُمثل التحويلات الهندسية دوالًا تربط كل نقطة بنقطة أخرى من خلال العمل على تغيير الإحداثيين x و y بطريقة محددة.

التحويلات القياسية هي التحويلات التي تتغير مواقع التمثيلات البيانية مع الإبقاء على أشكالها، وأبعادها كالإزاحة والانعكاس وتركيب التحويلين.

أما **التحويلات غير القياسية** فهي التحويلات التي تؤثر في أشكال التمثيلات كالتمدد والتضيق.

الإزاحة الرأسية والإزاحة الأفقية

الإزاحة الرأسية لمنحنى الدالة $y = f(x)$ هي نقل لمنحنى الدالة في المستوى الإحداثي إلى الأعلى أو الأسفل.

الإزاحة الأفقية تنقل منحنى الدالة في المستوى الإحداثي إلى اليمين أو اليسار.

ما ستتعلمه

- التحويلات الهندسية
- الإزاحة الرأسية والإزاحة الأفقية
- الانعكاس حول المحورين
- التمدد والتضيق الرأسي والأفقي
- تركيب التحويلات الهندسية

ولماذا ...

إن دراسة التحويلات الهندسية تساعد على فهم العلاقات بين التمثيلات البيانية المتشابهة في بعض الجوانب لكنها ليست متماثلة كليًا.

معايير الدرس

11A.6.1

11A.6.2

المصطلحات

- التحويلات الهندسية transformations
- الإزاحة الرأسية vertical translation
- الإزاحة الأفقية horizontal translation
- انعكاس حول المحور x reflection about the x -axis
- انعكاس حول المحور y reflection about the y -axis
- التمدد والتضيق الأفقي horizontal stretch and shrink
- التمدد والتضيق الرأسي vertical stretch and shrink

الهدف

سوف يتمكن الطلاب من تمثيل الدوال تحت تأثير إزاحات، وانعكاسات، وتمددات، وتضيقات الدوال جبريًا وبيانيًا.

دليل الدرس

1. الإزاحات الأفقية والرأسية
2. الانعكاس حول أحد المحورين
3. التضيق والتمدد الأفقي
4. تركيب التحويلات الهندسية

تحفيز

اسأل الطلاب: ما العلاقة بين التمثيل البياني للدالة $y = (x - 2)^2$ والتمثيل البياني للدالة $y = x^2$ ؟
نموذج إجابة:

إزاحة أفقية بمقدار وحدتين إلى اليمين

نشاط استكشافي 1 الإزاحة

1. مثل الدوال التالية بيانيًا في نفس المستوى الإحداثي مستعملًا البرمجيات.

$$y_1 = x^2$$

$$y_2 = y_1(x) + 3 = x^2 + 3$$

$$y_3 = y_1(x) - 2 = x^2 - 2$$

$$y_4 = y_1(x) + 1 = x^2 + 1$$

$$y_5 = y_1(x) - 4 = x^2 - 4$$

أوجد تأثير الأعداد +3 و +1 و -2 و -4 على التمثيلات البيانية.

تحفيز

س: هل تؤدي إزاحة القطع المكافئ إلى تغيير في شكله؟
نموذج إجابة:

كلا، تنقل الإزاحة القطع المكافئ إلى موقع جديد، وهذا ما يحافظ على شكله.

نشاط المصطلحات

دع الطلاب يمثلون بيانيًا الدالة $y_1 = x^2$ والدالة $y_2 = (x - 1)^2$ و $y_3 = x^2 - 1$.
اسألهم أن يبحثوا عن الكلمة التي تعبر عن الرابط بين هذه التمثيلات البيانية. بعد وصولهم بمساعدتك إلى مصطلح الإزاحة، أدخل لهم بنفس الطريقة مصطلحي التمدد والتضيق.

2. مثل الدوال التالية بيانيًا في نفس المستوى الإحداثي مستعملًا البرمجيات.

$$y_1 = x^2$$

$$y_2 = y_1(x + 3) = (x + 3)^2$$

$$y_3 = y_1(x - 2) = (x - 2)^2$$

$$y_4 = y_1(x + 1) = (x + 1)^2$$

$$y_5 = y_1(x - 4) = (x - 4)^2$$

أوجد تأثير الأعداد 3 و -2 و 1 و -4 في التمثيلات البيانية.

3. أعد ما قمت به في 1 و 2 على الدوال: $y_1 = \sqrt{x}$, $y_1 = |x|$, $y_1 = x^3$

هل تتوافق ملاحظتك الحالية مع ملاحظتك السابقة؟

توسيع الاستكشاف

نلاحظ عمومًا أن تعويض $x - c$ عن x ، حيث $c > 0$ ، في الدالة يؤدي إلى إزاحة منحنى الدالة c وحدة إلى اليمين، وأن تعويض $x + c$ عن x ، حيث $c > 0$ ، يؤدي إلى إزاحة منحنى الدالة c وحدة إلى اليسار.

كذلك تعويض $y - c$ عن y ، حيث $c > 0$ ، في الدالة يؤدي إلى إزاحة منحنى الدالة c وحدة إلى الأعلى، وتعويض $y + c$ عن y ، حيث $c > 0$ ، يؤدي إلى إزاحة منحنى الدالة c وحدة إلى الأسفل.

نستخلص مما سبق القواعد التالية:

ملاحظة تعليمية

الأدوات المستعملة للتمثيل البياني هي أدوات مهمة جدًا في إبراز التحويلات على الدوال الأصلية كالدالة $y = x^2$.

إزاحة الدوال

ليكن $c > 0$

فيما يلي الدوال التي تنشأ عن الإزاحة الأفقية أو الرأسية للدالة $y = f(x)$

الإزاحة الأفقية

$$y = f(x + c)$$

إزاحة إلى اليسار بمقدار c وحدة

$$y = f(x - c)$$

إزاحة إلى اليمين بمقدار c وحدة

الإزاحة الرأسية

$$y = f(x) + c$$

إزاحة إلى الأعلى بمقدار c وحدة

$$y = f(x) - c$$

إزاحة إلى الأسفل بمقدار c وحدة

مثال 1 الإزاحة الرأسية والإزاحة الأفقية

يتن كيف يمكن تحويل منحنى الدالة $f(x) = |x|$ إلى منحنى كلٍّ من الدوال التالية:

A. $y = |x| - 4$

B. $y = |x + 2|$

(تابع)

سؤال للتفكير

س: هل يمكننا الربط بين التحويلات وتركيب الدوال؟
نموذج إجابة:

نعم، يمكننا أن نكتب مثلًا

$$f(g(x)) = f(x + 3) = g(x) + 3 = x + 3$$

التركيب $f \circ g$ مكافئًا لإزاحة التمثيل البياني للدالة f أفقيًا بمقدار 3 وحدات إلى اليسار.

الحل

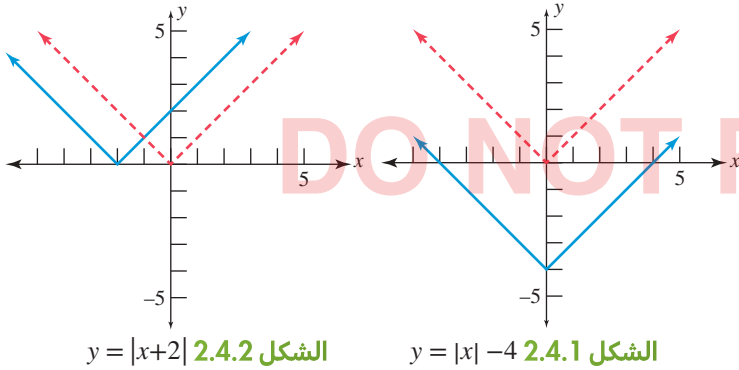
A. المعادلة في الصورة $y = f(x) - 4$

إذن، التحويل هو إزاحة إلى الأسفل بمقدار 4 وحدات. انظر الشكل 2.4.1

B. المعادلة في الصورة $y = f(x + 2)$ إذن، التحويل هو إزاحة إلى اليسار بمقدار وحدتين.

انظر الشكل 2.4.2

حاول أن تحل التمرين 1

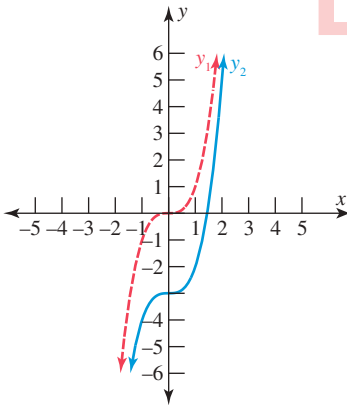


إذا كنا نعرف الدالة الأصلية ومقدار واتجاه الإزاحة يمكننا كتابة دالة المنحنى المُزاح.

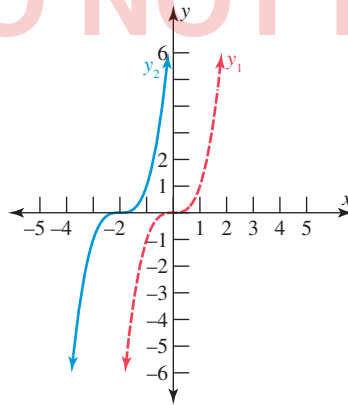
مثال 2 إزاحة الدالة

يبين كل تمثيل من التمثيلات البيانية في الشكل أدناه، المنحنى للدالة $y_1 = x^3$ مع إزاحته أفقيًا أو رأسيًا y_2 . أوجد الدالة y_2 .

A.



B.



سؤال للتفكير

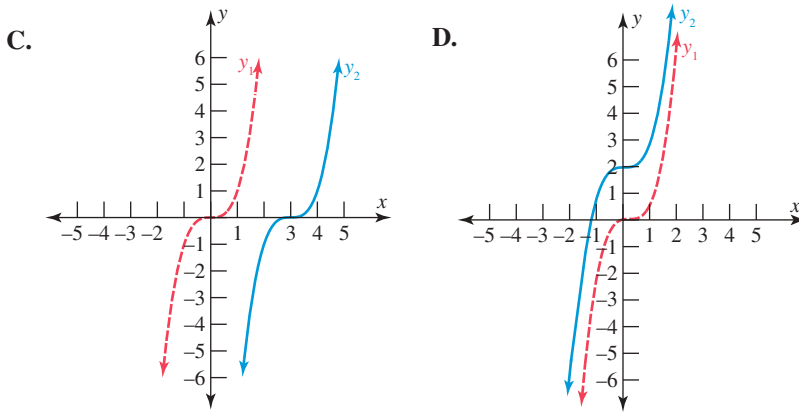
س: يبين الرسم البياني في كل من (B) و (C) أن أي مستقيم أفقي يقطع التمثيل البياني للدالتين y_1 و y_2 في نقطتين هما دائمًا على مسافة ثابتة.

فهل يوحى الرسم البياني في كل من (A) و (D) نفس الأمر بالنسبة للمستقيمات الرأسية؟

نموذج إجابة:

لا يوحى الرسم البياني بذلك مع أنه صحيح أيضًا، فأي مستقيم رأسي يقطع التمثيل البياني لكلا الدالتين في نقطتين هما على مسافة ثابتة، غير أن تمثيل ذلك غير واضح.

(تابع)



الحل

A. y_2 هي إزاحة رأسية بمقدار ثلاث وحدات إلى الأسفل للدالة y_1 ، إذن:

$$y_2 = y_1 - 3$$

$$y_2 = x^3 - 3$$

B. y_2 هي إزاحة أفقية بمقدار وحدتين إلى اليسار للدالة y_1 ، إذن:

$$y_2 = (x + 2)^3$$

C. y_2 هي إزاحة أفقية بمقدار ثلاث وحدات إلى اليمين للدالة y_1 ، إذن:

$$y_2 = (x - 3)^3$$

D. y_2 هي إزاحة رأسية بمقدار وحدتين إلى الأعلى للدالة y_1 ، إذن:

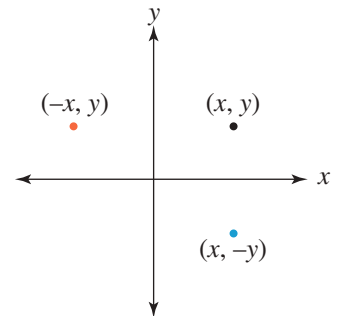
$$y_2 = x^3 + 2$$

حاول أن تحل التمرين 6

الانعكاس حول المحورين

النقطة $(2, -3)$ هي انعكاس للنقطة $(2, 3)$ حول المحور x ، والعكس صحيح.
كذلك النقطة $(-2, 3)$ هي انعكاس للنقطة $(2, 3)$ حول المحور y .
بشكل عام، النقطتان (x, y) و $(x, -y)$ كلٌّ منهما **انعكاس حول المحور x** للآخرى،
وكذلك النقطتان (x, y) و $(-x, y)$ كلٌّ منهما **انعكاس حول المحور y** للآخرى.
إذ إنّ نقطتين (أو منحنيتين) متماثلتين حول محور ما يمثلان انعكاسًا لبعضهما البعض حول هذا المحور.

يبين الشكل 2.4.3 أن الانعكاس حول المحور x يحصل عندما يتم تعويض $-y$ بـ y ، والانعكاس حول المحور y يتم عندما يتم تعويض $-x$ بـ x .



الشكل 2.4.3 النقطة (x, y) وانعكاسها حول المحورين x و y

انعكاسات الدوال

الدوال التالية انعكاسات للدالة $y = f(x)$:

حول المحور x

$$y = -f(x)$$

حول المحور y

$$y = f(-x)$$

إشارة تعليمية

لتصوير التحويلات والانعكاسات يمكننا أن نستعمل سلًا ممددًا على طول منحنى الدالة في شبكة إحداثية زُسمت على اللوح.

مثال 3 إيجاد معادلات انعكاسات الدوال

أوجد معادلة انعكاس الدالة $f(x) = \frac{5x-9}{x^2+3}$ حول كل من المحورين.

الحل

حل جبريًا

حول المحور x :

$$\begin{aligned} y &= -f(x) \\ &= -\frac{5x-9}{x^2+3} \\ &= \frac{9-5x}{x^2+3} \end{aligned}$$

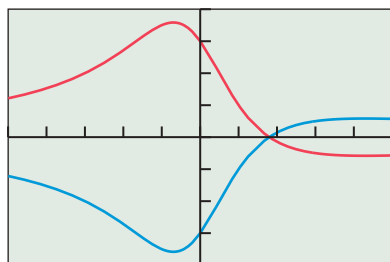
حول المحور y :

$$\begin{aligned} y &= f(-x) \\ &= \frac{5(-x)-9}{(-x)^2+3} \\ &= \frac{-5x-9}{x^2+3} \end{aligned}$$

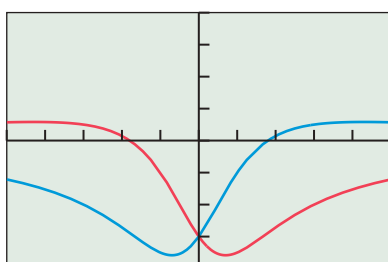
تأكد بيانيًا

يؤكد الحل البياني الظاهر في الشكل 2.4.4 الحل الجبري.

يؤكد التمثيل البياني من خلال برمجيات التمثيل النتيجة الحاصلة.



(a) في $[-4, 4]$ في $[-5, 5]$



(b) في $[-4, 4]$ في $[-5, 5]$

الشكل 2.4.4 انعكاس الدالة $f(x) = \frac{5x-9}{x^2+3}$ (a) حول المحور x و (b) حول المحور y .

نقطة الأصل

الدالة $y = -f(-x)$ هي انعكاس للدالة $f(x)$ حول نقطة الأصل. لاحظ أن الانعكاس حول نقطة الأصل هو عبارة عن انعكاسين متتاليين: حول المحور x ثم حول المحور y أو بالعكس.

سؤال للتفكير

س: كيف يمكنك أن تصف تأثير الانعكاس حول المحور x على الإحداثيات وعلى المعادلة؟
نموذج إجابة:

تضرب القيم y في الدالة الأصل بالعدد -1

س: كيف يمكنك أن تصف تأثير الانعكاس حول المحور y على الإحداثيات وعلى المعادلة؟
نموذج إجابة:

تضرب القيم x في الدالة الأصل بالعدد -1

س: ما الفرق بين $g(x) = -f(x)$ و $g(x) = f(-x)$ ؟
نموذج إجابة:

عندما يكون $g(x) = -f(x)$ فإن منحنى منحنى الدالة g هو انعكاس لمنحنى الدالة f حول المحور x . عندما يكون $g(x) = f(-x)$ فإن منحنى الدالة g هو انعكاس لمنحنى الدالة f عبر المحور y .

س: متى يكون انعكاس الدالة f حول المحور y هو نفس الدالة f ؟

نموذج إجابة:

عندما تكون الدالة زوجية: $f(-x) = f(x)$

خطأ شائع

يعتقد بعض الطلاب خطأً أن النقطة $(x, f(x))$ على منحنى الدالة f تتناظر دائمًا مع النقطة $(-x, f(-x))$ حول المحور y ، وهذا غير صحيح لأنه لا علاقة بالضرورة بين $f(x)$ و $f(-x)$.

التمدد والتضييق الرأسى والأفقي

يحصل التمدد والتضييق للدالة $y = f(x)$ عند ضرب x أو y في ثابت معين، النشاط التالي يوضح ذلك.

نشاط استكشافي 2 التمدد والتضييق

1. مثل الدوال التالية بيانيًا في نفس المستوى الإحداثي.

$$y_1 = x^2$$

$$y_2 = 2y_1(x) = 2x^2$$

$$y_3 = 1.5y_1(x) = 1.5x^2$$

$$y_4 = 0.5y_1(x) = 0.5x^2$$

$$y_5 = 0.25y_1(x) = 0.25x^2$$

أوجد تأثير الأعداد 2 و 1.5 و 0.5 و 0.25 على التمثيلات البيانية.

2. مثل الدوال التالية بيانيًا في نفس المستوى الإحداثي.

$$y_1 = x^2$$

$$y_2 = y_1(1.5x) = (1.5x)^2$$

$$y_3 = y_1(2x) = (2x)^2$$

$$y_4 = y_1(0.5x) = (0.5x)^2$$

$$y_5 = y_1(0.25x) = (0.25x)^2$$

أوجد تأثير الأعداد 1.5 و 2 و 0.5 و 0.25 على التمثيلات البيانية.

عادات التفكير

س: (مع المثال 3) كيف يؤثر الانعكاس حول المحور x على نقاط التقاطع x ونقاط التقاطع y ؟

نموذج إجابة:

نقاط التقاطع x تبقى في مكانها لأنها على محور التناظر أما نقاط التقاطع y المنعكسة فهي تناظر نقاط التقاطع y للدالة الأصلية حول المحور x .

إشارة تعليمية

في النشاطين الاستكشافيين 1 و 2، ضع الحاسبة على التطبيق الذي يسمح برؤية التمثيلات البيانية تباغًا، بحسب ترتيب إدخال الدوال.

توسيع الاستكشاف

مثل بيانيًا الدوال $y_1 = x^2$ ، $y_2 = 5\left(\frac{1}{2}x\right)^2 - 2$ ، $y_3 = \frac{1}{2}(5x)^2$ ما الأثر الذي يحدثه ضرب الثوابت بالمتغير x والمتغير y ؟

عمومًا، نلاحظ أن تعويض $\frac{x}{c}$ عن x أو تعويض $\frac{y}{c}$ عن y ، حيث $c > 0$ ، يؤدي إلى تغير في شكل منحنى الدالة $y = f(x)$.

يتمدد هذا المنحنى أو يتضيق، رأسيًا أو أفقيًا، تبعًا لقيمة c ، مع العلم أنه في حالة التمدد أو التضييق الرأسى لا تظهر $\frac{y}{c}$ بهذه الصورة بل تظهر بصورة y على الطرف الأول من المساواة ويظهر المعامل c مضروبًا بالدالة $f(x)$ على الطرف الثاني من المساواة.

سؤال للتفكير

س: كيف يمكن التمييز بيانيًا بين التمدد الأفقي والتمدد الرأسى؟

نموذج إجابة:

نلاحظ في التمدد الأفقي أن الدالة تتمدد أكثر باتجاه المحور x ، وأن نقاط التقاطع مع

المحور x تتباعد أكثر عن المحور y ، وأن نقاط القيم

القصى المحلية تتحرك أفقيًا لكنها تحافظ على قيمتها.

أما في التمدد الرأسى فإن حركة الدالة تكون في اتجاه

المحور y حيث تبقى نقاط التقاطع مع المحور x كما هي

لكن القيم القصوى تتباعد أكثر عن المحور x .

كما هو واضح في التمثيل البياني.

يمكننا استخلاص القواعد التالية:

تمدد وتضييق الدوال

ليكن $c > 0$:

فيما يلي الدوال التي تنشأ عن التمدد والتضييق للدالة: $y = f(x)$.

التمدد والتضييق الأفقي

$$\left. \begin{array}{l} \text{تمدد أفقي بالمعامل } c, \text{ إذا كان } c > 1 \\ \text{وتضييق أفقي بالمعامل } c, \text{ إذا كان } c < 1 \end{array} \right\} y = f\left(\frac{x}{c}\right)$$

التمدد والتضييق الرأسي

$$\left. \begin{array}{l} \text{تمدد رأسي بالمعامل } c, \text{ إذا كان } c > 1 \\ \text{وتضييق رأسي بالمعامل } c, \text{ إذا كان } c < 1 \end{array} \right\} y = cf(x)$$

للطلاب الذين يواجهون صعوبات

(مع المثال 4) لمزيد من الدعم، دع الطلاب يتدربون على كتابة جدول لإيجاد النقاط التي يمر بها منحنى الدالة f إذا كان المجال $[-5, 5]$. استعمل الدالة $h(x) = \frac{1}{2}f(x)$ لكتابة جدول يصف المجال والمدى للدالة الجديدة.

س: حدد المجال والمدى للدالة h .

نموذج إجابة:

مجال h هو نفس مجال f ، أما مداها،

فهو $[-22.5, 22.5]$

س: كيف يؤثر التحويل على نقاط منحنى الدالة h مقارنة

مع نقاط منحنى f ؟

نموذج إجابة:

تقع كل نقطة على منحنى الدالة h عند نصف المسافة

ما بين النقطة التي تقابلها على منحنى الدالة f

والمحور x .

مثال 4 إيجاد معادلات للتضييق والتمدد للدالة

ليكن $y_1 = f(x) = x^3 - 16x$ وليكن C_1 المنحنى لهذه الدالة.

أوجد معادلة المنحنى C_2 الناشء عن التحويلات غير القياسية التالية:

A. C_2 هو التمدد الرأسي للمنحنى C_1 بمعامل مقداره 3

B. C_2 هو التضييق الأفقي للمنحنى C_1 بمعامل مقداره $\frac{1}{2}$

الحل

A.

معادلة C_2 هي:

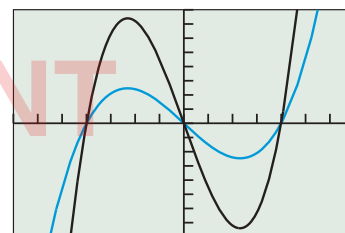
$$\begin{aligned} y_2 &= 3f(x) \\ &= 3(x^3 - 16x) \\ &= 3x^3 - 48x \end{aligned}$$

B.

معادلة C_2 هي:

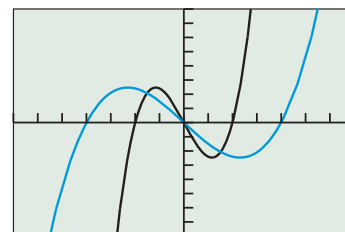
$$\begin{aligned} y_2 &= f\left(\frac{x}{\frac{1}{2}}\right) \\ &= f(2x) \\ &= (2x)^3 - 16(2x) \\ &= 8x^3 - 32x \end{aligned}$$

انظر الشكل 2.4.5، يؤكد التمثيل البياني للدوال y_1 و y_2 النتيجة الحاصلة في كل حالة.



في $[-7, 7]$ في $[-80, 80]$

(a)



في $[-7, 7]$ في $[-80, 80]$

(b)

الشكل 2.4.5 التمثيل البياني للدالة

$y_1 = f(x) = x^3 - 16x$ حيث (a) تمدد

رأسي و (b) تضييق أفقي.

حاول أن تحل التمرين 13

تركيب التحويلات الهندسية

يمكن أن يطرأ على دالة ما تحويلات متتالية، الواحدة تلو الأخرى. مثلاً، إن تنالي التحويلات الهندسية التالية: تمدد، تضيق، أو انعكاس ينتج عنه تركيب لتحويلات هندسية. إن تغيير ترتيب هذه التحويلات قد يؤدي إلى نتائج مختلفة.

مثال 5 التحويلات المتتالية

تتالت على منحنى الدالة $y = x^2$ التحويلات التالية:

- إزاحة أفقية بمقدار وحدتين إلى اليمين.
- تمدد رأسي بمعامل مقداره 3
- إزاحة رأسية بمقدار 5 وحدات إلى الأعلى.

A. أوجد معادلة المنحنى الناتج عن كل هذه التحويلات.

B. اعكس ترتيب التحويلات، ثم أجب عن السؤال السابق. ماذا تلاحظ؟

الحل

$$\begin{aligned} y_1 &= (x - 2)^2 \\ y_2 &= 3(x - 2)^2 \\ y_3 &= 3(x - 2)^2 + 5 \\ y_3 &= 3(x - 2)^2 + 5 \\ &= 3(x^2 - 4x + 4) + 5 \\ &= 3x^2 - 12x + 17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= x^2 + 5 \\ y_2 &= 3(x^2 + 5) \\ &= 3x^2 + 15 \\ y_3 &= 3(x - 2)^2 + 15 \\ &= 3(x^2 - 4x + 4) + 15 \\ &= 3x^2 - 12x + 27 \end{aligned}$$

نلاحظ أن تبديل التحويلات يغير الدالة النهائية إذا كان بين التحويلات تمدد أو تضيق.

سؤال للتفكير

س: هل يتغير تركيب تحويلات من نفس النوع عند تغيير الترتيب؟
نموذج إجابة:
كلا، فإذا كانت التحويلات كلها من نفس النوع، أي كلها إزاحات أو تضيقات أو تمددات، فإن تغير الترتيب لا يحدث أي فرق.

عادات التفكير

بعد إزاحة $f(x) = |x|$ 3 وحدات إلى اليمين، ثم وحدتين إلى الأسفل، وتمدها رأسيًا بمعامل مقداره 4، أوجد صيغة الدالة g التي نحصل عليها.
نموذج إجابة:
 $g(x) = 4|x - 3| - 8$

تنبيه

نتبه الطلاب إلى خطورة عدم الانتباه إلى ترتيب التحويلات، لأن اختلاف الترتيب يؤدي إلى نتائج مختلفة.

أسئلة للتفكير

س: كيف نميز بين التحويل الرأسي والتحويل الأفقي من خلال الصيغة؟
نموذج إجابة:

عندما نكتب $af(x) + k$ فإن a تشير إلى تمدد أو تضيق رأسي، بينما تشير k إلى إزاحة رأسية. عندما نكتب $f[b(x - h)]$ فإن b تشير إلى تمدد أو تضيق أفقي، بينما تشير h إلى إزاحة أفقية.

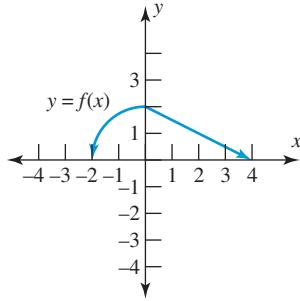
س: لماذا يمكنك أن تقارن شكل منحنى $g(x)$ الذي هو تحويل الدالة $f(x)$ ، بمنحنىها الأصلي بمجرد النظر إلى صيغة g ؟ اشرح.
نموذج إجابة:

لأن شكل المنحنى يبقى على حاله إذا كانت صيغة g تشير إلى إزاحات فقط من دون أي تمدد أو تضيق.

حاول أن تحل التمرين 19

مثال 6 تحويل الدالة هندسيًا

التمثيل البياني للدالة $y = f(x)$ مبين أدناه في الشكل. أوجد التمثيل البياني للدالة $y = 2f(x + 1) - 3$ باعتماد عدد من التحويلات المتتالية.



الحل

يمكن الحصول على منحنى الدالة $y = 2f(x + 1) - 3$ من منحنى الدالة $y = f(x)$ بعد إجراء التحويلات التالية على التوالي:

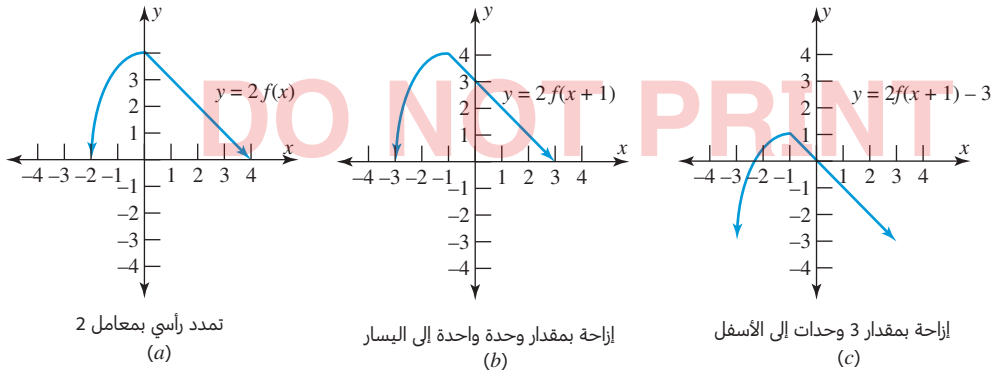
(a) تمدد رأسي بمعامل مقداره 2 ينتج $y = 2f(x)$

(b) إزاحة بمقدار وحدة واحدة إلى اليسار تنتج عنها $y = 2f(x + 1)$

(c) إزاحة بمقدار 3 وحدات إلى الأسفل تنتج عنها $y = 2f(x + 1) - 3$

(يمكن تغيير ترتيب التحويلات الأوليين من دون أن يطرأ تغيير على التمثيل البياني الناتج).

حاول أن تحل التمرين 26



الشكل 2.4.6 تحويل التمثيل البياني للدالة $y = f(x)$ للحصول على التمثيل البياني للدالة $y = 2f(x + 1) - 3$

التقييم المستمر

التقييم الذاتي:

التمرين: 2, 9, 11, 14, 15, 18, 20, 22, 24

ملاحظات على التمارين

التمرين 1-8، تعطي الطلاب الفرصة لاختبار تخميناتهم حول التحويلات الهندسية.
التمرين 9-24، تشمل على عدة أنواع من التحويلات.
ينبغي أن يتنبه الطلاب لمسألة التبديل في ترتيب التحويلات وأثره على النتيجة النهائية.
التمرين 31-34، تدرب الطالب على أنماط من الاختبارات.

سؤال للتفكير

س: ماذا يحدث إذا أجرينا التحويلات وفق الترتيب

(c) ثم (b) ثم (a)؟

نموذج إجابة:

سنحصل على $y = 2f(x + 1) - 6$ وهذا مختلف عن المطلوب في المثال 6.

عادات التفكير

هل تمدد الدالة رأسيًا بمعامل قيمته اثنان، ثم إزاحته رأسيًا 3 وحدات إلى الأسفل يعطي نفس التحويل فيما لو كانت الإزاحة الرأسية 3 وحدات إلى الأسفل أولاً، ثم التمدد الرأسي بمعامل مقداره اثنان؟ إشرح.

نموذج إجابة:

لا، هنالك اختلاف:

الحالة الأولى تعطي $2f(x) - 3$

الحالة الثانية تعطي $2f(x) - 6$

متابعة

ناقش كيف ترتبط التمثيلات البيانية للدوال الزوجية والفردية والانعكاس حول المحور y ونقطة الأصل.

نموذج إجابة:

يتكوّن التمثيل البياني لدالة زوجية من جزأين كلٍّ منهما انعكاس للآخر حول المحور y. ويتكوّن التمثيل البياني لدالة فردية من جزأين كلٍّ منهما انعكاس للآخر حول نقطة الأصل.

مراجعة سريعة 2.4

3. $x^2 + 12x + 36$ $(x+6)^2$

4. $4x^2 + 4x + 1$ $(2x+1)^2$

5. $x^2 - 5x + \frac{25}{4}$ $(x-\frac{5}{2})^2$

6. $4x^2 - 20x + 25$ $(2x-5)^2$

في التمارين 1-6، اكتب العبارات المعطاة على صورة مربع لثنائي الحدين.

1. $x^2 + 2x + 1$ $(x+1)^2$

2. $x^2 - 6x + 9$ $(x-3)^2$

الدرس 2.4 التمارين

5. صف كيف يتحول التمثيل البياني للدالة f إلى التمثيل البياني للدالة g .

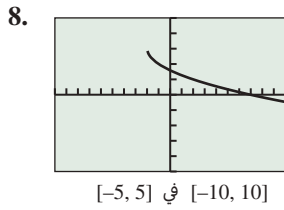
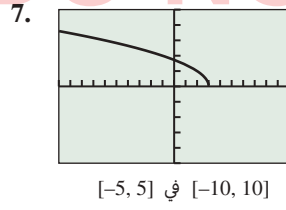
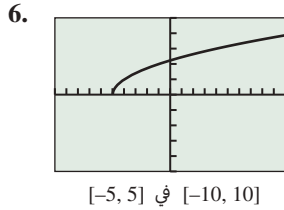
a. $f(x) = \sqrt{x+2}$, $g(x) = \sqrt{x-4}$

b. $f(x) = (x-1)^2$, $g(x) = -(x+3)^2$

c. $f(x) = (x-2)^3$, $g(x) = (x+2)^3$

d. $f(x) = |2x|$, $g(x) = 4|x|$

في التمارين 6-8، يمثل كل رسم التمثيل البياني للدالة $y = f(x)$ بعد إجراء تحويل على الدالة $y = \sqrt{x}$. اكتب معادلة للدالة f .



1. صف كيف يتحول التمثيل البياني للدالة $y = x^2$ إلى التمثيل البياني للمعادلة المعطاة.

a. $y = x^2 + 5$

b. $y = x^2 - 3$

c. $y = (x+4)^2$

d. $y = (x-3)^2$

2. صف كيف يتحول التمثيل البياني للدالة $y = \sqrt{x}$ إلى التمثيل البياني للمعادلة المعطاة.

a. $y = -\sqrt{x}$

b. $y = \sqrt{x-5}$

c. $y = \sqrt{-x}$

d. $y = \sqrt{3-x}$

3. صف كيف يتحول التمثيل البياني للدالة $y = x^3$ إلى التمثيل البياني للمعادلة المعطاة.

a. $y = 2x^3$

b. $y = (2x)^3$

c. $y = (0.2x)^3$

d. $y = \frac{1}{2}x^3$

4. صف كيف يتحول التمثيل البياني للدالة $y = x^2$ إلى التمثيل البياني للمعادلة المعطاة.

a. $y = (100+x)^2$

b. $y = x^2 - 100$

c. $y = (x-1)^2 + 3$

d. $y = (x+50)^2 - 279$

في التمارين 21-24، أوجد معادلة دالة أساسية وسلسلة من التحويلات التي قد تحول الدالة الأساسية إلى الدالة المعطاة.

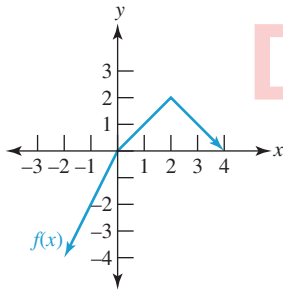
21. $y = 2(x - 3)^2 - 4$

22. $y = -3\sqrt{x+1}$

23. $y = (3x)^2 - 4$

24. $y = -2|x+4| + 1$

في التمارين 25-28، ارسم التمثيل البياني للدالة انطلاقًا من الدالة f الممثلة في الرسم أدناه.



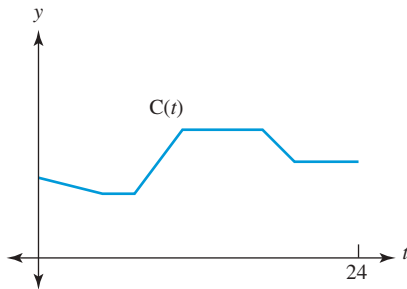
25. $y = 2 + 3f(x+1)$

26. $y = -f(x+1) + 1$

27. $y = f(2x)$

28. $y = 2f(x-1) + 2$

29. **درجة مئوية مقابل فهرنهايت** يشير التمثيل البياني أدناه إلى درجة الحرارة بالدرجة المئوية في مدينة الخور لمدة 24 ساعة. صف التحويلات التي تحول هذا التمثيل البياني إلى تمثيل بياني يشير إلى درجة الحرارة بالفهرنهايت. (إرشاد: $F(t) = \frac{9}{5}C(t) + 32$)



في التمارين 9-12، أوجد معادلة انعكاس الدالة f .

a. حول المحور x .

b. حول المحور y .

9. $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 2$

10. $f(x) = 2\sqrt{x+3} - 4$

11. $f(x) = \sqrt[3]{8x}$

12. $f(x) = 3|x+5|$

في التمارين 13-16، أوجد لكل دالة f معادلة المنحنى الناشء عن التحويلات غير القياسية التالية:

a. إجراء تمدد رأسي بمعامل مقداره 2

b. إجراء تضيق أفقي بمعامل مقداره $\frac{1}{3}$

13. $f(x) = x^3 - 4x$

14. $f(x) = |x+2|$

15. $f(x) = x^2 + x - 2$

16. $f(x) = \frac{1}{x+2}$

في التمارين 17-20، نحصل على التمثيل البياني G بعد إجراء التحويلات المطلوبة على y . اكتب معادلة تمثيلها البياني G .

17. $y = x^2$: تمدد رأسي بمعامل مقداره 3، ثم إزاحة إلى اليمين بمقدار 4 وحدات.

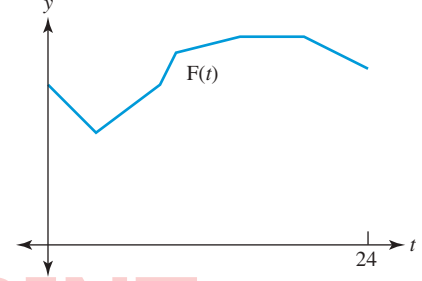
18. $y = x^2$: إزاحة إلى اليمين بمقدار 4 وحدات، ثم تمدد رأسي بمعامل مقداره 3

19. $y = |x|$: إزاحة إلى اليسار بمقدار وحدتين، ثم تمدد رأسي بمعامل مقداره 2، وأخيرًا إزاحة إلى الأسفل بمقدار 4 وحدات.

20. $y = |x|$: إزاحة إلى اليسار بمقدار وحدتين، ثم تضيق أفقي بمعامل مقداره $\frac{1}{3}$ ، وأخيرًا إزاحة إلى الأسفل بمقدار 4 وحدات.

30. **فهرنهايت مقابل درجة مئوية** يشير التمثيل البياني إلى درجة الحرارة بالفاهرينهايت في مدينة مسييد لمدة 24 ساعة. صف التحويلات التي تحول هذا التمثيل البياني إلى تمثيل بياني يشير إلى درجة الحرارة بالدرجة المئوية.

$$(F(t) = \frac{9}{5}C(t) + 32 \text{ (إرشاد)})$$



أسئلة اختبار معيارية

31. **صواب أم خطأ** تمثل الدالة $y = f(x + 3)$ إزاحة للدالة $y = f(x)$ بمقدار 3 وحدات إلى اليمين. بّرر إجابتك.

32. **صواب أم خطأ** تمثل الدالة $y = f(x) - 4$ إزاحة للدالة $y = f(x)$ بمقدار 4 وحدات إلى الأسفل. بّرر إجابتك.

33. **اختيار من متعدد** لتكن الدالة f . أي الخيارات التالية يمثل تحويلًا للدالة بإجراء إزاحة رأسية بمقدار وحدتين إلى الأعلى، ثم إجراء انعكاس حول المحور y ؟ A

A. $y = f(-x) + 2$

B. $y = 2 - f(x)$

C. $y = f(2 - x)$

D. $y = -f(x - 2)$

E. $y = f(x) - 2$

34. **اختيار من متعدد** لتكن الدالة f . أي الخيارات التالية يمثل تحويلًا للدالة بإجراء انعكاس حول المحور x ، ثم إجراء تضيق أفقي بمعامل مقداره $\frac{1}{2}$ ؟ E

A. $y = -2f(x)$

B. $y = -\frac{f(x)}{2}$

C. $y = f(-2x)$

D. $y = -f\left(\frac{x}{2}\right)$

E. $y = -f(2x)$

استكشاف

35. **الكتابة للتعلم** مثل بيانًا بعض الأمثلة على تحويل الدوال لتقتنع بأن إجراء تحويل مرّكب من انعكاس وإزاحة يعطي نتيجة مختلفة عن إجراء نفس التحويلين ولكن بترتيب معاكس للتحويل الأول. اشرح كيفية حصول هذا الاختلاف.

36. **الكتابة للتعلم** مثل بيانًا بعض الأمثلة لتقتنع بأن التمددات والتضيقات الرأسية لا تؤثر في نقاط تقاطع التمثيل مع المحور x . بّرر إجابتك.

توسيع الأفكار

37. **الحركة المالية العالمية** يشير الجدول أدناه إلى أسعار أسهم بالدولار، ساعة الإغلاق، لإحدى الشركات العالمية، في أول يوم تداول من كل شهر خلال سنة كاملة.



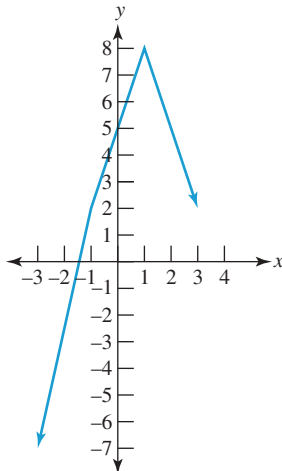
الشهر	سعر السهم
1	32.61
2	33.73
3	36.00
4	37.12
5	36.35
6	38.29
7	39.57
8	36.63
9	37.40
10	36.66
11	37.65
12	37.39

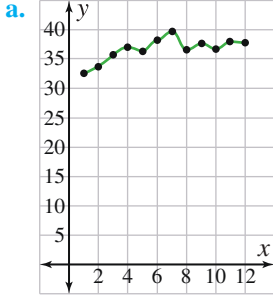
a. مثل بيانًا السعر (y) حسب الشهر (x) ، بتعيين النقاط في المستوى الإحداثي، ثم صل بينها لتشكيل تمثيل متصل.

b. اشرح ماهية التحويلات التي يجب أن تجريها على هذا التمثيل البياني للحصول على تمثيل يبين أسعار السهم بالين الياباني.

إجابات أسئلة التمارين 2.4

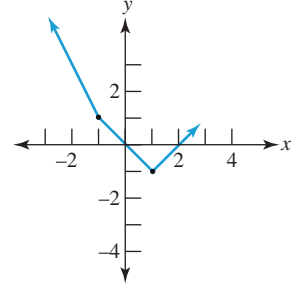
1. **a.** إزاحة رأسية بمقدار 5.2 وحدات إلى الأعلى.
b. إزاحة رأسية بمقدار 3 وحدات إلى الأسفل.
c. إزاحة أفقية بمقدار 4 وحدات إلى اليسار.
d. إزاحة أفقية بمقدار 3 وحدات إلى اليمين.
2. **a.** انعكاس حول المحور x .
b. إزاحة أفقية بمقدار 5 وحدات إلى اليمين.
c. انعكاس حول المحور y .
d. انعكاس حول المحور y ، ثم إزاحة أفقية بمقدار 3 وحدات إلى اليمين.
3. **a.** تمديد رأسي بمعامل قيمته 2
b. تضيق أفقي بمعامل قيمته $\frac{1}{2}$ ، أو تمديد رأسي بمعامل قيمته 8
c. تمديد أفقي بمعامل قيمته 5، أو تضيق رأسي بمعامل قيمته 0.008
d. تضيق رأسي بمعامل قيمته $\frac{1}{2}$
4. **a.** إزاحة أفقية بمقدار 100 وحدة إلى اليسار.
b. إزاحة رأسية بمقدار 100 وحدة إلى الأسفل.
c. إزاحة أفقية بمقدار وحدة واحدة إلى اليمين، ثم إزاحة رأسية بمقدار 3 وحدات إلى الأعلى.
d. إزاحة أفقية بمقدار 50 وحدة إلى اليسار، ثم إزاحة رأسية بمقدار 279 وحدة إلى الأسفل.
5. **a.** إزاحة أفقية بمقدار 6 وحدات إلى اليمين.
b. إزاحة أفقية بمقدار 4 وحدات إلى اليسار، ثم انعكاس حول المحور x .
c. إزاحة أفقية بمقدار 4 وحدات إلى اليسار.
d. تمديد رأسي بمعامل قيمته 2 أو تضيق أفقي بمعامل قيمته $\frac{1}{2}$
6. $f(x) = \sqrt{x+5}$
7. $f(x) = \sqrt{-x+3}$
8. $f(x) = -\sqrt{x+2} + 3$
9. **a.** $y = -f(x) = -x^3 + 5x^2 + 3x - 2$
b. $y = f(-x) = -x^3 - 5x^2 + 3x + 2$
10. **a.** $y = -f(x) = -2\sqrt{x+3} + 4$
b. $y = f(-x) = 2\sqrt{-x+3} - 4$
11. **a.** $y = -f(x) = -\sqrt[3]{8x}$
b. $y = f(-x) = \sqrt[3]{-8x}$
12. **a.** $y = -f(x) = -3|x+5|$
b. $y = f(-x) = 3|-x+5|$
13. **a.** $y = 2f(x) = 2x^3 - 8x$
b. $y = f(3x) = 27x^3 - 12x$
14. **a.** $y = 2f(x) = 2|x+2|$
b. $y = f(3x) = |3x+2|$
15. **a.** $y = 2f(x) = 2x^2 + 2x - 4$
b. $y = f(3x) = 9x^2 + 3x - 2$
16. **a.** $y = 2f(x) = \frac{2}{x+2}$
b. $y = f(3x) = \frac{1}{3x+2}$
17. $y = 3(x-4)^2$
18. $y = 3(x-4)^2$
19. $y = 2|x+2| - 4$
20. $y = |3x+2| - 4$
21. $y = x^2$ ، إزاحة أفقية بمقدار 3 وحدات إلى اليمين، ثم تمديد رأسي بمعامل قيمته 2. ثم إزاحة رأسية بمقدار 4 وحدات إلى الأسفل.
22. $y = \sqrt{x}$ ، إزاحة أفقية بمقدار وحدة واحدة إلى اليسار، ثم تمديد رأسي بمعامل قيمته 3، ثم انعكاس حول المحور x .
23. $y = x^2$ ، تضيق أفقي بمعامل قيمته $\frac{1}{3}$ ، ثم إزاحة رأسية بمقدار 4 وحدات إلى الأسفل.
24. $y = |x|$ ، إزاحة أفقية بمقدار 4 وحدات إلى اليسار، ثم تمديد رأسي بمعامل قيمته 2، ثم انعكاس حول المحور x ، ثم إزاحة رأسية بمقدار وحدة واحدة إلى الأعلى.
25. ارسم وفق التسلسل الآتي: إزاحة أفقية بمقدار وحدة واحدة إلى اليسار، ثم تمديد رأسي بمعامل قيمته 3، ثم إزاحة رأسية بمقدار وحدتين إلى الأعلى.



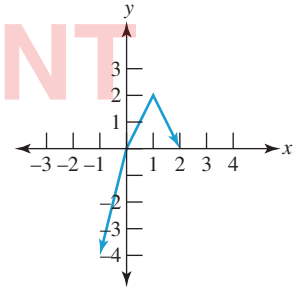


37.

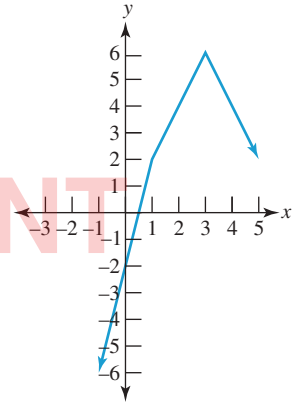
26. ارسم وفق التسلسل الآتي: إزاحة أفقية بمقدار وحدة واحدة إلى اليسار، ثم انعكاس حول المحور x ، ثم إزاحة رأسية بمقدار وحدة واحدة إلى الأعلى.



27. طبق تضيقًا أفقيًا بمعامل قيمته $\frac{1}{2}$.



28. ارسم وفق التسلسل الآتي: إزاحة أفقية بمقدار وحدة واحدة إلى اليمين، ثم تمدد رأسي بمعامل قيمته 2، ثم إزاحة رأسية بمقدار وحدتين إلى الأعلى.



29. تمدد رأسي بمعامل قيمته $\frac{9}{5}$ ، ثم إزاحة رأسية بمقدار 32 وحدة إلى الأعلى.

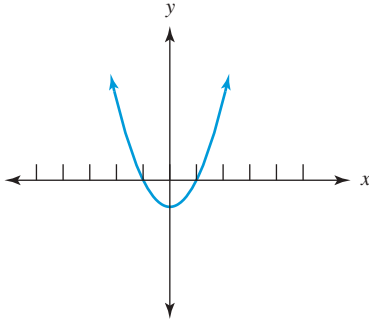
30. إزاحة رأسية بمقدار 32 وحدة إلى الأسفل، ثم تضيق رأسي بمعامل قيمته $\frac{5}{9}$.

31. خطأ، إلى اليسار لأن الثابت موجب.

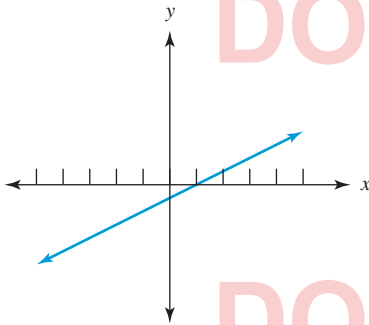
32. صواب، لأن الثابت سالب.

الوحدة 2 مراجعة الوحدة

4. a



5. e



في التمارين 1-5، اربط بين كل رسم بياني والدالة المناسبة له من اللائحة a-e أدناه. استعمل ما تعرفه عن خصائص الدوال، لا تستعمل برنامج الرسم البياني.

a. $f(x) = x^2 - 1$

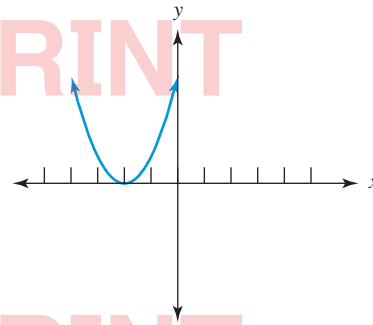
b. $f(x) = x^2 + 1$

c. $f(x) = (x - 2)^2$

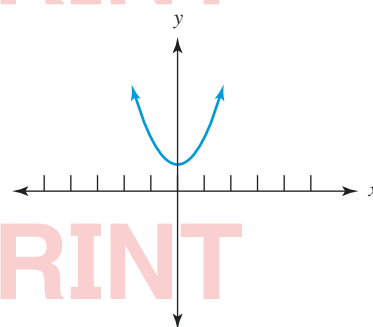
d. $f(x) = (x + 2)^2$

e. $f(x) = \frac{x-1}{2}$

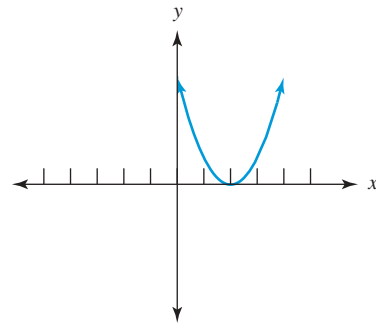
1. d



2. b



3. c



في التمارين 6-13، أوجد المجال للدالة.

6. $g(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}$ [1, 4]

7. $f(x) = 35x - 602$ $] -\infty, \infty[$

8. $g(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$ [0, 1[

9. $h(x) = (x+2)^2 + 5$ $] -\infty, \infty[$

10. $g(x) = 3|x| + 8$ $] -\infty, \infty[$

11. $k(x) = -\sqrt{4-x^2}$ [-2, 2]

12. $f(x) = \frac{x}{x^2-2x}$ $] -\infty, 0[\cup] 0, 2[\cup] 2, \infty[$

13. $k(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$]-1, 1[

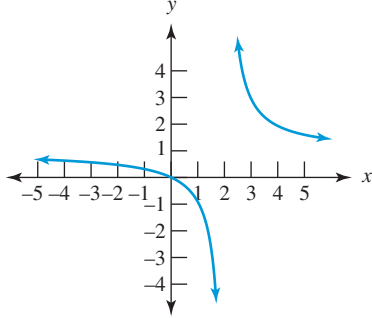
في التمرينين 14 و 15، استعمل برنامج الرسم البياني لتمثيل منحنى الدالة f ، ثم حدد ما إذا كانت متصلة عند النقطة $x = 0$. إذا كانت غير متصلة، حدد ما إذا كان عدم الاتصال قابلاً للإزالة أم لا.

14. $f(x) = \frac{x^2-3}{x+2}$ متصلة

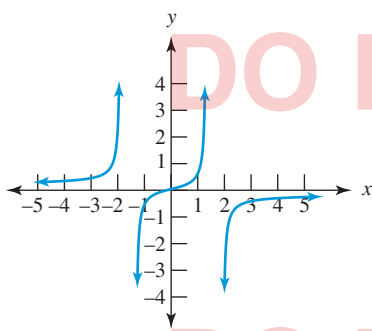
15. $f(x) = \frac{x+1}{x}$ غير متصلة، غير قابل للإزالة

في التمرينين 23 و 24، حدد خطوط التقارب الأفقية وخطوط التقارب الرأسية لكل دالة.

23.



24.



في التمارين 25-28، استعمل برنامج الرسم البياني ثم حدد الفترات حيث تكون الدالة متزايدة.

25. $y = \frac{x^3}{3}$

26. $y = 2 + |x - 1|$

27. $y = \frac{x}{1 - x^2}$

28. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$

في التمارين 29-32، استعمل برنامج الرسم البياني لإيجاد كل من (a) القيم العظمى المحلية و (b) القيم الصغرى المحلية للدالة. حدد كذلك قيمة x حيث تظهر كل قيمة قصوى محلية.

29. $y = (x + 1)^2 - 7$

30. $y = x^3 + 3x^2 - 5$

31. $y = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$

32. $y = \frac{4x}{x^2 + 4}$

في التمارين 33-36، حدد ما إذا كانت كل دالة فردية أم زوجية أم ليست أيًا منهما.

33. $y = 3x^2 + 4|x|$ زوجية

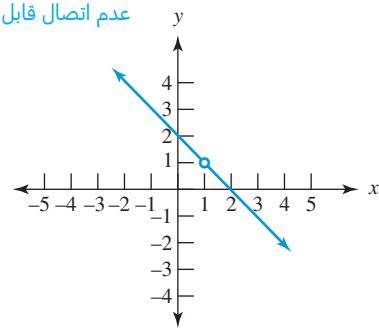
34. $y = 2x - x^3$ فردية

35. $y = \frac{x}{1 - x}$ لا فردية ولا زوجية

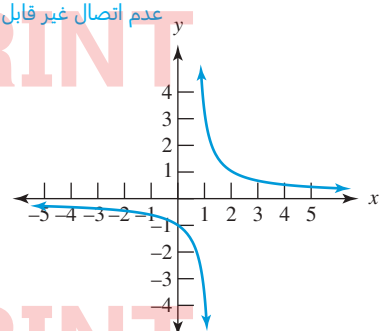
36. $y = \frac{x}{x^2 + 4}$ فردية

في التمارين 16-18، حدد ما إذا كانت الدالة متصلة عند $x = 1$. إذا كانت غير متصلة، حدد ما إذا كان عدم الاتصال قابلاً للإزالة أم لا.

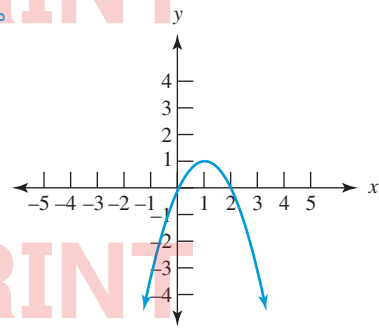
16. عدم اتصال قابل للإزالة



17. عدم اتصال غير قابل للإزالة



18. متصلة



في التمارين 19-22، أوجد كل (a) خطوط التقارب الرأسية و (b) خطوط التقارب الأفقية للتمثيل البياني للدالة. تأكد من إعطاء إجاباتك على شكل معادلات خطوط مستقيمة.

19. $y = \frac{5}{x^2 - 5x}$

20. $y = \frac{x + 3}{x - 2}$

21. $y = \frac{7x}{\sqrt{x^2 + 10}}$

22. $y = \frac{|x|}{x + 1}$

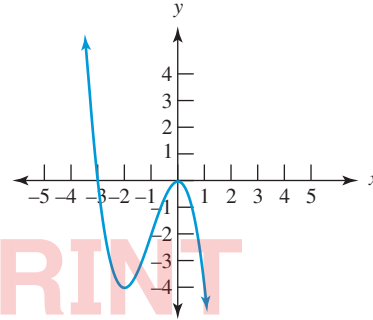
في التمرينين 37 و 38، حدد لكل دالة:

a. الفترات حيث تكون الدالة متناقصة.

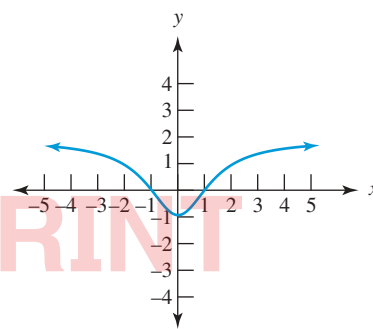
b. القيمة العظمى المحلية والقيمة الصغرى المحلية.

حدد كذلك قيمة x حيث تظهر كل قيمة.

37.



38.



في التمارين 39-42، أوجد صيغة للدالة العكسية $f^{-1}(x)$.

39. $f(x) = 2x + 3$

$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

40. $f(x) = \sqrt[3]{x-8}$

$f^{-1}(x) = x^3 + 8$

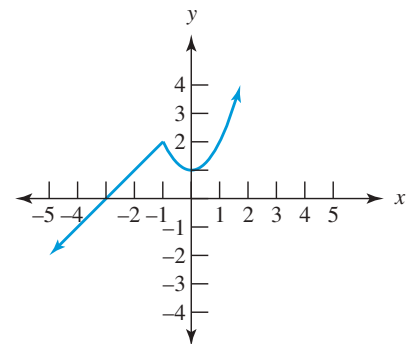
41. $f(x) = \frac{2}{x}$

$f^{-1}(x) = \frac{2}{x}$

42. $f(x) = \frac{6}{x-4}$

$f^{-1}(x) = \frac{6}{x} + 4$

في التمارين 43-46، استعمل الدالة $y = f(x)$ ذات الرسم البياني الموضح أدناه.



43. ارسم التمثيل البياني للدالة $y = f(x) - 1$.

44. ارسم التمثيل البياني للدالة $y = f(x - 1)$.

45. ارسم التمثيل البياني للعلاقة العكسية.

46. هل العلاقة العكسية تعرّف y كدالة بدلالة x ؟

في التمارين 47-49، لتكن $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2 - 4$

47. أوجد صيغة $(f \times g)(x)$ وحدد مجالها.

$(fg)(x) = (x^2 - 4)\sqrt{x}, [0, \infty[$

48. أوجد صيغة $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ وحدد مجالها.

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 4}, [0, 2[\cup]2, \infty[$

49. أوجد صيغة الدالة $y = (f \circ g)(x)$ وحدد مجالها.

$f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 4},]-\infty, -2] \cup [2, \infty[$

50. لتكن الدالتين: $f(x) = x + 2$, $g(x) = x^2 - 3$

a. أوجد $(g \circ f)(0)$ و $(g \circ f)(-2)$

$(g \circ f)(-2) = -3, (g \circ f)(0) = 1$

b. أوجد $(f \circ g)(0)$ و $(f \circ g)(-2)$

$(f \circ g)(-2) = 3, (f \circ g)(0) = -1$

51. أوجد دالتين $f(x)$ و $g(x)$ بحيث يمكن وصف الدالة $f(x) = \sqrt{x}$

$g(x) = x^3 - 4$ وبصورة $y = \sqrt{x^3 - 4}$ في الصورة $y = f(g(x))$ ، وبذلك لا تكون

أي منهما الدالة المحايدة. (قد يوجد أكثر من حل ممكن).

52. لتكن $f(x) = x^2 - 1$

a. أوجد دالة g بحيث تكون: $(f \times g)(x) = x^4 - 1$

$g(x) = x^2 + 1$

b. أوجد دالة h بحيث تكون: $\left(\frac{f}{h}\right)(x) = x + 1$

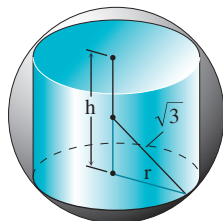
$h(x) = x - 1, \{x: x \in \mathbb{R}, x \neq 1\}$

c. أوجد دالة k بحيث تكون: $(f + k)(x) = 2x$

$k(x) = -x^2 + 2x + 1$

53. **حصر أسطوانة في كرة** أسطوانة دائرية قائمة قائمة نصف قطرها

r وارتفاعها h ، تم حصرها داخل كرة نصف قطرها $\sqrt{3}$ cm



a. استعمل نظرية فيثاغورس لكتابة h بدلالة r .

b. اكتب حجم الاسطوانة V بدلالة r .

c. ما هي قيم r الموجودة في مجال V ؟

a. افترض أن x تمثل الاحداثي x للنقطة المُشار إليها في الرسم، بينما تمثل A مساحة المستطيل. اكتب A بدلالة x .

b. ما هي قيم x الموجودة في مجال A ؟

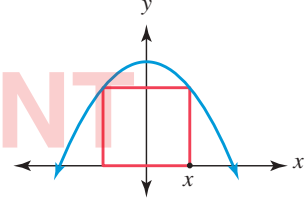
c. ارسم تمثيلاً بيانياً للمساحة $A(x)$ على مجالها.

d. استعمل الرسم البياني لإيجاد القيمة العظمى للمساحة التي يمكن أن تكون لها مستطيل.

d. ارسم تمثيلاً بيانياً للحجم $V(r)$ على المجال $[0, \sqrt{3}]$.

e. استعمل التمثيل البياني من الفرع d لإيجاد القيمة العظمى لحجم هذه الأسطوانة.

54. **حصر مستطيل تحت قطع مكافئ** مستطيل تم حصره ما بين المحور x والقطع المكافئ $y = 36 - x^2$ مع ضلع واحد على المحور x ، كما هو موضح في الرسم أدناه.



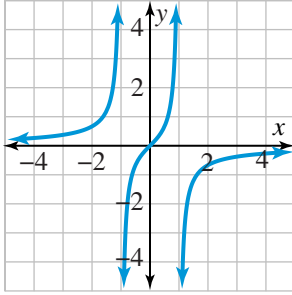
DO NOT PRINT

DO NOT PRINT

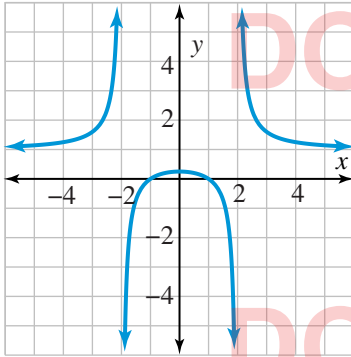
DO NOT PRINT

الوحدة 3 الإجابات

27. $]-\infty, -1[,]-1, 1[,]1, \infty[$

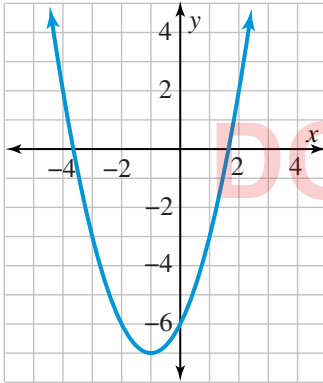


28. $]-\infty, -2[,]-2, 0[$



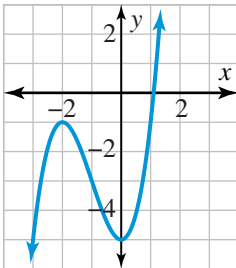
29. a. لا يوجد قيمة عظمى محلية.

b. قيمة صغرى محلية عند $x = -1$ تساوي -7



30. a. قيمة عظمى محلية عند $x = -2$ تساوي -1

b. قيمة صغرى محلية عند $x = 0$ تساوي -5



19. a. رأسي: $x = 0$ و $x = 5$

b. أفقي: $y = 0$

20. a. رأسي: $x = 2$

b. أفقي: $y = 1$

21. a. رأسي: لا يوجد

b. أفقي: $y = -7$ و $y = 7$

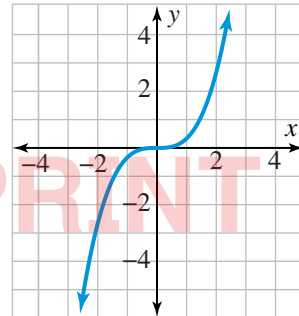
22. a. رأسي: $x = -1$

b. أفقي: $y = 1$ و $y = -1$

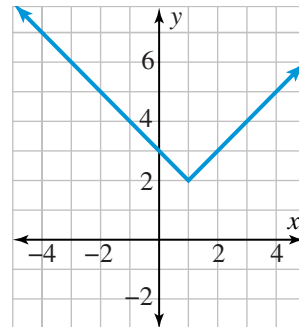
23. أفقي: $y = 1$ ، رأسي: $x = 2$

24. أفقي: $y = 0$ ، رأسي: $x = -2$ و $x = 2$

25. $]-\infty, \infty[$

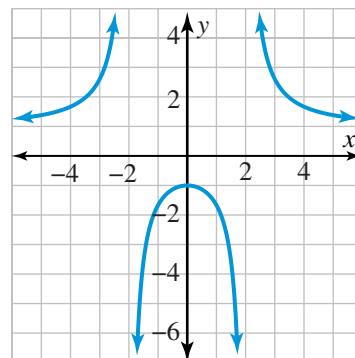


26. $[1, \infty[$



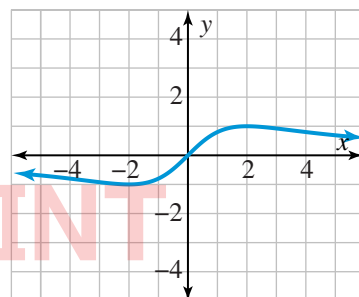
31. a. قيمة عظمى محلية عند $x = 0$ تساوي -1

b. لا يوجد قيمة صغرى محلية.



32. a. قيمة عظمى محلية عند $x = 2$ تساوي 1

b. قيمة صغرى محلية عند $x = -2$ تساوي -1



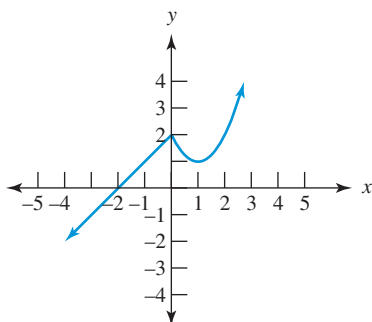
37. a. متناقصة في $[-\infty, -2]$ وفي $[0, \infty[$

b. قيمة صغرى محلية عند $x = -2$ تساوي -4، قيمة عظمى محلية عند $x = 0$ تساوي 0

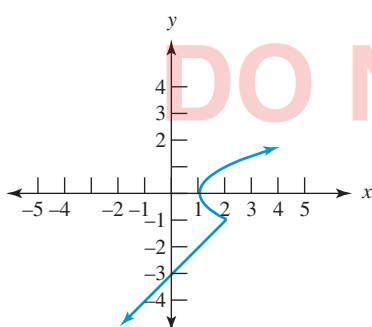
38. a. متناقصة في $]-\infty, 0]$

b. قيمة صغرى مطلقة عند $x = 0$ تساوي -1

44. إزاحة أفقية بمقدار وحدة واحدة إلى اليمين.



45. انعكاس حول المحور $y = x$.



46. كلا

47. $(fg)(x) = (x^2 - 4)\sqrt{x}$, $[0, \infty[$

48. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 4}$, $[0, 2[\cup]2, \infty[$

49. $f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 4}$, $]-\infty, -2] \cup [2, \infty[$

50. a. $(g \circ f)(-2) = -3$, $(g \circ f)(0) = 1$

a. $(f \circ g)(-2) = 3$, $(f \circ g)(0) = -1$

51. $f(x) = \sqrt{x}$
 $g(x) = x^3 - 4$

52. a. $g(x) = x^2 + 1$

b. $h(x) = x - 1$, $\{x: x \in \mathbb{R}, x \neq 1\}$

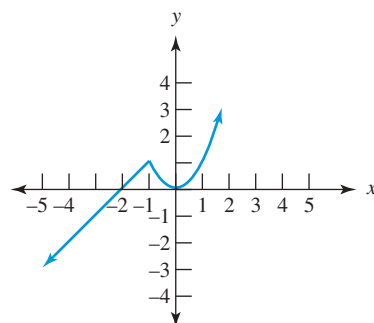
c. $k(x) = -x^2 + 2x + 1$

53. a. $h = 2\sqrt{3 - r^2}$

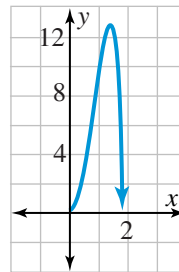
b. $V = \pi r^2 (h) = \pi r^2 (2\sqrt{3 - r^2}) = 2\pi r^2 \sqrt{3 - r^2}$

c. $]0, \sqrt{3}]$

43. إزاحة رأسية بمقدار وحدة واحدة إلى الأسفل.



d.

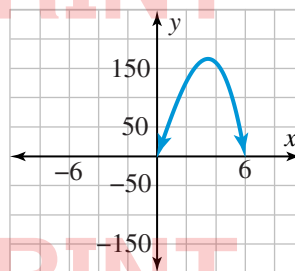


e. قيمة عظمى محلية عند $x = 1.41$ تساوي 12.57

54. a. $A = 72x - 2x^3$

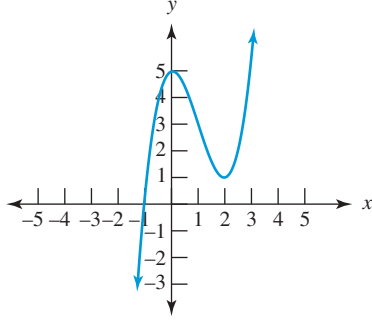
b. $[0, 6]$

c.



d. قيمة عظمى محلية عند $x = 3.46$ تساوي 166.28

الوحدة 3 تقويم



استعمل الرسم البياني لإيجاد القيم العظمى المحلية والقيم الصغرى المحلية للدالة.

حدد كذلك قيمة x حيث تظهر كل قيمة قصوى محلية.

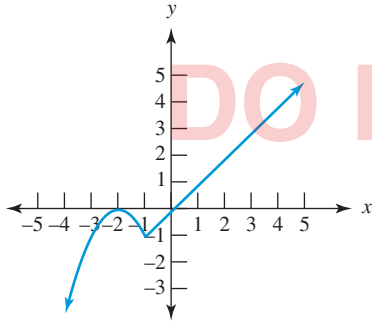
7. حدد ما إذا كانت الدالة الآتية فردية أم زوجية أم ليست أيًا منهما. زوجية

$$f(x) = 3x^2 - 4|x|$$

8. أوجد صيغة الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ للدالة f التالية.

$$f(x) = \frac{6}{x+4} \quad f^{-1}(x) = \frac{6}{x} - 4$$

في التمرينين 9 و 10، استعمل الدالة $y = f(x)$ ذات الرسم البياني الموضح أدناه.



9. ارسم التمثيل البياني للدالة $y = f(-x)$

10. ارسم التمثيل البياني للدالة $y = -f(x)$

في التمرينين 11 و 12، لتكن $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2 - 4$.

11. أوجد صيغة للدالة $(f \circ g)(x)$ وحدد مجالها.

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 4}, [-\infty, -2] \cup [2, \infty[$$

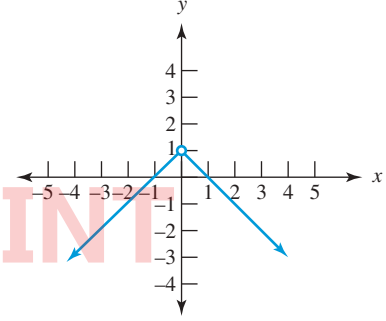
12. أوجد صيغة للدالة $(g \circ f)(x)$ وحدد مجالها.

$$(g \circ f)(x) = x - 4, [0, \infty[$$

في التمرينين 1 و 2، أوجد مجال الدالة.

$$1. h(x) = (x-2)^2 + 5 \quad]-\infty, \infty[\quad 2. k(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} \quad]-3, 3[$$

3. التمثيل البياني لدالة موضح في الشكل أدناه

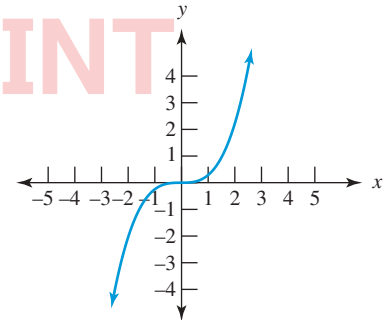


حدد ما إذا كانت الدالة متصلة عند $x = 0$. إذا كانت غير متصلة، حدد ما إذا كان عدم الاتصال قابلاً للإزالة أم لا. غير متصلة، عدم اتصال قابل للإزالة.

4. أوجد كل خطوط التقارب الرأسية والأفقية لرسم الدالة البياني. تأكد من إعطاء إجاباتك على شكل معادلات خطوط مستقيمة. خط التقارب الراسي: $x = -2$ ، خط التقارب الأفقي: $y = 1$.

$$y = \frac{x+3}{x+2}$$

5. التمثيل البياني للدالة $y = \frac{x^3}{6}$ موضح في الشكل



حدد الفترة/الفترات حيث تكون الدالة متزايدة. متزايدة في الفترة $]-\infty, \infty[$

6. الرسم البياني لمنحنى الدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

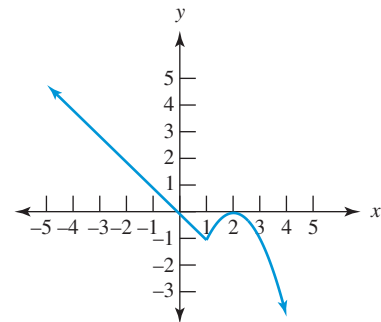
موضح في الشكل التالي:

قيمة عظمى محلية عند $x = 0$ تساوي 5،

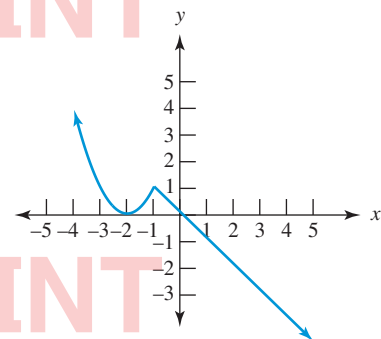
قيمة صغرى محلية عند $x = 2$ تساوي 1

الوحدة 3 الإجابات

9. ارسم الانعكاس حول المحور y .



10. ارسم الانعكاس حول المحور x .



الوحدة 3 المشروع

نمذجة تطور عدد مستخدمي الإنترنت عالميًا

لقد مرّ تطور شبكة الإنترنت في العالم بعدة مراحل وصولاً إلى ما هي عليه في وقتنا الحاضر. فقد تمّ إنشاؤها بدايةً لأهداف عسكرية في العام 1969، بدأت استخداماتها المدنية في العام 1983 بشكل محدود، وشيئاً فشيئاً إلى أن تم وضعها بين أيدي المستخدمين في جميع أنحاء العالم وذلك في العام 1991، حيث ارتبط بهذه الشبكة حوالي مليون حاسوب بعد عام واحد فقط. يُبرز الجدول التالي أرقام مستخدمي الإنترنت حول العالم بين العامين 2000 و 2008.

السنة	عدد مستخدمي الإنترنت (بالملايين)
2000	413.4
2001	500.6
2002	662.7
2003	778.6
2004	910.1
2005	1 029.7
2006	1 157.5
2007	1 373
2008	1 562.1

استكشافات

1. مثل عدد مستخدمي الإنترنت على مستوى إحداثي بدلالة رقم السنة مبتدئاً بالترقيم 0 للعام 2000.
2. لاحظ أن الدالة التربيعية (أو إحدى تحويلاتها) تبدو الدالة الأنسب لنمذجة المعطيات التي تم تمثيلها. استعمل برنامج الرسم البياني أو الحاسوب خاصتك لإيجاد دالة تربيعية مناسبة لنمذجة معطيات الجدول.

3. استخدم النموذج الذي أوجدته للتو لتقدير أعداد مستخدمي الإنترنت في العامين 2009 و 2010.

4. بحسب الاحصاءات، فقد بلغ عدد مستخدمي الإنترنت 1 752.3 مليون مستخدم في العام 2009، و 2 034.3 مليون مستخدم في العام 2010 (يمكنك التأكد من صحة هذه المعلومات عن طريق الإنترنت نفسه، وكذلك التوسع في البحث عن المعطيات حول مستخدمي الإنترنت للسنوات اللاحقة). لماذا يوجد اختلاف هام بين تقديرك لأعداد مستخدمي الإنترنت في هذين العامين وبين الأعداد الواقعية للمستخدمين؟ ما هي الميزة الواقعية التي لم تؤخذ بالحسبان لدى اعتماد النمذجة بالدالة التربيعية؟

5. إذن، ما بعد العام 2008، أنت بحاجة إلى نمذجة أعداد المستخدمين من خلال دالة تأخذ بعين الاعتبار أن أعداد مستخدمي الإنترنت حول العالم سوف لن تتزايد إلى مالا نهاية! ارجع إلى الدوال الأساسية التي درستها في الوحدة. لاحظ أن نمط المعطيات يتزايد بوتيرة متسارعة في البداية، ومن ثم يبدأ بالتباطؤ. استعمل برنامج الرسم البياني أو الحاسوب خاصتك لنمذجة هذه المجموعة الجديدة من المعطيات.

6. استعمل النموذج الجديد لتقدير أعداد مستخدمي الإنترنت حول العالم في العامين 2009 و 2010. كيف تجد هذه الأعداد بالمقارنة مع الأعداد الحقيقية للمستخدمين في هذين العامين؟ بكم تقدر عدد مستخدمي الإنترنت في العام 2020؟

الوحدة 3 المشروع

لمحة عن المشروع

يهدف هذا المشروع التطبيقي إلى تعريف الطلاب على استخدامات مفهوم "الدوال" اليومية. في البدء، بنمذج كل منهم أعداد مستخدمي الإنترنت في العالم بين عامي 2000 و 2008 من خلال برنامج حاسوبي مختص بصناعة الرسوم البيانية. وإذا يستدرك هؤلاء أن نمذجة المعطيات تقتضي استعمال واحدة من أبرز المفاهيم التي تناولتها هذه الوحدة وهي "الدالة التربيعية"، سيلجأون إليها لتقدير أعداد مستخدمي شبكة الإنترنت في عامي 2009 و 2010، لكن تقديراتهم لن تتطابق مع النسب الواقعية هذه المرة. هذا الأمر يدفع بهم إلى استعادة سائر الدوال التي تعلموها في مرحلة سابقة من الدرس، واختيار الأفضل من بينها بغية حل مسألتهم وفق الشكل المطلوب.

تقديم المشروع

ناقش مفهوم "نمذجة أعداد مستخدمي الإنترنت" مع الطلاب، ثم اعرض عليهم خريطة عمل المشروع.

استعن بالأسئلة الآتية لتصويب النقاش:

س: ماذا يُقصد بمفهوم "نمذجة أعداد مستخدمي الإنترنت"؟
 "نمذجة أعداد مستخدمي الإنترنت" تعني إيجاد صيغة رياضية تُمثل أعداد مستخدمي الإنترنت.

س: لماذا برأيك يوجد اختلاف كبير بين تقديرك لأعداد مستخدمي الإنترنت بين عامي 2009 و 2010، وبين الأعداد الواقعية للمستخدمين؟
 عند استخدام معطيات الجدول لنمذجة أعداد مستخدمي الإنترنت، تبين أن أعداد مستخدمي الإنترنت سيشهد ارتفاعاً في خلال عامي 2009 و 2010، وهي من بين الأعوام التي لم يبينها الجدول. وإذا أن عدد مستخدمي الإنترنت حول العالم لا يمكن أن يصل إلى مالا نهاية كما يفترض الحاسوب، فإن برنامج الرسم البياني سيجد في الدالة التربيعية الخيار الأمثل لنمذجة معطيات الجدول.

س: ما هي الدالة الأنسب لنمذجة أعداد مستخدمي الإنترنت؟
 بما أن نمط المعطيات الواردة في الجدول يشهد تزايداً متسارعاً في البداية ثم تباطؤاً، فإن برنامج الرسم البياني سوف يحدد إحدى تحويلات دالة الجذر التربيعي على أنها الدالة الأنسب لنمذجة أعداد مستخدمي الإنترنت.

س: عند استعمالك للنموذج الجديد (إحدى تحويلات دالة الجذر التربيعي) لتقدير أعداد مستخدمي الإنترنت في العامين 2009 و 2010، هل وجدت هذه الأعداد قريبة من الأعداد الحقيقية للمستخدمين في هذين العامين؟
 بزر إجابتك.

نعم، السبب في ذلك يعود إلى أن النموذج الجديد أخذ في عين الاعتبار أن أعداد مستخدمي الإنترنت حول العالم سوف لن تتزايد إلى ما لا نهاية.

تنفيذ المشروع

وَصَح للطلاب أن عليهم إدخال معطيات الجدول إلى برنامج الرسم البياني على الحاسوب لينشئوا تمثيلاً بيانياً بنمذج أعداد مستخدمي الإنترنت حول العالم، ومن ثم إيجاد الدالة التربيعية التي تمثل هذه المعطيات.
 بعد استدراكهم أن نمذجة أعداد مستخدمي الإنترنت حول العالم بين عامي 2009 و 2010 لا تتم بالضرورة عبر الدالة التربيعية، سوف يلجأ الطلبة إلى برنامج الرسم البياني مجدداً لتحديد الدالة الأصح، مع الأخذ بعين الاعتبار أن أعداد مستخدمي الإنترنت حول العالم غير قابل للتزايد إلى ما لا نهاية.

إنهاء المشروع

يمكن للمعلم تحديد يوم يعرض فيه الطالب مشاريعهم ويشرحون الخطوات التي اتبعوها في تنفيذ هذه المشاريع والنتائج التي استخلصوها.



الدوال كثيرات الحدود

عند سقوط جسم صلب بشكل حر، أو عندما يتحرك على مسار خطي بسرعة ثابتة أو بنمط متسارع، تسارعًا ثابتًا، فإن المسافة التي يجتازها بحسب نظريات نيوتن تكون دالة خطية أو تربيعية بدلالة الزمن، وهي من الأمثلة على الدوال كثيرات الحدود. من جهة أخرى للدوال كثيرات الحدود دورًا هامًا في تفسير العديد من الأنماط الحياتية في الفيزياء والفلك والاقتصاد وغيرها من الميادين.

3.1 العمليات على الدوال كثيرات الحدود

3.2 التمثيلات البيانية للدوال كثيرات الحدود

3.3 نظريات على الدوال كثيرات الحدود

3.1 العمليات على الدوال كثيرات الحدود Operations on Polynomial Functions

الدوال كثيرات الحدود

الدوال كثيرات الحدود هي من بين الدوال الأكثر شيوعًا واستعمالًا.

تعرف كثيرات الحدود على أنها جمع لواحد أو أكثر من أحاديّات الحدود والتي تُسمى حدود كثيرة الحدود، ويُسمى أس المتغير في كل حد درجة الحد.

في كثيرة الحدود $2x^3 + 9 - 4x$ ، درجة الحد $-4x$ هي 1، ودرجة الحد 9 هي 0، ودرجة الحد $2x^3$ هي 3.

درجة كثيرة الحدود هي أعلى درجة لأي من حدودها. درجة كثيرة الحدود أعلاه هي 3، وتُسمى أيضًا كثيرة حدود تكعيبية.

كثيرة الحدود أعلاه لها 3 حدود وتُسمى ثلاثية الحدود، و**معاملات** حدودها هي: معامل x^3 هو 2 ومعامل x هو -4 والحد الثابت هو 9.

المعامل الرئيس هو معامل الحد ذو أعلى درجة في كثيرة الحدود. المعامل الرئيس لكثيرة الحدود أعلاه هو 2.

الصيغة القياسية لكثيرة الحدود هي الصورة التي تكون فيها كل الحدود التي لها نفس الدرجة مجمعة وتكون الحدود مرتبة حسب درجتها تنازليًا.

الصيغة القياسية لكثيرة الحدود أعلاه هي $2x^3 - 4x + 9$.

لاحظ أنه لا وجود للحد x^2 في كثيرة الحدود في الصورة $2x^3 - 4x + 9$ ، في بعض الحالات، يكون من المفيد كتابة كثيرة الحدود في الصورة $2x^3 + 0x^2 - 4x + 9$ كما سنرى فيما بعد.

بالاعتماد على ما تم ذكره عن كثيرات الحدود يمكن تعريف الدوال كثيرات الحدود كما يلي:

الدوال كثيرات الحدود

ليكن n عددًا صحيحًا غير سالب، ولتكن $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ أعدادًا حقيقية، حيث $a_n \neq 0$ ،

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

هي دالة كثيرة الحدود من الدرجة n .

حدود هذه الدالة هي $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \dots, a_2 x^2, a_1 x, a_0$

ومعاملاتها هي $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$

يُسمى a_n المعامل الرئيس.

الدالة كثيرة الحدود هي دالة معرّفة ومتّصلة على مجموعة الأعداد الحقيقية كلها.

من المهم أن نُميّز بوضوح هذا النوع من الدوال عن غيره.

ما ستتعلمه

- الدوال كثيرات الحدود
- العمليات على الدوال كثيرات الحدود
- القسمة المطوّلة
- القسمة التركيبية

... ولماذا

الدوال كثيرات الحدود هي نماذج معتمدة لمعالجة مسائل اقتصادية، ونستعمل هذه الدوال أيضًا لمقارنة عدد من الدوال المعقدة.

معايير الدرس

11A.5.1

11A.5.2

المصطلحات

- الدوال كثيرات الحدود

polynomial functions

- درجة كثيرة الحدود degree of polynomial

- معاملات coefficients

- المعامل الرئيس leading coefficient

- الصيغة القياسية standard form

- القسمة المطوّلة long division

- الباقى remainder

- القسمة التركيبية synthetic division

الهدف

سيتمكّن الطلاب من التعرف على الدوال كثيرات الحدود والعمليات عليها وسوف يتمكنون من قسمة الدوال كثيرات الحدود باستعمال القسمة المطوّلة والقسمة التركيبية.

دليل الدرس

1. الدوال كثيرات الحدود والعمليات عليها

2. القسمة المطوّلة

3. القسمة التركيبية

تحفيز

حث الطلاب على استعادة الدوال ذات الحد الواحد أو ذات الحدين، وبيّن لهم أن عمليات الجمع والطرح والضرب ممكنة على هذه الدوال.

نشاط المصطلحات

دع الطلاب يبدأون من ملاحظة الحد الواحد في دالة كثيرة الحدود كيف هو ضرب عدد حقيقي بمتغير ذي أس طبيعي. دع الطلاب يقدمون أمثلة لدوال كثيرات الحدود مكتوبة في الصيغة القياسية واطلب منهم القيام بدمج هذه الدوال باستعمال الجمع والضرب لإنتاج دوال جديدة.

أسئلة للتفكير

س: لماذا يكون ترتيب الحدود مهمًا في كتابة الدوال كثيرات الحدود؟

نموذج إجابة:

يفيد الترتيب في تحديد المعامل الرئيس، وهو يلعب دور المؤثر في تحديد سلوك التمثيل البياني للدالة.

س: هل الدالة $f(x) = \sqrt{9x^4 + 6x^2 + 1}$ دالة كثيرة الحدود؟

نموذج إجابة:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{9x^4 + 6x^2 + 1} \\ &= \sqrt{(3x^2 + 1)^2} \\ &= 3x^2 + 1 \quad 3x^2 + 1 > 0 \end{aligned}$$

إذن $f(x)$ هي دالة كثيرة الحدود رغم صيغتها الجذرية.

خطأ شائع

ربما ينسى بعض الطلاب أن الإشارة تنتمي إلى الحد ولذلك فهي تتحرك معه عند إعادة ترتيب حدود دالة كثيرة الحدود. اطلب من الطلاب أن يعيدوا كتابة الدالة مع تحويل عمليات الجمع بين كل حدين إلى عمليات طرح، مع تغيير الحد التالي، قبل إعادة ترتيبها.

الدالة الصفيرية

الدالة الصفيرية هي دالة كثيرة الحدود، لكن ليس لها درجة.

مثال 1 تحديد الدوال كثيرات الحدود

حدّد أي من الدوال التالية هي دالة كثيرة الحدود واكتبها بالصيغة القياسية، حدّد الدرجة والمعامل الرئيس وعدد الحدود، بّرر لماذا ليست الدوال الأخرى كثيرات حدود.

A. $f(x) = 4x^3 - \frac{1}{2} - 5x$

B. $g(x) = 6x^{-4} + 7$

C. $h(x) = \sqrt{9x^4 + 16x^2}$

D. $k(x) = 15x - 2x^4$

الحل

A. f هي دالة كثيرة الحدود صيغتها القياسية $f(x) = 4x^3 - 5x - \frac{1}{2}$ وهي من الدرجة 3، معاملها الرئيس 4 وعدد حدودها 3

B. g ليست دالة كثيرة الحدود بسبب وجود الأس -4

C. h ليست دالة كثيرة الحدود لأنه لا يمكن كتابتها في الصيغة القياسية للدالة كثيرة الحدود. لاحظ أن $\sqrt{9x^4 + 16x^2} \neq 3x^2 + 4x$

D. k هي دالة كثيرة الحدود صيغتها القياسية $k(x) = -2x^4 + 15x$ وهي من الدرجة 4، معاملها الرئيس -2 وعدد حدودها 2

حاول أن تحل التمرين 1

الدالة الصفيرية والدوال الثابتة هي دوال كثيرات الحدود. تحظى الدوال كثيرات الحدود حتى الدالة من الدرجة الثالثة بتسميات خاصة كما هو مبين أدناه.

الدوال كثيرات الحدود حتى الدرجة الرابعة

الدرجة	الصيغة	الإسم
0	$f(x) = a \quad (a \neq 0)$	الدالة الثابتة
1	$f(x) = ax + b \quad (a \neq 0)$	الدالة الخطية
2	$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$	الدالة التربيعية
3	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$	الدالة التكعيبية
4	$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \quad (a \neq 0)$	الدالة من الدرجة الرابعة

العمليات على الدوال كثيرات الحدود

يمكننا جمع وطرح الدوال كثيرات الحدود من خلال استعمال خاصيتي الإبدال والتجميع ثم دمج الحدود المتشابهة (ذات الأسس المتساوية). كذلك يمكننا ضرب الدوال كثيرات الحدود من خلال استعمال خاصية التوزيع ثم دمج الحدود المتشابهة.

مثال 2 جمع وطرح الدوال كثيرات الحدود

$$\text{لتكن } f(x) = 6x^3 + x^2 + 4x - 7 \text{ و } g(x) = 2x^3 - 8x^2 + 3$$

أوجد كل مما يلي ثم حدّد درجة الناتج:

A. $f(x) + g(x)$

B. $f(x) - g(x)$

الحل

A. $f(x) + g(x) = (6x^3 + x^2 + 4x - 7) + (2x^3 - 8x^2 + 3)$

$= (6x^3 + 2x^3) + (x^2 - 8x^2) + 4x + (-7 + 3)$ استعمال خاصيتي الإبدال والتجميع

$= 8x^3 - 7x^2 + 4x - 4$

ادمج الحدود المتشابهة

درجة الناتج تساوي 3

B. $f(x) - g(x) = (6x^3 + x^2 + 4x - 7) - (2x^3 - 8x^2 + 3)$

$= (6x^3 - 2x^3) + (x^2 - (-8x^2)) + 4x + (-7 - 3)$ استعمال خاصيتي الإبدال والتجميع

$= 4x^3 + 9x^2 + 4x - 10$

ادمج الحدود المتشابهة

درجة الناتج تساوي 3

حاول أن تحل التمرين (a و b) 2

مثال 3 ضرب الدوال كثيرات الحدود

$$\text{لتكن } f(m) = 2m + 5 \text{ و } g(m) = 3m^2 - 4m + 2$$

أوجد $f(m) \times g(m)$ وحدد درجة الناتج.

الحل

$$f(m) \times g(m) = (2m + 5)(3m^2 - 4m + 2)$$

$$= 2m(3m^2 - 4m + 2) + 5(3m^2 - 4m + 2)$$

استعمل خاصية التوزيع

$$= 6m^3 - 8m^2 + 4m + 15m^2 - 20m + 10$$

استعمل خاصية التوزيع

$$= 6m^3 + 7m^2 - 16m + 10$$

اجمع الحدود المتشابهة

إذن، درجة الناتج تساوي 3

حاول أن تحل التمرين (c) 2

أسئلة للتفكير

س: لماذا يمكن لخاصيتي الإبدال والتجميع أن يعملتا معًا في نفس الخطوة؟

نموذج إجابة:

واحدة تعمل على تغيير الترتيب لنتمكن باستعمال

الثانية من تجميع الحدود المتشابهة جنبًا إلى جنب.

س: إذا كان لدينا طرح لدالتين كثيرتي الحدود، ما هي

الخاصية التي يجب علينا استعمالها؟

نموذج إجابة:

إشارة الطرح أمام الدالة الثانية كثيرة الحدود ليست

سوى العدد (-1) مضروب بتلك الدالة، إذن، الخاصية

التي يجب استعمالها هنا هي خاصية التوزيع.

س: هل يمكن أن تكون درجة الدالة الناتجة عن جمع

دالتين كثيرتي حدود h و k أصغر من درجة h

ودرجة k ؟

نموذج إجابة:

نعم، مثال على ذلك

$$h(x) = 3x^3 + 2x^2 - 1 \text{ و } k(x) = -3x^3 + x^2 + 2;$$

$$(h + k)(x) = 3x^2 + 1$$

درجة $h + k$ تساوي 2، وهي أصغر من درجة h ودرجة k

والتي تساوي 3

سؤال للتفكير

س: (مع المثال 3) ما الذي تلاحظه عند ضرب دالتين

كثيرتي حدود؟

نموذج إجابة:

درجة الناتج هي جمع درجتي الدالتين فهي إذن أكبر من

كل منهما. ونلاحظ أيضًا أنه لا فرق في ترتيب الدالتين

عند الضرب لأنه عملية إبدالية.

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

يجد الطلاب أحيانًا صعوبة في استعمال خاصية التوزيع.

اطلب من الطلاب أن يتدربوا على ذلك في أمثلة سهلة.

وزّع ثم بسّط:

1. $2x(3x - 6)$

2. $4x(2x^2 + 3x - 7)$

3. $(x - 5)(2x - 9)$

س: ما الخاصية التي استعملت في ضرب الحدود التي

تحتوي على متغير؟ كيف استعملت هذه الخاصية؟

نموذج إجابة:

ضرب الأساس، عند ضرب الحدود التي تحتوي على نفس

الأساس، نقوم بجمع أسسها.

أسئلة للتفكير

س: (مع المثال 4) ما الفرق بين الإيرادات والربح؟
نموذج إجابة:

الإيرادات هي كمية المال التي تحصل عليها علية بعد بيعها للأجراس. الربح هو كمية المال المتبقية بعد طرح قيمة التكلفة من قيمة الإيرادات.

س: لماذا نحتاج إلى ضرب دالة السعر بعدد الأجراس بينما لا نحتاج إلى ذلك في دالة التكلفة؟
نموذج إجابة:

لأن دالة السعر تعطي سعر الجرس الواحد، لذلك نحتاج أن نضرب بعدد الأجراس المباعة لنحصل على السعر الإجمالي. أما دالة التكلفة فهي تمثل التكلفة الإجمالية للأجراس المصنعة.

س: كيف تدل النقطة الأعلى في منحنى دالة الربح على الأجراس التسعة؟
نموذج إجابة:

النقطة الأعلى هي (9, 98)، وهي تعني أن علية تحصل على أعلى ربح لها وهو QR 98 عندما تباع 9 أجراس.

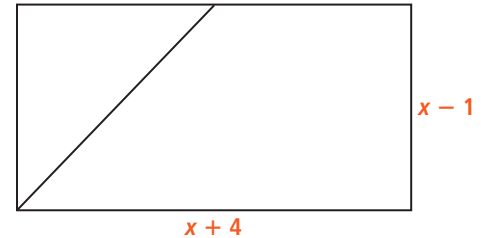
خطأ شائع

يعتقد الكثير من الطلاب أن الربح يزداد كلما زاد البيع. دع الطلاب يفكرون في العوامل التي تؤثر على الربح وهل تزداد قيمته دائمًا كلما زاد البيع.

للطلاب سريعى الإنجاز

أعط الطلاب مجالات جديدة للتعود على كتابة الدوال كثيرات الحدود:

زرعت رشا حوضًا في زاوية حديقته يحده الخط الذي يجمع ما بين زاوية الحديقة ونصف الحد المقابل (كما تبين الصورة). أكتب دالة كثيرة الحدود تمثل المساحة غير المزروعة من الحديقة.



س: كيف يمكن أن تحدد الدالة التي تمثل هذه المساحة؟
نموذج إجابة:

أوجد مساحة الحديقة من خلال ضرب الطول بالعرض وأطرح منه مساحة المثلث.

س: ما هي الدالة التي ترمز هذه المساحة؟
نموذج إجابة:

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x - 3$$

بشكل عام تكون درجة جمع أو طرح دالتين كثيرتي الحدود f و g ، حيث درجة $g \geq$ درجة f ، هي دائمًا أصغر من أو تساوي درجة f . في المثال 2، درجة f هي 3 ودرجة g هي أيضًا 3، لذا درجة جمعهما هي 3 كما رأينا.

كذلك فإن درجة ضرب f و g ، تساوي (درجة f + درجة g)، حيث f ، g كلتاها ليست الدالة الصفرية.

رأينا في المثال 2 أن درجة ضرب f و g هي 6 والتي هي جمع درجتي f و g .

مثال 4 كتابة دالة كثيرة الحدود

تصنع علية أجراس الهواء لتبيعها في سوق الصناعات اليدوية. كلما ازداد عدد الأجراس التي تصنعها علية، تمكنت من خفض سعر الجرس الواحد.

تربط الدالة $v(x) = 48 - 2x$ سعر الوحدة v بدلالة عدد الوحدات المصنعة x .
يمكن تمثيل التكلفة c لصنع x من أجراس الهواء بالدالة $C(x) = 12x + 64$.

أوجد عدد أجراس الهواء التي على علية صنعها كل أسبوع لتحصل على أقصى قيمة لربحها.

الحل

اكتب دالة الإيرادات R عبر ضرب السعر $v(x) = 48 - 2x$ لكل جرس بعدد الأجراس المباعة x .

$$R(x) = (48 - 2x)x$$

ثم اكتب دالة الربح P .

الربح = الإيرادات - التكلفة

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$= (48 - 2x)x - (12x + 64)$$

$$= (48x - 2x^2) - (12x + 64)$$

$$= 48x - 2x^2 - 12x - 64$$

$$= -2x^2 + 36x - 64$$

عوض $R(x)$ و $C(x)$

استعمل خاصية التوزيع

وزع العامل (-1)

ادمج الحدود المتشابهة

$$P(x) = -2x^2 + 36x - 64$$

بما أن المعامل الرئيس للدالة التربيعية $P(x)$ عدد سالب، فإن هذه الدالة تبلغ قيمة عظمى عند $x = \frac{-b}{2a}$ ، أي $x = 9$.

(تابع)

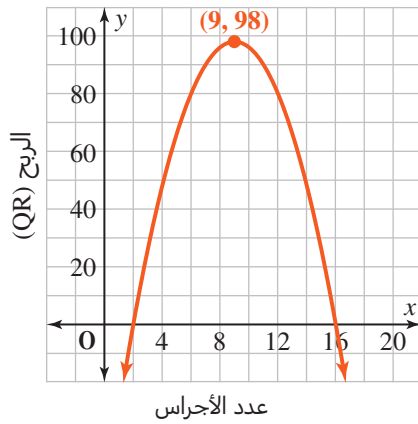
عوض بالعدد 9 عن x في $P(x)$ لإيجاد هذه القيمة العظمى:

$$\begin{aligned} P(9) &= -2(9^2) + 36(9) - 64 \\ &= 98 \end{aligned}$$

إذن على علياء أن تصنع وتبيع 9 أجراس هواء أسبوعيًا لتحقيق أقصى ربح مقداره 98 QR.

ادعم بيانيًا

التمثيل البياني أدناه يمثل دالة الربح.



إذن، على علياء أن تصنع وتبيع 9 أجراس هواء أسبوعيًا لتحقيق ربحًا مقداره 98 QR.

حاول أن تحل التمرين 5

القسم المطوّلة

رأينا سابقًا كيف تتم عمليات جمع الدوال كثيرات الحدود وطرحها وضربها. وفيما يلي سنشرح عملية قسمة الدوال كثيرات الحدود باستعمال **القسم المطوّلة** موضحين لاحقًا ما لعملية القسمة هذه من أهمية في تحليل تلك الدوال إلى عواملها.

تذكير

للدالة التربيعية $f(x) = ax^2 + bx + c$ دائمًا قيمة قصوى تبلغها عند $x = \frac{-b}{2a}$. إذا كان المعامل الرئيس a للدالة عددًا موجبًا، تكون هذه القيمة القصوى قيمة صغرى، وإذا كان عددًا سالبًا تكون قيمة عظمى.

سؤال للتفكير

س: كيف يمكن تعميم العمليات المستعملة لجمع و طرح وضرب الدوال كثيرات الحدود؟
نموذج إجابة:

عند تطبيق العمليات على الدوال كثيرات الحدود، استعمل خاصيتي الإبدال والتجميع لإعادة ترتيب وتجميع الحدود لدمج الحدود المتشابهة عند الجمع أو الطرح واستعمال خاصية التوزيع لتوزيع عامل على كافة حدود الدالة كثيرة الحدود عند الضرب.

خطأ شائع

عند ضرب ثلاثة عوامل، بعض الطلاب يقومون بتوزيع العامل الأول على العامل الثاني وعلى العامل الثالث. دع الطلاب يرون كيف أن ضرب عوامل ثلاثة يختلف عن استعمال خاصية التوزيع في ضرب عاملين.

تحفيز

حتّ الطلاب على استعادة مفردات القسمة: المقسوم، المقسوم عليه، الناتج، الباقي.

تذكير

عند قسمة الحدود التي لها نفس الأساس، نقوم بطرح القوة التي في المقام من القوة التي في البسط. مثلاً:
 $\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$

112	$1x^2 + 1x + 2$	←	ناتج القسمة
32)3587	$3x + 2 \overline{) 3x^3 + 5x^2 + 8x + 7}$	←	المقسوم
32	$3x^3 + 2x^2$	←	اضرب: $1x^2 \times (3x + 2)$
387	$3x^2 + 8x + 7$	←	اطرح
32	$3x^2 + 2x$	←	اضرب: $1x \times (3x + 2)$
67	$6x + 7$	←	اطرح
64	$6x + 4$	←	اضرب: $2 \times (3x + 2)$
3	3	←	الباقي

في القسمة، سواء في حالة الأعداد أو في حالة الدوال كثريرات الحدود، ينبغي أن يُقسم المقسوم على المقسوم عليه للحصول على ناتج القسمة والباقي. يمكننا أن نكتب باختصار:

$$\text{المقسوم} = (\text{المقسوم عليه})(\text{ناتج القسمة}) + \text{الباقي}$$

على سبيل المثال يمكن اختصار عمليتي القسمة أعلاه على النحو:

$$3587 = 32 \times 112 + 3$$

$$3x^3 + 5x^2 + 8x + 7 = (3x + 2)(x^2 + x + 2) + 3$$

وبقسمة طرفي المعادلة على $3x + 2$ نحصل على المعادلة التالية:

$$\frac{(3x^3 + 5x^2 + 8x + 7)}{(3x + 2)} = x^2 + x + 2 + \frac{3}{(3x + 2)}$$

ملاحظة تعليمية

من المهم إيضاح أنه يوجد ناتج قسمة وحيد وباقي قسمة وحيد لكل عملية قسمة، ودرجة الباقي هي دائماً أقل من درجة المقسوم عليه في قسمة كثريرات الحدود.

خوارزمية القسمة لكثريرات الحدود

لنفترض أن $f(x)$ و $d(x)$ دالتان كثريرات الحدود حيث درجة f أكبر من أو تساوي درجة d ، و $d(x) \neq 0$ ، إذن، يوجد دالتان فقط $q(x)$ و $r(x)$ من الدوال كثريرات الحدود، يُطلق عليهما إسماً ناتج القسمة والباقي على الترتيب، حيث تُكتب على الشكل التالي وتُسمى صورة كثريرات الحدود:

$$f(x) = d(x) \times q(x) + r(x), \quad (1)$$

كما يمكن كتابة جملة الناتج (1) بالصورة الكسرية:

$$\frac{f(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)} \quad (2)$$

حيث $r(x) = 0$ أو درجة r أقل من درجة d .

ودرجة الناتج $q(x)$ تساوي الفرق بين درجتي المقسوم $f(x)$ والمقسوم عليه $d(x)$.

الدالة $f(x)$ في خوارزمية القسمة هي المقسوم والدالة $d(x)$ هي المقسوم عليه. فإذا كانت الدالة $r(x) = 0$ ، نقول إنَّ الدالة $d(x)$ تقسم $f(x)$ بالتساوي.

أسئلة للتفكير

س: كيف نحدد حدود الناتج عند قسمة دالتين كثيرتي الحدود؟

نموذج إجابة:

نقسم حد الدرجة الأعلى في المقسوم على حد الدرجة الأعلى في المقسوم عليه للحصول على أول حد في الناتج. نضرب هذا الحد بالمقسوم عليه ونطرح النتيجة من المقسوم ثم نعيد العملية للحصول على الحد الثاني في الناتج وهكذا حتى الوصول إلى الباقي.

س: لماذا نضطر إلى كتابة

$$f(x) = 8x^3 + 0x^2 + 0x + 27 \text{ في } (B)؟$$

نموذج إجابة:

لأننا في القسمة المطولة نحصل في كل مرحلة على دالة كثيرة الحدود يجب أن نضع تحت ما قبلها، كل حد تحت الحد الذي يقابله، وبما أن الحدين x^2 و x غير موجودين في المقسوم، وضعنا $0x^2$ ليوضع تحته $12x^2$ ووضعنا $0x$ ليوضع تحته $-18x$ لنقوم بعمليات الطرح المناسبة.

مثال 5

استعمال القسمة المطولة لكثيرات الحدود

استعمل القسمة المطولة في كل موقف لإيجاد ناتج القسمة والباقي عند قسمة $f(x)$ على $d(x)$. اكتب الدالة $f(x)$ بدلالة كل من المقسوم عليه والباقي.

A. $f(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 9, d(x) = x + 3$

B. $f(x) = 8x^3 + 27, d(x) = 2x + 3$

الحل

A. القسمة المطولة لكثيرات الحدود شبيهة بقسمة الأعداد.

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x \\ x + 3 \overline{) x^3 + 5x^2 + 6x + 9} \\ \underline{-(x^3 + 3x^2)} \\ 2x^2 + 6x + 9 \\ \underline{-(2x^2 + 6x)} \\ 9 \end{array}$$

أقسم الحد الرئيس في المقسوم على الحد الرئيس في المقسوم عليه $x^3 \div x = x^2$

اضرب $x^2(x + 3) = x^3 + 3x^2$ ثم اطرح

أقسم من جديد الحدود الرئيسية $2x^2 \div x = 2x$

اضرب $2x(x + 3) = 2x^2 + 6x$ ثم اطرح

الباقي

باستخدام المعادلة (2)، نكتب الناتج بالصورة الكسرية:

$$\frac{x^3 + 5x^2 + 6x + 9}{x + 3} = x^2 + 2x + \frac{9}{x + 3}$$

ناتج خوارزمية القسمة في صورة كثيرة حدود هو:

$$x^3 + 5x^2 + 6x + 9 = (x^2 + 2x)(x + 3) + 9$$

B. اكتب كلاً من $f(x)$ و $d(x)$ في الصورة القياسية:

لاحظ أن المقسوم هو كثيرة حدود تكعيبية لا تحتوي على حد من الدرجة الأولى

أو الثانية، لذا نعيد كتابتها على الصورة $f(x) = 8x^3 + 0x^2 + 0x + 27$

$$d(x) = 2x + 3$$

$$\begin{array}{r} 4x^2 - 6x + 9 \\ 2x + 3 \overline{) 8x^3 + 0x^2 + 0x + 27} \\ \underline{-(8x^3 + 12x^2)} \\ -12x^2 + 0x + 27 \\ \underline{-(-12x^2 - 18x)} \\ 18x + 27 \\ \underline{-(18x + 27)} \\ 0 \end{array}$$

أقسم الحد الرئيس في المقسوم على الحد الرئيس في المقسوم عليه $8x^3 \div 2x = 4x^2$

اضرب $4x^2(2x + 3) = 8x^3 + 12x^2$ ثم اطرح

أقسم من جديد الحدود الرئيسية $-12x^2 \div 2x = -6x$

اضرب $-6x(2x + 3) = -12x^2 - 18x$ ثم اطرح

أقسم من جديد الحدود الرئيسية $18x \div 2x = 9$

اضرب $9(2x + 3) = 18x + 27$ ثم اطرح

الباقي

(تابع)

باستخدام المعادلة (2)، نكتب الناتج بالصورة الكسرية:

$$\frac{8x^3 + 27}{2x + 3} = 4x^2 - 6x + 9$$

ناتج خوارزمية القسمة في صورة كثيرة حدود هو:

$$\begin{aligned} 8x^3 + 27 &= (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9) + 0 \\ &= (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9) \end{aligned}$$

حاول أن تحل التمرين 10

القسمة التركيبية

القسمة التركيبية طريقة تُستخدم لقسمة كثيرة حدود على عبارة خطية في صورة $x - a$.

لاحظ أن المعامل الرئيس في المقسوم عليه هو 1 وأن a هو صفر المقسوم عليه.

لنقم بقسمة كثيرة الحدود $2x^3 - 7x^2 - 4$ على العبارة الخطية $x - 3$ بطريقة

القسمة التركيبية.

الخطوة 1 للانتقال من صيغة القسمة المطولة إلى صيغة القسمة التركيبية، لا نكتب سوى صفر المقسوم عليه ومعاملات المقسوم.

$$\begin{array}{r|rrrrr} x-3 & 2x^3 & -7x^2 & +0x & -4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & -7 & 0 & -4 \end{array}$$

يشكل العدد 3 في السطر الثاني صفر المقسوم عليه وتشكل باقي الأعداد في نفس السطر معاملات المقسوم. نترك فاصلاً بين العدد 3 وباقي الأعداد.

الخطوة 2 ننزل المعامل الأول (2)، ثم نضرب صفر المقسوم عليه (3) في المعامل الأول، ثم نجمع ناتج الضرب (6) مع المعامل الثاني (-7).

$$\begin{array}{r|rrrrr} 3 & 2 & -7 & 0 & -4 \\ & & 6 & & \\ \hline & 2 & -1 & & \end{array}$$

الخطوة 3 نكرر العملية حتى تكتمل جميع الأعمدة.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 3 & 2 & -7 & 0 & -4 \\ & & 6 & -3 & \\ \hline & 2 & -1 & -3 & \\ 3 & 2 & -7 & 0 & -4 \\ & & 6 & -3 & -9 \\ \hline & 2 & -1 & -3 & -13 \end{array}$$

الخطوة 4 نستخدم الأعداد في الصف الأخير لكتابة ناتج القسمة والباقي.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 3 & 2 & -7 & 0 & -4 \\ & & 6 & -3 & -9 \\ \hline & 2 & -1 & -3 & -13 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 2x^2 & -1x & -3 & -\frac{13}{x-3} \end{array}$$

أسئلة للتفكير

س: متى تستعمل القسمة التركيبية وما هي أهميتها؟
نموذج إجابة:

يمكن استعمال القسمة التركيبية لقسمة دالة كثيرة الحدود على عامل خطي. تعطي القسمة التركيبية المعاملات بصيغة مرتبة وهي بذلك أكثر فعالية.

س: لماذا نقلب إشارة الثابت في المقسوم عليه؟
نموذج إجابة:

يكتب المقسوم عليه الخطي على شكل $x - a$ ، لذلك نقوم بإشارة الطرح هنا بقلب إشارة الثابت.

نظرًا لأن المقسوم عبارة تكعيبية والمقسوم عليه عبارة خطية، يكون الناتج عبارة تربيعية.

$$\frac{2x^3 - 7x^2 - 4}{x - 3} = 2x^2 - x - 3 - \frac{13}{x - 3} \text{، إذن،}$$

مثال 6 استخدام القسمة التركيبية

اقسم $2x^3 - 5x - 12$ على $x + 2$ باستخدام القسمة التركيبية واكتب الناتج بالصورة الكسرية.

الحل

الخطوة 1 اكتب صفر المقسوم عليه ومعاملات المقسوم.

$$\begin{array}{r|rrrrr} x + 2 & 2x^3 & + 0x^2 & - 5x & - 12 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ -2 & 2 & 0 & -5 & -12 \end{array}$$

يشكل العدد -2 في السطر الثاني صفر المقسوم عليه وتشكل باقي الأعداد في نفس السطر معاملات المقسوم. نترك فاصلًا بين العدد -2 وباقي الأعداد.

الخطوة 2 نزل المعامل الأول (2)، ثم نضرب صفر المقسوم عليه (-2) في المعامل الأول، ونجمع ناتج الضرب (-4) مع المعامل الثاني (0).

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 2 & 0 & -5 & -12 \\ & & -4 & & \\ \hline & 2 & -4 & & \end{array}$$

الخطوة 3 نكرر العملية حتى تكتمل جميع الأعمدة.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 2 & 0 & -5 & -12 \\ & & -4 & 8 & \\ \hline & 2 & -4 & 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 2 & 0 & -5 & -12 \\ & & -4 & 8 & -6 \\ \hline & 2 & -4 & 3 & -18 \end{array}$$

الخطوة 4 نستخدم الأعداد في الصف الأخير لكتابة ناتج القسمة والباقي.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 2 & 0 & -5 & -12 \\ & & -4 & 8 & -6 \\ \hline & 2 & -4 & 3 & -18 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 2x^2 & -4x & +3 & -18 & \\ & & & & x + 2 \end{array}$$

نظرًا لأن المقسوم عبارة تكعيبية والمقسوم عليه عبارة خطية، يكون الناتج عبارة تربيعية.

$$\frac{2x^3 - 5x - 12}{x + 2} = 2x^2 - 4x + 3 - \frac{18}{x + 2} \text{ إذن:}$$

حاول أن تحل التمرين 12

سؤال للتفكير

س: في السطر الأخير من القسمة التركيبية لدالة كثيرة الحدود $f(x)$ على $x - a$ ، إذا كان العدد على اليمين هو 0، فهل يمكن القول إن $\frac{f(x)}{x-a}$ هو دالة كثيرة الحدود؟ نموذج إجابة:

كلا، صحيح أنه في هذه الحالة تُكتب $\frac{f(x)}{x-a}$ في صيغة دالة كثيرة الحدود ولكن مع وجود شرط $a \neq x$.

خطأ شائع

ربما يعتمد بعض الطلاب إلى ضرب معامل x بثابت المقسوم عليه الخطي ووضع النتيجة تحت المعامل التالي. دع الطلاب يستعملون القسمة المطولة في مثال معين واطلب منهم مقارنة ما يحصلون عليه من قيم مع القيم التي يحصلون عليها في القسمة التركيبية.

عادات التفكير

س: أي الطريقتين سوف تستعمل لقسمة دالة كثيرة الحدود على $x^2 + 5$ ؟ نموذج إجابة: القسمة المطولة، لأن القسمة التركيبية لا تستعمل إلا على العوامل الخطية.

سؤال للتفكير

س: ما الطريقتان المستعملتان في قسمة الدوال كثيرات الحدود؟ نموذج إجابة:

الطريقتان هما القسمة المطولة والقسمة التركيبية. القسمة المطولة يمكن استعمالها في أية حالة. أما القسمة التركيبية تستعمل فقط إذا كان المقسوم عليه على شكل $x - a$.

متابعة

س: أسأل: كيف يمكن أن نعرف باقي قسمة دالة كثيرة الحدود $f(x)$ على $x - k$ من خلال طريقتين؟ القسمة المطولة والقسمة التركيبية.

ملاحظات على التمارين

التمارين 5-2، تركز على عمليات جمع وطرح وضرب الدوال.
التمارين 6-17، تركز على القسمة المطولة والقسمة التركيبية.
التمارين 20-24، تدرب الطالب على أنماط من الاختبارات.

التقييم المستمر

التقييم الذاتي:

التمارين 3، 11، 15، 18

مراجعة سريعة 3.1

في التمارين 1-5، اجمع أو اطرح كثيرات الحدود.

في التمارين 6-10، اضرب كثيرات الحدود.

6. $(2x + 5)(3x^2 - 4x + 2)$ $6x^3 + 7x^2 - 16x + 10$
7. $(6x^2 - 7)(x^2 + x + 3)$ $6x^4 + 6x^3 + 11x^2 - 7x - 21$
8. $(3x - 2)(-2x^2 - 2x + 3)$ $-6x^3 - 2x^2 + 13x - 6$
9. $(x^2 - 4x - 5)(1 - 2x)$ $-2x^3 + 9x^2 + 6x - 5$
10. $(2 - 2x^2)(4x^2 - 3x + 4)$ $-8x^4 + 6x^3 - 6x + 8$

1. $(6x^3 + 4x + x^2 - 7) + (2x^3 - 8x^2 + 3)$ $8x^3 - 7x^2 + 4x - 4$
2. $(4x^4 - 6x^3 - 3x^2 + x + 1) - (5x^3 + 7x^2 + 2x - 2)$
 $4x^4 - 11x^3 - 10x^2 - x + 3$
3. $(3x^2 - 4x - 4) + (-6x^3 + x^2 - 5x)$ $-6x^3 + 4x^2 - 9x - 4$
4. $(x^3 - x + 2) - (x^2 - x - 3)$ $x^3 - x^2 + 5$
5. $(2x^2 - 3x + 5) - (x^3 + x^2 - x + 2)$ $-x^3 + x^2 - 2x + 3$

الدرس 3.1 التمارين

1. حدّد ما إذا كانت الدالة دالة كثيرة الحدود.

في حال كانت كذلك، حدّد درجاتها ومعاملها الرئيس، وإن لم تكن كذلك فحدّد السبب.

- a. $f(x) = 3x^{-5} + 17$ b. $f(x) = -9 + 2x$
- c. $f(x) = 2x^5 - \frac{1}{2}x - 9$ d. $f(x) = 13$
- e. $h(x) = \sqrt[3]{27x^3 + 8x^6}$ f. $k(x) = 4x - 5x^2$

2. لتكن $f(x) = 6x^2 - 7$ و $g(x) = x^2 + x + 3$ ، أوجد كلاً مما يلي ثم حدّد درجة الناتج:

- a. $f(x) + g(x)$
- b. $f(x) - g(x)$
- c. $f(x) \times g(x)$

3. أوجد $f(x) + g(x)$ و $f(x) - g(x)$ ثم حدّد درجة الناتج.

- a. $f(x) = (2x^3 + 3x^2 + 4)$, $g(x) = (6x^3 - x^2 - 5x)$
- b. $f(x) = (5x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 14)$,
 $g(x) = (-x^4 + x^2 - 7x - 1)$

4. أوجد $f(x) \times g(x) \times h(x)$ ثم حدّد درجة الناتج.

- a. $f(x) = x$, $g(x) = 3x - 4$, $h(x) = 2x^2 - 5x + 7$
- b. $f(x) = x + 5$, $g(x) = x - 9$, $h(x) = 1 - x$

5. تصنع ليلي صواني الضيافة لتبيعها في سوق المدينة. كلما ازداد

عدد الصواني التي تصنعها ليلي، تمكنت من تخفيض سعر

الصينية الواحدة. تربط الدالة $v(x) = 84 - 6x$ سعر الوحدة v بعدد الوحدات المصنعة x .يمكن تمثيل التكلفة C لصنع x من الصواني بالدالة

$$C(x) = 12x + 84$$

أوجد عدد الصواني التي على ليلي صنعها كل أسبوع لتحصل

على أقصى قيمة لربحها.

في التمارين 6-11، قم بقسمة $f(x)$ على $d(x)$ ، واكتب الناتج في صورة كثيرات الحدود والصورة الكسرية:

6. $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $d(x) = x - 1$
 $\frac{f}{d} = x - 1 + \frac{2}{x-1}$
7. $f(x) = x^3 - 1$, $d(x) = x + 1$
 $\frac{f}{d} = x^2 - x + 1 - \frac{2}{x+1}$
8. $f(x) = x^3 + 4x^2 + 7x - 9$, $d(x) = x + 3$
 $\frac{f}{d} = x^2 + x + 4 - \frac{21}{x+3}$
9. $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 2x - 1$, $d(x) = 2x + 1$
 $\frac{f}{d} = 2x^2 - 5x + \frac{7}{2} - \frac{2}{2x+1}$
10. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 6$, $d(x) = x^2 + 2x - 1$
 $\frac{f}{d} = x^2 - 4x + 12 + \frac{-32x+18}{x^2+2x-1}$
11. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 3x + 5$, $d(x) = x^2 + 1$
 $\frac{f}{d} = x^2 - 3x + 5$

أسئلة اختبار معيارية

20. صواب أم خطأ قسمت جنى كثيرة الحدود $2x^3 - 4x^2 + 6x + 10$ على $x^2 + x$ كما يلي:

$$\begin{array}{r} 2x - 6 + \frac{10}{x^2 + x} \\ x^2 + x \overline{) 2x^3 - 4x^2 + 6x + 10} \\ \underline{-(2x^3 + 2x^2)} \\ -6x^2 + 6x \\ \underline{-(-6x^2 - 6x)} \\ 10 \end{array}$$

هل القسمة صحيحة؟ بّرر إجابتك.

21. صواب أم خطأ بقسمة دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة على العامل $x^2 - 3$ فإن درجة الناتج تساوي 2. بّرر إجابتك.

22. صواب أم خطأ إذا كانت $f(x) = (x - 1)(2x^2 - x + 1) + 3$ عندئذ يكون الباقي عند قسمة $f(x)$ على $x - 1$ يساوي 3، بّرر إجابتك.

23. اختيار من متعدد لتكن $f(x) = (x + 2)(x^2 + x - 1) - 3$. أي العبارات التالية ليست صحيحة؟ B

A. الباقي عند قسمة $f(x)$ على $x + 2$ يساوي -3

B. الباقي عند قسمة $f(x)$ على $x - 2$ يساوي -3

C. الباقي عند قسمة $f(x)$ على $x^2 + x - 1$ يساوي -3

D. $x + 2$ ليس من عوامل $f(x)$.

E. $f(x)$ لا تقسم بالتساوي على $x + 2$.

24. اختيار من متعدد لتكن $f(x) = (x^2 + 1)(x - 2) + 7$. أي العبارات التالية ليست صحيحة؟ E

A. الباقي عند قسمة $f(x)$ على $x^2 + 1$ يساوي 7

B. الباقي عند قسمة $f(x)$ على $x - 2$ يساوي 7

C. $f(2) = 7$.

D. $f(0) = 5$.

E. $f(x)$ تقسم بالتساوي على $x - 2$.

في التمارين 12-17، اقسم مستخدمًا القسمة التركيبية، واكتب الناتج في الصورة الكسرية.

12. $\frac{x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x + 1} \quad x^2 - 6x + 9 + \frac{-11}{x + 1}$

13. $\frac{2x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x + 1}{x - 3} \quad 2x^3 + x^2 + 10x + 27 + \frac{82}{x - 3}$

14. $\frac{9x^3 + 7x^2 - 3x}{x - 10} \quad 9x^2 + 97x + 967 + \frac{9670}{x - 10}$

15. $\frac{3x^4 + x^3 - 4x^2 + 9x - 3}{x + 5} \quad 3x^3 - 14x^2 + 66x - 321 + \frac{1602}{x + 5}$

16. $\frac{5x^4 - 3x + 1}{4 - x} \quad -5x^3 - 20x^2 - 80x - 317 + \frac{-1269}{4 - x}$

17. $\frac{x^8 - 1}{x + 2} \quad x^7 - 2x^6 + 4x^5 - 8x^4 + 16x^3 - 32x^2 + 64x - 128 + \frac{255}{x + 2}$

18. مكبر صوت على شكل شبه مكعب، طوله ثلاثة أمثاله عرضه، وارتفاعه يزيد على العرض بأربع وحدات. اكتب دالة تعبر عن حجم شبه المكعب بدلالة العرض x . $x(3x)(x + 4) = 3x^3 + 12x^2$



19. نادي تسوق على الانترنت يضم 13 500 عضوًا. يفرض رسم

اشتراك شهري بقيمة 8 QR. لكل زيادة 1 QR على رسم الاشتراك الشهري، يخسر النادي حوالي 500 من أعضائه المشتركين.

اكتب وبسط دالة R لتمثيل العائدات الشهرية التي يجنيها النادي إذا كان x يمثل الزيادة على الاشتراك الشهري. (مساعدة: العائدات الشهرية = الأعضاء $\times$ رسم الاشتراك الشهري).

استكشاف

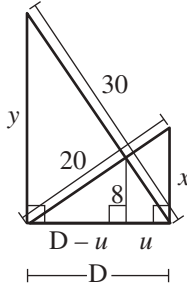
توسيع الأفكار

27. اشتقاق نموذج جبري لمسألة يتن أن المسافة x في الشكل

أدناه هي حل للمعادلة

$$x^4 - 16x^3 + 500x^2 - 8000x + 32000 = 0$$

متبعا الخطوات التالية:



a. استعمل المثلثات المتشابهة في الرسم وخصائص التناسب

التي تعلمتها في الهندسة لتبين أن: $\frac{8}{x} = \frac{y-8}{y}$

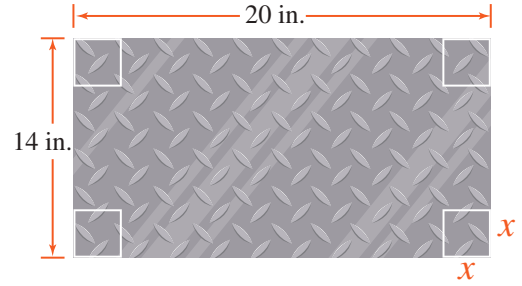
b. بين أن $y = \frac{8x}{x-8}$

c. بين أن $y^2 - x^2 = 500$ ثم عوض قيمة y ، وبسط المعادلة

لتحصل على المعادلة المعطاة في x من الدرجة الرابعة.

استعمل المعلومات التالية للتمرينين 25 و 26.

مشغل يقوم بتصنيع صواني المنيوم من قطع صفائح معدنية كالتي في الرسم.

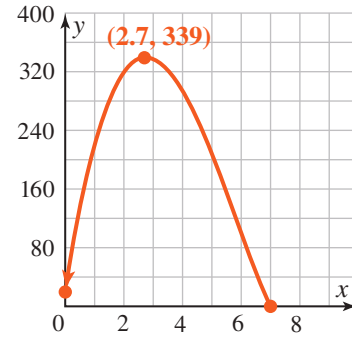


25. افترض أن x يمثل طول ضلع كل مربع.

a. اكتب صيغاً لطول وعرض وارتفاع الصينية المعدنية.

b. اكتب وبسط دالة كثيرة حدود V لتمثيل حجم الصينية.

c. بالاعتماد على الرسم البياني للدالة V ، اشرح ماذا تمثل القيمة العظمى المحلية المشار إليها.



26. افترض أن صناعي المشغل لديه تصميمًا جديدًا حيث المربعات المقطوعة من الزوايا لها أضلاع بنصف طول أضلاع المربعات في التصميم السابق.

a. اكتب صيغاً لطول وعرض وارتفاع الصينية الجديدة.

b. اكتب وبسط الدالة كثيرة الحدود $v(x)$ ، لتمثيل حجم الصينية الجديدة.

c. اكتب الدالة $D(x)$ التي تمثل الفرق، $V(x) - v(x)$.

Graphs of Polynomial Functions التمثيلات البيانية للدوال كثيرات الحدود

3.2

الدوال وحيدة الحد وتمثيلها البياني

تسمى الدالة كثيرة الحدود ذات الحد الواحد **دالة وحيدة الحد**.

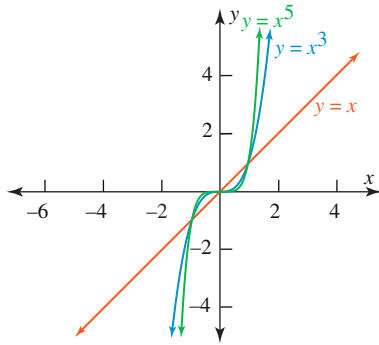
الدالة وحيدة الحد

كل دالة بالإمكان كتابتها في الصورة

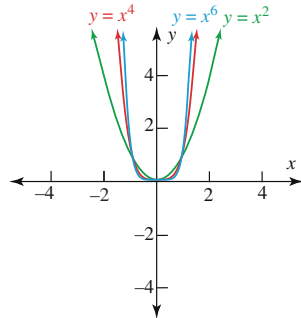
$$f(x) = k \text{ أو } f(x) = kx^n$$

حيث k عدد ثابت لا يساوي الصفر و n عدد صحيح موجب، هي دالة وحيدة الحد.

إذا قمنا باستعمال الحاسبة لتمثيل الدوال $f(x) = x^n$ حيث $n = 1, 3, 5$ ، نجد أن التمثيل البياني للدوال يقع في الربع I والربع III، ويقترب من محور y كلما كبرت n كما هو مبين في الشكل.



يمكنك القيام بالأمر نفسه بالنسبة للدوال $f(x) = x^n$ حيث $n = 2, 4, 6$ ، وستجد أن التمثيل البياني للدوال يقع في الربعين I و II. ويقترب من محور y كلما كبرت n كما هو مبين في الشكل.



يمكننا أن نستخلص بشكل عام أن الدالة $f(x) = x^n$ حيث n عدد فردي هي دالة فردية وبالتالي فهي متناظرة حول نقطة الأصل ولذلك يتم تمثيلها في الربعين I و III.

أما الدالة $f(x) = x^n$ حيث n عدد زوجي هي دالة زوجية وبالتالي فهي متناظرة حول المحور y ولذا يتم تمثيلها في الربعين I و II.

ما ستتعلمه

- الدوال وحيدة الحد وتمثيلها البياني
- سلوك طرفي منحنيات الدوال كثيرات الحدود
- تمثيل الدوال كثيرات الحدود بيانياً
- أصفار الدوال كثيرات الحدود

... ولماذا

يمكننا معرفة خصائص منحني دالة كثيرة الحدود من خلال معرفة أصفارها.

معياري الدرس

11A.5.1

المصطلحات

- دالة وحيدة الحد monomial function
- تعددية صفر الدالة multiplicity of a zero
- صفر متكرر repeated zero

الهدف

سيتمكن الطلاب من تمثيل الدوال كثيرات الحدود بيانياً، ومن تحديد سلوكها الطرقي وأصفارها الحقيقية من خلال استعمال الحاسبة أو بطرق جبرية.

دليل الدرس

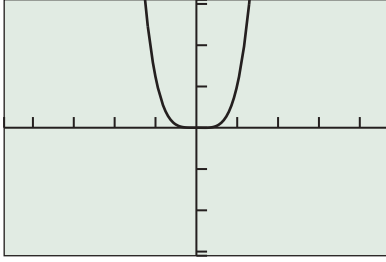
1. التمثيل البياني للدوال وحيدة الحد والسلوك الطرقي للدوال كثيرة الحدود.
2. تمثيل الدوال كثيرات الحدود بيانياً، وتوضيح أصفارها.

تحفيز

اطلب من الطلاب أن يصفوا التمثيلات البيانية للدوال كثيرات الحدود من الدرجة الرابعة.

دالة أساسية

الدالتين التكعيبية والدالة من الدرجة الرابعة

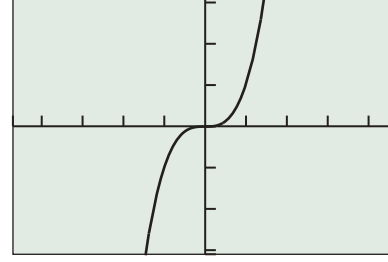
في $[-3.1, 3.1]$ في $[-4.7, 4.7]$ الدالة من الدرجة الرابعة $f(x) = x^4$ المجال: $]-\infty, \infty[$ المدى: $[0, \infty[$

متصلة

متناقصة في $]-\infty, 0]$ و متزايدة في $[0, \infty[$ متناظرة حول المحور y (دالة زوجية)لها قيمة صغرى عند النقطة $(0, 0)$

ليس لها خطوط تقارب أفقية

ليس لها خطوط تقارب رأسية

في $[-3.1, 3.1]$ في $[-4.7, 4.7]$ الدالة التكعيبية $f(x) = x^3$ المجال: $]-\infty, \infty[$ المدى: $]-\infty, \infty[$

متصلة

متزايدة لكل قيم x

متناظرة حول نقطة الأصل (دالة فردية)

ليس لها قيم قصوى محلية

ليس لها خطوط تقارب أفقية

ليس لها خطوط تقارب رأسية

مثال 1 التمثيل البياني لتحويلات الدوال ذات الحد الواحد

بين كيف يمكن استعمال التمثيل البياني لدالة ذات حد واحد $f(x) = a_n x^n$ لإيجاد التمثيل البياني للدالة المعطاة.

ارسم منحنى الدالة ثم تحقق من إجابتك باستعمال الحاسبة. حدد موقع التقاطع مع المحور y للتأكد من الدالة المحولة.

A. $g(x) = 4(x + 1)^3$

B. $h(x) = -(x - 2)^4 + 5$

سؤال للتفكير

س: أين يقع التمثيل البياني للدالة $f(x) = -x^n$ ؟

إذا كان n عدداً فردياً؟

نموذج إجابة:

بما أن التمثيل البياني للدالة $y = x^n$ يقع في الربعين

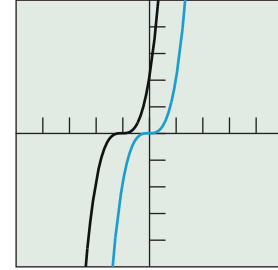
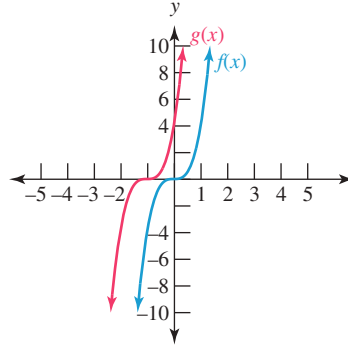
I و III، فإن التمثيل البياني للدالة f يقع في الربعين

II و IV لأنه انعكاس لها حول المحور x .

(تابع)

الحل

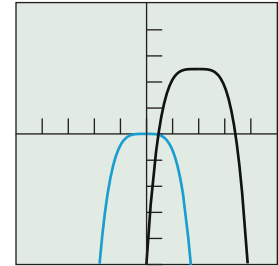
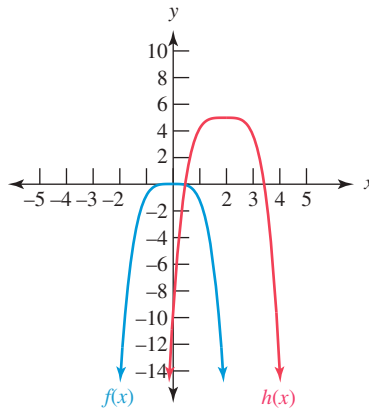
A. يمكنك إيجاد التمثيل البياني للدالة $g(x) = 4(x + 1)^3$ من خلال إزاحة منحنى الدالة $f(x) = 4x^3$ وحدة واحدة إلى اليسار كما يبين الشكل أدناه. يمكنك التأكد من الرسم باستعمال حاسبة التمثيل البياني (انظر إلى الشكل في الهامش).



[−5, 5] في [−10, 10]

التقاطع مع المحور y لمنحنى الدالة g هو $g(0) = 4(0 + 1)^3 = 4$ وهو مطابق للتمثيل البياني المحوّل.

B. يمكنك إيجاد التمثيل البياني للدالة $h(x) = -(x - 2)^4 + 5$ من خلال إزاحة منحنى الدالة $f(x) = -x^4$ وحدتين إلى اليمين وخمس وحدات إلى الأعلى، كما يبين الشكل المجاور. يمكنك التأكد من الرسم باستعمال حاسبة التمثيل البياني (انظر إلى الشكل في الهامش).



[−5, 5] في [−10, 10]

التقاطع مع المحور y لمنحنى الدالة h هو $h(0) = -(0 - 2)^4 + 5 = -16 + 5 = -11$ وهو مطابق للتمثيل البياني المحوّل.

حاول أن تحل التمرين 1

سلوك طرفي منحنيات الدوال كثريرات الحدود

من الخصائص المهمة للدوال كثريرات الحدود سلوك طرفي منحنياتها، التي تتبع كما سنلاحظ حدّها الرئيس. يتناول النشاط الاستكشافي 1 سلوك طرفي منحنيات وحيدات الحدود التي يمكن أن تكون حدًا رئيسًا لدوال كثريرات الحدود.

نشاط استكشافي 1 تبين سلوك طرفي منحنيات الدالة $f(x) = a_n x^n$

مثل الدالة بيانًا في النافذة $[-5, 5]$ في $[-15, 15]$.

صف سلوك طرفي الدالة عندما x تقترب إلى $+\infty$ وعندما تقترب إلى $-\infty$

1. (a) $f(x) = 2x^3$ (b) $f(x) = -x^3$
(c) $f(x) = x^5$ (d) $f(x) = -0.5x^7$
2. (a) $f(x) = -3x^4$ (b) $f(x) = 0.6x^4$
(c) $f(x) = 2x^6$ (d) $f(x) = -0.5x^2$
3. (a) $f(x) = -0.3x^5$ (b) $f(x) = -2x^2$
(c) $f(x) = 3x^4$ (d) $f(x) = 2.5x^3$

صف الأنماط التي تلاحظها. كيف تؤثر، على وجه الخصوص، قيم المعامل a_n والدرجة n على السلوك الطرفي للدالة $f(x) = a_n x^n$ ؟

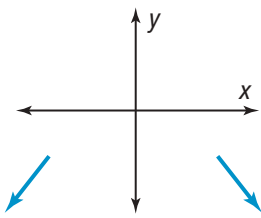
توسيع الاستكشاف

مثل بيانًا الدوال $f(x) = 2x^3 - x^2$ و $f(x) = 3x^4 - 2x^3$

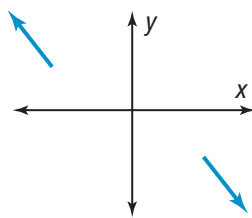
و $f(x) = 0.6x^4 + 5x$.

قارن بين السلوك الطرفي لهذه الدوال وبعض الدوال في الاستكشاف.

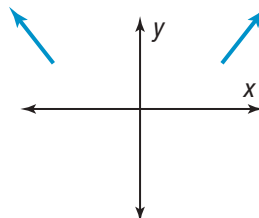
السلوك الطرفي لدالة وحيدة الحد $f(x) = a_n x^n$ يعتمد على درجة هذه الدالة وعلى إشارة معاملها الرئيس كما هو موضح في الأشكال التالية:



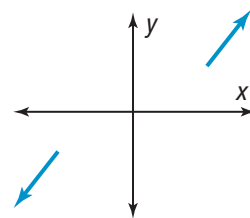
الدرجة: زوجية
المعامل الرئيس: -



الدرجة: فردية
المعامل الرئيس: +



الدرجة: زوجية
المعامل الرئيس: +



الدرجة: فردية
المعامل الرئيس: -

ملاحظة:

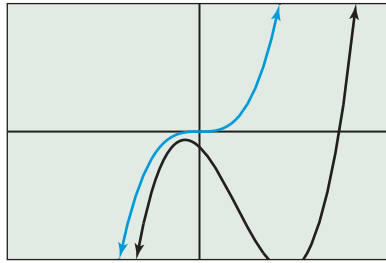
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

تعني أن قيم الدالة f تقترب إلى ∞ عندما تقترب قيم x إلى ∞ ونقرأ نهاية الدالة f عندما x تقترب إلى ∞ .

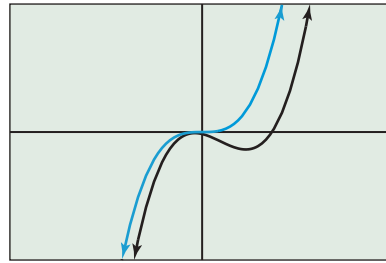
لمقارنة التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود بالتمثيل البياني لحددها الرئيس (دالة وحيدة الحد) ضع التمثيلين البيانيين للدالتين $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x - 3$ و $g(x) = x^3$ على سبيل المثال في نوافذ عرض متلاحقة، تكبر تدريجياً، كما يبدو في الصور (a) و (b) و (c) من الشكل 3.2.1 هذه العملية تسمى النظرة الأشمل. تبين نوافذ العرض أنه كلما كبرت أبعاد النافذة، أصبح من الصعب التمييز بين الدالتين f و g ، إضافة إلى ذلك:

عندما تقترب قيم x إلى ∞ فإن قيم كل من f و g تقترب إلى ∞ وكذلك عندما تقترب قيم x إلى $-\infty$ فإن قيم كل من f و g تقترب إلى $-\infty$ ويرمز لها بالرموز كما يلي:

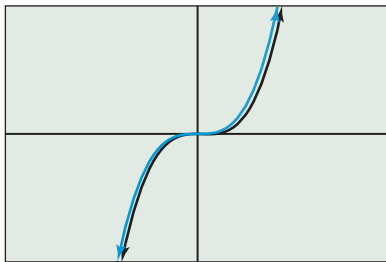
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$



(a) في $[-7, 7]$ في $[-25, 25]$



(b) في $[-14, 14]$ في $[-200, 200]$



(c) في $[-56, 56]$ في $[-12\,800, 12\,800]$

الشكل 3.2.1 كلما أصبحت نافذة العرض أكبر، كلما بدا الرسمان البيانيان للدالتين $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x - 3$ و $g(x) = x^3$ متماثلين أكثر فأكثر.

من خلال ما تقدم، يمكن أن نستنتج أنه كلما كبرت نوافذ العرض، أصبح التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود مشابهاً للتمثيل البياني لحددها الرئيس. بمعنى آخر، يطغى الحد الرئيس على سلوك كثيرة الحدود عندما $|x| \rightarrow \infty$. بالارتكاز على هذه الحقيقة وعلى ما رأيناه في النشاط الاستكشافي 1، هناك أربعة أنماط ممكنة للسلوك الطرفي لدالة كثيرة الحدود. تشير درجة ومعامل الحد الرئيس إلى نوع النمط الذي حدث من بين هذه الأنماط الأربعة.

سؤال للتفكير

س: اشرح أهمية الدرجة والمعامل الرئيس في وصف منحني الدالة كثيرة الحدود. نموذج إجابة:

تبين الدرجة ما إذا كان سيكون للقيم y نفس الإشارة أو إشارة مختلفة عندما تقترب قيم x من موجب ما لا نهاية وسالب ما لا نهاية. يبين المعامل الرئيس إشارة الدالة من يمين التمثيل البياني إلى يساره.

أسئلة للتفكير

س: هل يمكن تحديد السلوك الطرفي للدالة $f + g$

في المثال 2 من خلال السلوك الطرفي للدالتين

f و g ؟

نموذج إجابة:

كلا، لأن السلوك الطرفي تُحدده الدرجة الأعلى.

س: ما الفرق بين السلوك الطرفي لكلتا الدالتين في

المثال 2؟

نموذج إجابة:

في الدالة الأولى تختلف إشارة قيم y عندما تقترب

قيم x من موجب ما لا نهاية وسالب ما لا نهاية. أما

في الدالة الثانية فقيم y تبقى موجبة.

س: ما الذي يصف السلوك الطرفي للدالة؟

نموذج إجابة:

الدرجة تصف شكل الدالة وتصف إشارة المعامل

الرئيس وجهتها.

خطأ شائع

ربما يخطئ بعض الطلاب في اعتبار المعامل الأكبر هو المعامل الرئيس. ذكر الطلاب بأهمية ترتيب حدود الدالة من الدرجة الأعلى إلى الدرجة الأصغر.

للطلاب سريع الإنجاز

1. $f(x) = x^2 + 3$

2. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 5$

س: ما الحد الذي لديه التأثير الأكبر على قيمة الدالة؟ نموذج إجابة:

الحد المشتمل على الدرجة الأعلى هو الذي لديه التأثير الأكبر على القيمة النهائية للدالة.

س: ما التأثير الذي يحمله المعامل الرئيس والدرجة

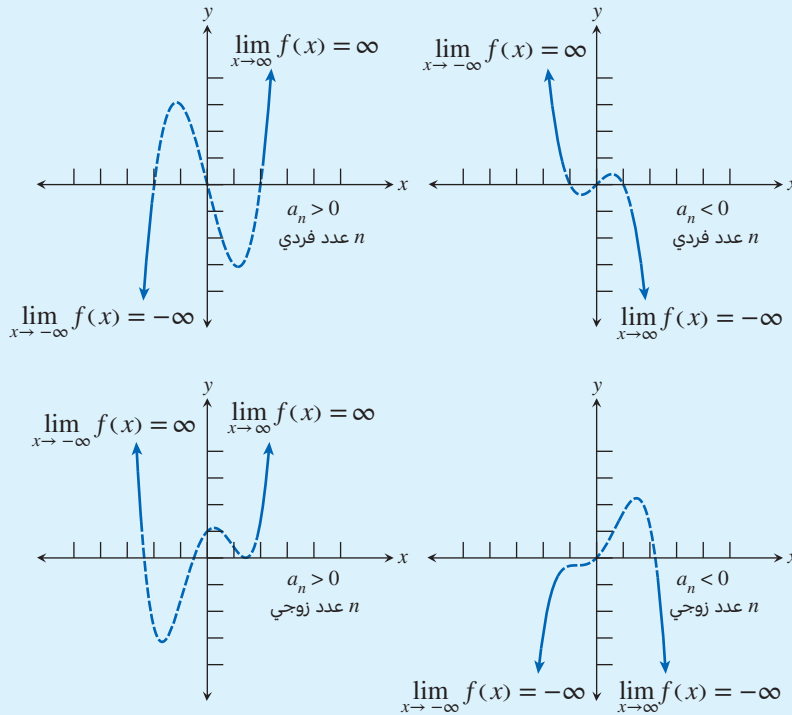
للدالة على سلوكها الطرفي؟

نموذج إجابة:

بما أن المعامل الرئيس ينتمي إلى الحد الذي يشتمل على الدرجة الأعلى، فهو الأكثر تأثيرًا على قيمة الدالة ولذلك فهو يتحكم بحركة منحني الدالة.

اختبار الحد الرئيس للسلوك الطرفي لدالة كثيرة الحدود

لأي دالة كثيرة الحدود $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ ، توجد النهايتان $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ عبر الدرجة n لكثيرة الحدود ومعاملها الرئيس a_n .



مثال 2 تحديد سلوك طرفي دالة كثيرة حدود

صف السلوك الطرفي لكل من كثيرات الحدود باستعمال المعامل الرئيس والدرجة.

A. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 11x - 12$

B. $g(x) = 2x^4 + 2x^3 + 22x^2 - 18x + 35$

الحل

A. المعامل الرئيس للدالة كثيرة الحدود f هو 1 والدرجة هي 3، إذن:

سلوك طرفي الدالة f سيكون مماثلًا لسلوك طرفي الدالة $g(x) = x^3$ ، وبالتالي:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

B. المعامل الرئيس للدالة كثيرة الحدود g هو 2 والدرجة هي 4، إذن:

سلوك طرفي الدالة g سيكون مماثلًا لسلوك طرفي الدالة $h(x) = 2x^4$ ، وبالتالي:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty$$

حاول أن تحل التمرين 8

تمثيل الدوال كثيرات الحدود بيانيًا

لتمثيل الدوال كثيرات الحدود بيانيًا، يمكننا تحديد الخصائص الأساسية لمنحنى دالة كثيرة الحدود باستعمال جدول قيم الدالة، وتحديد السلوك الطرفي للدالة. يمكننا بالتالي رسم هذا المنحنى.

x	$f(x)$
-3	-11.5
-2	6
-1	4.5
0	2
1	4.5
2	6
3	-11.5

متزايدة
متناقصة
متزايدة
متناقصة

لو أخذنا مثلًا $f(x) = -0.5x^4 + 3x^2 + 2$

فإن الجدول المجاور هو جدول القيم لهذه الدالة.

من خلال هذا الجدول يمكن أن نحدد الحالة التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة، والمواقع التقريبية للنقاط التي تمثل القيم القصوى للدالة.

النقاط التي تتغير عندها قيم الدالة من متزايدة إلى متناقصة أو بالعكس، تسمى نقاط تحول. هذه الدالة لديها نقاط تحول تقريبية عندما تكون قيمة x بين -2 و -1، وبين 0 و 1، وبين 2 و 3

بالإضافة إلى ذلك، فإن المعامل الرئيس هو -0.5 والدرجة هي 4 وبذلك فإن طرفي المنحنى يتجهان نحو $-\infty$

يمكننا أن نرسم منحنى الدالة $f(x)$ كما يلي:

الدالة زوجية وهي متناظرة حول المحور y .

وبما أن لديها قيمة صغرى محلية بين -1 و 1،

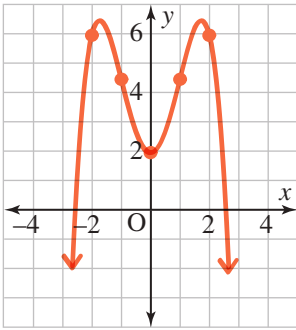
إذن للدالة قيمة صغرى محلية عند النقطة (0, 2) تقريبًا،

وقيمتان عظميان محليتان عند نقطتين، واحدة عند قيمة

للمتغير x تقع بين -2 و -1 بالقرب من النقطة (-2, 6)،

والأخرى عند قيمة للمتغير x تقع بين 1 و 2 بالقرب من

النقطة (2, 6).



مثال 3 التمثيل البياني للدوال كثيرات الحدود من خصائصها

أوجد التمثيل البياني للدالة كثيرة الحدود f من خلال الوصف التالي:

- الدالة $f(x)$ ذات قيم موجبة في الفترة $[-4, -\infty)$ وفي $[-1, 4]$.
- الدالة $f(x)$ ذات قيم سالبة في الفترة $[-4, -1]$ وفي $[4, \infty)$.
- الدالة $f(x)$ متناقصة في الفترة $[-\infty, -2.67]$ وفي $[2, \infty)$.
- الدالة $f(x)$ متزايدة في الفترة $[-2.67, 2]$.

(تابع)

أسئلة للتفكير

س: ما الذي يمكن تبينه عند النظر إلى الدالة كثيرة

الحدود f قبل تمثيلها بيانيًا؟

نموذج إجابة:

المعامل الرئيس سالب ودرجة الدالة زوجية. إذن تتناقص الدالة عندما تقترب قيم x من سالب لا نهاية وموجب ما لا نهاية.

س: كيف يساعد جدول القيم في رسم منحنى الدالة

كثيرة الحدود؟ وما هي النقاط المهمة؟

نموذج إجابة:

يساعد الجدول على تبيان سلوك الدالة من خلال قيم الدالة ما بين الطرفين، بالإضافة إلى تبيان النقاط المهمة كالنقاط التي تكون للدالة قيم قصوى محلية.

أسئلة للتفكير

س: كيف يمكن أن تبين صفر الدالة من خلال الوصف

البياني؟

نموذج إجابة:

عند الانتقال من القيم الموجبة إلى السالبة أو بالعكس، وذلك عند الفترات المتصلة.

س: كيف يمكن أن يعطي وصف الدالة معلومات عن

درجتها ومعاملها الرئيس؟

نموذج إجابة:

يتحدد السلوك الطرفي للدالة مع السلوك الطرفي لحددها الرئيس، الوصف إذن يبين ما يمتاز به الحد الرئيس. في المثال 3، نستطيع أن نتبين أن درجة الدالة مفردة ومعاملها الرئيس موجب.

س: هل من الضروري أن يشتمل الوصف البياني على

تزايد وتناقص الدالة؟

نموذج إجابة:

نعم، لأنه إذا لم تحدد فترات التزايد والتناقص للدالة، لن يكون ممكناً تحديد عدد النقاط التي تمثل قيمًا قصوى محلية للدالة.

للطلاب الذين يواجهون صعوبات

ربما يجد الطلاب بعض الصعوبة في تفسير الوصف البياني، وكذلك الأمر بالنسبة لرمز الفترة. استعمل الوصف التالي لتحصل على نظرة أدق لشكل منحنى الدالة:

استعمل الوصف البياني التالي لرسم منحنى الدالة كثيرة الحدود f .

$f(x)$ موجبة على الفترات $]-\infty, -3[$ و $]5, \infty[$

$f(x)$ سالبة على الفترة $] -3, 5[$

$f(x)$ متزايدة على الفترة $[0, \infty[$

$f(x)$ متناقصة على الفترة $] -\infty, 0[$

س: ما هي خطتك لتنظيم أفكارك تبعا للوصف البياني؟

نموذج إجابة:

أعد الوصف مع شرح الكلمات المفتاحية.

س: كيف يمكنك استعمال الوصف على الفترات

لتحديد النقاط المفتاحية للتمثيل البياني؟

نموذج إجابة:

يساعد وصف الفترات على تحديد النقاط حيث توجد قيم قصوى محلية للدالة.

خطأ شائع:

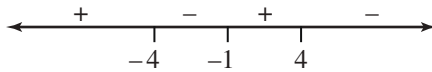
السلوك الموجب أو السالب للدالة يعتبر فقط عما إذا كان التمثيل البياني للدالة يقع فوق المحور x أو تحته، ولا يشير إطلاقا إلى كون الدالة متزايدة أو متناقصة.

الحل

إن تغير إشارة دالة كثيرة حدود يعني بالضرورة أن رسمها البياني قطع المحور x لأن هذه الدالة متصلة.

الخطوة 1 حدد أو قدر المقاطع من المحور x .

تغير قيم الدالة إشاراتها عند $x = -4$ ، $x = -1$ ، و $x = 4$ كما هو موضح على خط الأعداد التالي.



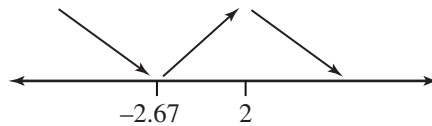
وبالتالي فإن الدالة $f(x)$ تتقاطع مع محور x عندما $x = 4$ ، $x = -1$ ، $x = -4$

الخطوة 2 حدد أو قدر القيم القصوى المحلية.

تغير الدالة اتجاهها من التناقص إلى التزايد عند $x = -2.67$ ثم من التزايد إلى التناقص عند $x = 2$.

لهذه الدالة قيمة صغرى محلية تقع عند $x = -2.67$

لهذه الدالة قيمة عظمى محلية تقع عند $x = 2$.



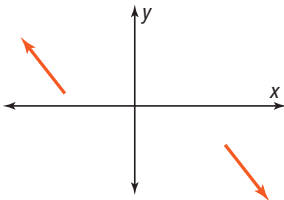
الخطوة 3 حدّد السلوك الطرفي

$f(x)$ متناقصة في الفترة $]-\infty, -2.67[$

مما يعني أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

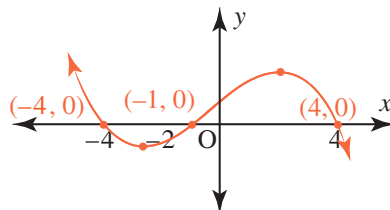
$f(x)$ متناقصة في الفترة $[2, \infty[$

مما يعني أن $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$



الخطوة 4 ممثّل بيانيًا.

عيّن نقاط التقاطع مع المحور x والقيم القصوى التقريبية ثم صل بينهما بخط منحنى متصل.



لا يبيّن التمثيل البياني للمحور y أي مقياس لأننا نعرف فقط السلوك الطرفي العام للدالة، ولا نعرف لها قيمًا محددة.

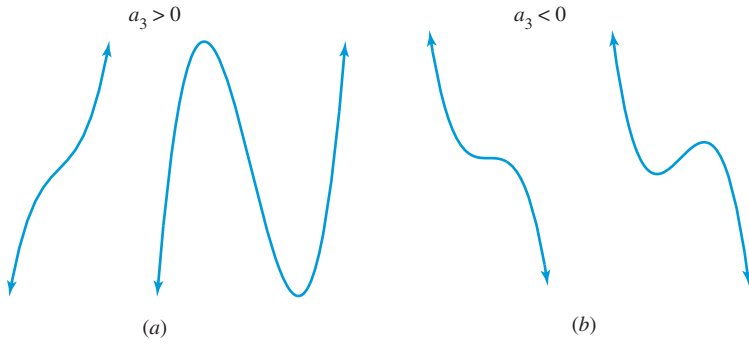
حاول أن تحل التمرين 11

أصفار الدوال كثيرات الحدود

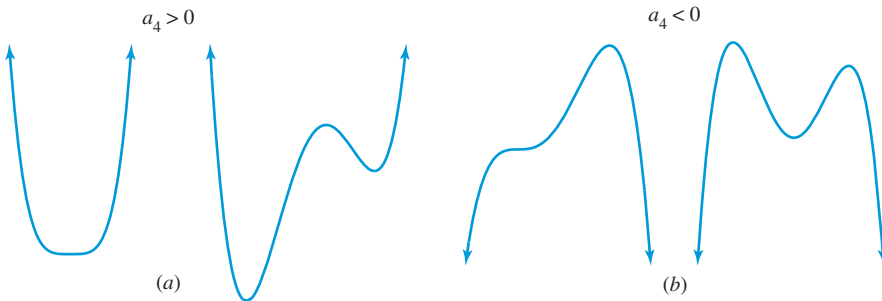
يمكننا أن نلاحظ أن منحنيات الدوال كثيرات الحدود هي منحنيات متصلة لا انقطاع بها أو فجوات. ليس هذا فحسب، بل إن الخطوط التي تتكون منها تنساب بسلاسة من غير زوايا أو رؤوس حادة.

في الشكل 3.2.2 والشكل 3.2.3 تمثيلات بيانية للدوال التكعيبية والدوال من الدرجة الرابعة. تخيل مستقيمًا أفقيًا يلعب دور المحور x ، يخترق المنحنيات في الشكلين 3.2.2 و 3.2.3، يمكننا من خلال هذا التمثيل أن نتبين أن العدد الأقصى لأصفار الدوال التكعيبية هو ثلاثة، وأن العدد الأقصى لأصفار الدوال من الدرجة الرابعة هو أربعة.

كذلك فإن التركيز على أعلى وأدنى نقطة في التمثيلات البيانية يجعلنا نتبين أن العدد الأقصى للقيم القصوى المحلية للدوال التكعيبية هو اثنان، وأن العدد الأقصى للقيم القصوى المحلية للدالة من الدرجة الرابعة هو ثلاثة.



الشكل 3.2.2 تمثيلات بيانية لأربع دوال تكعيبية: (a) اثنان لهما معامل رئيس موجب و (b) اثنان لهما معامل رئيس سالب.



الشكل 3.2.3 تمثيلات بيانية لأربع دوال من الدرجة الرابعة: (a) اثنان لهما معامل رئيس موجب و (b) اثنان لهما معامل رئيس سالب.

القيم القصوى المحلية وأصفار الدوال كثيرات الحدود

لدالة كثيرة الحدود من الدرجة n على الأكثر $n - 1$ قيمة قصوى محلية وعلى الأكثر n صفرًا.

إذن، إيجاد أصفار الدالة f يعني إيجاد الإحداثي x لنقاط التقاطع مع المحور x لهذه الدالة $y = f(x)$ ، أو البحث عن حلول المعادلة $f(x) = 0$ ، يبين المثال 4 كيف يؤدي تحليل الدوال كثيرات الحدود إلى ذلك، وكيفية الاستفادة منها في رسم الدالة بيانيًا.

أسئلة للتفكير

س: كيف تفيد خاصية الضرب الصفري عند تمثيل دالة كثيرة الحدود بيانيًا؟

نموذج إجابة:

تساعد خاصية الضرب الصفري في تحديد نقاط على المنحنى، وكذلك تساعد في تحديد النقاط الطرفية للفترات.

س: كيف ترتبط المصطلحات التالية: أصفار الدالة،

المقطع x ، مع الجذور أو الحلول للمعادلة $f(x) = 0$ ؟

نموذج إجابة:

أصفار الدالة هي قيم المقطع x ، وهي الجذور أو الحلول للمعادلة $f(x) = 0$.

مثال 4 إيجاد أصفار دالة كثيرة الحدود ورسمها بيانيًا

لتكن الدالة $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$.

A. أوجد أصفار الدالة $f(x)$.

B. ارسم المنحنى البياني للدالة $f(x)$ باستعمال أصفارها.

الحل

A. نحل المعادلة $f(x) = 0$ باستعمال التحليل:

$$x^3 - x^2 - 6x = 0$$

$$x(x^2 - x - 6) = 0$$

$$x(x - 3)(x + 2) = 0$$

$$x - 3 = 0 \text{ أو } x + 2 = 0 \text{ أو } x = 0$$

$$x = 3, \quad x = -2, \quad x = 0$$

أخرج العامل المشترك x

حلل الدالة التربيعية

خاصية الضرب الصفري

إذن، أصفار الدالة هي $-2, 0, 3$

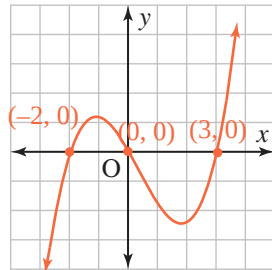
B. يمكن كتابة $f(x)$ في الصورة $f(x) = x(x - 3)(x + 2)$.

تقسّم الأصفار خط الأعداد الحقيقية إلى أربع فترات.

لملاحظة سلوك الدالة في كل فترة، انظر إلى إشارة كل عامل في كل فترة، وإشارة ضرب العوامل.

x	$-\infty$	-2	0	3	∞
x	-	-	+	+	+
$x - 3$	-	-	-	+	+
$x + 2$	-	+	+	+	+
$f(x)$	-	+	-	+	+

مثل بيانيًا. ارسم منحنى متصلًا يمر في كل صفر على المحور x ، وهو أسفل المحور x عندما تكون إشارة الدالة سالبة، وأعلى المحور x عندما تكون إشارة الدالة موجبة.



حاول أن تحل التمرين 17

نلاحظ في المثال السابق أنه يمكن تحليل الدالة f إلى عوامل، كل منها في الصورة $(x - k)$ ينتج عنه صفر للدالة هو $x = k$ وتكون حينها النقطة $(k, 0)$ نقطة تقاطع مع المحور x للدالة $y = f(x)$.

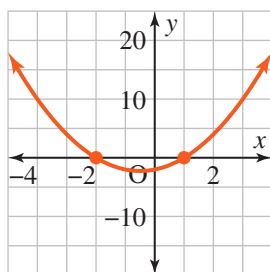
عندما يتكرر العامل كما في $f(x) = (x - 2)^3(x + 1)^2$ نقول إن الدالة كثيرة الحدود لها صفر متكرر. الدالة $f(x)$ هنا لها صفران متكرران. بما أن العامل $(x - 2)$ يتكرر ثلاث مرات، فإن الصفر $x = 2$ هو صفر بتعددية 3 كذلك فإن الصفر الآخر $x = -1$ هو صفر بتعددية 2 إذن، **تعددية صفر الدالة** كثيرة الحدود هي عدد المرات التي يظهر فيها العامل المتعلق به في الصيغة التحليلية للدالة.

يوضح التعريف التالي هذا المفهوم بشكل عام.

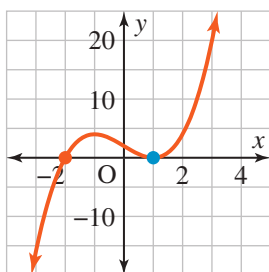
تعددية أصفار الدوال كثيرات الحدود

إذا كان $(x - c)^m$ أحد عوامل الدالة الكثيرة الحدود f دون أن يكون $(x - c)^{m+1}$ كذلك، فإن الصفر $x = c$ للدالة هو صفر له التعددية m

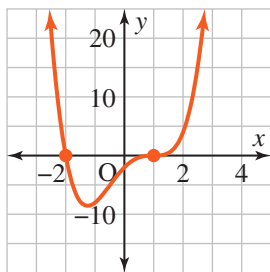
لاحظ سلوك كل تمثيل بياني عند اقترابه من المحور x وعلاقته مع تعددية صفر الدالة.



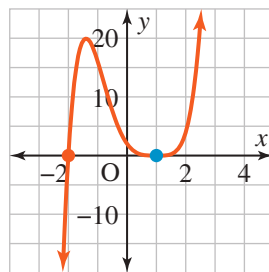
$$f(x) = (x - 1)(x + 2)$$



$$f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$$



$$f(x) = (x - 1)^3(x + 2)$$



$$f(x) = (x - 1)^4(x + 2)$$

بالقرب من صفر ما، يبدو التمثيل البياني كدالة كثيرة حدود درجاتها تساوي التعددية ذلك الصفر. أي أنه عندما تكون تعددية صفر عددًا فرديًا، تقطع الدالة المحور x عند ذلك الصفر. وعندما تكون تعددية صفر عددًا زوجيًا، تمس الدالة المحور x عند ذلك الصفر ويكون للتمثيل البياني قيمة قصوى عنده.

أسئلة للتفكير

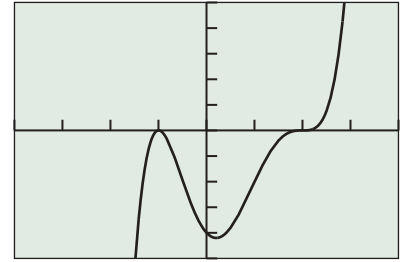
س: ماذا تلاحظ حول العلاقة بين المنحنى والدالة التي يمثلها؟
نموذج إجابة:

عدد العوامل ذات التعددية الفردية هو نفس عدد المرات التي يقطع فيها المنحنى المحور x وعدد العوامل ذات التعددية الزوجية هو نفس عدد المرات التي يمس فيها المنحنى المحور x .

س: كيف يرتبط المصطلح "تعددية" بعملية الضرب؟
نموذج إجابة:

تعددية الصفر هي عدد المرات التي يجب أن يضرب فيها العامل - المشتمل على هذا الصفر - في نفسه.

س: ماذا تعرف عن إشارة الدالة عند النقاط على جوار الأصفار ذي التعددية الزوجية؟
نموذج إجابة:
الإشارة هي نفسها.



في $[-10, 10]$ في $[-4, 4]$

الشكل 3.2.4 الرسم البياني للدالة

المحور x . $f(x) = (x+1)^2(x-2)^3$ ، موضحةً مقاطع

أي صفر بتعددية $m \geq 2$ هو **صفر متكرر**. لاحظ في الشكل 3.2.4 أن المنحنى يمس المحور x عند النقطة $(-1, 0)$ لأن تعددية صفر الدالة عندها عدد زوجي، ولكنه يقطع عند النقطة $(2, 0)$ لأن تعددية صفر الدالة عندها عدد فردي. يمكننا تعميم ذلك كما يلي.

الأصفار بتعددية فردية أو زوجية

إذا كان c صفرًا لدالة كثيرة الحدود بتعددية فردية، فإن منحنى الدالة يقطع المحور x عند النقطة $(c, 0)$ وتغير الدالة إشارتها عند $x = c$.

أما إذا كان c صفرًا لدالة كثيرة الحدود بتعددية زوجية، فإن منحنى الدالة يمس المحور x عند النقطة $(c, 0)$ من غير أن يقطعه، ولا تغير الدالة إشارتها عند $x = c$.

لم يكن أي من الأصفار في المثال 4 متكررًا، ما معناه أن تعددية كل منها تساوي 1، الذي هو عدد فردي، ولذلك فقد قطع منحنى الدالة المحور x عند كل صفر مغيرًا إشارة الدالة.

معرفة متى يقطع منحنى الدالة المحور x ومتى لا يقطعه مهمة في تمثيل الدوال بيانيًا.

مثال 5 الرسم البياني لدالة كثيرة الحدود في الصيغة التحليلية

بتن الدرجة وحدد الأصفار للدالة كثيرة الحدود $f(x) = (x+2)^3(x-1)^2$
حدد تعددية كل صفر مبيّنًا ما إذا كان منحنى الدالة يقطع المحور x أم يمسّه عند صفر الدالة. ارسم الدالة بيانيًا.

الحل

$(x+2)^3$ و $(x-1)^2$ هما كثيرتا حدود؛ درجة الأولى 3 ودرجة الثانية 2، إذن درجة ضربهما تساوي $3 + 2 = 5$

إذن الدالة f هي كثيرة حدود من الدرجة الخامسة.

ابدأ بإيجاد أصفار الدالة f عن طريق حل المعادلة $f(x) = 0$

$$(x+2)^3(x-1)^2 = 0$$

$$x+2=0 \quad \text{أو} \quad x-1=0$$

$$x=-2 \quad \text{أو} \quad x=1$$

إذن أصفار الدالة f هي -2 و 1

يقطع منحنى الدالة المحور x عند $x = -2$ لأن تعدديته 3 وهو عدد فردي.

أما $x = 1$ فتعدديته 2 وهو عدد زوجي. لذا، فإن منحنى الدالة يمس المحور x عند هذه النقطة.

(تابع)

سؤال للتفكير

س: نلاحظ في المثال 5 أن مجموع تعددية الأصفار يساوي درجة الدالة. هل يصح هذا دائمًا في كل دالة كثيرة الحدود؟
نموذج إجابة:
كلا لا يصح، مثلًا $g(x) = (x+1)^2(x^2+1)$ لديها صفر واحد هو -1 ، بتعددية 2، أما درجة الدالة فهي 4

عادات التفكير

س: هل تتغير دائمًا قيم الدالة من موجبة إلى سالبة أو بالعكس على جانبي الصفر؟
نموذج إجابة:
لا، لأن الصفر يمكن أن يكون ذا تعددية زوجية، وتكون الدالة على جانبيه موجبة أو سالبة.

تقسم الأصفار خط الأعداد الحقيقية إلى ثلاث فترات. لملاحظة سلوك الدالة في كل فترة، انظر إلى إشارة كل عامل في كل فترة، وإشارة ضرب العوامل.

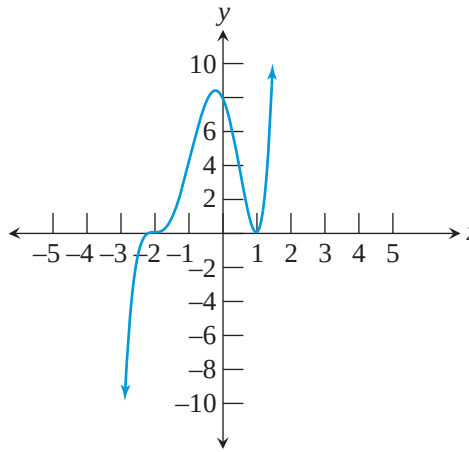
x	$-\infty$	-2	1	∞
$(x + 2)^3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x - 1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$+$	$+$

لاحظ أن قيم الدالة هي قيم موجبة إذا كانت $x > 1$ وإذا كان $-2 < x < 1$ ، وهي سالبة إذا كان $x < -2$.

أوجد المقطع y بتعويض 0 عن x .

$$f(0) = (0 + 2)^3 = 8$$

يوضح الشكل أدناه الرسم البياني للدالة f .



حاول أن تحل التمرين 20

متابعة

دع الطلاب يناقشون العدد الممكن من الأصفار الحقيقية لدالة كثيرة الحدود درجتها 5؟
نموذج إجابة:
1, 2, 3, 4, 5

ملاحظات على التمارين

التمارين 7-9، تركز على السلوك الطرفي للدالة كثيرة الحدود.

التمارين 10-12، تركز على التمثيل البياني للدالة كثيرة الحدود دون استعمال الحاسبة في عملية التمثيل البياني.

التمارين 13-32، تركز على أصفار الدالة كثيرة الحدود.

التمارين 34-37، تدرب الطالب على أنماط من الاختبارات.

التقييم المستمر

التقييم الذاتي:
التمارين 4, 7, 10, 13, 24

مراجعة سريعة 3.2

في التمارين 4-1، حلّ كثرات الحدود إلى عواملها الخطيّة.

1. $x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$
2. $6x^2 - 54 = 6(x-3)(x+3)$
3. $4x^2 + 8x - 60 = 4(x-3)(x+5)$
4. $15x^3 - 22x^2 + 8x = x(3x-2)(5x-4)$

في التمارين 8-5، حل المعادلة ذهنيًا.

5. $x(x-1) = 0$ 0, 1
6. $x(x+2)(x-5) = 0$ 0, -2, 5
7. $(x+6)^3(x+3)(x-1.5) = 0$ -6, -3, 1.5
8. $(x+6)^2(x+4)^4(x-5)^3 = 0$ -6, -4, 5

الدرس 3.2 التمارين

في التمارين 6-1، صف التحويل الذي يحوّل التمثيل البياني للدالة ذات الحد الواحد $f(x) = a_n x^n$ إلى التمثيل البياني للدالة كثيرة الحدود المعطاة. ارسم منحنى الدالة بيانيًا ثم تحقق من إجابتك باستعمال حاسبة التمثيل البياني. أوجد موقع التقاطع مع المحور y للتأكد من التمثيل البياني المحوّل.

1. $g(x) = 2(x-3)^3$
2. $g(x) = -(x+5)^3$
3. $g(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^3 + 2$
4. $g(x) = \frac{2}{3}(x-1)^3 + 1$
5. $g(x) = -2(x+2)^4 - 3$
6. $g(x) = 3(x-1)^4 - 2$

في التمارين 9-7، صف السلوك الطرفي للدالة كثيرة الحدود

مستعملًا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

7. $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 3$
8. $f(x) = -x^3 + 7x^2 - 4x + 3$
9. $f(x) = -7x^2 - x^3 + 3x - 4$

10. أوجد التمثيل البياني للدالة كثيرة الحدود f من خلال الوصف التالي:

- $f(x)$ ذات قيم موجبة في الفترة $[-1, -2]$ والفترة $[2, 1]$.
- $f(x)$ ذات قيم سالبة في الفترة $[-2, -\infty]$ والفترة $[1, -1]$ وفي $[2, \infty]$.
- $f(x)$ متناقصة في الفترة $[0, -1.5]$ وفي $[1.5, \infty]$.
- $f(x)$ متزايدة في الفترة $[-1.5, -\infty]$ والفترة $[0, 1.5]$.

11. أوجد التمثيل البياني للدالة كثيرة الحدود f من خلال الوصف التالي:

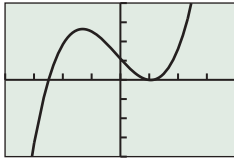
- $f(x)$ ذات قيم موجبة في الفترات $[-3, -\infty]$ و $[0, -2]$.
- $f(x)$ ذات قيم سالبة في الفترات $[-2, -3]$ و $[2, 0]$.
- $f(x)$ متزايدة في كل من الفترتين $[-1, -2.67]$ و $[2.5, 1]$.
- $f(x)$ متناقصة في كل من الفترات $[-2.67, -\infty]$ و $[1, -1]$.

في التمرينين 19 و 20، حدّد درجة وأصفار الدالة الكثيرة الحدود. أوجد تعددية كل صفر وحدّد ما إذا كان التمثيل البياني يقطع المحور x أم يمسه عند صفر الدالة "المقطع x "، ثم ارسم الدالة بيانيًا يدويًا.

19. $f(x) = x(x-3)^2$

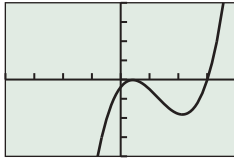
20. $f(x) = 7(x-3)^2(x+5)^4$

21. صل الدالة كثيرة الحدود بتمثيلها البياني. أوجد القيمة التقريبية لأصفار الدالة.



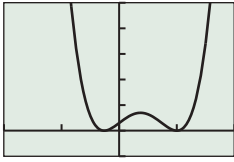
[-200, 200] في [-4, 4]

(i)



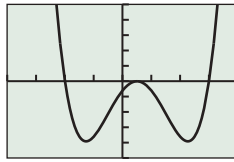
[-200, 200] في [-4, 4]

(ii)



[-10, 50] في [-2, 2]

(iii)



[-50, 50] في [-4, 4]

(iv)

- a. $f(x) = 20x^3 + 8x^2 - 83x + 55$
b. $f(x) = 35x^3 - 134x^2 + 93x - 18$
c. $f(x) = 44x^4 - 65x^3 + x^2 + 17x + 3$
d. $f(x) = 4x^4 - 8x^3 - 19x^2 + 23x - 6$

في التمرينين 22 و 23، أوجد أصفار الدالة جبريًا أو بيانيًا.

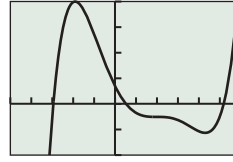
22. $f(x) = x^3 - 36x$

23. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 24x + 96$

في التمرينين 24 و 25، أوجد جبريًا دالة تكعيبية أصفارها هي القيم المعطاة واكتبها بالصورة القياسية. ادمع إجابتك بتمثيلها بيانيًا.

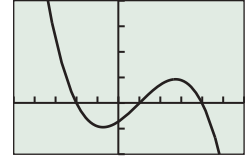
24. 3, -4, 6

12. صل الدالة الكثيرة الحدود بتمثيلها البياني. اشرح خيارك. لا تستخدم حاسبة التمثيل البياني.



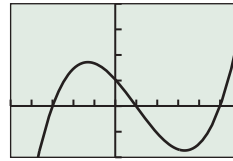
[-200, 400] في [-5, 6]

(i)



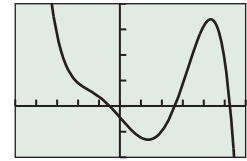
[-200, 400] في [-5, 6]

(ii)



[-200, 400] في [-5, 6]

(iii)



[-200, 400] في [-5, 6]

(iv)

- a. $f(x) = 7x^3 - 21x^2 - 91x + 104$
b. $f(x) = -9x^3 + 27x^2 + 54x - 73$
c. $f(x) = x^5 - 8x^4 + 9x^3 + 58x^2 - 164x + 69$
d. $f(x) = -x^5 + 3x^4 + 16x^3 - 2x^2 - 95x - 44$

في التمارين 13-18، أوجد أصفار الدالة جبريًا، ثم ارسم التمثيل البياني للدالة باستعمال أصفارها.

13. $f(x) = x^2 + 2x - 8$

14. $f(x) = 9x^2 - 3x - 2$

15. $f(x) = 3x^2 + 4x - 4$

16. $f(x) = (x+3)(x-1)(x-4)$

17. $f(x) = x^3 - 25x$

18. $f(x) = 3x^3 - 9x^2 - 12x$

a. أوجد تمثيلًا بيانيًا للدالة v يعكس قيم v التي تناسب مع هذه المسألة. اكتب أبعاد نافذة العرض.

b. حسب هذا النموذج، عند أي بعد من مركز الشريان تسيير خلية بسرعة 0.975 cm/s ؟

أسئلة اختبار معيارية

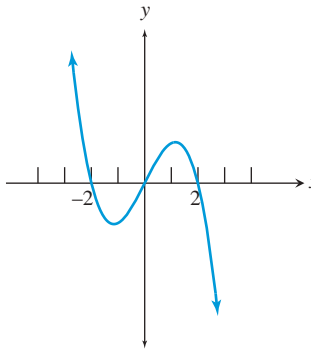
34. صواب أم خطأ يتقاطع التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^3 - x^2 - 2$ مع المحور x بين $x = 1$ و $x = 2$ بزر إجابتك.

35. صواب أم خطأ إذا أمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة $g(x) = (x + a)^2$ عبر إزاحة التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^2$ إلى اليمين، تكون a عندئذ موجبة. بزر إجابتك.

36. اختيار من متعدد (حل المسألة دون استخدام الحاسبة) حدد في ما يلي تعددية الصفر $x = 2$ في $f(x) = (x - 2)^2 (x + 2)^3 (x + 3)^7$

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 5
- E. 7

37. اختيار من متعدد (حل المسألة باستخدام الحاسبة) أي الدوال التالية قد يكون لها التمثيل البياني المعطى؟



- A. $f(x) = -x(x+2)(2-x)$
- B. $f(x) = -x(x+2)(x-2)$
- C. $f(x) = -x^2(x+2)(x-2)$
- D. $f(x) = -x(x+2)^2(x-2)$
- E. $f(x) = -x(x+2)(x-2)^2$

25. $1, 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}$

في التمرينين 26 و 27، اكتب دالة كثيرة الحدود تحقق الشروط المطلوبة.

26. الدرجة 2، -3 هو الصفر الحقيقي الوحيد.

27. الدرجة 4، الأصفار: -2 (بتعددية 2)، 4 (بتعددية 2).

في التمارين 28-31، أوجد الدالة كثيرة الحدود ذات المعامل الرئيس 2 والتي لها الدرجة والأصفار المعطاة.

28. الدرجة 3 والأصفار، 4، 1 و -2

29. الدرجة 3 والأصفار، -5، 3 و -1

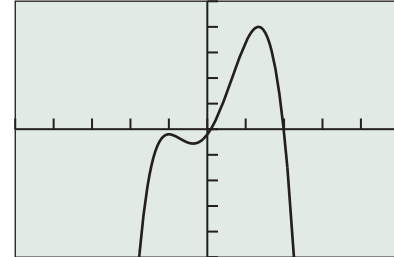
30. الدرجة 3 والأصفار $\frac{3}{2}$ ، $\frac{1}{2}$ و 2

31. الدرجة 4 والأصفار $\frac{5}{2}$ ، 0، -1، و -3

32. حدد ما إذا كان للدالة

$$f(x) = x^5 - 10x^4 - 3x^3 + 28x^2 + 20x - 2$$

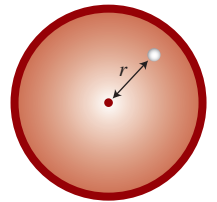
صفر خارج نافذة العرض. بزر إجابتك (انظر إلى التمثيل البياني).



$[-5, 5]$ في $[-50, 50]$



33. الدورة الدموية تبين أبحاث أجريت في مركز لأبحاث الصحة الوطنية أن السرعة التي تتحرك فيها خلية الدم داخل الشريان تعتمد على المسافة بين الخلية وبين مركز الشريان. تنمذج الدالة $v = 1.19 - 1.87r^2$ سرعة الخلية (بالسنتمتر في الثانية) التي هي



على بعد r من مركز الشريان.

a. ارسم منحنى الدالي h المعرفة كالتالي

$$h(p) = S(p) - D(p)$$

b. أوجد المقطع x للدالة h ، ثم أعط تفسيرًا اقتصاديًا لقيمته.

42. **بحث بيولوجي** تنمذج عالمة أحياء، تعمل في الأبحاث الخاصة

بإنتاج الدواجن، تكاثر فصيلة من الديوك الرومية، بعد t يوم

من حين تركها للتكاثر، من خلال الدالة التالية:

$$p(t) = -0.00001t^3 + 0.002t^2 + 1.5t + 100$$

a. مثل بيانيًا الدالة $y = P(t)$ لقيم مناسبة من t .

b. أوجد القيمة القصوى لأعداد فصيلة الديوك وحدد متى

تحصل.

c. إذا افترضنا أن النموذج ظل يعبر بدقة عن عدد الديوك،

متى يمكن أن تنقرض هذه الفصيلة؟

d. **الكتابة للتعلم** اكتب سيناريو يشرح نمو أعداد فصيلة

الديوك هذه.

توسيع الأفكار

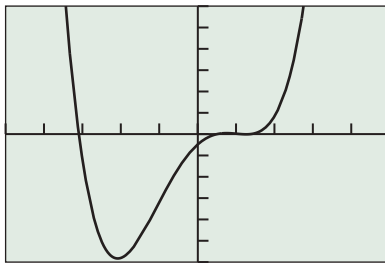
43. **الكتابة للتعلم** يبين الشكل أدناه التمثيل البياني للدالة

$$f(x) = x^4 + 0.1x^3 - 6.5x^2 + 7.9x - 2.4$$

اشرح كيف نستعمل حاسبة التمثيل البياني لنبرر العبارة

$$f(x) = x^4 + 0.1x^3 - 6.5x^2 + 7.9x - 2.4$$

$$\approx (x + 3.10)(x - 0.5)(x - 1.13)(x - 1.37)$$



[-5, 5] في [-30, 30]

44. **نشاط جماعي** اعمل ضمن مجموعات من ثلاثة. مثل بيانيًا

$$f(x) = x^4 + x^3 - 8x^2 - 2x + 7$$

a. استخدم طرق حاسبة التمثيل البياني لإيجاد القيمة التقريبية

للأصفار الحقيقية.

b. حدد قائمة لأربعة عوامل خطية يمكن أن يُطلق عليه ناتج

ضربها التحليل التقريبي للدالة $f(x)$.

c. ناقش الطرق البيانية والعديدية التي يمكن أن تستخدمها

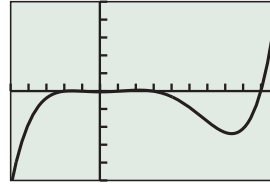
لإظهار أن تحليل الدالة في الجزء (b) منطقي.

استكشاف

38. **الكتابة للتعلم** صف لماذا يمكن اعتبار كل عرض للدالة

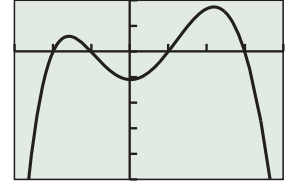
$$f(x) = x^5 - 1x^4 + 2x^3 + 64x^2 - 3x - 55$$

أنه غير كافي.



[-7500, 7500] في [-5, 10]

(a)



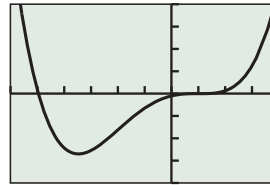
[-250, 100] في [-3, 4]

(b)

39. **الكتابة للتعلم** صف لماذا يمكن اعتبار كل عرض للدالة

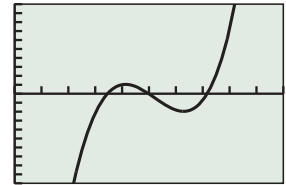
$$f(x) = 10x^4 + 19x^3 + 121x^2 + 143x - 51$$

على أنه غير كافي.



[-2000, 2000] في [-6, 4]

(a)



[-1, 1] في [0.5, 1.5]

(b)

40. **تحليل الأرباح** تحسب إحدى الشركات أرباحها بالصيغة

$$P = R - C$$

حيث R مقدار الإيرادات الإجمالية التي تحققها

الشركة، و C مقدار النفقات الإجمالية للشركة.

a. من خلال استعمال بيانات السنة الماضية، توصل محاسبو

الشركة إلى نمذجة صيغة احتساب الإيرادات

$$R(x) = 0.0125x^2 + 412x$$

النفقات الإجمالية $C(x) = 12\,225 + 0.00135x^3$ حيث

x هو عدد زبائن الشركة. أوجد عدد الزبائن الذي، بحسب

النماذج، يؤدي إلى أن تحقق الشركة ربحًا.

b. أوجد عدد الزبائن الذي، بحسب النماذج، يؤدي إلى أن يكون

الربح السنوي للشركة 60 000 QR.

41. **تحديد جداول الإنتاج** تقرر شركة لصنع مجففات الشعر أن

صيغة دالة العرض لأحد أنواع الأجهزة (أي الدالة التي تمثل

عدد الأجهزة المعروضة للبيع) هي $S(p) = 6 + 0.001p^3$

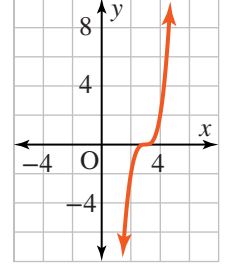
وأن صيغة دالة الطلب لتلك الأجهزة (أي الدالة التي تمثل عدد

الأجهزة المطلوبة للشراء) هي $D(p) = 90 - 0.02p^3$

حيث p هو السعر.

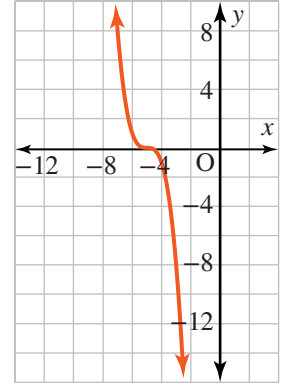
إجابات أسئلة التمارين

1. إزاحة أفقية للدالة $g(x) = 2x^3$ بمقدار 3 وحدات إلى اليمين.



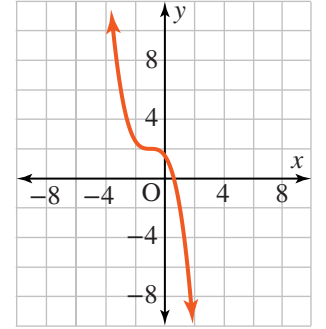
$$g(0) = -54$$

2. إزاحة أفقية للدالة $g(x) = -x^3$ بمقدار 5 وحدات إلى اليسار.



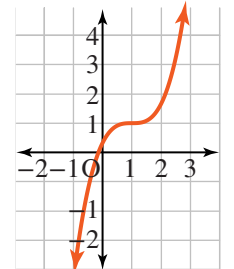
$$g(0) = -125$$

3. إزاحة أفقية للدالة $g(x) = \frac{-1}{2}x^3$ بمقدار وحدة واحدة إلى اليسار، ثم إزاحة رأسية بمقدار وحدتين إلى الأعلى.



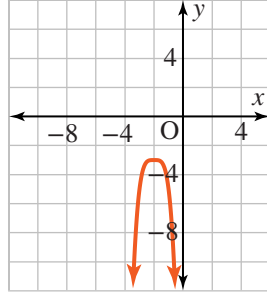
$$g(0) = 1.5$$

4. إزاحة أفقية للدالة $f(x) = \frac{2}{3}x^3$ بمقدار وحدة واحدة إلى اليمين، ثم إزاحة رأسية بمقدار وحدة واحدة إلى الأعلى.



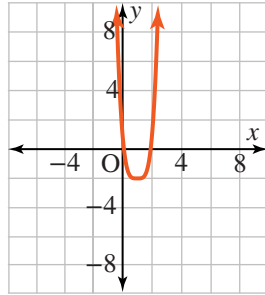
$$g(x) = \frac{2}{3}(x-1)^3 + 1$$

5. إزاحة أفقية للدالة $f(x) = -2x^4$ بمقدار وحدتين إلى اليسار، ثم إزاحة رأسية بمقدار 3 وحدات إلى الأسفل.



$$g(0) = -35$$

6. إزاحة أفقية للدالة $f(x) = 3x^4$ بمقدار وحدة واحدة إلى اليمين، ثم إزاحة رأسية بمقدار وحدتين إلى الأسفل.

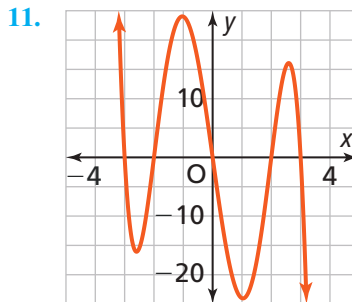
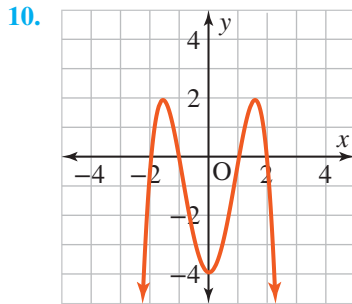


$$g(0) = 1$$

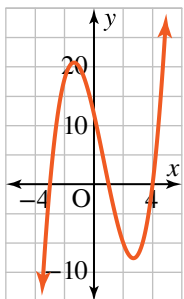
$$7. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$8. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

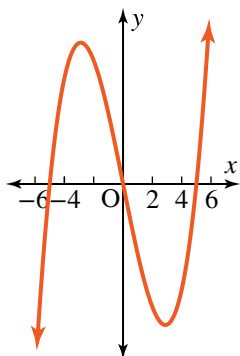
$$9. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$



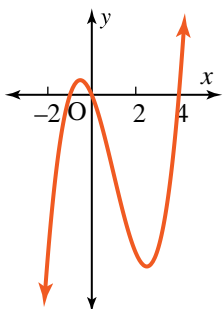
16. -3, 1, 4



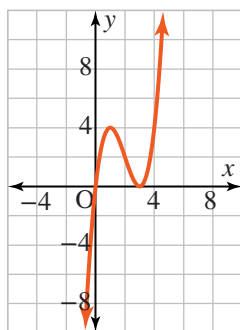
17. -5, 0, 5



18. -1, 0, 4



19. الدرجة: 3، الأصفار: 0 بتعددية 1، 3 بتعددية 2.
المنحنى يقطع المحور x عند $x = 0$ ، ويمس المحور x عند $x = 3$.



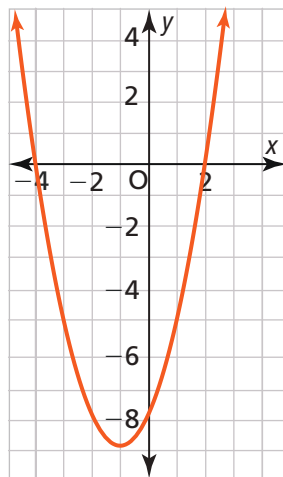
12. i. c

ii. b

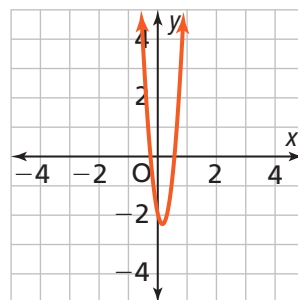
iii. a

iv. d

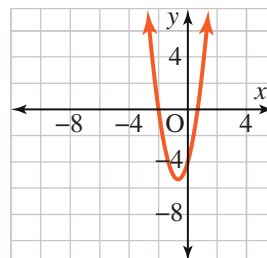
13. -4, 2



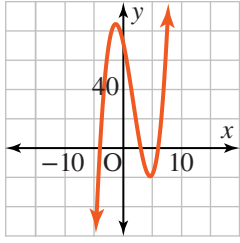
14. $-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$



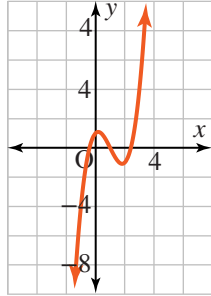
15. $-2, \frac{2}{3}$



24. $(x-3)(x+4)(x-6) = x^3 - 5x^2 - 18x + 72$



25. $x^3 - 3x^2 + x + 1$



26. $y = (x+3)^2$

27. $y = (x+2)^2(x-4)^2$

28. $2(x+2)(x-1)(x-4)$

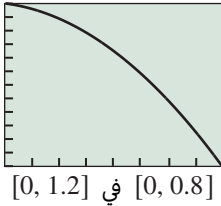
29. $2(x+1)(x-3)(x+5)$

30. $2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)$

31. $2x(x+3)(x+1)\left(x-\frac{5}{2}\right)$

32. يوجد، بسبب السلوك الطرفي للدالة.

33. a.



b. $0.975 = 1.19 - 1.87r^2$

$1.87r^2 = 0.215$

$r^2 = 0.1149$

$r = 0.3391 \text{ cm}$

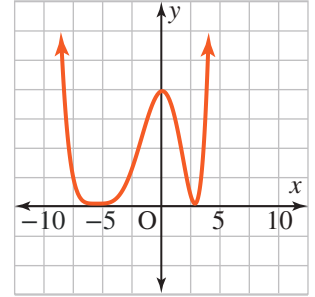
نأخذ الحل الموجب لأن المسافة لا يمكن أن تكون عددًا سالبًا.

34. صواب، لأن $f(1) < 0$ و $f(2) > 0$.

35. خطأ، عندما تكون موجبة تكون الإزاحة إلى اليسار وعندما تكون سالبة تكون الإزاحة إلى اليمين.

20. الدرجة: 6، الأصفار: 3 بتعددية 2، -5 بتعددية 4.

المنحنى يمس المحور x عند $x = 3$ و $x = -5$.



21. استعمل الحاسبة البيانية لرسم التمثيلات البيانية للدوال المعطاة

وقارنها مع التمثيلات البيانية المعطاة

a. i. 1.1, 1, -2.5

b. ii. $0.4, \frac{3}{7}, 3$

c. iii. $-\frac{3}{11}, -0.25, 1$

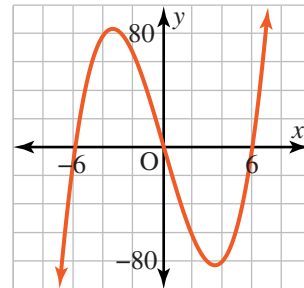
d. iv. -2, 0.5, 3

22. $f(x) = x^3 - 36x$

$= x(x^2 - 36)$

$= x(x-6)(x+6)$

أصفار الدالة هي -6, 0, 6

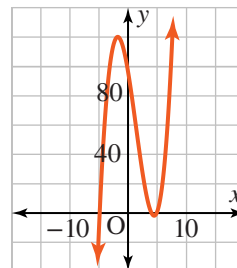


23. $x^3 - 4x^2 - 24x + 96$

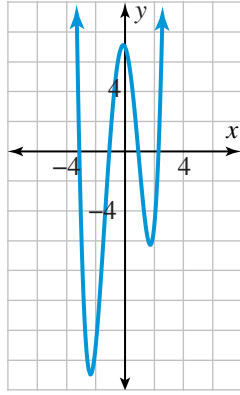
$= x^2(x-4) - 24(x-4)$

$= (x-4)(x-2\sqrt{6})(x+2\sqrt{6})$

أصفار الدالة هي $-2\sqrt{6}, 2\sqrt{6}, 4$



43. تحدد الأصفار بشكل تقريبي من خلال نقاط التقاطع مع المحور x ، ثم نكتب ضرب العوامل. وبما أن درجة الدالة هي 4، وعدد الأصفار هو 4، والمعامل الرئيس هو 1، إذن الدالة هي ضرب العوامل.



44. a.

باستعمال الحاسبة، الأصفار هي: -3.13, -1.07, 0.91, 2.29

b. $f(x) = (x + 3.13)(x + 1.07)(x - 0.91)(x - 2.29)$

c. مثل بيانات الدالة الأصلية والتوزيع التقريبي إلى عوامل في نوافذ متنوعة، ثم قارن التشابهات في ما بينها. جبريًا: احسب $f(c)$ و $g(c)$ لقيم متعددة من c .

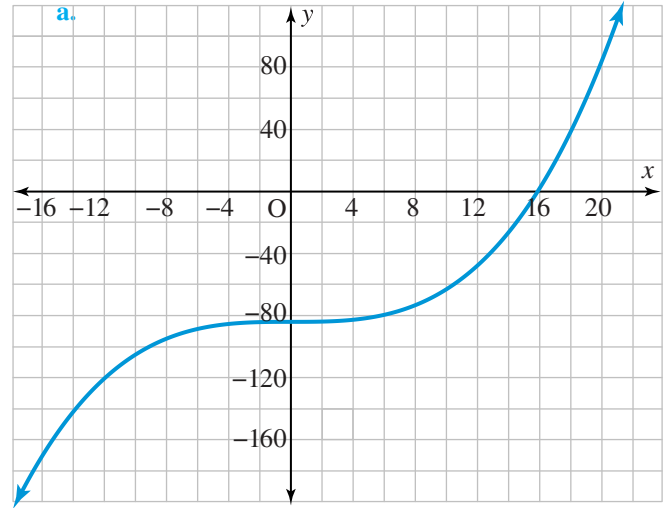
38. يبين الشكل (a) السلوك الطرفي وصفًا هو $x = 9$ ، لكنه يخفي الأصفار الأربعة الأخرى. يبين الشكل (b) الأصفار بالقرب من -2, -1, 1, 3، لكنه يخفي الصفر الخامس والسلوك الطرفي.

39. يبين الشكل (a) السلوك الطرفي وصفًا هو $x = -5$ ، لكنه يخفي الأصفار الثلاثة الأخرى. يبين الشكل (b) الصفر عند 1 والأصفار بالقرب من 0.83 و 1.22، لكنه يخفي الصفر الرابع والسلوك الطرفي.

40. a. بين 30 و 541 باستعمال الحاسبة البيانية.

b. 201 أو 429 باستعمال الحاسبة البيانية.

41.



b. المقطع $x = 15.9$ تقريبًا، إذن:

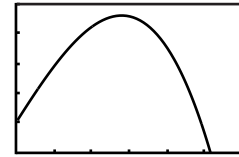
$$h(15.9) = 0$$

$$S(15.9) - D(15.9) = 0$$

$$S(15.9) = D(15.9)$$

إذن 15.9 هو السعر الذي يتساوى عنده العرض والطلب.

42. a.



[0, 500] في [0, 600]

b. يبين التمثيل البياني أنه للدالة P قيمة عظمى محلية مقدارها 460 عند $t = 300$ إذن، القيمة القصوى لأعداد الديوك هي 460، وتصل إلى هذا العدد بعد 300 يومًا.

c. بعد 523 يومًا تقريبًا باستعمال الحاسبة البيانية.

d. تبدأ عالمة الأحياء عملها عندما تكون أعداد الديوك 100، ومن ثم تتكاثر لتصل إلى القيمة القصوى وهي 460 ديكًا، بعدها تبدأ أعدادها بالتراجع لتتقارب بعد 523 يومًا.

نظريات على الدوال كثيرات الحدود Theorems on Polynomial Functions

3.3

نظرية الباقي

عندما يكون المقسوم عليه في صورة $d(x) = x - k$ ، حيث k عدد حقيقي، يصبح باقي قسمة كثيرة الحدود $f(x)$ على $d(x)$ عددًا حقيقيًا، وذلك لأن درجة $d(x) = x - k$ تساوي 1 نحصل على الملخص المبسط التالي لخوارزمية القسمة:

$$f(x) = (x - k) q(x) + r$$

باستخدام المعادلة أعلاه، يمكن أن نجد قيمة $f(x)$ عندما $x = k$:

$$f(k) = (k - k) q(k) + r = 0 \times q(k) + r = 0 + r = r$$

إذن، $f(k) = r$ ، وهو الباقي.

للمزيد من الإيضاح، نجري قسمة $f(x) = x^3 + 10x^2 + 29x + 24$ على $d(x) = x + 5$ باستخدام القسمة التركيبية.

اكتب صفر المقسوم عليه (-5) ومعاملات المقسوم ثم طبق طريقة القسمة التركيبية التي تعلمتها.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -5 & 1 & 10 & 29 & 24 & \\ & & -5 & -25 & -20 & \\ \hline & 1 & 5 & 4 & 4 & \end{array}$$

الناتج هو $x^2 + 5x + 4$ والباقي هو 4

$$f(x) = (x + 5)(x^2 + 5x + 4) + 4$$

كذلك إذا قمنا بتعويض $x = -5$ في الدالة $f(x)$ ، نحصل على

$$\begin{aligned} f(-5) &= (-5)^3 + 10(-5)^2 + 29(-5) + 24 \\ &= 4 \end{aligned}$$

إذن، يمثل الباقي 4 قيمة $f(x)$ عندما $x = -5$ ، يؤدي هذا الربط إلى استنتاج النظرية التالية والتي تسمى **نظرية الباقي**.

ما ستتعلمه

- نظرية الباقي
- نظرية العامل
- نظرية الأصفار النسبية

... ولماذا

تمثل أصفار الدوال كثيرات الحدود حلولًا للعديد من المسائل الواقعية التي تتمثل بنماذج من المعادلات ذات الدوال كثيرات الحدود.

معايير الدرس

11A.5.3

11A.5.4

المصطلحات

- نظرية الباقي remainder theorem
- نظرية العامل factor theorem
- نظرية الأصفار النسبية rational zeros theorem

الهدف

سيتمكن الطلاب من تطبيق نظرية الباقي ونظرية العامل وكذلك نظرية الأصفار النسبية.

دليل الدرس

1. نظرية الباقي
2. نظرية العامل
3. نظرية الأصفار النسبية

تحفيز

اسأل الطلاب عن خصائص الباقي إذا كان المقسوم عليه في صورة $x - k$.

نظرية الباقي

عند قسمة الدالة كثيرة الحدود $f(x)$ على $x - k$ ، فإن الباقي هو $r = f(k)$.

يبين المثال 1 طريقة استخدام نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة كثيرة حدود على دالة خطية دون إجراء القسمة.

مثال 1 استعمال نظرية الباقي

أوجد باقي قسمة $f(x) = 3x^2 + 7x - 20$ باستعمال نظرية الباقي على كل من:

- A. $x - 2$
- B. $x + 1$
- C. $x + 4$

الحل

A. باستخدام نظرية الباقي مع $k = 2$ ، نجد أن:

$$r = f(2) = 3(2)^2 + 7(2) - 20 = 12 + 14 - 20 = 6$$

إذن، باقي قسمة $f(x)$ على $x - 2$ يساوي 6

B. باستخدام نظرية الباقي مع $k = -1$ ، نجد أن:

$$r = f(-1) = 3(-1)^2 + 7(-1) - 20 = 3 - 7 - 20 = -24$$

إذن، باقي قسمة $f(x)$ على $x + 1$ يساوي -24

C. باستخدام نظرية الباقي مع $k = -4$ ، نجد أن:

$$r = f(-4) = 3(-4)^2 + 7(-4) - 20 = 48 - 28 - 20 = 0$$

إذن، باقي قسمة $f(x)$ على $x + 4$ يساوي 0

تحقق عددًا (باستخدام حاسبة التمثيل البياني)

يمكننا إيجاد الباقي لعدة مسائل قسمة في نفس الوقت وذلك باستخدام خاصية الجدول في حاسبة التمثيل البياني (الشكل 3.3.1).

حاول أن تحل التمرين 2

أسئلة للتفكير

س: اشرح كيف كتبت $f(x) = 3x^2 + 7x - 20$

في الصورة $f(x) = g(x)(x - 2) + 6$ ؟

نموذج إجابة:

بمعرفة الباقي، نعرف بعد القسمة أن $f(x)$ تساوي الناتج مضروبًا في المقسوم عليه زائدًا الباقي.

س: كيف توجد $f(2)$ عندما تكتب

$$f(x) = g(x)(x - 2) + 6$$

نموذج إجابة:

إذا كانت $x = 2$ فإن $x - 2 = 0$ ، وبما أن ناتج ضرب أي عدد في الصفر هو صفر، فهذا يدل على أن $f(2)$ هو الباقي عند قسمة $f(x)$ على $(x - 2)$.

خطأ شائع

قد يعتمد بعض الطلاب إلى تعويض 1 في مكان -1 في الفرع (B). نته الطلاب إلى أن نظرية الباقي تفيد أن الباقي هو $f(a)$ عندما يكون المقسوم عليه على شكل $x - a$ إذن $x + 1 = x - (-1)$ وبالتالي فالباقي هو $f(-1)$.

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

(مع المثال 1) قد يلجأ الطلاب إلى القسمة التركيبية لمعرفة باقي قسمة $f(x) = 3x^2 + 7x - 20$ على $x - 2$. لتأكيد معرفتهم بنظرية الباقي، أسألهم ما يلي

X	Y1	
-4	0	
-3	-14	
-2	-22	
-1	-24	
0	-20	
1	-10	
2	6	
$Y1 = 3X^2 + 7X - 20$		

الشكل 3.3.1 جدول متعلق بالدالة

$f(x) = 3x^2 + 7x - 20$ يوضح الباقي

عند قسمة $f(x)$ على $x - k$ ،

حيث $k = -4, -3, \dots, 1, 2$

س: كيف نستطيع معرفة باقي قسمة $f(x)$ على $x - 2$

من دون إجراء القسمة؟

نموذج إجابة:

نعوض 2 عن x ونحصل على

$$f(2) = 3(2)^2 + 7(2) - 20 = 6$$

وهذا هو الباقي.

يمكننا استخدام نظرية الباقي في تطبيقات أخرى كما يبين المثال 2

مثال 2 تطبيق نظرية الباقي

أوجد قيمة n إذا كان باقي قسمة $f(x) = -x^3 + nx^2 + 4nx - 6$ على $x + 3$ هو -48

الحل

$$f(-3) = -(-3)^3 + n(-3)^2 + 4n(-3) - 6$$

استعمل نظرية الباقي

$$-48 = -(-3)^3 + n(-3)^2 + 4n(-3) - 6$$

$$f(-3) = -48 \text{ عوّض}$$

$$27 + 9n - 12n - 6 = -48$$

احسب

$$-3n + 21 = -48$$

بسّط

$$-3n = -21 - 48$$

حل المعادلة

$$-3n = -69$$

$$n = \frac{-69}{-3} = 23$$

حاول أن تحل التمرين 10

أسئلة للتفكير

س: هل يمكن أن نحصل على باقي قسمة $f(x)$ على

$x + 3$ بدلالة n ؟

نموذج إجابة:

نعم، الباقي هو $f(-3) = -3n + 21$.

للطلاب سريع الإنجاز

س: ما هي قيمة k بحيث يكون -20 هو الباقي في

قسمة $f(x)$ على $x - k$.

نموذج إجابة:

$$f(k) = -20$$

$$3k^2 + 7k - 20 = -20$$

$$3k^2 + 7k = 0$$

$$k = 0 \text{ أو } k = \frac{-7}{3}$$

إذن، -20 هو باقي قسمة $f(x)$ على x أو على $x + \frac{7}{3}$.

نظرية العامل

يمكن استعمال نظرية الباقي لمعرفة ما إذا كان $x - k$ من عوامل $f(x)$. لاحظ مثلًا أن الباقي في

قسمة $f(x) = 3x^2 + 7x - 20$ على $x + 4$ هو بحسب نظرية الباقي:

$$f(-4) = 3(-4)^2 + 7(-4) - 20 = 0$$

نستنتج من ذلك أن الباقي في قسمة $f(x)$ على $x + 4$ هو 0 وبالتالي $(x + 4)$ هو عامل من

عوامل $f(x)$. فيما يلي سوف نقوم بإثبات **نظرية العامل** التالية:

نظرية العامل

يكون $x - k$ عاملاً للدالة كثيرة الحدود $f(x)$ إذا وفقط إذا كان $f(k) = 0$.

البرهان

إذا كان $x - k$ أحد عوامل $f(x)$ فإنه توجد دالة كثيرة الحدود $g(x)$ حيث

$$f(x) = (x - k)g(x) = (x - k)g(x) + 0$$

هذا يعني أن ناتج قسمة $f(x)$ على $(x - k)$ هو $g(x)$ والباقي هو 0

إذن، باستعمال نظرية الباقي $f(k) = 0$.

وبالعكس، إذا كان $f(k) = 0$ فإن باقي قسمة $f(x)$ على $(x - k)$ هو 0

إذن، $x - k$ هو أحد عوامل $f(x)$.

بتطبيق أفكار نظرية العامل، يمكننا تحليل $f(x) = 3x^2 + 7x - 20$ في المثال 1 فرع C إلى العوامل عن طريق قسمتها على العامل المعروف $x + 4$ بالقسمة المطوّلة أو التركيبية.

$$\begin{array}{r} 3x - 5 \\ x + 4 \overline{) 3x^2 + 7x - 20} \\ \underline{3x^2 + 12x} \\ -5x - 20 \\ \underline{-5x - 20} \\ 0 \end{array}$$

إذن، $f(x) = 3x^2 + 7x - 20 = (x + 4)(3x - 5)$. في هذه الحالة، ليس من الضروري استعمال القسمة المطوّلة أو تطبيق نظريات متقدمة بل يكفي استعمال الطرق التقليدية المعتمدة في التحليل إلى العوامل. تكون هذه الطرق المتقدمة مجدية فعلاً في الحالات التي تتطلب إيجاد عوامل كثيرات حدود من الدرجة 3 وما فوق وإيجاد أصفارها والمقاطع من محور x لها. بالفعل، يمكن ربط نظرية العامل بشكل وثيق بالروابط الأساسية للدوال كثيرات الحدود، على النحو التالي:

الروابط الأساسية للدوال كثيرات الحدود

لأي دالة كثيرة الحدود f ولأي عدد حقيقي k ، العبارات التالية متكافئة.

1. $f(k) = 0$
2. $x = k$ هو حل (أو جذر) للمعادلة $f(x) = 0$.
3. k هو صفر للدالة f .
4. k هو المقطع x للتمثيل البياني للدالة $y = f(x)$.
5. $x - k$ هو عامل للدالة $f(x)$.

ملاحظة تعليمية

ربما لم يفهم الطلاب بدقة معنى أن العبارات متكافئة. دعهم يتبينوا أن متكافئة تعني أن أي عبارة إذا صحت، سوف تكون العبارات الباقية صحيحة، وإذا كانت خاطئة، فإن العبارات الباقية سوف تكون خاطئة أيضاً.

أسئلة للتفكير

س: كيف يمكن مقارنة نظرية الباقي مع نظرية العامل؟ نموذج إجابة:

تفيد نظرية الباقي أن باقي قسمة $p(x)$ على $x - a$ هو $p(a)$ ، أما نظرية العامل، فهي تفيد أن $x - a$ هو عامل للدالة $f(x)$ فقط إذا كانت $p(a) = 0$. إذن، نظرية العامل هي الحالة الخاصة من نظرية الباقي حين يكون $p(a) = 0$.

س: كيف يمكن أن يساعد فهم نظرية العامل في تحديد ما إذا كان $(x - a)$ عاملاً للدالة كثيرة الحدود؟ نموذج إجابة:

إذا كان $p(a) = 0$ ، لن يكون هناك باقي في قسمة الدالة على $x - a$ ، وهذا يعني أن $x - a$ هو عامل للدالة. أما إذا كان $p(a) \neq 0$ ، فهذا يعني أنه يوجد باقي في قسمة الدالة على $x - a$ ، فهو إذن ليس عاملاً للدالة.

س: لماذا لا يكون $x - a$ عاملاً للدالة $f(x)$ إذا كان الباقي ليس صفراً؟

نموذج إجابة:

لأنه بكتابة $\frac{f(x)}{x-a}$ لا نحصل على دالة كثيرة الحدود.

مثال 3 تحديد ما إذا كان $x - a$ عاملاً للدالة $p(x)$

استعمل نظرية العامل لتحديد ما إذا كانت ثنائية الحدود المعطاة عاملاً للدالة $p(x)$. إذا كانت كذلك، اكتب كثيرة الحدود $p(x)$ بصيغة التحليل إلى العوامل.

A. $p(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 23x - 6$, $x - 6$

B. $p(x) = x^5 - 5x^3 + 9x^2 - x + 3$, $x + 3$

الحل

A. تكون ثنائية الحدود $x - 6$ عاملاً في $p(x)$ إذا كان 6 صفراً للدالة $p(x)$.

أوجد قيمة $p(x)$ إذا كان $x = 6$

$$p(6) = 6^4 - 8(6)^3 + 16(6)^2 - 23(6) - 6 = 0$$

(تابع)

عادات التفكير

س: هل $(x - 2)$ هو عامل للدالة

$$f(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 11x + 15$$

وإذا لم يكن كذلك، فما هو الباقي؟

نموذج إجابة:

لا، الباقي هو 1

س: استعمل نظرية الباقي ونظرية العامل لمعرفة ما إذا

كان ثنائي الحدود عاملاً للدالة $f(x)$ في كل حالة.

$$f(x) = x^3 - 10x^2 + 28x - 16, \quad x - 4$$

$$f(x) = 2x^4 + 9x^3 - 2x^2 + 6x - 40, \quad x + 5$$

نموذج إجابة:

$$f(4) = 0, \quad \text{إذن } x - 4 \text{ هي عامل للدالة } f(x).$$

$$f(-5) = 5 \neq 0, \quad \text{إذن } x + 5 \text{ ليس عاملاً للدالة } f(x).$$

بالاعتماد على نظرية العامل، يكون $x - 6$ أحد عوامل $p(x)$.

لإيجاد العامل الآخر اقسم $p(x)$ على $x - 6$ باستعمال القسمة التركيبية.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 6 & 1 & -8 & 16 & -23 & -6 \\ & & 6 & -12 & 24 & 6 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & 1 & 0 \end{array}$$

يكون العامل الآخر $x^3 - 2x^2 + 4x + 1$

إذن، يمكن كتابة $p(x)$ بصيغة التحليل إلى العوامل كالتالي:

$$p(x) = (x - 6)(x^3 - 2x^2 + 4x + 1)$$

B. أوجد قيمة $p(x)$ إذا كان $x = -3$

$$p(-3) = (-3)^5 - 5(-3)^3 + 9(-3)^2 - (-3) + 3 = -21$$

إذن، -3 ليست صفراً لكثيرة الحدود $p(x)$ ، وبالاعتماد على نظرية العامل،

فإن $x + 3$ ليس أحد عوامل $p(x)$.

حاول أن تحل التمرين 15

تمثل الكثير من الدوال مواقف من واقع الحياة. فيكون لأصفار هذه الدوال تفسيرات حياتية ذات أهمية، مثل عتبة الربحية أو كمية الإنتاج التي تسمح بتحقيق هدف معين، وغيرها. ويوضح المثال التالي نموذجاً عن أهمية معنى أصفار الدوال كثيرات الحدود.

مثال 4 تفسير أصفار كثيرات الحدود

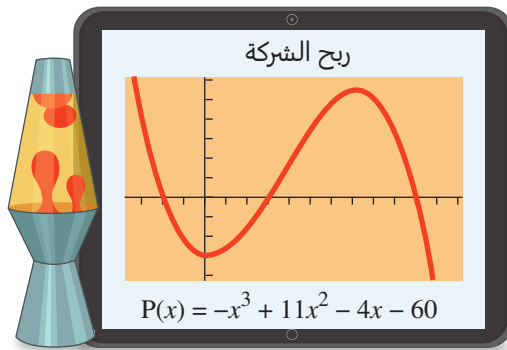
تقوم شركة للابتكارات بتصنيع وبيع المصابيح الكهربائية. أرباح الشركة P ،

بمئات الريالات (QR)، هي دالة لعدد المصابيح المباعة x ، بالآلاف.

من خلال البيانات السابقة، يعرف القِيمون على الشركة أن أرباحها تتم نمذجتها بالدالة

الموضحة في الصورة أدناه. استعمل أصفار الدالة لتحديد عدد المصابيح التي يتعين

على الشركة إنتاجها لتحقيق ربحاً.



(تابع)

أسئلة للتفكير

س: لماذا من المهم الانتباه لمجال الدالة قبل البدء

بالحل؟

نموذج إجابة:

لأن المثال واقعي، أي أن هناك قيماً يمكن أن تحقق

المعادلة من الناحية الرياضية ولكنها لا تحمل أي معنى

واقعي.

س: ما هي القيم التي تصلح أن تكون في مجال

الدالة P ، وما الذي تعنيه أصفار الدالة؟

نموذج إجابة:

بما أن x يمثل عدد المصابيح فإن القيم التي تصلح أن

تكون في مجال الدالة هي الأعداد الموجبة الصحيحة

فقط وذلك لأن المثال واقعي فإن قيماً حقيقية يمكن أن

تكون في مجال الدالة من ناحية رياضية، ولكنها لا معنى

لها في مثالنا هذا. أما أصفار الدالة فهي تعني أن أرباح

الشركة تكون صفراً إذا كان عدد المصابيح المباعة 3 أو

10، الصفر السالب -2 لا معنى له في المثال كما

ذكرنا سابقاً.

الحل

إنّ أرباح الشركة ممثلة بالجزء الذي يقع أعلى المحور x .
أوجد أصفار الدالة بتحديد أين يتقاطع التمثيل البياني مع المحور x .
بالاعتماد على التمثيل البياني، فإنّ أصفار الدالة تبدو -2 و 3 و 10
استعمل نظرية العامل للتأكد من ذلك.

أوجد قيمة $P(-2)$

$$P(-2) = -(-2)^3 + 11(-2)^2 - 4(-2) - 60 = 0$$

أوجد قيمة $P(3)$

$$P(3) = -3^3 + 11(3)^2 - 4(3) - 60 = 0$$

أوجد قيمة $P(10)$

$$P(10) = -10^3 + 11(10)^2 - 4(10) - 60 = 0$$

إذن، أصفار الدالة هي فعلاً -2 و 3 و 10
ستحقق الشركة أرباحاً عندما تكون $P(x)$ موجبة أي عندما $x < -2$ أو $3 < x < 10$ ،
بما أنه ليس بإمكان الشركة إنتاج عدد سالب من المصاييح، إذن أهمل الفترة $x < -2$
وبما أن x يمثل عدد المصاييح بالآلاف، فإنه يتعين على الشركة أن تصنع ما بين 3 000
و 10 000 مصباحاً.

حاول أن تحل التمرين 22

نظرية الأصفار النسبية

الأصفار الحقيقية للدوال كثيرات الحدود هي إما أصفار نسبية (الأصفار عبارة عن أعداد نسبية)
أو أصفار غير نسبية (الأصفار عبارة عن أعداد غير نسبية). على سبيل المثال:

$$f(x) = 4x^2 - 9 = (2x + 3)(2x - 3)$$

لها الصفران النسبيان $-\frac{3}{2}$ و $\frac{3}{2}$ ،

$$f(x) = x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$$

و

لها الصفران غير النسبيين $-\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}$

تبيّن **نظرية الأصفار النسبية** كيف يمكن أن نعد قائمة بكافة الأصفار النسبية الممكنة لدالة
كثيرة الحدود لها معاملات من أعداد صحيحة.

إرشاد بعد حل التمرين 22

س: كيف يمكنك مقارنة قيمة الربح القصوى في التمرين

21 إلى تلك التي في المثال 4؟

نموذج إجابة:

بما أن تكلفة المواد الأولية انخفضت، فإن الربح

سيكون أكبر.

ملاحظة تعليمية

إذا كان في معاملات حدود الدالة كثيرة الحدود عامل مشترك، يمكن أن يؤخذ كعامل مشترك للجميع ثم يتم إجراء اختبار الأصفار النسبية على ما تبقى.

نظرية الأصفار النسبية

لنفترض أن f دالة كثيرة الحدود من الدرجة n حيث $n \geq 1$ وصيغتها

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

وكل معاملات أعداد صحيحة و $a_0 \neq 0$.

إذا كان $x = \frac{p}{q}$ صفراً نسبياً للدالة f ، حيث لا يوجد بين p و q عوامل مشتركة لأعداد صحيحة غير ± 1 ، إذن،

- p عامل صحيح للمعامل الثابت a_0 .
- q عامل صحيح للمعامل الرئيسي a_n .

أسئلة للتفكير

س: هل يلعب ترتيب قيم الأصفار النسبية أي دور في عملية التأكد؟

نموذج إجابة:

كلا، المهم اتباع طريقة تمنع إهمال أي منهم.

س: كيف يمكن الإفادة من القسمة التركيبية؟

نموذج إجابة:

تبين القسمة التركيبية ما إذا كانت القيمة هي صفر للدالة من خلال القيمة التي تظهر عند أقصى اليمين.

س: متى يكون 1 صفراً للدالة

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

نموذج إجابة:

عندما يكون جمع المعاملات صفراً:

$$a_n + a_{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

مثال 5 إيجاد أصفار الدوال كثيرات الحدود

$$f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x - 2$$

الحل

بما أن المعامل الرئيس يساوي 3 والمعامل الثابت يساوي -2، تؤدي نظرية الأصفار النسبية إلى عدة أصفار نسبية ممكنة للدالة f . سنقارب الحل بطريقة منهجية. الأصفار النسبية الممكنة:

$$\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3} : \frac{\pm 1, \pm 2}{\pm 1, \pm 3} : \frac{\text{عوامل } -2}{\text{عوامل } 3}$$

أبدأ بإيجاد قيمة $f(x)$ إذا كان $x = 1$.

$$f(x) = 3(1)^3 + 4(1)^2 - 5(1) - 2 = 0$$

إذن، العدد 1 هو أحد أصفار $f(x)$.

بالاعتماد على نظرية العامل، فإن $x - 1$ هو أحد عوامل $f(x)$.

اقسم $f(x)$ على $x - 1$ باستعمال القسمة التركيبية.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & 4 & -5 & -2 \\ & & 3 & 7 & 2 \\ \hline & 3 & 7 & 2 & 0 \end{array}$$

ناتج القسمة هو $3x^2 + 7x + 2$

$$f(x) = (x - 1)(3x^2 + 7x + 2)$$

(تابع)

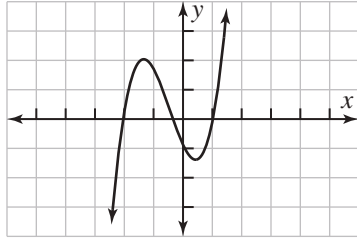
بالتحليل إلى عوامل، يمكن كتابة صيغة الدالة f كالتالي:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)(3x^2+7x+2) \\ &= (x-1)(3x+1)(x+2) \end{aligned}$$

وهكذا، فإن أصفار الدالة $f(x)$ هي $1, -\frac{1}{3}, -2$

ادعم بيانيًا

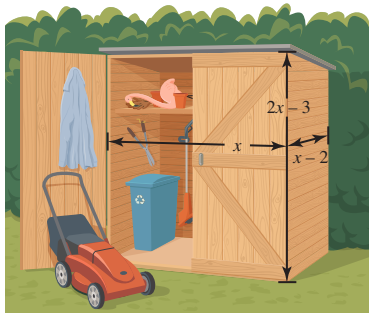
بتمثيل الدالة $f(x)$ بيانيًا كما في الشكل أدناه، يمكن التحقق من وجود ثلاثة أصفار للدالة تبدو على أنها الأعداد $1, -\frac{1}{3}, -2$



[−4.7, 4.7] في [−10, 10]

حاول أن تحل التمرين 28

يمكن الاستفادة من نظرية الأصفار النسبية لتفسير العديد من النماذج الحياتية وإيجاد الحلول للكثير من الوضعيات الواقعية المرتبطة بالأحجام والمساحات والأرباح وغيرها.



مثال 6 استعمال نظرية الأصفار النسبية

تقوم شركة تخزين بتصميم وحدة تخزين جديدة.
بالاعتماد على الأبعاد الموضحة في الشكل المجاور،
تمنذج كثيرة الحدود $V(x) = 2x^3 - 7x^2 + 6x$
حجم المستوعب، حيث x العرض بالأمتار.
ما هي أبعاد المستوعب بالأمتار
إذا كان حجمه 154 m^3 ؟

الحل

الحجم هو 154 m^3 ، إذن أوجد حلول المعادلة $2x^3 - 7x^2 + 6x = 154$
أصفار كثيرة الحدود جذور نسبية للمعادلة في صورتها القياسية:

$$2x^3 - 7x^2 + 6x - 154 = 0$$

بما أن المعامل الرئيس يساوي 2 والمعامل الثابت يساوي -154، تؤدي نظرية الأصفار النسبية إلى عدة أصفار نسبية ممكنة للمعادلة:

$$\frac{-154}{2} : \pm \frac{1}{1}, \pm \frac{2}{1}, \pm \frac{7}{1}, \pm \frac{11}{1}, \pm \frac{14}{1}, \pm \frac{22}{1}, \pm \frac{77}{1}, \pm \frac{154}{1}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{7}{2}, \pm \frac{11}{2}, \pm \frac{77}{2}$$

(تابع)

ملاحظة تعليمية

ناقش مع الطلاب تعدد المصطلحات المتعلقة بأصفار الدالة: مقطع x ، الجذر والحل.

الطلاب الذين يواجهون صعوبات

ربما يحتاج بعض الطلاب إلى مزيد من التدريب على تحديد الأصفار النسبية الممكنة للدالة كثيرة الحدود. دع الطلاب يحددون الأصفار النسبية الممكنة للدوال التالية حيث يكون المعامل الرئيس هو 1

$$1. f(x) = x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 16$$

$$2. f(x) = x^5 - 11x^3 - 20x^2 - 16x + 30$$

$$3. f(x) = x^3 - 27x^2 - 2x - 42$$

نموذج إجابة:

$$1. \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16$$

$$2. \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30$$

$$3. \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 7, \pm 14, \pm 21, \pm 42$$

للطلاب سريعى الإنجاز

س: (مع المثال 5) دع الطلاب يكتبون دوالاً كثيرة ذات أصفار نسبية وحقيقية.

أوجد دالة كثيرة حدود P درجتها 4 ذات معاملات نسبية وأصفارها: 2 (بتعددية 2) و $\sqrt{2} - 3$

و $3 + \sqrt{2}$

نموذج إجابة:

$$P(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 52x + 28$$

أسئلة للتفكير

س: كيف تعرف من السياق أنك لا تحتاج إلى اختيار القيم السالبة للأصفار المحتملة؟

نموذج إجابة:

لأن طول المستوعب x لا يمكن أن يكون قيمة سالبة.

س: كيف يمكن أن تختبر القيم الموجبة للأصفار

المحتملة لتعرف ما إذا كانت أصفاراً للدالة كثيرة

الحدود؟

نموذج إجابة:

نعوض هذه القيمة مكان x ، إذا كانت النتيجة صفراً،

فهذا يعني أن القيمة هي من أصفار الدالة.

س: كيف يكون حل المسألة إذا تعددت الأصفار الحقيقية

الموجبة للدالة؟

نموذج إجابة:

علينا اختيار ما كان مقبولا في الواقع.

س: ما الفرق بين حل المعادلة $V(x) - 154 = 0$

وإيجاد حل لمسألة المستوعب؟

نموذج إجابة:

في حل المعادلة، كل النتائج هي نتائج مقبولة، أما في

المثال، فإن المسألة تمثل أمراً واقعياً ولذلك لا يمكن أن

تقبل النتائج السالبة.

خطأ شائع

يمكن أن يكتب بعض الطلاب $V(x) = 0$ بدلاً عن $V(x) = 154$.

نتبه الطلاب إلى أن المطلوب هو ارتفاع المستوعب x ليكون حجمه 154m^3 ، ولذلك يجب أن يكتبوا $V(x) = 154$ وليس $V(x) = 0$.

تذكير

لايجاد الجذور الحقيقية للمعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ ، يمكنك أن توجد مميز المعادلة $\Delta = b^2 - 4ac$ ، إذا كان $\Delta > 0$ ، يكون للمعادلة جذران حقيقيان هما $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ ، وإذا كان $\Delta = 0$ ، يكون لها جذر وحيد (بتعددية 2) وهو $\frac{-b}{2a}$ ، وأما إذا كان $\Delta < 0$ ، فلا يكون للمعادلة أية جذور حقيقية.

عادات التفكير

س: قد يظن بعض الطلاب في المثال 6 أن $\frac{3}{2}$ هو أحد الأصفار الممكنة لأنه أخذ 3 من عوامل 6، و 2 من عوامل 2، حيث $V(x) = 2x^3 - 7x^2 + 6x$. هل هذا صواب؟

نموذج إجابة:

كلا، لأنه استبدل $2x^3 - 7x^2 + 6x - 154$ بالدالة $V(x) = 2x^3 - 7x^2 + 6x$.

متابعة

س: ما هي الطريقتان اللتان تمكنان من معرفة ما إذا كان $(x - k)$ عاملاً من عوامل الدالة كثيرة الحدود $f(x)$ ؟

نموذج إجابة:

من خلال نظرية الباقي ونظرية العامل.

ملاحظات على التمارين

ملاحظات على التمارين
التمارين 14-1، تركز على نظرية الباقي.
التمارين 20-15، تركز على نظرية العامل.
التمارين 35-23، تركز على نظرية الأصفار النسبية.
التمارين 44-42، تدرب الطالب على أنماط من الاختبارات.

التقييم المستمر

التقييم الذاتي:

التمارين 5، 11، 17، 22، 27، 32

بتعويض هذه الأعداد تباعاً عن x في المعادلة، لاحظ أن العدد $\frac{11}{2}$ جذر للمعادلة، لأن:

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{11}{2}\right)^3 - 7\left(\frac{11}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{11}{2}\right) - 154 \\ = 121 + 33 - 154 \\ = 0 \end{aligned}$$

اقسم $2x^3 - 7x^2 + 6x - 154$ على $x - \frac{11}{2}$ باستعمال القسمة التركيبية:

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{11}{2} & 2 & -7 & 6 & -154 \\ & & 11 & 22 & 154 \\ \hline & 2 & 4 & 28 & 0 \end{array}$$

ناتج القسمة هو $2x^2 + 4x + 28$

اكتب المعادلة بصيغة التحليل إلى العوامل:

$$\left(x - \frac{11}{2}\right)(2x^2 + 4x + 28) = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 4^2 - 4(2)(28) \\ &= -208 \end{aligned}$$

بما أن مميز الصيغة التربيعية $2x^2 + 4x + 28$ هو عدد سالب يساوي -208، فليس لهذه الصيغة جذورًا حقيقية. وبالتالي فإن $\frac{11}{2}$ هو الحل الحقيقي الوحيد للمعادلة الأصلية. بتعويض $\frac{11}{2}$ عن x يكون عرض المستوعب $\frac{11}{2}$ أو 5.5 m، وطوله $2 - \frac{11}{2}$ أو 3.5 m، وارتفاعه $3 - 2\left(\frac{11}{2}\right)$ أو 8 m

حاول أن تحل التمرين 31

مراجعة سريعة 3.3

في التمارين 4-1، أوجد $f(k)$.

1. $f(x) = (x^2 - 1)(x - 1) + 1, k = 1$ 1

2. $f(x) = (x^2 + 2x - 1)(x - 3) + 2, k = 3$ 2

3. $f(x) = (x^5 - 1)(x + 5) - 1, k = -5$ -1

4. $f(x) = (x^3 + x^2 - 5)(x - 6), k = 6$ 0

في التمارين 8-5، حدد ما إذا كان $x - k$ أحد عوامل $f(x)$.

5. $f(x) = (x^2 + x - 1)(x - 3) + 1, k = 3$ لا

6. $f(x) = (x^2 + 2x + 3)(x + 7), k = -7$ نعم

7. $f(x) = (x^6 + 2x - 1)(x - 1) + 1, k = 1$ لا

8. $f(x) = (x^3 + 2x - 1)(x + 4), k = -4$ نعم

الدرس 3.3 التمارين

1. استعمل القسمة التركيبية لتبين أن باقي قسمة

$f(x) = x^3 + 8x^2 + 12x + 5$ على $x + 2$ يساوي $f(-2)$.

في التمارين 7-2، استعمل نظرية الباقي لإيجاد الباقي عند قسمة $f(x)$ على $x - k$.

2. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1, k = 2$ $f(2) = 3$

3. $f(x) = x^4 - 5, k = 1$ $f(1) = -4$

4. $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1, k = -3$ $f(-3) = -43$

5. $f(x) = x^3 - 3x + 4, k = -2$ $f(-2) = 2$

6. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 7, k = 2$ $f(2) = 5$

7. $f(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 20x + 3, k = -1$ $f(-1) = 23$

8. أوجد الباقي عند قسمة $x^{40} - 3$ على $x + 1$. -2

9. أوجد الباقي عند قسمة $x^{63} - 17$ على $x - 1$. -16

10. أوجد قيمة a إذا كان باقي قسمة

$f(x) = x^5 + 2ax^2 + 3ax - 6$ على $x - 1$ هو 25 $a = 6$

11. أوجد قيمة m إذا كان باقي قسمة

$f(x) = x^3 + 9x^2 + mx + m - 10$ على $x + 5$ هو 78 $m = 3$

12. أوجد قيمة a إذا كان باقي قسمة

$f(x) = ax^3 - 3x^2 + 2ax + 13$ على $x - 3$ هو 52 $a = 2$

13. أوجد قيمة n إذا كان باقي قسمة

$f(x) = -x^4 + (n + 1)x^3 - x^2 + 4x + 6n + 2$ على $x + 2$

هو -36 $n = 1$

14. أوجد قيمة t إذا كان باقي قسمة

$f(x) = x^5 + tx^4 - 2x^3 + (t + 4)x^2 - 2x - 16$ على $x - 4$

هو 135 $t = -2.94$

في التمارين 20-15، استعمل نظرية العامل لتحديد ما إذا كانت

ثنائية الحدود المعطاة عاملاً للدالة كثيرة الحدود $P(x)$. إذا كانت

كذلك، اكتب كثيرة الحدود بصيغة التحليل إلى عوامل.

15. $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1, x - 1$ نعم، $(x^2 + 1)(x - 1)$

16. $P(x) = x^3 - x^2 - x - 15, x - 3$ نعم، $(x^2 + 2x + 5)(x - 3)$

17. $P(x) = x^3 + 3x - 4, x - 2$ لا

18. $P(x) = x^3 - 3x - 2, x - 2$ نعم، $(x + 1)^2(x - 2)$

19. $P(x) = 4x^3 + 9x^2 - 3x - 10, x + 2$ نعم، $(x - 1)(4x + 5)(x + 2)$

20. $P(x) = 2x^{10} - x^9 + x^8 + x^7 + 2x^6 - 3, x + 1$ لا

21. بفعل الانخفاض في أسعار المواد الأولية، تغير ربح شركة

الابتكارات ليصبح $Q(x) = -x^3 + 10x^2 + 13x - 22$. أوجد عدد

المصاييح التي يتعين على الشركة انتاجها لتحقيق ربحاً.

في التمارين 32-35، أوجد حل المعادلة.

32. $x^3 - 3x^2 + 4x - 12 = 0$

33. $2x^4 + 13x^3 - 47x^2 - 13x + 45 = 0$

34. $4x^3 + 64x^2 - x - 16 = 0$

35. $8x^3 + 11x^2 - 13x - 6 = 0$

36. خزانة ملابس على شكل منشور قائم لها القياسات الموضحة في الرسم. أوجد ارتفاع الخزانة، بالقدم، إذا كان حجمها 220 ft^3



في التمرينين 37 و 38، استعمل الطرق الجبرية لإيجاد الدالة التكعيبية التي لها معطيات الجدول. تأكد من إجابتك باستعمال حاسبة التمثيل البياني.

37.

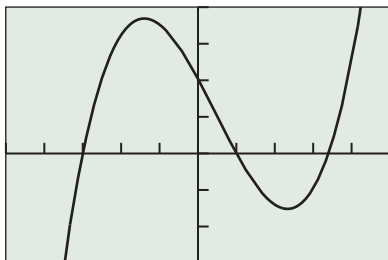
x	-4	0	3	5
$f(x)$	0	180	0	0

38.

x	-2	-1	1	5
$f(x)$	0	24	0	0

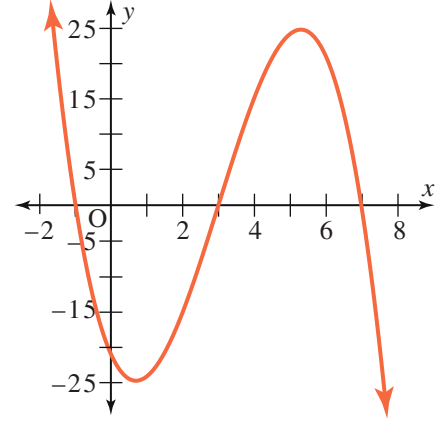
في التمرينين 39 و 40، استخدم التمثيل البياني لتخمين العوامل الخطية الممكنة للدالة $f(x)$. ثم استعمل القسمة التركيبية لتحلل $f(x)$ إلى كل عواملها.

39. $f(x) = 5x^3 - 7x^2 - 49x + 51$



$[-5, 5]$ في $[-75, 100]$

22. تقوم شركة بتصنيع مصابيح LED. الربح p ، بآلاف الريالات المحققة، هو دالة لعدد المصابيح المباعة، x ، بعشرات الآلاف. تنمذج الدالة في الشكل $p(x) = -x^3 + 9x^2 - 11x - 21$ مقدار الربح.



ما عدد المصابيح المصنعة والذي يسمح للشركة بتحقيق ربح؟

في التمارين 23-30، استعمل نظرية الأصفار النسبية لتكتب قائمة بكل الأصفار النسبية الممكنة، ثم حدّد الأصفار، إن وجدت.

23. $f(x) = 6x^3 - 5x - 1$

24. $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 6x - 14$

25. $f(x) = 2x^3 - x^2 - 9x + 9$

26. $f(x) = 6x^4 - x^3 - 6x^2 - x - 12$

27. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 6$

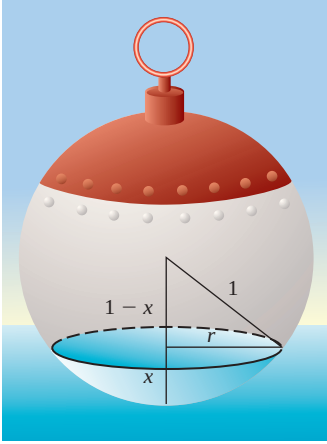
28. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 9$

29. $f(x) = x^3 + x^2 - 8x - 6$

30. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7x + 4$

31. علبة مجوهرات طولها $2x + 1 \text{ cm}$ وعرضها $2x - 6 \text{ cm}$ وارتفاعها $x \text{ cm}$. حجم العلبة معطى بالدالة $V(x) = 4x^3 - 10x^2 - 6x - 28$. أوجد ارتفاع هذه العلبة بالسنتيمتر إذا كان حجمها 28 cm^3

استكشاف



45. مبدأ أرخميدس عوامة كروية يبلغ نصف قطرها 1 m وكثافتها تساوي ربع كثافة ماء البحر. وفق مبدأ أرخميدس، كتلة العوامة تساوي كتلة الماء المزاح عند طوفها أو غوصها في الماء.

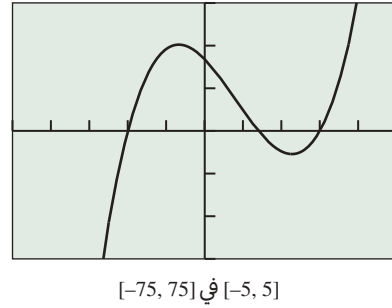
- ليكن x العمق الذي تصل إليه العوامة.
 - لتكن d كثافة ماء البحر.
 - ليكن r نصف القطر للدائرة التي تتشكل حيث تلتقي العوامة بالهواء والماء. أنظر الشكل.
- لاحظ في الشكل أن $r^2 = 1 - (1 - x)^2 = 2x - x^2$
- وأن حجم الوعاء الكروي المغمور يساوي $V = \frac{\pi x}{6}(3r^2 + x^2)$ وذلك من خلال اعتماد قواعد الهندسة.
- a. تحقق من أن حجم العوامة يساوي $\frac{4\pi}{3}$
- b. استعمل نتيجتك من (a) لتؤكد أن كتلة العوامة هو $\frac{\pi d}{3}$
- c. برهن أن كتلة الماء المزاح هو $\frac{\pi d}{6}x(3r^2 + x^2)$
- d. أوجد قيمة تقريبية للعمق الذي ستغوص إليه العوامة.

46. مبدأ أرخميدس استعمل تسلسل التمرين السابق لتجد العمق الذي تصل إليه العوامة في حال كانت كثافتها تساوي خمس كثافة ماء البحر.

47. تعطينا نظرية تقليدية، هي قاعدة ديكرت للإشارات، معلومات عن عدد الأصفار الموجبة والسالبة للدالة كثيرة الحدود f ، عن طريق النظر إلى عدد المرات m التي تختلف فيها الإشارة عند استعراض المعاملات من الحد الرئيس إلى الحد الثابت. إذا كانت $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ دالة كثيرة الحدود من الدرجة n ، إذن:

- عدد الأصفار الموجبة للدالة f يساوي m ، أو إن عددها أصغر من m بعدد زوجي واحد.
- عدد الأصفار السالبة للدالة f يساوي m ، أو إن عددها أصغر من m بعدد زوجي واحد.

40. $f(x) = 5x^3 - 12x^2 - 23x + 42$

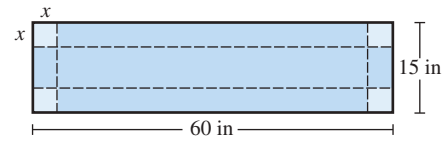


41. حجم صندوق التزمت إحدى الشركات بصنع صندوق دون غطاء بارتفاع x ، أرضيته من الورق المقوى مستطيلة الشكل أبعادها 15 in في 60 in، اقتطعت من زواياها الأربع مربعات عرض الواحد منها x .

a. يتن أن الصيغة التالية تمثل حجم الصندوق

$$v(x) = x(60 - 2x)(15 - 2x)$$

b. أوجد قيمة x حيث حجم الصندوق 450 in^3



أسئلة اختبار معيارية

42. صواب أم خطأ $(x + 2)$ ليس أحد عوامل الدالة $f(x) = (x^5 + x - 1)(x + 2) + (x + 2)$. بزر إجابتك.
43. اختيار من متعدد لتكن $f(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$ أي الخيارات التالية ليس جذراً نسبياً ممكنًا للدالة f ؟ E
- A. -3
- B. -1
- C. 1
- D. $\frac{1}{2}$
- E. $\frac{2}{3}$

44. اختيار من متعدد لتكن $f(x)$ دالة كثيرة الحدود باقي قسمتها على $x - 3$ يساوي 0، أي العبارات التالية ليست صحيحة؟

A. $x - 3$ من عوامل $f(x)$ B

B. درجة ناتج القسمة تساوي درجة f مضافاً إليها 1

C. $f(3) = 0$

D. هي دالة كثيرة الحدود، لكل $x \neq 3$ $\frac{f(x)}{x-3}$

استخدم قاعدة ديكرت للإشارات لتحديد الأعداد الممكنة لكل من الأصفار الحقيقية الموجبة والسالبة للدالة.

a. $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

b. $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

c. $f(x) = 2x^3 + x - 3$

d. $g(x) = 5x^4 + x^2 - 3x - 2$

توسيع الأفكار

48. الكتابة للتعلم

a. اكتب فقرة تصف كيف أن أصفار الدالة $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)x^3 + x^2 + 2x - 3$ ترتبط بأصفار $g(x) = x^3 + 3x^2 + 6x - 9$. بأي طرق يوضح هذا المثال كيفية تطبيق نظرية الأصفار النسبية لإيجاد أصفار كثيرة حدود معاملاتها أعداد نسبية؟

b. أوجد الأصفار النسبية للدالة $f(x) = x^3 - \frac{7}{6}x^2 - \frac{20}{3}x + \frac{7}{2}$.

c. أوجد الأصفار النسبية للدالة $f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{37}{12}x + \frac{5}{2}$.

49. استخدم نظرية الأصفار النسبية لإثبات أن $\sqrt{2}$ غير نسبي.

إجابات على أسئلة التمارين 3.3

23. الأصفار النسبية الممكنة: $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{6}$

الصفر: 1

24. الأصفار النسبية الممكنة: $\pm 1, \pm \frac{1}{3}, \pm 2, \pm \frac{2}{3}, \pm 7, \pm \frac{7}{3}, \pm 14, \pm \frac{14}{3}$

الصفر: $\frac{7}{3}$

25. الأصفار النسبية الممكنة: $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm 9, \pm \frac{9}{2}$

الصفر: $\frac{3}{2}$

26. الأصفار النسبية الممكنة:

$\pm 12, \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{6}, \pm 2, \pm \frac{2}{3}, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm 4, \pm \frac{4}{3}, \pm 6$

الأصفار: $\frac{3}{2}$ و $-\frac{4}{3}$

27. الأصفار النسبية الممكنة: $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 2, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm 6$

الأصفار: $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ و $\frac{3}{2}$

28. الأصفار النسبية الممكنة: $\pm 1, \pm 3, \pm 9$

الصفر: -3

29. الأصفار النسبية الممكنة: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

الأصفار: $1 \pm \sqrt{3}$ و -3

30. الأصفار النسبية الممكنة: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

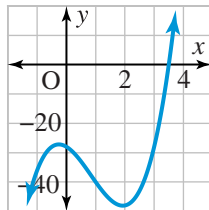
الأصفار: $1 \pm \sqrt{2}$ و 4

31. $V(x) = 4x^3 - 10x^2 - 6x$

عوض: $V(x) = 28$

$4x^3 - 10x^2 - 6x = 28$

إذن: $4x^3 - 10x^2 - 6x - 28 = 0$



$x = 3.5$

32. $x^3 - 3x^2 + 4x - 12 = 0$

إذن، $x^2(x - 3) + 4(x - 3) = 0$

$(x^2 + 4)(x - 3) = 0$

إذن $x = 3$

33. نكتب قائمة الأصفار النسبية الممكنة ثم نجربها ونكتشف أن الحل هو

$\pm 1, -9, \frac{5}{2}$

34. نكتب قائمة الأصفار النسبية الممكنة ثم نجربها ونكتشف أن الحل هو

$-16, \pm \frac{1}{2}$

1.

-2	1	8	12	5
		-2	-12	0
	1	6	0	5

$$f(-2) = (-2)^3 + 8(-2)^2 + 12(-2) + 5$$

$$= -8 + 32 - 24 + 5$$

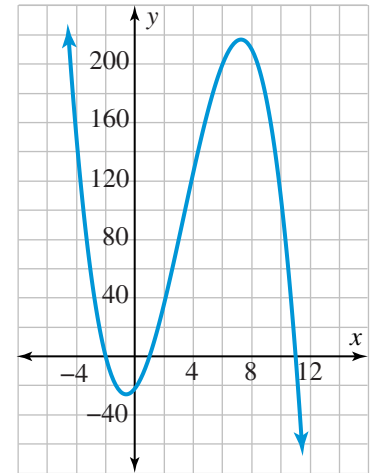
$$= 37 - 32 = 5$$

إذن، الباقي هو $f(-2)$.

21. إن أرباح الشركة ممثلة بالجزء الذي يقع أعلى المحور x .

أوجد أصفار الدالة بتحديد أين يتقاطع التمثيل البياني مع المحور x .

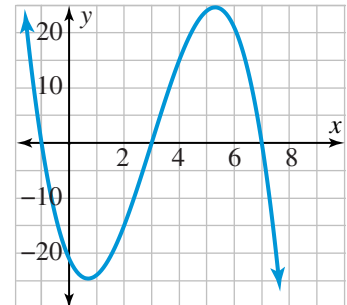
إذن، يتعين على الشركة إنتاج كمية أكبر من 1 000 وأقل من 11 000 لكي تحقق ربحاً.



22. إن أرباح الشركة ممثلة بالجزء الذي يقع أعلى المحور x .

أوجد أصفار الدالة بتحديد أين يتقاطع التمثيل البياني مع المحور x .

إذن يتعين على الشركة إنتاج كمية أكبر من 30 000 وأقل من 70 000 لكي تحقق ربحاً.



35. نكتب قائمة الأصفار النسبية الممكنة ثم نجربها ونكتشف أن الحل هو $1, -2, -\frac{3}{8}$

36. الحجم هو $V(x) = x(x+3)(x-5.5)$

عوض $V(x) = 220$

$$x^3 - 2.5x^2 - 16.5x - 220 = 0$$

باستعمال الحاسبة.

$$\text{إذن } x = 8$$

$$37. f(x) = 3(x+4)(x-3)(x-5)$$

$$38. f(x) = 2(x+2)(x-1)(x-5)$$

$$39. (x+3), (x-1), (x-3.4), f(x) = 5(x+3)(x-1)\left(x - \frac{17}{5}\right)$$

$$40. (x+2), (x-3), (x-1.4), f(x) = 5(x+2)(x-3)\left(x - \frac{7}{5}\right)$$

41. a. الحجم هو مساحة الأرضية $\times$ الارتفاع

مساحة الأرض = الطول $\times$ العرض

$$\text{الطول} = 60 - 2x$$

$$\text{العرض} = 15 - 2x$$

$$\text{الارتفاع} = x$$

$$b. v(x) = x(60 - 2x)(15 - 2x)$$

$$v(x) = 450$$

$$\text{إذن: } 0 = 4x^3 - 150x^2 + 900x - 450$$

$$\text{إذن } x = 0.55 \text{ أو } x = 6.79 \text{ أو } x = 30.16 \text{ لكنها مرفوضة}$$

لأنها لا تنتمي إلى المجال.

42. خطأ، يمكن أخذ $(x+2)$ كعامل مشترك.

$$f(x) = [(x^5 + x - 1) + 1](x + 2)$$

$$= (x^5 + x)(x + 2)$$

45. a. حجم العوامة هو $\frac{4\pi}{3} R^3$ هو نصف قطر العوامة الذي هو 1،

$$\text{إذن، الحجم هو } \frac{4\pi}{3} (1)^3 = \frac{4\pi}{3}$$

b. كثافة العوامة هي ربع كثافة الماء، $\frac{d}{4}$.

$$\text{لذا كتلة العوامة هي } \frac{\pi d}{3} \times \frac{d}{4} = \frac{\pi d^2}{12}$$

c. كتلة الماء المزاح = الحجم $\times$ الكثافة

$$\frac{\pi x}{6} (3r^2 + x^2) \times d =$$

$$\frac{\pi d}{6} x (3r^2 + x^2) =$$

d. استعمل مبدأ أرخميدس: كتلة العوامة = كتلة الماء المزاح.

$$x^3 + 3r^2x - 2 = 0$$

$$\text{عوض قيمة } r: -2x^3 + 6x^2 - 2 = 0$$

$$\text{استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة } x: x = 0.6527$$

46. a. حجم العوامة يساوي $\frac{4\pi}{3}$

b. كثافة العوامة تساوي خمس كثافة ماء البحر، أي $\frac{d}{5}$.

$$\text{إذن كتلة العوامة هي } \frac{4\pi d}{15} \times \frac{d}{5} = \frac{4\pi d^2}{75}$$

c. كتلة الماء المزاح تساوي $\frac{\pi d}{6} x (3r^2 + x^2)$

d. باستعمال مبدأ أرخميدس: كتلة العوامة = كتلة الماء المزاح.

$$\frac{\pi d}{6} x (3r^2 + x^2) = \frac{4\pi d^2}{15}$$

$$\text{عوض قيمة } r^2: -5x^3 + 15x^2 - 4 = 0$$

$$\text{باستعمال الآلة الحاسبة نجد أن: } x \approx 0.5743$$

47. a. إما لا يوجد صفر موجب وإما هناك صفران موجبان.

يوجد صفر واحد سالب.

b. لا يوجد صفر موجب. يوجد ثلاثة أصفار سالبة أو صفر واحد سالب.

c. هناك صفر واحد موجب، ولا يوجد صفر سالب.

d. يوجد صفر واحد موجب، ويوجد صفر واحد سالب.

48. a. نموذج إجابة: $f(x) = \frac{1}{3}g(x)$ ، إذن منحنى الدالة f هو تضيق رأسي

لمنحنى الدالة g وللدالتين f و g الأصفار نفسها. لإيجاد أصفار كثيرة حدود

f معاملاتنا أعداد نسبية، يمكننا أن نضرب الدالة f في مضاعف مشترك

لمقامات معاملات f ، فنحصل على دالة g معاملاتنا أعداد صحيحة ولها

نفس أصفار f .

$$b. -\frac{7}{3}, \frac{1}{2}, 3$$

c. لا يوجد أصفار نسبية.

$$49. \text{ لدينا } f(x) = x^2 - 2$$

$$f(1) \neq 0$$

$$f(-1) \neq 0$$

$$f(2) \neq 0$$

$$f(-2) \neq 0$$

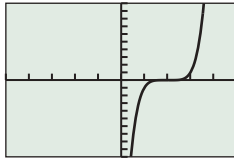
إذن، أصفار الدالة ليست نسبية. $\sqrt{2}$ هو عدد غير نسبي.

الوحدة 3 مراجعة الوحدة

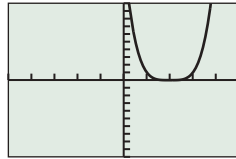
في التمارين 17-20، صل كثيرة الحدود بتمثيلها البياني.
بَرِّز اختيارك.

17. $f(x) = (x-2)^2$ (c) 18. $f(x) = (x-2)^3$ (d)

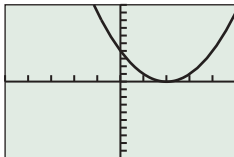
19. $f(x) = (x-2)^4$ (b) 20. $f(x) = (x-2)^5$ (a)



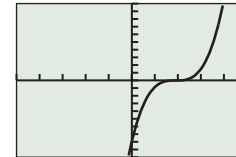
(a)



(b)



(c)



(d)

في التمارين 21-23، استعمل المعامل الرئيس ودرجة الدالة
كثيرة الحدود لتحديد السلوك الطرفي لمنحنى الدالة.

21. $f(x) = -x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 8x + 9$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

22. $f(x) = 7x^4 - 4x^3 + 7x^2 + 10x - 15$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

23. $f(x) = -x^6 + 7x^5 - x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 8x - 2$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

24. أوجد التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود f من خلال الوصف التالي:

- $f(x)$ ذات قيم موجبة في الفترة $]-\infty, -0.5]$.
- $f(x)$ ذات قيم سالبة في الفترة $]-0.5, \infty[$.
- العدد 1 هو أحد أصفار الدالة f .
- $f(x)$ متزايدة في الفترة $[0, 1]$.
- $f(x)$ متناقصة في الفترات $]-\infty, 0]$ و $[1, \infty[$.

في التمارين 25-27، أوجد أصفار الدالة f جبريًا ثم ارسم منحنى الدالة باستعمال أصفارها.

25. $f(x) = x^2 - 4x - 5$

26. $f(x) = -x^2 + 3x$

27. $f(x) = 3x^3 - 9x^2 - 12x$

في التمارين 1-4، اكتب الدالة كثيرة الحدود بالصورة القياسية.
أوجد درجة الدالة وعدد حدودها ومعاملها الرئيس.

1. $f(x) = -3x^3 + 2x^5 + x + 8x^3 - 6 + x^4 - 3x^2$

2. $f(x) = 8x^2 + 10x^7 - 7x^3 - x^4$

3. $f(x) = -x^3 + 9x + 12 - x^4 + 5x^2$

4. $f(x) = 2x^5 - 1 + 3x + 5x^6$

في التمارين 5-8، أوجد $f(x) + g(x)$ و $f(x) - g(x)$ ثم حدّد درجة الناتج.

5. $f(x) = x^2 - 2x + 5, g(x) = 3x^2 + 5x - 2$

6. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1,$
 $g(x) = 2x^3 + x^2 + x - 3$

7. $f(x) = 2x^2 - 3, g(x) = 4x^3 + 6x^2 - 7$

8. $f(x) = -2x^3 + x^2 - 5x, g(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 2$

في التمارين 9-12، أوجد $f(x) \times g(x)$ ثم حدّد درجة الناتج.

9. $f(x) = 3x - 5, g(x) = x^2 - 2x + 4$
الدرجة 3، $f(x) \times g(x) = 3x^3 - 11x^2 + 22x - 20$

10. $f(x) = 2x^2 + 3, g(x) = 3x^2 - x + 2$
الدرجة 4، $f(x) \times g(x) = 6x^4 - 2x^3 + 13x^2 - 3x + 6$

11. $f(x) = 4 - 2x, g(x) = x^2 + 3 - 2x$
الدرجة 3، $f(x) \times g(x) = -2x^3 + 8x^2 - 14x + 12$

12. $f(x) = x^3 - 3x + 1, g(x) = 2x^2 + x$
الدرجة 5، $f(x) \times g(x) = 2x^5 + x^4 - 6x^3 - x^2 + x$

في التمارين 13-16، اقسّم $f(x)$ على $d(x)$ ، ومن ثم اكتب عبارة موجزة في صورة كثيرة حدود.

13. $f(x) = x^3 + x^2 - 4x + 2, d(x) = x - 3$
 $f(x) = (x^2 + 4x + 8)(x - 3) + 26$

14. $f(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2, d(x) = x - 2$
 $f(x) = (4x^2 + 14x + 28)(x - 2) + 58$

15. $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 14x + 7, d(x) = x^2 + 4$
 $f(x) = (2x^2 - 3x + 1)(x^2 + 4) - 2x + 3$

16. $f(x) = 3x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 3x - 6, d(x) = 3x + 1$
 $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 1)(3x + 1) - 7$

في التمارين 41-44، اكتب الدالة في صورة ضرب عوامل خطية وتربيعية أولية جميعها بمعاملات حقيقية.

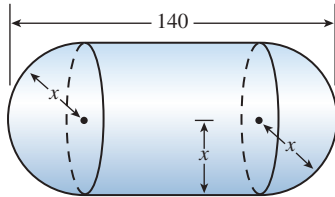
41. $f(x) = x^3 - x^2 - x - 2 \quad (x^2 + x + 1)(x - 2)$

42. $f(x) = 9x^3 - 3x^2 - 13x - 1 \quad (9x^2 - 12x - 1)(x + 1)$

43. $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 2 \quad (x - 1)\left(x + \frac{5 + \sqrt{17}}{2}\right)\left(x + \frac{5 - \sqrt{17}}{2}\right)$

44. $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4 \quad (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$

45. **حاوية تخزين** حاوية تخزين سوائل محملة على شاحنة، لها شكل أسطوانة. كل من طرفي هذه الأسطوانة له شكل نصف كرة كما يوضح الرسم. للأسطوانة وكل من طرفيها نفس طول نصف القطر. الطول الإجمالي للحاوية هو 140 ft.
- a. أوجد حجم الحاوية V بدلالة نصف القطر x .
- b. مثل الدالة $y = V(x)$ بيانياً، باستعمال الحاسبة.
- c. أوجد نصف قطر الحاوية ذات الحجم الأكبر. أوجد هذا الحجم.



46. **تصميم صناعي** شركة بناء أسند إليها مشروع بناء حوض مستطيل الشكل قاعدته مربعة وبدون سطح. يتم بناء الحوض ليستوعب 1000 ft^3 الماء. ليكن x أحد أطوال القاعدة.
- a. أوجد المساحة الخارجية s للسد بدلالة x .
- b. أوجد طول وعرض وارتفاع السد إذا كانت مساحته الخارجية تساوي 600 ft^2 .

في التمارين 28-30، حدد درجة وأصفار الدالة كثيرة الحدود. أوجد تعددية كل صفر وحدد ما إذا كان التمثيل البياني يتقاطع مع المحور x أو يمسه عند صفر الدالة، ثم ارسم منحنى الدالة يدويًا.

28. $f(x) = (x + 3)(x - 1)(x - 4)$

29. $f(x) = (2x - 1)^2(x + 1)$

30. $f(x) = (2x - 1)^3(x - 1)^2$

في التمرينين 31 و 32، استعمل نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة $f(x)$ على $x - k$. تحقق باستعمال القسمة التركيبية.

31. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 5, k = -2 \quad f(-2) = -39$

32. $f(x) = -x^2 + 4x - 5, k = 3 \quad f(3) = -2$

في التمرينين 33 و 34، استعمل نظرية الأصفار النسبية كي تكتب لائحة بكل الأصفار النسبية الممكنة. ثم حدد أيًا منها، إذا وجد، هي أصفار.

33. $f(x) = 12x^4 + 20x^3 - 11x^2 - 5x + 2$

34. $f(x) = x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 2$

في التمارين 35-38، أوجد كل الأصفار الحقيقية للدالة، موجدًا القيم الدقيقة طالما أمكن ذلك.

35. $p(x) = -x^3 - x + 6 + x^4 - 7x$

36. $k(t) = t^4 - 7t^2 + 12$

37. $f(x) = 5x^3 - 4x^2 - 5x - 39$

38. $k(x) = x^4 - x^3 - 14x^2 + 24x + 5$

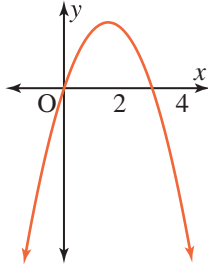
في التمرينين 39 و 40، استعمل نظرية العامل لتحديد ما إذا كانت كثيرة الحدود الأولى أحد عوامل كثيرة الحدود الثانية.

39. $x - 2, x^3 - 4x^2 + 8x - 8 \quad f(2) = 0$ نعم،

40. $x + 3, x^3 + 2x^2 - 4x - 2 \quad f(-3) \neq 0$ لا،

الوحدة 3 الإجابات

26. الأصفر: 0, 3

1. $f(x) = 2x^5 + x^4 + 5x^3 - 3x^2 + x - 6$ ، الدرجة: 5، عدد الحدود: 6،

معاملها الرئيس: 2

2. $f(x) = 10x^7 - x^4 - 7x^3 + 8x^2$ ، الدرجة: 7، عدد الحدود: 4،

معاملها الرئيس: 10

3. $f(x) = -x^4 - x^3 + 5x^2 + 9x + 12$ ، الدرجة: 4، عدد الحدود: 5،

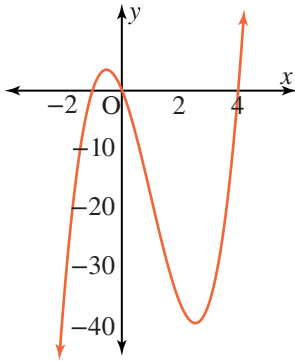
معاملها الرئيس: -1

4. $f(x) = 5x^6 + 2x^5 + 3x - 1$ ، الدرجة: 6، عدد الحدود: 4،

معاملها الرئيس: 5

5. الدرجة: 2، $f(x) + g(x) = 4x^2 + 3x + 3$ الدرجة: 2، $f(x) - g(x) = -2x^2 - 7x + 7$ 6. الدرجة: 3، $f(x) + g(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ الدرجة: 3، $f(x) - g(x) = -x^3 - 4x^2 + x + 2$ 7. الدرجة: 3، $f(x) + g(x) = 4x^3 + 8x^2 - 10$ الدرجة: 3، $f(x) - g(x) = -4x^3 - 4x^2 + 4$ 8. الدرجة: 3، $f(x) + g(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x - 2$ الدرجة: 3، $f(x) - g(x) = -3x^3 - x^2 - 8x + 2$

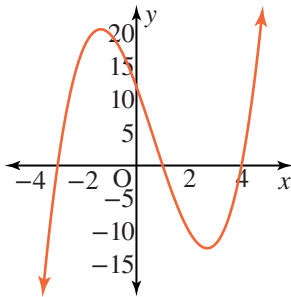
27. الأصفر: 0, -1, 4



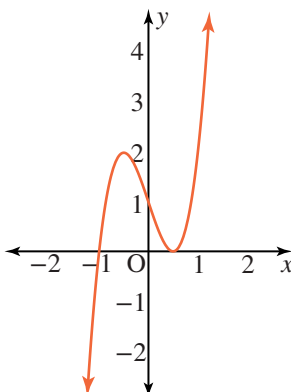
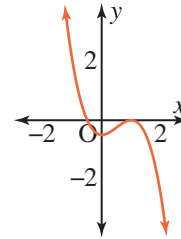
28. الدرجة: 3

الأصفر: -3 بتعددية 1، 1 بتعددية 1، 4 بتعددية 1

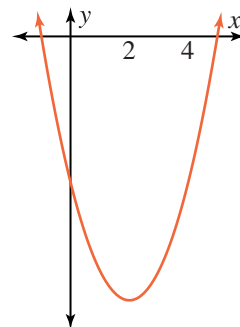
يقطع المحور x عند كل الأصفر



29. الدرجة: 3

الأصفر: $\frac{1}{2}$ بتعددية 2، -1 بتعددية 1يقطع المحور x عند $x = -1$ ، يلامس المحور x عند $x = \frac{1}{2}$ 24. $f(x) = -\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 1)^2$ 

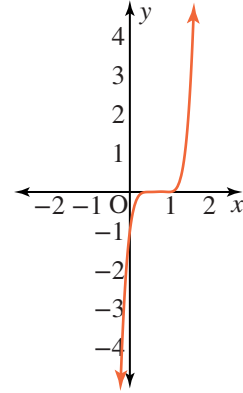
25. الأصفر: -1, 5



30. الدرجة: 5

الأصاف: $\frac{1}{2}$ بتعددية 3، 1 بتعددية 2

يقطع المحور x عند $x = \frac{1}{2}$ ، يلامس المحور x عند $x = 1$



33. الأصاف النسبية الممكنة: ± 2 و $\pm \frac{1}{2}$ و $\pm \frac{1}{3}$ و $\pm \frac{1}{4}$ و $\pm \frac{1}{6}$ و $\pm \frac{1}{12}$ و ± 1 و $\pm \frac{2}{3}$

الأصاف: $-\frac{1}{3}, -2$

34. الأصاف النسبية الممكنة: ± 1 و ± 2 ليس أي منها صفراً للدالة.

35. باستعمال الحاسبة، الأصاف الحقيقية للدالة: 0.74 و 2.14

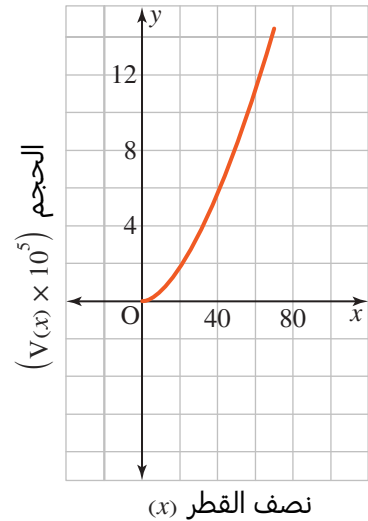
36. باستعمال الحاسبة، الأصاف الحقيقية للدالة: ± 2 و ± 1.73

37. باستعمال الحاسبة، الصفر الحقيقي للدالة: 2.48

38. باستعمال الحاسبة، الأصاف الحقيقية للدالة: -0.19 و -3.97

45. a. $V(x) = \frac{4}{3}\pi x^3 + \pi x^2(140 - 2x)$

b.



c. نحصل على أكبر حجم للحاوية عندما $x = 70$ (في هذه الحالة، تكون

الحاوية كرة) ويساوي $\frac{4}{3}\pi(70)^3 \approx 1\,436\,755 \text{ ft}^3$

46. a. $x^2 + \frac{4000}{x}$

b. حل المعادلة ($x^3 - 600x + 4000 = 0$) باستعمال الحاسبة.

الأصاف الحقيقية للدالة: 20 و 7.32 و -27.32

لا يمكن أن تكون قيمة المسافة سالبة.

إذن، الطول يساوي العرض يساوي 20 ft أو 7.32 ft

إذا كان الطول والعرض يساويان 20 ft، فإن $h = \frac{600 - x^2}{4x} = 2.5 \text{ ft}$

إذا كان الطول والعرض يساويان 7.32 ft، فإن $h = 18.66 \text{ ft}$

الوحدة 3 تقويم

9. $f(x) = x^2 + 3x - 4$ 10. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$

11. $f(x) = x - x^3$ 12. $f(x) = 3 - 2x - x^2$

في التمرينين 13 و 14، استعمل نظرية الباقي لإيجاد $f(k)$ وتحقق من الحل بالقسمة التركيبية.

13. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 7x - 2$ ، $k = 1$

14. $f(x) = -x^5 + x^4 - 1$ ، $k = -2$

15. لتكن $f(x) = x^4 - 3mx^2 + (m-1)x + 2$ حيث m عدد حقيقي. أوجد قيمة m في كل من الحالتين التاليتين:

a. باقي قسمة $f(x)$ على $x + 1$ هو -4

b. $x + 1$ هو أحد عوامل $f(x)$.

في التمرينين 16 و 17، استعمل نظرية العامل لتحديد ما إذا كان العامل الخاطئ المعطى هو أحد عوامل $P(x)$. إذا كان كذلك، اكتب $P(x)$ بصيغة التحليل إلى عوامل.

16. $P(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 6$ ، $x - 2$ $P(x) = (x^2 - x + 3)(x - 2)$

17. $P(x) = x^4 - 2x^3 + 10$ ، $x - 3$ لا

في التمرينين 18 و 19، استعمل نظرية الأصفار النسبية كي تكتب $P(x)$ في صورة ضرب عوامل أولية.

18. $P(x) = 4x^4 + 7x^2 - 2$ $P(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)(4x^2 + 8)$

19. $P(x) = -x^3 + x^2 + 3x - 3$ $P(x) = -(x - 1)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$

20. تختص شركة بتصنيع وبيع ألواح التجذيف.

ربح الشركة p ، بمئات الريالات المحققة، هو دالة لعدد ألواح التجذيف المباعة x ، بالآلاف.

$$p(x) = -3x^3 + 48x^2 - 144x$$

ما دلالة أصفار الدالة p حول عدد ألواح التجذيف التي يتعين على الشركة تصنيعها لتحقيق ربحاً؟

1. لتكن $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ و $g(x) = x^2 - 4x + 3$

أوجد كلاً مما يلي ثم حدد درجة الناتج:

a. $f(x) + g(x)$ الدرجة 1، $f(x) + g(x) = -x + 1$

b. $f(x) - g(x)$ الدرجة 2، $f(x) - g(x) = -2x^2 + 7x - 5$

c. $f(x) \times g(x)$ الدرجة 4، $f(x) \times g(x) = -x^4 + 7x^3 - 17x^2 + 17x - 6$

في التمرينين 2 و 3، اقسم $f(x)$ على $d(x)$ ثم اكتب النتيجة في صورة كثيرة حدود.

2. $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x - 5$ ، $d(x) = x - 3$

$$f(x) = (2x^2 - x + 1)(x - 3) - 2$$

3. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ ، $d(x) = x^2 - 2$

$$f(x) = (x^2 - 2)(x + 2) - x + 5$$

في التمرينين 4 و 5، اقسم مستخدماً القسمة المطولة ثم اكتب النتيجة في الصورة الكسرية.

4. $\frac{x^6 + 1}{x - 2}$

5. $\frac{2x^3 + x^2 - 1}{x + 1}$

6. أوجد التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود f من خلال الوصف التالي:

• $f(x)$ ذات قيم موجبة في الفترة $[-0.4, 0.5]$

والفترة $[1.4, \infty)$.

• $f(x)$ ذات قيم سالبة في الفترة $[-\infty, -0.4]$

والفترة $[0.5, 1.4]$.

• $f(x)$ متزايدة في كل من الفترتين $[-\infty, 0]$

والفترة $[1, \infty)$.

في التمرينين 7 و 8، حدّد درجة وأصفار الدالة كثيرة الحدود. أوجد تعددية كل صفر وحدد ما إذا كان منحنى الدالة يتقاطع مع المحور x أم يمسّه عند صفر الدالة ثم ارسم منحنى الدالة يدويّاً.

7. $f(x) = x^2(x - 2)^3$

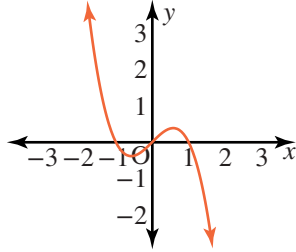
8. $f(x) = -3x(x - 1)^3(x + 2)^4$

في التمارين 9-12، صف السلوك الطرفي للدالة كثيرة الحدود مستعملًا $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. أوجد أصفار الدالة جبريّاً ثم ارسم منحنى الدالة.

الوحدة 3 الإجابات

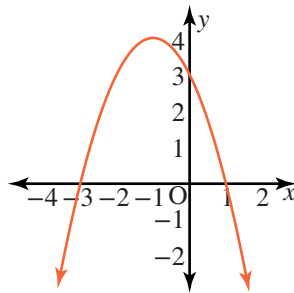
11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

الأصفار: -1 و 1 و 0



12. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$

الأصفار: -3 و 1 و 0



13. نقسم على $x - k$ و $f(k)$ هو العدد الذي على اليمين بحسب نظرية

الباقى: $f(1) = 3$

1	1	0	-3	7	-2
	1	1	-2	5	3

14. نقسم على $x - k$ و $f(k)$ هو العدد الذي على اليمين بحسب نظرية

الباقى: $f(-2) = 47$

-2	-1	1	0	0	0	-1
	2	-6	12	-24	48	
	-1	3	-6	12	-24	47

15. a. باقى قسمة $f(x)$ على $x + 1$ حسب نظرية الباقي

هو $f(-1) = -4$ ، إذن $f(-1) = -4$

$$(-1)^4 - 3m(-1)^2 + (m-1)(-1) + 2 = -4$$

$$-4m + 4 = -4$$

$$m = 2$$

b. $(x + 1)$ هو أحد عوامل $f(x)$ ، بحسب نظرية العامل إذا كان

$$-4m + 4 = 0$$

$$m = 1$$

20. أصفار الدالة $P(x)$ هي 0، 12، 4

عندما تباع الشركة 12 000 أو 4 000 لوح، لا تربح ولا تخسر.

عندما يكون المبيع بين 0 و 4 000، تخسر الشركة.

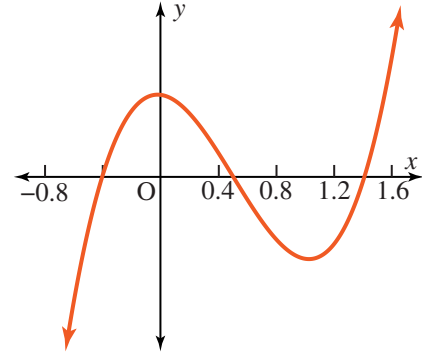
عندما يكون المبيع بين 4 000 و 12 000، تربح الشركة.

عندما يكون المبيع أكثر من 12 000، تخسر الشركة.

4. $\frac{x^6+1}{x-2} = x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 32 + \frac{65}{x-2}$

5. $\frac{2x^3+x^2-1}{x+1} = 2x^2 - x + 1 - \frac{2}{x+1}$

6.



7. الدرجة: 5

الأصفار: 0 بتعددية 2، 2 بتعددية 3

يمس المحور x عند $x = 0$ ، يقطع المحور x عند $x = 2$

8. الدرجة: 8

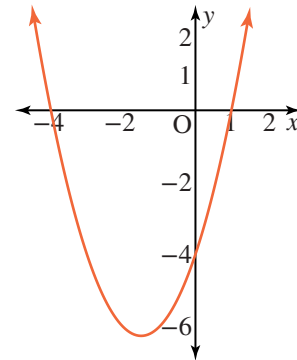
الأصفار: 0 بتعددية 1، 1 بتعددية 3، -2 بتعددية 4

يقطع المحور x عند $x = 0$ ، وعند $x = 1$

ويمس المحور x عند -2

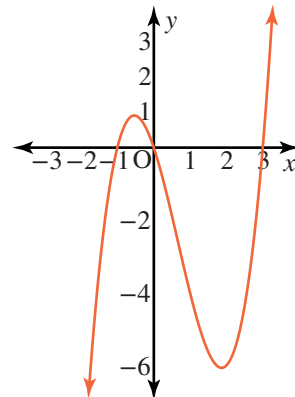
9. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

الأصفار: -4 و 1



10. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

الأصفار: -1 و 0 و 3



الوحدة 3 المشروع

نمذجة ارتفاع كرة ارتدادية

عندما ترتد كرة ما ارتفاعًا وانخفاضًا على سطح مستوي، يمكن نمذجة ارتفاعها بالنسبة إلى الزمن باستعمال دالة تربيعية. أحد أشكال الدالة التربيعية هو شكل الرأس:

$$y = a(x - h)^2 + k$$

في هذه المعادلة، y يمثل ارتفاع الكرة و x يمثل الزمن. لهذا المشروع، استعمل جهازًا لكشف الحركة بغية جمع بيانات عن ارتفاع الكرة الارتدادية والزمن، ومن ثم أوجد نموذجًا رياضيًا يصف موقع الكرة بدلالة الزمن.

يوضح الجدول أدناه نموذجًا عن بيانات تم جمعها باستعمال حاسبة CBL^{TM} .

ارتفاع الكرة (m)	الزمن الكلي المنقضي (sec)	ارتفاع الكرة (m)	الزمن الكلي المنقضي (sec)
0.828	1.118	0	0.688
0.811	1.161	0.155	0.731
0.776	1.204	0.309	0.774
0.721	1.247	0.441	0.817
0.650	1.290	0.553	0.860
0.563	1.333	0.643	0.903
0.452	1.376	0.716	0.946
0.322	1.419	0.773	0.989
0.169	1.462	0.809	1.032
		0.828	1.075

استكشافات

1. إن كنت قد جمعت بيانات حول الحركة باستعمال CBL^{TM} أو CBL^{TM} ، ينبغي أن يظهر على شاشة ممثل البيانات أو الحاسوب خاصتك مخطط بياني للارتفاع مقابل الزمن أو للمسافة مقابل الزمن. كلا المخططين يصلحان لهذا المشروع. إن لم يكن لديك إمكانية لاستعمال CBL^{TM} أو CBL^{TM} ، أدخل البيانات من الجدول إلى ممثل البيانات أو الحاسوب خاصتك. أنشئ مخطط انتشار للبيانات.

2. أوجد a و h و k كي تناسب المعادلة $y = a(x - h)^2 + k$ أحد ارتدادات الكرة الممثل في مخطط البيانات. قزب إحداثيات الرأس (h, k) باستعمال مخطط البيانات ومن ثم أوجد قيمة a جبريًا.

3. قم بتغيير قيمة كل من a و h و k في النموذج الذي أوجدته أعلاه، ولاحظ كيف يتأثر التمثيل البياني للدالة على ممثل البيانات أو الحاسوب خاصتك. عقم تأثير كل من هذه التغييرات على التمثيل البياني للدالة.

4. وسع المعادلة التي أوجدتها في الجزء 2 أعلاه لتصبح بالصيغة التربيعية القياسية $y = ax^2 + bx + c$.

5. استعمل ممثل البيانات أو الحاسوب لاختبار البيانات من الارتداد الذي نمذجته أعلاه، ومن ثم استعمل الانحدار التربيعي لإيجاد نموذج لهذه المجموعة من البيانات. ما وجه المقارنة بين هذا النموذج والصيغة التربيعية القياسية التي أوجدتها في الجزء 4؟

6. استعمل إكمال المربع لتحويل نموذج الانحدار إلى شكل الرأس للعبارة التربيعية، ومن ثم قارن بنموذج صيغة الرأس الأصلي الذي أوجدته في الجزء 2 (إذا شئت، قزب قيمة كل من a و b و c إلى أقرب 0.001 قبل إكمال المربع).

الوحدة 3 المشروع

لمحة عن المشروع

سوف يستكشف الطلاب في هذا المشروع تطبيقات حياتية حول مفهوم كثريرات الحدود. وبنمذجون ارتفاع كرة ارتدادية من خلال استعمال جهاز لكشف حركة الكرة بهدف جمع بيانات عن ارتفاع الكرة الارتدادية عن سطح مستوي والزمن المنقضي. عند تمثيله لهذه البيانات، سوف يجد الطالب أن ارتفاع كرة بالنسبة إلى الزمن المنقضي يتم نمذجته باستعمال الدالة التربيعية، التي هي كثريرات الحدود ذات الدرجة 2

تقديم المشروع

اعرض المشروع بمناقشة مفهوم "نمذجة ارتفاع كرة ارتدادية". يمكن استعمال الأسئلة أدناه لإدارة النقاش.

س: ماذا يعني نمذجة ارتفاع كرة ارتدادية؟

نمذجة كرة ارتدادية تعني إيجاد صيغة رياضية تمثل ارتفاع الكرة الارتدادية عن سطح مستوي.

س: كيف تساعدك المعادلة الرياضية $y = a(x - h)^2 + k$ في وصف حركة الكرة؟

تساعد هذه الصيغة في:

- وصف حركة الكرة من حيث انتقالها صعودًا أو نزولًا.

- إيجاد أقصى ارتفاع أو أدنى ارتفاع تصل إليه الكرة.

- إيجاد الزمن الذي تصل فيه الكرة إلى القيمة العظمى للارتفاع الأكبر أو القيمة العظمى للارتفاع الأصغر.

س: كيف تساعدك الصيغة القياسية في وصف حركة الكرة؟

تساعد الصيغة القياسية في إيجاد ارتفاع الكرة عن سطح الأرض لحظة قذفها.

س: كيف تساعدك الصيغة التحليلية في وصف حركة الكرة؟

تساعد الصيغة التحليلية في إيجاد الزمن المنقضي عندما تصطدم الكرة بالأرض.

تنفيذ المشروع

وضح للطلاب أن عليهم جمع بيانات مستعملين الحاسبة. بعد ذلك، على الطلاب أن يدخلوا بيانات الجداول إلى الحاسوب لينشئوا مخططًا لانتشار البيانات. ثم عليهم أن يجدوا الدالة التي تمثل هذا الانتشار. يجب أن ينسجم نوع هذه الدالة مع الدالة الناتجة من إيجاد الانحدار التربيعي.

إنهاء المشروع

يمكن للمعلم تحديد يوم يعرض فيه الطلاب مشاريعهم ويشرحون الخطوات التي اتبعوها في تنفيذ هذه المشاريع والنتائج التي استخلصوها.



الدوال وتمثيلاتها البيانية

بعد تطور الفيزياء، لعبت الدوال غير الخطية دورًا رئيسًا في التعبير عن معظم قوانينها، كما دخلت في صلب الصناعات الحديثة حيث تستأثر المنحنيات البيانية على أكثر الأشكال في المنتجات الصناعية. ويعرف كل منحنى باستعمال دالة محددة تمكّن الحاسوب من القيام بالتصاميم الدقيقة. ندرس في هذه الوحدة مجموعة من الدوال مع ما يتعلق بها من خواص وتطبيقات.

دوال الجذر التربيعي

4.1

دوال القيمة المطلقة

4.2

الدوال المتعددة التعريف

4.3

التناسب العكسي والدوال النسبية

4.4

4.1

دوال الجذر التربيعي

Square Root Functions



تعريف دالة الجذر التربيعي

اكتشف علماء الآثار أحد أغرب الأشكال الطبيعية الصخرية في علم الآثار في منطقة "الكرات الصخرية" في دولة كوستاريكا، حيث عثروا على مئات الصخور الكروية الشكل.

قاعدة إيجاد مساحة السطح للشكل الكروي هي:

$$SA = 4\pi r^2$$

يمكننا من خلال هذه القاعدة معرفة مساحة سطح الصخرة بدلالة طول نصف القطر الذي تتراوح قيمته بين 6 cm و 6 m، ويمكننا، باستعمال الجذر التربيعي، معرفة طول نصف القطر بدلالة مساحة السطح من خلال القاعدة $r = \sqrt{\frac{SA}{4\pi}}$ ، كما يمكن تمثيل ذلك بيانيًا بدالة تُسمى

دالة الجذر التربيعي.

الدالة التي يُستعمل فيها رمز الجذر التربيعي للمتغير تُسمى دالة الجذر التربيعي.

الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ ، هي الصيغة الأبسط لدالة الجذر التربيعي، وتُسمى الدالة الرئيسة.

لنحدد خصائص التمثيل البياني لدالة الجذر التربيعي $f(x) = \sqrt{x}$ ، علينا أن نكون جداولًا لقيم $(x, f(x))$ ، ثم نمثل الدالة بيانيًا.

x	$f(x) = \sqrt{x}$	$(x, f(x))$
0	$\sqrt{0} = 0$	(0, 0)
1	$\sqrt{1} = 1$	(1, 1)
4	$\sqrt{4} = 2$	(4, 2)
9	$\sqrt{9} = 3$	(9, 3)

ما ستتعلمه

- تعريف دالة الجذر التربيعي
- الصيغة العامة لدالة الجذر التربيعي
- معادلات الجذر التربيعي

... ولماذا

يفسر الجذر الكثير من الظواهر الفيزيائية، وتمكننا دراسة خواصه من التعرّف إلى التفاصيل الدقيقة لهذا المفهوم.

معيّار الدرس

11A.3.1

المصطلحات

• دالة الجذر التربيعي square root function

الهدف

سيتمكن الطلاب من التعرف على الخصائص الأساسية لدالة الجذر التربيعي وتمثيلها البياني وتحويلاتها وحل معادلات تتضمن جذورًا تربيعية والتحقق من الحلول بيانيًا.

دليل الدرس

1. دالة الجذر التربيعي وصيغتها العامة
2. حل معادلات الجذر التربيعي

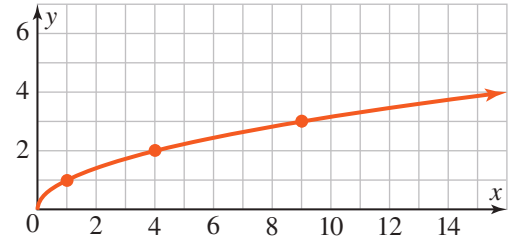
تحفيز

حثّ الطلاب على التفكير في الرابط بين التمثيل البياني للدالة $y = \sqrt{x-2} + 5$ والتمثيل البياني للدالة $y = \sqrt{x}$ (ازاحة أفقية وحدتين إلى اليمين وازاحة رأسية 5 وحدات إلى الأعلى).

دالة الجذر التربيعي الرئيسة $f(x) = \sqrt{x}$

دالة أساسية

- المجال: $[0, \infty[$
- المدى: $[0, \infty[$
- متصلة على الفترة $[0, \infty[$
- متزايدة لكل قيم x في مجالها
- لا يوجد تناظر: الدالة ليست دالة زوجية أو فردية
- للدالة قيمة صغرى عند النقطة $(0, 0)$
- ليس لها خطوط تقارب
- السلوك الطرفي: $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} = \infty$



مثال 1 الخصائص الأساسية لدالة الجذر التربيعي

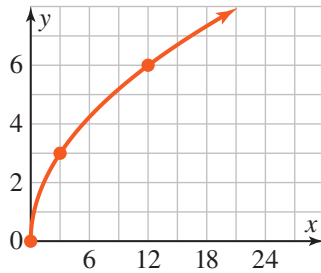
مثّل بيانيًا الدالة $g(x) = \sqrt{3x}$.
أوجد المجال والمدى للدالة، وحدّد ما إذا كانت متزايدة أو متناقصة.

الحل

اكتب جدولًا للقيم. قم باختيار قيم x بحيث يكون المجدور مربعًا لعدد صحيح.

x	0	3	12
y	0	3	6

لا يمكن أن يكون المجدور في دالة الجذر التربيعي سالبًا.
إذن، مجال الدالة هو $[0, \infty)$.
ارسم التمثيل البياني.



نواتج التعويض في دالة الجذر التربيعي دومًا قيم موجبة أو الصفر.
إذن، مداها هو $[0, \infty)$.

تزداد قيمة y كلما ازدادت قيم x ، إذن الدالة متزايدة لجميع قيم x في الفترة $[0, \infty)$.
لاحظ أن دوال الجذر التربيعي ليس لها خط تقارب أفقي، إذن فهي تتزايد إلى ما لا نهاية.

حاول أن تحل التمرين 1

نشاط استكشافي 1 المقارنة بين التمثيلات البيانية لدوال الجذر التربيعي

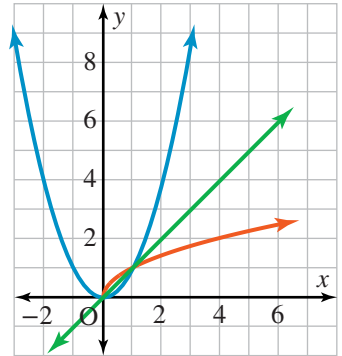
1. ارسم التمثيل البياني واكتب معادلة الدالة g التي يتم الحصول على تمثيلها البياني بإزاحة التمثيل البياني لدالة الجذر التربيعي $f(x) = \sqrt{x}$ ثلاث وحدات إلى اليسار.

2. ارسم التمثيل البياني واكتب معادلة الدالة h التي يتم الحصول على تمثيلها البياني بإزاحة التمثيل البياني لدالة الجذر التربيعي $f(x) = \sqrt{x}$ أربع وحدات إلى اليمين متبوعًا بانعكاس حول المحور x .

3. ارسم التمثيل البياني واكتب معادلة الدالة k التي يتم الحصول على تمثيلها البياني بإزاحة التمثيل البياني لدالة الجذر التربيعي $f(x) = \sqrt{x}$ ثلاث وحدات إلى اليمين، متبوعًا بتمدد رأسي معاملته 2، وأخيرًا بإزاحة وحدتين إلى الأعلى.

تذكير

إن دالة الجذر التربيعي $f(x) = \sqrt{x}$ هي الدالة العكسية للدالة $f(x) = x^2$ على مجال محدد هو $x \geq 0$.



نشاط المصطلحات

راجع مع الطلاب مصطلح "دالة"، واطلب منهم إعطاء أمثلة على أنواع الدوال المختلفة التي درسوها في الدروس السابقة. وضح للطلاب أن "دالة الجذر التربيعي" هي دالة تتضمن رمز الجذر، ثم اطلب منهم تحديد دالة الجذر التربيعي في الجدول أدناه.

الدالة	نعم	كلا
$f(x) = x^3$	☐	☒
$f(x) = x^4$	☐	☒
$f(x) = \sqrt{4x+2}$	☒	☐

أسئلة للتفكير

س: كيف يمكنك تحديد قيم x التي تجعل المجدور في $\sqrt{3x}$ مربعًا كاملاً؟
نموذج إجابة:

نختار مربعًا كاملاً (1, 4, 9, ...) ونضربه في 3 ونعوّض الناتج مكان x وبذلك يصبح المجدور (9, 36, 81, ...).

س: لماذا ينبغي التأكد من أن تكون قيمة المجدور في دالة الجذر التربيعي موجبة دائمًا؟
نموذج إجابة:

لأن الجذر التربيعي لعدد سالب ليس عددًا حقيقيًا معرّفًا، لذا يجب أن يكون المجدور عددًا موجبًا.

عادات التفكير

س: ما وجه المقارنة بين منحنى الدالة $y = \sqrt{x-h} + k$ ، حيث $h > 0$ و $k > 0$ ، ومنحنى الدالة $y = \sqrt{x}$ ؟
نموذج إجابة:

منحنى الدالة $y = \sqrt{x-h} + k$ هو إزاحة أفقية لمنحنى الدالة $y = \sqrt{x}$ بمقدار h وحدة إلى اليمين وإزاحة رأسية بمقدار k وحدة إلى الأعلى.

الصيغة العامة لدالة الجذر التربيعي

الصيغة العامة لدالة الجذر التربيعي هي $f(x) = a\sqrt{x-h} + k$ حيث المتغيرات a, h, k هي أعداد حقيقية.

$|a|$ يمثل التمدد والتضيق الرأسي، h يمثل الإزاحة الأفقية، و k يمثل الإزاحة الرأسية. يمكن تمثيل دالة الجذر التربيعي عمومًا من خلال عدة تحويلات على الدالة الرئيسة $f(x) = \sqrt{x}$.

مثال 2 التمثيل البياني لدالة الجذر التربيعي باستعمال التحويلات الهندسية

مثّل بيانيًا الدالة $g(x) = 2\sqrt{x+3} + 5$ مستعملًا التحويلات التي حوّلت التمثيل البياني للدالة $f(x) = \sqrt{x}$ إلى التمثيل البياني للدالة g .
ما أوجه المقارنة بين المجال والمدى للدالة g وبين المجال والمدى للدالة f ؟

الحل

أولًا، حدّد المتغيرات في الدالة $g(x) = 2\sqrt{x-(-3)} + 5$ ؛

$a = 2$ ، إذن الدالة f تتمدد رأسيًا بمعامل مقداره 2

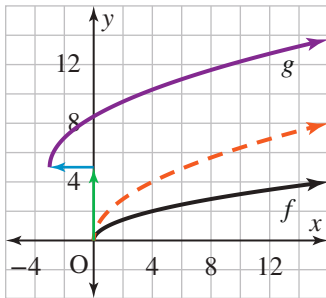
$k = 5$ ، إذن الدالة f تُزاح 5 وحدات إلى الأعلى.

$h = -3$ ، إذن الدالة f تُزاح 3 وحدات إلى اليسار.

ثانيًا، مثّل الدالة الرئيسة f بيانيًا مستعملًا الجدول أدناه ثم طبق التحويلات على تمثيلها البياني لتمثيل الدالة g .

x	0	1	4	9	16
$f(x)$	0	1	2	3	4

يتمدد التمثيل البياني للدالة f رأسيًا بمعامل مقداره 2، فيصبح بُعد كل قيم y عن المحور x مساويًا مثلي بعدها الأصلي (كما هو مبين في المنحنى المتقطع الأحمر).
تتم إزاحة التمثيل البياني بعد التمدد 3 وحدات إلى اليسار و 5 وحدات إلى الأعلى، فينتج التمثيل البياني للدالة g .



ويمكن من التمثيل البياني المقارنة بين المجال والمدى للدالتين f و g .
مجال الدالة f هو $x \geq 0$ ، و مجال الدالة g هو $x \geq -3$.
مدى الدالة f هو $y \geq 0$ و مدى الدالة g هو $y \geq 5$.

حاول أن تحل التمرين 8

أسئلة للتفكير

س: كيف يؤثر معامل الجذر في القيمة الجذرية وفي التمثيل البياني للدالة الجذرية؟

نموذج إجابة:

المعامل مضروب في القيمة الجذرية مباشرة، وهذا يؤدي إلى تمدد أو تضيق رأسي للتمثيل البياني.

س: ما الخصائص التي يمكن أن تحدها القيمان h و k لدالة الجذر التربيعي $f(x) = a\sqrt{x-h} + k$ ؟

نموذج إجابة:

يمكننا ملاحظة أن القيمتين h و k هما إحداثيا النقطة التي يبدأ عندها التمثيل البياني للدالة، وهذه النقطة تحدد الإزاحة التي أنتجت هذه الدالة.

مساعدة دراسية

يمكن كتابة المجذور $x+3$ في صورة $x-(-3)$ وهذا أقرب إلى الصيغة العامة لدالة الجذر التربيعي.

خطأ شائع

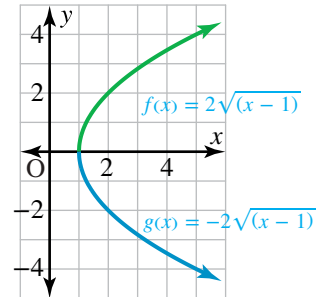
قد يجد الطلاب صعوبة في رسم التمثيل البياني للدالة بدقة بعد تحويلها. اطلب منهم أن يرسموا التمثيل البياني للدالة الرئيسة $y = \sqrt{x}$ من النقطة (h, k) ، ثم تمديده أو تضيقه بحسب قيمة المعامل a .

للطلاب سريع الإنجاز

(مع المثال 2) يجب أن يتبين الطلاب تأثير معامل الجذر الموجب والسالب في التمثيل البياني للدالة.

مثّل بيانيًا الدالتين الجذريتين: $f(x) = 2\sqrt{x-1}$ و $g(x) = -2\sqrt{x-1}$.

نموذج إجابة:



س: إذا كانت قيمة المعامل سالبة، هل ينعكس

المنحنى في المحور x أم المحور y ؟

نموذج إجابة:

ينعكس المنحنى في المحور x ، لأن الإشارة السالبة تغير إشارتي $f(x)$ و $g(x)$.

تذكر

إنّ مجال الدالة $f(x) = a\sqrt{x-h} + k$ هو $x-h \geq 0$ أي $x \geq h$.

مثال 3 إعادة كتابة دالة الجذر التربيعي لمعرفة التحويلات

أعد كتابة دوال الجذر التربيعي التالية لمعرفة التحويلات التي أجريت على الدالة الرئيسية $f(x) = \sqrt{x}$ ؟

A. $g(x) = \sqrt{9x}$

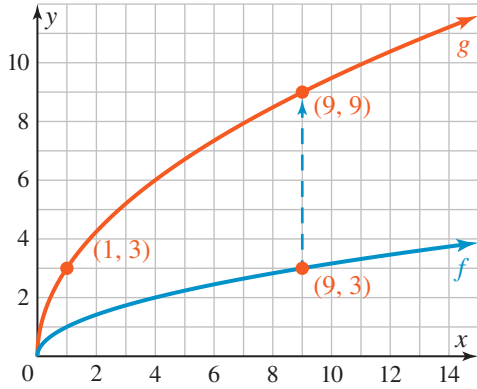
B. $h(x) = \sqrt{4x + 16} + 7$

الحل

A. استعمل خصائص الجذر التربيعي لإعادة كتابة الدالة وتمييز التغير الرأسي.

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{9x} && \text{اكتب المعادلة الأساسية} \\ &= \sqrt{9} \times \sqrt{x} && \text{استعمل خاصية الضرب في الجذر التربيعي} \\ &= 3\sqrt{x} && \text{بسط} \end{aligned}$$

بالمقارنة مع الصيغة العامة لدالة الجذر التربيعي $f(x) = a\sqrt{x-h} + k$ ، $a = 3$ ، إذن التمثيل البياني للدالة g هو تمديد رأسي للدالة الرئيسية بمعامل مقداره 3 ، قيمتا h و k هما صفر ، إذن ليست هناك أي إزاحة للتمثيل البياني. ويمكن التحقق من الحل بيانيًا كما يلي:



B. أعد كتابة الدالة في الصيغة العامة $h(x) = a\sqrt{x-h} + k$

استعمل خصائص الجذر التربيعي لإعادة كتابة الدالة وتمييز التغيرات على الدالة.

$$\begin{aligned} h(x) &= \sqrt{4x + 16} + 7 && \text{اكتب المعادلة الأساسية} \\ &= \sqrt{4(x + 4)} + 7 && \text{أخرج العامل المشترك} \\ &= \sqrt{4} \times \sqrt{x + 4} + 7 && \text{استعمل خاصية الضرب في الجذر التربيعي} \\ &= 2\sqrt{x + 4} + 7 && \text{بسط} \end{aligned}$$

إذن التمثيل البياني للدالة $h(x)$ هو تمديد رأسي للدالة الرئيسية بمعامل مقداره 2 ، تتبعه إزاحة 4 وحدات إلى اليسار و 7 وحدات إلى الأعلى.

(تابع)

أسئلة للتفكير

س: ما معنى إعادة كتابة دالة جذرية لتحديد التحويلات؟
نموذج إجابة:

عندما نكتب الدالة في الصورة $f(x) = a\sqrt{x-h} + k$ ، حيث $a > 0$ ، نتبين أن منحنى الدالة $f(x)$ هو تحويل لمنحنى الدالة الرئيسية $y = \sqrt{x}$ بعد إزاحة أفقية بمقدار $|h|$ وحدة وإزاحة رأسية بمقدار $|k|$ وحدة وتضيّق أو تمدد رأسي بمعامل a .

س: ما الذي ينبغي فعله في المجذور لإعادة كتابة الدالة الجذرية على الشكل المطلوب؟

نموذج إجابة:

يجب أن تكون قيمة معامل x في المجذور 1

مساعدة دراسية

يمكن أيضًا اعتبار التمثيل البياني للدالة f تضيّقًا أفقيًا للدالة الرئيسية $f(x) = \sqrt{x}$ بمعامل مقداره $\frac{1}{9}$

للطلاب الذين يواجهون صعوبات

(مع المثال 3) يجب أن يتدرب الطلاب على إعادة كتابة الدوال الجذرية في الصورة $f(x) = a\sqrt{x-h} + k$ لتحديد التحويلات التي تُنتج منحنى الدالة f انطلاقًا من الدالة الرئيسية $y = \sqrt{x}$.

س: اكتب الدالتين التاليتين في الصورة

$f(x) = a\sqrt{x-h} + k$ ، ثم صف التحويلات التي استعملتها.

1. $f(x) = \sqrt{16x}$

2. $f(x) = -\sqrt{4x+8} - 2$

نموذج إجابة:

1. $f(x) = \sqrt{16x} = 4\sqrt{x}$ ، إذن هذه الدالة هي تمديد رأسي للدالة الرئيسية $y = \sqrt{x}$ بمعامل قيمته 4

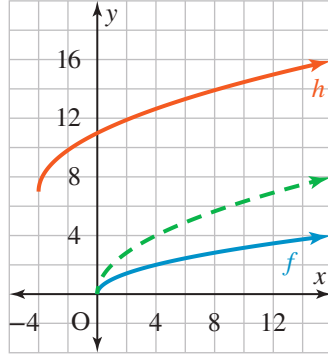
2. $f(x) = -\sqrt{4x+8} - 2 = -2\sqrt{x+2} - 2$ ، إذن هذه الدالة هي تمديد رأسي للدالة الرئيسية $y = \sqrt{x}$ بمعامل قيمته 2 ، ثم إزاحة أفقية وحدتين إلى اليسار ، ثم انعكاس حول المحور x ، ثم إزاحة رأسية وحدتين إلى الأسفل.

س: ما الذي يجب فعله في المجذور لإعادة كتابة الدالة الجذرية على الشكل المطلوب؟

نموذج إجابة:

يجب أن يكون المجذور في الصورة $x-h$ ، لذا يجب أخذ معامل x عاملاً مشتركًا ثم حساب جذره إن أمكن.

ويمكن التحقق من الحل بيانيًا كما يلي:



حاول أن تحل التمرين 10

مثال 4 تفسير دالة الجذر التربيعي

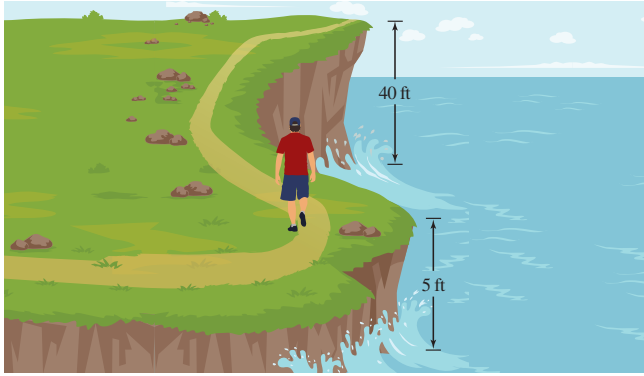
أسئلة للتفكير

س: (مع المثال 4) اشرح لماذا يجب إيجاد قيود المجال في مسائل الدوال الجذرية.
نموذج إجابة:
لأن المجال يجب أن يكون مناسبًا لشروط المسألة.
نلاحظ في هذه المسألة أن الارتفاع محصور بين 5 و 40 قدمًا.

س: هل يمكننا إيجاد القيم الدقيقة للدالة الجذرية؟
نموذج إجابة:

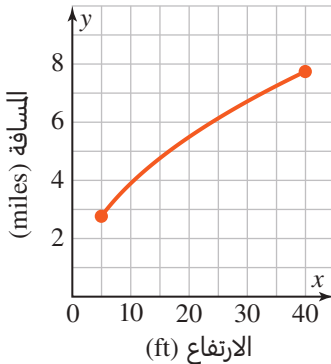
كلا، لأن الدالة الجذرية $f(x) = \sqrt{1.5x}$ لا تعطي إجابات دقيقة إلا عندما يكون المجذور مربعًا كاملاً، وإلا فإن الإجابات تكون تقريبية.

يمثل خط الأفق الحد الأقصى الذي يمكن رؤيته عند النظر إلى البحر، وهو يقع على مسافة مقدارها بالأميال $d(x) = \sqrt{1.5x}$ ، حيث x هو ارتفاع الناظر إلى البحر (بالأقدام) عن سطح البحر. سار ماجد صعودًا على الشاطئ الصخري من ارتفاع 5 ft إلى 40 ft، ما بُعد أقرب أفق وأبعد أفق رآهما ماجد أثناء سيره؟



الحل

أولاً، ارسم الدالة في المجال المعطى وهو $[5, 40]$.



ثانيًا، ابحث عن النقطتين العظمى والصغرى في التمثيل البياني. لاحظ أنهما نقطتا النهاية للتمثيل البياني في المجال المعطى.

ثالثًا، أوجد قيمة الدالة عند النقطتين العظمى والصغرى من المجال لتعرف أقرب وأبعد مسافة يمكن لمجد أن يراها.

(تابع)

المسافة الأقرب:

$$d(5) = \sqrt{1.5 \times 5}$$

$$\approx 2.74$$

عوض $x = 5$

احسب

المسافة الأبعد:

$$d(40) = \sqrt{1.5 \times 40}$$

$$\approx 7.75$$

عوض $x = 40$

احسب

الأفق الأقرب الذي رآه ماجد يبعد 2.74 mi، بينما أصبح الأفق على بُعد 7.75 mi عند أعلى نقطة على الشاطئ الصخري.

حاول أن تحل التمرين 14

معادلات الجذر التربيعي

يمكننا حل معادلات تشتمل على جذر تربيعي جبريًا بالتربيع أولاً للحصول على معادلة أبسط، ثم بالتحقق ثانياً من القيمة الناتجة للمتغير x . فإذا كانت هذه القيمة تحقق المعادلة الأصلية المشتملة على الجذر أو الجذور التربيعية، اعتُبرت هي الحل للمعادلة. كما يمكننا حل معادلات الجذر التربيعي بيانياً من خلال تقاطع التمثيل البياني لدالة جذر تربيعي مع تمثيل بياني لدالة خطية كما هو مبين في المثالين التاليين.

مثال 5 حل معادلة بجذر واحد

A. حل المعادلة الجذرية $\sqrt{x+5} - 1 = 3$ ، ثم تحقق من الإجابة بيانياً.

B. حل المعادلة الجذرية $\sqrt{3x-2} = x - 4$ ، ثم تحقق من الإجابة عبر مقارنة التمثيلين البيانيين للمعادلة الأصلية والمعادلة الناتجة عن تربيع طرفي المعادلة.

الحل

A. لحل هذه المعادلة يمكنك عزل الجذر، ثم تربيع طرفي المعادلة لإزالة الجذر وإيجاد قيمة x .

$$\sqrt{x+5} - 1 = 3$$

اكتب المعادلة الأصلية

$$\sqrt{x+5} = 4$$

أضف 1 إلى طرفي المعادلة

$$(\sqrt{x+5})^2 = 4^2$$

رتّب طرفي المعادلة لإزالة الجذر

$$x+5 = 16$$

بسّط

$$x = 11$$

اطرح 5 من طرفي المعادلة

إذن، حل المعادلة الجذرية هو $x = 11$.

أسئلة للتفكير

س: (مع المثال 4) باستعمال الدالة نفسها من المثال 4، وعلى افتراض أن إغ ماجد يسير على ارتفاع يتراوح بين 8 ft و 48 ft، أوجد المسافة الصغرى والمسافة العظمى التي يستطيع أن يراها.

نموذج إجابة:

المسافة الصغرى هي 3.46 ft تقريباً والمسافة العظمى هي 8.49 ft تقريباً.

س: ما هو التأثير الذي نتج عن تغيير الفترة على الدالة وعلى الحل؟

نموذج إجابة:

بما أن إغ ماجد بدأ السير على ارتفاع أعلى من ماجد، فإنه يكون سار حتى ارتفاع أكثر علوّاً، وبالتالي سيرى أبعد من ماجد.

أسئلة للتفكير

س: (مع معادلات الجذر التربيعي) كيف تساعد معرفتك لحل المعادلات الأسية في حل المعادلات الجذرية؟

نموذج إجابة:

إذا أردنا عزل المقدار الذي يتضمن المتغير، علينا أن نقوم بالعملية العكسية. هذا يعني إذا تضمن المقدار جذراً تربيعياً، يكون علينا تربيعه حتى نعزل المتغير.

س: ما هي الطرق التي نستعملها لحل معادلة جذرية ومعادلة أسية؟

نموذج إجابة:

لكل نوع من المعادلات، يمكننا عزل المقدار الذي يتضمن المتغير، عبر القيام بالعملية العكسية.

يمكننا أيضاً تمثيل المعادلتين اللتين نتجتا عن المعادلة الأصلية.

أسئلة للتفكير

س: ما معنى عزل الجذر؟

نموذج إجابة:

عزل الجذر يعني إعادة كتابة المعادلة بحيث يوضع الجذر وحده في أحد طرفي المعادلة.

س: كيف يمكن التخلص من الجذر التربيعي؟

ولماذا نريد التخلص من الجذر التربيعي؟

نموذج إجابة:

للتخلص من الجذر التربيعي نقوم أولاً بعزل الجذر في أحد طرفي المعادلة، ثم نقوم بتربيع طرفي المعادلة.

التخلص من الجذر يؤدي إلى إيجاد قيمة x .

عادات التفكير

س: إذا تساوى مربعاً عددين، هل يعنى هذا أن العددين متساويين أيضاً؟ وضح إجابتك.

نموذج إجابة:

كلا، إن لعددين بنفس القيمة ولكن بإشارتين مختلفتين نفس قيمة تربيعهما.

أسئلة للتفكير

س: لماذا قد نجد حلولاً محتملة لمعادلة هي ليست في الواقع حلولاً للمعادلة الأصلية؟

نموذج إجابة:

قد ينتج عن تربيع جانبي المعادلة معادلة جديدة لها حلان. فقط واحد من هذين الحلين قد يحقق المعادلة الأصلية.

س: عند حل معادلة جذر تربيعي، ما الذي قد يشير إلى وجود حل مرفوض؟

نموذج إجابة:

عندما تتطلب خطوات الحل حلاً لمعادلة تربيعية، يشير هذا إلى احتمال وجود حل مرفوض للمعادلة الأصلية.

س: في الجزء B من المثال 5، لماذا علينا الانتباه عند تربيع طرفي المعادلة؟

نموذج إجابة:

علينا التأكد من أننا نقوم بتربيع الطرف الأيمن بأكمله، أي $(x - 4)^2$ ، وهذا ما سيتطلب التفكير في الخطوات اللاحقة.

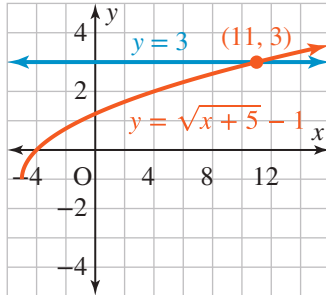
الحل غير المقبول

الحل غير المقبول هو حل لمعادلة اشتقت من معادلة أصلية، لكنه لا يشكل حلاً للمعادلة الأصلية.

تحقق من إجابتك بتعويض $x = 11$ في المعادلة الأصلية:

$$\sqrt{11+5} - 1 = \sqrt{16} - 1 = 4 - 1 = 3 \checkmark$$

يمكنك التحقق من الإجابة أيضاً من خلال تمثيل المعادلتين $y = \sqrt{x+5} - 1$ و $y = 3$ بيانياً في نفس المستوى الإحداثي.



التمثيلان البيانيان للمعادلتين يتقاطعان عند النقطة (11, 3) إذن، الحل الوحيد للمعادلة هو $x = 11$.

B. اكتب المعادلة الأصلية

$$\sqrt{3x-2} = x-4$$

رتب طرفي المعادلة

$$(\sqrt{3x-2})^2 = (x-4)^2$$

بسط وفك

$$3x-2 = x^2-8x+16$$

اكتب في الصيغة القياسية

$$0 = x^2-11x+18$$

حلل إلى العوامل

$$0 = (x-9)(x-2)$$

استعمل خاصية الضرب الصفري

$$x = 9 \text{ أو } x = 2$$

تحقق من الحلول الممكنة بتعويض الحلول عن x في المعادلة الأصلية:

$$\sqrt{3(9)-2} \stackrel{?}{=} 9-4$$

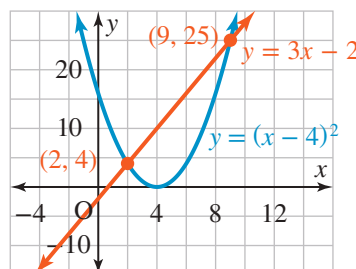
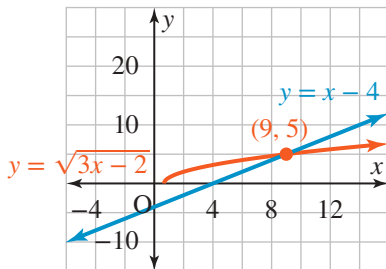
$$\sqrt{3(2)-2} \stackrel{?}{=} 2-4$$

$$\sqrt{25} = 5 \checkmark$$

$$\sqrt{4} \neq -2 \times$$

إذن، 9 هو الحل الوحيد للمعادلة، و 2 هو حل غير مقبول.

إذا أردنا التحقق من الحل غير المقبول بيانياً، علينا أن نقارن التمثيل البياني للمعادلة الأصلية مع التمثيل البياني للمعادلة التي تنتج بعد تربيع طرفي المعادلة الأصلية.



(تابع)

يتقاطع التمثيلان البيانيان للدالتين الأصليتين $y = \sqrt{3x - 2}$ و $y = x - 4$ في النقطة (9, 5)، إذن حل المعادلة $\sqrt{3x - 2} = x - 4$ هو $x = 9$.

بينما يتقاطع التمثيلان البيانيان للدالتين بعد التربيع $y = 3x - 2$ و $y = (x - 4)^2$ في النقطتين (9, 25) و (2, 4)، إذن حل المعادلة $(\sqrt{3x - 2})^2 = (x - 4)^2$ هو $x = 9$ و $x = 2$.

مما يعني أن المعادلتين $\sqrt{3x - 2} = x - 4$ و $(\sqrt{3x - 2})^2 = (x - 4)^2$ ليستا متكافئتين. للتمثيلين البيانيين نقطة التقاء عند $x = 9$ ، إلا أن التمثيل البياني الثاني له نقطة التقاء ثانية عند $x = 2$. نلاحظ أن تربيع طرفي المعادلة الأصلية أنتج حلاً غير مقبول.

حاول أن تحل التمرين 20

إذا كان في المعادلة أكثر من جذر فإن تربيعاً واحداً قد لا يكون كافياً، ولذلك نعلم إلى حل هذا النوع من المعادلات باستعمال التربيع أكثر من مرة.

مثال 6 حل معادلة بجذرين

$$\sqrt{x + 9} - \sqrt{2x} = 3$$

الحل

عندما تتضمن معادلة جذرين، ابدأ عملية الحل بعزل أحد الجذرين.

$$\sqrt{x + 9} - \sqrt{2x} = 3 \quad \text{اكتب المعادلة الأصلية}$$

$$\sqrt{x + 9} = \sqrt{2x} + 3 \quad \text{أضف } \sqrt{2x} \text{ إلى طرفي المعادلة لعزل } \sqrt{x + 9}$$

$$(\sqrt{x + 9})^2 = (\sqrt{2x} + 3)^2 \quad \text{رتب طرفي المعادلة}$$

$$x + 9 = 2x + 6\sqrt{2x} + 9 \quad \text{بسط الطرف الأيسر وفكك الطرف الأيمن باستعمال خاصية التوزيع}$$

$$0 = x + 6\sqrt{2x} \quad \text{بسط}$$

$$-x = 6\sqrt{2x} \quad \text{اعزل المقدار الجذري}$$

$$(-x)^2 = (6\sqrt{2x})^2 \quad \text{رتب الطرفين}$$

$$x^2 - 72x = 0 \quad \text{بسط واكتب في الصيغة القياسية}$$

$$x(x - 72) = 0 \quad \text{حلل إلى العوامل بشكل كامل}$$

$$x = 0 \quad \text{أو} \quad x = 72 \quad \text{استعمل خاصية الضرب الصفري}$$

تحقق من الحلول الممكنة بتعويض 0 و 72 عن x في المعادلة الأصلية:

$$\sqrt{x + 9} - \sqrt{2x} \stackrel{?}{=} 3 \quad \sqrt{x + 9} - \sqrt{2x} \stackrel{?}{=} 3$$

$$\sqrt{(0) + 9} - \sqrt{2(0)} \stackrel{?}{=} 3 \quad \sqrt{(72) + 9} - \sqrt{2(72)} \stackrel{?}{=} 3$$

(تابع)

للطلاب سريع الانجاز

اطلب من الطلاب أن يستكشفوا حل معادلات بأسس نسبية ليس لها حلول عبر التمثيل البياني. على الطلاب أن يلاحظوا أن $\sqrt{\square}$ لمقدار يساوي نفس المقدار بأس $\frac{1}{2}$ يساوي $\frac{1}{2}$.

$$\sqrt{6x + 8} = (x - 7)^{\frac{1}{2}}$$

س: ما هي الخطة التي ستبعتها لإيجاد الحل؟

نموذج إجابة:

عبر تمثيلها بيانياً.

س: ما الذي تلاحظه في الحل؟

نموذج إجابة:

ليس هناك حلاً حقيقياً. التمثيلان البيانيان للدالتين

$$y = \sqrt{6x + 8} \quad \text{و} \quad y = (x - 7)^{\frac{1}{2}}$$

نجد أيضاً عند الحل أن $x = -3$ ، وبما أن $x = -3$

لا ينتمي إلى مجال أي من الدالتين، فيكون حلاً غير

مقبول.

أسئلة للتفكير

س: ما الطريقة الأخرى التي يمكنك استعمالها لحل

معادلة من دون إجراء حسابات؟

نموذج إجابة:

يمكننا تمثيل طرفي المعادلة بيانياً.

الحل هو الإحداثي x لنقطة تقاطع التمثيلين البيانيين.

س: لماذا بقي الجذر بعد تربيع طرفي المعادلة في

الخطوة الثانية من الحل؟

نموذج إجابة:

بعد تفكيك الطرف الأيمن $(\sqrt{2x} + 3)^2$ باستعمال خاصية

التوزيع، فإن ضرب الجذر في عدد حقيقي يبقى على

الجذر.

س: ما الخطوات التي تتبعها لحل معادلات فيها جذرين

تربيعيين؟

نموذج إجابة:

نعزل الجذرين في طرفي المعادلة و نقوم بتربيع

الطرفين. ثم نحل أول معادلة عبر تحليلها إلى العوامل،

لكن المعادلة الثانية نحل بواسطة الصيغة التربيعية.

خطأ شائع

ثمة خطأ شائع عند تربيع مقدار جذري مثل $\sqrt{2x} + 3$

يتمثل في تربيع الجذر فقط. قم بتربيع هذا المقدار كما

ترتّب أي ذات حدين، وذلك باستعمال خاصية التوزيع.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

عادات التفكير

س: لماذا قد تبدو الحلول غير المقبولة خيارات ممكنة

للمعادلات الجذرية؟

نموذج إجابة:

الحلول المرفوضة قد تبدو معقولة بعد تربيع طرفي

المعادلة.

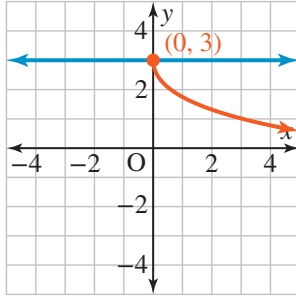
$$\begin{aligned}\sqrt{9} - \sqrt{0} &\stackrel{?}{=} 3 & \sqrt{81} - \sqrt{144} &\stackrel{?}{=} 3 \\ 3 - 0 &\stackrel{?}{=} 3 & 9 - 12 &\stackrel{?}{=} 3 \\ 3 &= 3 \checkmark & -3 &\neq 3 \times\end{aligned}$$

إذن، 0 هو الحل الوحيد للمعادلة، و 72 لا يجعل المعادلة الأصلية صحيحة، لذا فإن 72 حل غير مقبول.

تحقق بيانيًا

يمكنك التحقق من الإجابة أيضًا من خلال تمثيل المعادلتين $y = \sqrt{x+9} - \sqrt{2x}$ و $y = 3$ بيانيًا في نفس المستوى الإحداثي.

التمثيلان البيانيان للمعادلتين يتقاطعان فقط عند $x = 0$.



حاول أن تحل التمرين 21

التقييم المستمر

التقييم الذاتي:

التمرين 2, 4, 5, 11, 17, 25, 31, 35

للطلاب الذين يواجهون صعوبات

(مع المثال 6) قد يجد بعض الطلاب صعوبة في تربيع طرفي المعادلة عند اشتغالها على جذرين. اطلب من الطلاب التدرب على تربيع مقادير جبرية مختلفة. س: رتّب المقادير التالية:

1. 12
2. $\sqrt{5x}$
3. $\sqrt{x} + 6$
4. $\sqrt{3x} + 10$

الإجابات:

1. 144
2. $5x$
3. $x + 12\sqrt{x} + 36$
4. $3x + 20\sqrt{3x} + 100$

س: ما الذي ينبغي الانتباه إليه عند تربيع هذه المقادير؟ نموذج إجابة:

يجب تربيع كل المقدار وليس ما هو تحت الجذر فقط.

متابعة

س: اسأل الطلاب: هل مجال الدالة $y = \sqrt{x-a}$ هو $[a, \infty[$ أم $[a, \infty[$ ؟ نموذج إجابة: $[a, \infty[$

ملاحظات على التمارين

التمرين 1-8، تركز على التمثيلات البيانية للدالة الجذرية بصيغتها العامة من خلال استعمال التحويلات الهندسية.

التمرين 9-12، تركز على إعادة كتابة الدالة الجذرية.

التمرين 16-25 و 30-35، تركز على المعادلات الجذرية.

التمرين 38-41، تدرب الطالب على أنماط من الاختبارات.

مراجعة سريعة 4.1

في التمارين 1-3، أوجد قيمة الجذر التربيعي.

1. $\sqrt{64}$ 8
2. $\sqrt{225}$ 15
3. $\sqrt{14400}$ 120

في التمارين 4-6، أوجد قيمة y لقيمة x المعطاة.

4. $y = \sqrt{x-24} - 1$, $x = 25$ 0
5. $y = -\sqrt{x+9} + 2$, $x = 40$ -5
6. $y = \sqrt{3x}$, $x = 25$ $5\sqrt{3}$

في التمارين 7-9، هل الدالة موجبة أو سالبة أو غير ذلك عند قيمة x المعطاة.

7. $y = -\sqrt{2x+9} + 3$, $x = 0$ صفر
8. $y = \sqrt{x-1} + 1$, $x = 1$ موجبة
9. $y = -\sqrt{3x+4}$, $x = 15$ سالبة

الدرس 4.1 التمارين

14. تُحسب سرعة المركب الشراعي y ، بالعقدة البحرية، باستعمال المعادلة $y = 1.34\sqrt{x}$ ، حيث x طول المركب عند مستوى



سطح الماء، بالأقدام. تؤجر شركة
مراكب شراعية أطوالها عند مستوى
سطح الماء من 25 إلى 64 قدمًا.

a. مثل بيانيًا العلاقة بين سرعة
المركب الشراعي وطوله عند
مستوى سطح الماء.

b. أوجد السرعتين الدنيا والقصى
لمراكب هذه الشركة.

15. **المنطاد** المسافة إلى خط الأفق هي دالة المسافة بدلالة الارتفاع

عن مستوى سطح البحر. إذا كان الارتفاع h عن مستوى سطح
البحر مقيسًا بالأقدام وكانت المسافة d إلى خط الأفق مقيسة
بالأميال، فإن: 8.97 ميلًا

$$d(h) \approx 1.22\sqrt{h}$$



ينظر راكب المنطاد من ارتفاع 54 قدمًا فوق مستوى سطح البحر.
أوجد المسافة التي تفصل راكب المنطاد عن خط الأفق.

في التمارين 16-20، أوجد حل المعادلة الجذرية.

16. $\sqrt{x-2} + 3 = 5$ $x = 6$

17. $\sqrt{4x} = 11$ $x = 30.25$

18. $\sqrt{75+x} - 6 = 14$ $x = 325$

19. $x = \sqrt{7x+8}$ $x = 8$

20. $x+2 = \sqrt{x+2}$ $x = -2$ أو $x = -1$

في التمارين 1-4، مثل بيانيًا الدالة. ثم أوجد المجال والمدى وحدد
ما إذا كانت الدالة متزايدة أو متناقصة.

1. $f(x) = \sqrt{x-2}$

2. $f(x) = \sqrt{x+2}$

3. $f(x) = \sqrt{x+1} - 2$

4. $f(x) = 3\sqrt{x-5}$

في التمارين 5-8، مثل بيانيًا كل من الدوال التالية مستعملًا
التحويلات الهندسية المناسبة للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \sqrt{x}$.
ثم صف أوجه المقارنة بين المجال والمدى للدالة المعطاة، وبين
المجال والمدى للدالة f .

5. $q(x) = \sqrt{x} + 11$

6. $r(x) = \sqrt{x+11}$

7. $s(x) = \sqrt{x-2} + 5$

8. $t(x) = 2\sqrt{x+3} - 6$

في التمارين 9-12، أعد كتابة الدالة الجذرية لمعرفة التحويلات التي
أُجريت على الدالة الرئيسة $f(x) = \sqrt{x}$.

9. $f(x) = \sqrt{16x}$

10. $f(x) = \sqrt{25x+75}$

11. $f(x) = \sqrt{9x-45}$

12. $f(x) = \sqrt{4x-24} - 6$

13. **تعديل العلامات** يعدّل المعلم علامات التلاميذ باستعمال
منحنى. إذا كانت علامة تلميذ قبل التعديل هي x ، فإن المعادلة
 $c(x) = 10\sqrt{x}$ تعطي علامته بعد التعديل. حصل أربعة تلاميذ
على العلامات التالية: 49، 42، 55، 72 ما هي علاماتهم
بعد التعديل؟ 70، 65، 74، 85

في التمارين 21-25، أوجد حل المعادلة الجذرية.

21. $\sqrt{x+4} - \sqrt{3x} = -2$ $x = 12$

22. $\sqrt{15-x} - \sqrt{6x} = -3$ $x = 6$

23. $\sqrt{6+x} - \sqrt{x-5} = 2$ $x = \frac{129}{16}$

24. $\sqrt{4x+5} - \sqrt{x+1} = 1$ $x = -1$ أو $x = -\frac{5}{9}$

25. $\sqrt{x+1} + 1 = \sqrt{x+3}$ $x = -\frac{3}{4}$

في التمارين 26-28، اكتب صيغة الدالة المزاحة وقارن بين تمثيلها البياني والتمثيل البياني للدالة الرئيسية.

26. إزاحة 6 وحدات إلى الأعلى للدالة $f(x) = \sqrt{x}$. $y = \sqrt{x} + 6$

27. إزاحة $\frac{1}{2}$ وحدة إلى الأعلى للدالة $f(x) = \sqrt{x}$. $y = \sqrt{x} + \frac{1}{2}$

28. إزاحة وحدتين إلى الأسفل ووحدة واحدة إلى اليسار للدالة

$f(x) = \sqrt{x}$ $y = \sqrt{x+1} - 2$

29. مثل بيانيًا الدالتين $y = \sqrt{-x}$ و $y = -\sqrt{x}$ ماذا تلاحظ؟

في التمارين 30-33، أوجد حل المعادلة الجذرية، وحدّد ما إذا كان الحل مقبولاً أم مرفوضاً.

30. $x = \sqrt{x+6}$ ($x = -2$ حل غير مقبول)، $x = 3$

31. $x = \sqrt{17x-15}$ $x = \frac{17+\sqrt{229}}{2}$ و $x = \frac{17-\sqrt{229}}{2}$

32. $4x = \sqrt{6x+10}$ ($x = -\frac{5}{8}$ حل غير مقبول)، $x = 1$

33. $x = \sqrt{56-x}$ ($x = -8$ حل غير مقبول)، $x = 7$

في التمرينين 34-35، أوجد الحل غير المقبول.

34. $\sqrt{8x+9} = x$ حل غير مقبول $x = -1$

35. $x = \sqrt{24-2x}$ حل غير مقبول $x = -6$

36. **نشاط جماعي** استخدم مع زميلك الآلة الحاسبة للتمثيل البياني لتتعلم كيفية رسم التمثيل البياني لدالة الجذر التربيعي، ثم حاول أن تعرف مجالها ومداها من خلاله.

37. **بندول الساعة** يستغرق بندول ساعة "بيغ بين" 4 s ليتأرجح

دورة كاملة. تعطي الصيغة $t = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$ مدة التأرجح، t ، بالثواني (s)، اعتمادًا على طول البندول، L ، بالأقدام.

أوجد الطول الأدنى الضروري لبناء ساعة يستغرق بندولها زمنًا أطول من الزمن الذي يستغرقه بندول ساعة "بيغ بين" للتأرجح دورة كاملة. 13 ft

أسئلة اختبار معيارية

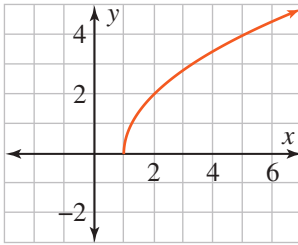
38. **صواب أم خطأ** كتب محمد النقطتين التاليتين عن العلاقة التي

تربط التمثيل البياني للدالة $g(x) = \sqrt{x+3}$ بالتمثيل البياني للدالة $f(x) = \sqrt{x}$. هل ما كتبه محمد صحيح؟ خطأ، التمثيل البياني للدالة g هو إزاحة للتمثيل البياني للدالة f بمقدار 3 وحدات إلى اليسار.

- المجهول في $g(x)$ هو $x+3$.
- تقع $x+3$ على يمين x ، إذن التمثيل البياني للدالة g هو إزاحة لتمثيل الدالة f بمقدار 3 وحدات إلى اليمين.

39. **صواب أم خطأ** كتبت خولة معادلة الدالة الممثلة بيانيًا في

الشكل أدناه. هل ما كتبه خولة صحيح؟ برّر إجابتك.



$f(x) = \sqrt{x-1}$

خطأ، $f(x) = 2\sqrt{x-1}$.

40. **اختيار من متعدد** أي الدوال التالية إزاحة رأسية للدالة

A. $f(x) = \sqrt{x}$

A. $g(x) = \sqrt{x} - 4$

B. $h(x) = \sqrt{x+3}$

C. $k(x) = \sqrt{-5+x}$

D. $m(x) = \sqrt{5x}$

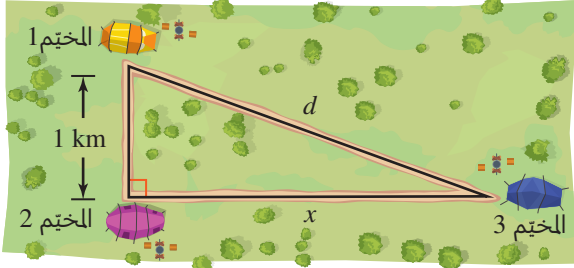
توسيع الأفكار

45. **تخييم** غادر مجموعة من المخيّمين المخيم رقم 2 وتسلقوا

مسافة x km لبلوغ المخيم رقم 3

تعطي المعادلة $d(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ المسافة d ، الفاصلة بين

مجموعة المخيّمين والمخيم رقم 1



(غير مرسوم وفق مقياس)

a. هل دالة جذر تربيعي؟

b. ليكن $t = x^2$. مثّل بيانيًا d بدلالة t .

46. تُسمى "سرعة الإفلات" السرعة التي يجب أن يتحرك بها جسيم

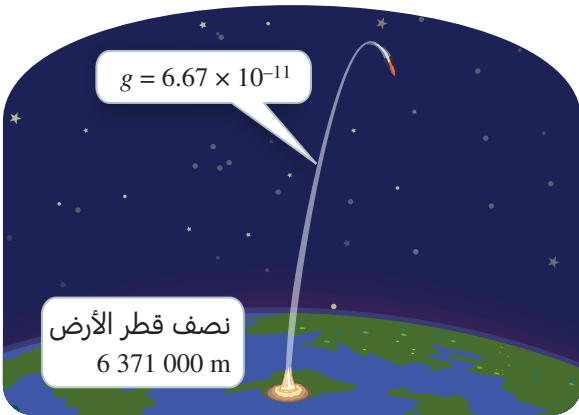
ليستطيع مغادرة نجم أو كوكب دون أن يعود ويقع على سطحه

أو يعلق في مداره. تعتمد سرعة الإفلات، v ، على ثابت الجاذبية،

G ، والكتلة، M ، وطول نصف القطر، r ، للنجم

أو للكوكب.

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$



a. أعد كتابة المعادلة لإيجاد الكتلة M . $M = \frac{r \times v^2}{2G}$

b. سرعة الإفلات لكوكب الأرض هي 11200 m/s، وطول نصف

قطره 6 371 000 m، ثابت الجاذبية هو 6.67×10^{-11}

أوجد كتلة الأرض بالكيلوغرامات. $M \approx 5.99 \times 10^{24} \text{ kg}$

41. **اختيار من متعدد** أي الدوال التالية لها تمثيل بياني مجاله

$x \geq -1$ ومداها $y \geq -2$ ؟ D

A. $f(x) = \sqrt{x-1} + 2$

B. $f(x) = \sqrt{x-2} + 1$

C. $f(x) = \sqrt{x+2} - 1$

D. $f(x) = \sqrt{x+1} - 2$

استكشاف

42. **الكتابة للتعلم** يشكّل التمثيل البياني للدالة الرئيسية

$f(x) = \sqrt{x}$ انعكاسًا في المحور x للتمثيل البياني للدالة

$g(x)$. اكتب دالة الجذر التربيعي $g(x)$. $g(x) = -\sqrt{x}$

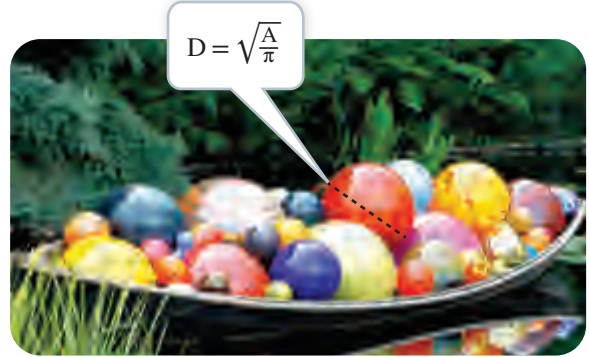
43. **الكتابة للتعلم** حدّد متغيرات التحويلات التي حولت الدالة

الرئيسية $f(x) = \sqrt{x}$ إلى الدالة $g(x) = -\sqrt{x+2} - 1$ ،

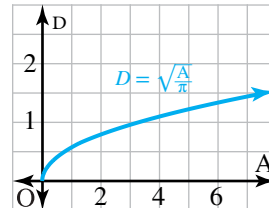
كاتبًا الدالة في الصيغة العامة، ثم حدد نوع هذه التحويلات.

44. العلاقة التي تربط بين المساحة السطحية A والقطر D لكل كرة

زجاجية هي كما هي مبينة في الصورة:

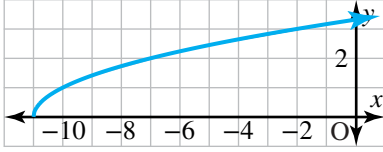


مثّل بيانيًا D بدلالة A .

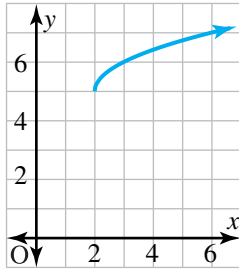


إجابات على أسئلة التمارين 4.1

6. إزاحة أفقية للدالة f بمقدار 11 وحدة إلى اليسار. مجال الدالة f هو $x \geq 0$ بينما مجال الدالة r هو $x \geq -11$. للدالتين نفس المدى: $y \geq 0$.

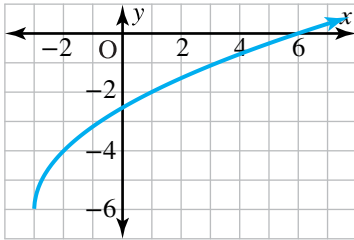


7. إزاحة أفقية للدالة f بمقدار وحدتين إلى اليمين ثم إزاحة رأسية بمقدار 5 وحدات إلى الأعلى.



المجال: $x \geq 2$
المدى: $y \geq 5$

8. إزاحة أفقية إلى اليسار بمقدار 3 وحدات ثم تمدد رأسي بمعامل قياسه 2، ثم إزاحة رأسية 6 وحدات إلى الأسفل. المجال: $x \geq -3$ ، المدى: $y \geq -6$.



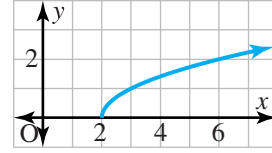
9. $f(x) = 4\sqrt{x}$ تمتد رأسي بمعامل قياسه 4

10. $f(x) = 5\sqrt{x+3}$ تمتد رأسي بمعامل قياسه 5، وإزاحة أفقية 3 وحدات إلى اليسار.

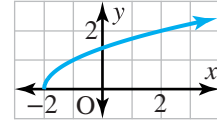
11. $f(x) = 3\sqrt{x-5}$ تمتد رأسي بمعامل قياسه 3، وإزاحة أفقية 5 وحدات إلى اليمين.

12. $f(x) = 2\sqrt{x-6} - 6$ تمتد رأسي بمعامل قياسه 2، إزاحة أفقية 6 وحدات إلى اليمين ثم إزاحة رأسية 6 وحدات إلى الأسفل.

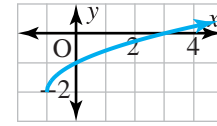
1. المجال: $x \geq 2$
المدى: $y \geq 0$
متزايدة.



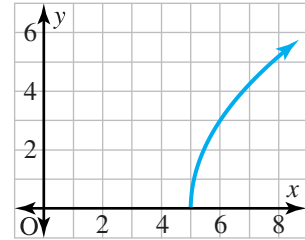
2. المجال: $x \geq -2$
المدى: $y \geq 0$
متزايدة.



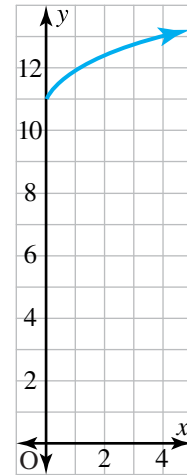
3. المجال: $x \geq -1$
المدى: $y \geq -2$
متزايدة.

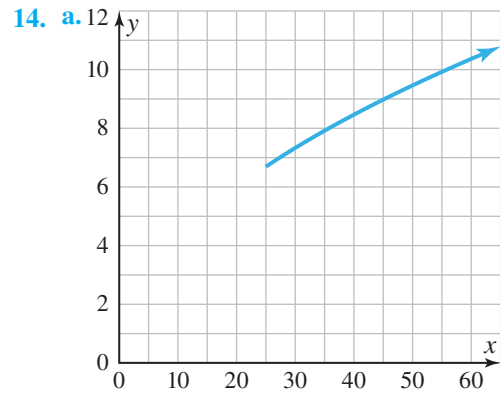


4. المجال: $x \geq 5$
المدى: $y \geq 0$
متزايدة.

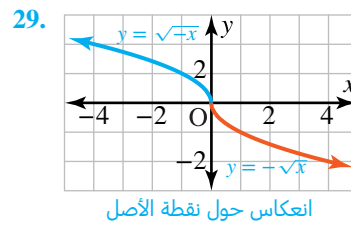


5. إزاحة رأسية للدالة f بمقدار 11 وحدة إلى الأعلى. للدالتين نفس المجال: $x \geq 0$. مدى الدالة f هو $y \geq 0$ بينما مدى الدالة g هو $y \geq 11$.

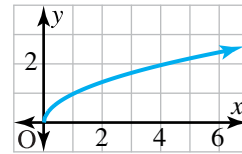




b. السرعة الدنيا 6.7 عقدة بحرية، والسرعة القصوى 10.72 عقدة بحرية.



36. المجال: $x \geq 0$ ، المدى: $y \geq 0$.



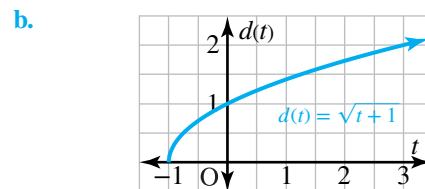
43. الصيغة العامة هي $f(x) = a\sqrt{x-h} + k$ وصيغة الدالة هي

$$g(x) = -\sqrt{x+2} - 1 \text{ أي } g(x) = -\sqrt{x - (-2)} + (-1).$$

إذن، قيم المتغيرات هي $a = -1$ و $h = -2$ و $k = -1$.

وهكذا نستنتج أن التحويلات هي: إزاحة أفقية بمقدار وحدتين إلى اليسار وانعكاس حول المحور x وإزاحة رأسية بمقدار وحدة واحدة إلى الأسفل.

45. a. نعم.



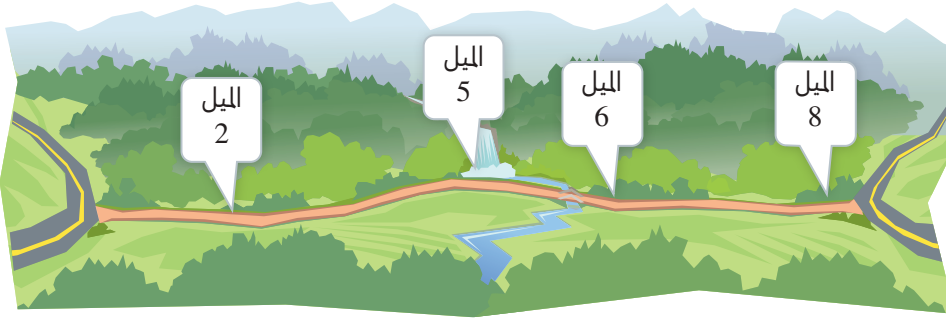
4.2

دوال القيمة المطلقة

Absolute Value Functions

تعريف دالة القيمة المطلقة

عند نقاط مختلفة من المسار المبين في الصورة أدناه مؤشرات مسافة تدلّ على بعد كل نقطة من تقاطع المسار والطريق الواقع إلى اليسار. انطلقت مجموعات من الطلاب سيرًا على الأقدام من النقاط 2 و 6 و 8 متفقيين على الالتقاء عند المؤشر 5 الواقع عند الشلال. كيف يمكن استعمال مؤشرات المسافة المبينة لإيجاد المسافة التي ستقطعها كل مجموعة لتصل إلى الشلال؟



يمكنك استعمال القيمة المطلقة لإيجاد المسافة بين كل مؤشر والعدد 5 لمعرفة عدد الأميال التي على كل مجموعة أن تقطعها لتصل إلى الشلال كما يلي:

$$|8 - 5| = 3$$

$$|6 - 5| = 1$$

$$|2 - 5| = 3$$

كذلك يمكنك تمثيل العلاقة بين موقع كل مجموعة على المسار والمسافة التي تفصلها من موقع الشلال، في صورة دالة تُسمى **دالة القيمة المطلقة**، ويمكن تمثيل هذه الدالة بيانيًا لاستكشاف تغيّر النقاط في المستوى الإحداثي مع الاقتراب من الشلال.

تُسمى الدالة التي يستعمل فيها رمز القيمة المطلقة للمتغير دالة القيمة المطلقة. الدالة $f(x) = |x|$ هي الصيغة الأبسط لدالة القيمة المطلقة، وتُسمى الدالة الرئيسية.

لنحدد خصائص التمثيل البياني لدالة القيمة المطلقة $f(x) = |x|$ ، علينا أن نكوّن جدولًا لقيم $(x, f(x))$ ، ثم نمثّل الدالة بيانيًا.

x	$f(x) = x $	$(x, f(x))$
-2	$ -2 = 2$	$(-2, 2)$
-1	$ -1 = 1$	$(-1, 1)$
0	$ 0 = 0$	$(0, 0)$
1	$ 1 = 1$	$(1, 1)$
2	$ 2 = 2$	$(2, 2)$

ما ستتعلمه

- تعريف دالة القيمة المطلقة
- الصيغة العامة لدالة القيمة المطلقة
- معادلات القيمة المطلقة
- متباينات القيمة المطلقة

... ولماذا

في بعض المسائل العلمية يتعين علينا معرفة ما إذا كان العدد موجبًا أو سالبًا، كدرجة الحرارة مثلاً. غير أنه في أحيان كثيرة تكون القيمة بغض النظر عن الإشارة هي التي تحمل الدلالة الفاصلة.

معايير الدرس

11A.3.2

المصطلحات

- دالة القيمة المطلقة

absolute value function

الهدف

سيتمكن الطلاب من إيجاد دالة القيمة المطلقة وتمثيلها بيانيًا، ومعرفة خصائصها الأساسية، وحل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة.

دليل الدرس

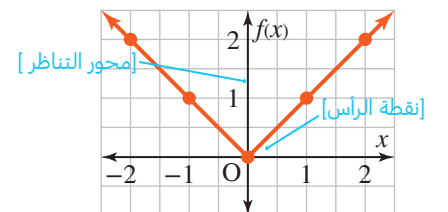
1. دالة القيمة المطلقة وصيغتها العامة
2. حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

تحفيز

دع الطلاب يحددون القيم المطلقة لأعداد موجبة وسالبة وناقشهم في مسألة متى تكون القيمة المطلقة لعدد موجب مساوية للقيمة المطلقة لعدد سالب.

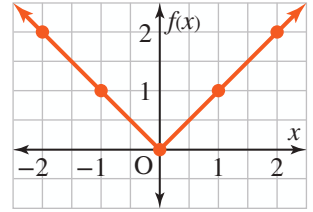
نشاط المصطلحات

اسأل الطلاب ما إذا كانوا يتذكرون شيئًا عن مصطلحات مثل "نقطة الرأس" و"محور التناظر". اكتب على السبورة الحرف V، واسأل الطلاب أن يحددوا رأسه ومحور تناظره. اشرح لهم أن منحنى دالة القيمة المطلقة يتألف من مقطعين يتناظران حول محور التناظر ويلتقيان عند نقطة الرأس. اعرض على الطلاب تمثيلًا لدالة قيمة مطلقة ودهمهم يحددون نقطة الرأس ومحور التناظر.



دالة أساسية

$$f(x) = |x| \text{ دالة القيمة المطلقة}$$



- المجال: $]-\infty, \infty[$
- المدى: $[0, \infty[$
- متصلة لكل قيم x في مجالها
- متزايدة لقيم x في $[0, \infty[$ ومتناقصة لقيم x في $]-\infty, 0]$
- يمثل المحور y محور التناظر للتمثيل البياني للدالة
- الدالة زوجية
- للدالة قيمة صغرى عند النقطة $(0, 0)$ التي هي نقطة الرأس، ونقطة تحويل الاتجاه للدالة.
- ليس لها خطوط تقارب
- السلوك الطرفي: $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x| = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} |x| = \infty$

مثال 1 الخصائص الأساسية لدالة القيمة المطلقة

في كل مما يلي، مَثِّل الدالة بيانيًا.
أوجد المجال والمدى للدالة، وحدِّد ما إذا كانت متزايدة أم متناقصة.

A. $g(x) = \frac{1}{2}|x|$

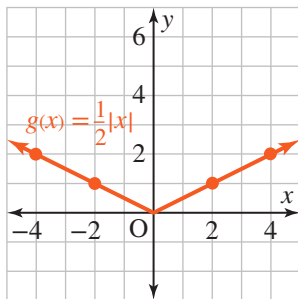
B. $h(x) = -4|x|$

الحل

A. التمثيل البياني للدالة g هو تضيق رأسي لتمثيل الدالة $f(x) = |x|$ بمعامل مقداره $\frac{1}{2}$
انشئ جدولًا للقيم. قم باختيار قيم x من مضاعفات العدد 2

x	-4	-2	0	2	4
y	2	1	0	1	2

ارسم التمثيل البياني.



مجال الدالة g هو $]-\infty, \infty[$.

أسئلة للتفكير

س: (مع المثال A 1) ماذا تمثل نقطة الرأس في دالة القيمة المطلقة؟

نموذج إجابة:

إنها تمثل القيمة الصغرى في مجال الدالة وهي تقع في أسفل التمثيل البياني.

س: ماذا تلاحظ بشأن جزأي التمثيل البياني للدالة؟

نموذج إجابة:

جزء التمثيل البياني للدالة هما مستقيمان متناظران حول محور التناظر الذي هو المحور y .

أسئلة للتفكير

س: كيف يتغير التمثيل البياني للدالة $g(x) = a|x|$

بالمقارنة مع التمثيل البياني للدالة $f(x) = |x|$ عندما $0 < a < 1$ ؟ عندما $a > 1$ ؟

نموذج إجابة:

عندما $0 < a < 1$ ، يتمدد التمثيل البياني بعيدًا عن

محور التناظر، إذن يكون شكل الـ V أوسع.

عندما $a > 1$ ، تضيق التمثيل البياني نحو محور التناظر.

س: (مع المثال 1B) ما وجه المقارنة بين منحنى الدالة

$h(x)$ ومنحنى الدالة $f(x) = 4|x|$ ؟

نموذج إجابة:

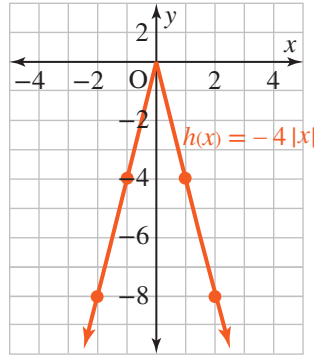
منحنيا الدالتين متناظران حول المحور x .

لاحظ أن القيمة الصغرى للدالة g عند النقطة $(0, 0)$.
 نواتج التعويض في دالة القيمة المطلقة دوماً قيم موجبة أو الصفر.
 إذن، مداها هو $[0, \infty[$
 تزداد قيمة y كلما ازدادت قيم x في الفترة $[0, \infty[$
 إذن، الدالة g متزايدة على الفترة $[0, \infty[$ ،
 بينما تتناقص قيمة y كلما ازدادت قيمة x على الفترة $]-\infty, 0]$.
 إذن، الدالة متناقصة على الفترة $]-\infty, 0]$ ،

B. أنشئ جدول قيم.

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-4	0	-4	-8

ارسم التمثيل البياني.



مجال الدالة h هو $]-\infty, \infty[$.

نواتج التعويض في الدالة دوماً قيم سالبة أو الصفر. لاحظ أن القيمة العظمى للدالة h عند النقطة $(0, 0)$.

إذن، مداها هو $]-\infty, 0]$

تزداد قيمة y كلما ازدادت قيم x في الفترة $]-\infty, 0]$

إذن، الدالة متزايدة على الفترة $]-\infty, 0]$

بينما تتناقص قيمة y كلما ازدادت قيمة x على الفترة $[0, \infty[$.

إذن، الدالة متناقصة على الفترة $[0, \infty[$.

حاول أن تحل التمرين 1

نشاط استكشافي 1 المقارنة بين التمثيلات البيانية لدوال القيمة المطلقة

1. ارسم التمثيل البياني واكتب معادلة الدالة g التي يتم الحصول على تمثيلها البياني بإزاحة التمثيل البياني لدالة القيمة المطلقة $f(x) = |x|$ وحدتين إلى اليمين.
2. ارسم التمثيل البياني واكتب معادلة الدالة h التي يتم الحصول على تمثيلها البياني بتمدد رأسي للتمثيل البياني لدالة القيمة المطلقة $f(x) = |x|$ بمعامل مقداره 2، متبوعًا بانعكاس حول المحور x .
3. ارسم التمثيل البياني واكتب معادلة الدالة k التي يتم الحصول على تمثيلها البياني بإزاحة التمثيل البياني لدالة القيمة المطلقة $f(x) = |x|$ أربع وحدات إلى اليسار، متبوعًا بتضيق رأسي معاملته $\frac{1}{4}$ وأخيرًا بإزاحة مقدارها وحدتين إلى الأسفل.

الصيغة العامة لدالة القيمة المطلقة

الصيغة العامة لدالة القيمة المطلقة هي $f(x) = a|x - h| + k$ حيث a, h, k أعداد حقيقية. التمثيل البياني للدالة $g(x) = a|x - h| + k$ هو تحويل التمثيل البياني لدالة القيمة المطلقة الرئيسية $f(x) = |x|$.

- عند إضافة الثابت h إلى المدخلة تتم إزاحة التمثيل البياني للدالة f أفقيًا.
- عند إضافة الثابت k إلى المخرجة تتم إزاحة التمثيل البياني للدالة f رأسيًا.
- ضرب المخرجة بالثابت a حيث $|a| > 1$ ينتج عنه تمدد رأسي للتمثيل البياني للدالة f .
- ضرب المخرجة بالثابت a حيث $0 < |a| < 1$ ينتج عنه تضيق رأسي للتمثيل البياني للدالة f .
- عندما يكون $a < 0$ ، ينعكس التمثيل البياني للدالة f حول المحور x .
- رأس التمثيل البياني للدالة $g(x) = a|x - h| + k$ يقع عند (h, k) .

مثال 2 التمثيل البياني لدالة القيمة المطلقة باستعمال التحويلات الهندسية

في كل مما يلي، مَثَّل بيانيًا الدالة $g(x)$ مستعملًا التحويلات التي حَوَّلَت التمثيل البياني للدالة $f(x) = |x|$ إلى التمثيل البياني للدالة g .
ما أوجه المقارنة بين المجال والمدى والقيم القصوى للدالة g والمجال والمدى والقيم القصوى للدالة f ؟

A. $g(x) = |x - 4| - 2$

B. $g(x) = |x + 5| + 1$

الحل

A. بالمقارنة مع الصيغة العامة، التمثيل البياني للدالة g هو إزاحة لتمثيل الدالة f بمقدار 4 وحدات إلى اليمين ووحدين إلى الأسفل.

(تابع)

استعمال الصيغة العامة

إذا كانت الدالة $g(x) = 2|x + 5| + 1$ في الصيغة $g(x) = a|x - h| + k$ ، يمكننا عندها إيجاد قيمة كل من a و h و k من خلال مقارنة الدالة بصيغتها العامة حيث $a = 2, h = -5, k = 1$.

سؤال للتفكير

س: كيف يؤثر تغير قيمة كل من h و k في إزاحة منحنى الدالة؟

نموذج إجابة:

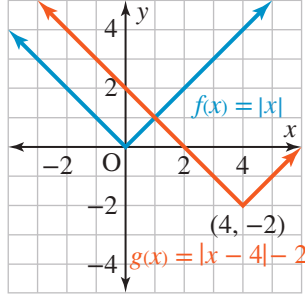
تضاف قيمة k إلى قيم مخرجة الدالة، لذا هي تؤثر في قيم y فقط، وبالتالي تؤدي إلى إزاحة الدالة رأسيًا. أما قيمة h فتُطرح من قيم مدخلة الدالة، لذا فهي تؤثر في قيم x فقط، وبالتالي تؤدي إلى إزاحة الدالة أفقيًا.

عادات التفكير

س: ما وجه الاختلاف بين الدالة الناتجة عن إزاحة الدالة $f(x) = |x|$ أفقيًا والدالة الناتجة عن إزاحة الدالة f رأسيًا؟
نموذج إجابة:

عند إزاحة الدالة $f(x) = |x|$ أفقيًا يُضاف عدد ثابت إلى المتغير x داخل رمز القيمة المطلقة، بينما يضاف العدد الثابت خارج رمز القيمة المطلقة عند إزاحة الدالة رأسيًا.

نرسم التمثيل البياني للدالة $g(x) = |x - 4| - 2$ والتمثيل البياني للدالة $f(x) = |x|$ في نفس المستوى الإحداثي.



نقطة الرأس (4, -2)

نصيحة دراسية

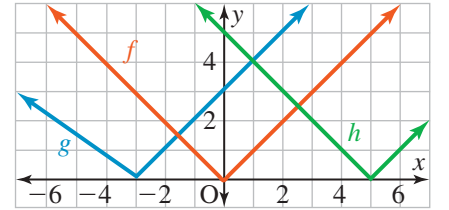
تذكر أن نقطة الرأس هي نقطة تقاطع محور التناظر مع التمثيل البياني للدالة.

خطأ شائع

قد تظن أن المقدار $x - 4$ في الدالة $g(x) = |x - 4| - 2$ يزح التمثيل البياني للدالة $f(x) = |x|$ بمقدار 4 وحدات إلى اليسار، أي في الاتجاه السالب. ولكن الدالة تزح 4 وحدات إلى اليمين لأن (4, 0) تحقق معادلة الدالة عندما $h = 4$.

للطلاب الذين يواجهون صعوبات

(مع المثال 2) قد يواجه بعض الطلاب صعوبة في كتابة إزاحات دالة القيمة المطلقة. اجعل الطلاب يتمرنون على كتابة إزاحات لدوال قيمة مطلقة بسيطة.



س: ما وجه الاختلاف بين قاعدة الدالة g وقاعدة الدالة f ؟

نموذج إجابة:

تقت إزاحة التمثيل البياني للدالة g بمقدار 3 وحدات إلى اليسار. إذن نضيف الثابت 3 إلى قيمة المدخلة x في الدالة f ، $g(x) = |x + 3|$.

س: ما وجه الاختلاف بين قاعدة الدالة h وقاعدة الدالة f ؟

نموذج إجابة:

تقت إزاحة التمثيل البياني للدالة h بمقدار 5 وحدات إلى اليمين. إذن نطرح الثابت 5 من قيمة المدخلة x في الدالة f ، $h(x) = |x - 5|$.

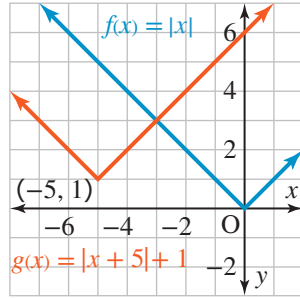
مجال كل من الدالتين هو $]-\infty, \infty[$ ، ومدى الدالة f هو $[0, \infty[$ بينما مدى الدالة g هو $[-2, \infty[$

تزايد الدالة f لقيم x في $[0, \infty[$ وتتناقص لقيم x في $]-\infty, 0]$ ، بينما تتزايد الدالة g لقيم x في $[4, \infty[$ وتتناقص لقيم x في $]-\infty, 4]$.

للدالة f قيمة صغرى عند النقطة (0, 0) فيما للدالة g قيمة صغرى عند النقطة (4, -2)

B. بالمقارنة مع الصيغة العامة، التمثيل البياني للدالة g هو إزاحة لتمثيل الدالة f بمقدار 5 وحدات إلى اليسار ووحدة واحدة إلى الأعلى.

نرسم التمثيل البياني للدالة $g(x) = |x + 5| + 1$ والتمثيل البياني للدالة $f(x) = |x|$ في نفس المستوى الإحداثي.



نقطة الرأس (-5, 1)

مجال كل من الدالتين هو $]-\infty, \infty[$

مدى الدالة f هو $[0, \infty[$ بينما مدى الدالة g هو $[1, \infty[$

تزايد الدالة f لقيم x في $[0, \infty[$ وتتناقص لقيم x في $]-\infty, 0]$ بينما تتزايد الدالة g لقيم x في $[-5, \infty[$ وتتناقص لقيم x في $]-\infty, -5]$.

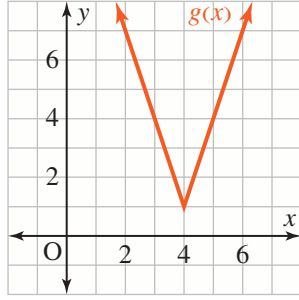
للدالة f قيمة صغرى عند النقطة (0, 0) بينما للدالة g قيمة صغرى عند النقطة (-5, 1)

حاول أن تحل التمرين 10

مثال 3 فهم التحويلات الهندسية لدالة القيمة المطلقة

A. يتن كيف تؤثر القيم 4, 3, -2 في التمثيل البياني للدالة الرئيسية $f(x) = |x|$ للحصول على الدالة $g(x) = -2|x + 3| + 4$ ثم مثل الدالة g بيانيًا.

B. كيف يمكنك تحديد الثوابت a, h, k لكتابة دالة في الصيغة $g(x) = a|x - h| + k$ ، إذا كان تمثيلها البياني معطى أدناه؟

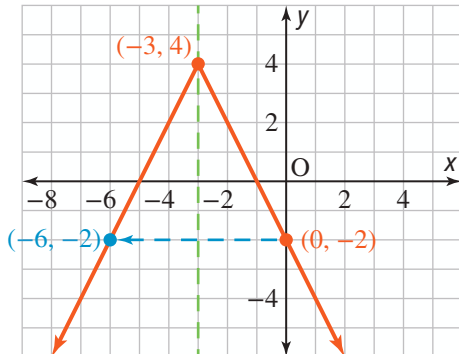


الحل

A. $g(x) = -2|x + 3| + 4$

تحدد القيمتان $h = -3$ و $k = 4$ موقع الرأس ومحور التناظر، كما تحددان الإزاحة الأفقية والإزاحة الرأسية. فيما تحدد القيمة $a = -2$ اتجاه التمثيل البياني وما إذا كان تمددًا رأسيًا أم تضيقًا للتمثيل البياني للدالة $f(x) = |x|$.

- بما أن $h = -3$ و $k = 4$ إذن، تتم إزاحة الرأس بمقدار ثلاث وحدات إلى اليسار وأربع وحدات إلى الأعلى.
- بما أن $-2 < 0$ ، وإشارة -2 سالبة، فإن التمثيل البياني هو تمدد رأسي بمعامل مقداره 2 لانعكاس التمثيل البياني للدالة $f(x) = |x|$ في المحور x .
- عتّن موقع الرأس عند $(-3, 4)$. محور التناظر هو $x = -3$.
- أوجد قيمة الدالة عند $x = 0$ لإيجاد نقطة أخرى: $g(0) = -2$.
- عتّن انعكاس النقطة $(0, -2)$ في محور التناظر.
- ارسم التمثيل البياني للدالة g .



(تابع)

أسئلة للتفكير

س: لماذا نقوم بالتحويلات الناتجة عن h و k قبل التحويل الناتج عن a ؟

نموذج إجابة:

لأن الثابتين h و k يؤثران في موقع نقطة الرأس ومحور التناظر. وعندما نضع نقطة الرأس في مكانها يسهل الانتقال إلى التحويلات الناتجة عن a والتي هي تضيق أو تمدد.

س: كيف يمكننا اختيار نقطة أخرى (غير نقطة الرأس) لإيجاد قيمة a ؟

نموذج إجابة:

نبحث عن نقطة على التمثيل البياني تكون إحداثياتها دقيقة، مثلًا نقطة تقع عند تقاطع خطين من خطوط الشبكة.

عادات التفكير

س: كيف يمكن استعمال تناظر الدالة

$$g(x) = a|x - h| + k$$

نموذج إجابة:

نعلم أن الدالة متناظرة حول محور التناظر، لذلك يكفي أن نرسم مقطعًا واحدًا للدالة بدءًا من نقطة الرأس وعكس هذا المقطع حول محور التناظر لرسم المقطع الآخر.

للطلاب سريع الإنجاز

(مع المثال 3) لفهم التحويلات بشكل أدق، يمكن

للطلاب أن يقرنوا بين عدد من التحويلات لدالة القيمة

المطلقة. مثل بيانيًا الدالة $f(x) = |x - 1| - 1$ ،

ثم قارن بينه وبين التمثيل البياني لكل من الدالتين

$$h(x) = 2|x - 1| - 1 \text{ و } g(x) = 2|x - 1| - 1.$$

س: ما الطريقة التي يمكنك استعمالها لرسم هذه

التمثيلات البيانية؟

نموذج إجابة:

اختر قيمًا للمتغير x ثم أنشئ جدولًا لقيم المتغير y ،

وقم بعد ذلك بتعيين النقاط في المستوى الإحداثي

وصل فيما بينها. كرر هذا الأمر مع كل دالة.

س: ما وجه المقارنة بين التمثيل البياني للدالة h

والتمثيل البياني لكل من الدالتين f و g ؟

نموذج إجابة:

التمثيل البياني لكل من الدالتين g و h هو تضيق

للتمثيل البياني للدالة f ، غير أن القطعة المستقيمة

الواقعة بين المقطعين x للدالة g عكست حول المحور

x ، مما حول الشكل V للدالة g إلى الشكل W.

أسئلة للتفكير

س: كيف يمكننا معرفة قيمة a عند كتابة الدالة؟
نموذج إجابة:

بعد تعويض إحداثيات نقطة الرأس مكان h و k في الصيغة العامة $f(x) = a|x - h| + k$ ، نستعمل إحداثيات نقطة أخرى من المنحنى ونعوّضها عن x و y .
ثم نحل لإيجاد a .

س: ما وجه الاختلاف بين تأثير قيمة a في التمثيل البياني للدالة $f(x) = a|x - h| + k$ وتأثير قيمتي h و k في التمثيل البياني للدالة؟
نموذج إجابة:
تغير قيمتا h و k مكان التمثيل البياني فقط. بينما تغير قيمة a شكل، وفي بعض الأحيان، اتجاه التمثيل البياني.

أسئلة للتفكير

س: ماذا تمثل القيمة الصغرى لهذه الدالة؟
نموذج إجابة:

القيمة الصغرى للدالة هي عندما يصل جاد إلى خط العرض.

س: ماذا تمثل النقطة $(0.5, 30)$ ؟
نموذج إجابة:

بعد مرور نصف ساعة يكون جاد على بعد 30 ميلاً من خط العرض.

س: بالنظر إلى التمثيل البياني، ما وجه المقارنة بين موقع منزل جاد وموقع منزل صديقه؟
نموذج إجابة:
يقع المنزلان على نفس المسافة من خط العرض كما يبين التمثيل البياني.

لطلاب سريعى الإنجاز

(مع المثال 4) دع الطلاب يتعمقون في فهم التمثيل البياني في المثال 4 من خلال الإجابة عن الأسئلة التالية:
س: ما الزمن الذي يكون عنده القارب على مسافة 15 ميلاً من خط العرض؟
نموذج إجابة:
2h أو 1h

س: كم ميلاً يقطع القارب بين الساعة الأولى والساعة الثانية؟
نموذج إجابة:

30 ميلاً.

س: كم ميلاً يقطع القارب بعد ساعتين من انطلاقه؟
نموذج إجابة:
60 ميلاً.

A. نحدد أولاً نقطة الرأس للتمثيل البياني.

الخطوة 1 نقطة الرأس هي $(4, 1)$ ، لذا فإن $h = 4$ و $k = 1$.

معادلة الدالة هي: $g(x) = a|x - 4| + 1$.

الخطوة 2 أوجد قيمة a . حدّد نقطة أخرى على التمثيل البياني، $(x, g(x))$ ، لتكن

$(5, 4)$ ، واخل لإيجاد قيمة a .

$$g(x) = a|x - 4| + 1$$

$$4 = a|5 - 4| + 1$$

$$a = 3$$

عوّض 5 عن x و 4 عن $g(x)$

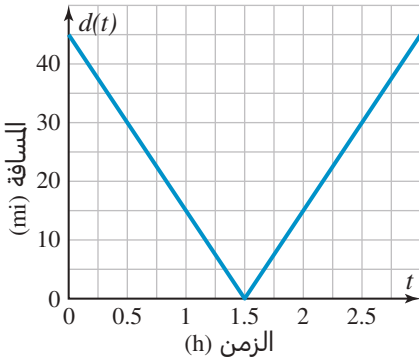
إذن، التمثيل البياني يمثل الدالة $f(x) = 3|x - 4| + 1$.

حاول أن تحل التمرين 13

مثال 4 تفسير التمثيل البياني لدالة القيمة المطلقة

يبحر جاد بقاربه من شاطئ يقع جنوب خط العرض المبيّن أدناه إلى منزل صديقه على شاطئ يقع شماله.

يبين التمثيل البياني للدالة $d(t) = 30|t - 1.5|$ المسافة بالأميال، التي تفصل بين القارب وخط العرض مع مرور t من الساعات خلال الرحلة. لنفترض أن التمثيل البياني يمثل رحلة جاد بكاملها إلى منزل صديقه.



A. ما المسافة التي اجتازها جاد في رحلته؟

B. باستعمال هذا التمثيل البياني أوجد المجال والمدى للدالة.

الحل

A. بدأ جاد رحلته على بعد 45 mi من خط العرض، واتجه نحوه ليصل إليه بعد ساعة ونصف، ثم ابتعد عنه من الجهة الثانية، وقطع 45 mi أخرى، ليصل إلى منزل صديقه بعد رحلة دامت 3 ساعات. إذن اجتاز جاد 90 mi ليصل إلى منزل صديقه.

B. بما أن رحلة جاد بأكملها دامت 3 ساعات، يكون مجال الدالة $0 \leq t \leq 3$

(تابع)

فيما يتعلق بالجزء $0 \leq t \leq 1.5$ من الرحلة، فإن المسافة التي تفصله عن خط العرض تتناقص. أما فيما يتعلق بالجزء $1.5 \leq t \leq 3$ من الرحلة، فإن المسافة التي تفصله عن خط العرض تتزايد.

بالنسبة للمدى، فإن قيم المسافة في التمثيل البياني تتراوح بين 0 و 45
إذن، يكون مدى الدالة: $0 \leq d(t) \leq 45$

حاول أن تحل التمرين 15

معادلات القيمة المطلقة

تُحل معادلات القيمة المطلقة بنفس طريقة حل المعادلات العادية. إذا أردنا مثلاً إيجاد قيمة x في المعادلة $7 = |x| + 2$ ، نبدأ بعزل مقدار القيمة المطلقة في أحد طرفي المعادلة.

$$7 = |x| + 2$$

نستعمل خاصية الطرح في المساواة: $7 - 2 = |x| + 2 - 2$

$$5 = |x|$$



العددان -5 و 5 كلاهما يبعد 5 وحدات عن العدد 0
إذن، $x = -5$ و $x = 5$ هما الحل.

نتحقق من صحة الحل عبر تعويض القيمتين في صيغة المعادلة الأصلية:

$$7 \stackrel{?}{=} |-5| + 2$$

$$\stackrel{?}{=} 5 + 2$$

$$\stackrel{?}{=} 7 \checkmark$$

$$7 \stackrel{?}{=} |5| + 2$$

$$\stackrel{?}{=} 5 + 2$$

$$\stackrel{?}{=} 7 \checkmark$$

مثال 5 حل معادلة القيمة المطلقة

أوجد حل كل من المعادلات التالية:

A. $|2x - 3| = 1$

B. $3|x + 6| + 8 = 5$

الحل

A. لحل هذه المعادلة هناك قيمتان ممكنتان: أن تكون $2x - 3$ قيمة موجبة أو سالبة.

$$2x - 3 = 1$$

أو

$$2x - 3 = -1$$

$$2x - 3 + 3 = 1 + 3$$

$$2x - 3 + 3 = -1 + 3$$

(تابع)

أسئلة للتفكير

س: ماذا تمثل القيمة المطلقة؟

نموذج إجابة:

تمثل القيمة المطلقة المسافة على خط الأعداد.

س: هل يمكن أن تساوي القيمة المطلقة لعبارة ما

الصفر؟

نموذج إجابة:

نعم، تمثل القيمة المطلقة المسافة، والمسافة يمكنها

أن تساوي الصفر.

القيمة المطلقة لحساب المسافة

القيمة المطلقة لعدد ما هي المسافة التي يبعدها هذا

العدد عن العدد 0 على خط الأعداد.

تذكر

إذا كان $|x| = a$ ، $a \in \mathbb{R}^+$

فإن $x = a$ أو $x = -a$

سؤال للتفكير

س: ما وجه الشبه بين حل معادلة خطية وحل معادلة

قيمة مطلقة؟

نموذج إجابة:

في المعادلات الخطية نعزل المتغير في أحد طرفي

المعادلة. كذلك في المعادلات التي تتضمن قيماً

مطلقة، يجب علينا عزل القيم المطلقة في أحد طرفي

المعادلة.

أسئلة للتفكير

س: (مع المثال 6) ما الذي جعلك تعتقد أن بالإمكان حل المسألة باستعمال معادلات القيمة المطلقة؟

نموذج إجابة:

المسافة في الصورة هي 80 km،

تزيد أو تنقص 10 km

س: لماذا يجب أن نحل معادلتين لحل المسألة؟

نموذج إجابة:

لأن حل معادلة قيمة مطلقة يتطلب حل معادلتين،

إحدهما عندما يكون ما بداخل رمز القيمة المطلقة

موجباً والثانية عندما يكون ما بداخل رمز القيمة المطلقة

سالباً.

عادات التفكير

س: ما وجه الشبه والاختلاف بين حل معادلة قيمة

مطلقة وحل معادلة اعتيادية؟

نموذج إجابة:

كلتا المعادلتين تتطلبان عزل المتغير. المعادلة الاعتيادية

تعطي قيمة واحدة للمتغير المعطى، بينما حل معادلة

قيمة مطلقة قد يعطي قيمتين ممكنتين للمتغير.

أسئلة للتفكير

س: كيف يبين التمثيل البياني لمتباينة قيمة مطلقة ما

إذا كانت المتباينة تعني "و" أم "أو"؟

نموذج إجابة:

إذا كان الجزء المظلل من التمثيل البياني بين نقطتين،

تعني المتباينة "و". إذا كان هناك جزءان مظللان،

واحد إلى يمين وواحد إلى يسار النقاط الأساسية، تعني

المتباينة "أو".

س: نقرأ العبارة $|x| > 3$ على شكل: "القيمة المطلقة

للمتغير x أكبر من 3". لماذا قد يكون من المفيد أن نقرأ

العبارة الرياضية على شكل: "المسافة بين x والصفر

يجب أن تكون أكبر من 3" عوضاً عن الشكل الأول؟

نموذج إجابة:

الشكل الثاني لقراءة $|x| > 3$ يجعل من الأسهل تخيل أي

القيم للمتغير x يتم الإشارة إليها بعبارة المتباينة.

حساب المسافة

تذكر أن قاعدة حساب المسافة هي:

المسافة = السرعة × الزمن.

توضيح

المسافة النهائية تساوي البعد بين النقطة التي وصلها

خالد ونقطة 80 km وقد تكون قبل أو بعد نقطة

ال 80 km، لذلك نستعمل القيمة المطلقة.

$$2x = 4$$

$$2x = 2$$

$$x = 2$$

$$x = 1$$

إذن، $x = 1$ و $x = 2$ هما الحل.

B. اعزل العبارة التي تتضمن القيمة المطلقة

$$3|x+6|+8-8=5-8$$

$$3|x+6|=-3$$

$$\frac{3|x+6|}{3}=\frac{-3}{3}$$

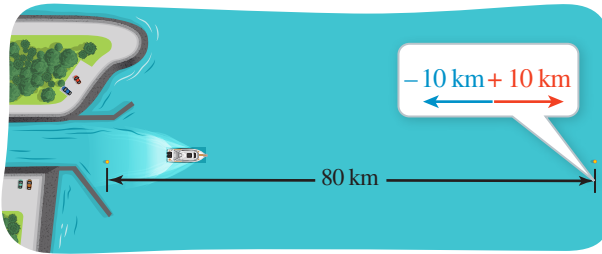
$$|x+6|=-1$$

بما أن نواتج القيمة المطلقة دائماً موجبة. إذن، ليس لهذه المعادلة حل حقيقي.

حاول أن تحل التمرين 17

مثال 6 تطبيق معادلة القيمة المطلقة

تبلغ سرعة قارب خالد 25 km/h، وينوي أن يجتاز بهذه السرعة المسافة المبيّنة في الشكل أدناه.



A. ما المعادلة التي تتمذج عدد الساعات x التي سيمضيها خالد في قاربه ليكون على بعد 10 km من نقطة ال 80 km؟

B. ما العدد الأدنى والعدد الأقصى من الساعات التي سيمضيها خالد في قاربه؟

الحل

A. تتمذج المسألة بالمعادلة $|25x - 80| = 10$ حيث تمثل القيمة $25x$ المسافة التي يقطعها خالد فعلياً، وتمثل $|25x - 80|$ المسافة النهائية من نقطة ال 80 km، وتمثل القيمة 10 مسافة 10 km من نقطة ال 80 km

(تابع)

B. اكتب المعادلة وحلها لكل من الموقفين التاليين:

إذا أبحر خالد مقدارًا أكبر بـ 10 km ، يكون المقدار $25x - 80$ موجبًا.
إذا أبحر خالد مقدارًا أصغر بـ 10 km ، يكون المقدار $25x - 80$ سالبًا.

$$\begin{aligned} 25x - 80 &= 10 \\ 25x - 80 + 80 &= 10 + 80 \\ 25x &= 90 \\ \frac{25x}{25} &= \frac{90}{25} \\ x &= 3.6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 25x - 80 &= -10 \\ 25x - 80 + 80 &= -10 + 80 \\ 25x &= 70 \\ \frac{25x}{25} &= \frac{70}{25} \\ x &= 2.8 \end{aligned}$$

إذن، $x = 2.8$ و $x = 3.6$ هما الحل.

إذن، عدد الساعات الأدنى هو 2.8 ساعة وعدد الساعات الأقصى هو 3.6 ساعة.

حاول أن تحل التمرين 21

متباينات القيمة المطلقة

لحل متباينات القيمة المطلقة علينا أن ننظر إلى الرمز $>$ و $<$. فالمتباينات التي تتضمن قيمة مطلقة يجب إعدادها بصورة مختلفة لحلها فيما إذا كانت الحالة "و" في مقابل الحالة "أو".

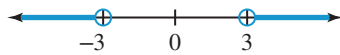


لنأخذ مثالًا $|x| < 3$.

يجب أن تكون المسافة بين x و 0 أقل من 3، لذا فإن قيم x هي جميع القيم التي تقل عن 3 وحدات إلى اليمين وعن 3 وحدات إلى اليسار.

$|x| < 3$ تكافئ المتباينة المركبة $x < 3$ و $x > -3$ ، التي يمكن كتابتها أيضًا في الصورة $-3 < x < 3$

أما في حالة $|x| > 3$ مثلاً، فيجب أن تكون المسافة بين x و 0 أكبر من 3، لذا فإن قيم x الموجبة يجب أن تكون أكبر من 3، وقيم x السالبة يجب أن تكون أصغر من -3



$|x| > 3$ تكافئ المتباينة المركبة $x < -3$ أو $x > 3$

حل متباينات القيمة المطلقة

لنكن u عبارة جبرية بدلالة x ، و a عددًا حقيقيًا، $a \geq 0$

1. إذا كان $|u| < a$ ، فإن u تنتمي إلى الفترة $]-a, a[$. نكتب:
 $|u| < a$ إذا وفقط إذا $-a < u < a$

2. إذا كان $|u| > a$ ، فإن u تنتمي إلى الفترة $]-\infty, -a[$ أو إلى الفترة $]a, \infty[$. نكتب:
 $|u| > a$ إذا وفقط إذا $u < -a$ أو $u > a$

يمكن استبدال الرمز $<$ و $>$ بالرمزين $\leq$ و $\geq$ على التوالي. انظر الشكل 4.2.1

أسئلة للتفكير

س: هل يمكنك أن تعرف مباشرة من صيغة المتباينة ما إذا كان الحل سيتضمن "و" أم "أو"؟

نموذج إجابة:

نعم، إذا تضمنت المتباينة "أصغر من" أو "أصغر من أو يساوي"، سيتضمن الحل حينها "و". إذا تضمنت المتباينة "أكبر من" أو "أكبر من أو يساوي"، سيتضمن الحل حينها "أو".

للطلاب سريع الانجاز

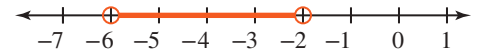
(مع المثال 7) اطلب من الطلاب أن يحلوا متباينات قيمة مطلقة لها خطوات حل أكثر.

اطلب من الطلاب أن يحلوا ويمثلوا بيانيًا كل متباينة على خط الأعداد.

1. س: $|2x - 1| + 8 \geq 10$ الجواب: $x \geq 2$ أو $x \leq 0$



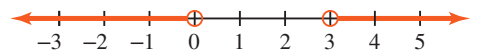
2. س: $3|x + 4| + 1 < 7$ الجواب: $-6 < x < -2$



خطأ شائع

تذكر أن ننظر إلى الرمز $>$ أو $<$ عند حل متباينات القيمة المطلقة. يتم حل متباينات القيمة المطلقة بطريقتين مختلفتين تبعا للحالة "و" في مقابل "أو".

3. س: $5|2x - 3| - 7 > 8$ الجواب: $x > 3$ أو $x < 0$

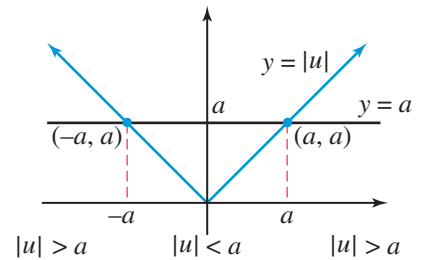


س: ما وجه الاختلاف بين المتباينة

$2 \leq 5 + |3x - 1|$ والمتباينات التي حلتها؟

نموذج إجابة:

ليس لها حل.



الشكل 4.2.1

أسئلة للتفكير

س: ما العبارة التي تبين لنا أيًا من الإشارات $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ يجب أن نستعمل؟

نموذج إجابة:

العبارة التي تقول "يجب أن لا تنقص أو تزيد عن". فهي تعني أن القيمة المطلقة يجب أن تكون أصغر من أو تساوي قيمة محددة، وبالتالي إشارة المتباينة هي $\leq$.

س: ما وجه الشبه بين حل متباينة قيمة مطلقة وحل معادلة قيمة مطلقة؟

نموذج إجابة:

يجب أن نحل متباينتين، واحدة للقيم الموجبة وأخرى للقيم السالبة.

إرشاد

تذكر، إذا ضربت طرفي المتباينة في عدد موجب تبقى المتباينة صحيحة. أما إذا ضربت طرفي المتباينة في عدد سالب فإن اتجاه إشارة المتباينة يتغير.

سؤال للتفكير

س: ما وجه الاختلاف بين حل متباينة قيمة مطلقة وحل معادلة قيمة مطلقة؟

نموذج إجابة:

عند حل متباينة قيمة مطلقة يكون الحل عبارة عن نطاق من القيم، أما معادلات القيمة المطلقة فإما أن يكون لها حلان أو حل واحد أو لا يكون لها حل.

عادات التفكير

س: ماذا تلاحظ بشأن متباينات القيمة المطلقة

المشابهة للمتباينات المركبة؟

نموذج إجابة:

لحل متباينة قيمة مطلقة يجب إعادة كتابتها في صورة متباينة مركبة.

للطلاب الذين يواجهون صعوبات

(مع المثال 7) قد يحتاج بعض الطلاب إلى مزيد من

التدريب على كتابة متباينات القيمة المطلقة لتمثيل

مسائل حياتية. ساعد الطلاب من خلال منحهم الفرصة

للتعبير عن حالات مشابهة باستعمال متباينات القيمة

المطلقة.

اطلب من الطلاب تمثيل كل حالة أدناه باستعمال

متباينة قيمة مطلقة.

س: ارتفاع المبنى الجديد لا يزيد أو ينقص عن 145 قدمًا

بأكثر من 10 أقدام.

نموذج إجابة:

$$(|x - 145| \leq 10)$$

س: السعر الأصلي لهذا الكتاب هو QR 25، وسوف

يتغير السعر بفارق لا يزيد عن QR 5.

$$|x - 25| \leq 5$$

مثال 7 تطبيقات حل متباينات القيمة المطلقة

يسافر أعضاء فريق مناظرة للمشاركة في مسابقة، حيث سيقومون في فندق 4 ليالٍ. التكلفة الإجمالية لإقامة كل عضو في الفريق يجب أن لا تنقص أو تزيد عن QR 700 بأكثر من QR 80. في أي فندق من الفنادق التالية يمكن للفريق أن يقيم؟



الحل

نكتب أولاً متباينة قيمة مطلقة لتمثيل الحالة. ليكن x تكلفة الإقامة ليلة واحدة في الفندق. الفرق بين التكلفة الإجمالية لكل عضو في الفريق و QR 700 أصغر من أو يساوي QR 80.

$$|4x - 700| \leq 80$$

نحسب حل المتباينة لإيجاد التكلفة القصوى والتكلفة الدنيا لإقامة كل عضو من أعضاء الفريق في الفندق.

التكلفة الدنيا

$$4x - 700 \geq -80$$

$$4x - 700 + 700 \geq -80 + 700$$

$$4x \geq 620$$

$$\frac{4x}{4} \geq \frac{620}{4}$$

$$x \geq 155$$

التكلفة القصوى

$$4x - 700 \leq 80$$

$$4x - 700 + 700 \leq 80 + 700$$

$$4x \leq 780$$

$$\frac{4x}{4} \leq \frac{780}{4}$$

$$x \leq 195$$

يمكن لتكلفة الإقامة أن تراوح بين QR 155 و QR 195، ضمناً.

إذن، يمكن للفريق أن يقيم في الفندق A أو في الفندق B.

للطلاب الذين يواجهون صعوبات

س: تحرك المصعد من الطابق الرابع عشر وهو الآن

يبعد خمسة طوابق على الأقل من نقطة إنطلاقه.

نموذج إجابة:

$$(|x - 14| \geq 5)$$

س: كيف نحدد القيمة التي يجب أن توضع في الطرف

الآخر لرمز المتباينة؟

نموذج إجابة:

إنها القيمة التي تمثل مقدار التغير عن القيمة الأصلية.

س: كيف نحدد القيمة التي يجب أن توضع داخل إشارة

القيمة المطلقة؟

نموذج إجابة:

يجب أن نكتب داخل إشارة القيمة المطلقة المقدار الذي

يمثل الفرق بين القيمة الأصلية والقيم الممكنة.

ملاحظات على التمارين

التمارين 14-1 و 31-34، تشرح دوال القيمة المطلقة

وصيغتها العامة.

التمارين 17-29، حل متباينات ومعادلات القيمة

المطلقة.

التمارين 43-46، تدرب الطالب على أنماط من الاختبارات.

التقييم المستمر

التقييم الذاتي:

التمارين 3, 5, 8, 14, 19, 20, 22, 27, 29

مراجعة سريعة 4.2

في التمارين 9-14، حدّد ما إذا كانت كل نقطة تقع على التمثيل البياني للدالة $f(x) = |x|$. إذا كانت كذلك، اذكر إحداثيات نقطة أخرى لها قيمة y نفسها.

9. $(11, 11)$ نعم، $(-11, 11)$ كلا
10. $(-2.3, -2.3)$ كلا
11. $(0, 1)$ كلا
12. $(15, -15)$ كلا
13. $(-8, 8)$ نعم، $(8, 8)$ كلا
14. $(1, 0)$ كلا

في التمارين 1-4، أوجد قيمة ما يلي:

1. $|-5| - |5|$ 0
2. $|-5 - 5|$ 10
3. $5 + |-5|$ 10
4. $|5 - |-5||$ 0
5. $f(x) = |x - 1|$ 4
6. $f(x) = -|x - 2|$ -5
7. $f(x) = 2|x - 1| + 1$ 9
8. $f(x) = |x - 2| + 1$ 6

الدرس 4.2 التمارين

في التمارين 1-4، ممّن كل دالة بيانيًا. أوجد المجال والمدى لكل دالة.

1. $g(x) = -\frac{1}{4}|x|$
2. $h(x) = 3.5|x|$
3. $p(x) = -5|x|$
4. $d(x) = \frac{1}{3}|x|$

في التمارين 5-11، ممّن بيانيًا الدالة المعطاة مستعملًا التحويلات التي حوّلت التمثيل البياني للدالة $f(x) = |x|$ إلى التمثيل البياني للدالة y . ما أوجه المقارنة بين المجال والمدى والقيم القصوى للدالة y والمجال والمدى والقيم القصوى للدالة f ؟

5. $y = |x| + 3$
6. $y = |x| - 2$
7. $y = |x - 3|$
8. $y = |x + 5|$
9. $y = |x - 1| - 3$
10. $y = |x + 2| + 6$
11. $y = 2|x - 3| - 5$

12. قارن التمثيل البياني لكل دالة بالتمثيل البياني للدالة

$$f(x) = |x|$$

a. $g(x) = 3|x - 2|$

b. $g(x) = \frac{-1}{3}|x| + 1$

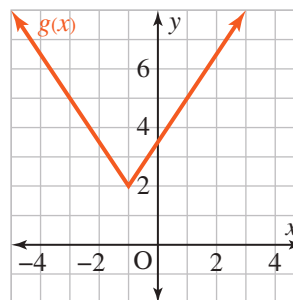
13. التمثيل البياني للدالة $g(x)$ مبين في الشكل المجاور.

a. اكتب قاعدة الدالة g .

$$g(x) = \frac{3}{2}|x + 1| + 2$$

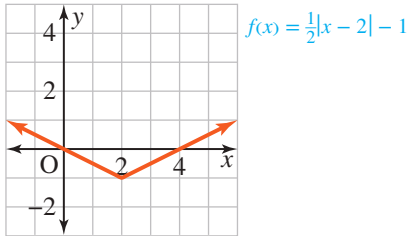
b. اكتب دالة التمثيل البياني

بعد إزاحتها وحدة واحدة إلى اليمين و 4 وحدات إلى الأعلى.

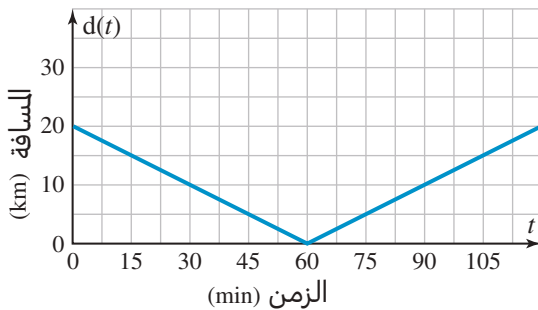


$$h(x) = \frac{3}{2}|x| + 6$$

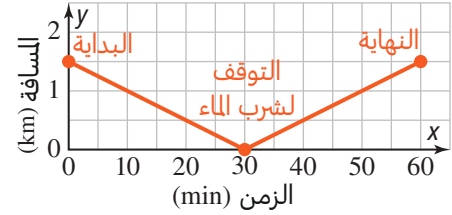
14. اكتب صيغة الدالة الممثلة أدناه.



15. ينافس درّاج في سباق للدراجات يمر مساره بالقرب من محطة للمياه. يظهر التمثيل البياني للدالة $d(t) = \frac{1}{3}|t - 60|$ المسافة بين الدراج ومحطة المياه عند t دقيقة. لنفترض أن التمثيل البياني يمثل كامل السباق، ماذا يمكن أن نعرف عن السباق من خلال التمثيل البياني؟



16. يشارك أحمد في حدث مشي خيري. يبين التمثيل البياني بُعده بالكيلومتر عن مكان التوقف لشرب الماء كدالة للزمن. كم كيلومترًا مشى أحمد؟ وضح إجابتك.



في التمارين 17-20، أوجد حل معادلة القيمة المطلقة.

17. $|-2x + 8| = 20$ 18. $|x - 4| = 9$
 $x = -6$ و $x = 14$ $x = -5$ و $x = 13$
 19. $2|x + 8| = 20$ 20. $2|x - 8| = 20$
 $x = -18$ و $x = 2$ $x = -2$ و $x = 18$

21. بالرجوع إلى المثال 6 في الدرس، ما الزمن الأدنى والزمن الأقصى اللذين سيبحر خلالهما خالد إذا أبطأ سرعته إلى 20 km/h؟ الزمن الأدنى 3.5 ساعة والزمن الأقصى 4.5 ساعة.

في التمارين 22-29، أوجد حل متباينة القيمة المطلقة. مثل الحل بيانيًا.

22. $2 \leq |x| - 8$ 23. $-2 > |x| - 8$ $-6 < x < 6$
 $x \leq -10$ أو $x \geq 10$
 24. $|x| + 5 \geq 10$ 25. $|x| + 2.4 < 3.6$ $-1.2 < x < 1.2$
 $x \leq -5$ أو $x \geq 5$
 26. $|2x + 5| \geq 9$ 27. $|2x - 5| < 9$ $-2 < x < 7$
 $x \leq -7$ أو $x \geq 2$
 28. $-2|x + 4| \leq -6$ 29. $-2|2x + 4| + 10 > -6$ $-6 < x < 2$
 $x \leq -7$ أو $x \geq -1$

30. بالرجوع إلى المثال 7، إذا رفع فريق المناظرة الحد الأقصى

للإنفاق إلى QR 800 زائد أو ناقص 80 QR، فهل يصبح قادرًا على الإقامة في الفندق D الذي تكلفته إقامة الشخص الواحد لليلة واحدة فيه QR 220؟ وضح إجابتك.

نعم، $180 \leq x \leq 220$ حل للمتبينة $|4x - 800| \leq 80$

31. يبين الجدول قيمًا مختارةً للدالة $g(x) = a|x|$. انسخ الجدول وأكملة. قد تضطر لكتابة بعض الأجوبة بدلالة a و b .

x	$g(x) = a x $
-4	b
$\square$	a
$\square$	0
1	$\square$
$\square$	b
$\square$	$2b$

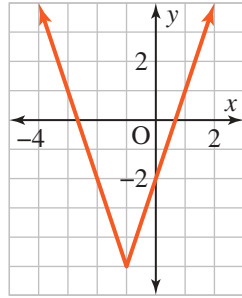
في التمرينين 32 و 33، أوجد دالة القيمة المطلقة $f(x) = a|x|$ في كل حالة.

32. نقطة الرأس للدالة هي (0, 0) ويمر المنحنى بالنقطة (1, 3).

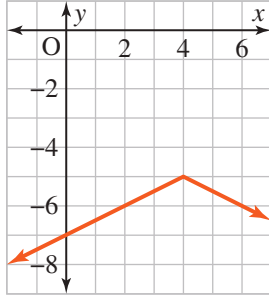
33. المدى للدالة هو $y \leq 0$ ، ويمر المنحنى بالنقطة (-1, -4).

34. اكتب صيغة الدالة في كل مما يلي:

a. $f(x) = 3|x + 1| - 5$



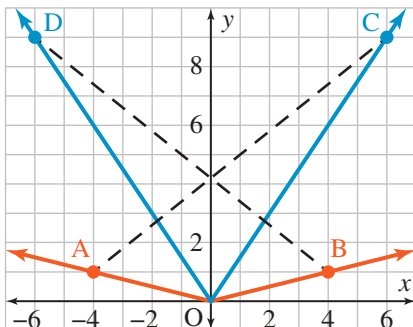
b. $f(x) = -\frac{1}{2}|x - 4| - 5$



35. في كل مما يلي، اكتب وحل معادلة قيمة مطلقة تعبر عن الزمن الأطول والزمن الأقصر لجسم يتحرك بسرعة معينة لاجتياز مسافة معينة (الشكل ليس وفق مقياس).

- a. 5 km/h $-2.5 \text{ km} + 2.5 \text{ km}$
 10 km
 b. 10 ft/s $-3 \text{ ft} + 3 \text{ ft}$
 30 ft

36. ألعاب تبحت مصممة ألعاب عن دالتين تمثلهما الخطوط غير المنقطة في الرسم الذي رسمته. ما هي هاتان الدالتان؟



أسئلة اختبار معيارية

43. صواب أم خطأ شرح تلميذ العلاقة بين مجال ومدى دالتي القيمة المطلقة $f(x) = |x|$ و $f(x) = 10|x|$ كما يلي:

مجال الدالة $f(x) = 10|x|$
 يماثل مجال الدالة $f(x) = |x|$
 مدى الدالة $f(x) = 10|x|$
 يساوي 10 أضعاف مدى الدالة $f(x) = |x|$

هل شرحه صحيح؟ بزر إجابتك.

44. صواب أم خطأ تقارن فاطمة دالتي القيمة المطلقة $f(x) = |x|$ و $f(x) = -|x|$ وتقول إن للدالتين نفس نقطة الرأس. هل هي على صواب؟ بزر إجابتك.

45. اختيار من متعدد أي الدوال التالية مداها $[-2, \infty)$ ؟ A

- A. $f(x) = |x - 1| + 2$
- B. $f(x) = -|x + 1| + 2$
- C. $f(x) = -|x - 1| - 2$
- D. $f(x) = |x - 2| + 1$

46. اختيار من متعدد تشكل إحدى النقاط التالية، نقطة الرأس

للدالة: $f(x) = |3x - 6| + 2$. اختر هذه النقطة. A

- A. (2, 2)
- B. (3, 6)
- C. (3, 2)
- D. (6, 3)

استكشاف

47. الكتابة للتعلم قارن بين مجال ومدى دالتي القيمة المطلقة $f(x) = |x|$ و $g(x) = a|x|$ عندما $0 < a < 1$.

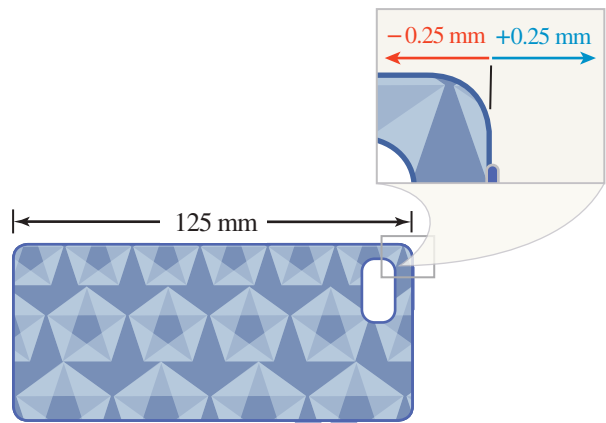
48. يقيم سليم مأدبة عشاء، وهو يخطط لإنفاق QR 1 600، ناقص أو زائد QR 200، بكلفة QR 100 للضيف الواحد. أوجد حل $|100x - 1 600| = 200$ لإيجاد أكبر عدد وأقل عدد من الضيوف الذين يمكنه استضافتهم. إذا أمكن إجلال 7 ضيوف كحد أقصى إلى كل طاولة، أوجد العدد الأدنى من الطاولات التي يجب على سليم حجزها حتى يستطيع إجلال كل ضيفه.

في التمارين 37-40، صل متباينة القيمة المطلقة بالتمثيل البياني الذي يمثل حلها. اشرح طريقة تفكيرك.

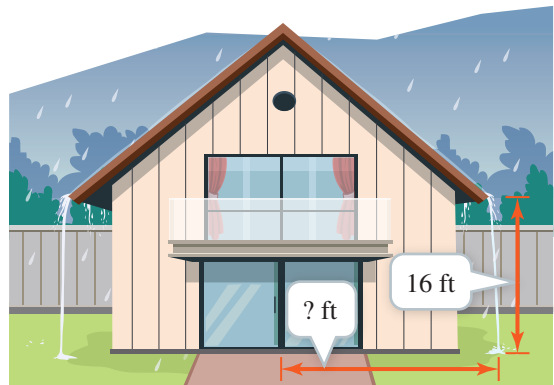
- 37. $3|x| - 2 \leq 10$ A.
- 38. $2|x| - 1 < 7$ B.
- 39. $3|2x| + 1 > 25$ C.
- 40. $2|4x| - 7 \geq 25$ D.

41. تصنع شركة حافظات الهواتف الجواله. يجب أن يكون طول نوع معين من الحافظات 125 mm يزيد أو ينقص بمقدار 0.25 mm كحد أقصى، كما هو مبين في الشكل أدناه (الشكل ليس وفق مقياس). كل حافظة لا يحقق طولها هذا الشرط تُحذف من قائمة الجرد.

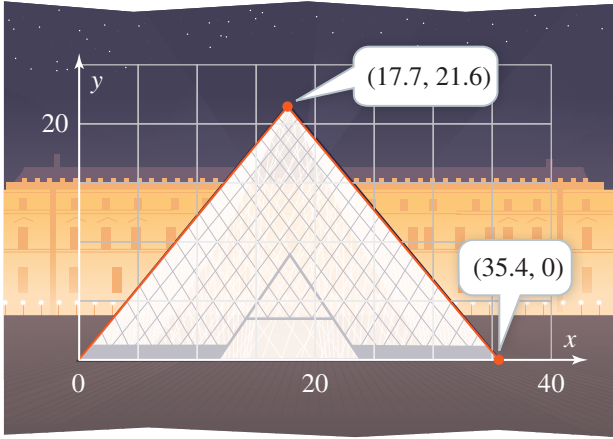
كيف يمكنك استعمال متباينة قيمة مطلقة لتمثيل أطوال كل الحافظات التي يجب حذفها من قائمة الجرد؟ وضح إجابتك.



42. تمثل الدالة $h(x) = -|x| + 34$ ارتفاع سقف منزل كما هو مبين في الصورة، حيث x هي المسافة الأفقية من منتصف المنزل إلى طرفه. إذا وقعت قطرة مياه من طرف السقف إلى الأرض، ما هي المسافة التي سوف تفصل النقطة التي تقع فيها عن منتصف قاعدة المنزل؟ بزر إجابتك.



51. تبين الصورة هرم متحف اللوفر في مدينة باريس، ممثلًا حسب إحداثيات x و y بمقياس المتر، ويشكل المحور x مستوى سطح الأرض.



a. اكتب الدالة التي تمثل محيط الهرم.

b. أوجد المجال والمدى للدالة التي تمثل طرفي الهرم. ماذا يمثل المجال والمدى؟

52. يضع كامل في خزان الوقود في شاحنته وقودًا عاديًا. اكتب وحل معادلة قيمة مطلقة لتمثيل كمية الوقود التي سيتم ضخها حتى تكون التكلفة العامة 100 QR ناقص أو زائد 2 QR.

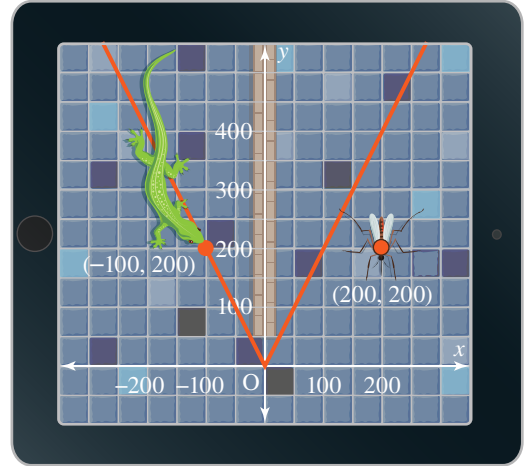


$|2x - 100| \leq 2$ ، أي $49 \leq x \leq 51$ ، إذن كمية الوقود التي سيتم ضخها تقع بين 49 لترا و 51 لترا.

49. **الكتابة للتعلم** قارن التمثيل البياني للدالتين $g(x) = x$ و $f(x) = |x|$. ماهي أوجه التشابه والاختلاف بين خصائص الدالتين؟

توسيع الأفكار

50. **الكتابة للتعلم** تمثل إحداثيات سحلية في لعبة فيديو على مخطط الإحداثيات. تتبع السحلية المسار المبين في الصورة.



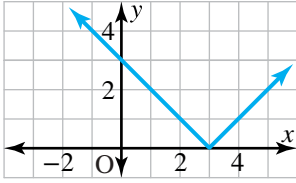
a. اكتب الدالة التي تمثل موقع السحلية على المسار.

b. أوجد من التمثيل البياني نقطة الرأس للدالة، ثم حدّد أين تكون الدالة متزايدة أو متناقصة.

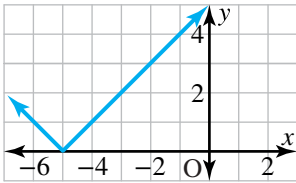
c. اكتب دالة قيمة مطلقة لمسار آخر قد تسلكه السحلية كي تستطيع أن تأكل البعوضة.

إجابات أسئلة التمارين 4.2

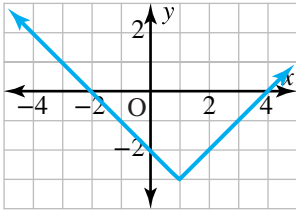
7. إزاحة أفقية 3 وحدات إلى اليمين، المجال: $[-\infty, \infty]$ ، المدى: $[0, \infty]$ ، القيمة الصغرى: 0



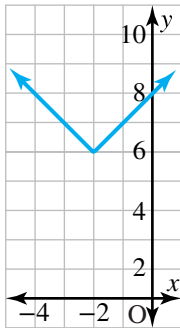
8. إزاحة أفقية 5 وحدات إلى اليسار، المجال: $[-\infty, \infty]$ ، المدى: $[0, \infty]$ ، القيمة الصغرى: 0



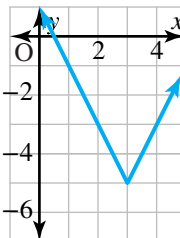
9. إزاحة أفقية وحدة واحدة إلى اليمين ثم إزاحة رأسية 3 وحدات إلى الأسفل، المجال: $[-\infty, \infty]$ ، المدى: $[-3, \infty]$ ، القيمة الصغرى: -3



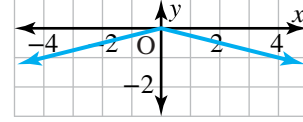
10. إزاحة أفقية وحدتين إلى اليسار وإزاحة رأسية 6 وحدات إلى الأعلى، المجال: $[-\infty, \infty]$ ، المدى: $[6, \infty]$ ، القيمة الصغرى: 6



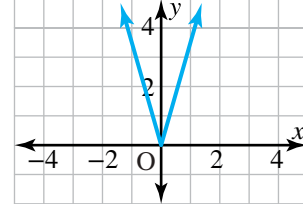
11. إزاحة أفقية 3 وحدات إلى اليمين وتمدد رأسي بمعامل قياسه 2 متبوعًا بإزاحة رأسية 5 وحدات إلى الأسفل، المجال: $[-\infty, \infty]$ ، المدى: $[-5, \infty]$ ، القيمة الصغرى: -5



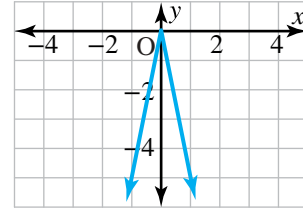
1. المجال: $[-\infty, \infty]$ ، المدى: $[-\infty, 0]$



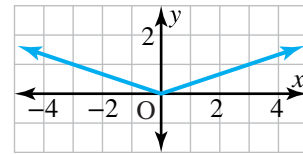
2. المجال: $[-\infty, \infty]$ ، المدى: $[0, \infty]$



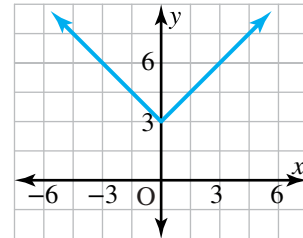
3. المجال: $[-\infty, \infty]$ ، المدى: $[-\infty, 0]$



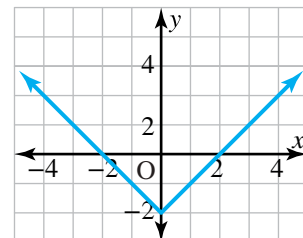
4. المجال: $[-\infty, \infty]$ ، المدى: $[0, \infty]$



5. إزاحة رأسية 3 وحدات إلى الأعلى، المجال: $[-\infty, \infty]$ ، المدى: $[3, \infty]$ ، القيمة الصغرى: 3



6. إزاحة رأسية وحدتين إلى الأسفل، المجال: $[-\infty, \infty]$ ، المدى: $[-2, \infty]$ ، القيمة الصغرى: -2



- 12. a.** إزاحة أفقية وحدتين إلى اليمين مع تمدد رأسي بمعامل قياسه 3
- b.** تضيق رأسي بمعامل قياسه $\frac{1}{3}$ ، متبوعًا بانعكاس حول المحور x ثم إزاحة رأسيّة وحدة واحدة إلى الأعلى.
- 15.** يبدأ الدراج السباق من نقطة تبعد 20 km عن المحطة فيقترب منها إلى أن يبلغها تمامًا بعد 60 دقيقة، ليعود بعد ذلك ويتبعد عنها إلى أن يصبح على بعد 20 km منها عند نهاية السباق.
- 16.** 3 km، لأن أحمد كان على بُعد 1.5 km من مكان شرب الماء عند بداية السباق وعند نهايته.
- 32.** نعوض الإحداثيين (0, 0) عن h و k في الصيغة العامة: $y = a|x - 0| + 0$ فنحصل على $y = a|x|$. ثم نعوض الإحداثيين (1, 3) في $y = a|x|$ فنحصل على $a = 3$. إذن $y = 3|x|$.
- 33.** قيمة k تساوي صفرًا لأن المدى $y \leq 0$ ، نأخذ الحالة الخاصة عندما $h = 0$ ، نعوض $x = -1$ و $y = -4$ في $y = a|x|$ فنحصل على $a = -4$ ، إذن $y = -4|x|$.
- 35. a.** $|5x - 10| = 2.5$ ، الزمن الأطول 2.5 ساعة والزمن الأقصر 1.5 ساعة.
- b.** $|10x - 30| = 3$ ، الزمن الأطول 3.3 ثانية والزمن الأقصر 2.7 ثانية.
- 36.** خلال النقطتين A و B: $f(x) = \frac{1}{4}|x|$ خلال النقطتين C و D: $g(x) = \frac{3}{2}|x|$
- 37. B**
 $3|x| - 2 \leq 10$ ، إذن $3|x| \leq 12$
 $|x| \leq 4$ ، $-4 \leq x \leq 4$
- 38. D**
 $2|x| - 1 < 7$ ، إذن $2|x| < 8$
 $|x| < 4$ ، $-4 < x < 4$
- 39. A**
 $3|2x| + 1 > 25$ ، إذن $3|2x| > 24$
 $|2x| > 8$
 $2|x| > 8$ ، $|x| > 4$ ، إذن $x < -4$ أو $x > 4$
- 40. C**
 $2|4x| - 7 \geq 25$ ، إذن $2|4x| \geq 32$
 $|4x| \geq 16$
 $|x| \geq 4$ ، $4|x| \geq 16$ ، إذن $x \leq -4$ أو $x \geq 4$
- 41.** يجب أن يكون الفرق بين الطول الفعلي للحافطة x و 125 mm المقدار 0.25 mm على الأكثر. يمكن استعمال المتباينة $|x - 125| \leq 0.25$ لتمثيل هذا الفارق المقبول في الأطوال. إذن يمكن تمثيل مدى الحافظات التي يجب أن تحذف بمتباينة القيمة المطلقة $|x - 125| > 0.25$.
- 42.** إذا اعتبرنا منتصف قاعدة المنزل هي نقطة الأصل، يكون ارتفاع السقف هو الإحداثي y لنقطة طرف السقف، ويكون الإحداثي x لهذه النقطة هو المسافة التي تفصل منتصف قاعدة المنزل عن النقطة التي ستقع فيها فطرة المياه. نعوض $y = 16$ في صيغة الدالة: $y = |x| + 34$ ، $16 = -|x| + 34$. إذن $x = 18$ ft لأن المسافة قيمة موجبة.
- 43.** خطأ، للدالتين نفس المدى $[0, \infty)$.
- 44.** صواب، لأن منحنى إحدى الدالتين انعكاس لمنحنى الدالة الأخرى حول المحور x .
- 47.** للدالتين نفس المجال $]-\infty, \infty[$ ونفس المدى $[0, \infty)$.
- 48.** أكبر عدد من الضيوف 18 وأقل عدد من الضيوف 14، إذن العدد الأدنى من الطاولات هو 3، بحيث يستطيع سليم إجلال كل ضيوفه.
- 49.** تتطابقان بالنسبة لقيم $x \geq 0$ وإحادهما انعكاس للأخرى حول المحور x . بالنسبة لجميع قيم $x \leq 0$ ، لهما نفس المجال $]-\infty, \infty[$ ، مدى الدالة f هو $[0, \infty)$ ومدى الدالة g هو $]-\infty, \infty[$.
- 50. a.** $f(x) = 2|x|$
- b.** (0, 0)، متناقصة لجميع قيم $x \leq 0$ ومتزايدة لقيم $x \geq 0$.
- c.** حتى نأكل السحلية البعوضة، على المسار أن يمر بالنقطة (200, 200) حيث البعوضة. المسافة بين السحلية والبعوضة هي $200 + 100 = 300$. إذن يتقاطع خط التناظر للدالة الجديدة مع المحور x في منتصف تلك المسافة أي على بعد 150 من الإحداثي x للبعوضة، أي في النقطة (50, 0). إذن نقطة الرأس الجديدة هي (50, 0)، وتمر الدالة بالنقطة (200, 200). نعوض القيمتين مكان x و y و h و k . نحل لإيجاد a ، ثم نستنتج صيغة الدالة الجديدة: $g(x) = \frac{4}{3}|x - 50|$
- 51. a.** $g(x) = -1.22|x - 17.7| + 21.6$
- b.** المجال: $0 \leq x \leq 35.4$ ، والمدى: $0 \leq y \leq 21.6$
المجال يمثل عرض الهرم ويساوي 35.4 m، والمدى يمثل ارتفاعه ويساوي 21.6 m

Piecewise-Defined Functions

الدوال المتعددة التعريف

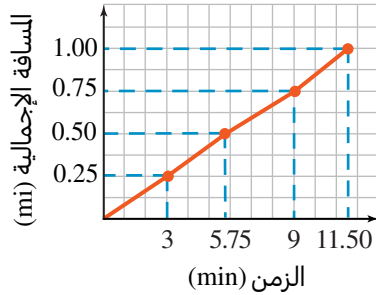
4.3

الدالة المتعددة التعريف

في سباق التتابع يسلم كل عداء العصا للعداء الذي يليه بعد اجتيازه مسافة محددة. فيما يلي جدول يبين الزمن الذي استغرقه كل عداء لاجتياز مسافته.

سباق التتابع		
	الزمن (min)	المسافة الإجمالية (mi)
الانطلاق	0	0
العداء 1	3	0.25
العداء 2	5.75	0.50
العداء 3	9	0.75
العداء 4	11.50	1.00

إن المسافة الإجمالية التي يقطعها العداءون تمثل دالة بالنسبة للزمن. إذا مثلنا المسافة الإجمالية بدلالة الزمن بيانيًا نجد أن صيغة الدالة تختلف باختلاف العداء (انظر الشكل أدناه).



صيغة الدالة في الفترة $[0, 3]$ هي صيغة المستقيم المار بنقطة الأصل O والنقطة $(3, 0.25)$. إنها إذن، $f(t) = \frac{0.25}{3}t$.

صيغة الدالة في الفترة $[3, 5.75]$ هي صيغة المستقيم المار بالنقطتين $(3, 0.25)$ و $(5.75, 0.5)$. إنها إذن، $f(t) = \frac{1}{11}t - \frac{1}{44}$.

ويعتبر عنها بالرموز على الشكل التالي:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{0.25}{3}t & 0 \leq t \leq 3 \\ \frac{1}{11}t - \frac{1}{44} & 3 < t \leq 5.75 \end{cases}$$

وهكذا...

نلاحظ أن للدالة صيغًا متعددة تختلف باختلاف الفترة المعروفة عليها لذلك تُسمى

دالة متعددة التعريف.

ما ستتعلمه

- الدالة المتعددة التعريف
- إعادة تعريف دالة القيمة المطلقة
- الدالة الدرجية

... ولماذا

كثيرًا ما تكون الدوال التي تحاكي الواقع متعددة التعريف، بمعنى أن لها تعريفًا مستقلًا في كل فترة. وهذا ما يجعل من دراسة هذا النوع من الدوال أمرًا ضروريًا ومفيدًا.

معياري الدرس

11A.3.2

المصطلحات

- دالة متعددة التعريف
- دالة درجة
- piecewise-defined function
- step function

تذكير

صيغة الميل m للمستقيم المار بالنقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) هي $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ، ومعادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة هي: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

الهدف

سيتمكن الطلاب من إيجاد وتمثيل الدوال المتعددة التعريف بما في ذلك دوال القيمة المطلقة والدوال الدرجية.

دليل الدرس

1. الدالة المتعددة التعريف
2. إعادة كتابة دالة القيمة المطلقة وتمثيل الدالة الدرجية بيانيًا

تحفيز

دع الطلاب يقدمون صيغة لدالة القيمة المطلقة $f(x) = |x|$ في الفترة $[0, \infty)$ والفترة $(-\infty, 0]$. أكد للطلاب أن نفس الدالة قد تكون لها صيغتان مختلفتان في فترتين مختلفتين.

مثال 1 النمذجة باستعمال دالة متعددة التعريف

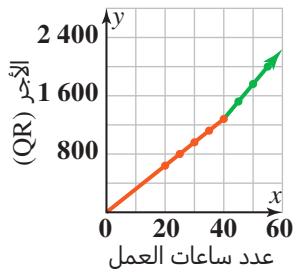
يعمل حمد في فصل الصيف عامل إنفاذ ويجني QR 32/h إذا لم يتجاوز عدد ساعات عمله في الأسبوع الواحد 40 h، وإذا تجاوز عدد ساعات عمله في الأسبوع الواحد 40 h، فإنه يجني 1.5 أمثال أجره بالساعة عن كل ساعة إضافية، أي ما يعادل QR 48/h. كيف يمكنك رسم تمثيل بياني لكتابة دالة توضّح أجر حمد الأسبوعي بناءً على عدد الساعات التي عملها؟

الحل

أنشئ جدولاً للقيم وتمثيلاً بيانياً.

عندما $0 \leq x \leq 40$ ، فإن أجر حمد يكون QR 32 مضروباً في عدد الساعات التي عملها، أي $32x$

عندما $x > 40$ ، فإن أجر حمد يكون $P(x) = (32 \times 40) + 48(x - 40)$ أي $P(x) = 48x - 640$



الأجر	عدد ساعات العمل
640	20
800	25
960	30
1 120	35
1 280	40
1 520	45
1 760	50
2 000	55

لاحظ أن الرسم يحتوي على مقطعين خطيين مع ميل يتغير بشكل طفيف عند $x = 40$. ولهذه الدالة قواعد مختلفة للأجزاء المختلفة في مجالها، ونكتب معادلة لكل جزء في التمثيل البياني كما يلي:

$$P(x) = \begin{cases} 32x & 0 \leq x \leq 40 \\ 48x - 640 & x > 40 \end{cases}$$

حاول أن تحل التمرين 2

مثال 2 تمثيل دالة متعددة التعريف بيانياً

A. مثل بيانياً الدالة متعددة التعريف:

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 11 & -10 \leq x < -2 \\ x^2 - 1 & -2 \leq x \leq 2 \\ x + 1 & 2 < x \leq 10 \end{cases}$$

B. أوجد المجال والمدى لهذه الدالة. في أي الفترات تكون الدالة متزايدة وفي أي الفترات تكون متناقصة؟

(تابع)

الصيغ المختلفة للدالة متعددة التعريف

للدالة متعددة التعريف صيغ مختلفة في كل مجال من مجالاتها. وتجتمع هذه الصيغ لتشكل معاً الدالة المتعددة التعريف.

نشاط المصطلحات

اطلب من الطلاب أن يرسموا خطأً على أوراقهم بحيث يتزايد هذا الخط من اليسار إلى اليمين. دع الطلاب يتشاركون إجاباتهم وتأكد من أن جميعهم قد فهم معنى التزايد ومعنى أن يتزايد خط بالنسبة لقيم النقاط التي تنتمي إليه. كرر هذه العملية عبر الطلب منهم رسم خط متناقص ثم خط يبقى ثابتاً من اليسار إلى اليمين. دع الطلاب يشاهدون التمثيل البياني لدالة متعددة التعريف حيث تكون بعض أقسامها متزايدة ومتناقصة وثابتة. اشرح لهم أن الدالة متعددة التعريف قد يكون لها دوال متزايدة ومتناقصة وثابتة لأن مجالها منقسم إلى أجزاء، ولكل جزء دالة تعرف عنه.

أسئلة للتفكير

س: كيف يمكن أن تكون هناك أكثر من صيغة لنفس الدالة؟

نموذج إجابة:

قد تكون للدالة صيغة تعرفها في جزء من مجالها وصيغة أخرى تعرفها في جزء آخر (أو أجزاء أخرى) من المجال. في هذا المثال، هناك صيغتان تمثلان أجر حمد الأسبوعي، واحدة إذا كانت ساعات عمله أقل من 40 ساعة، والأخرى إذا زادت ساعات عمله عن 40 ساعة.

س: ماذا تمثل المعادلة $P(x) = 1\,280 + 48(x - 40)$ في هذه الحالة؟

نموذج إجابة:

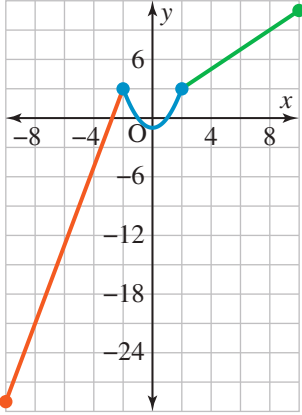
يمثل العدد 1 280 قيمة الأربعين ساعة الأولى التي عملها حمد وتقاضى عن كل ساعة QR 32: $40 \times 32 = 1\,280$ ، أما الصيغة $48(x - 40)$ فهي تمثل أجر حمد على الساعات الإضافية (ما بعد 40 ساعة) حيث يتقاضى عن كل ساعة QR 48.

إذن، $P(x)$ تمثل إجمالي الأجر الأسبوعي الذي يتقاضاه حمد إذا تخطى عدد ساعات عمله 40 ساعة.

القيم الطرفية في الفترات

في المثال المقابل القيمتان -2 و 2 متضمنتان في جزء واحد فقط من التمثيل البياني. وإذا كانتا متضمنتين في أكثر من جزء ولهما قيمتان مختلفتان لجزئين مختلفين، فإنها لن تكون دالة. لذا فإن الفترات المختلفة للدوال المتعددة التعريف لا يمكن أن يكون بينها قيم مشتركة.

الحل



A. ارسم التمثيل البياني للدالة $y = 4x + 11$ لقيم x بين -10 و -2

ارسم التمثيل البياني للدالة $y = x^2 - 1$ لقيم x بين -2 و 2

ارسم التمثيل البياني للدالة $y = x + 1$ لقيم x بين 2 و 10

B. لتحديد المدى، احسب قيم y التي تقابل قيم x الصغرى والعظمى في التمثيل البياني.

بالنسبة إلى هذا التمثيل البياني، تحدث هذه القيم عند نقاط نهاية مجال الدالة المتعددة التعريف، $-10 \leq x \leq 10$

أوجد قيمة $y = x + 1$ عند $x = 10$:
 $y = 10 + 1$
 $y = 11$

أوجد قيمة $y = 4x + 11$ عند $x = -10$:
 $y = 4(-10) + 11$
 $y = -29$

المدى هو $-29 \leq y \leq 11$

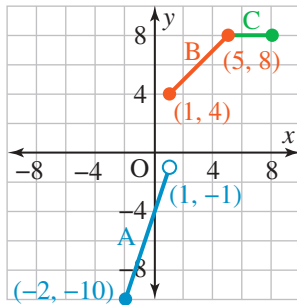
إذن، المجال هو $[-10, 10]$ والمدى هو $[-29, 11]$ ،
 الدالة متزايدة لقيم x في $[-10, -2]$ وفي $[0, 10]$ ،
 ومتناقصة لقيم x في $[-2, 0]$.

حاول أن تحل التمرين 3

ويمكن إيجاد قاعدة دالة متعددة التعريف من خلال تمثيلها البياني.

مثال 3 كتابة قاعدة دالة متعددة التعريف من تمثيلها البياني

ما القاعدة التي تصف الدالة المتعددة التعريف المبينة في التمثيل البياني أدناه؟



(تابع)

أسئلة للتفكير

س: لماذا يجب أن تكون الفترات التي تُعرّف فيها الدالة بصيغ مختلفة غير متداخلة؟
 نموذج إجابة:
 حتى تكون دالة يجب لكل قيمة من قيم x أن ترتبط بقيمة واحدة من قيم y .

س: كيف تعرف أن الدالة متناقصة للقيم $-2 < x < 0$ ؟
 نموذج إجابة:
 ننظر إلى منحنى القطع المكافئ، ونلاحظ أنه ينحدر إلى قيمة صغرى للقيم $-2 < x < 0$

خطأ شائع

يعتقد بعض الطلاب أحياناً أن مدى الدوال المتعددة التعريف يجب أن يكون دائماً فترة متصلة تربط بين القيمة الصغرى والقيمة العظمى للدالة، وهو أمر غير صحيح لأن التمثيل البياني للدالة قد تتضمن نقاط عدم اتصال إقفري.

عادات التفكير

س: لماذا استعملنا الإشارة $<$ بدلاً من $\leq$ في الجزء الأول من الدالة $f(x)$ في A؟
 نموذج إجابة:
 لأننا أردنا أن تكون القيمة 2 في فترة واحدة فقط من المجال.

أسئلة للتفكير

س: ماذا نلاحظ بشأن منحنى الدالة؟
 نموذج إجابة:
 منحنى الدالة مكون من ثلاث قطع مستقيمة منفصلة.
 س: ماذا يعني وجود مستقيم أفقي في منحنى الدالة؟
 نموذج إجابة:
 ميل هذا المستقيم 0، وهذا يعني أن قيمة y ثابتة لكل قيم x في تلك الفترة.
 س: إذا كان الميل مُعطى، كيف نحدد النقاط التي يمكن استعمالها لإيجاد قيمة b في صيغة الميل والمقطع للدالة الخطية $y = mx + b$ ؟
 نموذج إجابة:
 يمكن اختيار أية قيمة للمتغير x من المجال وقيمة y التي تقابلها في المدى.

إرشاد

الدائرة المغلقة في التمثيل البياني تعني أن إحداثي النقطة متضمنة في مجال الدالة ومداها. أما الدائرة المفتوحة فتشير إلى أنها غير متضمنة.

الحل

الخطوة 1 لاحظ الأجزاء الخطية الثلاثة المنفصلة التي تكوّن الدالة.

الخطوة 2 حدّد مجال كل جزء.

الخطوة 3 بالنسبة إلى كل جزء، استعمل التمثيل البياني لتحديد نقاط على المستقيم ولإيجاد الميل.

الخطوة 4 يمكنك استعمال صيغة الميل والمقطع للدالة الخطية، $f(x) = mx + b$ ، لتعريف الدالة لكل جزء.

الجزء A	الجزء B	الجزء C
المجال: $-2 \leq x < 1$	المجال: $1 \leq x \leq 5$	المجال: $5 < x \leq 8$
الميل = 3، $(1, -1)$	الميل = 1، $(1, 4)$	الميل = 0، $(5, 8)$
$y = mx + b$ $-1 = (3)(1) + b$ $b = -4$	$y = mx + b$ $4 = (1)(1) + b$ $b = 3$	$y = mx + b$ $8 = (0)(5) + b$ $b = 8$
$f(x) = 3x - 4$	$f(x) = x + 3$	$f(x) = 8$

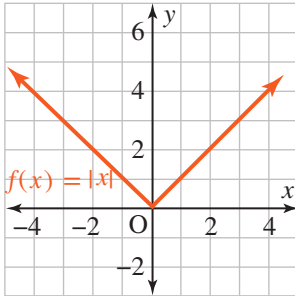
قاعدة الدالة هي:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & -2 \leq x < 1 \\ x + 3 & 1 \leq x \leq 5 \\ 8 & 5 < x \leq 8 \end{cases}$$

حاول أن تحل التمرين 7

إعادة تعريف دالة القيمة المطلقة

تُعتبر دوال القيمة المطلقة مثالًا جيدًا على الدوال المتعددة التعريف.



نعطي مثالًا على ذلك الدالة $f(x) = |x|$.

انظر إلى التمثيل البياني للدالة $f(x) = |x|$.

يتألف التمثيل البياني من جزأين يلتقيان عند الرأس.

كل من الجزأين هو جزء من مستقيم.

نكتب قاعدة كل جزء من الدالة كما يلي:

عندما $x \geq 0$ ، فإن القاعدة تكون $f(x) = x$.

عندما $x < 0$ ، فإن القاعدة تكون $f(x) = -x$.

إيجاد الميل باستعمال نقطتين على المستقيم

عندما يمر مستقيم (غير رأسي) بالنقطتين $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ ، فإن الميل يكون: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

للطلاب سريعى الإنجاز

(مع المثال 3) دع الطلاب يستكشفون أكثر التمثيل

البياني للدوال متعددة التعريف في مسائل حياتية.

س: تشير الفاتورة الشهرية لشركة هاتف جوال أنهم

يحبسون 0.44 QR/min من 1 إلى 800 دقيقة،

ثم 0.36 QR/min من 801 إلى 1 200 دقيقة

و 0.24 QR/min لأكثر من 1 200 دقيقة.

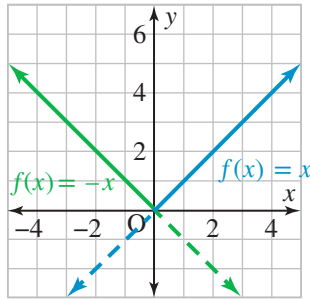
مثّل بيانيًا دالة متعددة التعريف تمثّل هذا السيناريو.

نموذج إجابة:

تأكد من تمثيلات الطلاب للدالة:

$$f(x) = \begin{cases} 0.44x & 1 \leq x \leq 800 \\ 0.36x & 801 \leq x \leq 1\,200 \\ 0.24x & x > 1\,200 \end{cases}$$

يمكنك كتابة هذه الدالة بدلالة أجزائها، حيث يكون كل جزء معرّف لمجال معيّن على النحو التالي:



$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

الدالة f هي دالة متعددة التعريف، لها قواعد مختلفة للفترة المختلفة من مجالها.

دالة القيمة المطلقة الرئيسية

دالة القيمة المطلقة الرئيسية $f(x) = |x|$ هي دالة

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

أسئلة للتفكير

س: ماذا يمثل صفر دالة القيمة المطلقة؟

نموذج إجابة:

صفر الدالة هو الإحداثي x للنقطة التي تمثل رأساً

لمنحنى الدالة عندما $y = 0$.

س: لماذا تختبر قيم x لتحديد الميل ومعادلة الدالة.

نموذج إجابة:

عند اختبار قيم x يمكنك تحديد الصيغة المناسبة من خلال تحديد ما إذا كانت قيمة $6x + 18$ موجبة أم سالبة.

عادات التفكير

س: لماذا يمكننا تعريف دالة قيمة مطلقة بأنها دالة

متعددة التعريف أيضًا؟

نموذج إجابة:

تتألف دالة القيمة المطلقة من جزأين خطيين ميلهما متعاكسان.

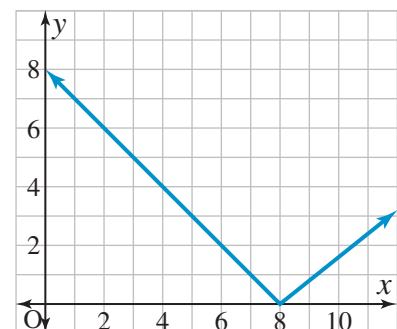
للطلاب الذين يواجهون صعوبات

(مع المثال 4) قد يواجه بعض الطلاب صعوبة في كتابة

قاعدة لدالة القيمة المطلقة. دع الطلاب يتدربون على

إيجاد القاعدة التي تعرّف دالة قيمة مطلقة باستعمال

التمثيل البياني.



س: كيف يمكن تحديد دالة القيمة المطلقة من تمثيلها

البياني المعطى؟ أوجد صيغة الدالة.

نموذج إجابة:

رأس دالة القيمة المطلقة هو النقطة $(8, 0)$ وميل الجزء

الأيمن 1 وميل الجزء الأيسر -1، وبالتالي صيغة الدالة

$$f(x) = |x - 8|$$

س: كيف يمكنك تحديد دالة متعددة التعريف من

التمثيل البياني المعطى؟ أوجد صيغة الدالة.

مثال 4 كتابة صيغة متعددة التعريف لدالة قيمة مطلقة

أعد كتابة الدالة $f(x) = |6x + 18|$ في صورة دالة متعددة التعريف ثم مثلها بيانيًا.

الحل

الخطوة 1 أوجد صفر (أصفار) المقدار داخل القيمة المطلقة.

$$f(x) = |6x + 18|$$

$$0 = 6x + 18$$

$$x = -3$$

يمر التمثيل البياني بالنقطة $(-3, 0)$. هذه دالة قيمة مطلقة، إذن يجب أن يكون العدد 0

أصغر قيمة في مداها (لأن $f(x)$ لن تكون أبدًا سالبة).

يجب أن تكون هذه النقطة رأس التمثيل البياني، حيث يتغير الميل من السالب إلى الموجب.

الخطوة 2 حدّد ميل ومعادلة كل جزء من الدالة من خلال اختبار بعض قيم x على جانبي -3

	اختر نقطة تحقق $x < -3$ ليكن $x = -4$	اختر نقطة تحقق $x > -3$ ليكن $x = 0$
النقطة	$(-4, 6)$	$(0, 18)$
الميل إلى $(-3, 0)$	-6	6
المعادلة	$y = -6x - 18$	$y = 6x + 18$

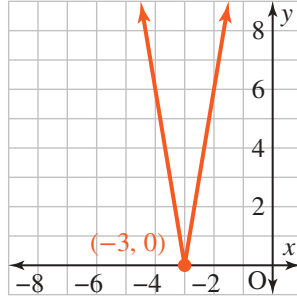
الخطوة 3 اكتب الدالة المتعددة التعريف.

يمكن كتابة دالة القيمة المطلقة $f(x) = |6x + 18|$ في صورة دالة متعددة التعريف:

$$f(x) = \begin{cases} -6x - 18 & x < -3 \\ 6x + 18 & x \geq -3 \end{cases}$$

(تابع)

الخطوة 4 ارسم التمثيل البياني.

نقطة الرأس هي $(-3, 0)$

حاول أن تحل التمرين 13

الدالة الدرجية

من الأمثلة على دالة متعددة التعريف **الدالة الدرجية**. يشبه التمثيل البياني لهذه الدالة درجات السلم، وتسمى دالة درجية وهي تربط كل مدخلة في فترة بنفس قيمة المخرجة.

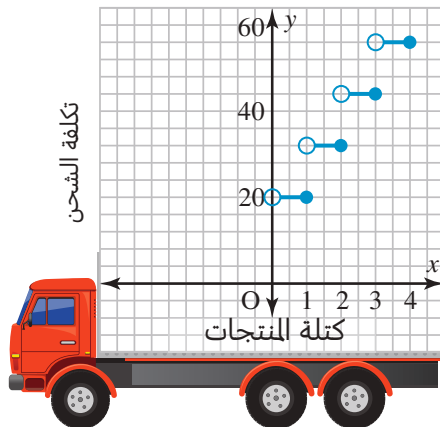
مثال 5 تمثيل دالة درجية بيانيًا

تعتمد تكلفة شحن المنتجات التي يتم شراؤها من متجر عبر الإنترنت على كتلة المنتجات. يمثل الجدول أدناه تكاليف الشحن y بناءً على الكتلة x . مثل الدالة بيانيًا. أوجد مجال الدالة ومداهما. أوجد القيم العظمى والصغرى.

كتلة المنتجات	$0 < x \leq 1$ kg	$1 < x \leq 2$ kg	$2 < x \leq 3$ kg	$3 < x \leq 4$ kg
تكلفة الشحن	QR 20	QR 32	QR 44	QR 56

الحل

ترتبط كل قيمة للمتغير y بمجموعة من قيم x ، مثلًا:
 $y = 20$ لكل $0 < x \leq 1$ و $y = 32$ لكل $1 < x \leq 2$



(تابع)

للطلاب الذين يواجهون صعوبات

(مع المثال 4) نموذج إجابة:

تألف الدالة من مقطعين كما نلاحظ:

$$f(x) = -x + 8 \text{ إذا كانت } x < 8$$

$$f(x) = x - 8 \text{ إذا كانت } x \geq 8$$

أسئلة للتفكير

س: (مع المثال 5) ماذا تلاحظ في التمثيل البياني للدالة؟

نموذج إجابة:

الدائرة الممتلئة في التمثيل البياني تعني أن قيمة x في هذا الجزء تنتمي إلى مجال الدالة. والدائرة المفرغة تعني أن قيمة x في هذا الجزء لا تنتمي إلى مجال الدالة.

يبدو المنحنى شبيهًا بدرجة.

س: ما وجه المقارنة بين دالة درجية ودالة متعددة التعريف؟

نموذج إجابة:

الدالة الدرجية هي دالة متعددة التعريف كل أجزائها مستقيمات أفقية.

س: هل الدوال الدرجية دوال متصلة؟ وضح إجابتك.

نموذج إجابة:

كلا. يمكنك معرفة ذلك من حركة قلمك أثناء رسم التمثيل البياني لدالة درجية حيث تلاحظ وجود فجوات وقفزات.

للطلاب سريعى الإنجاز

(مع المثال 5) دع الطلاب يتدربون على إيجاد جدول قيم للدالة الدرجية عند إعطاء المجال والمدى.

س: أوجد النقطة الصغرى والنقطة العظمى ثم أوجد جدول قيم للدالة باستعمال المعلومات التالية:

$$\text{المجال: } \{x : -3 < x \leq 12\}$$

$$\text{المدى: } \{y : y = -5, 4, 13, 21, 30\}$$

نموذج إجابة:

النقطة الصغرى: $(-3, -5)$ النقطة العظمى: $(12, 30)$

المجال	$-3 < x \leq 0$	$0 < x \leq 3$	$3 < x \leq 6$	$6 < x \leq 9$	$9 < x \leq 12$
المدى	-5	4	13	21	30

متابعة

دع الطلاب يحددون الصلة الصحيحة بين الدائرة المفرغة والدائرة الممتلئة على المنحنى والإشارتين

 $<$ و $\leq$ لتحديد المجال.دائرة مفرغة $(\leq)$ دائرة ممتلئة $(<)$

تشير الدائرة المغلقة إلى أن قيمة x تنتمي إلى المجال، وتستعمل إشارتي $\leq$ و $\geq$.
تشير الدائرة المفتوحة إلى أن قيمة x لا تنتمي إلى المجال وتستعمل إشارتي $>$ و $<$.

المجال: $\{x : 0 < x \leq 4, x \in \mathbb{R}\}$.

المدى: $\{20, 32, 44, 56\}$

الدالة لها قيمة صغرى هي 20 وقيمة عظمى هي 56
التقييم المستمر

التقييم الذاتي:

التمارين 5, 8, 14, 19, 21, 22, 23

حاول أن تحل التمرين 16

المدى الذي يتكون من عناصر معدودة

في المثال المقابل ربما تظن أن مدى هذه الدالة هو الفترة $[20, 56]$ ، ولكن القيم 20 و 32 و 44 و 56 هي وحدها المخرجات الممكنة. لذا فإن مدى الدالة يتكون من هذه العناصر فقط.

ملاحظات على التمارين

التمارين 9-1، تركز على الدوال المتعددة التعريف.

التمارين 10-17، تركز على دوال القيمة المطلقة والدوال الدرجة.

التمارين 28-31، تدرب الطالب على أنماط من الاختبارات.

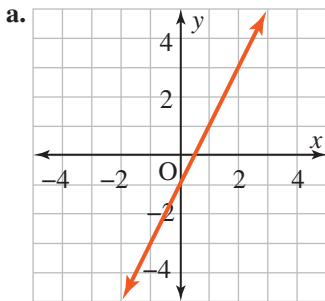
مراجعة سريعة 4.3

4. في كلٍّ مما يلي، اكتب معادلة المستقيم ثم مثله بيانيًا.

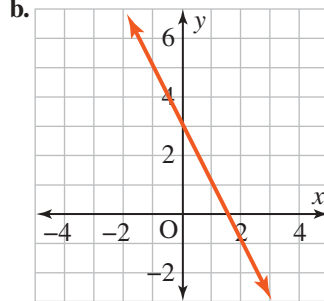
a. المستقيم المار بالنقطتين $(0, 0)$ و $(2, 4)$.

b. المستقيم الذي ميله $\frac{1}{3}$ والمار بالنقطة $(3, 0)$.

5. في كلٍّ مما يلي، اكتب معادلة المستقيم بصيغة الميل والمقطع.



$$y = 2x - 1$$



$$y = -2x + 3$$

1. أوجد قيمة $f(-6)$ ، و $f(0)$ ، و $f(3)$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & -6 \leq x \leq -2 \\ 2x^2 - 7 & -2 < x < 1 \\ 4 - x & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$f(-6) = -7, f(0) = -7, f(3) = 1$$

2. أوجد قيمة $f(-4)$ ، و $f(0)$ ، و $f(3)$.

$$f(x) = \begin{cases} 3 & -4 < x < 0 \\ -x & 0 \leq x \leq 2 \\ 3 - x & 2 < x < 4 \end{cases}$$

$$f(-4) \text{ غير معرّفة}, f(0) = 0, f(3) = 0$$

3. أوجد قيمة $f(-3)$ و $f(0)$.

$$f(x) = \begin{cases} -x + 6 & -4 \leq x < -1 \\ 3x^2 - 4 & -1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$f(0) = -4, f(-3) = 9$$

الدرس 4.3 التمارين

في التمارين 3-6، مثل الدالة بيانيًا. ثم أوجد المجال والمدى، وحدّد في أي الفترات تكون الدالة متزايدة وفي أي الفترات تكون متناقصة.

$$3. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x + 3 & -2 < x \leq 0 \\ 2 & 0 < x \leq 4 \\ 3 - x & 4 < x \leq 7 \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \leq 2 \\ -x - 2 & x > 2 \end{cases}$$

$$5. f(x) = \begin{cases} -\frac{4}{3}x + 4 & x \leq 6 \\ 2x - 8 & x > 6 \end{cases}$$

1. الدالة f معرّفة بالقاعدة $-0.5x + 1$ للمجال $x < 1$ وبالقاعدة x للمجال $x \geq 1$. اكتب الدالة المتعددة التعريف f باستعمال رمز الدالة.

2. تقدّم شركة هواتف عرضًا شهريًا للهواتف الجوال، مقابل QR 100 يشمل 250 دقيقة من المكالمات في أي وقت، ويصبح سعر الدقيقة الواحدة من المكالمات QR 0.80 للدقيقة إذا تجاوز عدد الدقائق المستهلكة 250 دقيقة. اكتب دالة متعددة التعريف لتمثيل $C(x)$ ، تكلفة استهلاك x دقيقة في الشهر.

15. هل يمكن كتابة أي تحويل لدالة القيمة المطلقة في صورة دالة متعددة التعريف؟ وضح إجابتك.

16. يمثل الجدول التالي تكلفة وقوف سيارة في موقف للسيارات. مثل الدالة بيانيًا ثم حدد المجال والمدى والقيمة الصغرى والقيمة العظمى لهذه الدالة.

مدّة الوقوف (ساعات)	$0 < t \leq 3$	$3 < t \leq 6$	$6 < t \leq 9$	$9 < t \leq 12$
التكلفة (QR)	40	60	80	100

17. مثل الدالة الدرجية بيانيًا.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & 0 \leq x < 2 \\ 5 & 2 \leq x < 4 \\ 8 & 4 \leq x < 6 \\ 9 & 6 \leq x < 8 \end{cases}$$

في التمارين 18-21، مثل الدالة بيانيًا.

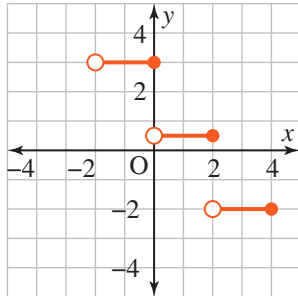
$$18. f(x) = \begin{cases} -3x + 1 & x \leq 1 \\ x + 1 & x > 1 \end{cases}$$

$$19. f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 3 \\ -2x + 4 & x \geq 3 \end{cases}$$

$$20. f(x) = \begin{cases} -x + 1 & -10 \leq x < -3 \\ x^2 - 9 & -3 \leq x \leq 3 \\ 2x + 1 & 3 < x < 5 \end{cases}$$

$$21. f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 2 \\ 3 & 2 \leq x < 4 \\ 5 & 4 \leq x < 6 \\ 7 & 6 \leq x < 8 \end{cases}$$

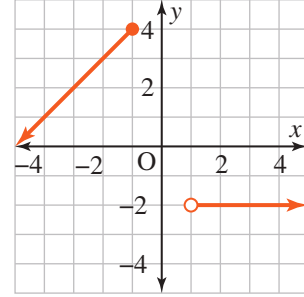
22. أوجد القاعدة التي تعزف الدالة المبينة في التمثيل البياني.



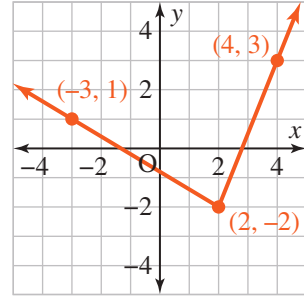
$$6. f(x) = \begin{cases} x - 3 & x \leq -2 \\ x & -2 < x \leq 2 \\ -2x + 2 & x > 2 \end{cases}$$

في التمارين 7-9، اكتب دالة متعددة التعريف لكل تمثيل بياني.

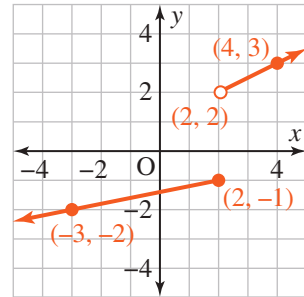
7.



8.



9.



في التمارين 10-14، اكتب كل دالة قيمة مطلقة في صورة دالة متعددة التعريف.

$$10. f(x) = \frac{1}{2} |x|$$

$$11. f(x) = -2 |x|$$

$$12. f(x) = -|x|$$

$$13. f(x) = |3x + 1|$$

$$14. f(x) = |-2x - 6|$$

27. **في مكتب البريد** تعتمد التكلفة C (QR) لإرسال بريد على كتلة الطرد x (بالجرام). توضّح الدالة أدناه تكلفة الطرود حتى 2 000 g، أوجد مجال الدالة ومداها.

$$C(x) = \begin{cases} 50 & 0 < x \leq 200 \\ 67 & 200 < x \leq 800 \\ 78 & 800 < x \leq 1200 \\ 94 & 1200 < x \leq 1600 \\ 101 & 1600 < x \leq 2000 \end{cases}$$

أسئلة اختبار معيارية

28. **صواب أم خطأ** كتب حمد الدالة $f(x) = 3|x|$ في صورة الدالة المتعددة التعريف المبينة أدناه. هل ما كتبه صحيح؟ بّرر إجابتك.

$$f(x) = 3|x|$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x & x \leq 0 \\ -3x & x > 0 \end{cases}$$

29. **صواب أم خطأ** تعتقد دنيا أن ثمة دائرة مفتوحة عند $x = 4$ لجزأي الدالة المعطاة. هل هي على صواب؟ بّرر إجابتك.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & -2 < x \leq 4 \\ -4x - 7 & 4 < x \leq 9 \end{cases}$$

30. **اختيار من متعدد** ما هي نقطة الرأس لدالة القيمة المطلقة

$$f(x) = -|x - a| + b$$
 حيث a و b عدنان حقيقيان؟

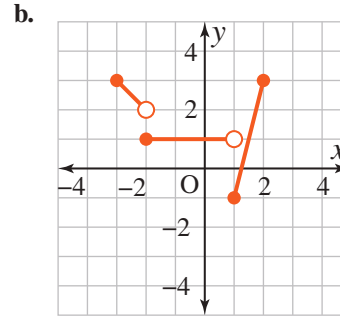
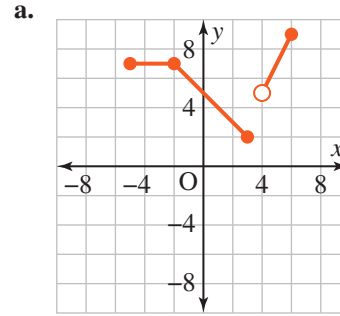
- A. (a, b)
- B. $(-a, b)$
- C. $(a, -b)$
- D. $(-a, -b)$
- E. $(-b, -a)$

23. في كل مما يلي، أعد كتابة الدالة في صورة دالة متعددة التعريف.

a. $f(x) = |-5x - 10|$

b. $f(x) = -|x| + 3$

24. ما القاعدة التي تصف الدالة المتعددة التعريف المبينة في كل من التمثيلين البيانيين أدناه.



25. **في المربّاب** أسعار إيقاف السيارات

في مربّاب مبينة في الشكل. مثل بيانيًا دالة أسعار إيقاف السيارات في المربّاب.



26. إذا عمل كامل أكثر من 40 h في الأسبوع الواحد، يحصل عن كل ساعة إضافية على 1.5 أجره العادي بالساعة وهو QR 40، اكتب دالة متعددة التعريف تحدد أجر كامل الأسبوعي P بدلالة عدد الساعات h التي عملها. حدّد المبلغ الذي يحصل عليه كامل إذا عمل 45 h

35. عروضات الرسائل النصية التي تقدمها شركة الهاتف الجوال، بالإضافة إلى الرسوم المتوجبة، موضحة في الشكل التالي:



a. اكتب دالة لكل عرض حيث x عدد الميجابايت و $f(x)$ التكلفة الإجمالية الشهرية.

b. تستهلك سارة تقريبًا 1 500 ميجابايت شهريًا. ما التكلفة الشهرية وفق كل عرض من عروض الرسائل النصية؟

c. اكتب فترة لعدد الرسائل النصية الذي تجعل كل عرض هو الأنسب للشراء.

31. اختيار من متعدد أي دالة مما يلي لها نفس التمثيل البياني الذي للدالة $f(x) = 0.1|x|$ ؟ D

A. $f(x) = \begin{cases} 0.1x & x < 0 \\ -0.1x & x > 0 \end{cases}$

B. $f(x) = \begin{cases} 0.1x & x \leq 0 \\ -0.1x & x > 0 \end{cases}$

C. $f(x) = \begin{cases} 0.1x & x > 0 \\ -0.1x & x < 0 \end{cases}$

D. $f(x) = \begin{cases} 0.1x & x \geq 0 \\ -0.1x & x < 0 \end{cases}$

E. $f(x) = \begin{cases} -0.1x, & x \geq 0 \\ 0.1x, & x < 0 \end{cases}$

استكشاف

32. الكتابة للتعلم بالنسبة إلى الدالة المتعددة التعريف $x = 8$ و $x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} 7 & x > 3 \\ 5x - 3 & x \leq 3 \end{cases}$$

يكون لهما نفس قيمة y ويكون مجموع هاتين القيمتين 10

33. بالنسبة إلى دالة متعددة التعريف معيّنة، أجزاء الدالة معرّفة لفترتي المجال، $x \leq 1$ و $x > 1$.

a. وضح كيف يمكنك إيجاد مقطع y للفترات على الفترتين $x \leq 1$ و $x > 1$.

b. بصفة عامة، كيف يمكنك إيجاد المقطع y للجزأين على الفترتين $x \leq n$ و $x > n$ ؟

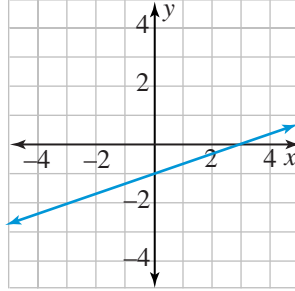
توسيع الأفكار

34. يتقاضى جاسم 60 QR عن الساعة الأولى في عمله و 40 QR عن كل ساعة إضافية تتجاوز هذا العدد من الساعات، مع احتساب كسر الساعة على أنه ساعة كاملة. نمذج الدالة أدناه الأجر الذي يتقاضاه صديقه أحمد عن x من الساعات في العمل. من منهما يتقاضى مبلغًا أكبر عن العمل لمدة 10 h؟ جاسم يتقاضى 420 QR. أحمد يتقاضى 380 QR.

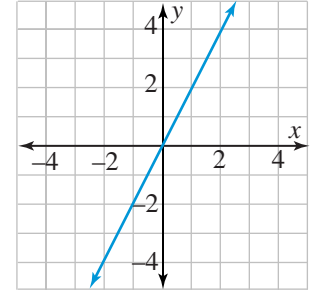
$$f(x) = \begin{cases} 50x & 0 \leq x < 4 \\ 40x & 4 \leq x < 8 \\ 38x & x \geq 8 \end{cases}$$

إجابات على أسئلة مراجعة سريعة 4.3

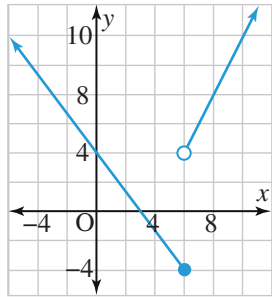
b. $y = \frac{1}{3}x - 1$



4. a. $y = 2x$



إجابات أسئلة التمارين 4.3



5. المجال: $]-\infty, \infty[$
 المدى: $y \geq -4$
 متناقصة عندما $x \leq 6$
 متزايدة عندما $x > 6$

1. $f(x) = \begin{cases} -0.5x + 1 & x < 1 \\ x & x \geq 1 \end{cases}$

2. $C(x) = \begin{cases} 100 & 0 < x \leq 250 \\ 100 + 0.8x & x > 250 \end{cases}$

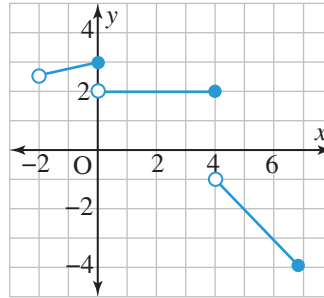
3. المجال: $-2 < x \leq 7$

المدى: $\{2\} \cup]2.5, 3] \cup [-4, -1[$

متزايدة في الفترة $]-2, 0]$

متناقصة في الفترة $]4, 7]$

ثابتة في الفترة $]0, 4]$



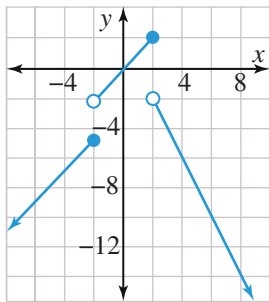
6. المجال: $]-\infty, \infty[$

المدى: $]-\infty, -2[\cup]-2, 2]$

متناقصة في الفترة $]2, \infty[$

متزايدة في الفترة $]-\infty, -2]$

وفي الفترة $]-2, 2]$



7. $f(x) = \begin{cases} x + 5 & x \leq -1 \\ -2 & x > -1 \end{cases}$

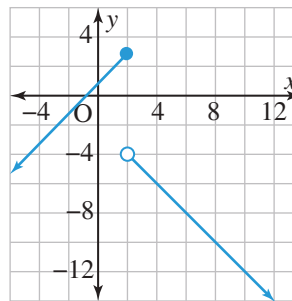
8. $f(x) = \begin{cases} \frac{-3}{5}x - \frac{4}{5} & x \leq 2 \\ \frac{5}{2}x - 7 & x > 2 \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}x - \frac{7}{5} & x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x + 1 & x > 2 \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x & x > 0 \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ -2x & x \geq 0 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ -x & x \geq 0 \end{cases}$

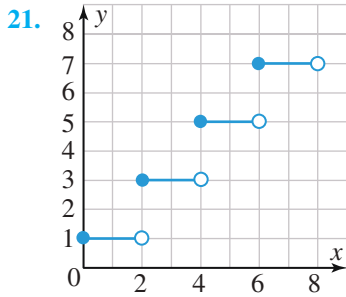
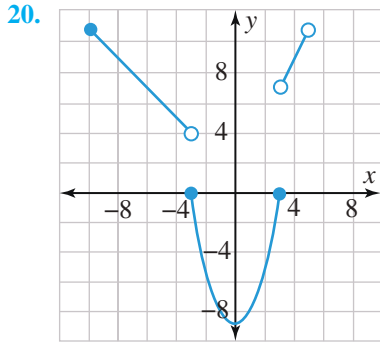


4. المجال: $]-\infty, \infty[$

المدى: $y \leq 3$

متزايدة عندما $x \leq 2$

متناقصة عندما $x > 2$



22. $f(x) = \begin{cases} 3 & -2 < x \leq 0 \\ \frac{1}{2} & 0 < x \leq 2 \\ -2 & 2 < x \leq 4 \end{cases}$

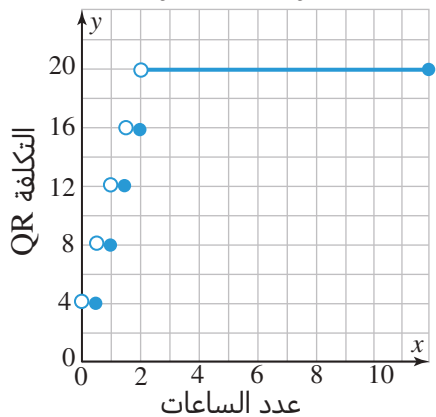
23. a. $f(x) = \begin{cases} -5x - 10 & x \leq -2 \\ 5x + 10 & x > -2 \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} x + 3 & x < 0 \\ -x + 3 & x \geq 0 \end{cases}$

24. a. $f(x) = \begin{cases} 7 & -5 \leq x \leq -2 \\ -x + 5 & -2 < x \leq 3 \\ 2x - 3 & 4 < x \leq 6 \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} -x & -3 \leq x < -2 \\ 1 & -2 \leq x < 1 \\ 4x - 5 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

25. أسعار إيقاف السيارات



13. $f(x) = \begin{cases} -3x - 1 & x < -\frac{1}{3} \\ 3x + 1 & x \geq -\frac{1}{3} \end{cases}$

14. $f(x) = \begin{cases} -2x - 6 & x \leq -3 \\ 2x + 6 & x > -3 \end{cases}$

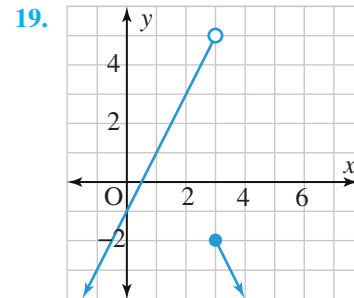
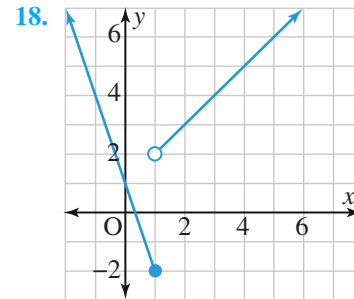
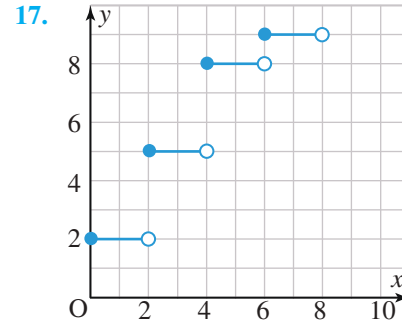
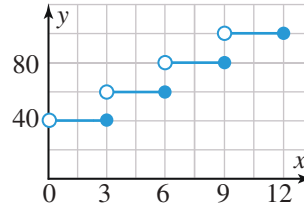
15. نعم، قد نحتاج لعدد أكبر من الخطوات لعزل المتغير داخل القيمة المطلقة، لكن في النتيجة ستمكن من فصل الدالة إلى أكثر من دالة حسب المجال.

16. المجال: $[0, 12]$

المدى: $\{40, 60, 80, 100\}$

القيمة الصغرى: 40

القيمة العظمى: 100



$$26. P(h) = \begin{cases} 40h & 0 < h \leq 40 \\ 60h - 800 & h > 40 \end{cases}$$

المبلغ الذي يحصل عليه كامل إذا عمل 45h هو QR 1 900

27. المجال: $[0, 2\ 000]$

المدى: $\{50, 67, 78, 94, 101\}$

$$28. \text{خطا، } f(x) = \begin{cases} -3x & , x < 0 \\ 3x & , x \geq 0 \end{cases}$$

29. خطا، الجزء الثاني غير معزف عند $x = 4$ لكن الجزء الأول معزف عند $x = 4$.

33. a. المقطع y يقع ضمن جزء الدالة الذي يتقاطع مع المحور y ،

أي الجزء حيث $x \leq 1$. إذن، أوجد المقطع y لقاعدة الدالة لهذا الجزء.

b. حدد أجزاء الدالة التي يكون فيها $x = 0$ ثم أوجد المقطع y لصيغة الدالة عند هذا الجزء.

35. a. لا عرض على الرسائل النصية: $f(x) = 0.25x$

عرض ال 500 رسالة:

$$f(x) = \begin{cases} 9.81 & 0 \leq x \leq 500 \\ 0.25x - 115.19 & x > 500 \end{cases}$$

عرض ال 1 200 رسالة:

$$f(x) = \begin{cases} 13.63 & 0 \leq x \leq 1\ 200 \\ 0.25x - 286.37 & x > 1200 \end{cases}$$

عرض العدد غير المحدود من الرسائل: $f(x) = 100$

b. لا عرض على الرسائل النصية: نعوض 1 500 في الدالة التي تخص

"لا عرض على الرسائل النصية":

$$f(x) = 0.25x = 0.25 \times 1\ 500 = \text{QR } 375$$

عرض ال 500 رسالة: نعوض 1 500 في الدالة التي

تخص "عرض ال 500 رسالة"، في الجزء الذي ينتمي إليه 1 500:

$$f(x) = 0.25x - 115.19 = 0.25 \times 1\ 500 - 115.19 = 259.81 \text{ QR}$$

عرض ال 1200 رسالة: نعوض 1500 في الدالة التي

تخص "عرض ال 1200 رسالة"، في الجزء الذي ينتمي إليه 1 500:

$$f(x) = 0.25x - 286.37 = 0.25 \times 1\ 500 - 286.37 = 88.63 \text{ QR}$$

عرض العدد غير المحدود من الرسائل: مهما كان عدد الرسائل،

التكلفة هي QR 100.

c. حتى يكون "لا عرض على الرسائل النصية" هو الأنسب، على القيمة

القصى لثمن الرسائل أن لا تتجاوز الحد الأدنى للقيمة المعروضة في

العرض الذي يليه. إذن $f(x) = 0.25x$ حيث $f(x) < 9.81$

إذن $x < 39$ تقريباً.

حتى يكون "عرض ال 500 رسالة" هو الأنسب، على القيمة القصوى لثمن

الرسائل أن لا تتجاوز الحد الأدنى للقيمة المعروضة في العرض الذي يليه.

$$\text{إذن } 9.81 \leq 0.25x - 115.19 < 13.63$$

إذن $39 \leq x < 515$ تقريباً.

حتى يكون "عرض ال 1 200 رسالة" هو الأنسب، على القيمة القصوى

لثمن الرسائل أن لا تتجاوز الحد الأدنى للقيمة المعروضة في العرض الذي

$$\text{يليه. إذن } 13.63 \leq 0.25x - 286.37 < 100$$

إذن $515 \leq x < 1545$ تقريباً.

حتى يكون عرض العدد غير المحدود من الرسائل هو الأنسب،

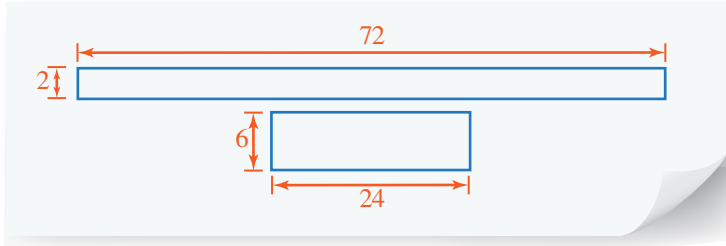
على عدد الرسائل أن يتجاوز 1 545 رسالة: $x \geq 1545$.

Inverse Proportion and Rational Functions

4.4

التناسب العكسي

مساحة كل من المستطيلين المبينين في الشكل أدناه، 144 وحدة مربعة.



هل يمكن رسم مستطيلات أخرى تكون مساحة كل منها 144 وحدة مربعة أيضًا؟ إذا راقبنا أبعاد (طول وعرض) أي من المستطيلات التي لها نفس المساحة، نلاحظ أن طول المستطيل يكبر كلما صغر عرضه. إذن، حتى يحافظ المستطيل على نفس المساحة إذا تغير طوله، على العرض أن يتغير أيضًا. بحيث يبقى حاصل ضربهما ثابتًا ويساوي 144، فنقول إن العلاقة بين طول المستطيل وعرضه هي علاقة **تناسب عكسي**.

التناسب العكسي

التناسب العكسي هو علاقة بين متغيرين x و y ، يتزايد أحدهما، فيتناقص الآخر تناسبًا، بحيث يكون ناتج ضرب x في y ثابتًا.

$$\text{أي أن } xy = k \text{ أو } y = \frac{k}{x}, \text{ حيث } k \neq 0, \text{ ويُسمى } k \text{ ثابت التناسب.}$$

فلنأخذ الجدول التالي:

x	1	2	3	4	6	12
y	12	6	4	3	2	1

لكي يبين الجدول تناسبًا عكسيًا يجب أن يكون ناتج ضرب x في y ثابتًا. الصف الثالث يبين ناتج ضرب x في y ، لقيم كل عمود في الجدول.

x	1	2	3	4	6	12
y	12	6	4	3	2	1
xy	12	12	12	12	12	12

بما أن ناتج ضرب القيم ثابت فإن جدول القيم يبين تناسبًا عكسيًا. انظر الآن إلى الجدول التالي.

x	1	2	3	4	5	6
y	20	17	14	11	8	5
xy	20	34	42	44	40	30

بما أن نواتج ضرب x في y ليست ثابتة، فإن جدول القيم لا يبين تناسبًا عكسيًا.

ما ستتعلمه

- التناسب العكسي
- الدالة النسبية وخصائصها
- الصيغة العامة للدالة النسبية

... ولماذا

في أمثلة التناسب العكسي، وهي كثيرة في الفيزياء، يكون حاصل الضرب لمقدارين متغيرين ثابتًا. ويعني ذلك أن قيمة كل منهما بالنسبة للآخر هي دالة ذات شكلي محدّد تُسمى الدالة النسبية.

معايير الدرس

11A.3.1

المصطلحات

- التناسب العكسي
- الدالة النسبية
- inverse proportion
- rational function

الهدف

سيتمكن الطلاب من التعرف على الدالة النسبية من خلال فهم التناسب العكسي، ووصف التمثيلات البيانية للدوال النسبية، وتحديد خطوط التقارب الأفقية والرأسية، والتحدث عن السلوك الطرفي.

دليل الدرس

1. التناسب العكسي
2. الدوال النسبية، تحديد خطوط التقارب والسلوك الطرفي

تحفيز

دع الطلاب يبحثون عن بعض من خصائص الدالة $y = \frac{x+2}{x-2}$ ، ويختبرون صحة هذه الخصائص باستعمال حاسباتهم البيانية.

ناتج الضرب الثابت

عند اختبار جدول للقيم لتحديد ما إذا كان يعبر عن علاقة عكسية، علينا أن نتأكد من أن ناتج ضرب كل زوج من القيم هو نفس القيمة الثابتة.

نشاط المصطلحات

هتي الطلاب لمصطلحات الدرس من خلال التأكد من فهمهم لمفردتي "مقلوب" و "معكوس". استعمل هذا الفهم لشرح التناسب العكسي والدالة النسبية. مقلوب العدد 3 هو $\frac{1}{3}$... [دالة نسبية]

الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ هي ... [دالة نسبية]

أسئلة للتفكير

س: كيف يساعد ثابت التناسب k على إيجاد قيم x و y ؟
نموذج إجابة:

ثابت التناسب هو ناتج ضرب قيمتي x و y .
إذن بمعرفة k ، فإن أي قيمة لكل من x أو y تدل على قيمة المتغير الآخر.

س: ما هي الأزواج التي تحقق التناسب؟
نموذج إجابة:

كل زوج من الأعداد التي ناتج ضربهما يساوي 30،
مثلاً: $x = 2$ و $y = 15$ ، أو $x = \frac{1}{2}$ و $y = 60$.

س: في علاقة تناسب عكسي، هل يمكننا إيجاد قيمة مجهولة للمتغير x أو للمتغير y دون إيجاد قيمة k أولاً؟
نموذج إجابة:

كلا، تعتمد قيم x و y على قيمة k .

خطأ شائع

قد يخطئ بعض الطلاب بكتابة التناسب العكسي على الشكل $\frac{x}{y} = k$. دع الطلاب يكتبون كل الصيغ الممكنة للتناسب العكسي: $xy = k$ ، $x = \frac{k}{y}$ ، و $y = \frac{k}{x}$ ، والتأكد من أن أيًا منها لا يشبه العلاقة $\frac{x}{y} = k$.

عادات التفكير

س: إذا أردنا أن نرسم مستطيلاً محيطه ثابت، سوف يزداد الطول كلما تناقص العرض. هل يمكن اعتبار العلاقة بين طول المستطيل وعرضه علاقة تناسب عكسي؟

نموذج إجابة:

كلا، لأن المحيط يساوي ضعف (الطول + العرض) وهذا يعني أن المجموع ثابت. أما التناسب العكسي فهو عندما يكون ناتج الضرب ثابتاً.

أسئلة للتفكير

س: ما هي المعلومات المعطاة عن نموذج التناسب العكسي التي يمكن استعمالها لكتابة معادلة؟
نموذج إجابة:

يبين النموذج أن طولاً معيناً لوتر العود، x ، يعطي نغمة معينة ترددها y ، وبالتالي يمكننا معرفة ثابت التغير بضرب x في y .

س: هل يمكنك استعمال التناسب العكسي لإيجاد تردد وترٍ أيًا يكن طوله؟

نموذج إجابة:

نعم، إذا عرفنا طول الوتر وثابت التناسب، يمكننا إيجاد تردده باستعمال المعادلة $fs = k$.

مثال 1 استعمال التناسب العكسي

في تناسب عكسي بين المتغيرين x و y ، عندما $x = 10$ ، $y = 3$. اكتب معادلة لتمثيل هذا التناسب العكسي ثم أوجد قيمة y عندما $x = -6$.

الحل

اكتب معادلة التناسب العكسي

عوض $x = 10$ ، $y = 3$

اضرب طرفي المعادلة ثم حل لإيجاد قيمة k

بعد إيجاد قيمة k ، اكتب معادلة هذا التناسب العكسي.

عوض $k = 30$

عوض $x = -6$ في المعادلة

اقسم

إذن، المعادلة التي تمثل هذا التناسب العكسي هي $y = \frac{30}{x}$. عندما $x = -6$ تكون $y = -5$.

حاول أن تحل التمرين 1



مثال 2 استعمال نموذج لتغير عكسي

العود هو آلة موسيقية وترية يتناسب فيها

طول الوتر s مع تردده f تناسباً عكسياً.

إذا كان طول الوتر 26 in،

يكون التردد 329.63 دورة في الثانية.

أوجد تردد وتر إذا كان طوله 13 in

الحل

اكتب معادلة التناسب العكسي

عوض $s = 26$ ، $f = 329.63$

اضرب في 329.63 لإيجاد قيمة k

بعد إيجاد قيمة k ، اكتب معادلة هذا التناسب العكسي.

عوض $k = 8570.38$ في المعادلة

عوض $s = 13$ في المعادلة

أوجد قيمة f

إذن، تردد وتر طوله 13 in، هو 659.26 دورة في الثانية.

حاول أن تحل التمرين 4

الدالة النسبية وخصائصها

الدالة النسبية هي دالة تربط كل عدد حقيقي غير صفري بمقلوبه. الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ هي الصيغة الأبسط للدالة النسبية.

لنحدد خصائص التمثيل البياني للدالة النسبية الرئيسية $f(x) = \frac{1}{x}$ ، علينا أن نكون جدولاً لقيم $(x, f(x))$ ثم نمثل الدالة بيانياً.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-3	غير معرف	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

في ما يلي خصائص الدالة النسبية الرئيسية وتمثيلها البياني.

أسئلة للتفكير

س: ماذا تلاحظ بشأن علاقة قيم x و y ؟

نموذج إجابة:

ناتج ضربهما يساوي 1، مما يعني أن كل منهما مقلوب الآخر.

س: ما هي العلاقة بين الدالة النسبية والتناسب العكسي؟

نموذج إجابة:

الدالة النسبية هي علاقة بين مجموعتي المتغيرين x و y

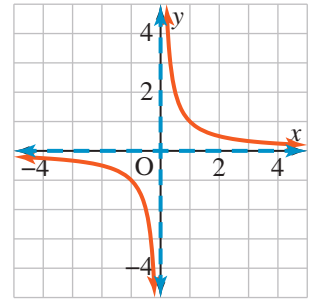
حيث أن كلاً منهما مقلوب الآخر. هذا يمثل علاقة تناسب

عكسي لأن ناتج ضربهما الثابت يساوي 1

الدالة النسبية $f(x) = \frac{1}{x}$

دالة أساسية

- المجال: $]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$
- المدى: $]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$
- متناقصة لكل قيم x في مجالها
- متناظرة حول نقطة الأصل: الدالة فردية
- ليس للدالة قيم قصوى
- خط التقارب الرأسي هو $x = 0$
- خط التقارب الأفقي هو $y = 0$
- السلوك الطرفي: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$



راقب التمثيل البياني للدالة $y = \frac{1}{x}$ ، نلاحظ أنه كلما ازدادت قيمة x أصبح المقام أكبر وقاربت قيمة الدالة الصفر أكثر.

x	-10 000	-1 000	-100	-10	-1	0	1	10	100	1 000	10 000
$f(x)$	$-\frac{1}{10 000}$	$-\frac{1}{1 000}$	$-\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{10}$	-1	غير معرف	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1 000}$	$\frac{1}{10 000}$

كلما اقتربت قيم x من موجب مالانهاية، اقتربت $f(x)$ من الصفر. ويصغ ذلك أيضاً كلما اقتربت قيم x من سالب مالانهاية، لذا فإن المستقيم $y = 0$ هو خط تقارب أفقي للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$.
والآن انظر إلى التمثيل البياني للدالة $y = \frac{1}{x}$ عندما تقترب قيم x من الصفر لقيم x الموجبة والسالبة.

x	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1 000}$	$\frac{1}{10 000}$
$f(x)$	1	10	100	1 000	10 000

لقيم x الموجبة، كلما اقتربت قيم x من الصفر اقتربت قيمة $f(x)$ من موجب مالانهاية.

متى نستعمل التكنولوجيا؟

بالنسبة لمعادلة كهذه، لا تتضمن معطيات كثيرة، يمكن رسم التمثيل البياني باليد. أما حين نتعامل مع معادلات أكثر تعقيداً فربما يفضل حينئذ أن تستعمل التكنولوجيا لرسم التمثيل البياني.

أسئلة للتفكير

س: لماذا يكون المجال والمدى للدالة النسبية مقيداً؟

نموذج إجابة:

في الدالة النسبية يحتوي المقام متغيراً. لذا أي عدد يجعل المقام صفرًا يكون غير معرف لقيمة x تلك. كما أن من غير الممكن أن تساوي الدالة الصفر في حال كان البسط عدداً حقيقياً غير صفري.

x	-1	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{1\,000}$	$-\frac{1}{10\,000}$
$f(x)$	-1	-10	-100	-1\,000	-10\,000

ولقيم x السالبة، كلما اقتربت قيم x من الصفر تقترب قيمة $f(x)$ من سالب مالانهاية. بما أن مجال الدالة لا يتضمن العدد 0، لذا فلن يلامس منحنى التمثيل البياني المستقيم $x = 0$. إذن، المستقيم $x = 0$ هو خط تقارب رأسي للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$.

نشاط استكشافي 1 المقارنة بين التمثيلات البيانية للدوال النسبية

1. ارسم التمثيل البياني واكتب معادلة الدالة g التي يتم الحصول على تمثيلها البياني بإزاحة التمثيل البياني للدالة النسبية $f(x) = \frac{1}{x}$ وحدتين إلى اليمين.
2. ارسم التمثيل البياني واكتب معادلة الدالة h التي يتم الحصول على تمثيلها البياني بإزاحة التمثيل البياني للدالة النسبية $f(x) = \frac{1}{x}$ ، 5 وحدات إلى اليمين، متبوعاً بانعكاس حول المحور x .
3. ارسم التمثيل البياني واكتب معادلة الدالة k التي يتم الحصول على تمثيلها البياني بإزاحة التمثيل البياني للدالة النسبية $f(x) = \frac{1}{x}$ ، 4 وحدات إلى اليسار، متبوعاً بتمدد رأسي معاملته 3، وأخيراً بإزاحة وحدتين إلى الأسفل.

الصيغة العامة للدالة النسبية

الصيغة العامة للدالة النسبية هي $f(x) = \frac{a}{x-h} + k$ حيث المتغيرات a ، h ، k هي أعداد حقيقية. يمثل a التمدد والتضيّق الرأسي ويمثل h الإزاحة الأفقية ويمثل k الإزاحة الرأسية. ويكون للدالة خط تقارب رأسي معادلته $x = h$ وخط تقارب أفقي معادلته $y = k$. يمكن تمثيل الدالة النسبية عمومًا من خلال عدة تحويلات على الدالة النسبية الرئيسية $f(x) = \frac{1}{x}$.

مثال 3 تمثيل إزاحات الدالة النسبية بيانيًا

- لتكن الدالة $g(x) = \frac{1}{(x-3)} + 2$.
- A. مثل الدالة g بيانيًا.
- B. أوجد معادلات خطوط التقارب. ثم أوجد المجال والمدى للدالة $g(x)$.

الحل

A. نبدأ بالتمثيل البياني للدالة الرئيسية، $f(x) = \frac{1}{x}$.

تمهيد للاستكشاف

أسأل الطلاب أن يستعملوا حاسبات بيانية لتمثيل الدوال التالية بيانيًا:

$$f(x) = \frac{1}{x} + 2 \text{ و } f(x) = \frac{1}{x} + 1$$

$$f(x) = \frac{1}{x+2} \text{ و } f(x) = \frac{1}{x+1} + 9$$

ناقش النتائج بالنسبة لإزاحة منحنى الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$.

أسئلة للتفكير

س: (مع الصيغة العامة للدالة النسبية) ماذا يمكنك أن تستعمل لتعرف التحويلات المحددة لتتمكن من معرفة صيغتي خطي التقارب، وما هي العلاقة بين ذلك وبين المجال والمدى؟

نموذج إجابة:

$$\text{بالنسبة للدالة في الصيغة } f(x) = \frac{1}{x-h} + k$$

تشكل (h, k) نقطة تقاطع خطي التقارب.

إذن $x = h$ و $y = k$ هما صيغتا خطي التقارب.

تحدد قيمتا h و k أيضًا قيودًا على المجال والمدى.

س: كيف يمكنك تعريف (h, k) في إزاحات الدالة النسبية؟

نموذج إجابة:

النقطة (h, k) هي نقطة تقاطع خطي التقارب الأفقي والرأسي.

أسئلة للتفكير

س: كيف يمكنك أن تتبين وأن تحدد ونصف إزاحة في المستوى الإحداثي؟

نموذج إجابة:

الإزاحة هي تحريك من موقع إلى آخر في اتجاه أفقي و/أو رأسي.

س: ما النقطة التي يمكن أن تؤدي دور الدالة المرجعية لأي إزاحة؟

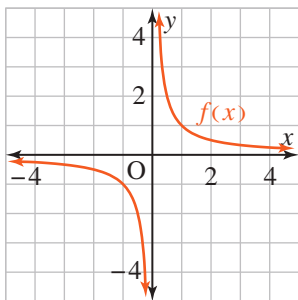
نموذج إجابة:

خطوط التقارب للدالة الرئيسية $f(x) = \frac{1}{x}$ تتقاطع عند

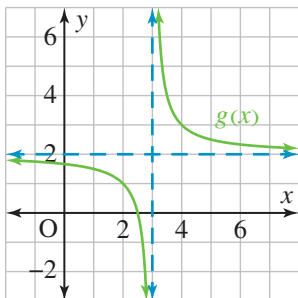
$(0, 0)$. لذلك فإن هذه النقطة يمكن أن تؤدي دورًا في

تحديد خطوط التقارب بعد الإزاحة وبالتالي موقع التمثيل البياني الجديد.

(تابع)



الدالة $g(x) = \frac{1}{(x-3)} + 2$ هي إزاحة للدالة الرئيسية f ، تتم إزاحة التمثيل البياني للدالة f أفقيًا بمقدار 3 وحدات إلى اليمين، ثم إزاحة التمثيل البياني للدالة f رأسيًا بمقدار وحدتين للأعلى.



B. المستقيم $x = 3$ هو خط تقارب رأسي. والمستقيم $y = 2$ هو خط تقارب أفقي. المجال هو: $\{x : x \neq 3\}$ المدى هو: $\{y : y \neq 2\}$

حاول أن تحل التمرين 7

يمكن الحصول على التمثيل البياني لأي دالة نسبية غير صفرية بالصيغة

$$g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, c \neq 0$$

من خلال تحويلات التمثيل البياني للدالة النسبية الرئيسية، حيث يمكننا استعمال قسمة كثيرات الحدود لإعادة كتابة الدالة النسبية في الصيغة $g(x) = \frac{a}{x-h} + k$.

مثال 4 تحويل الدالة النسبية

صف كيف يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة المعطاة بتحويل التمثيل البياني للدالة النسبية $f(x) = \frac{1}{x}$. حدّد خطوط التقارب الرأسية والأفقية. ارسم التمثيل البياني للدالة.

A. $g(x) = \frac{2}{x+3}$

B. $h(x) = \frac{3x-7}{x-2}$

الحل

A. $g(x) = \frac{2}{x+3}$

التمثيل البياني للدالة g هو التمثيل البياني للدالة النسبية $f(x) = \frac{1}{x}$ ، بعد إزاحة إلى اليسار بمقدار 3 وحدات ثم بتمدد رأسي معاملته 2،

إذن، المستقيمان $x = -3$ و $y = 0$ هما خطا التقارب الرأسية والأفقية بالترتيب.

(تابع)

عادات التفكير

س: إذا كان خط التقارب الرأسى لإحدى الدوال النسبية هو الخط $x = 5$ ، ما الصيغة الممكنة لهذه الدالة؟

نموذج إجابة:

$$f(x) = \frac{1}{x-5}$$

للطلاب سريعى الإنجاز

(مع المثال 3) يمكن للطلاب الذين استوعبوا مفهوم الإزاحة أن يتقدموا خطوة إلى الأمام من خلال تحديد الإزاحة من دالة نسبية إلى أخرى.

س: صف الإزاحة التي تحول الدالة $f(x) = \frac{1}{x-6} + 4$ إلى الدالة $g(x) = \frac{1}{x+3} - 9$

$$g(x) = \frac{1}{x+3} - 9$$

نموذج إجابة:

إزاحة أفقية 9 وحدات إلى اليمين تليها إزاحة رأسية

13 وحدة إلى الأسفل.

س: كيف يمكن استعمال التمثيل البياني لتحديد الإزاحة

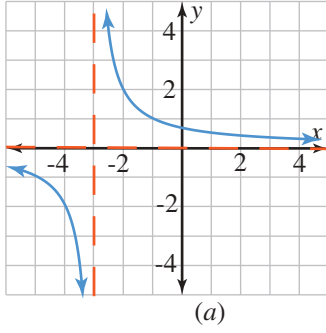
من دالة نسبية إلى أخرى؟

نموذج إجابة:

مثل كلتا الدالتين بيانيًا من خلال تحديد الإزاحة انطلاقًا

من الدالة الرئيسية $y = \frac{1}{x}$ ، ثم حدّد الإزاحة ما بين

الدالتين من خلال إيجاد مقدار الإزاحة الأفقية والرأسية.



التمثيل البياني موضح في الشكل المجاور.

B. نبدأ بقسمة كثيرات الحدود:

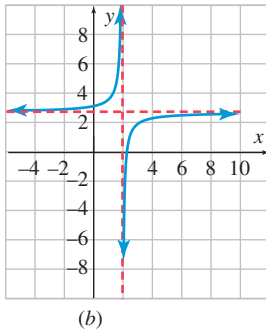
$$\begin{array}{r} 3 \\ x - 2 \overline{) 3x - 7} \\ \underline{3x - 6} \\ -1 \end{array}$$

إذن،

$$h(x) = \frac{3x-7}{x-2} = 3 - \frac{1}{x-2}$$

إذن، يكون التمثيل البياني للدالة h هو التمثيل البياني للدالة النسبية الرئيسة بعد إزاحة مقدارها وحدتين إلى اليمين، متبوعة بانعكاس حول المحور x ، ثم بإزاحة مقدارها 3 وحدات إلى أعلى. (لاحظ أنه يجب تنفيذ الانعكاس قبل تنفيذ الإزاحة الرأسية). إذن، المستقيمان $x = 2$ و $y = 3$ هما خطا التقارب الرأسى والأفقى بالترتيب.

التمثيل البياني موضح في الشكل المجاور.



حاول أن تحل التمرين 10

سؤال للتفكير

س: هل يمكن تحديد السلوك الطرفي للدالة $h(x)$

من دون استعمال القسمة؟

نموذج إجابة:

نعم، يمكن كتابة $h(x)$ على الشكل التالي:

$$h(x) = \frac{3x-7}{x-2} = \frac{x(3-\frac{7}{x})}{x(1-\frac{2}{x})} = \frac{3-\frac{7}{x}}{1-\frac{2}{x}}$$

عندما يقترب x من ∞ ، فإن $\frac{2}{x}$ و $\frac{7}{x}$ يقتربان من 0،

وبالتالي تقترب $h(x)$ من $\frac{3-0}{1-0} = 3$

التمثيل البياني لدالة نسبية

للتمثيل البياني للدالة $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$, $x \neq -\frac{d}{c}$ الخصائص التالية:

1. خط التقارب الذي يبين السلوك الطرفي:
إذا كان $a = 0$ ، فإن خط التقارب الذي يبين السلوك الطرفي هو خط التقارب الأفقي $y = 0$.
إذا كان $a \neq 0$ ، فإن خط التقارب الذي يبين السلوك الطرفي هو خط التقارب الأفقي $y = \frac{a}{c}$.
2. خطوط التقارب الرأسية: تقع عند الأصفار الحقيقية للمقام تحديدًا عند $x = -\frac{d}{c}$.
3. المقطع مع المحور x يوجد عند الأصفار الحقيقية للبسط.
4. المقطع مع المحور y هو قيمة $f(0)$ إذا كانت معرّفة.

سؤال للتفكير

س: كيف يمكنك تحديد أي الطرق عليك اتباعها لمعرفة

خط التقارب الأفقي في هذه الدالة؟

نموذج إجابة:

درجة البسط تساوي درجة المقام، لذا يمكننا استعمال

نسبة المعاملين الرئيسيين.

س: ما هي الطريقة التي اتبعتها لتمثيل الدالة بيانيًا؟

نموذج إجابة:

لمعرفة خط التقارب الرأسي، اجعل المقام يساوي

الصفر. احسب نسبة المعاملين الرئيسيين لمعرفة خط

التقارب الأفقي. مثل خطي التقارب بيانيًا. اختر بعض

النقاط التجريبية لتمثيل الدالة بيانيًا.

نسبة الحدود الرئيسة

لا يمكن استعمال نسبة الحدود الرئيسة إلا إذا كان x

يقترّب من اللانهاية الموجبة أو السالبة.

مثال 5 تمثيل دالة صورتها $\frac{ax+b}{cx+d}$ بيانيًا

مثل الدالة $f(x) = \frac{2x+1}{3x-4}$ بيانيًا.

الحل

- حدّد خطوط التقارب.

حدّد أولاً ما إذا كان لمنحنى الدالة **خط تقارب رأسي**.

اجعل المقام يساوي 0

$$3x - 4 = 0$$

$$3x = 4$$

$$x = \frac{4}{3}$$

حل

اقسم لعزل المتغير

عند $x = \frac{4}{3}$ تكون قيمة المقام 0

إذن، لمنحنى الدالة **خط تقارب رأسي عند $x = \frac{4}{3}$** .

ثم حدّد ما إذا كان لمنحنى الدالة **خط تقارب أفقي**.

قرب f إلى نسبة الحدود الرئيسة

$$y \approx \frac{2x}{3x}$$

$$y \approx \frac{2}{3}$$

بسط

عندما $x \rightarrow \pm\infty$, $y \rightarrow \frac{2}{3}$

إذن، لمنحنى الدالة **خط تقارب أفقي عند $y = \frac{2}{3}$** .

(تابع)

للطلاب الذين يواجهون صعوبات

(مع المثال 5) قد يواجه الطلاب صعوبة في فهم كيف يمكننا تقدير خط التقارب الأفقي من خلال النظر إلى نسبة المعاملين الرئيسيين.

دع الطلاب يستعملون التكنولوجيا لإيجاد قيم الدوال النسبية التالية لقيم أكبر للمتغير x ، وذلك ليتبينوا أن خط التقارب الأفقي مبني على المعامل الرئيس في كل من البسط والمقام.

$$1. f(x) = \frac{5x-1}{2x+3}$$

$$2. g(x) = \frac{17x-1}{3x+3}$$

س: ماذا يحصل للدالتين $f(x)$ و $g(x)$ لقيم أكبر

للمتغير x ؟

نموذج إجابة:

قيم الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ تصبح مستقرة، تقترب الدالة f من $\frac{5}{2}$ ، و تقترب الدالة g من $\frac{17}{3}$

- اختبر قيم x في كلا جانبي خط التقارب الرأسي، وأوجد قيمة الدالة لقيم x هذه وذلك لإنشاء نقاط إحداثية. فيما يلي جدول لبعض القيم.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{4}$	-3	$\frac{5}{2}$

أوجد نقاط التقاطع مع المحورين

عوض $x = 0$ في صيغة الدالة $y = \frac{2x+1}{3x-4}$ لإيجاد المقطع مع المحور y :

$$y = \frac{2(0)+1}{3(0)-4} = -\frac{1}{4}$$

إذن، يتقاطع التمثيل البياني مع المحور y في النقطة $(0, -\frac{1}{4})$.

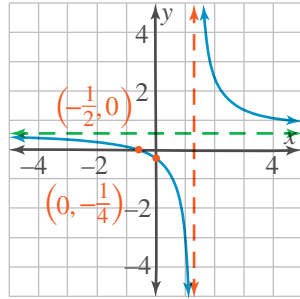
عوض $y = 0$ في صيغة الدالة $y = \frac{2x+1}{3x-4}$ لإيجاد المقطع مع المحور x :

$$2x + 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

إذن، يتقاطع التمثيل البياني مع المحور x في النقطة $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- حدّد خطوط التقارب ثم عيّن النقاط في المستوى الإحداثي ومثل الدالة بيانيًا.



حاول أن تحل التمرين 18

مثال 6 استعمال الدوال النسبية

نموذج الدالة المعطاة أدناه تكلفة إزالة التلوث، حيث $f(p)$ التكلفة، بملايين الدولارات، لإزالة النسبة المئوية p من الملوثات. أوجد النسبة المئوية من الملوثات التي يمكن إزالتها بمبلغ مقداره 78.3 مليون دولار.



أسئلة للتفكير

س: لماذا يمكن حل المسألة جبريًا دون استعمال

التكنولوجيا؟

نموذج إجابة:

لأن المعادلة $f(p) = 78.3$ ينتج عنها معادلة خطية بسيطة.

س: ماذا يعني خط التقارب الرأسي في هذه المسألة؟

نموذج إجابة:

يعني أن الوصول إلى إزالة التلوث بنسبة 100% أمر متعذر لأن التكلفة تترادف بشكل كبير عندما تصبح النسبة قريبة من 100%.

عادات التفكير

س: ما هي خطوط التقارب للدالة $f(p) = \frac{8.7p}{100-p}$ ؟

نموذج إجابة:

خط تقارب رأسي عند $p = 100$ وخط تقارب أفقي

عند $y = -8.7$.

الحل

حل جبريًا نعوض قيمة $f(p) = 78.3$ في صيغة الدالة $f(p) = \frac{8.7p}{100-p}$

$$78.3 = \frac{8.7p}{100-p}$$

$$8.7p + 78.3p = 7830$$

$$87p = 7830$$

$$p = 90$$

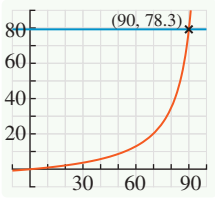
إذن يمكن إزالة 90% من الملوثات بمبلغ مقداره 78.3 مليون دولار.

تحقق بيانيًا

مثل بيانيًا كلاً من المستقيم $y = 78.3$

والدالة $f(p) = \frac{8.7p}{(100-p)}$ في نفس المستوى الإحداثي.

تقع النقطة (90, 78.3) في كلا التمثيلين البيانيين.



حاول أن تحل التمرين 19

ملاحظات على التمارين

التمارين 4-1، تركز على التناسب العكسي.
التمارين 5-20، تركز على التمثيل البياني للدوال النسبية.
التمارين 21-25، تركز على السلوك الطرفي للدوال النسبية.
التمارين 32-35، تدرب الطالب على أنماط من الاختبارات.

التقييم المستمر

التقييم الذاتي:

التمارين 3, 5, 11, 13, 16, 17, 23, 24

إرشاد

يمكنك استعمال تكنولوجيا الرسم البياني لإيجاد نقاط التقاطع.

مراجعة سريعة 4.4

في التمارين 5-7، حدد ما إذا كان كل جدول قيم يبين تغيرًا عكسيًا أم لا.

5. نعم

x	1	2	3	5	6	15
y	25.5	12.75	8.50	5.10	4.25	1.70

6. كلا

x	6.6	5.5	4.4	3.3	2.2	1.1
y	3	5	7	9	11	13

7. نعم

x	1	2	3	4	6	8	12	24
y	24	12	8	6	4	3	2	1

8. لتكن الدالة $y = \frac{10}{x}$. أكمل الجدول التالي.

x	0.1	1	10	20	30	40
y	100	10	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

في التمارين 1-4، أوجد ناتج القسمة والباقي عند قسمة $f(x)$ على $d(x)$.

1. الناتج = 2 والباقي = 7 $f(x) = 2x + 1, d(x) = x - 3$

2. الناتج = 2 والباقي = 5 $f(x) = 4x + 3, d(x) = 2x - 1$

3. الناتج = 3 والباقي = -5 $f(x) = 3x - 5, d(x) = x$

4. الناتج = $\frac{5}{2}$ والباقي = -1 $f(x) = 5x - 1, d(x) = 2x$

الدرس 4.4 التمارين

في التمارين 15-18، مثل الدالة بيانيًا.

$$15. f(x) = \frac{-1}{x-3}$$

$$16. f(x) = \frac{3x}{x-1}$$

$$17. f(x) = \frac{x+2}{-x+1}$$

$$18. f(x) = \frac{2x-3}{3x+4}$$

19. بالعودة إلى المثال 6 في الدرس، إذا ظهرت تقنيات حديثة غيرت دالة التكلفة، وأصبحت الدالة الجديدة $g(p) = \frac{3.2p+1}{100-p}$ ، أوجد نسبة الملوثات التي يمكن إزالتها بمبلغ مقداره 50 مليون دولار. $P=94\%$ تقريبًا

20. مثل الدالة $y = \frac{-2}{x}$ بيانيًا. أوجد مجال الدالة، ومداها، ومعادلات خطوط تقاربها.

في التمارين 21-25، أوجد مجال الدالة f . استعمل النهايات لوصف سلوك f عند قيمة (قيم) x التي هي خارج المجال. ثم مثل الدالة بيانيًا.

$$21. f(x) = \frac{-3}{x-1}$$

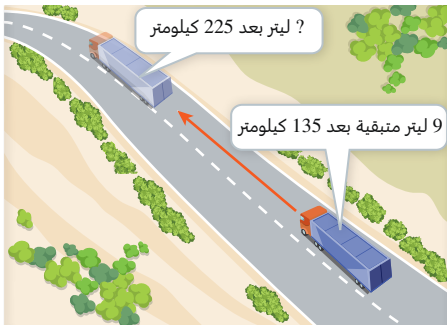
$$22. f(x) = \frac{-1}{x-4}$$

$$23. f(x) = \frac{2}{x-1}$$

$$24. f(x) = \frac{3}{x+1} - 4$$

$$25. f(x) = \frac{-4}{x+3} + 3$$

26. تتناسب كمية الوقود المتبقية في خزان شاحنة عكسيًا مع عدد الكيلومترات التي تقطعها هذه الشاحنة. تستمر هذه العلاقة التعاكسية إلى أن تفرغ الشاحنة من الوقود. نمذج علاقة عكسية تربط بين كمية الوقود في خزان الشاحنة وعدد الكيلومترات التي تقطعها الشاحنة. $y = \frac{1215}{x}$ ، يتبقى 5.4 لتر من الوقود.



1. في علاقة تناسب عكسي بين المتغيرين x و y ، $x = -8$ عندما $y = -\frac{1}{4}$. أوجد قيمة y إذا كان $x = 4$. $y = \frac{1}{2}$

2. في علاقة تناسب عكسي بين المتغيرين x و y ، كان $x = 3$ عندما $y = \frac{2}{3}$ ، أوجد قيمة y عندما $x = -1$. $y = -2$

3. في علاقة تناسب عكسي بين المتغيرين x و y ، $x = 6$ و $y = \frac{1}{2}$.

a. أوجد المعادلة التي تمثل علاقة التناسب العكسي. $y = \frac{3}{x}$
b. أوجد قيمة y عندما $x = 15$. $y = \frac{1}{5}$

4. الزمن الذي يستغرقه ذوبان مكعب من الجليد يتناسب عكسيًا مع درجة حرارة الهواء. إذا كان ذوبان الجليد يستغرق 20 دقيقة في درجة الحرارة 20 مئوية، فكم يستغرق ذوبانه في درجة الحرارة 30 مئوية؟ 13.3 دقيقة تقريبًا

في التمارين 5-7 مثل الدالة بيانيًا. أوجد مجال الدالة، ومداها، ومعادلات خطوط تقاربها.

$$5. f(x) = \frac{1}{x-2}$$

$$6. f(x) = \frac{1}{x+3}$$

$$7. f(x) = \frac{1}{x-2} + 1$$

في التمارين 8-13، صف كيف يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة المعطاة عن طريق تحويل التمثيل البياني للدالة النسبية $g(x) = \frac{1}{x}$. حدد خطوط التقارب الرأسية والأفقية واستعمل النهايات لوصف السلوك المناسب. ارسم التمثيل البياني للدالة.

$$8. f(x) = \frac{1}{x-3}$$

$$9. f(x) = -\frac{2}{x+5}$$

$$10. f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$$

$$11. f(x) = \frac{3x-2}{x-1}$$

$$12. f(x) = \frac{5-2x}{x+4}$$

$$13. f(x) = \frac{4-3x}{x-5}$$

14. أوجد العلاقة بين دالة المقلوب الرئيسية وعلاقة التناسب العكسي.

31. نجح لاعب كرة سلة في التسجيل 10 مرات من 25 محاولة تسديد من مسافة الثلاث نقاط. بالتالي، إذا قام هذا اللاعب بـ x محاولة تسديد متتالية من مسافة الثلاث نقاط فإن نجاحه في التسجيل يمكن نمذجته بالدالة التالية:

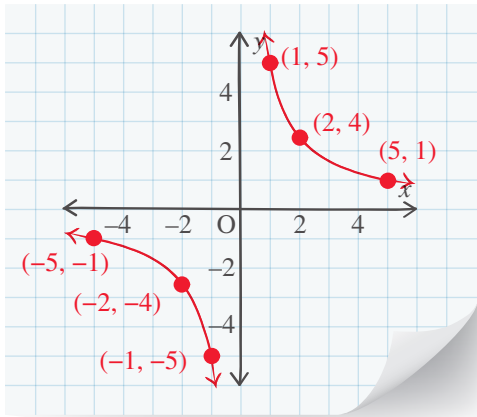
$$f(x) = \frac{x+10}{x+25}$$



- a. حدّد خط التقارب الرأسي وخط التقارب الأفقي لهذه الدالة.
b. ممثّل الدالة بيانيًا.

أسئلة اختبار معيارية

32. صواب أم خطأ ممثّل ماجد الدالة $y = \frac{5}{x}$ بيانيًا كما هو مبين. هل تمثيله صحيح؟ برّر إجابتك.



- خطأ، لا تحقق نقاط التمثيل البياني صيغة الدالة.
33. صواب أم خطأ تقول علينا إن جدول القيم أدناه يبيّن علاقة عكسية. هل هي على صواب، برّر إجابتك.

x	1	2	3	4	8	16
y	24	12	8	6	3	2

خطأ، ناتج ضرب $x \times y$ ليس نفسه لجميع القيم في الجدول.

27. تتناسب المدة الزمنية اللازمة لتفريغ خزان ماء عكسيًا مع معدل الضخ P . تستطيع مضخة أن تفرغ خزان ماء في 40 دقيقة، وذلك بمعدل 120 لتر في الدقيقة. اكتب معادلة التناسب العكسي. كم تستغرق المضخة من الوقت لإفراغ الخزان من الماء، إذا كانت تضخ بمعدل 200 لتر في الدقيقة؟
 $t = \frac{4800}{P}$ ، $t = 24$ دقيقة.
28. ألعاب الفيديو يتناسب عدد الألعاب التي يمكن تخزينها في نظام لألعاب الفيديو عكسيًا مع معدل حجم التخزين للألعاب. يستطيع أحد أنظمة ألعاب الفيديو تخزين 160 لعبة عندما يكون معدل حجم التخزين للألعاب هو 2.0 جيجابايت (GB).

- a. اكتب معادلة عكسية تربط عدد الألعاب n التي يتسع لها نظام ألعاب الفيديو، بمعدل حجم التخزين للألعاب s بالجيجابايت.

- b. استعمل العلاقة العكسية لتكمل الجدول التالي:

معدل حجم الألعاب بالجيجابايت (s)	1.0	2.5	3.0	4.0
عدد الألعاب (n)				

29. في الكهرباء، تتغيّر الفولتية U (يقاس بوحدة Volt) في دائرة كهربائية، بحيث تتناسب عكسيًا مع المقاومة R (تقاس بوحدة Ohm). تبلغ قوة الفولتية في دائرة كهربائية 15V، عندما تساوي المقاومة 192 Ohms

- a. اكتب معادلة العلاقة العكسية.
 $U = \frac{2880}{R}$

- b. أوجد قيمة الفولتية في الدائرة الكهربائية عندما تساوي المقاومة 144 Ohms
20 Volts

30. في الفيزياء ينص قانون "بويل" بأن الضغط الذي تؤثر به كمية ثابتة من الغاز، P ، يتغير عكسيًا مع الحجم الذي يحتله الغاز، V ، على افتراض أن الحرارة ثابتة.

حجم وضغط الهواء للكرة رقم 1 هما 300 cm³ و 4.5 KPa
حجم وضغط الهواء للكرة رقم 2 هما 415 cm³ و 8 KPa
كم يجب أن يكون حجم الكرة 1 أصغر ليكون لها نفس ضغط الهواء الذي للكرة 2؟
131.25 cm³

توسيع الأفكار

في التمرينين 38 و 39، مثل الدالة بيانيًا. اكتب الدالة في صورة دالة متعددة التعريف دون قيمة مطلقة، واستعمل النتيجة لتأكيد خطوط تقارب التمثيل البياني والمقاطع جبريًا.

$$38. h(x) = \frac{2x-3}{|x|+2}$$

$$39. h(x) = \frac{5-3x}{|x|+4}$$

$$40. \text{ افترض أن } g(x) = 1 + \frac{1}{\left(x - \frac{1}{x}\right)} \text{ و } f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x}{x^3 - x}$$

هل $f = g$ ؟ ادمع إجابتك من خلال إجراء تحليل مقارن بين جميع خصائص f و g ، بما فيها خطوط التقارب والمقاطع والمجال.

34. اختيار من متعدد تتناسب y عكسيًا مع مربع x .

إذا ضربنا x في 4، أي المقادير التالية تصح لقيمة y ؟ D

A. تضرب قيمة y في 4

B. تضرب قيمة y في 16

C. تضرب قيمة y في $\frac{1}{4}$

D. تضرب قيمة y في $\frac{1}{16}$

E. تضرب قيمة y في $\frac{-1}{16}$

35. اختيار من متعدد لتكن $f(x) = \frac{-2}{x+3}$. أوجد قيمة x التي

يجب استثناءها من مجال الدالة f . C

A. 0 فقط

B. 3 فقط

C. -3 فقط

D. 0 و -3 فقط

E. 0 و 3 فقط

استكشاف

36. الكتابة للتعلم متى لا يكون للدالة $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ خط تقارب رأسي؟ أعط مثلًا على هذه الدالة إن وجدت.

$$f(x) = \frac{2x-1}{3}, c=0, \text{ مثلًا:}$$

37. قانون بويل كما ورد في التمرين 30، فإن قانون الغاز المثالي

هذا ينص على أن حجم الغاز المحفوظ عند درجة حرارة ثابتة يتناسب عكسيًا مع الضغط.

إذا كان ضغط عينة من غاز النيتروجين حجمها 2.59 L عند

درجة حرارة 291 K هو 0.866 atm، أوجد الحجم عند ضغط

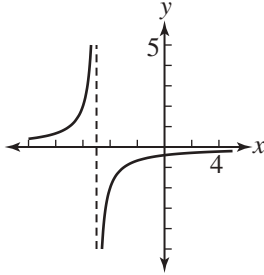
0.532 atm إذا لم تتغير درجة الحرارة. 4.22 L

إجابات أسئلة التمارين 4.4

9. إزاحة أفقية 5 وحدات إلى اليسار ثم انعكاس حول المحور x متبوعاً بتمدد رأسي

بمعامل 2، خط تقارب رأسي: $x = -5$ ، خط تقارب أفقي: $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) = \infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

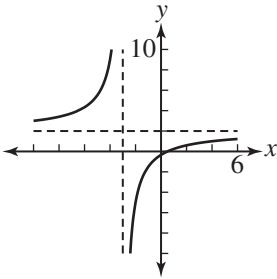


10. إزاحة أفقية 3 وحدات إلى اليسار ثم انعكاس حول المحور x متبوعاً بتمدد رأسي

بمعامل 7، تليه إزاحة رأسية وحدتين إلى الأعلى. خط تقارب رأسي: $x = -3$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2, y = 2$$

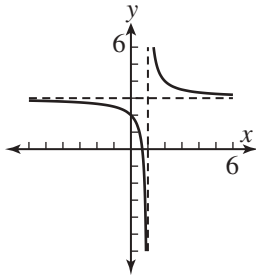
$$\text{و } \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty$$



11. إزاحة أفقية وحدة إلى اليمين تليها إزاحة رأسية 3 وحدات إلى الأعلى،

خط تقارب رأسي: $x = 1$ ، خط تقارب أفقي: $y = 3$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$

$$\text{و } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$$

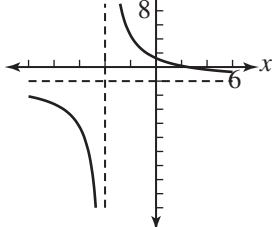


12. إزاحة أفقية 4 وحدات إلى اليسار ثم تمدد رأسي بمعامل 13 متبوعاً بإزاحة رأسية

وحدين إلى الأسفل. خط تقارب رأسي: $x = -4$ ، خط تقارب أفقي: $y = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = \infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -2 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$$

$$\text{و } \lim_{x \rightarrow -4} f(x) = -\infty$$

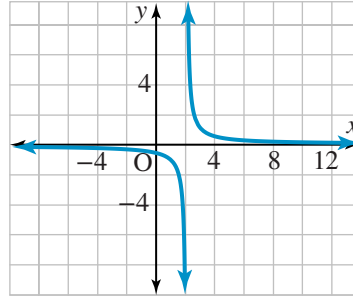


5. المجال: $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 2\}$

المدى: $\{y : y \in \mathbb{R}, y \neq 0\}$

خط التقارب الرأسي: $x = 2$

خط التقارب الأفقي: $y = 0$

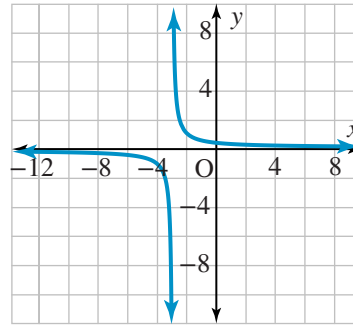


6. المجال: $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq -3\}$

المدى: $\{y : y \in \mathbb{R}, y \neq 0\}$

خط التقارب الرأسي: $x = -3$

خط التقارب الأفقي: $y = 0$

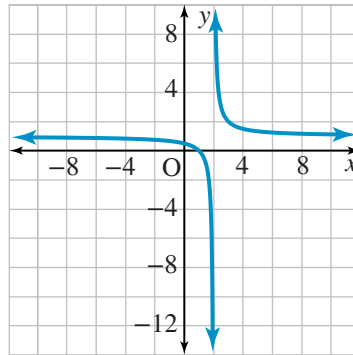


7. المجال: $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 2\}$

المدى: $\{y : y \in \mathbb{R}, y \neq 1\}$

خط التقارب الرأسي: $x = 2$

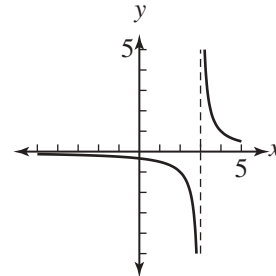
خط التقارب الأفقي: $y = 1$



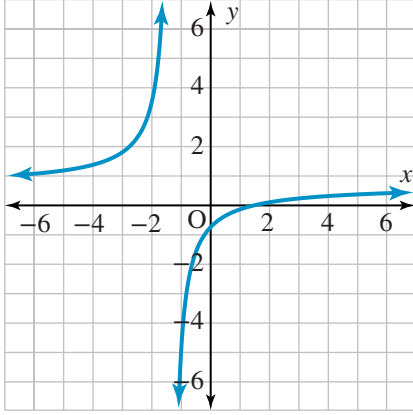
8. إزاحة أفقية 3 وحدات إلى اليمين، خط تقارب رأسي: $x = 3$ ، خط تقارب

$$\text{أفقي: } y = 0, \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\text{و } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$$



18.

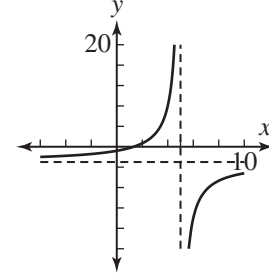


13. إزاحة أفقية 5 وحدات إلى اليمين ثم تمدد رأسي بمعامل 11 وانعكاس حول

المحور x متبوعاً بإزاحة رأسية 3 وحدات إلى الأسفل.

خط تقارب رأسي: $x = 5$ ، خط تقارب أفقي: $y = -3$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$

و $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -3$

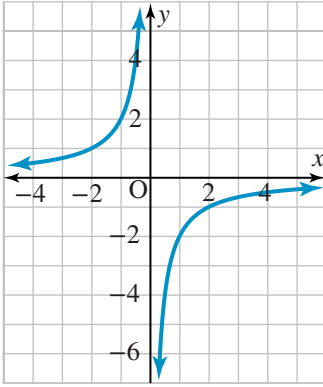


20. المجال: $\{x: x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$

المدى: $\{y: y \in \mathbb{R}, y \neq 0\}$

خط التقارب الرأسي: $x = 0$

خط التقارب الأفقي: $y = 0$



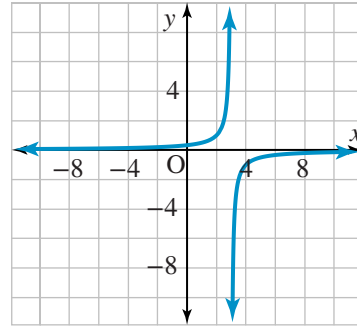
14. نموذج إجابة: يمكن تمثيل علاقة التناسب العكسي باستعمال جداول

أو معادلات أو رسوم بيانية. دالة المقلوب الرئيسية $f(x) = \frac{1}{x}$ هي علاقة تربط

بين قيم المتغيرين x و y حيث أن كلاً منهما مقلوب الآخر. هذا يمثل علاقة

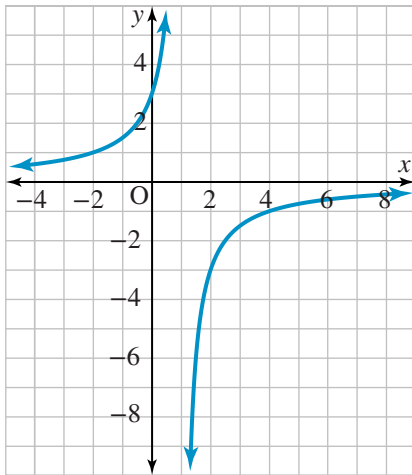
تناسب عكسي لأن ضرب x و y يساوي 1

15.

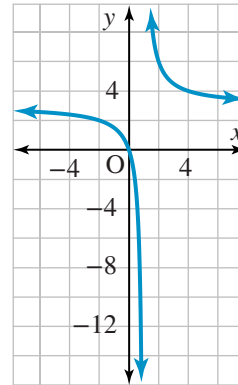


21. المجال: $\{x: x \in \mathbb{R}, x \neq 1\}$ ، $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

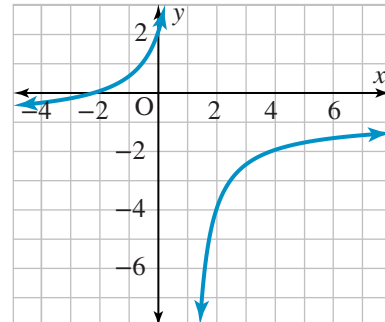
و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$



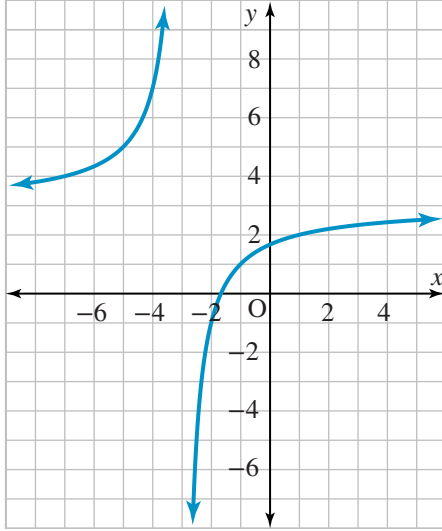
16.



17.



25. المجال: $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq -3\}$ ، $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ و $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \infty$

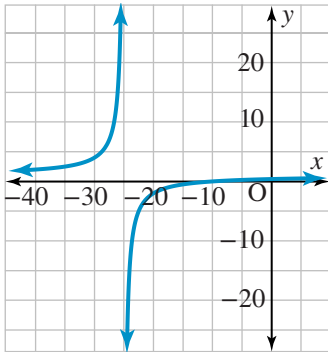


28. a. $n = \frac{320}{s}$

b.

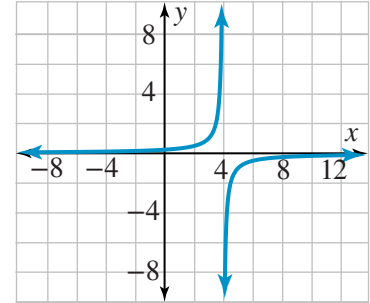
معدل حجم الالعاب بالجيجابايت (s)	1.0	2.5	3.0	4.0
عدد الألعاب (n)	320	128	106.7	80

31. a. تقارب رأسي: $x = -25$ و خط تقارب أفقي: $y = 1$

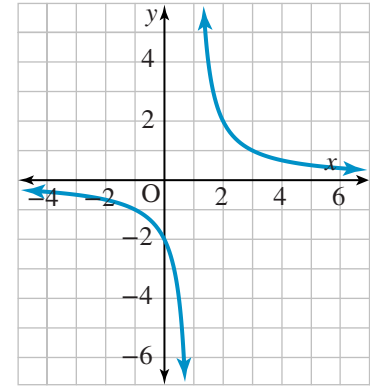


b.

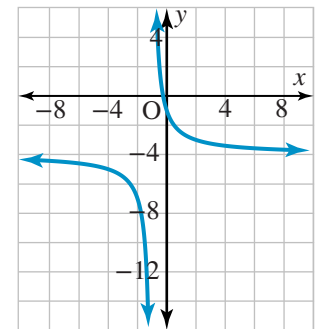
22. المجال: $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 4\}$ ، $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \infty$



23. المجال: $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 1\}$ ، $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$

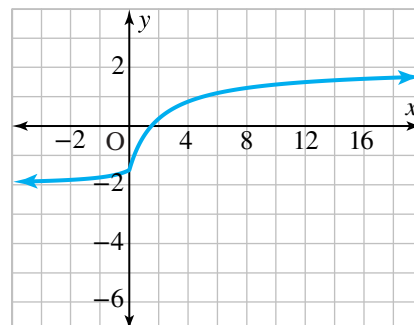


24. المجال: $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq -1\}$ ، $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -4$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -4$ و $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$



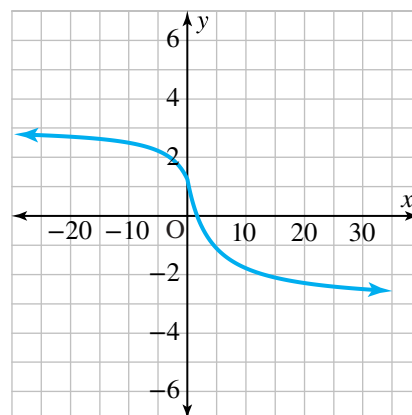
$$38. h(x) = \begin{cases} \frac{2x-3}{x+2} & , x \geq 0 \\ \frac{2x-3}{-x+2} & , x < 0 \end{cases}$$

خطاً التقارب الأفقيان: $y = 2$ و $y = -2$ ، المقطع $x: \frac{3}{2}$ ، المقطع $y: -\frac{3}{2}$



$$39. h(x) = \begin{cases} \frac{5-3x}{x+4} & , x \geq 0 \\ \frac{5-3x}{-x+4} & , x < 0 \end{cases}$$

خطاً التقارب الأفقيان: $y = 3$ و $y = -3$ ، المقطع $x: \frac{5}{3}$ ، المقطع $y: 1.25$



40. نعم،

المجال: $]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, 1[\cup]1, \infty[$

المدى: $]-\infty, 1[\cup]1, \infty[$

متصلة ومتناقصة في فترة من المجال المشترك.

المقطع مع المحور $x: \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

لا يوجد مقطع y .

نقطة فارغة في $(0, 1)$

خط تقارب أفقي: $y = 1$

خط تقارب رأسي: $x = \pm 1$

لا فردية ولا زوجية.

ليس لها نقاط قصوى محلية.

السلوك الطرفي: $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} g(x) = 1$

الوحدة 4 مراجعة الوحدة

17. تعطي الصيغة $d = \frac{\sqrt{15w}}{1.23}$ القطر اللازم d ، بالسنتيمتر، لحبل لرفع الوزن w ، بالطن، أوجد الوزن الذي نستطيع حمله بحبل قطره 4 سنتيمتر.

في التمارين 18-20، حدّد ما إذا كانت النقطة تقع على التمثيل البياني للدالة $f(x) = |x|$. إذا كانت كذلك، اذكر إحداثيي النقطة الأخرى التي لها قيمة y نفسها.

18. (8, 8)

19. (-5, 5)

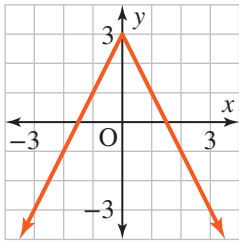
20. (-3.5, 3.5)

21. ممثّل الدالة $f(x) = -2.5|x|$ بيانيًا. أوجد مجال ومدى الدالة.

في التمارين 22 و 23، أوجد نقطة الرأس وحدّد ما إذا كانت قيمة عظمى أو صغرى للدالة.

22. $g(x) = -6.3|x|$

23. $g(x) = 7|x|$



24. أوجد المجال، والمدى، ونقطة الرأس للدالة الممثلة في الشكل المجاور.

في التمارين 25-27، أوجد نقطة الرأس ومثّل الدالة بيانيًا.

25. $g(x) = |x| + 4$

26. $g(x) = |x + 1| - 2$

27. $g(x) = |x - 3| + 1$

في التمارين 28-30، قارن الدالة $g(x)$ بالدالة الرئيسية $f(x) = |x|$. صف التمثيل البياني للدالة g كتحويلات للتمثيل البياني للدالة f .

28. $g(x) = 2|x + 6| - 1$

في التمارين 1 و 2، ممثّل الدالة بيانيًا. أوجد المجال والمدى وحدّد ما إذا كانت الدالة متزايدة أم متناقصة.

1. $f(x) = \sqrt{x} - 1$

2. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+1}$

في التمارين 3-5، قارن بين التمثيل البياني للدالة والتمثيل البياني للدالة الرئيسية $f(x) = \sqrt{x}$ ، ثم حدّد المجال والمدى لكل منها.

3. $g(x) = \sqrt{x} + 4$

4. $g(x) = \sqrt{x-8}$

5. $g(x) = \sqrt{x-1} - 5$

6. اكتب المقدار الذي يمثّل الدالة $g(x)$ التي هي إزاحة بمقدار 5 وحدات إلى الأسفل للدالة الرئيسية $f(x) = \sqrt{x}$

7. استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل $f(x) = -\sqrt{x-3}$ صف مجال ومدى الدالة.

8. تُقاس السرعة القصوى لمركب شراعي بالغُدّة، وتُقدّر باستعمال الصيغة $s(l) = 1.34\sqrt{l}$ ، حيث l هو طول المركب بالأقدام. أوجد، بشكل تقريبي، سرعة مركب شراعي طوله 45 قدمًا.

في التمارين 9 و 10، حدّد ما إذا كان التمثيل البياني للدالة g هو تضيق أو تمدد وحدد نوعه (أفقي أم رأسي) للتمثيل البياني للدالة f .

9. $f(x) = \sqrt{x-16}$

10. $f(x) = \sqrt{2x-9}$

$g(x) = \sqrt{4x-16}$

$g(x) = \sqrt{6x-27}$

في التمارين 11-15، أوجد حل المعادلة الجذرية، وحدّد ما إذا كان الحل مقبولا أم مرفوضًا.

11. $\sqrt{2x} = 12$

12. $\sqrt{25+x} + 5 = 9$

13. $\sqrt{6x-20} - x = -6$

14. $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 1$

15. $\sqrt{x} + \sqrt{x+11} = 11$

16. أعط مثالًا عن دالة جذرية ليس لها أصفار. بَرّر إجابتك.

في التمرينين 43 و 44، عبّر عن الدالة في صورة دالة متعددة التعريف.

43. $f(x) = 4|x|$

44. $f(x) = -2|x|$

45. مثلّ الدالة $f(x) = \begin{cases} x+1 & x < -1 \\ \frac{1}{2}x-2 & x \geq -1 \end{cases}$ بيانيًا.

حدّد الفترات حيث تكون الدالة متزايدة، متناقصة، أو ثابتة.

46. بيّن وصّح خطأ جاسم عند تعبيره عن الدالة $f(x) = -5|x|$ على شكل دالة متعددة التعريف كما يلي:

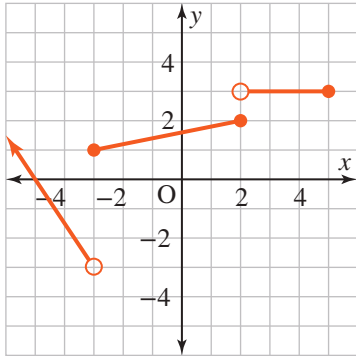
$$f(x) = \begin{cases} -5x, & x < 0 \\ 5x, & x > 0 \end{cases}$$

في التمرينين 47 و 48، مثلّ الدالة بيانيًا.

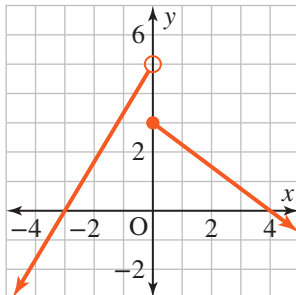
47. $f(x) = \begin{cases} -3 & -4 \leq x < -2 \\ -1 & -2 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 2 \\ 3 & 2 \leq x < 4 \end{cases}$

48. $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & x < -3 \\ -x-2 & -3 \leq x < 1 \\ x-3 & x \geq 1 \end{cases}$

49. اكتب الدالة المتعددة التعريف التي تمثّل التمثيل البياني أدناه.



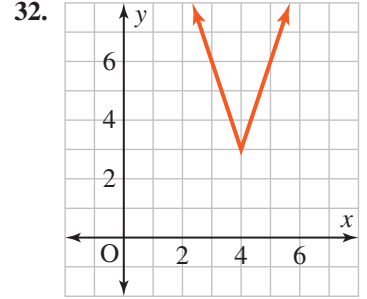
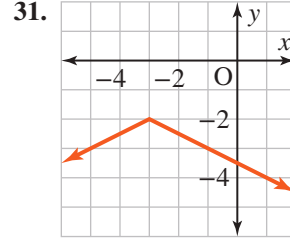
50. اكتب الدالة المتعددة التعريف التي تمثّل التمثيل البياني.



29. $g(x) = -|x-2| - 1$

30. $g(x) = -0.5|x| + 4$

في التمرينين 31 و 32، اكتب صيغة الدالة التي تتضمن مقدار قيمة مطلقة للتمثيل البياني.



33. اكتب دالتي قيمة مطلقة لهما نقطة الرأس $(-1, 2)$.

34. يبيع بائع المجوهرات الخاتم بسعر مقداره QR 140 للخاتم

الواحد بالإضافة إلى QR 20 ثمن الشحن لطلبية من واحد إلى

عشر خواتم. إذا كانت الطلبية أكثر من عشر خواتم، يكون ثمن

الخاتم QR 120، ويكون الشحن مجانيًا. اكتب دالة متعددة

التعريف تمثّل الحالة.

في التمرينين 35 و 36، اكتب الدالة g التي تصف التمثيل البياني

للدالة f بعد التحويلات المعطاة.

35. إزاحة الدالة $f(x) = |x| + 3$ وحدة واحدة إلى الأعلى و 5 وحدات إلى اليمين.

36. إزاحة الدالة $f(x) = |x-1| + 5$ وحدتين إلى الأسفل و 4 وحدات إلى اليسار.

37. يحل ناصر معادلة القيمة المطلقة $|3x| - 5 = 13$ ، ما هي الخطوة الأولى التي يجب أن يتخذها؟

38. أوجد حل المعادلة $3 = |x| + 1$

في التمارين 39-42، أوجد حل متباينة القيمة المطلقة ثم مثلّ الحل بيانيًا.

39. $|2x-5| \geq 3$

40. $|x| + 3.2 < 5.8$

41. $-3|x-5| \leq -9$

42. $-6 > |7x-24|$

60. يعتمد مركز اتصالات التكلفة C (QR) لاتصال دولي مدته x دقيقة. توضح الدالة أدناه تكلفة الاتصال حتى 100 دقيقة، أوجد مجال الدالة ومداه.

$$C(x) = \begin{cases} 15 & 0 < x \leq 10 \\ 25 & 10 < x \leq 30 \\ 34 & 30 < x \leq 50 \\ 42 & 50 < x \leq 70 \\ 48 & 70 < x \leq 100 \end{cases}$$

61. في مزرعة أسماك، تنمذج الدالة $f(x) = \frac{4500x}{x+500}$ عدد أسماك السلمون التي تعيش حتى البلوغ حيث x عدد بيوض السمك.

a. حدّد خط التقارب الرأسي وخط التقارب الأفقي لهذه الدالة.

b. ممثّل الدالة بيانيًا.

c. ما هو المجال المناسب لهذه الدالة؟ وضح إجابتك.

51. في علاقة تناسب عكسي بين x و y ، عندما $x = 2$ ، $y = -4$. أوجد قيمة y إذا كان $x = 16$.

في التمرينين 52-53، ممثّل الدالة بيانيًا وحدّد خطّي التقارب الأفقي والرأسي.

52. $f(x) = \frac{x}{x-1}$

53. $f(x) = \frac{3}{x-2}$

في التمارين 54-56، ممثّل الدالة بيانيًا ثم أوجد مجالها ومداها ومعادلات خطوط تقاربها.

54. $f(x) = \frac{1}{x+4}$

55. $g(x) = \frac{1}{x-3}$

56. $q(x) = \frac{1}{x-4} + 2$

في التمارين 57-59، أوجد مجال الدالة. صف سلوك الدالة عند قيمة (قيم) x التي هي خارج المجال، ثم ممثّل الدالة بيانيًا.

57. $f(x) = \frac{1}{x+4}$

58. $g(x) = \frac{1}{x-3}$

59. $q(x) = \frac{1}{x-4} + 2$

الوحدة 4 الإجابات

16. نموذج إجابة : $y = \sqrt{x+1} + 3$ ، عوض $y = 0$ للحصول على المعادلة:

$$-3 = \sqrt{x+1} + 3, 0 = \sqrt{x+1} + 3$$

قم بتربيع طرفي المعادلة: $9 = x + 1$ ، اطرح 1 من طرفي المعادلة:

$$8 = x, 8 = \sqrt{8+1} + 3$$

بسط: $0 \neq 6$

إذن، ليس للمعادلة حل حقيقي وبالتالي ليس للدالة أصفار.

$$17. 4 = \frac{\sqrt{15w}}{1.23}$$

$$\sqrt{15w} = 4 \times 1.23$$

$$\sqrt{15w} = 4.92$$

$$15w = 24.2064$$

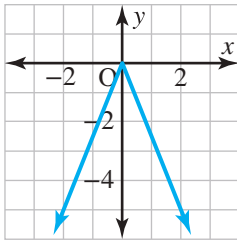
$$w = \frac{24.2064}{15} \approx 1.61$$

إذن، الوزن الذي نستطيع حمله بحبل قطره 4 سنتيمتر هو 1.61 طن تقريباً.

18. نعم، $(-8, 8)$.

19. نعم، $(5, 5)$.

20. نعم، $(3.5, 3.5)$.



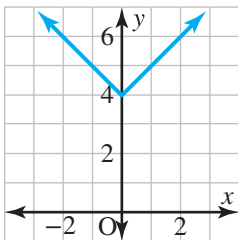
21. المجال: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$
المدى: $\{y : y \in \mathbb{R}, y \leq 0\}$

22. $(0, 0)$ ، قيمة عظمى.

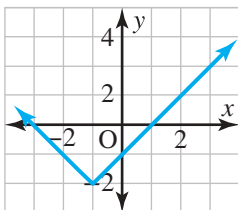
23. $(0, 0)$ ، قيمة صغرى.

24. المجال: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$ ، المدى: $\{y : y \in \mathbb{R}, y \leq 3\}$

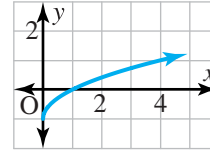
نقطة الرأس: $(0, 3)$.



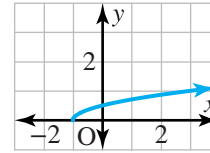
25. نقطة الرأس: $(0, 4)$.



26. نقطة الرأس: $(-1, -2)$.



1. المجال: $\{x : x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$
المدى: $\{y : y \in \mathbb{R}, y \geq -1\}$
متزايدة لجميع قيم x في مجال الدالة.



2. المجال: $\{x : x \in \mathbb{R}, x \geq -1\}$
المدى: $\{y : y \in \mathbb{R}, y \geq 0\}$
متزايدة لجميع قيم x في مجال الدالة.

3. إزاحة رأسية بمقدار 4 وحدات إلى الأعلى. للدالتين نفس المجال: $x \geq 0$.

مدى الدالة f هو $y \geq 0$ ومدى الدالة g هو $y \geq 4$.

4. إزاحة أفقية بمقدار 8 وحدات إلى اليمين.

مجال الدالة f هو $x \geq 0$ بينما مجال الدالة g هو $x \geq 8$.

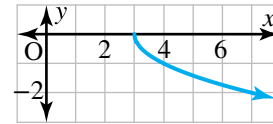
للدالتين نفس المدى: $y \geq 0$.

5. إزاحة أفقية بمقدار وحدة واحدة إلى اليمين ثم إزاحة رأسية بمقدار 5 وحدات إلى الأسفل.

مجال الدالة f هو $x \geq 0$ ومجال الدالة g هو $x \geq 1$.

مدى الدالة f هو $y \geq 0$ ومدى الدالة g هو $y \geq -5$.

$$6. g(x) = \sqrt{x} - 5$$



7. المجال: $x \geq 3$

المدى: $y \leq 0$

8. 9 عقد تقريباً.

9. تضيق أفقي بمعامل قياسه $\frac{1}{4}$

10. تمدد رأسي بمعامل قياسه $\sqrt{3}$

$$11. \sqrt{2x} = 12$$

$$2x = 144$$

$$x = \frac{144}{2} = 72 \text{ حل مقبول}$$

$$12. \sqrt{25+x} = 4, 25+x = 16, x = -9 \text{ حل مقبول}$$

$$13. 6x - 20 = x^2 - 12x + 36, x^2 - 18x + 56 = 0, x = 14 \text{ حل مقبول, (حل غير مقبول } x = 4)$$

$$14. 2x + 3 = 1 + 2\sqrt{x+1} + x + 1, x + 1 = 2\sqrt{x+1}, x^2 + 2x + 1 = 4x + 4, x = -1 \text{ أو } x = 3 \text{ الحلان مقبولان}$$

$$15. \sqrt{x+11} = 11 - \sqrt{x}$$

$$x + 11 = 121 - 22\sqrt{x} + x$$

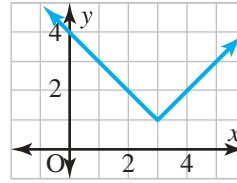
$$-110 = -22\sqrt{x}$$

$$5 = \sqrt{x}$$

$$x = 25 \text{ حل مقبول}$$

الوحدة 4 الإجابات

27. نقطة الرأس: (3, 1).



28. إزاحة أفقية بمقدار 6 وحدات إلى اليسار وتضييق أفقي بمعامل $\frac{1}{2}$ ،
ثم إزاحة رأسية بمقدار وحدة واحدة إلى الأسفل.

29. إزاحة أفقية بمقدار وحدتين إلى اليمين وانعكاس حول المحور x
ثم إزاحة رأسية بمقدار وحدة واحدة إلى الأسفل.

30. تمديد أفقي بمعامل 2، وانعكاس حول المحور x ثم إزاحة رأسية
4 وحدات إلى الأعلى.

31. قاعدة الدالة في الصورة $f(x) = a|x - h| + k$ حيث رأس التمثيل
البياني. بتعويض $h = -3$ و $k = -2$ نحصل على $f(x) = a|x + 3| - 2$.
نعوض إحداثتي النقطة $(-5, -3)$ فنحصل على $a = -\frac{1}{2}$.
إذن، صيغة الدالة هي: $f(x) = -\frac{1}{2}|x + 3| - 2$.

32. قاعدة الدالة في الصورة $f(x) = a|x - h| + k$ حيث رأس التمثيل
البياني. بتعويض $h = 4$ و $k = 3$ نحصل على $f(x) = a|x - 4| + 3$.
نعوض إحداثتي النقطة $(4, 3)$ فنحصل على $a = 3$.
إذن، صيغة الدالة هي: $f(x) = 3|x - 4| + 3$.

33. نموذج إجابة: $f(x) = |x - 2| - 1$ و $g(x) = -|x - 2| - 1$.

$$34. f(x) = \begin{cases} 140x + 20 & 1 \leq x \leq 10 \\ 120x & x > 10 \end{cases}$$

$$35. g(x) = |x - 5| + 4$$

$$36. g(x) = |x + 3| + 3$$

37. عزل القيمة المطلقة في أحد طرفي المعادلة لتصبح $|3x| = 18$.

$$38. |x| = 2، إذن $x = 2$ أو $x = -2$.$$

$$39. 2x - 5 \geq -3 \text{ أو } 2x - 5 \leq 3$$

$$\text{إذن، } x \geq 4 \text{ أو } x \leq 1$$



$$40. |x| < 2.6، إذن، -2.6 < x < 2.6$$



$$41. |x - 5| \geq 3، إذن، x \leq 2 \text{ أو } x \geq 8$$



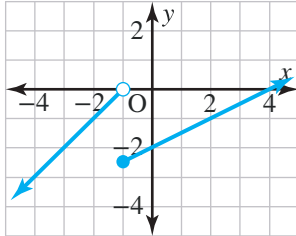
42. لا حلول للمتباعدة.

$$43. f(x) = \begin{cases} 4x & x \geq 0 \\ -4x & x < 0 \end{cases}$$

$$44. f(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ -2x & x \geq 0 \end{cases}$$

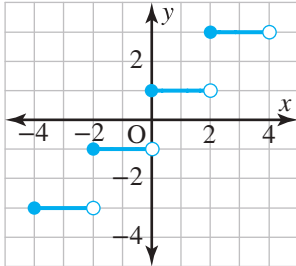
45. متزايدة في الفترة $[-\infty, -1]$

وفي الفترة $[-1, \infty]$

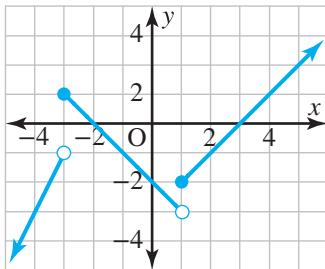


$$46. f(x) = \begin{cases} 5x & x < 0 \\ -5x & x \geq 0 \end{cases}$$

47.



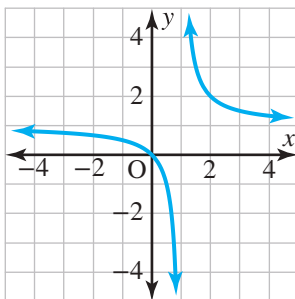
48.



$$49. f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x - \frac{15}{2} & x < -3 \\ \frac{1}{2}x + \frac{8}{5} & -3 \leq x \leq 2 \\ 3 & 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

$$50. f(x) = \begin{cases} \frac{5}{3}x + 5 & x < 0 \\ -\frac{3}{4}x + 3 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$51. y = -\frac{1}{2}، إذن $-4 \times 2 = y \times 16$$$



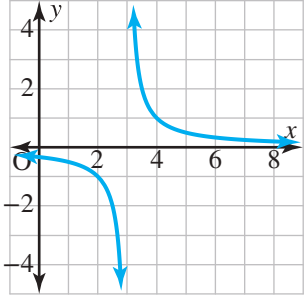
52. خط التقارب الراسي: $x = 1$

خط التقارب الأفقي: $y = 1$

الوحدة 4 الإجابات

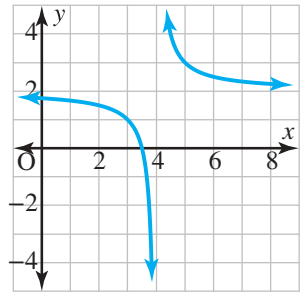
58. المجال: $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 3\}$

النهايات: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$



59. المجال: $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 4\}$

النهايات: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$
 $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = -\infty$

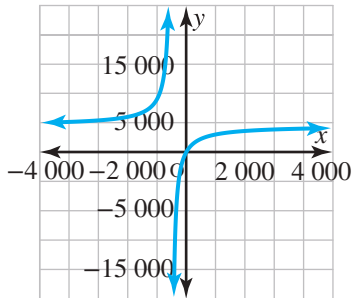


60. المجال: $\{x : x \in \mathbb{R}, 0 < x \leq 100\}$

المدى: $\{15, 25, 34, 42, 48\}$

61. a. خط التقارب الرأسي: $x = -500$
 خط التقارب الأفقي: $y = 4500$

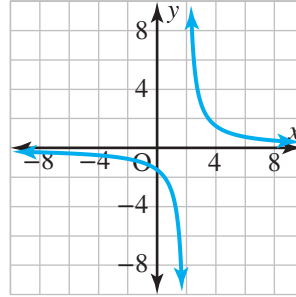
b.



c. $x \geq 0$, لأن عدد الأسماك لا يكون سالبًا.

53. خط التقارب الرأسي: $x = 2$

خط التقارب الأفقي: $y = 0$

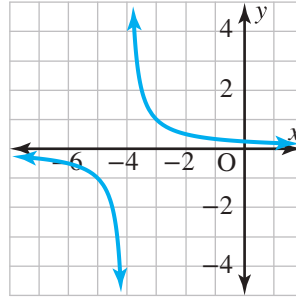


54. المجال: $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq -4\}$

المدى: $\{y : y \in \mathbb{R}, y \neq 0\}$

خط التقارب الرأسي: $x = -4$

خط التقارب الأفقي: $y = 0$

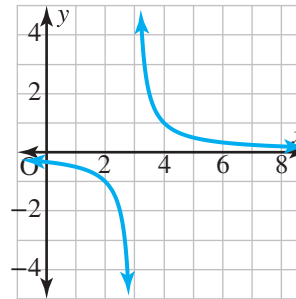


55. المجال: $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 3\}$

المدى: $\{y : y \in \mathbb{R}, y \neq 0\}$

خط التقارب الرأسي: $x = 3$

خط التقارب الأفقي: $y = 0$

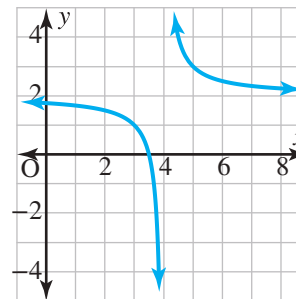


56. المجال: $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 4\}$

المدى: $\{y : y \in \mathbb{R}, y \neq 2\}$

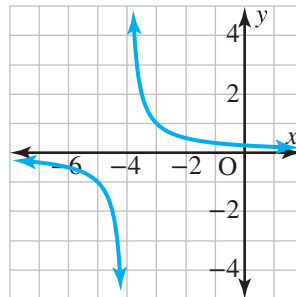
خط التقارب الرأسي: $x = 4$

خط التقارب الأفقي: $y = 2$



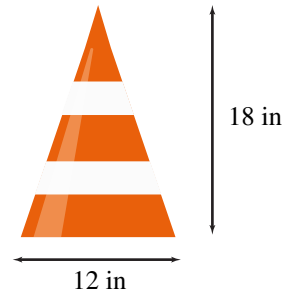
57. المجال: $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq -4\}$

النهايات: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = -\infty$



الوحدة 4 تقويم

1. مثل الدالة $f(x) = \sqrt{x+4} - 2$ بيانيًا. أوجد المجال والمدى وحدد ما إذا كانت الدالة متزايدة أم متناقصة.
2. قارن بين التمثيل البياني للدالة $g(x) = \sqrt{x+2} - 8$ والتمثيل البياني للدالة الرئيسة $f(x) = \sqrt{x}$.
3. اكتب المقدار الذي يمثل الدالة $h(x)$ التي هي إزاحة بمقدار وحدتين إلى اليسار من الدالة الرئيسة $f(x) = \sqrt{x}$.
4. أوجد حل المعادلة $\sqrt{5x+1} + 1 = x$. وحدد ما إذا كان الحل مقبولاً أم مرفوضاً.
5. تُقَدَّر سرعة السيارة عند بدء الانزلاق قبل التوقف بالصيغة $s = \sqrt{30 \times 0.5d}$ ، حيث s هي السرعة، بالميل في الساعة، و d هي الطول، بالقدم، لأثر الانزلاق على الطريق. مثل الدالة بيانيًا. إذا كان طول أثر الانزلاق لسيارة 40 ft، حيث حدود السرعة 25 mph، كم كانت سرعة السيارة؟ وضح إجابتك.
6. أوجد نقطة الرأس للدالة $g(x) = |x-2|$ ومثلها بيانيًا.
7. أوجد حل المتباينة $2 + |x-3| \leq 4$ ثم مثل الحل بيانيًا.
8. ارتفاع مخروط مرور 18 in وعرضه 12 in، ارسم مخروط المرور على المستوى الإحداثي بحيث يكون أحد أطرافه عند $(0, 0)$. ما الدالة التي تتضمن قيمة مطلقة وتمثل مخروط المرور؟ ما مجال الدالة؟ وضح إجابتك.



9. أوجد حل المعادلة $4|x-5| = 24$

10. مثل الدالة $f(x) = \begin{cases} -x+4 & -2 < x \leq 3 \\ x-5 & x > 3 \end{cases}$ بيانيًا.

حدد الفترات حيث تكون الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة.

11. يريد أحد المدربين تقرير عدد البدلات التي عليه شراؤها لفريق كرة القدم. إذا طلب المدرب أكثر من 10 بدلات، تكون كلفة البدلات

الإضافية 0.75 أمثال القيمة الاعتيادية للبدلة والتي هي QR 480.

اكتب دالة متعددة التعريف تعطي التكلفة C ، بالريال، بدلالة عدد

البدلات n التي سيشتريها المدرب. أوجد تكلفة 18 بدلة قد يشتريها

المدرب.

12. في علاقة تناسب عكسي، بين المتغيرين x و y

عندما $x = 6$ $y = \frac{1}{12}$. أوجد قيمة x إذا كان $y = 2$.

13. مثل الدالة $y = \frac{5}{x}$ بيانيًا. أوجد مجال الدالة، ومداه، ومعادلات

خطوط تقاربها.

14. يتناسب الحجم، V ، للغاز عكسيًا مع الضغط P . إذا كان حجم

غاز 6 cm^3 ، بضغط يساوي 25 kg/cm^2 ، أوجد حجم غاز بضغط

يساوي 15 kg/cm^2

15. مثل الدالة $f(x) = \frac{-x+7}{x-5}$ بيانيًا وحدد خطي التقارب الأفقي

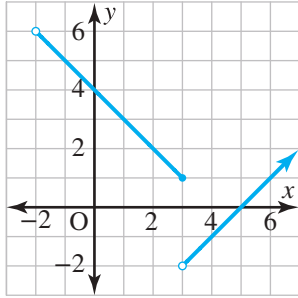
والرأسي.

الوحدة 4 الإجابات

الدالة: $f(x) = -3|x - 6| + 18$ ، مجال الدالة: $0 \leq x \leq 12$

9. $x = 11$ أو $x = -1$ الحلان مقبولان.

10. متناقصة في الفترة $[-2, 3]$ ومتزايدة في الفترة $[3, \infty]$.

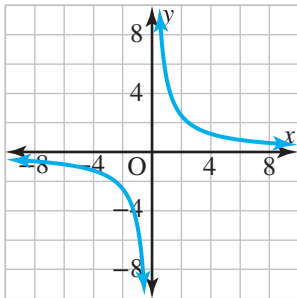


$$11. C(n) = \begin{cases} 480n & 0 < n \leq 10 \\ 4800 + 360(n - 10) & n > 10 \end{cases}$$

$$C(n) = \begin{cases} 480n & 0 < n \leq 10 \\ 360n + 1200 & n > 10 \end{cases}$$

تكلفة 18 بدلة هي 7 680 QR.

12. $x = \frac{1}{4}$



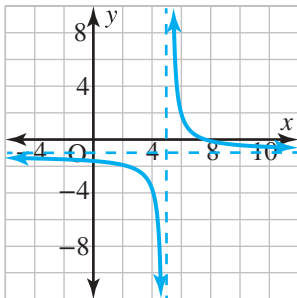
13. المجال: $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$

المدى: $\{y : y \in \mathbb{R}, y \neq 0\}$

خط التقارب الرأسي: $x = 0$

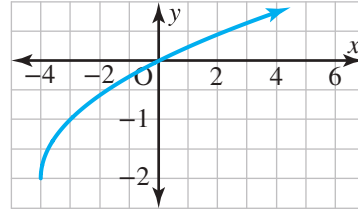
خط التقارب الأفقي: $y = 0$

14. $6 \times 25 = V \times 15$ ، إذن $V = 10 \text{ cm}^3$.



15. خط التقارب الرأسي: $x = 5$

خط التقارب الأفقي: $y = -1$



1. المجال:

$$\{x : x \in \mathbb{R}, x \geq -4\}$$

المدى:

$$\{y : y \in \mathbb{R}, y \geq -2\}$$

متزايدة لجميع قيم x في

مجال الدالة.

2. التمثيل البياني للدالة g هو إزاحة للتمثيل البياني للدالة f بمقدار وحدتين إلى اليسار و 8 وحدات إلى الأسفل.

3. $h(x) = \sqrt{x+2}$

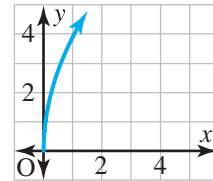
4. $\sqrt{5x+1} = x-1$

$$5x+1 = x^2 - 2x + 1$$

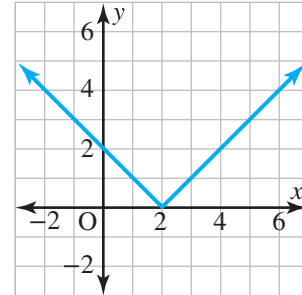
إذن $x = 7$

أو $x = 0$ ($x = 0$ حل غير مقبول).

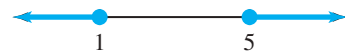
5. $s = \sqrt{30 \times 0.5(40)} = 24.49 \text{ mph}$.



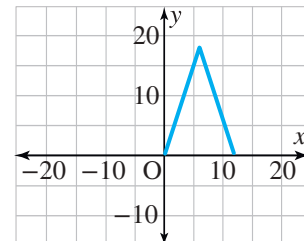
6. نقطة الرأس: (2, 0).



7. $x \leq 1$ أو $x \geq 5$



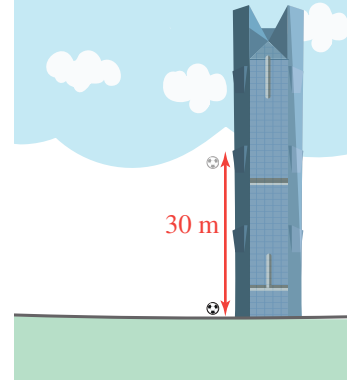
8. نموذج إجابة: باعتبار أن رأس المخروط هو النقطة (6, 18)



الوحدة 4 المشروع

السقوط الحر

سقطت كرة من سطح الطابق العاشر في أحد المباني، وهو على ارتفاع 30 متراً.



1. نمذج الدالة $V(x) = \sqrt{2g(30-x)}$ قيمة سرعة الكرة (m/s) عند كل ارتفاع x (m)، حيث g هي تسارع الجاذبية $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

a. هل الدالة $V(x)$ متزايدة أم متناقصة؟

b. اكتب الدالة $V(x)$ على الشكل

$$V(x) = a\sqrt{x-h} + k$$

c. ماذا تعني نقطة التقاطع مع المحور y ؟

d. ماذا تعني نقطة التقاطع مع المحور x ؟

e. أوجد سرعة الكرة عندما تصل إلى الطابق الثالث.

2. السرعة بدلالة الزمن هي $V(t) = gt$. سوف نفترض أن الكرة ارتدت عندما وصلت إلى الأرض بنفس السرعة التي وصلت فيها. ثم أخذت سرعتها تتناقص وهي ترتفع حتى نقطة A حيث عاودت السقوط من جديد. الدالة التي تعبر عن هذه السرعة المتناقصة هي $V(t) = -gt + b$.

a. أوجد الزمن اللازم لوصول الكرة إلى الأرض.

b. أوجد قيمة الثابت b ، إذا كانت الكرة قد احتاجت نفس

زمن السقوط إلى الأرض لتصل إلى أعلى نقطة لها. (A)

c. اكتب صيغة للسرعة بدلالة الزمن باستعمال دالة القيمة المطلقة.

d. اكتب صيغة للسرعة بدلالة الزمن باستعمال دالة متعددة التعريف.

e. أوجد سرعة الكرة عندما تصل إلى الطابق الرابع.

ماذا تلاحظ؟

f. هل يمكن أن تستنتج ملاحظة عامة؟

g. أوجد الارتفاع الذي ستصل إليه الكرة قبل أن تسقط من جديد مرة ثانية.

h. هل الإجابة التي حصلت عليها منطقية؟ وضح إجابتك.

i. ما يمكن أن يكون الخطأ؟

3. لنفترض أن الكرة عندما وصلت إلى الأرض ارتدت بسرعة تساوي $\frac{1}{5}$ من السرعة التي وصلت بها. ثم تناقصت سرعتها صعوداً بموجب الدالة $V(t) = -gt + b$.

a. أوجد قيمة b إذا كانت الكرة تحتاج إلى ربع زمن السقوط لتصل إلى نقطة الوقوع من جديد.

b. هل نستطيع أن نعتبر عن السرعة من خلال دالة متعددة التعريف؟ وضح إجابتك.

c. وصلت الكرة في هذه الحالة إلى ارتفاع h قبل أن تبدأ

بالسقوط من جديد وفق الدالة $V(x) = \sqrt{2g(h-x)}$

للسرعة. هل نستطيع أن نجد قيم h ؟

d. استنتج قاعدة عامة لمقارنة حركتي الصعود والهبوط لجسم ساقط.

4. في قانون "نيوتن" يتناسب تسارع أي جسم في سقوط حر عكسياً مع مربع المسافة التي تفصله عن مركز الأرض.

a. فسر لماذا تصل كرتان من الحديد، بكتلتين مختلفتين،

سقطتا من ارتفاع معين إلى الأرض في وقت واحد.

b. هل يصح هذا على جميع الأجسام؟ وضح إجابتك.

الوحدة 4 الإجابات

1. a. متناقصة.

b. $V(x) = \sqrt{2g} \sqrt{(30-x)} + 0$

c. $x = 0$ ، عند وصول الكرة إلى الأرض:

وتكون السرعة عندها $V(0) = \sqrt{60g} = \sqrt{60 \times 9.8} = 24.2 \text{ m/s}$

d. $y = 0$ ، إذن $V(x) = 0$ ويمثل x الارتفاع عند بدء سقوط الكرة:
 $x = 30$

e. $x = 9, V(9) = \sqrt{2 \times 21 \times g} = \sqrt{42 \times 9.8} = 20.29 \text{ m/s}$

2. a. الزمن اللازم لوصول الكرة إلى الأرض هو:

(لأقرب جزء من 100) $t_0 = \frac{V(0)}{g} = \frac{1}{g} \sqrt{60g} = \frac{1}{9.8} \times 24.2 = 2.47 \text{ s}$

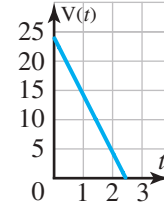
b. الصيغة العامة:

$V(t) = -gt + b$

عند النقطة A: $t = t_0 = 2.47 \text{ s}$ ، $V(t) = 0$ ، عوض:

$0 = -9.8 \times 2.47 + b$

إذن، $b = 24.2$



c. تتغير السرعة بدلالة الزمن وفق دالة قيمة مطلقة إحداثيًا رأسها هما

$V(t) = -g|t - t_0| + b$ (إذن: (t_0, b))

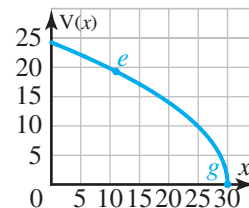
بالتعويض نحصل على: $V(t) = -9.8|t - 2.47| + 24.2$

d. بتقريب g إلى 9.8 نحصل على:

$$V(t) = \begin{cases} 9.8t & 0 \leq t \leq 2.47 \\ -9.8t + 48.4 & 2.47 \leq t \leq 4.94 \end{cases}$$

e. بما أن الكرة ارتدت عن الأرض بنفس السرعة التي وصلت فيها، إذن تكون سرعة الكرة عند بلوغها الطابق الرابع صعودًا تساوي سرعتها عند بلوغها الطابق الرابع نزولًا أثناء سقوطها.

$x = 12, V(12) = \sqrt{2 \times 18 \times g} = \sqrt{36 \times 9.8} = 18.8 \text{ m/s}$



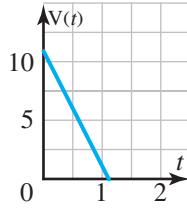
f. سرعة الكرة بعد مرور الزمن t على سقوطها تساوي سرعتها بعد مرور الزمن $t - t_0$ على ارتدادها.

g. حل المعادلة $V(x) = 0$ نحصل على $x = 30$. إذن، الارتفاع الذي تصل إليه الكرة قبل أن تسقط من جديد هو 30 m

h. كلا، لأن الكرة لا ترتد إلى نفس الارتفاع الأول.

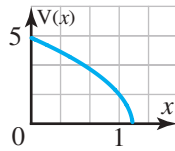
i. لا ترتد الكرة بنفس سرعتها عند وصولها إلى الأرض.

3. a. تقريبًا $b = g \frac{t_0}{2} = 9.8 \times \frac{2.47}{2} \approx 12$ ، لأن حركتي الارتداد والسقوط متقابلان. إذا احتاجت الكرة إلى قطع ربع المسافة صعودًا قبل أن تتوقف وتسقط، هذا يعني أن سرعة الارتداد تساوي السرعة التي بلغت الكرة بعد سقوطها عند قطعها ربع المسافة، أي $\frac{30}{4}$ ، إذن $V = \sqrt{2g \frac{30}{4}} = \sqrt{15g}$



b. كلا، لأن سرعة الكرة عند وصولها إلى الأرض لا تساوي سرعة ارتدادها عن الأرض.

c. $h = \frac{1}{25} (30) = 1.2 \text{ m}$ ، لأن الارتداد بسرعة $V = \frac{1}{5} V_0$ يجعل المسافة التي تقطعها الكرة هي $\frac{1}{25} (30) = 1.2$



d. قيمة الارتفاع الأول h هي 30 m، بينما قيمة الارتفاع الثاني هي أعلى نقطة تصل إليها الكرة وتساوي $\frac{1}{25} (30) = 1.2 \text{ m}$ ، وهكذا.

$$h_0 = 30 \\ h_n = \frac{1}{25} h_{n-1}$$

4. a. عندما يرتبط التسارع (معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن) بالمسافة من مركز الأرض بغض النظر عن الكتلة، فإن سرعة كلتا الكرتين ستكون هي نفسها في كل لحظة ولذلك تصلان معًا إلى الأرض في نفس الوقت.

b. الكرات لا تتأثر تقريبًا بمقاومة الهواء. أما الأجسام غير المنتظمة فتتأثر بمقاومة الهواء. لذا قد لا يصل جسمان مختلفان إلى الأرض في وقت واحد.