Grade12files

مذكرة

100 من 100

في

الرياضيات

الفصل الدراسي الثاني(الجزء الأول)

للصف الثاني عشر المتقدم

اعداد ا: صابر الموافي

الإجابات النموذجية

الوحدة الرابعة (تطبيقات الأشتقاق)

الدرس الأول (4-1) : التقريبات الخطية وطريقة نيوتن

الدرس الثاني(4-2) :الصيغة غير المعرفة وقاعدة لوبيتال

الدرس الثالث (4-3) : القيم العظمى والصغرى

الدرس الرابع (4-4): الدوال المتزايدة والمتناقصة

الدرس الخامس (4-5): التقعر واختبار المشتقة الثانية

الفصل الدراسي الثاني (الجزء الأول)

للصف الثاني عشر المتقدم

اعداد ا: صابر الموافي

الدرس الأول(1-4) التقريبات الخطية وطريقة نيوتن

مثال(1) أوجد التقريب الخطي للدالة f(x) عند $x=x_0$ استخدم التقريب الخطي لتقدير العدد المعطى حيث $x_0=\pi$ f(x)=sin(3x) ثم أوجد sin(3.0)

$$P_F(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x-x_0)$$
$$= 0 + -3(x-\pi)$$
$$\sin 3x = P_F(x) = -3x + 3\pi$$
$$\sin(3x) \cong \sin(3) = -3(3) + 3\pi$$
$$= 0.42477$$

$x_0 = \pi$
$F(x_0) = F(\pi) = \sin 3\pi = 0$
$F'(x_0) = 3\cos(3x)$
$F'(\pi) = 3\cos(3\pi)$
$= -3$
$\sin(3) \cong \sin(3x)$
$\Rightarrow \boxed{x=1}$

نشاط كتابي(1) تمرين رقم (3) الكتاب المدرسي صفحة(236)

$$\Rightarrow P_F(x) = \sqrt{2x+9} = F(x_0) + F'(x_0)(x-x_0)$$
$$= 3 + \frac{1}{3}(x-0)$$
$$\cong \frac{1}{3}x + 3$$
$2x+9 = 8.8 \Rightarrow \boxed{x=-0.1}$ ← وحساب $\sqrt{8.8}$
$\Rightarrow \sqrt{8.8} = \frac{1}{3}(-0.1) + 3 = 2.966$ #

$x_0 = 0$
$F(x) = \sqrt{2x+9}$
$F(x_0) = F(0) = \sqrt{2(0)+9} = \boxed{3}$
$F'(x_0) = \frac{1(2)}{2\sqrt{2x+9}}$
$F'(0) = \boxed{\frac{1}{3}}$

أداء مهمة(1) تمرين رقم (4) الكتاب المدرسي صفحة(236)

$$F(x) = \frac{2}{x} = F(x_0) + F'(x_0)(x-x_0)$$
$$= 2 + -2(x-1)$$
$$= 2 - 2x + 2 = -2x + 4$$
$x = 0.99 \Leftarrow \frac{2}{x} = \frac{2}{0.99}$ وحساب
$\Rightarrow \frac{2}{0.99} = -2(0.99) + 4 = 2.02$

$x_0 = 1$
$F(x_0) = F(1) = \frac{2}{1} = 2$
$F'(x_0) = \frac{-2}{x^2}$
$F'(1) = -2$

اعداد : صابر الموافي

مثال(2) استخدم التقريب الخطي لتقدير الكمية $\sqrt[4]{16.04}$

نفرض أن $f(x) = \sqrt[4]{x}$

حيث $x_0 = 16$

$\Rightarrow f(x_0) = f(16) = 2$

$f'(x_0) = \frac{1}{4} x^{-3/4}$

$f'(16) = \frac{1}{4}(16)^{-3/4}$

$= \frac{1}{4} \cdot 2^{-3}$

$= \boxed{\frac{1}{32}}$

والقانون $f(x) = \sqrt[4]{x} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$= 2 + \frac{1}{32}(x - 16)$

$= 2 + \frac{1}{32}x - \frac{1}{2}$

$= \boxed{\frac{1}{32}x + \frac{3}{2}}$

$\Rightarrow \sqrt[4]{16.04} = \frac{1}{32}(16.04) + 3/2$

$\cong 2.001$

نشاط كتابي(2) تمرين رقم (7) فرع c الكتاب المدرسي صفحة(236)

اعتمد على نفس مثال ②

أداء مهمة(2) تمرين رقم (8) فرع a الكتاب المدرسي صفحة (236)

نفرض أن $f(x) = \sin x$

حيث $\boxed{x_0 = 0}$

$\Rightarrow f(x_0) = f(0) = \sin 0 = 0$

$f'(x_0) = \cos x$

$f'(0) = \cos 0 = 1$

$\Rightarrow f(x) = \sin x = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$= 0 + 1(x - 0)$

$= x$

$\Rightarrow \sin(0.1) \cong 0.1$

$= 0.099 \cong 0.1$

اعداد : صابر العوافي

مثال(3) أستخدم الاستكمال الداخلي الخطي لتقدير الثمن المطلوب

يمكن بيع f(x) الف لعبة برمجية بالسعر x دولار كما هو معطى في الجدول

X	20	30	40
F(x)	18	14	12

قدر عدد اللعبات التي يمكن بيعها بسعر 24 دولار

∴ المطلوب قدر اللعبات التي يمكن بيعها بسعر 24 دولار

وهو الأمر لـ $X=20$

$\Rightarrow X_0 = 20$

$P(x_0) = P(20) = 18$

$\Rightarrow P'(20) = \frac{P(30)-P(20)}{30-20}$

$= \frac{14-18}{30-20} = \frac{-4}{10}$

$= -0.4$

$\Rightarrow P(x) = P(x_0) + P'(x_0)(x-x_0)$

$= 18 + -0.4(x-20)$

$= 18 - 0.4x + 8$

$P(x) = 26 - 0.4x$

$P(24) = 26 - 0.4(24)$

$= 26 - 9.6$

$= 16.4$

نشاط كتابي(3) تمرين رقم (10) الكتاب المدرسي صفحة(236)

اعتمد على نفسك [مثال ③]

آداء مهمة(3) تمرين رقم (11) الكتاب المدرسي صفحة(236)

اعتمد على نفسك [مثال ③]

اعداد : صابر الموافي

طريقة نيوتن لايجاد اصفار الدالة (جذور الدالة) (مجموعة حل المعادلة)

القانون العام هو: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ حيث n= 0, 1, 2, 3, 4, 5.....

وكلما زادت قيمة n كلما تقترب قيمة x اكثر واكثر من الصفر

مثال(4) استخدم طريقة نيوتن مع قيم x_0 المعطاة لحساب قيم x_1 , x_2 حيث

$F(x)= x^4 - 3x^2 + 1$ حيث $x_0 = -1$

$\Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -1 - \frac{f(-1)}{f'(-1)}$

$= -1 - \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

$= -\frac{1}{2} - \frac{\frac{5}{16}}{5/2} = \cdots\cdots$

$f(-1) = -1$

$f'(-1) = 4x^3 - 6x$

$f'(-1) = 2$

$f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{16} - \frac{3}{4} + 1 = \frac{5}{16}$

$f'(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{2}$

اعتمد على نفسك [مثال 4]

نشاط كتابي(4) تمرين رقم (15) الكتاب المدرسي صفحة (236)

اعتمد على نفسك [مثال 4]

آداء مهمة(4) تمرين رقم (14) الكتاب المدرسي صفحة (236)

اعداد : صابر الموافي

مثال(5) استخدم طريقة نيوتن لايجاد الجذر لست منازل عشرية (ارسم الدالة)

واشرح كيفية الوصول لتخمينك الأولي حيث $\sin x = x^2 - 1$

$f(x) = \sin x - x^2 + 1$

$f'(x) = \cos x - 2x$

$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$x_1 = x_0 - \frac{\sin x - x^2 + 1}{\cos x - 2x}$

$\Rightarrow x_1 = -1$

$x_2 = -0.6687516$

$x_3 = -0.637068$

$x_4 = -0.637326$

$x_5 = -0.637326$

$x_0 = 1$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$= x - \frac{\sin x - x^2 + 1}{\cos x - 2x}$

$x_1 = 1.017449$

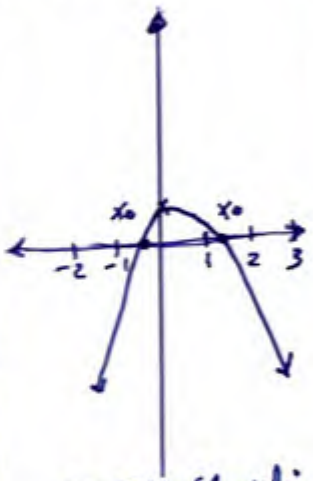
$x_2 = 1.000594$

$x_3 = 1.016846$

$x_4 = 1.001147$

$x_5 = 1.016287$

$x_6 = 1.001663$



من الرسم الأصفار تقترب من $x_0 = 0.61$

نشاط كتابي(5) تمرين رقم (22) الكتاب المدرسي صفحة (236)

$f(x) = \cos x^2 - x$

$f'(x) = -\sin x^2 \cdot (2x) - 1$

تقترب $x_0 = 0.5$ منه

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$= x - \frac{\cos(x^2) - x}{-\sin(x^2) \cdot 2x - 1}$

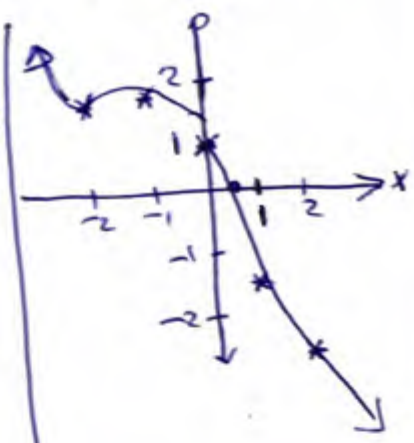
$x_1 = 0.875910$

$x_2 = 0.805483$

$x_3 = 0.801086$

$x_4 = 0.801070$

$x_5 = 0.801070$



أداء مهمة(5) تمرين رقم (23) الكتاب المدرسي صفحة (236)

$f(x) = e^x + x$

$f'(x) = e^x + 1$

$x_0 = -0.5$ ← من الرسم

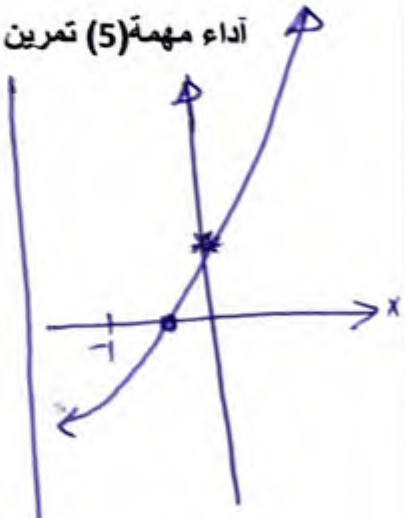
$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$= x - \frac{e^x + x}{e^x + 1}$

$x_1 = -0.566311$

$x_2 = -0.567141$

$x_3 = -0.567143$



اعداد : صابر الموافي

مثال(6) استخدم طريقة نيوتن لتقدير العدد المعطى $\sqrt[4.1]{24}$

$x = \sqrt[4.1]{24} \Rightarrow x^{4.1} = 24 \Rightarrow f(x) = x^{4.1} - 24 \Rightarrow f'(x) = 4.1x^{3.1}$

$x_0 = -2$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$= x - \frac{x^{4.1} - 24}{4.1x^{3.1}}$

$x_1 = -2.062176$

$x_2 = -2.059140$

$x_3 = -2.059132$

$x_4 = -2.059132$

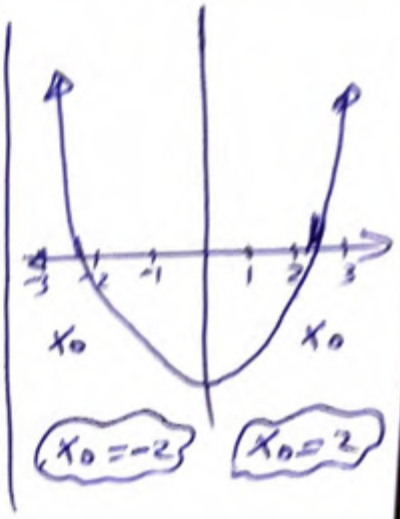
$x_0 = 2$

$x_1 = 2.062176$

$x_2 = 2.059140$

$x_3 = 2.059132$

$x_4 = 2.059132$



نشاط كتابي(6) تمرين رقم (28) الكتاب المدرسي صفحة (236)

اعتمدل هسك

اداء مهمة(6) تمرين رقم (30) الكتاب المدرسي صفحة(236) اعتمدل هسك

اعداد : صابر الموافي

مثال(7) اشرح لماذا تفشل طريقة نيوتن حيث $x_0 = 0$, $F(x)=4x^3 - 7x^2 + 1 = 0$

$F(x) = 4x^3 - 7x^2 + 1 \Rightarrow F'(x) = 12x^2 - 14x$

$F'(x_0) = F'(0) = 0$

$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)} = x_0 - \frac{F(x_0)}{0}$

∴ القاسم = صفراً ⇐ تفشل اختبار نيوتن

نشاط كتابي(7) تمرين رقم (32) الكتاب المدرسي صفحة (236) اعتمد على نفسك

آداء مهمة(7) تمرين رقم (33) الكتاب المدرسي صفحة(237) اعتمد على نفسك

مثال(8) اوجد التقريب الخطي عند X=0 حيث $\tan x \approx x$

$x_0 = 0$ $\quad f(x_0) = f(0) = \tan(0) = 0$ $\quad \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x$

$f'(x_0) = f'(0) = \sec^2 0 = 1$

$\Rightarrow f(x) = \tan x \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$\simeq 0 + 1(x - 0) \simeq x$

نشاط كتابي(8) تمرين رقم (43) الكتاب المدرسي صفحة (237)

$f(x) = \sqrt{4+x}$

$f(x_0) = f(0) = 2$

$x_0 = 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4+x}}$

$f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{4+0}} = \frac{1}{4}$

$f(x) = \sqrt{4+x} \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$\simeq 2 + \frac{1}{4}(x - 0) = 2 + \frac{1}{4}x$

آداء مهمة(8) تمرين رقم (44) الكتاب المدرسي صفحة(237)

اعتمد كما تشاء

اعداد : صابر الموافي

مسائل تطبيقية

مثال(8) في نظرية انيشتاين يعتمد طول الشئ على سرعته المتجهة فاذا كان L_0 طول الشئ عند السكون وكانت V السرعة المتجهه و C سرعة الضوء

فاذا كانت معادلة طول الشئ هي $L = L_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}$

حيث L دالة في السرعة V فأوجد التقريب الخطي عند V= 0

$V_0 = 0$

$L(V_0) = L(0) = L_0\sqrt{1-\frac{0}{C^2}} = L_0$

$L'(V_0) = L_0 \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}(-2V) = \Rightarrow L'(0) = 0$

$L(V) \cong L(V_0) + L'(V_0)(V - V_0)$

$\cong L_0 + 0(V-0) = L_0$

نشاط كتابي(9) تمرين رقم (57) الكتاب المدرسي صفحة (238) اعتمدت نفسك

آداء مهمة(9) تمرين رقم (58) الكتاب المدرسي صفحة(238) اعتمدت نفسك

اعداد : صابر الموافي

الدرس الثاني (2-4) الصيغ غير المعروفة وقاعدة لوبيتال

الصيغ الغير معرفة :

1^{∞}	0^0	∞^0	$\frac{0}{0}$	$\infty \ x \ 0$	$\infty - \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$

ملاحظة هامة جدا (1): عند ظهور أي صيغة غير معرفة يجب تحويلها على صورة

($\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$) حتى نستطيع استخدام قاعدة لوبيتال

ثم نقوم باشتقاق البسط لحاله واشتقاق المقام لحاله

الشروط : البسط قابل للاشتقاق والمقام قابل للاشتقاق عند x=c

حيث مشتقة المقام $\neq 0$ عند x=c

ملاحظة هامة جدا (2): ممكن استخدام قاعدة لوبيتال

في المسألة عدة خطوات حتى نحصل على الحل

والأن نتناول الامثلة التي توضح كل الصيغ الغير معروفة

ملاحظة هامة جدا : على الصورة ($\frac{0}{0}$) ولكن تطبق القاعدة مرة واحدة فقط

مثـــــال (1) أوجد قيمة النهاية $\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{e^{3x}-1}$

التعويض المباشر $= \frac{0}{0}$ وباستخدام لوبيتال $\Leftarrow$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{3e^{3x}} = \frac{\cos 0}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

نشاط كتابي (1) أوجد قيمة النهاية $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$

التعويض المباشر $\leftarrow \frac{0}{0}$ وباستخدام لوبيتال $\Leftarrow$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{1} = \frac{2}{1} = \boxed{2}$$

أداء مهمة (1) أوجد قيمة النهاية $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1} x}{sinx}$

التعويض المباشر $\leftarrow \frac{0}{0}$ وباستخدام لوبيتال $\leftarrow$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\cos x} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$$

تقويـــــم (1) أوجد قيمة النهاية $\lim_{x\to \pi} \frac{sin2x}{sinx}$

التعويض المباشر $\leftarrow \frac{0}{0}$ وباستخدام لوبيتال $\Leftarrow$

$$\lim_{x\to \pi} \frac{2\cos 2x}{\cos x} = \frac{2}{-1} = \boxed{-2}$$

اعداد : صابر الموافي

تمارين الواجب (الكتاب المدرسي صفحة 247)

1): تمرين رقم (1)

$$\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x^2-4} = \dots$$

التعويض المباشر $\Leftarrow \frac{0}{0}$ وباستخدام لوبيتال $\Leftarrow$

$$\lim_{x\to -2} \frac{1}{2x} = \frac{1}{-4} = \boxed{-\frac{1}{4}}$$

2): تمرين رقم (2)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$$

التعويض المباشر $\Leftarrow \frac{0}{0}$ وباستخدام لوبيتال $\Leftarrow$

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x}{2x-3} = \boxed{4}$$

3): تمرين رقم (8)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin^{-1} x}$$

التعويض المباشر $= \frac{0}{0}$ وباستخدام لوبيتال $\Leftarrow$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$$

4): تمرين رقم (13)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

التعويض المباشر $= \frac{0}{0}$ وباستخدام لوبيتال

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} =$$

5): تمرين رقم (14)

التعويض المباشر $= \frac{0}{0}$ وباستخدام لوبيتال $\Leftarrow$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \boxed{1}$$

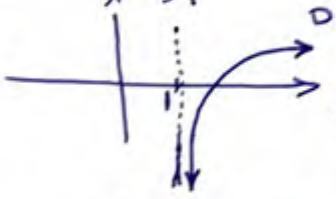
اعداد : صابر الموافي

6): تمرين رقم (25) الكتاب المدرسي صفحة (248)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(\ln x)}{\ln x} = \cdots$$

التعويض المباشر $= \frac{-\infty}{0}$ (لا يمكن استخدام لوبيتال)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(0)}{0}$$



⇐ النهاية غير موجودة حيث النهاية اليمنى $= -\infty$ ⇐ النهاية اليسرى غير موجودة

7): تمرين رقم (26) الكتاب المدرسي صفحة (248)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x} = \cdots$$

التعويض المباشر $= \frac{0}{0}$ ⇐ باستخدام لوبيتال ⇐

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)\cdot \cos x}{\cos x} = \cos(0) = \boxed{1}$$

8): تمرين رقم (27) الكتاب المدرسي صفحة (248)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sinh x)}{\sinh(\sin x)} = \cdots$$

التعويض المباشر $= \frac{0}{0}$ وباستخدام لوبيتال

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sinh x)\cdot \cosh x}{\cosh(\sin x)\cdot \cos x} = \frac{1(1)}{1(1)} = \boxed{1}$$

9): تمرين رقم (36) الكتاب المدرسي صفحة (248)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{10-x}-3} = \cdots$$

التعويض المباشر $= \frac{0}{0}$ ⇐ وباستخدام لوبيتال ⇐

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1(-1)}{2\sqrt{5-x}}}{\frac{1(-1)}{2\sqrt{10-x}}} = -\frac{1}{4} \div -\frac{1}{6} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

اعداد : صابر الموافي

تمارين الأبداع والأبتكار

1) هل يمكن استخدام قاعدة لوبيتال لايجاد النهاية: $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x^2}$ اشرح

باستخدام التعويض المباشر $= \frac{1}{0}$ ⇐ ليست صورة من صور لوبيتال
⇐ لا يمكن استخدام لوبيتال

2) هل يمكن استخدام قاعدة لوبيتال لايجاد النهاية: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^2}$ اشرح

بالتعويض المباشر $= \frac{0}{0}$ ⇐ يمكن استخدام لوبيتال ⇐ غير موجودة
ومن المرة الثانية لا يمكن استخدام قاعدة لوبيتال ⇐ الخلاصة لا يمكن استخدام لوبيتال

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2x} = \frac{1}{0}$

3) هل يمكن استخدام قاعدة لوبيتال لايجاد النهاية: $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\ln x^2}$ اشرح

التعويض المباشر $= \frac{0}{-\infty}$ ⇐ ليست صورة لوبيتال ⇐ لا يمكن استخدام قاعدة لوبيتال ≠
= 0 = 0 ⇐ النهاية موجودة

4) هل يمكن استخدام قاعدة لوبيتال لايجاد النهاية: $\lim_{x\to 0^+}\frac{\csc x}{\sqrt{x}}$ اشرح

$\frac{\csc x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}\sin x}$

باستخدام التعويض المباشر ⇐ $\frac{\infty}{0}$ ⇐ ليست صورة لوبيتال ⇐ لا يمكن استخدام لوبيتال
والنهاية ⇐

5) تمرين رقم (59) الكتاب المدرسي صفحة (248)

$u = x^2$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = L \Leftarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{g(x^2)} = \cdots \Leftarrow x\to 0 \Rightarrow u\to 0$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{g(x^2)} = \lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{g(u)} = L \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x^2)}{g(x^2)}$ لا يوجد $\lim_{x\to a}\frac{f(x^2)}{g(x^2)} = L$

6) تمرين رقم (60) الكتاب المدرسي صفحة (248)

بالاذا $x\to 0$ ، $x\to 1$

لتكن $f(x) = |x|$ ، $g(x) = x$ ⇐ $\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{g(x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{|x^2|}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1$

$\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x} = \frac{+}{0} \to \frac{x}{x} = 1$ ، $\frac{-}{0} \to \frac{-x}{x} = -1$ ⇐ النهاية غير موجودة

[$f(x) = |x|$ ، $g(x) = x$ هذا مثال لذلك]

اعداد : صابر الموافي

ملاحظة هامة جدا : على الصورة ($\frac{0}{0}$) ولكن نطبق القاعدة عدة مرات

مثال (2) أوجد قيمة النهاية $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x\sin^2 x}$

بالتعويض المباشر = $\frac{0}{0}$ ← نستخدم لوبيتال

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\cos x + x(-\sin x) - \cos x}{\sin^2 x + x \cdot 2\sin x \cos x} = \frac{0}{0}$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\ldots - x\sin x}{\sin x(\sin x + 2x\cos x)}$ ← باستخدام لوبيتال مرة أخرى

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{-1}{\cos x + 2\cos x + 2x(-\sin x)} = \frac{-1}{3}$

نشاط كتابي (2) أوجد قيمة النهاية $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$

التعويض المباشر = $\frac{0}{0}$ ⇐ نستخدم لوبيتال

$\lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \frac{0}{0}$ ← نستخدم لوبيتال

⇐ لوبيتال مرة أخرى

$\lim_{x\to 0} \frac{2\sec x \cdot \sec x \tan x}{6x} = \frac{0}{0}$

نستخدم لوبيتال للمرة الثالثة

$\lim_{x\to 0} \frac{4\sec x \cdot \sec x \tan x \cdot \tan x + 2\sec^2 x \cdot \sec^2 x}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

آداء مهمة (2) أوجد قيمة النهاية $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

اعتمد على نفسك

تقويم(2) أوجد قيمة النهاية $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sinh x}{\cos x - \cosh x}$

التعويض المباشر = $\frac{0}{0}$ ⇐ لوبيتال ① ⇐

$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cosh x}{-\sin x - \sinh x} = \frac{0}{0}$

⇐ لوبيتال ② ⇐

$\lim_{x\to 0} \frac{-\sin x - \sinh x}{-\cos x - \cosh x} = \frac{0}{-2}$

النهاية موجودة = 0

اعداد : صابر الموافي

تمارين الواجب (الكتاب المدرسي صفحة 248)

1):تمرين رقم (50) الفقرة (a) , (b) , (c)

a ← باستخدام لوبيتال ⇐

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x^2}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos(x^2)}{2x}=\cos(0)=1 \quad / \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

b ←

$$* \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^2)}{x^4}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)\cdot 2x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)\cdot 1}{2x^2}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x^2)\cdot 2x}{4x}=\frac{1}{2}$$

c ←

$$* \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^3)}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^3}{x^3}=1$$

تمارين الأبداع والابتكار

1) تمرين رقم (63) الكتاب المدرسي صفحة (249) : بدراسة الشكل المرسوم في الكتاب المدرسي

$$\cos\theta=\frac{PB}{PA}=\frac{PB}{1}\Rightarrow PB=\cos\theta \qquad \Rightarrow BC=PC-BP=1-\cos\theta$$

$$\sin\theta=\frac{AB}{PA}=\frac{AB}{1}\Rightarrow AB=\sin\theta$$

$$\Rightarrow \text{مساحة } ABC=\frac{1}{2}\times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}=\frac{1}{2}BC\cdot AB=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)\sin\theta$$

مساحة القرص = مساحة القطاع APB − مساحة المثلث ABC الذي ضلعاه AB و BC هما نصفا قطرين للدائرة

$$=\frac{1}{2}(1)^2\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta$$

$$\Rightarrow \text{النسبة المطلوبة}=\frac{\frac{1}{2}(1-\cos\theta)\sin\theta}{\frac{1}{2}(\theta-\cos\theta\sin\theta)}=\frac{\sin\theta-\sin\theta\cos\theta}{\theta-\cos\theta\sin\theta}$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta}{1-\cos 2\theta}=\frac{0}{0}$$

$$\frac{-\sin\theta+\sin 2\theta}{2\sin 2\theta}\Rightarrow\frac{-\cos\theta+4\cos 2\theta}{4\cos 2\theta}=\frac{3}{4}\simeq 1$$

اعداد : صابر الموافي

ملاحظة هامة جدا : على الصورة ($\frac{\infty}{\infty}$) ولكن تطبق القاعدة مرة واحدة فقط

مثـــــال (3) أوجد قيمة النهاية $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{csc x}$

التعويض المباشر = $\frac{\infty}{\infty}$ ⇐ باستخدام لوبيتال

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-csc x \cot x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{-x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x \cdot \sin x}{-x \cos x} = \frac{-1(0)}{1} = 0$$

نشاط كتابي (3) أوجد قيمة النهاية $\lim_{x\to \infty} \frac{x+1}{x^2+4x-3}$

التعويض المباشر = $\frac{\infty}{\infty}$ ⇐ باستخدام لوبيتال

$$\lim_{x\to \infty} \frac{1}{2x+4} = \frac{1}{\infty}$$

$$= 0$$

آداء مهمة (3) أوجد قيمة النهاية $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x}$

التعويض المباشر = $\frac{-\infty}{-\infty}$ ⇐ باستخدام لوبيتال

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-csc^2 x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{-x csc^2 x} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin x \cdot \sin x}{x}$$

$$= (-1)(0) = 0$$

تقويـــم (3) أوجد قيمة النهاية $\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x^2}$

التعويض المباشر ⇐ $\frac{\infty}{\infty}$ باستخدام لوبيتال

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x}$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2(\infty)^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

اعداد : صابر الموافي

تمارين الواجب (الكتاب المدرسي صفحة 247)

1): تمرين رقم (3) باستخدام لوبيتال

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2}{x^2-4}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{6x}{2x}=\frac{6}{2}=\boxed{3}$$

2): تمرين رقم (20) الكتاب المدرسي صفحة (248)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x+\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}$$

ملاحظة: هذه النهاية سواء $x\to\frac{\pi}{2}^-$ أو $x\to\frac{\pi}{2}^+$

$$\Leftarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}=$$

الناتج $=\infty-\infty$

∴ نقدم توحيد المقام أولاً ثم لوبيتال

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\cos x}{\cos x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}=\boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin x-\sin x}{-\sin x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\cos x}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\cos x}{-\cos x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\sin x-\sin x}=\frac{0}{-2}=\boxed{0}$$

3): تمرين رقم (22) الكتاب المدرسي صفحة (248)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\frac{\infty}{\infty}$$

باستخدام لوبيتال

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\infty}=\boxed{0}$$

4): تمرين رقم (23) الكتاب المدرسي صفحة (248)

$$\lim_{x\to\infty}x\,e^{-x}$$

باستخدام لوبيتال

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{e^\infty}=\frac{1}{\infty}=\boxed{0}$$

5): تمرين رقم (24) الكتاب المدرسي صفحة (248)

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

باستخدام لوبيتال

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\boxed{\frac{0}{0}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}=\cos\left(\frac{1}{\infty}\right)=\cos 0=\boxed{1}$$

اعداد : صابر الموافي

تمارين الأبداع والأبتكار

1) أوجد النهاية : $\lim_{x\to\infty} (\ln x - x)$

$\Leftarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x - x}{1}$

بالتعويض المباشر $= \infty - \infty$ صورة لويتال

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\ln x}{x} - 1}{\frac{1}{x}}$ $\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$ $\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\ln x}{x} - 1}{\frac{1}{x}} = \frac{0-1}{0} = \frac{-1}{0} = -\infty$

2) هل يمكن استخدام قاعدة لوبيتال لايجاد النهاية: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+1}{\tan^{-1} x}$ اشرح

باستخدام التعويض المباشر $\Leftarrow \frac{\infty}{\frac{\pi}{2}}$ هذه ليست صورة من صور لويتال

$\Leftarrow$ لا يمكن استخدام لوبيتال

3) هل يمكن استخدام قاعدة لوبيتال لايجاد النهاية: $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x^2}{e^x}$ اشرح

باستخدام التعويض المباشر $= \frac{\infty}{\infty}$ $\Leftarrow$ نقدم لويتال

$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}}{e^x} = \frac{2}{xe^x}$

$= \frac{2}{\infty} = 0$

4) تمرين رقم (51) الكتاب المدرسي صفحة (248)

a) $\Rightarrow F(x) = \frac{(x+1)(2+\sin x)}{x(2+\cos x)}$

b) $\Rightarrow F(x) = \frac{x}{e^x}$

c) $\Rightarrow F(x) = \frac{3x+1}{x}$

d) $\Rightarrow F(x) = \frac{-4x^2}{x^2+1}$

اعداد : صابر الموافي

5) تمرين رقم (52) الكتاب المدرسي صفحة (248)

a) $\Rightarrow f(x) = \ln x - x$ $\Rightarrow$ النهاية $= -\infty$

b) $\Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ $\Rightarrow$ النهاية $= 0$

c) $\Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2+4x} - x$ $\Rightarrow$ النهاية $= 2$

ويمكن التأكد من ذلك حل هذه التمارين باستخدام لوبيتال

6) أوجد النهاية : $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}-\ln x}{\sqrt{x}}$ باستخدام خاصية التوزيع أولاً

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} 1 - \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

* ودراسة $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty}$ بالتعويض المباشر

تقدم لوبيتال

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} 1 - \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 1 - 0 = 1$$

7) أوجد النهاية : $\lim_{c\to\infty} S$ حيث $S = \frac{8\pi C^2}{3}\left[\left(\frac{d^2}{16c^2}+1\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$ حيث d عدد ثابت

اعتمد على نفسك

اعداد : صابر الموافي

ملاحظة هامة جدا : على الصورة ($\frac{\infty}{\infty}$) واكمن تطبق القاعدة عدة مرات

مثـــــال (4) أوجد قيمة النهاية $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x}$

التعويض المباشر ← $\frac{\infty}{\infty}$ ← باستخدام لوبيتال

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{6x}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{6}{e^x}=\frac{6}{\infty}=0$

نشاط كتابي (4) أوجد قيمة النهاية $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^3+2x+1)}{\ln(x^2+x+2)}$

بالتعويض المباشر = $\frac{\infty}{\infty}$ ← تعدم لوبيتال

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2}{x^3+2x+1}\div\frac{2x+1}{x^2+x+2}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2+2)(x^2+x+2)}{(x^3+2x+1)(2x+1)}=\lim_{x\to\infty}$

ثم فك الأقواس وباستخدام لوبيتال كذا مرات

$\frac{3}{2}$ = فصل كل النهاية

حل آخر وأسهل

$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x^3\left(1+\frac{2x}{x^3}+\frac{1}{x^3}\right)}{\ln x^2\left(1+\frac{x}{x^2}+\frac{2}{x^2}\right)}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x^3}{\ln x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3\ln x}{2\ln x}$

$=3/2$

أداء مهمة (4) أوجد قيمة النهاية $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(e^{3x}+x)}{\ln(e^{2x}+4)}$

بالتعويض المباشر = $\frac{\infty}{\infty}$ وباستخدام

لوبيتال وفك الأقواس وباستخدام

لوبيتال كذا خطوات فصل كل النهاية = $\frac{3}{2}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln e^{3x}\left(1+\frac{0x}{e^{3x}}\right)}{\ln e^{2x}\left(1+\frac{4}{0/e^{2x}}\right)}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{2x}=3/2$

حل آخر أسهل

$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{2x}}=\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3e^{2x}}=0$

تقويـــم (4) أوجد قيمة النهاية $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x^3}{x^4}$

التعويض المباشر = $\frac{\infty}{\infty}$ ← باستخدام لوبيتال

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}}{4x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{12x^3}=0$

اعداد : صابر الموافي

ملاحظة هامة جدا : على الصورة $(\infty - \infty)$ ولكن يجب تحويلها الى $(\frac{0}{0})$ او امثل

مثـــــال (5) أوجد قيمة النهاية $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x}\right)$ بالتعويض المباشر $= \infty - \infty$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x - \ln(x+1)}{x\ln(x+1)} = \frac{0}{0}$$ ← وباستخدام لوبيتال

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{x+1}}{\ln(x+1) + x\cdot\frac{1}{1+x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x+x-1}{1+x}}{\frac{(1+x)\ln(x+1)+x}{1+x}} = \frac{x}{(1+x)\ln(x+1)+x}$$

باستخدام لوبيتال مرة أخرى ⇐ $= \frac{1}{\ln(x+1)+1+1} = \frac{1}{2}$

نشاط كتابي (5) أوجد قيمة النهاية $\lim_{x\to 0}(\cot x - \frac{1}{x})$ عند التعويض المباشر سواء $x\to 0^+$ أو $x\to 0^-$ نحصل على $\infty - \infty$ وهي صورة لوبيتال

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x} = \frac{0}{0}$$ وباستخدام لوبيتال

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{\sin x + x\cos x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x - x\cos x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{0}{2} = 0$$

آداء مهمـــة (5) أوجد قيمة النهاية $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{x} - \frac{2}{\sin 2x}\right)$ بالتعويض المباشر $= \infty - \infty$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)\sin 2x - 2x}{x\sin(2x)} = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x + (x+1)\cos 2x\cdot(2) - 2}{\sin(2x) + x\cos(2x)(2)} = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)(2) + \cos(2x)(2) + (x+1)(-\sin 2x)(4)}{\cos(2x)(2) + \cos(2x)(2) + x(-\sin 2x)(4)} = \frac{4}{4} = 1$$

تقويـــــم(5) أوجد قيمة النهاية : $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1} - x$ **(يحل بدون لوبيتال)** التعويض المباشر $\infty - \infty$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

الـــــواجب تمرين رقم (35) الكتاب المدرسي صفحة (248)

اعتمدي نفسك

اعداد : صابر الموافي

ملاحظة هامة جدا : على الصورة ($0 \times \infty$) ولكن يجب تحويلها الى الصورة ($\frac{0}{0}$) أو ($\frac{\infty}{\infty}$)

مثـــــال (6) أوجد قيمة النهاية $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \ln x$

التعويض المباشر $= 0 \times \infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$

وباستخدام لوبيتال $\Leftarrow$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$

$= \frac{1}{\infty} = 0$

نشاط كتابي (6) أوجد قيمة النهاية $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$

التعويض المباشر $= \frac{0}{-\infty}$

$\Leftarrow$ قيمة النهاية $= 0$

ولا تستخدم لوبيتال

أداء مهمـة (6) أوجد قيمة النهاية $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\frac{-2}{3}}}{\ln x}$

التعويض المباشر $= \frac{\infty}{-\infty}$

نستخدم لوبيتال $\Leftarrow$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{2}{3} x^{-5/3}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{2}{3} x^{-\frac{5}{3}} \cdot x$

$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{2}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2/3}{x^{2/3}} = \frac{-2/3}{0} = -\infty$

تقويـــــم(6) أوجد قيمة النهاية أوجد قيمة النهاية : $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\ln x}$

التعويض المباشر $= \frac{0}{-\infty} = 0$

وتم ايجاد قيمة النهاية بدون استخدام لوبيتال

اعداد : صابر الموافي

ملاحظة هامة جدا : صور لوبيتال الأسية (1^{∞} و 0^0 و ∞^0)
نقوم اولاً بفرض الدالة ب y ثم تحويلها الى الصورة اللوغاريتمية) ثم نوجد النهاية

مثـــــــال (7) أوجد قيمة النهاية $\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^x$ (لوبيتال عدة خطوات)

التعويض مباشر $= 0^0$

$$\Rightarrow y = (\sin x)^x$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln(\sin x)^x = x \ln(\sin x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} x \ln(\sin x) = 0 \times \infty$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

وباستخدام لوبيتال $\Leftarrow$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\cos x}{\sin x} \cdot x^2 = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x \cdot x \cdot x}{\sin x} = 0$$

$\Leftarrow \lim_{x\to 0^+} \ln y = 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} y = e^0 = 1$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} (\sin x)^x = 1$

للطالب المبدع فقط (8) أوجد قيمة النهاية $\lim_{x\to\infty} \left|\frac{x+1}{x-2}\right|^{\sqrt{x^2-4}}$

اعتمد على نفسك [الإجابة e^3]

اعداد : صابر الموافي

نشاط كتابي (7) أوجد قيمة النهاية $\lim_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{x-1}}$

التعويض المباشر $= 1^{\infty}$ حالة عدم تعيين

$\Rightarrow y = x^{\frac{1}{x-1}} \Rightarrow \ln y = \ln x^{\frac{1}{x-1}} = \frac{1}{x-1}\ln x$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} \ln y = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = \frac{0}{0}$

باستخدام لوبيتال $\Leftarrow = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$

$\Rightarrow$ قيمة النهاية $= e^1 = 2.713\ldots$

أداء مهمة (7) أوجد قيمة النهاية $\lim_{x\to\infty}(x+1)^{\frac{2}{x}}$

التعويض المباشر $= \infty^0$

$\Rightarrow y = (x+1)^{\frac{2}{x}} \Rightarrow \ln y = \ln (x+1)^{\frac{2}{x}}$

$\Rightarrow \ln y = \frac{2}{x}\cdot \ln(x+1) = \frac{2\ln(x+1)}{x}$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln(x+1)}{x} = \frac{\infty}{\infty}$

وباستخدام لوبيتال $\Leftarrow = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x+1}}{1} = 0$

$\Leftarrow$ قيمة النهاية $= e^0 = 1$

تقويـــــم(7) أوجد قيمة النهاية $\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{x}+1)^x$

اعتمد على نفسك [الإجابة $= e^1$]

اعداد : صابر الموافي

تمارين الواجب (الكتاب المدرسي صفحة (248))

1): تمرين رقم (37)

0^0 = التعويض المباشر $\Leftarrow \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^x$

$\Rightarrow y = \left(\frac{1}{x}\right)^x \Rightarrow \ln y = \ln\left(\frac{1}{x}\right)^x = x.\ln\left(\frac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} x.\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-1}{x^2} \div \frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$ ← وباستخدام لوبيتال

$\Leftarrow e^0 = 1$ = قيمة النهاية

2): تمرين رقم (38)

1^∞ = التعويض المباشر $\Leftarrow \lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$

$\Rightarrow y = (\cos x)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln y = \ln(\cos x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}.\ln(\cos x)$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}.\ln(\cos x) = \frac{0}{0}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{1} = 0$ ← وباستخدام لوبيتال

$\Leftarrow e^0 = 1$ = قيمة النهاية

3): تمرين رقم (39)

1^∞ = التعويض المباشر $\Leftarrow \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-3}{x+2}\right)^x$

$\Rightarrow y = \left(\frac{x-3}{x+2}\right)^x \Rightarrow \ln y = \ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^x = x.\ln\frac{x-3}{x+2}$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\frac{(x-3)}{(x+2)}}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2}}{\frac{-1}{x^2}} =$ ← وباستخدام لوبيتال

4): تمرين رقم (40)

$= \lim_{x\to\infty} \frac{x+2-x+3}{(x-3)(x+2)} . -x^2 = \frac{-5x^2}{x^2-x-6} = -5$

$\Leftarrow e^{-5} = \dots$ = قيمة النهاية

اعتمد تسلم

اعداد : صابر المواقي

الدرس الثالث (3 – 4) القيم العظمى والصغرى

+ الدرس الرابع (4-4) فترات التزايد والتناقص

+ الدرس الخامس (4-5) فترات التقعر لأعلى ولأسفل ونقاط الأنعطاف

ملاحظة هامة جدا (1) : تعني بالقيم القصوى المطلقة (القيمة العظمى والصغرى المطلقة)

ملاحظة هامة جدا (2) : أي دالة f(x) متصلة ومعرفة على الفترة $[a\ ,\ b]$ فلابد من وجود قيمة عظمى وصغرى مطلقة في تلك الفترة (وتسمى بنظرية القيم القصوى)

ملاحظة هامة جدا (3) : أي دالة f(x) غيرمتصلة وغيرمعرفة على أي فترة سواء مغلقة أو مفتوحة ممكن وجود قيمة عظمى وصغرى مطلقة في تلك الفترة على حسب ولكن نظرية القيم القصوى تضمن وجود قيم قصوى مطلقة

ملاحظة هامة جدا (4) : القيم القصوى المحلية (القيم القصوى النسبية)

تكون متواجدة عند 1) $\bar{f}(x) = 0$ 2) $\bar{f}(x)$ غير موجودة

ملاحظة هامة جدا (5) : تسمى x = c نقطة حرجة للدالة f(x)

وتأتي من 1) $\bar{f}(x) = 0$ 2) $\bar{f}(x)$ غير موجودة

الشروط : 1) إذا كانت في مجال الدالة 2) وليس شرطا تغير الأشارة حولها

3) وأطراف الفترة ليست حرجة

ملاحظة هامة جدا (6) : نظرية فيرمات

كل قيمة عظمى أو صغرى محلية لابد عندها نقطة حرجة

ولكن العكس غير صحيح

ملاحظة هامة جدا (7) : إذا كانت $\bar{f}(x) > 0$ فان f(x) تكون دالة متزايدة

إذا كانت $\bar{f}(x) < 0$ فان f(x) تكون دالة متناقصة

ملاحظة هامة جدا (8) : إذا كانت $\bar{f}(x) > 0$ فان f(x) تكون دالة مقعرة لأعلى

إذا كانت $\bar{f}(x) < 0$ فان f(x) تكون دالة مقعرة لأسفل

اعداد : صابر الموافي

ملاحظة هامة جدا (9) : تسمى x = c نقطة انعطاف للدالة f(x)

وتأتي من 1) $f''(x) = 0$ 2) $f''(x)$ غير موجودة

الشروط : 1) إذا كانت في مجال الدالة 2) بشرط تغير الاشارة حولها

3) وأطراف الفترة ليست انعطاف

والآن نطرح الأمثلة التي توضح ذلك (باستخدام اختبار المشتقة الأولى) أوجد ما يلي

1) النقاط الحرجة للدالة f(x)

2) القيم القصوى للدالة f(x)

3) القيم القصوى المحلية للدالة f(x)

4) فترات التزايد والتناقص للدالة f(x)

5) فترات التقعر لأعلى ولأسفل للدالة f(x)

6) نقاط الأنعطاف للدالة f(x)

أنواع الدوال التي نقوم بدراستها هي :

1) الدوال الحدودية

2) الدوال النسبية

3) الدوال ذات الأسس الكسرية

4) الدوال المثلثية

5) دالة المطلق

6) الدوال الأسية

7) الدوال الجذرية ذات الدليل الزوجي أو الفردي

8) الدوال المتقرعة

9) الدوال التي يصعب إيجاد اصفارها الا بالرسم أو طريقة نيوتن

10) الدوال المثلثية العكسية

11) الدوال اللوغاريتمية

مثال(1) مستخدما اختبار المشتقة الأولى أوجد كلا مما يلي

1) النقاط الحرجة للدالة f(x)
2) القيم القصوى للدالة f(x)
3) القيم القصوى المحلية للدالة f(x)
4) فترات التزايد والتناقص للدالة f(x)
5) فترات التقعر لأعلى ولأسفل للدالة f(x)
6) نقاط الانعطاف للدالة f(x)

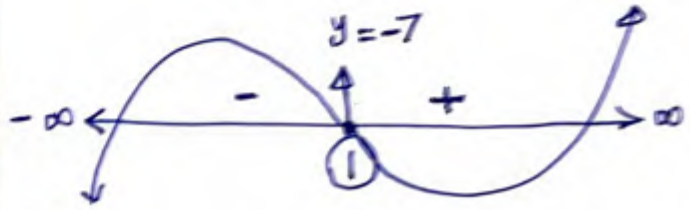
$f(x)= x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ حيث :

ثانياً دراسة $f''(x)$

$f''(x) = 6x - 6 = 0$

$6x = 6$

$x = 1$

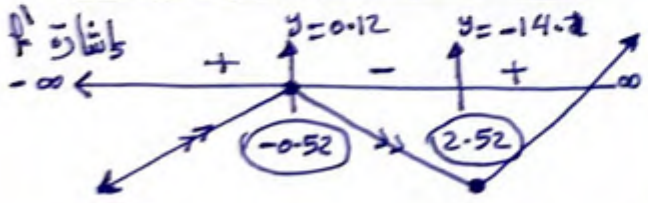


* فترات التقعر لأعلى ← $(1, \infty)$
لأسفل ← $(-\infty, 1)$
* نقطة الانقلاب ← $(1, -7)$

أولاً دراسة المشتقة الأولى $f'(x)$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 4 = 0$

$x = 2.52$ $\quad$ $x = -0.52$



1) النقاط الحرجة $x = -0.52$ ، 2.52

2) عند $x = -0.52$ تأخذ قيمة عظمى محلية $= 0.12$ وليست مطلقة
عند $x = 2.52$ " " صغرى محلية $= -14.1$ وليست مطلقة

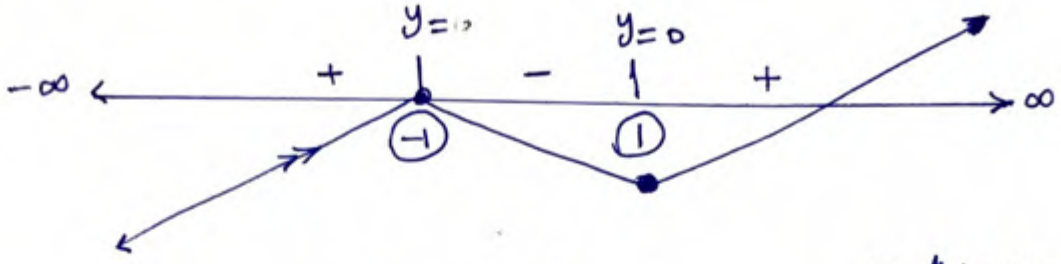
* فترات التزايد ← $(-\infty, -0.52) \cup (2.52, \infty)$
* فترات التناقص ← $(-0.52, 2.52)$

اعداد : صابر الموافي

نشاط كتابـــــــــي (1) الدالة : $f(x)= x^3 - 3x + 2$

أولاً دراسة f' :

$f'(x)= 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{x=1} \quad \boxed{x=-1}$



* القيم الحرجة ← $x=-1 \ , \ 1$

* فترات التزايد ← $(-\infty , -1) \ , \ (1 , \infty)$

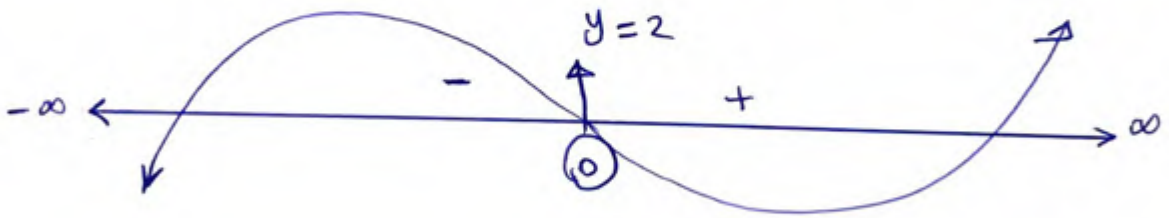
فترات التناقص ← $(-1 , 1)$

* عند $x=-1$ توجد قيمة عظمى محلية $= 4$ وليست مطلقة

عند $x=1$ " " صغرى محلية $= 0$ وليست مطلقة

ثانياً دراسة $f''(x)$:

$f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$



* فترات التقعر لأعلى ← $(0 , \infty)$

لأسفل ← $(-\infty , 0)$

* نقاط الانطواء ← $(0 , 2)$

اعداد : صابر الموافي

أداء مهمـــــــــــة (1)الدالة : $f(x)= x^3 + 2x^2 + 1$

اعتمد على نفسك

اعداد : صابر الموافي

تمرين الابداع والأبتكار (1) أثبت أن الدالة : $f(x)= x^3 + bx^2 + cx + d$

a) لها نقطتان حرجيتان ومجموعهما يساوي $\frac{-2b}{3}$ عندما $c < 0$

b) ولها قيمة عظمى محلية وصغرى محلية

(رقم 45) + (رقم 46) ص258

دراسة $F'(x)$

$$F'(x) = 3x^2 + 2bx + C = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2b)^2 - 4(3)C = 4b^2 - 12C = 4(b^2 - 3C)$$

> 0 ⊕ لأن $C < 0$

القانون لحل المعادلة الدرجة الثانية

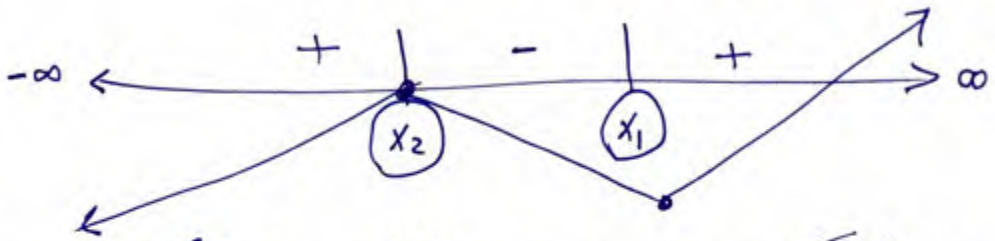
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b \pm \sqrt{4(b^2 - 3C}}{2(3)}$$

$$= \frac{-2b \pm 2\sqrt{b^2 - 3C}}{2(3)} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3C}}{3}$$ (a

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3C}}{3} \quad / \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 3C}}{3}$$

$$\Rightarrow \text{المجموع} = x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3C} - b - \sqrt{b^2 - 3C}}{3} = \frac{-2b}{3}$$

b) ∵ الدالة $F(x)$ لها نقطتان حرجيتان مختلفتان ∴ فإن



حيث أن الدالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة ومعاملها الرئيسي ⊕

عند $x_2 = \ldots$ توجد قيمة عظمى محلية وليست مطلقة

~~عند~~ عند $x_1 = \ldots$ " صغرى " " " "

مثال(2) مستخدما اختبار المشتقة الأولى أوجد كلا مما يلي

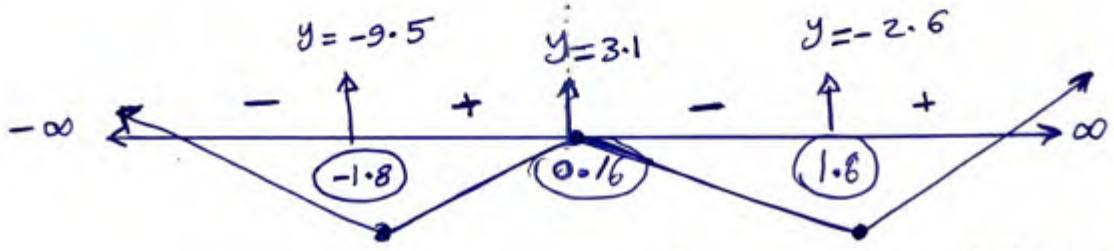
1) النقاط الحرجة للدالة f(x)
2) القيم القصوى للدالة f(x)
3) القيم القصوى المحلية للدالة f(x)
4) فترات التزايد والتناقص للدالة f(x)
5) فترات التقعر لأعلى ولأسفل للدالة f(x)
6) نقاط الأنعطاف للدالة f(x)

حيث : $f(x)= x^4 - 6x^2 + 2x + 3$

أولاً دراسة $f'(x)$

$f'(x) = 4x^3 - 12x + 2 = 0$

$x=-1.8$ $x=1.6$ $x=0.16$



* النقاط الحرجة ← $x=-1.8$ ، 0.16 ، 1.6

* فترات التزايد ← $(-1.8, 0.16)$ ، $(1.6, \infty)$

فترات التناقص ← $(-\infty, -1.8)$ ، $(0.16, 1.6)$

عند $x=-1.8$ توجد قيمة صغرى محلية $= -9.5$ وهي مطلقة

عند $x=0.16$ " " عظمى محلية $= 3.1$ ← ليست مطلقة

عند $x=1.6$ " " صغرى محلية $= -2.6$ ← ليست مطلقة

ثانياً دراسة $f''(x)$: $f''(x) = 12x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

* فترات التقعر لأعلى ← $(-\infty, -1)$ ، $(1, \infty)$

لأسفل ← $(-1, 1)$

* نقاط الأنعطاف ← $(-1, -4)$ ، $(1, 0)$

اعداد : صابر الموافي

نشاط كتابـــــــــي (2) $f(x)= x^4 - 8x^2 + 1$

اعتمد على نفسك

اعداد : صابر الموافي

أداء مهـــــــــــة (2) $f(x)= x^4 - 15x^3 - 2x^2 + 40x - 2$

اعتمد على نفسك

اعداد : صابر الحوافي

تمرين الأبداع والأبتكار (2) لكل عائلة الدوال : $f(x)= x^4 + cx^2 + 1$

أوجد جميع القيم القصوى المحلية بدلالة الثابت c

دراسة $f'(x)$:

$f'(x) = 4x^3 + 2cx = 0$

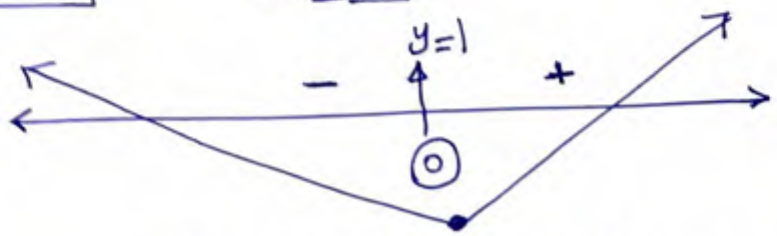
$2x(2x^2 + c) = 0$

والآن لدينا حالتان وهما

أولاً $c \geq 0$ موجبة $\Leftarrow 2x^2 + c = 0$ لا يوجد لها حل

$2x = 0$

$x = 0$



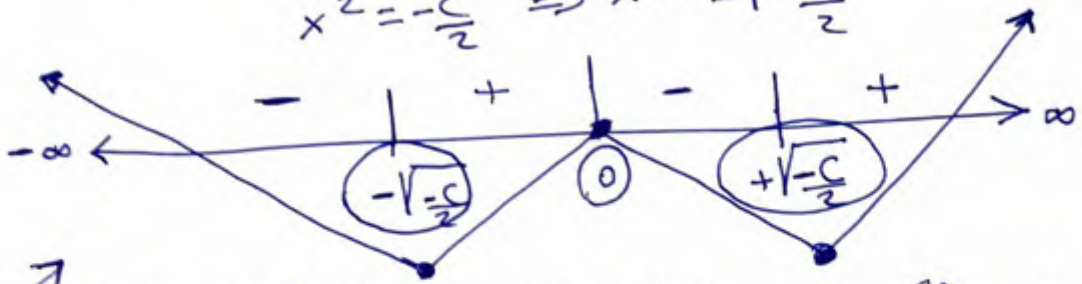
* عند $x=0$ توجد قيمة صغرى محلية $= 1$

ثانياً $c < 0$ أي سالبة

لها حلان حقيقيان مختلفان $2x^2 + c = 0$

$2x^2 = -c$

$x^2 = -\frac{c}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{2}}$



حيث $f(x)$ كثيرة حدود من الدرجة الرابعة والمعامل الرئيسي هو ⊕

عند $x=-\sqrt{-c/2}$ توجد قيمة صغرى محلية $= f(-\sqrt{-c/2})$

$x=+\sqrt{-c/2}$ " " " " $= f(+\sqrt{-c/2})$

$x = 0$ توجد قيمة عظمى محلية $= f(0) = 1$

اعداد : صابر الموافي

مثال(3) مستخدما اختبار المشتقة الأولى أوجد كلا مما يلي

1) النقاط الحرجة للدالة f(x)
2) القيم القصوى للدالة f(x)
3) القيم القصوى المحلية للدالة f(x)
4) فترات التزايد والتناقص للدالة f(x)
5) فترات التقعر لأعلى ولأسفل للدالة f(x)
6) نقاط الأنعطاف للدالة f(x)

حيث : $f(x)=\frac{x^2}{x^2-9}$

أولاً دراسة $f'(x)$

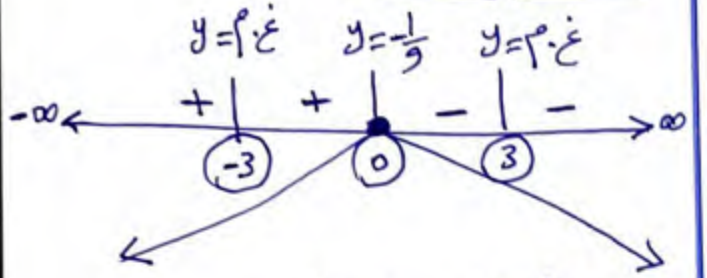
$$f'(x)=\frac{2x(x^2-9)-x^2\cdot(2x)}{(x^2-9)^2}$$

$$=\frac{2x^3-18x-2x^3}{(x^2-9)^2}=\frac{-18x}{(x^2-9)^2}$$

$-18x=0$ | $(x^2-9)^2=0$

$x=0$ | $x^2-9=0$

$x=3$, $x=-3$



* النقاط الحرجة $x=0$
* فترات التزايد ← $(-\infty,-3)\cup(-3,0)$
التناقص ← $(0,3)\cup(3,\infty)$
* عند $x=0$ توجد قيمة عظمى محلية $=-\frac{1}{9}$

ثانياً دراسة $f''(x)$

$$f''(x)=\frac{-18(x^2-9)^2+18x(2)(x^2-9)(2x)}{(x^2-9)^4}$$

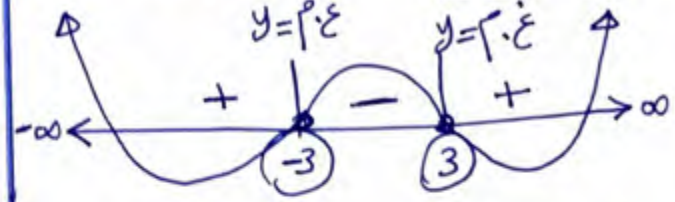
$$=\frac{-18(x^2-9)\left[x^2-9-4x^2\right]}{(x^2-9)^4}$$

$$=\frac{-18(-3x^2-9)}{(x^2-9)^3}$$

$-3x^2-9=0$ / $(x^2-9)^3=0$

لا يوجد حل

$x=\pm3$



* فترات التقعر لأعلى ← $(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$
لأسفل ← $(-3,3)$

* لا توجد نقاط انعطاف
لأن الدالة عندها غير معرفة **

اعداد : صابر الموافي

نشاط كتابـــــــي (3) $f(x)=\frac{x^2-2}{x+2}$

ثانياً دراسة $f''(x)$

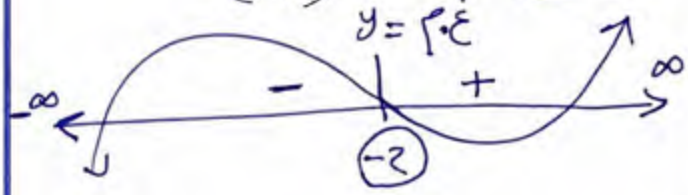
$$f''(x)=\frac{(2x+4)(x+2)^2-(x^2+4x+2)(2)(x+2)}{(x+2)^4}$$

$$\frac{(x+2)\left[(2x+4)(x+2)-2(x^2+4x+2)\right]}{(x+2)^4}$$

$$=\frac{2x^2+8x+8-2x^2-8x-4}{(x+2)^3}$$

$$=\frac{4}{(x+2)^3}$$

$(x+2)^3=0 \Rightarrow \boxed{x=-2}$



* فترات التقعر لأعلى ← $(-2,\infty)$
لأسفل ← $(-\infty,-2)$

* عند $x=-2$ ليست نقطة انعطاف
لأن الدالة عندها غير معرفة

أولاً دراسة $f'(x)$

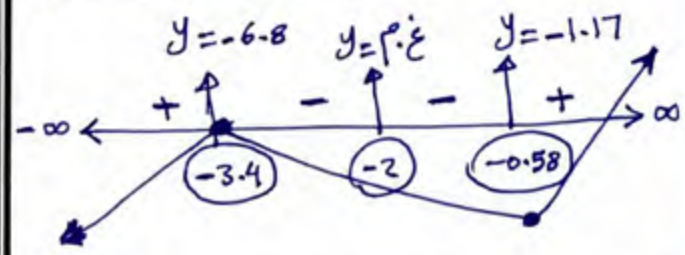
$$f'(x)=\frac{2x(x+2)-(x^2-2)}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{2x^2+4x-x^2+2}{(x+2)^2}$$

$$=\boxed{\frac{x^2+4x+2}{(x+2)^2}}$$

$x^2+4x+2=0$ | $(x+2)^2=0$

$\boxed{x=-0.58}$ $\boxed{x=-3.4}$ | $\boxed{x=-2}$



* النقاط الحرجة: $x=-3.4$ ، -0.58

* فترات التزايد ← $(-\infty,-3.4)$ ، $(-0.58,\infty)$
التناقص ← $(-3.4,-0.58)-\{-2\}$

* عند $x=-3.4$ توجد قيمة نظرية عظمى = -6.8
" " $x=-1.17$ " " صغرى محلية = -1.17

ملاحظة هامة

عند $x=-2$ الدالة غير معرفة عندها
وبالتالي ليست نقطة حرجة
ولا يوجد عندها لا عظمى ولا صغرى

اعداد : صابر الموافي

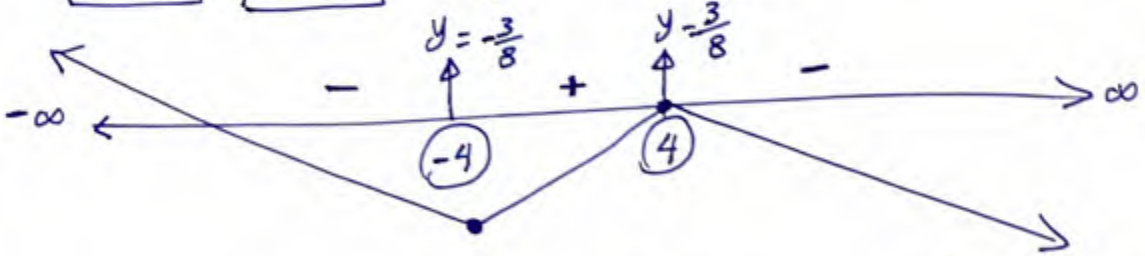
آداء مهمـــــــة (3) $f(x)=\frac{3x}{x^2+16}$

أ) دراسة $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{3(x^2+16)-3x(2x)}{(x^2+16)^2}=\frac{3x^2+48-6x^2}{(x^2+16)^2}=\frac{-3x^2+48}{(x^2+16)^2}$$

$\Rightarrow -3x^2+48=0$ / $(x^2+16)^2=0$

$x=4$ $x=-4$ / لا يوجد لها حل



* القاط الحرجة ← $x=-4$ $x=4$

* فترات التزايد : $(-4,4)$

فترات التناقص : $(-\infty,-4)\cup(4,\infty)$

* عند $x=-4$ توجد قيمة صغرى محلية $=\frac{-3}{8}$

عند $x=4$ قيمة عظمى محلية $=\frac{3}{8}$

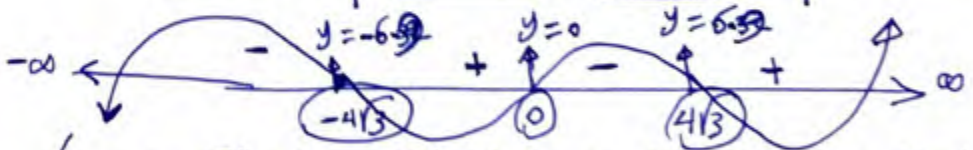
ب) دراسة $f''(x)$:

$$f''(x)=\frac{-6x(x^2+16)^2-(-3x^2+48)(2)(x^2+16)(2x)}{(x^2+16)^4}$$

$$=\frac{2x(x^2+16)[-3(x^2+16)-2(-3x^2+48)]}{(x^2+16)^4}=\frac{2x[3x^2-144]}{(x^2+16)^3}$$

$2x=0$ | $3x^2-144=0$ | $(x^2+16)^2=0$

$x=0$ | $x=4\sqrt{3}$ $x=-4\sqrt{3}$ | لا يوجد حل



* فترات التقعر لأعلى : $(-\infty,-4\sqrt{3})\cup(0,4\sqrt{3})$ ، لأسفل $(-4\sqrt{3},0)\cup(4\sqrt{3},\infty)$

* نقط الانعطاف ← $(-4\sqrt{3},-6.9)$ ، $(0,0)$ ، $(4\sqrt{3},6.9)$

اعداد : صابر الموافي

تمرين المبدع المبتكر (3) إذا كانت : $f(x)=\frac{x+c}{x^2-1}$

أوجد قيمة الثابت c التي تجعل للدالة f(x) لها

a) نقطتان حرجيتان b) نقطة حرجة واحدة c) لا توجد نقاط حرجة

d) وحدد القيم القصوى

e) أثبت أن نقاط الأنعطاف وجودها أو عدم وجودها تعتمد على قيمة c

$$f'(x)=\frac{1(x^2-1)-(x+c)(2x)}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2-1-2x^2-2cx}{(x^2-1)^2}=\frac{-x^2-2cx-1}{(x^2-1)^2}$$

$$\Rightarrow (x^2-1)^2=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow \boxed{x=\pm 1}$$

← ليست نقاط حرجة لأن الدالة f(x) غير معرفة عندها

$$\Rightarrow -x^2-2cx-1=0$$

لا توجد نقاط حرجة: $\Delta<0$, $4c^2-4<0$, $c\in(-1,1)$

توجد نقطتان حرجتان: $\Delta>0$, $4c^2-4>0$, $c\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

توجد نقطة حرجة واحدة: $\Delta=0$, $\Delta=b^2-4ac=0$, $4c^2-4(-1)(-1)=0$, $4c^2-4=0$, $\boxed{c=\pm 1}$

* دراسة تقاطع الانطاف ←

$$f''(x)=\frac{(-2x-2c)(x^2-1)^2-(-x^2-2cx-1)(2)(x^2-1)(2x)}{(x^2-1)^4}$$

$$\frac{(x^2-1)\left[(-2x-2c)(x^2-1)-4x(-x^2-2cx-1)\right]}{(x^2-1)^4}$$

$$=\frac{-2x^3+2x-2cx^2+2c+4x^3+8cx^2+4x}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{2x^3+6cx^2+6x+2c}{(x^2-1)^2}$$

← تقاطع الانطاف تعتمد على أصفار الدالة $2x^3+6cx^2+6x+2c=0$

∴ الدالة من الدرجة الثالثة فلا بد لها على حل واحد على الأقل

فإذا كان $x=\pm 1$ ← توجد نقاط انطاف

توجد نقاط انطاف ← $x\in\mathbb{R}/\{\pm 1\}$

اعداد : صابر الموافي

مستخدما اختبار المشتقة الأولى أوجد كلا مما يلي

مثـــــــــــــال(4) الدالة : $f(x)= x^{\frac{4}{3}} + 4\,x^{\frac{1}{3}}$

أولاً دراسة $f'(x)$

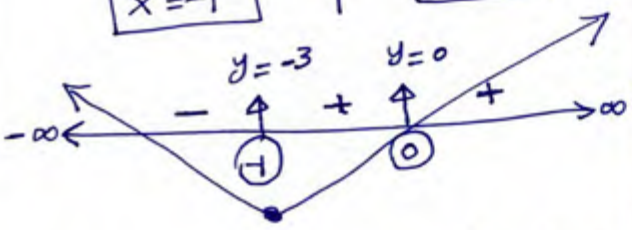
$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}\left[\, x + 1 \,\right]$$

$$= \frac{4/3(x+1)}{x^{2/3}}$$

$x+1=0$ | $x^{\frac{2}{3}}=0$

$x=-1$ | $x=0$



* نقاط الحرجة $x=-1$, $x=0$

* فترات التزايد $\leftarrow (-1,0)\,,\,(0,\infty)$

فترات التناقص $\leftarrow (-\infty,-1)$

* عند $x=-1$ توجد قيمة عظمى محلية وقيمتها -3

ثانياً دراسة $f''(x)$

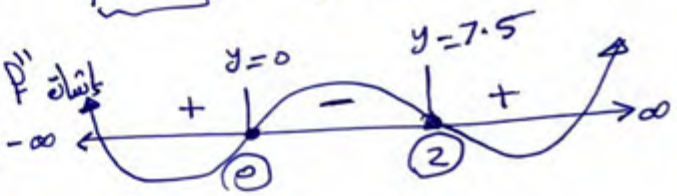
$$f''(x) = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{8}{9}x^{-5/3}$$

$$= \frac{4}{9}x^{-5/3}\left[\, x - 2 \,\right]$$

$$= \frac{4/9(x-2)}{x^{5/3}}$$

$x-2=0$ | $x^{5/3}=0$

$x=2$ | $x=0$



* فترات التقعر لأعلى $\leftarrow (-\infty,0)\,,\,(2,\infty)$

لأسفل $\leftarrow (0,2)$

نقاط الانطفاء $\leftarrow (0,0)\,,\,(2,7.5)$

اعداد : صابر الموافي

نشاط كتابـــــــــــي (4) الدالة : $f(x)= x^{\frac{3}{4}} - 4\ x^{\frac{1}{4}}$

اعتمد على نفسك

اعداد : صابر الموافي

أداء مهمـــــــــة (4) الدالة : $f(x)= x + 3(1-x)^{\frac{1}{3}}$

أولاً دراسة $f'(x)$

$$f'(x) = 1 + (1-x)^{-\frac{2}{3}}(-1)$$

$$= 1 - (1-x)^{-\frac{2}{3}}$$

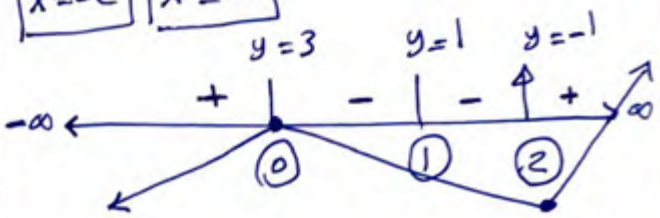
$$= 1 - \frac{1}{(1-x)^{2/3}}$$

$$= \frac{(1-x)^{2/3} - 1}{(1-x)^{2/3}}$$

$(1-x)^{\frac{2}{3}} = 1$ | $(1-x)^{2/3} = 0$

$1-x = \pm 1$ | $x = 1$

$x = -2$ | $x = 0$



* النقاط الحرجة ← $x=0$ | $x=1$ | $x=2$

* مترات التزايد ← $(-\infty, 0)$, $(2, \infty)$

مترات التناقص ← $(0, 2)$

* عند $x=0$ توجد قيمة عظمى محلية $= 3$

عند $x=2$ توجد قيمة صغرى محلية $= -1$

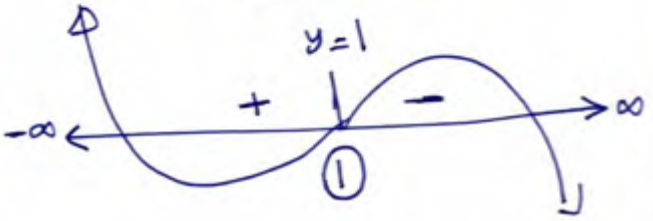
ثانياً دراسة $f''(x)$

$$f''(x) = \frac{+1\left(\frac{2}{3}\right)(1-x)^{-\frac{1}{3}}}{(1-x)^{4/3}}$$

$$= \frac{2/3}{(1-x)^{5/3}}$$

$(1-x)^{5/3} = 0$

$x = 1$



* مترات التقعر لأعلى ← $(-\infty, 1)$

لأسفل ← $(1, \infty)$

* نقاط الانعطاف ← $(1, 1)$

اعداد : صابر الموافي

للطالب المبدع والمبتكر (4) الدالة $f(x) = (x^{\frac{2}{5}} - 3x^{\frac{1}{5}})^2$

أولاً نقوم بتبسيط الدالة

$$f(x) = x^{4/5} - 6x^{3/5} + 9x^{2/5}$$

$$f'(x) = \frac{4}{5}x^{-1/5} - \frac{18}{5}x^{-2/5} + \frac{18}{5}x^{-3/5}$$

$$\frac{2}{5}x^{-3/5}\left[2x^{2/5} - 9x^{1/5} + 9\right]$$

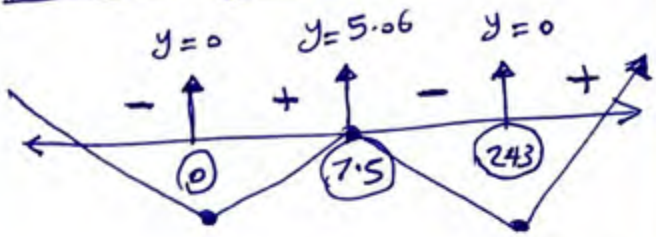
$$= \frac{2/5\left[2x^{2/5} - 9x^{1/5} + 9\right]}{x^{3/5}}$$

$2x^{2/5} - 9x^{1/5} + 9 = 0 \quad | \quad x^{3/5} = 0$

$x^{1/5} = 3 \quad | \quad x^{1/5} = 3/2$

$x = (3)^5 \qquad x = (\frac{3}{2})^5$

$x = 243$ | $x = 7.5$ | $x = 0$



* نقاط الحرجة ← $x=0$ | $x=7.5$ | $x=243$

* فترات التزايد ← $(0, 7.5) \cup (243, \infty)$

فترات التناقص ← $(-\infty, 0) \cup (7.5, 243)$

* عند $x=0$ توجد قيمة صغرى محلية $= 0$

$x = 7.5$ توجد قيمة عظمى محلية =

$x = 243$ " " صغرى محلية =

ثانياً دراسة $f''(x)$

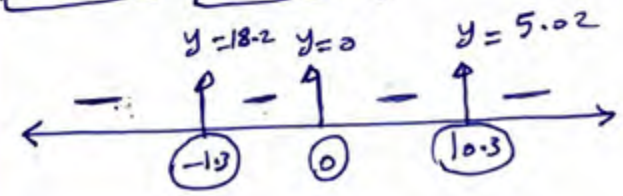
$$f''(x) = -\frac{4}{25}x^{-6/5} + \frac{36}{25}x^{-7/5} - \frac{54}{25}x^{-8/5}$$

$$-\frac{2}{25}x^{-8/5}\left[2x^{2/5} - 18x^{1/5} + 27\right]$$

$$= \frac{-2/25\left[2x^{2/5} - 18x^{1/5} + 27\right]}{x^{8/5}}$$

$2x^{2/5} - 18x^{1/5} - 27 = 0 \quad | \quad x^{8/5} = 0$

$x = 10.3$ | $x = -1.3$ | $x = 0$



* فترات التقعر لأعلى ← لا يوجد

لأسفل $(-\infty, \infty)$

* لا يوجد لها نقاط انقلاب

اعداد : صابر الموافي

مثـــــــــال(5) الدالة : $f(x)= sinx + cosx$

ثانياً دراسة $f''(x)$

$f''(x) = -sinx - cosx$

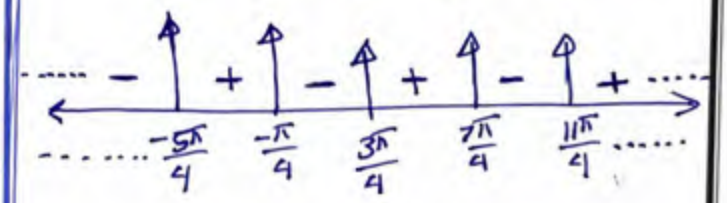
$cosx = -sinx$

$Tanx = -1$

$x = \frac{3\pi}{4} + n\pi$

حيث n عدد صحيح

$\ldots, \frac{-5\pi}{4}, \frac{-\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \ldots$



* فترات التقعر لأعلى ←

$\ldots \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right), \left(\frac{11\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}\right) \ldots$

لأسفل ←

$\left(\frac{-\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right), \left(\frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}\right) \ldots$

نقاط الانقلاب ص

$x = \frac{3\pi}{4} + n\pi$

حيث n عدد صحيح

أولاً دراسة $f'(x)$

$f'(x) = cosx - sinx = 0$

$\frac{cosx}{cosx} = \frac{sinx}{cosx}$

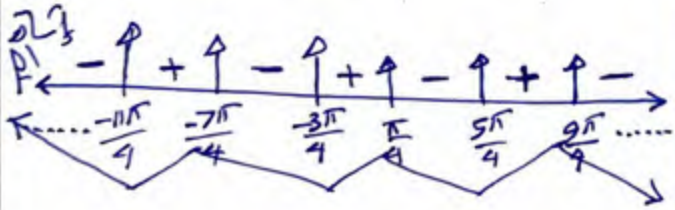
$Tanx = 1$

$x = Tan^{-1}(1) = 45^\circ$

$x = \frac{\pi}{4} + n\pi$

$x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \ldots$

$\frac{-3\pi}{4}, \frac{-7\pi}{4}, \frac{-11\pi}{4}, \ldots$



* نقاط الحرجة ← $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$

حيث n عدد صحيح

* فترات التزايد ← $\left[\frac{n\pi}{2}, \frac{n\pi}{4}\right]$

زوجي فردي

استنتاج ← $\left[\frac{n\pi}{4}, \frac{n\pi}{4}\right]$

فردي زوجي

قيم عظمى ← $x = \frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}, \ldots$

قيم صغرى ← $x = \frac{5\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \frac{21\pi}{4}, \ldots$

اعداد : صابر الموافي

نشاط كتابـــــــــي(5) الدالة : $f(x)= sinx\ cosx$ في $[0\ ,\ 2\pi]$

أولاً دراسة $f'(x)$

$f'(x) = \cos x \cos x + \sin x \cdot (-\sin x)$

$= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x = 0$

$2x = \frac{n\pi}{2}$

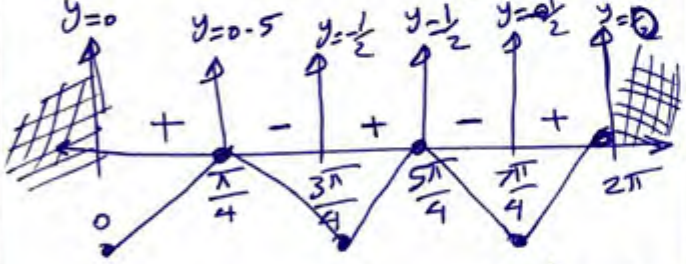
حيث n عدد فردي

$n=1 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$n=3 \Rightarrow 2x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$

$n=5 \Rightarrow 2x = \frac{5\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4}$

$n=7 \Rightarrow 2x = \frac{7\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{4}$



* نقاط الحرجة ←

$x=\frac{\pi}{4}$ | $x=\frac{3\pi}{4}$ | $x=\frac{5\pi}{4}$ | $x=\frac{7\pi}{4}$

فترات التزايد ← $(0\ ,\frac{\pi}{4})\ ,\ (\frac{3\pi}{4}\ ,\frac{5\pi}{4})$

$(\frac{7\pi}{4}\ ,2\pi)$

التناقص ← $(\frac{\pi}{4}\ ,\frac{3\pi}{4})\ ,\ (\frac{5\pi}{4}\ ,\frac{7\pi}{4})$

$x=0\ ,\ \frac{3\pi}{4}\ ,\ \frac{7\pi}{4}$ عند قيمة صغرى محلية وقيمتها $-\frac{1}{2}$

$x=\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{5\pi}{4}\ ,\ 2\pi$ عند قيمة عظمى محلية وقيمتها $\frac{1}{2}$

ثانياً دراسة $f''(x)$

$f''(x) = -\sin(2x)\,(2) = 0$

$\sin(2x) = 0$

$2x = n\pi$

حيث n عدد صحيح

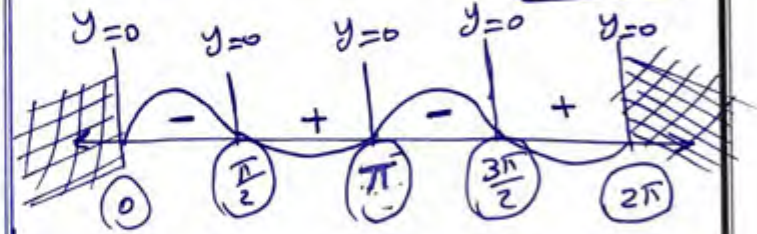
$n=0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0$

$n=1 \Rightarrow 2x=\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$

$n=2 \Rightarrow 2x=2\pi \Rightarrow x=\pi$

$n=3 \Rightarrow 2x=3\pi \quad x=\frac{3\pi}{2}$

$n=4 \Rightarrow 2x=4\pi \quad x=2\pi$



* فترات التقعر لأعلى $(0\ ,\frac{\pi}{2})\ ,\ (\pi\ ,\frac{3\pi}{2})$

لأسفل ← $(\frac{\pi}{2}\ ,\pi)\ ,\ (\frac{3\pi}{2}\ ,2\pi)$

* نقاط الانقلاب ←

$(0\ ,0)\ ,\ (\frac{\pi}{2}\ ,0)\ ,\ (\pi\ ,0)\ ,\ (\frac{3\pi}{2}\ ,0)$

//

اعداد : صابر الموافي

أداء مهمـــــــــــة (5) الدالة : $f(x)=\sqrt{3}\,sinx + cosx$

اعتمد على نفسك

تمرين مثال (5)

اعداد : صابر الموافي

للطالب المبدع والمبتكر(5) الدالة : $f(x)= sinx - 2\ sin(2x)$

أولاً دراسة $f(x)$

$f(x) = \sin x - 4\sin x \cos x$

$f(x) = \sin x\,(1 - 4\cos x)$

$f'(x) = \cos x(1 - 4\cos x) + \sin x(4\sin x)$

$= \cos x - 4\cos^2 x + 4\sin^2 x$

$= \cos x - 4\cos^2 x + 4(1 - \cos^2 x)$

$= \cos x - 4\cos^2 x + 4 - 4\cos^2 x$

$= -8\cos^2 x + \cos x + 4 = 0$

$\cos x = 0.7$ $\quad$ $\cos x = -0.6$

$x_1 = 45.5 + 2n\pi$

$x_2 = 314.4 + 2n\pi$

$x_3 = 126.8 + 2n\pi$

$x_4 = 233.1 + 2n\pi$

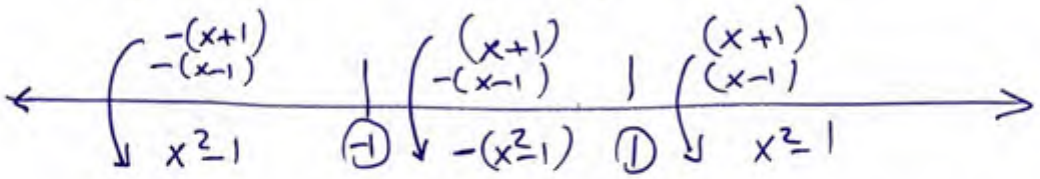
ثانياً دراسة $f''(x)$ اعتمد على تفسك

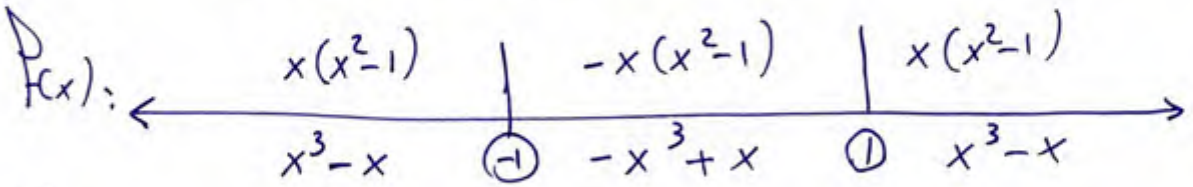
كلها نقاط حرجة
وتستطيع رسم خط الإشارات
والحصول على فترات التزايد والتناقص
والقيم القصوى

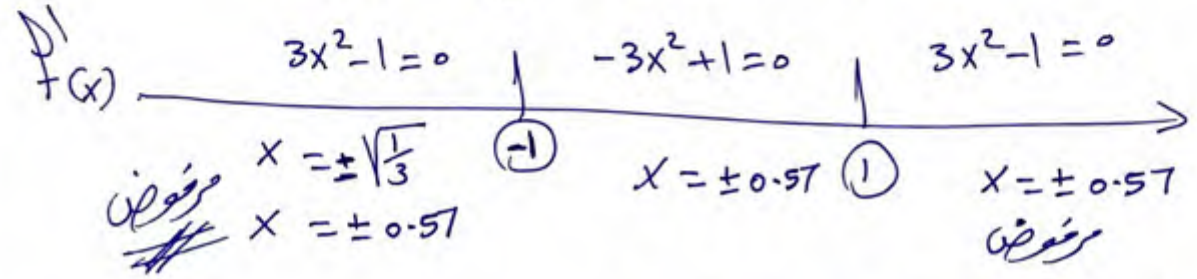
اعداد : صابر الموافي

مثـــــــــــال(6) الدالة: $f(x)= x\,|x^2-1|$

$$x|x^2-1| = x|(x-1)(x+1)| = x|x-1||x+1|$$



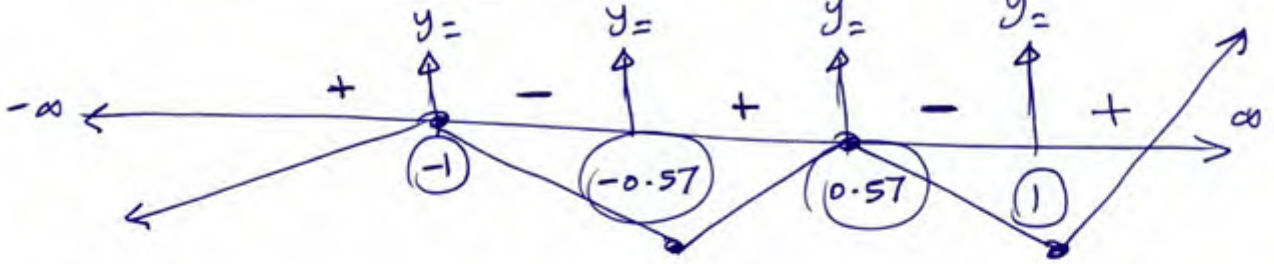




~~مرفوض~~ $x=\pm 0.57$

والدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x=\pm 1$

$\Leftarrow$ نقاط الحرجة هي $\boxed{x=\pm 1}$ $\boxed{x=\pm 0.57}$



* نقاط الحرجة ← $\boxed{x=-1}$ $\boxed{x=-0.57}$ $\boxed{x=0.57}$ $\boxed{x=1}$

* فترات التزايد ← $(-\infty,-1)\cup(-0.57,0.57)\cup(1,\infty)$

الفترات ← $(-1,-0.57)\cup(0.57,1)$

* توجد قيم عظمى محلية ← $\boxed{x=-1}$ $\boxed{x=0.57}$

* " " صغرى محلية ← $\boxed{x=-0.57}$ $\boxed{x=1}$

وبنفس الطريقة تقوم بدراسة $f''(x)$ ⟸

اعداد : صابر الموافي

نشاط كتاب(6) الدالة : $f(x)= |x^2 - 1|$

اعتمد على نفسك

اعداد : صابر الموافي

أداء مهمـــــــــــة (6) الدالة : $f(x)= x^2|x|$

اعتمد على نفسك

اعداد : صابر الموافي

مثـــــــــال(7) الدالة: $f(x)= e^{-x}\sin x$

أولاً دراسة $f'(x)$

$$f'(x) = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x$$

$$= e^{-x}[\cos x - \sin x] = 0$$

$e^{-x} = 0$ مرفوض | $\cos x - \sin x = 0$

$\cos x = \sin x$

$\tan x = 1$

وباقي الحل اتفرج على حل مثال (5) ص 44

ثانياً دراسة $f''(x)$

$$f''(x) = -e^{-x}[\cos x - \sin x] + e^{-x}[-\sin x - \cos x]$$

$$= e^{-x}[-\cos x + \sin x - \sin x - \cos x]$$

$$e^{-x}[-2\cos x]$$

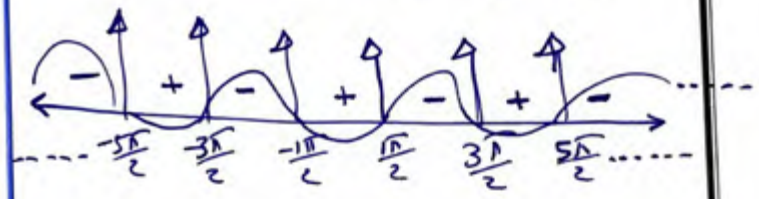
$e^{-x} = 0$ مرفوض | $-2\cos x = 0$

$\cos x = 0$

$x = \frac{n\pi}{2}$

حيث n عدد فردي

$x = \ldots, \frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$



فترات التقعر لأعلى ←

$\ldots\left(\frac{5\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right), \left(\frac{-3\pi}{2}, \frac{-5\pi}{2}\right)$

فترات التقعر لأسفل

$\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{-3\pi}{2}\right), \ldots$

نقاط الانعطاف

$\left(\frac{n\pi}{2}, f\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$

حيث n عدد فردي

اعداد : صابر الموافي

نشاط كتاب(7) الدالة : $f(x)= x\,e^{-2x}$

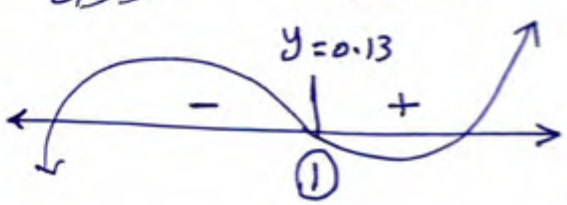
ثانياً دراسة $f''(x)$

$$f''(x) = -2e^{-2x}[1-2x] + e^{-2x}(-2)$$

$$= e^{-2x}[-2+4x-2]$$

$$= e^{-2x}[4x-4] = 0$$

$e^{-2x} = 0$ مرفوض | $4x-4=0$ ، $x=1$



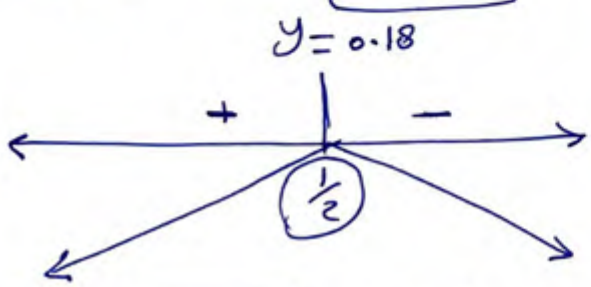
* فترات التقعر لأعلى ← $(1, \infty)$
* فترات التقعر لأسفل ← $(-\infty, 1)$
* نقطة الانقلاب $(1, 0.13)$

أولاً دراسة $f'(x)$

$$f'(x) = 1\,e^{-2x} + x \cdot e^{-2x}(-2)$$

$$= e^{-2x}[1-2x] = 0$$

$e^{-2x} = 0$ مرفوض | $1-2x=0$ ، $x=\frac{1}{2}$



* النقاط الحرجة $x=\frac{1}{2}$
* فترات التزايد ← $(-\infty, \frac{1}{2})$
* فترات التناقص ← $(\frac{1}{2}, \infty)$
* عند $x=\frac{1}{2}$ توجد قيمة عظمى محلية

اعداد : صابر الموافي

أداء مهمـــــــــــة (7) الدالة : $f(x)= e^{-x^2}$

اعتمدي نفسك

اعداد : صابر الموافي

للطالب المبدع والمبتكر(7) الدالة : اوجد جميع القيم القصوى ونقاط الأنعطاف للدالة

$$f(x) = \sinh x$$

$f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 0$

$e^x + e^{-x} = 0$ بالقيد في e^x

$\Rightarrow e^{2x} + 1 = 0$

$e^{2x} = -1$

لا يوجد حل

اشارة f'

+ + + + + + +

* لا توجد نقاط حرجة

* فترات التزايد $\leftarrow (-\infty, \infty)$

ولا يوجد فترات تناقص

ولا يوجد قيم لأعلى ولأدنى

$f''(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0$ تابع مشتقة $f'(x)$

$e^x - e^{-x} = 0$

بالقيد في e^x

$e^{2x} - 1 = 0$

$e^{2x} = 1$

$2x = 0$

$x = 0$

اشارة f''

$y=0$

$-$ $+$

0

* فترات التقعر لأعلى $\leftarrow (0, \infty)$

ولأسفل $\leftarrow (-\infty, 0)$

* نقاط الانعطاف $\leftarrow (0, 0)$

اعداد : صابر الموافي

مثـــــــــــــال(8) الدالة : $f(x)= x\sqrt{x^2-4}$

أولاً دراسة $f'(x)$

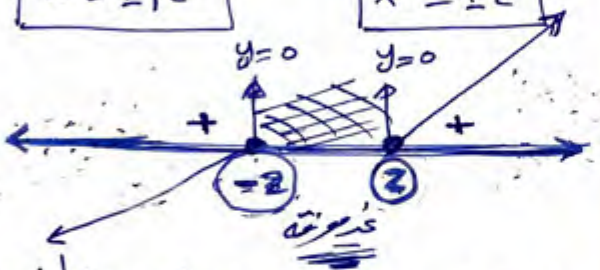
$$f'(x) = \sqrt{x^2-4} + x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}$$

$$= \frac{x^2-4+x^2}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$= \frac{2x^2-4}{\sqrt{x^2-4}}$$

$2x^2-4=0$ | $\sqrt{x^2-4}=0$

$x=\pm\sqrt{2}$ | $x=\pm 2$



غير معرفة

* النقاط الحرجة ← $\pm\sqrt{2}$ ، ± 2 (لأنهم نقاط طرفيه)

* فترات التزايد $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$

، $\pm\sqrt{2}$ فترات تناقص

* عند $x=-2$ عظمى محلية ، القيمة $=0$

$x=2$ صغرى محلية ، القيمة $=0$

ثانياً دراسة $f''(x)$

$$f''(x) = \frac{4x\sqrt{x^2-4} - (2x^2-4)\frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4}$$

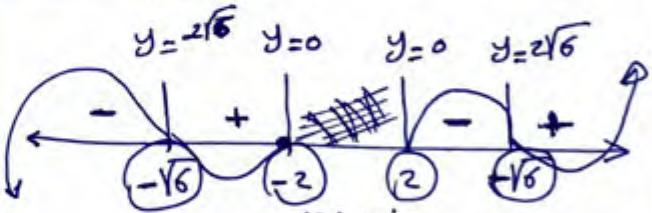
$$\frac{4x(x^2-4)-x(2x^2-4)}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}$$

$$\frac{4x^3-16x-2x^3+4x}{(x^2-4)^{3/2}} = \frac{2x^3-12x}{(x^2-4)^{3/2}}$$

$2x^3-12x=0$ | $(x^2-4)^{3/2}=0$

$2x(x^2-6)=0$

$x=0$ | $x=\pm\sqrt{6}$ | $x=2$ ، $x=-2$



غير معرفة

* فترات التقعر لأعلى ← $(-\sqrt{6},-2)\cup(\sqrt{6},\infty)$

لأسفل ← $(-\infty,-\sqrt{6})\cup(2,\sqrt{6})$

* نقاط الانقلاب ← $(-\sqrt{6},-2\sqrt{6})$

$(\sqrt{6},2\sqrt{6})$

اعداد : صابر الموافي

نشاط كتابي(8) الدالة : $f(x)= \sqrt{x^3+3x^2}$

ثانياً دراسة $f''(x)$

$$f''(x)=\frac{(6x+6)2\sqrt{x^3+3x^2}-(3x^2+6x)\frac{2(3x^2+6x)}{2\sqrt{x^3+3x^2}}}{4(x^3+3x^2)}$$

$$\frac{12(x+1)(x^3+3x^2)-(3x^2+6x)(3x^2+6)}{4(x^3+3x^2)^{3/2}}=0$$

ثم نوجد قيم x وتستخدم خط الإشارات لإيجاد فترات التقعر لأعلى ولأسفل ونقاط الانقلاب

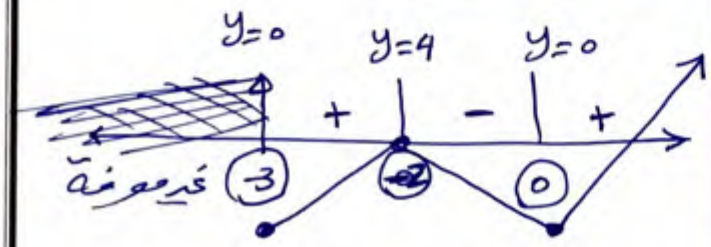
أولاً دراسة $f'(x)$

$$f'(x)=\frac{3x^2+6x}{2\sqrt{x^3+3x^2}}$$

$3x^2+6x=0$ | $\sqrt{x^3+3x^2}=0$

$x=0$ $x=-2$ | $x^3+3x^2=0$

$x=0$ $x=-3$



* النقاط الحرجة $x=-2$ $x=0$

* فترات التزايد $(-3,-2)\cup(0,\infty)$

فترات التناقص $(-2,0)$

* عند $x=-3$ توجد قيمة صغرى محلية $=0$ وطبيعتها
عند $x=-2$ ~ ~ ~ عظمى محلية $=4$ وطبيعتها
عند $x=0$ توجد قيمة صغرى محلية $=0$ وطبيعتها

اعداد : صابر الموافي

أداء مهمـــــــــة (8) الدالة : $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

أولاً دراسة $f(x)$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-x\cdot\frac{1(2x)}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$=\frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}$$

$(x^2+1)^{3/2}=0$

لا يوجد أصفار

+ + + + +

* لا توجد 1) نقاط حرجة
2) عظمى محلية
3) صغرى محلية

ومنه الدالة تزايدية في $(-\infty,\infty)$

ثانياً دراسة $f(x)$

$$f'(x)=\frac{-1(\frac{3}{2})(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(2x)}{(x^2+1)^3}$$

$$=\frac{-3x}{(x^2+1)^{5/2}}$$

$-3x=0$ | $(x^2+1)^{5/2}=0$

$x=0$ | $x^2+1=0$

لا يوجد أصفار

$y=0$

+ | −

0

* فترات التقعر لأعلى $(-\infty,0)$
لأسفل $(0,\infty)$

* نقاط الانعطاف $(0,0)$

اعداد : صابر الموافي

للطالب المبدع والمبتكر(8) الدالة : على فرض ان $s(t) = \sqrt{t+4}$ هي اجمالي مبيعات منتج ما بعد مرور t شهر وضح أن $\bar{s}(t) > 0$ ووضح أنه باستخدام المصطلحات التجارية لا يكون $\bar{s}(t) < 0$

أولاً :: t تعبر عن الزمن $\Leftarrow t \geq 0$

$$s(t) = \sqrt{t+4}$$

$$\bar{s}(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+4}}$$ الدالة تزايدية فيما يلي

$$\because t \geq 0$$

$$\Rightarrow \bar{s}(t) \geq 0$$

ثانياً :: $\bar{s}(t)$ تعبر عن معدل الاجمالي مبيعات المنتج

خلال عشر أن تكون $\bar{s}(t) < 0$

$\bar{s}(t)$ هي تزايدية ولا يشترط أن تكون متناقصة دائماً

اعداد : صابر الموافي

مثـــــــــــال(9) الدالة : $f(x)= \sqrt[3]{2x^2-1}$

$f'(x)$ أولاً دراسة

$(2x^2-1)^{\frac{1}{3}}$

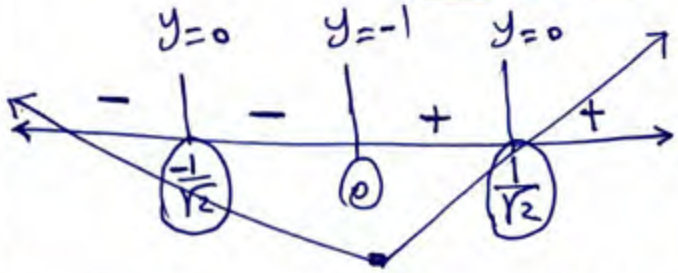
$f'(x) = \frac{1}{3}(4x)(2x^2-1)^{-\frac{2}{3}}$

$= \frac{4/3\,x}{(2x^2-1)^{2/3}}$

$\frac{4}{3}x=0$ | $(2x^2-1)^{\frac{2}{3}}=0$

$x=0$ | $2x^2-1=0$

$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$



* نقاط الحرجة ⟸ $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x=0$, $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

* فترات التزايد ← $(0,\infty)$

فترات التناقص ← $(-\infty,0)$

* بما أن $x=0$ تنتمي لمجال الدالة ولا تغير إشارتها عندها ، فإن النقطة $(0,-1)$ ليست نقطة حرجة

$f''(x)$ ثانياً دراسة

$f''(x) = \frac{4/3\,(2x^2-1)^{2/3} - \frac{4}{3}x\cdot\frac{2}{3}(2x^2-1)^{-\frac{1}{3}}\cdot 4}{(2x^2-1)^{4/3}}$

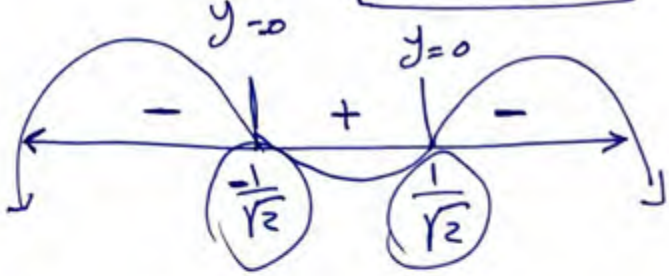
$= \frac{\frac{4}{3}(2x^2-1)^{-\frac{1}{3}}\left[2x^2-1-\frac{8}{3}x^2\right]}{(2x^2-1)^{4/3}}$

$= \frac{4/3\left(-\frac{2}{3}x^2-1\right)}{(2x^2-1)^{5/3}}$

$-\frac{2}{3}x^2-1=0$ لا يوجد حل | $(2x^2-1)^{\frac{5}{3}}=0$

$2x^2-1=0$

$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$



* فترات التقعر لأعلى ← $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

لأسفل

$\left(-\infty,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\infty\right)$

* نقاط الانقلاب

$\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},0\right)$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$

اعداد : صابر الموافي

نشاط كتابـــــــــــي(9) الدالة : $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2}$

اعتمد على نفسك

اعداد : صابر الموافي

أداء مهمـــــــــــة (9) الدالة : $f(x)=\sqrt[3]{2x^2-2x}$

اعتمدك تقسك

اعداد : صابر الموافي

للطالب المبدع والمبتكر(9) الدالة : $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2+2x}$

اعتمد على نفسك

اعداد : صابر الموافي

مثـــــــــــــال(10) الدالة : $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-1 & , x<0\\ x^2-4x+3 & , x\geq 0\end{cases}$

ثانياً دراسة f''

$f''(x)$: 2 | 2 ، 0

∴ الدالة $f(x)$ غير قابلة للاشتقاق عند $x=0$

⇐ فترات التقعر لأعلى $(0,\infty)$

لأسفل $(-\infty,0)$

ولا توجد نقاط انعطاف

$f'(x)$: $2x+2$ | $2x-4$ ، 0

$2x+2=0$ ، $2x-4=0$

$x=-1$ ، $x=2$

ودراسة قابلية الاشتقاق عند $x=0$ أو دراسة الاتصال $f(x)$

$\lim_{x\to 0^+} x^2-4x+3=3$

$\lim_{x\to 0^-} x^2+2x-1=-1$

الدالة غير متصلة عند $x=0$ ⇐ غير قابلة للاشتقاق

إشارة $f'(x)$: $y=-2$ (−) ، $y=3$ (+) ، $y=-1$ (−) ، (+) ؛ -1 ، 0 ، 2

* النقاط الحرجة $x=-1$ ، $x=0$ ، $x=2$

* فترات التزايد ⇐ $(-1,0)\cup(2,\infty)$

التناقص ⇐ $(-\infty,-1)\cup(0,2)$

* عند $x=-1$ صغرى محلية = -2 ومطلقة

$x=0$ عظمى محلية = 3

$x=2$ صغرى محلية = -1

اعداد : صابر الموافي

نشاط كتابـــــــــــي(10) الدالة : $f(x)=\begin{cases}2x^2+2x-5 \ , \ x<0\\ 2x^2-4x+2 \ , \ x\geq 0\end{cases}$

اعتمد على نفسك

اعداد : صابر الموافي

أداء مهمـــــــــــة (10) الدالة : $f(x)=\begin{cases}2x^2+4x-4 \ , \ x<0\\ 2x^2-4x+6 \ , \ x\geq 0\end{cases}$

اعتمد على نفسك

اعداد : صابر الموافي

للطالب المبدع والمبتكر(10) الدالة : $f(x) = \begin{cases} \sin x & , -\pi < x < \pi \\ -\tan x & , |x| \geq \pi \end{cases}$

$|x| > \pi$
$x < -\pi$ أو $x > \pi$

دراسة إشارة $f'(x)$ فقط

$f(x)$: $-\tan x$ | $\sin x$ | $-\tan x$ عند $-\pi$ و π

$f'(x)$: $-\sec^2 x = 0$ | $\cos x = 0$ | $-\sec^2 x = 0$
لا يوجد | $x = \frac{n\pi}{2}$ | لا يوجد
عند $-\pi$ و π

حيث n عدد صحيح
$x = \frac{\pi}{2}$ / $\frac{-\pi}{2}$

دراسة الاتصال عند $x = -\pi$ للدالة $f(x)$

$\lim_{x \to -\pi^+} \sin x = 0$

$\lim_{x \to -\pi^-} -\tan x = 0$

$f(-\pi) = 0$

$\Rightarrow f'(-\pi^+) = \cos x = -1$

$f'(-\pi^-) = -\sec^2 x = -1$

الدالة قابلة للاشتقاق عند $x = -\pi$

دراسة الاتصال عند $x = \frac{\pi}{2}$ للدالة

$\lim_{x \to \pi^+} -\tan x = 0$

$\lim_{x \to \pi^-} \sin x = 0$

$f'(\pi^+) = -\sec^2 x = -1$

$f'(\pi^-) = \cos x = -1$

الدالة قابلة للاشتقاق عند $x = \frac{\pi}{2}$

الدالة متصلة

إشارة $f'(x)$: $-\infty$ | $-$ | $y=-1$ عند $\frac{-\pi}{2}$ | $+$ | $y=1$ عند $\frac{\pi}{2}$ | $-$ | ∞

$x = -\frac{\pi}{2}$ $\quad$ $x = \frac{\pi}{2}$

* النقاط الحرجة ← $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

* فترات التزايد ← $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

فترات التناقص ← $(-\infty, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \infty)$

* عند $x = -\frac{\pi}{2}$ ← توجد قيمة عظمى محلية $= -1$

عند $x = -\frac{\pi}{2}$ ← توجد قيمة صغرى محلية $= 1$

اعداد : صابر الموافي

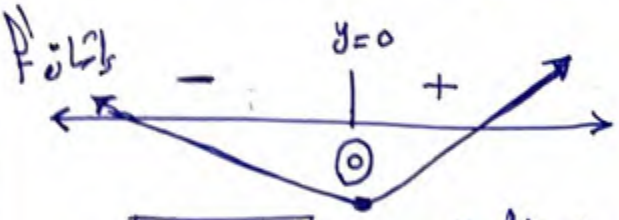
مثـــــــــــال(11) الدالة : $f(x)= \tan^{-1}(x^2)$

أولاً دراسة $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{1\,(2x)}{1+x^4} = \frac{2x}{1+x^4}$$

$$\Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

إشارة f'



* نقاط الحرجة ← $\boxed{x=0}$

* فترات التزايد ← $(0,\infty)$

فترات التناقص ← $(-\infty,0)$

* عند $x=0$ توجد نقطة صغرى محلية $= 0$

ثانياً دراسة $f''(x)$

$$f''(x) = \frac{2(1+x^4)-2x(4x^3)}{(1+x^4)^2}$$

$$= \frac{2+2x^4-8x^4}{(1+x^4)^2}$$

$$= \frac{-6x^4+2}{(1+x^4)^2}$$

$$\Rightarrow -6x^4+2=0$$

$$x^4 - \frac{1}{3} = 0$$

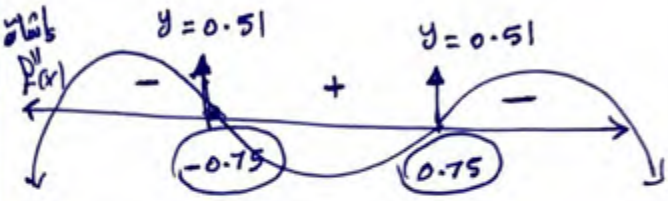
$$\left(x^2-\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)\left(x^2+\sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)=0$$

$$x^2 = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

$$x = \pm\sqrt[4]{\tfrac{1}{3}}$$

تابع الحل

إشارة f''



* فترات التقعر لأعلى ←

$(-0.75,0.75)$

تقعر لأسفل ⇐

$(-\infty,-0.75)\cup(0.75,\infty)$

* نقاط الانطواء هي ←

$(-0.75,0.51)\cup(0.75,0.51)$

اعداد : صابر الموافي

نشاط كتابـــــــــي(11) الدالة : $f(x) = \sin^{-1}(x)$

ثانياً دراسة $f''(x)$

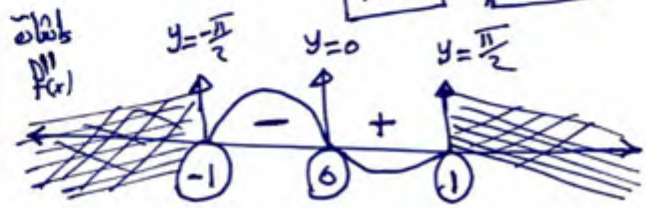
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f''(x) = -1 \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)}{1-x^2} = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

$\Rightarrow$ $x = 0$ | $(1-x^2)^{3/2} = 0$

$1 - x^2 = 0$

$x = 1$ $x = -1$



* فترات التقعر لأسفل ← $(-1, 0)$
* فترات التقعر لأعلى ← $(0, 1)$
* نقاط الانعطاف ← $(0, 0)$

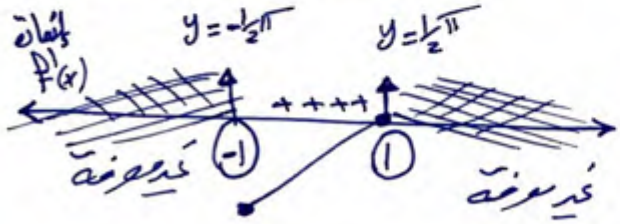
أولاً دراسة $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\Rightarrow \sqrt{1-x^2} = 0$

$1 - x^2 = 0$

$x = 1$ $x = -1$



* النقاط الحرجة : لا يوجد
* فترات التزايد ← $(-1, 1)$
* فترات التناقص ← لا يوجد
* عند $x = -1$ توجد قيمة صغرى محلية ومطلقة $= -\frac{\pi}{2}$
* عند $x = 1$ " " قيمة عظمى محلية ومطلقة $= \frac{\pi}{2}$

اعداد : صابر الموافي

أداء مهمـــــــــــة (11) الدالة : $f(x)= \tan^{-1}(\frac{1}{x^2-1})$

اعتمد على نفسك

للطالب المبدع والمبتكر(11) الدالة : زاوية هدف خارجي تم تسديده من علامة الجزاء على بعد قدم x وهي $A = \tan^{-1}\left(\frac{29.25}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{10.75}{x}\right)$

أوجد x التي تجعل الزاوية A اكبر ما يمكن

$$A'(x) = \frac{\frac{-29.25}{x^2}}{1+\left(\frac{29.25}{x}\right)^2} - \frac{\frac{-10.75}{x^2}}{1+\left(\frac{10.75}{x}\right)^2} = 0$$

$$\frac{\frac{-29.25}{x^2}\cdot x^2}{\frac{x^2+(29.25)^2}{x^2}} - \frac{\frac{-10.75}{x^2}\cdot x^2}{\frac{x^2+(10.75)^2}{x^2}} = 0$$

$$\frac{+29.25}{x^2+(29.25)^2} = \frac{+10.75}{x^2+(10.75)^2}$$

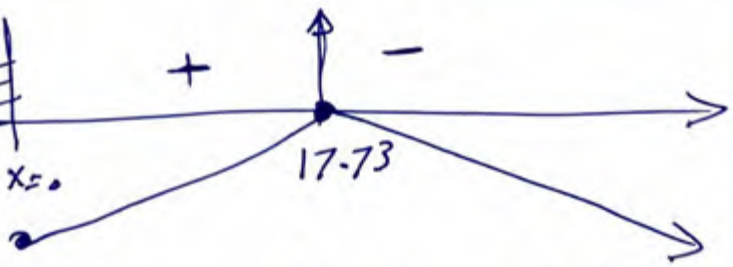
$$29.25x^2 + 29.25(10.75)^2 = 10.75(x^2) + 10.75(29.25)^2$$

$$18.5x^2 = 5817.09$$

$$x^2 = 314.4 \Rightarrow \boxed{x = 17.73}$$

تم رفض الكمية السالبة لأن x تبعد عن بعد الكرة

لإشارة A'(x) =



عند x=17.73 أكبر قيمة لكي معلقة وأكبر ما يمكن

$$\Rightarrow A = \tan^{-1}\left(\frac{29.25}{17.73}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{10.75}{17.73}\right)$$

$$A = 0.48 \text{ rad}$$

$$= 27.54^\circ$$

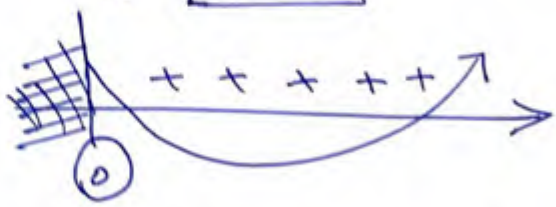
اعداد : صابر الموافي

مثـــــــــــال(12) الدالة : $f(x)= x\ln x$

ثانياً دراسة $f''(x)$

$f''(x) = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \boxed{x=0}$



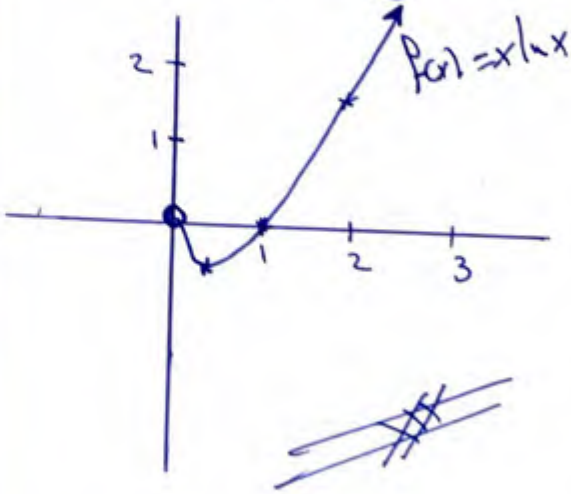
* فترات التقعر لأعلى ← $(0,\infty)$

لأسفل ← لا يوجد

* نقاط الانعطاف: لا يوجد

والرسم البياني للدالة $f(x)=x\ln x$

الذي يوضح ذلك هو

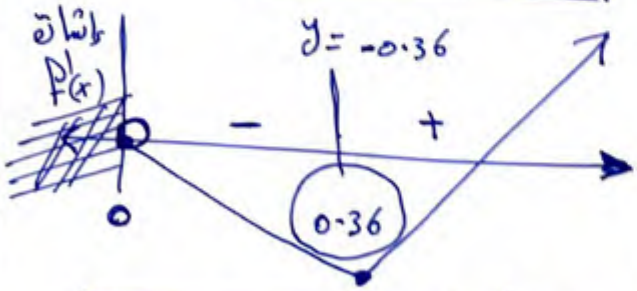


أولاً دراسة $f'(x)$

$f'(x) = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1 = 0$

$\Rightarrow \ln x = -1$

$\boxed{x = e^{-1} = 0.36}$



* نقاط الحرجة ← $\boxed{x=0.36}$

* فترات التزايد : $(0.36,\infty)$

فترات التناقص : $(0,0.36)$

* عند $x=$ توجد قيمة عظمى $=-0.36$

ملاحظة هامة جداً

عند نقط الانعطاف نبدأ بالصفر

لأن مجال اللوغاريتم $x>0$

اعداد : صابر الموافي

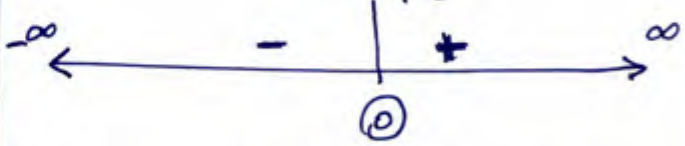
نشاط كتابـــــــــي(12) الدالة : $f(x) = x \ln x^2$

$f''(x)$ تانياً دراسة

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 0}$$

f'' غ.م = y



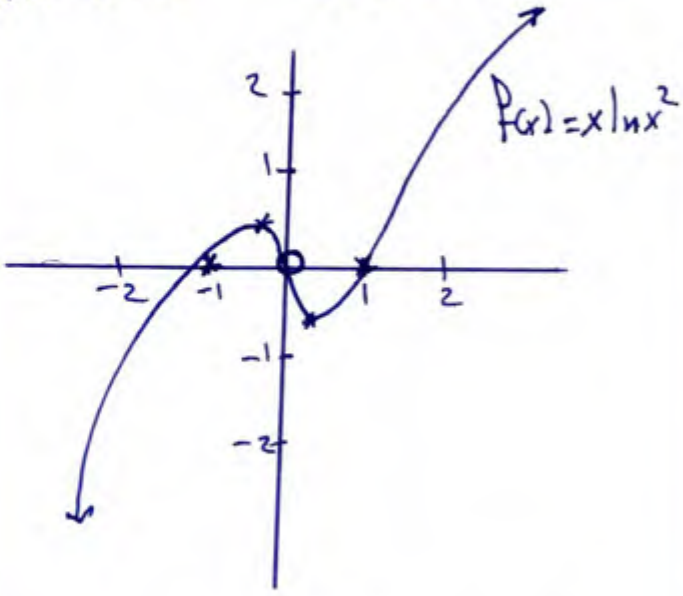
* فترات التقعر لأسفل $(-\infty, 0)$

لأعلى $(0, \infty)$

* لا توجد نقاط انعطاف

لأن الدالة عند $x = 0$ غير معرفة

والرسم البياني للدالة $f(x) = x \ln x^2$



$f'(x)$ أولاً دراسة

$$f'(x) = \ln x^2 + x \cdot \frac{2x}{x^2}$$

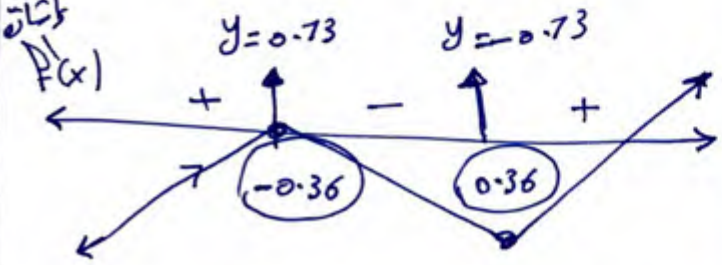
$$= \ln x^2 + 2 = 0$$

$$\ln x^2 = -2$$

$$x^2 = e^{-2}$$

$$x = \pm\sqrt{e^{-2}} = \pm 0.36$$

إشارة $f'(x)$



* نقاط الحرجة ← $(-0.36, 0.73)$ ، $(0.36, 0.73)$

* فترات التزايد ← $(-\infty, -0.36)$ ، $(0.36, \infty)$

التناقص ← $(-0.36, 0.36)$

* عند $x = -0.36$ توجد قيمة عظمى محلية $= 0.73$

" " $x = 0.36$ " قيمة صغرى محلية $= -0.73$

اعداد : صابر الموافي

أداء مهمـــــــــــة (12) الدالة : $f(x)= \ln(x^2 - 1)$

اعتمد على نفسك

اعداد : صابر الموافي

للطالب المبدع والمبتكر(12) الدالة : اذا كانت $f(x)= x^2 - 1$, $g(x)= \ln x$

أوجد قيمة x التي تحقق القيمة الصغرى للدالة f(x) - g(x)

$h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 1 - \ln x$

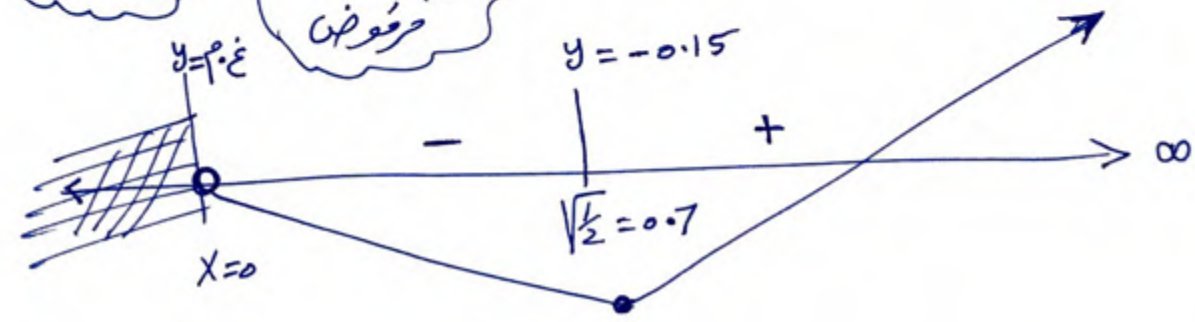
$h'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$

$2x^2 - 1 = 0$ | $x = 0$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

$x = +\sqrt{\frac{1}{2}}$

$x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ مرفوض



⇐ عند $x=0.7$ توجد قيمة صغرى محلية ومطلقة وحيدة = -0.15

اعداد : صابر الموافي

مثـــــــــــال(13) الدالة : $f(x)= (3x+1)^{\frac{2}{3}}$

أولاً دراسة $f'(x)$

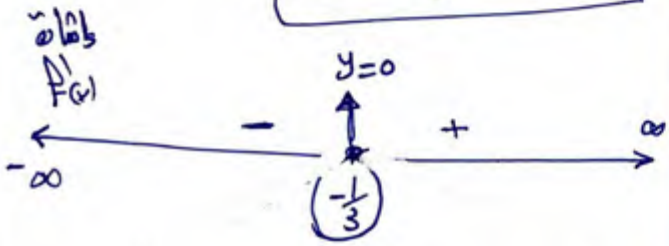
$$f'(x) = \frac{2}{3}(3x+1)^{-\frac{1}{3}} \cdot 3$$

$$= \frac{2}{(3x+1)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\Rightarrow (3x+1)^{\frac{1}{3}} = 0$$

$$3x+1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{3} = -0.33$$



* نقاط الحرجة ← $(-\frac{1}{3}, 0)$
* فترات التزايد ← $(-\frac{1}{3}, \infty)$
* التناقص ← $(-\infty, -\frac{1}{3})$
* عند $x=-\frac{1}{3}$ توجد قيمة صغرى محلية ومطلقة $= 0$

ثانياً دراسة $f''(x)$

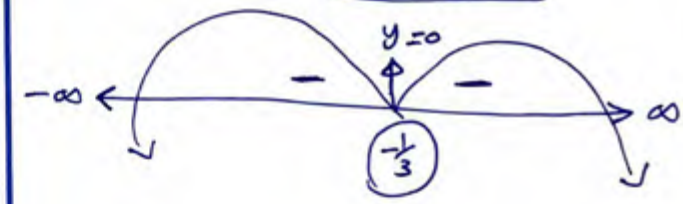
$$f''(x) = \frac{-2(\frac{1}{3})(3x+1)^{-\frac{2}{3}} \cdot (3)}{(3x+1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{-2}{(3x+1)^{\frac{4}{3}}}$$

$$\Rightarrow (3x+1)^{\frac{4}{3}} = 0$$

$$3x+1 = 0$$

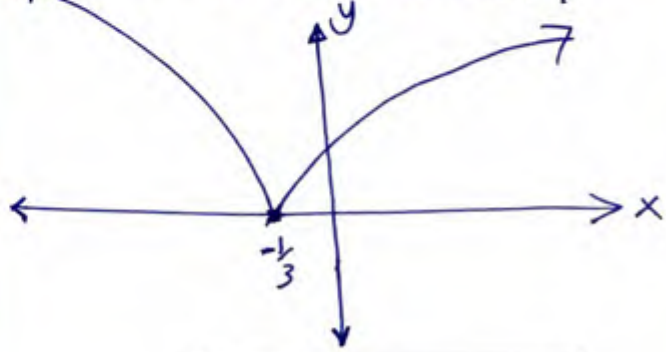
$$x = -\frac{1}{3}$$



* فترات التقعر لأعلى ← لا يوجد
* لأسفل ← $(-\infty, \infty)$

* لا توجد نقاط انعطاف

الرسم البياني للدالة $f(x) = (3x+1)^{\frac{2}{3}}$



اعداد : صابر الموافي

نشاط كتابـــــــــــي(13) الدالة $f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}}$

اعتمد على نفسك

اعداد : صابر الموافي

أداء مهمـــــــــــة (13) الدالة : $f(x)= (x^2+1)^{\frac{2}{3}}$

اعتمد على نفسك

اعداد : صابر الموافي

للطالب المبدع والمبتكر(13) الدالة : $f(x)= (x^3 - 3x^2 + 2x)^{\frac{2}{3}}$

اعتمدي على نفسك

اعداد : صابر الموافي

مثـــــــــــــــال(14) الدالة : $x^3 - 5x + 3sinx^2$ =f(x) في $[-2\ ,\ 2.5]$

اعداد : صابر الموافي

نشاط كتابـــــــــــي(14) الدالة : $f(x) = x + \sin x$

ثانياً دراسة $f''(x)$

$f''(x) = -\sin x = 0$

$\sin x = 0$

$x = n\pi$

حيث n عدد صحيح

وبوضع $n = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

$y=-2\pi \quad y=-\pi \quad y=0 \quad y=\pi \quad y=2\pi$

$-\infty \quad + \quad - \quad + \quad - \quad + \quad - \quad \infty$

$\ldots -2\pi \quad -\pi \quad 0 \quad \pi \quad 2\pi \ldots$

* فترات التقعر لأعلى ←

$\ldots (-\pi, 0) \cup (\pi, 2\pi) \ldots$

لأسفل ←

$\ldots (-2\pi, -\pi) \cup (0, \pi) \ldots$

* نقاط الانعطاف ⇐

$y = n\pi \quad / \quad x = n\pi$

حيث n عدد صحيح

أولاً دراسة $f''(x)$

$f''(x) = 1 + \cos x = 0$

$\cos x = -1$

$x = \pi + 2n\pi$

حيث n عدد صحيح

وبوضع $n = \ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots$

$y= \quad y= \quad y= \quad y= \quad y= \quad y=$

$-\infty \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad | \quad + \quad | \quad + \quad \infty$

$\ldots -5\pi \quad -3\pi \quad -\pi \quad \pi \quad 3\pi \quad 5\pi \ldots$

* التقاط الجهة ← $x = \pi + 2n\pi = (2n+1)\pi$

* الدالة تزايدية في $(-\infty, \infty)$

ولا توجد فترات تناقص

* لا توجد قيم قصوى لا محلية ولا مطلقة

اعداد : صابر الموافي

أداء مهمـــــــــــة (14) الدالة : $f(x)= x + e^x$

اعتمد على نفسك

اعداد : صابر الموافي

للطالب المبدع والمبتكر(14) الدالة : $f(x)= x + \ln x$

اعتمد على نفسك

اعداد : صابر الموافي

مثـــــــــــال(15) أوجد القيم القصوى المطلقة: $f(x)=\frac{3x^2}{x-3}$ في $[-2, 2]$

$$f'(x)=\frac{6x(x-3)-3x^2}{(x-3)^2}=\frac{6x^2-18x-3x^2}{(x-3)^2}$$

$$=\boxed{\frac{3x^2-18x}{(x-3)^2}}$$

$3x^2-18x=0$ | $(x-3)^2=0$

$x=0$ $\quad$ $x=6$ (مرفوض لأنه خارج المدى $[-2,2]$) $\quad$ $x-3=0$, $\boxed{x=3}$ (مرفوض لأنه خارج المدى $[-2,2]$)

$\Leftarrow$ النقطة الحرجة هي $\boxed{x=0}$

$\Rightarrow f(-2)=\boxed{-2.4}$

$f(0)=\boxed{0}$ ← نهاية عظمى

$f(2)=\boxed{-12}$ ← نهاية صغرى

اعداد : صابر الموافي

نشاط كتابـــــــــــي(15) الدالة : $f(x) = \sin x + \cos x$ في $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

أ/ أوجد $f'(x)$:

$f'(x) = \cos x - \sin x = 0$

$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x}$ حيث $\cos x \neq 0$

$\tan x = 1$

$\Rightarrow x = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$

ل.ا/ $x = \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

الحالة/ $x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \notin \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$\Leftarrow$ التقاط الحرجة هي $x = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$f(\pi) = -1 \longrightarrow$ صغرى مطلقة

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \longrightarrow$ كبرى مطلقة

اعداد : صابر الموافي

* أداء مهمـــــــــــة (15) الدالة : $f(x)= x\sin x +3$ في $[0\ ,2\pi]$

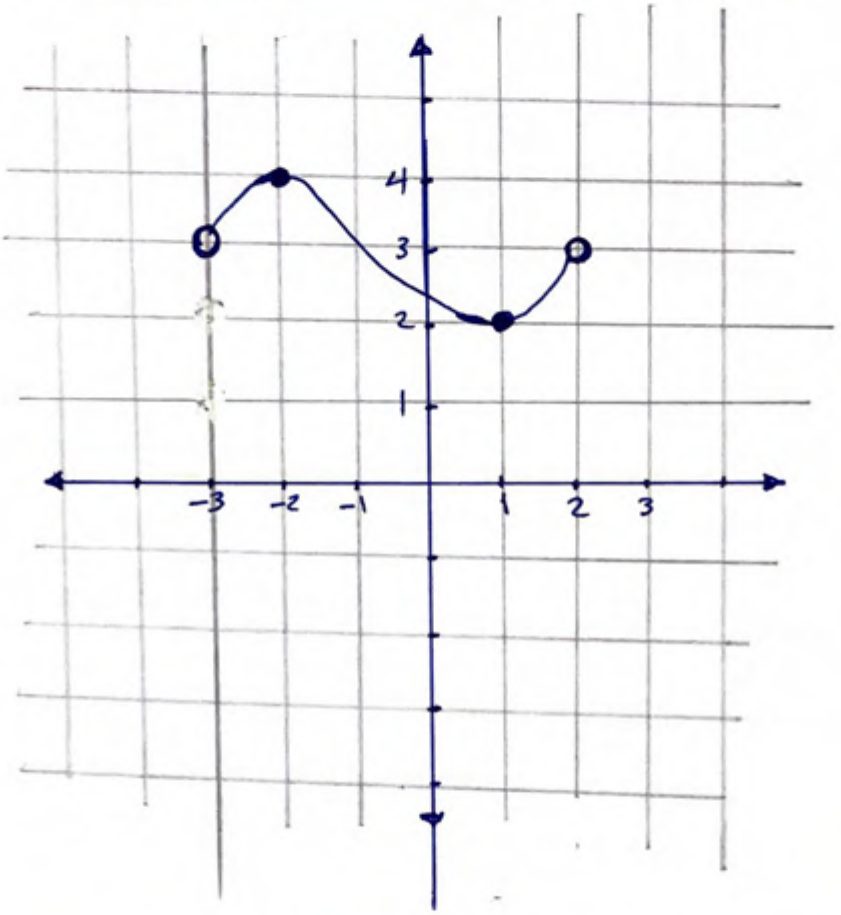
اعتمد على نفسك

اعداد : صابر الموافي

للطالب المبدع والمبتكر(15) الدالة : ارسم الدالة المتصلة f(x)

بحيث تكون القيمة العظمى المطلقة في $(2, -3)$ تساوي 4

وتكون القيمة الصغرى المطلقة تساوي 2



ملاحظة ⇐ هذا الرسم غير صحيح

لأنه يوجد عدد لانهائي من الرسوم

التي تحقق المعلومات

اعداد : صابر الموافي

مثـــــــــــــــال(16) ارسم الدالة : $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$ حيث $x>0$ وحدد اين

الرسم البياني أشد انحدارا (أي ابحث عن القيمة العظمى لـ $f'(x)$)

$$f'(x)=\frac{2x(x^2+1)-x^2(2x)}{(x^2+1)^2}$$ دراسة $f'(x)$

$$=\frac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{2(x^2+1)^2-2x(2)(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4}=\frac{2(x^2+1)[x^2+1-8x^2]}{(x^2+1)^4}$$

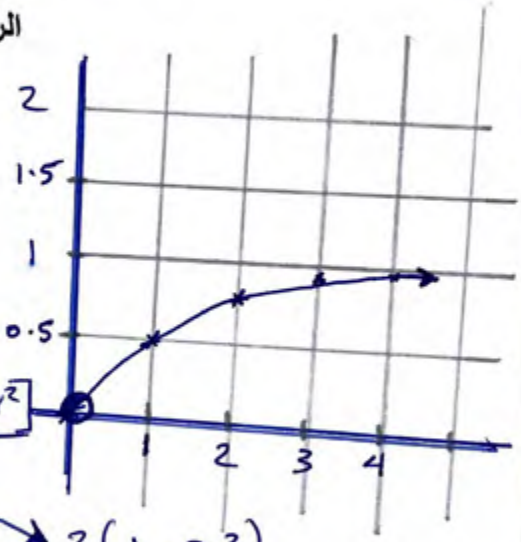
$$\frac{2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$$

دراسة إشارة $f''(x)$

$\Rightarrow 1-3x^2=0 \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{3}} \in$

$x=-\frac{1}{\sqrt{3}} \notin$

$\Leftarrow$ توجد قيمة عظمى واحدة وأكبر ما يمكن فيها $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ والقيمة 0.25



اعتمد على نفسك

نشاط كتابـــــــــــــي(16) ارسم الدالة : $f(x)=e^{-x^2}$ حيث $x>0$ وحدد اين الرسم أشد انحدارا (أي ابحث عن القيمة العظمى)

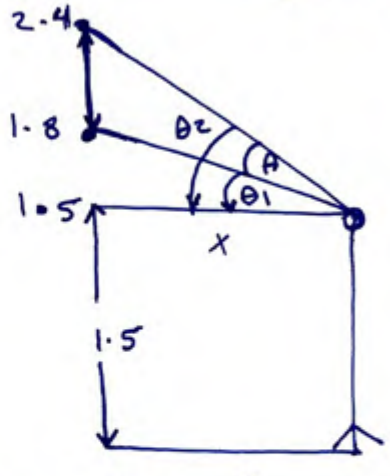
اعداد : صابر الموافي

أداء مهمـــــــــــة (16) الدالة : ارسم الدالة : $f(x)= e^{-\frac{1}{x}}$ حيث $x > 0$ وحدد اين الرسم أشد انحدارا (أي ابحث عن القيمة العظمى)

اعتمد على الله ثم توكل

للطالب المبدع والمبتكر(16) الدالة : تمرين (59) الكتاب المدرسي صفحة (259)

باستخدام قوانين حساب المثلثات



$\tan\theta_2 = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{2.4-1.05}{x} = \frac{0.9}{x}$

$\Rightarrow \boxed{\theta_2 = \tan^{-1}\frac{0.9}{x}}$

$\tan\theta_1 = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{1.8-1.05}{x} = \frac{0.3}{x}$

$\boxed{\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{0.3}{x}\right)}$

$\Rightarrow$ الزاوية $A = \theta_1 - \theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{0.9}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{0.3}{x}\right)$

وبحساب قيمة x التي تزيد من الزاوية A

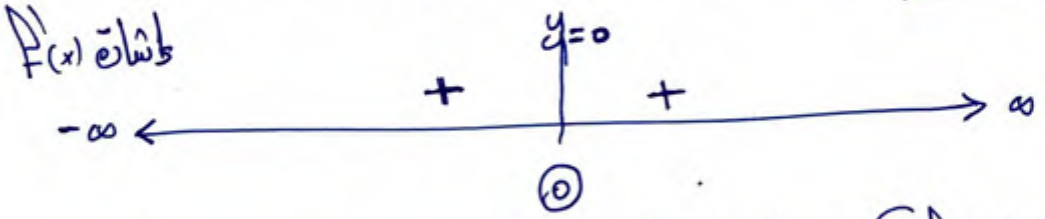
تستمر وتوجد القيمة العظمى لـ A وتوجد قيمة x

..... انتهى الحل .....

اعداد : صابر الموافي

* مثـــــــــــال(17) اذا كانت : $f(x)=x^3$ وضح أن f(x) متزايدة على أي فترة حول الصفرغير أن $\bar{f}(0)=0$ ووضح أن ذلك لا يتناقض مع نظرية (4-1)

$f'(x)=3x^2=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$



$\Leftarrow$ الدالة f تكون متزايدة على $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

ومن نفس الوقت $\Leftarrow f'(0)=0$

ونص نظرية (4-1) $\Leftarrow$ f قابلة للاشتقاق على الفترة I

وإذا كانت $f'(x)>0$ لكل قيم $x\in I$ فإن f تزايدية على I

$\Leftarrow$ لا يوجد تعارض $\leftarrow$ حيث $0\notin I$ لأن الفترة المفتوحة في النظرية ليس لها عكس النظرية

اعتمد على نفسك

* نشاط كتابـــــــــــي(17) اذا كانت : $f(x)=-x^3$ وضح أن f(x) متناقصة على أي فترة حول الصفرغير أن $\bar{f}(0)=0$ ووضح أن ذلك لا يتناقض مع نظرية (4-1)

اعداد : صابر الموافي

اعتمد على نفسك

أداء مهمـــــــــــة (17) اذا كانت $f(x) = \sin^{-1} x$ وضح أن f(x) متزايدة أم متناقصة

اعتمد على نفسك

* للطالب المبدع والمبتكر(17) وضح أن $f(x)= x^3 + bx^2 + cx + d$ هي دالة متزايدة اذا كان $b^2 \leq 3c$

مثـــــــــــال(18) اذا كانت : f(x) , g(x) دالتان متزايدتان فهل f(g(x)) تعد أيضا متزايدة

إما تثبت صحة العبارة أو تعطي مثالا من عندك يبرهن الخطأ

العبارة صحيحة ⇐ السبب ⇐ ∵ الدالة g(x) متزايدة

$\Rightarrow$ لكن $x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$

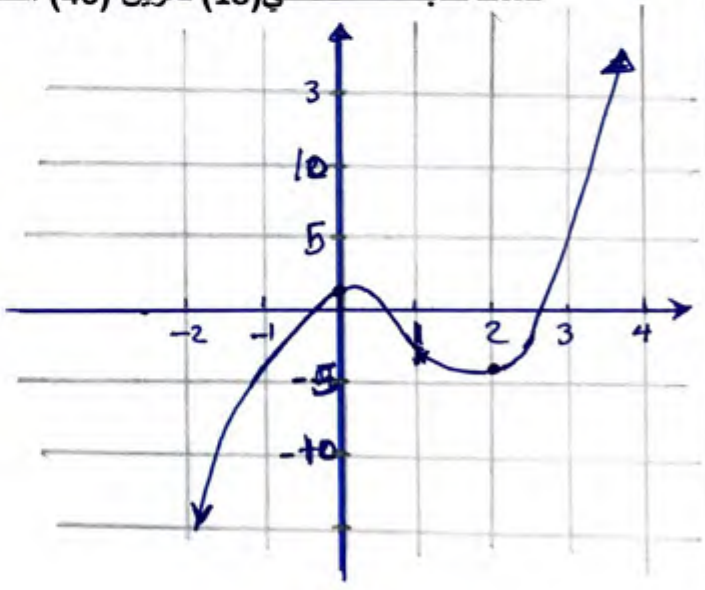
∴ الدالة f(x) متزايدة بنفس الطريقة

$\because g(x_1) < g(x_2)$

$\Rightarrow f(g(x_1)) < f(g(x_2))$

$\Leftarrow f(g(x))$ ⇐ تكون دالة متزايدة

نشاط كتابـــــــــــي(18) تمرين (46) الكتاب المدرسي صفحة (276)



* فترات التزايد ← $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$
* التناقص ← $(0, 2)$
* عند $x=0$ توجد قيمة عظمى محلية وليست مطلقة
توجد قيمة صغرى محلية وليست مطلقة $x=2$
* فترات التقعر لأعلى $(1, \infty)$
لأسفل $(-\infty, 1)$
* نقاط الانعطاف $(1, f(1))$

اعداد : صابر الموافي

اعتمدك تفسك

* أداء مهمـــــــــة (18) تمرين (48) الكتاب المدرسي صفحة (258)

$P'(x) = 4x^3 + 3cx^2 = 0 \Rightarrow x^2(4x+3c)=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$ $\boxed{x=\frac{-3c}{4}}$

وهذه تعبر عن النقاط الحرجة ، ولكنه يوجد ثلاث احتمالات

$\boxed{c=0}$ $\Rightarrow \boxed{x=0}$

اتجاه $P'(x)$: $-\infty$ | $-$ | $y=1$ | $+$ | ∞ ، عند $x=0$ يوجد قيمة صغرى محلية ومطلقة

$\boxed{c>0}$ موجبة $\Rightarrow \boxed{x=0}$ $\boxed{x=\frac{-3c}{4}}$

اتجاه $P(x)$: $-$ | $\frac{-3c}{4}$ | $+$ | 0 | $+$ ، عند $x=\frac{-3c}{4}$ يوجد قيمة صغرى محلية ومطلقة

$P\left(\frac{-3c}{4}\right) =$

$\boxed{c<0}$ سالبة

$-$ | 0 | $-$ | $\frac{-3c}{4}$ | $+$ ، سوف يتم تكون محلية ومطلقة عند $x=\frac{-3c}{4}$

اعتمدك تفسك

* للطالب المبدع والمبتكر(18) تمرين (49) الكتاب المدرسي صفحة (267)

اعداد : صابر الموافي

مثـــــــــــــال(19) استخدم اختبار المشتقة الثانية في إيجاد القيم القصوى للدالة

$$f(x)= x^4 - 8x^2 + 10$$

$f'(x) = 4x^3 - 16x = 0 \Rightarrow 4$ [X=2] [X=-2]

النقاط الحرجة [X=0]

$\Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 16 = 0$

$f''(2) = 12(2)^2 - 16 = 32 > 0$ صغرى محلية

$f''(-2) = 12(-2)^2 - 16 = 32 > 0$ صغرى محلية

$f''(0) = 12(0)^2 - 16 = -16 < 0$ عظمى محلية

[$f''=0$] ملاحظة مهمة جداً ⇐ يفشل اختبار المشتقة الثانية إذا كانت

نشاط كتابـــــــــــي(19) تمرين (9) الكتاب المدرسي صفحة (276)

اعتمد على نفس مثال (19)

اعداد : صابر الموافي

أداء مهمـــــــــــة (19) تمرين (10) الكتاب المدرسي صفحة (276)

اعتدال تمساه
نفس مثال (19)

للطالب المبدع والمبتكر(19) تمرين (11) الكتاب المدرسي صفحة (276)

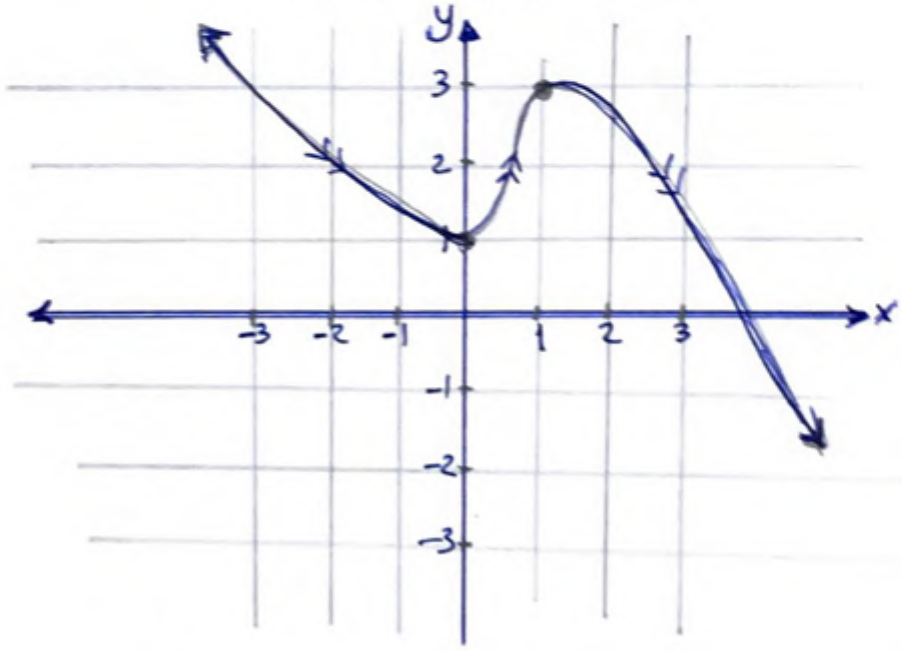
اعتدال تمساه
نفس مثال (19)

اعداد : صابر الموافي

مثـــــــــــــال(20) ارسم بيان الدالة f(x) التي لها الخواص التالية :

$x > 1$, $x < 0$ لكل $\bar{f}(x) < 0$, f(1)=3 , f(0)=1

$0 < x < 1$ لكل $\bar{f}(x) > 0$.

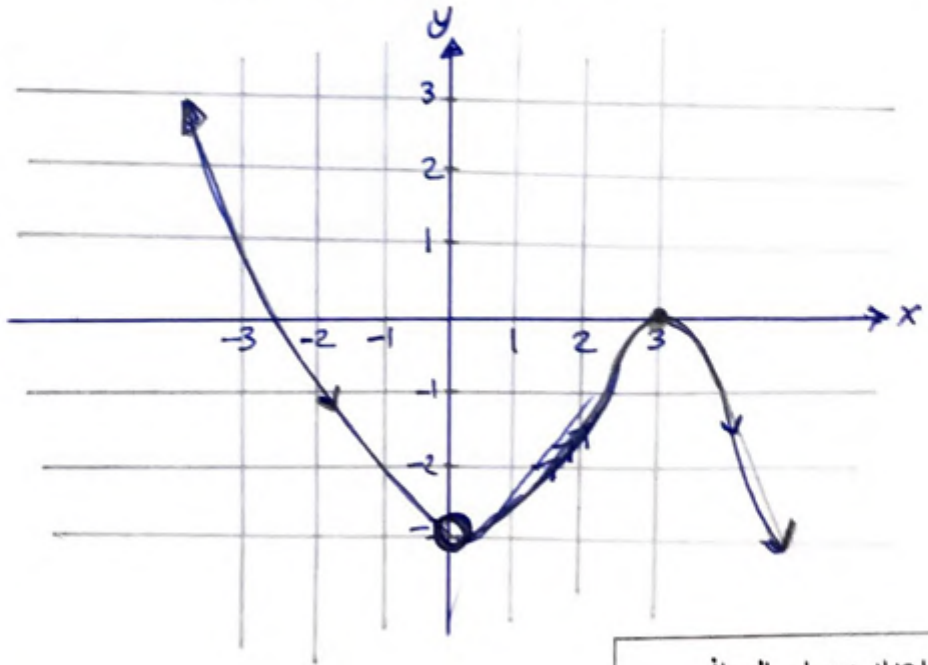


مثـــــــــــــال (21) ارسم بيان الدالة f(x) التي لها الخواص التالية :

$x > 3$, $x < 0$ لكل $\bar{f}(x) < 0$, f(3)=0

$\bar{f}(3) = 0$, $0 < x < 3$ لكل $\bar{f}(x) > 0$

f(0) , $\bar{f}(0)$ غير موجودتان

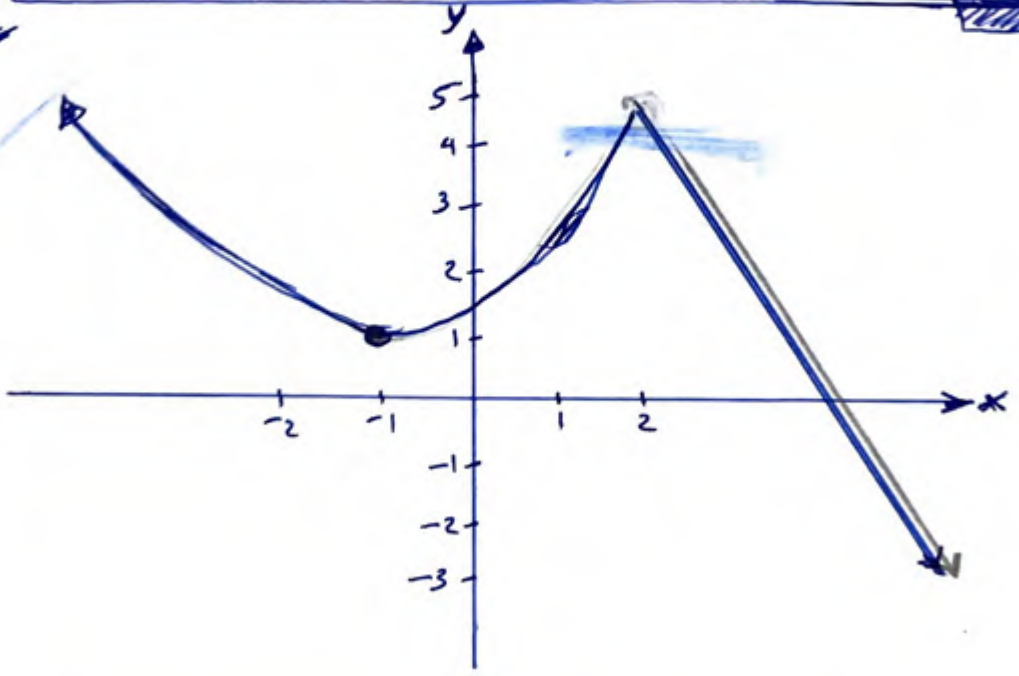


اعداد : صابر الموافي

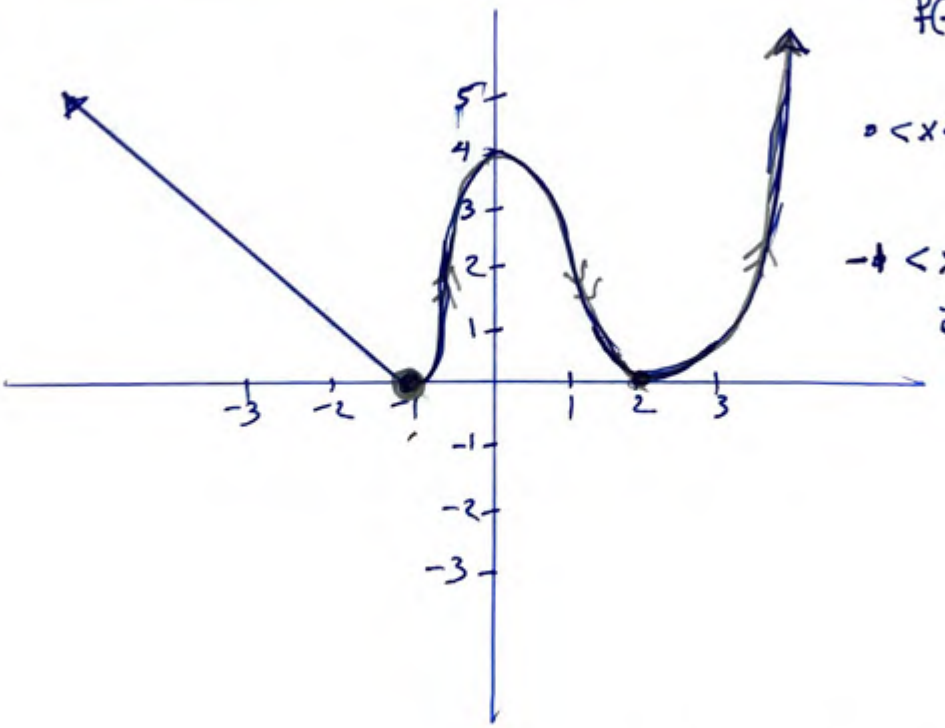
اعتمد كل تمسك

نص مثال (21)

نشاط كتابـــــــــــي(21) تمرين (28) الكتاب المدرسي صفحة (267)



أداء مهمـــــــــــة (21) تمرين (31) الكتاب المدرسي صفحة (267)



$f(-1)=f(2)=0$

عند $f'(x)<0$

$x<-1$ ، $0<x<2$

عند $f'(x)>0$

$-1<x<0$ ، $x>2$

$f'(-1)$ غير موجودة

$f'(2)=0$

اعداد : صابر الموافي

للطالب المبدع والمبتكر(21) تمرين (32) الكتاب المدرسي صفحة (32)

$f(0)=0$ ، $f(3)=-1$

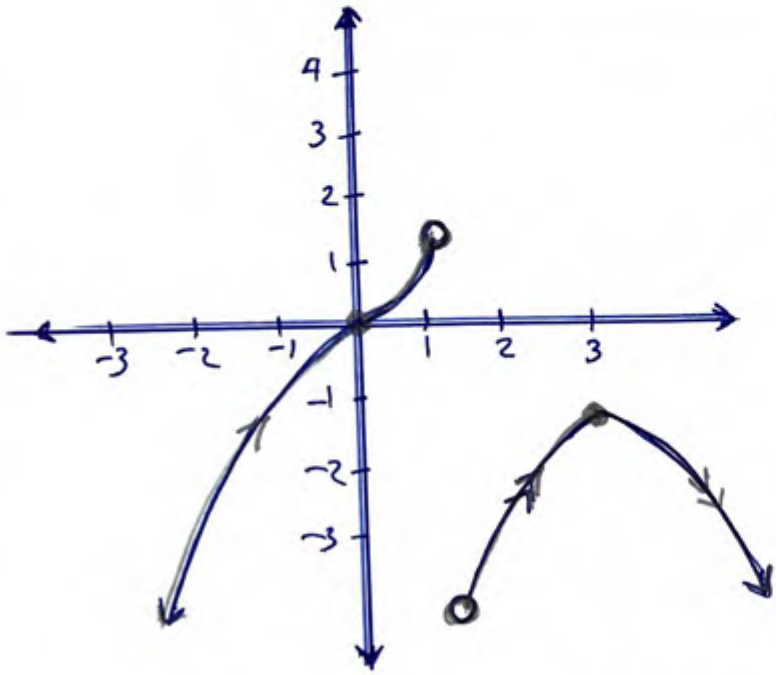
$f'(x)>0$ لكل

$x<0$ ، $0<x<1$ ، $1<x<3$

$f'(x)<0$ لكل $x>3$

$f'(0)=0$ ، $f'(3)=0$

$f'(1)$ غير موجودة



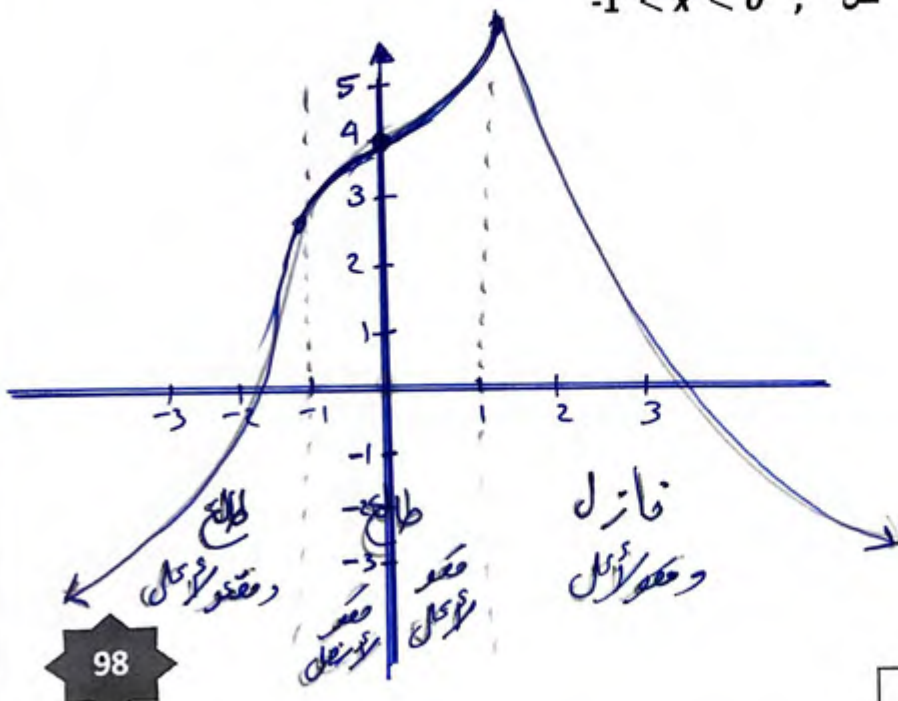
مثال (22) ارسم بيان الدالة f(x) التي لها الخواص التالية :

$f(0)=4$ ، $\bar{f}(x)>0$ لكل $x<-1$ ، $-1<x<1$

$\bar{f}(x)<0$ لكل $x>1$

$\bar{\bar{f}}(x)>0$ لكل $x<-1$ ، $0<x<1$ ، $x>1$

$\bar{\bar{f}}(x)<0$ لكل $-1<x<0$ ،



ملاحظة مهمة جداً
توجد رسومات أخرى
ليست هذا هو الحل الوحيد

اعداد : صابر الموافي

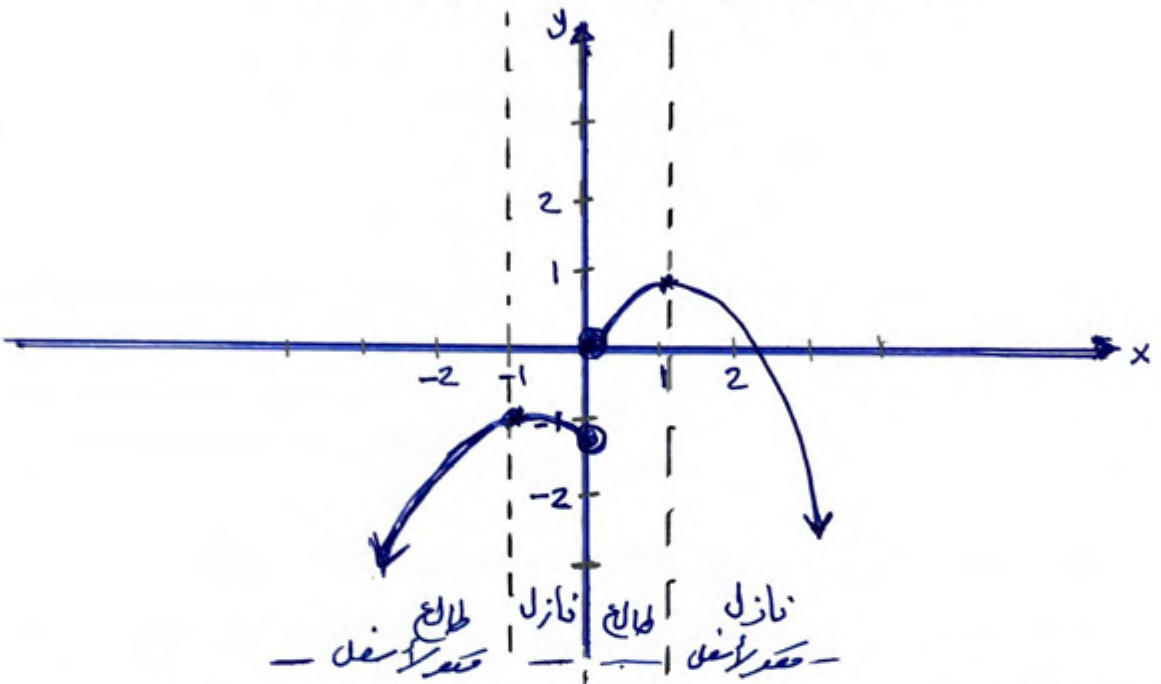
مثال (23) ارسم بيان الدالة f(x) التي لها الخواص التالية :

$f(0)=0$, $f(-1)=-1$, $f(1)=1$

$\bar{f}(x) > 0$ لكل $x < -1$, $0 < x < 1$

$\bar{f}(x) < 0$ لكل $x > 1$, $-1 < x < 0$

$\bar{\bar{f}}(x) < 0$ لكل $x < 0$, $x > 0$



نشاط كتابـــــــــــي(23) تمرين (38) الكتاب المدرسي صفحة (276)

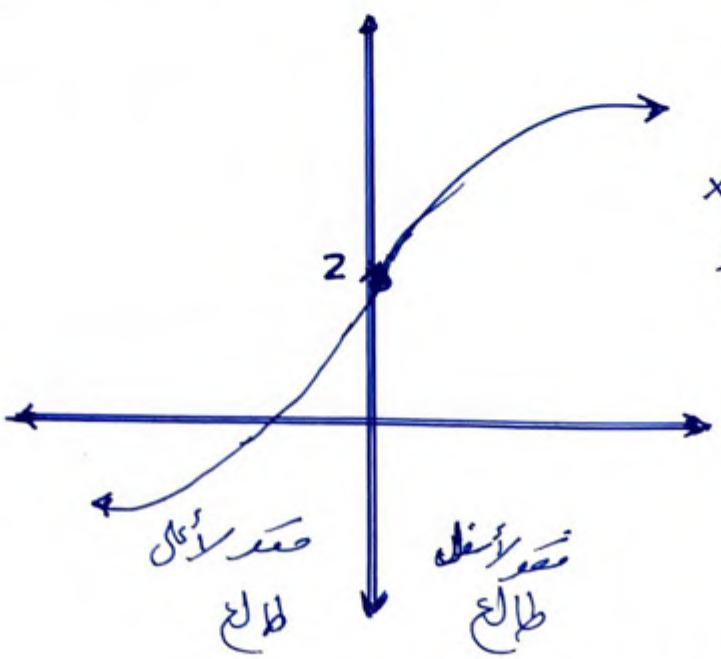
$f(0)=2$

$f'(0)=1$

x لكل $f'(x)>0$

$x<0$ لكل $f''(x)>0$

$x>0$ لكل $f''(x)<0$



اعداد : صابر الموافي

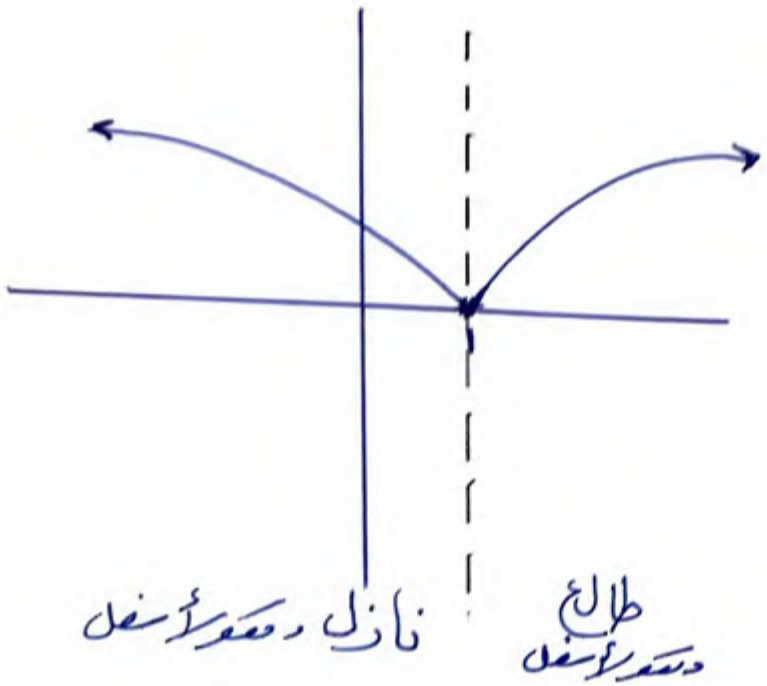
أداء مهمـــــــــة (23) تمرين (40) الكتاب المدرسي صفحة (276)

$f(1) = 0$

$x<1$ لكل $f'(x)<0$

$x>1$ لكل $f'(x)>0$

$x>1$ ، $x<1$ لكل $f''(x)<0$



نازل ومقعر لأسفل

طالع ومقعر لأسفل

276

للطالب المبدع والمبتكر(23) تمرين (41) الكتاب المدرسي صفحة (276)

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$\Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$\Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b = 0$

$\frac{6a}{6a}x = \frac{-2b}{6a}$

$x = -\frac{b}{3a}$ حيث $a \neq 0$

إشارة $f''(x)$

	−		+
+	$\frac{-b}{3a}$	−	أو

على حسب a موجبة أو سالبة

دي الحالتين توجد نقطة انعطاف واحدة

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$\Rightarrow f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + cx + d$

$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + c = 0$

$\Delta = (6b)^2 - 4(12a)c$

$36b^2 - 48ac$

$4[9b^2 - 12ac]$

$x = \frac{-6b \pm \sqrt{4(9b^2-12ac}}{24a}$

$\frac{-3b \pm \sqrt{9b^2-12ac}}{12a}$

∴ توجد نقطتا انعطاف بشرط

$9b^2 - 12ac > 0$

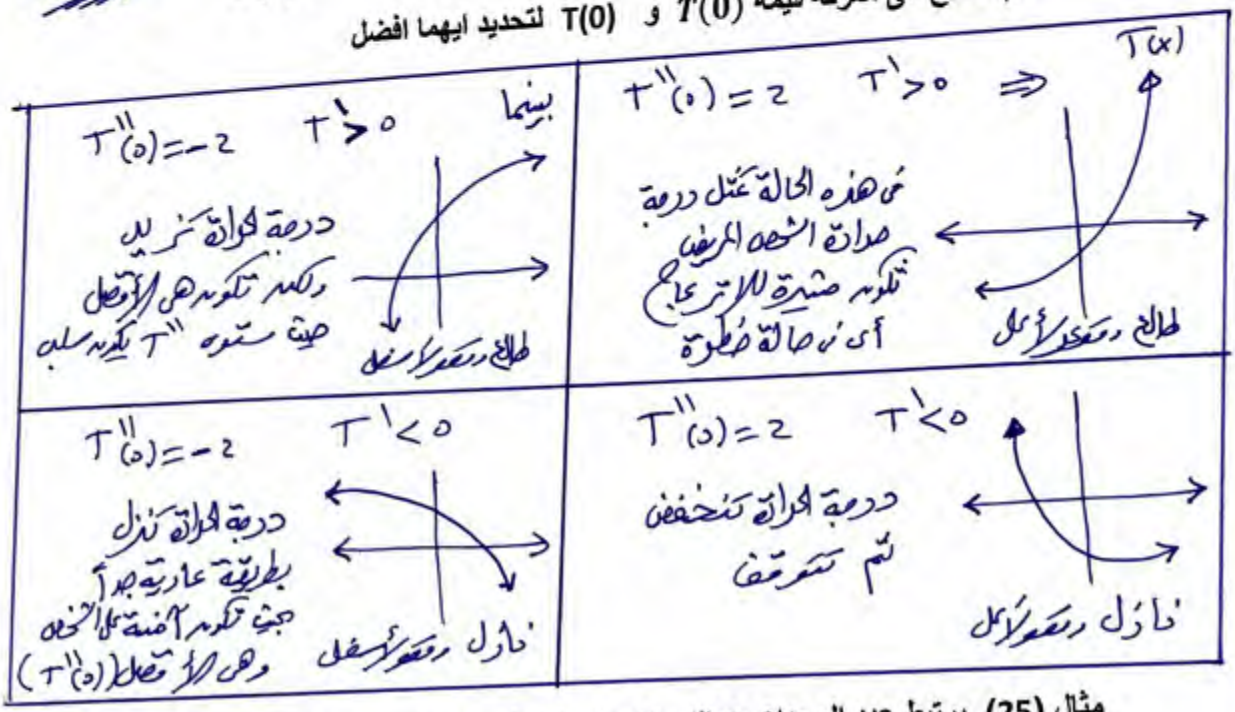
اعداد : صابر الموافي

* مثال (24) على فرض أن T(x) تمثل درجة حرارة شخص مريض في الزمن t

حدد الأفضل له عند الزمن $t = 0$ حيث $\overline{T}(0) = 2$ أم $\overline{T}(0) = -2$

أم تحتاج الى معرفة قيمة $\overline{T}(0)$ و T(0) لتحديد ايهما افضل

اختلف كل تفصيل



مثال (25) يرتبط عدد الوحدات Q التي انتجها عامل في يوم بعدد ساعات العمل منذ بداية يوم العمل حيث $Q(t) = -t^3 + 6t^2 + 12t$

أوجد الزمن الذي تكون فيه كفاءة العامل عند القيمة العظمى

اشرح لماذا يعد منطقيا ان تسمى نقطة الأنعطاف نقطة تناقص المرتجعات

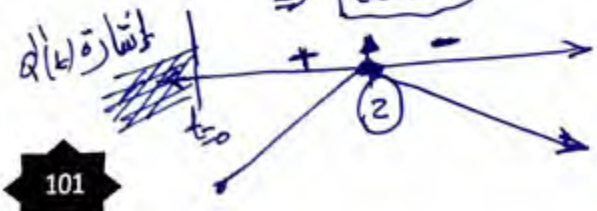
$Q'(t)$ تكون معدل عدد الوحدات في الساعة فكلما كانت كبيرة كان الحل أكبر والمطلوب تدرس القيمة العظمى لـ $Q(t)$

$\Rightarrow Q'(t) = -3t^2 + 12t + 12 = 0$

$t = 4.8$

$\Rightarrow Q''(t) = -6t + 12 = 0$

$\Rightarrow t = 2$



أي أنه عند $t = 2$ تتوقف قيمة معدل عدد الوحدات في الساعة

* وفي نفس الوقت تكون $t = 2$ نقطة انعطاف وبعدها يحدث تناقص في معدل عدد الوحدات في الساعة

أي التزايد $Q(t) \leftarrow (0, 2)$

التناقص $Q(t) \leftarrow (2, \infty)$

$\Rightarrow$ تسمى نقطة الانعطاف نقطة تناقص المرتجعات

اعداد : صابر الموافي

اعتمدي على نفسك
نفس عرين مثال 29

نشاط كتابـــــــــــي(25) تمرين (51) الكتاب المدرسي صفحة (277)

اعتمدي على نفسك
نفس مثال 25

أداء مهمـــــــــــة (25) تمرين (53) الكتاب المدرسي صفحة (277)

اعداد : صابر الموافي

للطالب المبدع والمبتكر(25) تمرين (55) الكتاب المدرسي صفحة (277)

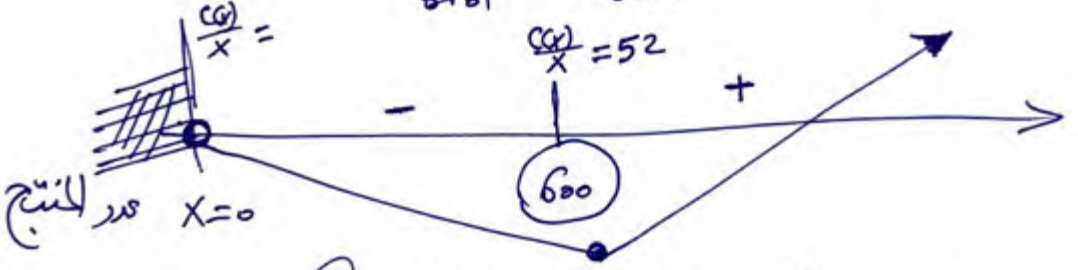
دالة التكلفة المتوسطة $= \frac{C(x)}{x} = \frac{0.01x^2 + 40x + 3600}{x}$

$= 0.01x + 40 + 3600x^{-1}$

المشتقة $= 0.01 - 3600x^{-2} = 0$

$\Rightarrow 0.01 = \frac{3600}{x^2}$

$\Rightarrow \frac{0.01}{0.01}x^2 = \frac{3600}{0.01}$ $\Rightarrow x = 600$



عند $x=600$ تكون التكلفة المتوسطة أقل ما يمكن

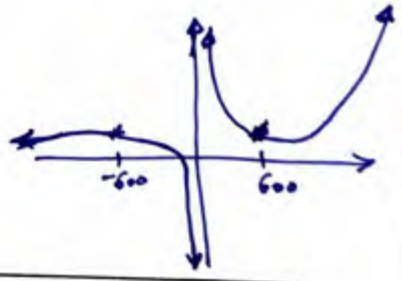
وتكون $\Leftarrow$ المشتقة الثانية $= 7200x^{-3} = \frac{7200}{x^3}$

يكون مقعر لأعلى عندما $x > 0$

ومقعر لأسفل عندما $x < 0$

وفي هذه الحالة الكمية الدالة للتكلفة المتوسطة يكون لها قيمة صغرى ومقعر لأسفل

أي أن $\left[\frac{C(x)}{x}\right]'' > 0$, $\left(\frac{C(x)}{x}\right)'' < 0$



ولذلك دالة التكلفة المقعرة لأسفل أفضل من دالة التكلفة المقعرة لأعلى ✱

اعداد : صابر الموافي