التكامل ..

الدرس 5-1 : الدوال الأصلية

f	f'
$y_1 = x^2 + 4$	$2x$
$y_2 = x^2 - 5$	$2x$
$y_3 = x^2 + \frac{3}{2}$	$2x$
$y_4 = x^2 + \sqrt{2}$	$2x$
$y_5 = x^2 + \pi$	$2x$
$y_6 = x^2 - e$	$2x$

*ملاحظة :
(1)

- الدوال غير متطابقة تختلف بالثابت ..

- $f' \rightarrow \boxed{2x}$

هذه المشتقة لها عدد لانهائي في الدوال الأصلية (قبل الاشتقاق) التي تختلف بالثابت .

---

*ملاحظة :
(2)

$$F(x) = G(x) + C$$

$$x^2 + 4 = x^2 - 5$$

$$x^2 = x^2 - 9$$

F(x) [illegible] G(x) = C

$$x^2 + 4 - (x^2 - 5)$$

$$\cancel{x^2} + 4 - \cancel{x^2} + 5 = 9$$

أي دالتين تم طرحهم وكان الناتج عدد ثابت تكون هاتان الدالتان لهما نفس المشتقة ..

أي هما دالتان أصليتان للمشتقة .

الدالة الأصلية $F \quad G$

$\swarrow \quad \searrow$

الاشتقاق   الطرح

$G' = F'$

ثابت

$F - G = c$

$G - F = c$

$f(x) = x^2+5$

$F'(x) = 2x$

$f(x) = 2x$

---

* مثال (1):

* أثبتي أن الدالتين $G(x)$ و $F(x)$ هما دوال أصلية للدالة $f(x) = 2x$

الاشتقاق

$F(x) = x^2+4 \qquad G(x) = x^2-\sqrt{2}$

$F' = 2x \qquad G' = 2x$

$F' = G' = f(x) = 2x$

إذاً G و F دوال أصلية للدالة $f(x) = 2x$

الطرح:

$F(x) - G(x)$

$x^2+4-(x^2-\sqrt{2})$

$\cancel{x^2}+4-\cancel{x^2}+\sqrt{2}$

$\boxed{4+\sqrt{2}}$ ثابت

أو

$G(x) - F(x)$

$x^2-\sqrt{2}-(x^2+4)$

$\cancel{x^2}-\sqrt{2}-\cancel{x^2}-4$

$\boxed{-\sqrt{2}-4} = c$

ناتج الطرح عدد ثابت إذاً $G(x), F(x)$ دوال أصلية للدالة $f(x) = 2x$

* تمرين (1)

هل الدالتين $F(x)$ ، $G(x)$ دوال أصلية للدالة $f(x)$
إذا كان كذلك أوجدي $f(x)$

$$F(x) = \sin x + \boxed{\cos 60} \leftarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$G(x) = \sin x - \boxed{\sin 60} \leftarrow \frac{1}{2}$$

* بطريقة الاشتقاق:

$$F'(x) = \cos x - 0 \qquad G'(x) = \cos x - 0$$

$$F'(x) = G'(x)$$

$$f(x) = \cos x$$

---

* بطريقة الطرح:

$$F(x) - G(x)$$

$$\sin x + \frac{1}{2} - \left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\sin x + \frac{1}{2} - \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$G(x) - F(x)$$

$$\sin x - \frac{1}{2} - \left(\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\sin x - \frac{1}{2} - \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = c$$

عدد ثابت فالدالتان أصليتان
للدالة $f(x)$

الدالة الأصلية الدالة المشتقة

$F(x) = x^2+4 \longrightarrow F'(x) = f(x) = 2x$

التكامل

$\int$ الدالة المشتقة dx

$\int 2x \, dx = x^2 + c$

$$\boxed{\begin{array}{l}\int f(x)\, dx = F(x) + c \\ \int F'(x)\, dx = F(x) + c\end{array}}$$

$$\int x \, dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\int x^2 \, dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + c$$

$$\int x^3 \, dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + c$$

$$\int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + c$$

$$\int x^{-4} dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C = \frac{x^{-3}}{-3} + c$$

$$\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int x^{\frac{4}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + C$$

$$\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$\int x^{-\frac{3}{2}}\,dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C$$

١

$\int 3x^2\,dx$ ← 3 مضروبة بالدالة

اخراج 3 خارج ∫

$\cancel{3}\int \frac{x^{2+1}}{\cancel{2+1}}\,dx$

$3\int \frac{x^3}{3} + C$

نضع 3 كما هي ونكامل

$\frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}}$

$\boxed{2}$ نوزع $\int$ على + و - فقط

لا نوزع على × و القسمة

$$\int (x^3 - x^2 + x)\, dx$$

مباشرة تكامل
لكل حد

$$\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$$

نوزع $\int$ على الحدود
ثم نكامل

$$\int x^3\, dx - \int x^2\, dx + \int x\, dx$$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$$

$\boxed{3}$ تكامل عدد ثابت
لوحدة دون متغير

$$\int 2\, dx = 2x + C$$

$$\int -1\, dx = -x + C$$

$$\int \sqrt{2}\, dx = \sqrt{2}\, x + C$$

$$\int 1\, dx = x + C$$

page 329

أوجد $\int$

1) $\int x^3\,dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} = \frac{x^4}{4} + C$

2) $\int (x^3 - x)\,dx = \int x^3\,dx - \int x\,dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} - \frac{x^{1+1}}{1+1}$

$= \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C$

5) $\int (3x^4 - 3x)\,dx = \int 3x^4\,dx - \int 3x\,dx = \frac{3x^{4+1}}{4+1} - \frac{3x^{1+1}}{1+1}$

$= 3\frac{x^5}{5} - 3\frac{x^2}{2} + C$

6) $\int (x^3 - 2)\,dx = \int \frac{x^{3+1}}{3+1}dx - \int 2\,dx$

$= \frac{x^{4}}{4} - 2x + C$

للتذكير:

$\sqrt[n]{f(x)} \longrightarrow (f(x))^{\frac{1}{n}}$

$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$

$\sqrt[n]{(f(x))^m} \longrightarrow (f(x))^{\frac{m}{n}}$

$(x^n)^m = x^{n \cdot m}$

$\frac{a}{x^n} \longrightarrow a x^{-n}$

$\frac{a}{\sqrt[n]{x}} \longrightarrow \frac{a}{x^{\frac{1}{n}}} \longrightarrow a x^{-\frac{1}{n}}$

page 329

أوجد $\int$

7) $\int 3\sqrt{x} - \frac{1}{x^4}\,dx$

الحل $\int 3x^{\frac{1}{2}} - x^{-4}\,dx$

$= \int 3\,\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^{-4+1}}{-4+1}\,dx$

$= \int 3\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{-3}}{-3}\,dx$

$= \left(3\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{-3}}{-3}\right) + c$

الحل! $\frac{2\times 3x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{1}{3x^3} + c$

---

8) $\int \left(2x^{-2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

الحل: $\int 2x^{-2} + x^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$= 2\,\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = 2\,\frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$

$= \frac{-2}{x} + \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1}$

سؤال خارجي

$$\int \frac{x+2x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{3}{4}}}\, dx$$

$$= (x+2x^{\frac{3}{4}})\, x^{-\frac{3}{4}}$$

$$= x \cdot x^{-\frac{3}{4}} + 2x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{-\frac{3}{4}}$$

$$= x^{1-\frac{3}{4}} + 2\, x^{\frac{3}{4}-\frac{3}{4}}$$

$$= x^{\frac{1}{4}} + 2x^{0}$$

$$= \boxed{x^{\frac{1}{4}} + 2}$$

$$\int (x^{\frac{1}{4}} + 2)\, dx$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} + 2x + c$$

$$= \boxed{\frac{4x^{\frac{5}{4}}}{5} + 2x + c}$$

التكامل

* إيجاد تكامل الدوال المثلثية :

$$\int \sin kx\, dx = \frac{-\cos kx}{k} + c$$

$$\int \cos kx\, dx = \frac{\sin kx}{k} + c$$

$$\int \sec kx \cdot \tan kx\, dx = \frac{\sec kx}{k} + c$$

$$\int \csc kx \cdot \cot kx\, dx = \frac{-\csc kx}{k} + c$$

$$\int \sec^2 kx\, dx = \frac{\tan kx}{k} + c$$

$$\int \csc^2 kx\, dx = \frac{-\cot kx}{k}$$

Page 329

11) $\int (2\sin x + \cos x)\,dx$

$= \int 2\sin x\,dx + \int \cos x\,dx$

$= -2\cos x + \sin x + C$

---

12) $\int (3\cos x - \sin x)\,dx$

$= \int 3\cos x\,dx - \int \sin x\,dx$

$= 3\sin x - (-\cos x)$

$= 3\sin x + \cos x + C$

---

13) $\int 2\sec x \cdot \tan x\,dx$

$= 2\sec x + C$

---

15) $\int 5\sec^2 x\,dx$

$= 5\tan x + C$

page $\underline{\underline{329}}$

16) $\int 4 \frac{\cos x}{\sin^2 x}\, dx$

$$\int 4 \frac{\cos x}{(\sin x)(\sin x)}\, dx = \int 4 \frac{\cos x}{\sin x} \times \frac{1}{\sin x}\, dx$$

$$\int 4\, \underline{\cot}\, x \times \underline{\csc}\, x\, dx = \underline{-4\csc x} + c$$

التكامل

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \sin^{-1} x + c}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \tan^{-1} x + c}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\, dx = \sec^{-1} x + c}$$

H.W:-

page 329

14) $\int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int 4 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

$= 4 \sin^{-1} x + c$

---

22) $\int \frac{3}{\underset{*}{4}x^2+4}\, dx = \int \frac{3}{4(x^2+1)}\, dx = \int \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(x^2+1)}\, dx$

يجب ان تكون معامل x هو 1

$= \frac{3}{4} . \tan^{-1} dx$

الاشتقاق

$y = e^{f(x)} \longrightarrow y' = \underbrace{f'(x)}_{\text{مشتقة الأس}} \underbrace{e^{f(x)}}_{\text{الدالة نفسها}}$

التكامل $\longleftarrow$

$\int f'(x)\, e^{f(x)}\, dx = e^{f(x)} + c$

---

* خطوات الحل :

① نأخذ الأس ونشتقه

الأس $(2x) \rightarrow 2$

② نقارن جواب الاشتقاق بالمقدار المضروب بالدالة الأسية

③ إذا كان نفسه فإنه ناتج التكامل..

$\int 2 e^{2x} dx = e^{2x} + c$

$\int 2x\, e^{x^2+1}\, dx = e^{x^2+1} + c$

$\int (2x-1)\, e^{x^2-x}\, dx = e^{x^2-x} + c$

page 329

* أوجدي التكامل:

17) $\int (3e^{x}-2)\,dx$

$= \int 3e^{x}\,dx - \int 2\,dx$

$= 3e^{x} - 2x + c$

18) $\int (4x - 2e^{x})\,dx$

$= \int \frac{4x^{1+1}}{1+1}\,dx - \int 2e^{x}\,dx$

$= \frac{4x^{2}}{2} - 2e^{x} + c$

أسئلة خارجية

1 $\int e^{3x}\,dx$

الأس $3x \rightarrow 3$

$$\int \frac{3}{3} e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}\boxed{\int 3e^{3x}\,dx} = \frac{1}{3} e^{3x} + c$$

2 $\int x\, e^{x^2+1}$

الأس $x^2+1 \rightarrow 2x$

$$\int \frac{2}{2} x\, e^{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2} e^{x^2+1} + c$$

* ملاحظة:

- إذا أخذنا الأس واشتققناه وكان الناتج لدينا هو عدد عندها نضرب ونقسم على العدد الناتج.
- وهذه القاعدة في حال الأعداد فقط.

ينقصنا

أسئلة خارجية :

$\boxed{3}\ \int e^{-x}\ dx$

$-x \longrightarrow -1$

$\int \frac{-1}{-1} e^{-x}\, dx = \frac{1}{-1} \int -1\, e^{-x}\, dx = -1\, e^{-x} + c$

$\boxed{4}\ \int 6x^2\, e^{x^3} dx$

$x^3 \longrightarrow 3x^2$

$6 \int \frac{3}{3} x^2\ e^{x^3} dx = 6 \times \frac{1}{3} \int 3\, x^2\, e^{x^3}\, dx$

$= 2\, e^{x^3}\, dx$

H.W:

page 329

أوجدي التكامل .

24) $\int (2\cos x - \sqrt{e^{2x}})\, dx$

$= \int (2\cos x - e^{x})\, dx = 2\sin x - e^{x} + c$

---

25) $\int \frac{e^x + 3}{e^x}\, dx = \int \frac{e^x}{e^x} + \frac{3}{e^x}\, dx$

$\int 1 + 3e^{-x} = \int 1 + 3 \int \frac{-1}{-1} e^{x}\, dx = x - 3e^{-x} + c$

---

25) $\int \frac{e^x}{e^x + 3} = \ln |e^x + 3| + c$

$(e^x + 3)' = e^x =$ البسط

أوجدي الدالة الأصلية ⟸ { أوجدي التكامل }

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

$f(x) > 0$

$$\ln f(x) \underset{\longleftarrow}{\xrightarrow{\text{اشتقاق}}} \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x)$$

مشتقة المقام

=

البسط عندها

- الجواب هو ln المقام

$\ln |f(x)|$

أسئلة خارجية :

1 $\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1| + c$

$(\text{المقام})' = (x+1)' = 1 =$ البسط

عندها الجواب هو ln المقام ..

2 $\int \frac{2}{2x-5}\,dx = \ln|2x-5| + c$

$(2x-5)' = 2 =$ البسط

3 $\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx = \ln|x^2+4| + c$

$(x^2+4)' = 2x =$ البسط

4 $\int \frac{x}{x^2+\sqrt{2}}\,dx$

$x^2-\sqrt{2} \rightarrow \textcircled{2}x$

$$\int \frac{2}{2}\,\frac{x}{x^2-\sqrt{2}}\,dx = \frac{1}{2}\int 2\,\frac{x}{x^2-\sqrt{2}}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-\sqrt{2}| + c$$

H.W

page 329

㉓ $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + c$

$(\sin x)' = \cos x =$ البسط

㉔ $\int (2\cos x - \sqrt{e^{2x}})\, dx$

$= \int (2\cos x - e^{x})\, dx = 2\sin x - e^{x} + c$

ملاحظة:

$\sqrt{e^{2x}} \rightarrow (e^{2x})^{\frac{1}{2}}$

$e^{2x(\frac{1}{2})}$

$= \underline{\underline{e^{x}}}$

$\int \tan x\, dx$

$\int \frac{(-1)\sin x}{(-1)\cos x} dx$ نضرب البسط والمقام بـ $\boxed{-1}$

$\cos x \rightarrow ⊖\sin x$

$-1 \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx$

$= -\ln|\cos x| + c$

سؤال خارجي:

$\int \cot x\, dx$

$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$

$(\sin x)' \rightarrow \cos x =$ البسط

$= \ln|\sin x| + c$

㉗ $\int x^{\frac{1}{4}} (x^{\frac{5}{4}} - 4)\, dx$

$\int (x^{\frac{1}{4}} x^{\frac{5}{4}} - 4x^{\frac{1}{4}})\, dx$

$\int x^{\frac{5}{2}} - 4x^{\frac{1}{4}})\, dx$

$\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - 4\frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} + c = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 4\frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} + c$

page $\underline{\underline{330}}$ أوجدي الدالة $f(x)$ التي تحقق الشروط المعطاة:

38) $f''(x) = 20x^3 + 2e^{2x}$ $\left.\begin{array}{l} f'(0) = -3 \\ f(0) = 2 \end{array}\right\}$ لايجاد c

ملاحظة:

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\text{اشتقاق}"] & f' \arrow[r] & f'' \arrow[ll, bend left, "\text{التكامل}"] \end{tikzcd}$$

$f' = \int f''$

نشتق الأس $2x \to 2$

$f' = \int (20x^3 + \textcircled{2}\underline{\underline{e}}^{2x})\,dx = 20\frac{x^{3+1}}{3+1} + e^{2x} + c$

$f'(x) = 5x^4 + e^{2x} + c$ $\quad f'(\underset{x}{0}) = -3 \leftarrow y$

$-3 = 5(0)^4 + e^{2(0)} + c$

$-3 = 1 + c$

$c = -4 \Longrightarrow \boxed{f'(x) = 5x^4 + e^{2x} - 4}$

$f = \int f'$

$f = \int (5x^4 + e^{2x} - 4)\,dx$

$2x \to 2$

$f = 5\int \frac{x^{4+1}}{4+1}dx + \int \frac{2}{2}(e^{2x})dx - \int 4\,dx$

$f = \frac{\cancel{5}x^5}{\cancel{5}} + \frac{1}{2}e^{2x} - 4x + c$

$f(x) = x^5 + \frac{1}{2}e^{2x} - 4x + c$ $\quad f(0) = 2$

$2 = (0)^5 + \frac{1}{2}e^{2(0)} - 4(0) + c$

$2 = \frac{1}{2} + c \to \boxed{c = 1.5}$

$f(x) = x^5 + \frac{1}{2}e^{2x} - 4x + 1.5$

page 330

35) $f'(x) = 3e^x + x \quad , \quad f(0) = 4$

$$f = \int f'$$

$$f(x) = \int (3e^x + x)\,dx$$

$$f(x) = 3e^x + \frac{x^{1+1}}{1+1} + c$$

$$4 = 3e^0 + \frac{0}{2} + c$$

$$4 = 3 + c \longrightarrow \boxed{c = 1}$$

$$f(x) = 3e^x + \frac{1}{2}x^2 + 1$$

page 330

51) أوجدي دالة $f(x)$ تكون فيها النقطة (1,2) على التمثيل البياني للدالة وميل المماس عند (1,2) هو 3.

$f'(1) = 3 \qquad f''(x) = x - 1$

$f' = \int f''$

$f' = \int (x-1)\,dx = \frac{x^2}{2} - x + c$

$f'(x) = \frac{1}{2} x^2 - x + c$

$3 = \frac{1}{2} (1)^2 - (1) + c \leftarrow f'(1) = 3$

$\boxed{c = 3.5}$

$f' = \frac{1}{2} x^2 - x + 3.5$

$f = \int f'\,dx = \int \frac{1}{2} x^2 - x + 3.5$

$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} x^3 - \frac{x^2}{2} + 3.5x + c$

$2 = \frac{1}{6} (1)^3 - \frac{1^2}{2} + 3.5(1) + c$

$\boxed{c = -\frac{7}{6}}$

$f = \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + 3.5x - \frac{7}{6}$

الدرس 5-2 : المجموع والرمز سيجما

سؤال خارجي :

أوجدي مجموع أول ست حدود :

$f(i) = 3i^2$

$i = 1 \rightarrow 3(1)^2 = 3$ +

$i = 2 \rightarrow 3(2)^2 = 12$

$i = 3 \rightarrow 3(3)^2 = 27$ +

$i = 4 \rightarrow 3(4)^2 = 48$ +

$i = 5 \rightarrow 3(5)^2 = 75$ +

$i = 6 \rightarrow 3(6)^2 = 108$

المجموع = 273

---

page 337

5

$$\sum_{i=1}^{6} (3i^2) = 3(1)^2 + 3(2)^2 + 3(3)^2 + 3(4)^2 + 3(5)^2 + 3(6)^2$$

$$= 273$$

$$\sum_{i=3}^{7} (i^2+i) = (3)^2 + 3 + (\overset{4}{\blacksquare})^2 + \overset{4}{\blacksquare} + (\overset{5}{\blacksquare})^2 + \blacksquare 5 + (6)^2 + 6 + (7)^2 + 7$$

$$= 110$$

---

* ملاحظة :

① توزيع $\sum$ على

\+ و - فقط

② اخراج معامل

المتحول خارج $\sum$

$\sum 3i \mp 5$

$\sum 3i \mp \sum 5$

$3 \sum i \mp \sum 5$

القواعد:

$\boxed{1}\ \sum_{i=1}^{n} C = C(n)$

Ex:- $\sum_{i=1}^{4} 5 = 5(4) = 20$

$\boxed{2}\ \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Ex:- $\sum_{i=1}^{7} i = \frac{7(7+1)}{2} = 28$

$\boxed{3}\ \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

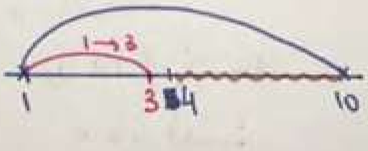
$\boxed{4}\ \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

---

* سـؤال خارجي:

* أوجدي المجموع :-

$\sum_{i=4}^{10}$



$\sum_{i=4}^{10} = \sum_{i=1}^{10} - \sum_{i=1}^{3}$

ملاحظة:

$\sum_{\boxed{i=1}}^{10}$ ← إذا كانت

تساوي ١؟

نوع

$$\sum_{i=5}^{20} = \sum_{i=1}^{20} - \sum_{i=1}^{4}$$

---

page 337

استخدمي قواعد المجموع لحساب المجموع :-

9) $\sum_{i=1}^{70} 3i - 1$

$$= \sum_{i=1}^{70} 3i - \sum_{i=1}^{70} 1 = 3 \sum_{i=1}^{70} i - \sum_{i=1}^{70} 1$$

$$= 3 \ \frac{70(70+1)}{2} - 1(70)$$

$$= 7385$$

H.W:

page 337

استخدمي قواعد المجموع لحساب المجموع .

⑪ $\sum_{i=1}^{40} (4 - i^2)$

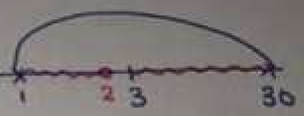
$$= \sum_{i=1}^{40} 4 - \sum_{i=1}^{40} \boxed{i^2}$$

$$= 4(40) - \frac{40(40+1)(2\times40+1}{6}$$

$$= \boxed{-21980}$$

Page $\underline{\underline{337}}$ استخدمي قواعد المجموع لحساب المجموع:

15) $\sum_{i=3}^{30} \left[(i-3)^2 + i - 3 \right]$



$= \sum_{i=1}^{30} - \sum_{i=1}^{2}$

$(i-3)^2 = i^2 - 2\times3\times i + 3^2$

$= \boxed{i^2 - 6i + 9}$

$(i-3)^2 + i - 3$

$i^2 - \boxed{6i} + ⑨ + \boxed{i} - ③$

$\boxed{i^2 - 5i + 6}$

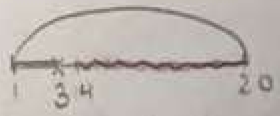
$\sum_{i=1}^{30} ⓘ^2 - 5i + 6 - \sum_{i=1}^{2} i^2 - 5i + 6$

$\frac{30(30+1)(2\times30+1)}{6} - 5\,\frac{30(30+1)}{2}$

$+ 6(30) - \frac{2(2+1)(2\times2+1)}{6} - 5\,\frac{2(2+1)}{2} + 6(2)$

$= \boxed{7308}$

16) $\sum_{i=4}^{20} (i-3)(i+3) = \sum_{i=1}^{30} i^2 - 9$

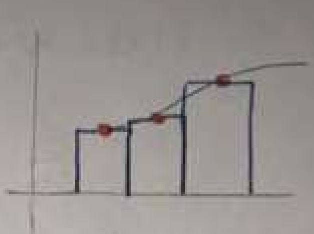


$= \sum_{i=1}^{20} i^2 - 9 - \sum_{i=1}^{3} i^2 - 9$

$\frac{20(20+1)(2\times20+1)}{6} - 9(20) - \frac{3(3+1)(2\times3+1)}{6} - 9(3)$

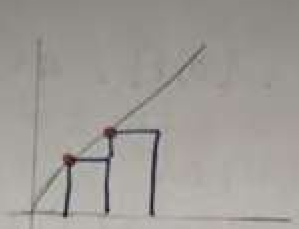
$= 2703$

5-3 : المساحة



تقريب نصفي

$x_i = x_0 + i\Delta x + \frac{\Delta x}{2}$



تقريب يساري

$x_i = x_0 + i\Delta x + \Delta x$

تقريب يميني

$x_i = x_0 + i\Delta x$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \overset{\text{ل الطول}}{\boxed{f(x_i)}}\ \overset{\text{س عرض}}{\boxed{\Delta x_i}}$$

▭ $A = L \times \boxed{W} = f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + f(x_3)\cdot\Delta x$

$f(x_c) = y_c$ ↩ ↳ $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$y_1, y_2, y_3,$ $A = \left(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\right)\Delta x$

$= f(x_c)\,\Delta x$

$$A = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

ملاحظة :-

x_0 بداية الفترة (a)

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$i\Delta x = \left(\frac{b-a}{n}\right) i$

page $\underline{\underline{344}}$

قرّب المساحة تحت المنحنى على الفترة المعطاة باستخدام n مستطيلاً وقرّب القيم:

5) $f(x) = x^2+1 \ , \ [0,1] \ , \ n=16$

$\Delta x = ? \quad \frac{b-a}{n}$

$x_i = ?$

$\boxed{x_0 = 0}$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

[1] $A_{16} = \sum_{i=1}^{16} f(x_i)\,\Delta x$

[2] $\Delta x = \frac{1-0}{16} = \frac{1}{16}$

[3] $i\Delta x = i \times \frac{1}{16} = \frac{i}{16}$

- $\underline{\underline{\text{يميني}}}$:

$$x_i = x_0 + i\Delta x$$

[4] $x_i = 0 + i\,\frac{1}{16}$

$f(x_i) = x_i^2 + 1 = \left(\frac{i}{16}\right)^2 + 1$

$$A_{16} = \sum_{i=1}^{16} \left((\frac{i}{16})^2 + 1 \right) \frac{1}{10}$$

$$A_{16} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} \left[\left(\frac{i}{16}\right)^2 + 1 \right] = 1.36$$

- $\underline{\underline{\text{يساري}}}$:

$$A_{16} = \Delta x \sum_{i=1}^{16} f(x_i) = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} f(x_i)$$

يتبع ←

$$x_i = x_0 + i\Delta x + \Delta x$$

$$x_i = 0 + \frac{i}{16} + \frac{1}{16} = \frac{i}{16} + \frac{1}{16} = \frac{i+1}{16}$$

$$f(x_i) = x_i^2 + 1 = \left(\frac{i+1}{16}\right)^2 + 1$$

$$A_{16} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} \left[\left(\frac{i+1}{16}\right)^2 + 1 \right] = \boxed{1.43}$$

• منتصف:

$$x_i = x_0 + i\Delta x + \frac{\Delta x}{2}$$

$$x_i = 0 + \frac{i}{16} + \frac{\frac{1}{16}}{2} = \boxed{\frac{i}{16} + \frac{1}{32}}$$

$$f(x_i) = x_i^2 + 1 = \left(\frac{i}{16} + \frac{1}{32}\right)^2 + 1$$

$$A_{16} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} \left[\left(\frac{i}{16} + \frac{1}{32}\right)^2 + 1 \right] = \boxed{1.5}$$

page 344

قرب المساحة تحت المنحنى على الفترة المعطاة
باستخدام n مستطيلاً وقواعد القيم : x_0 , a

7) $f(x) = \sqrt{x+2}$, $[\overset{a}{\underline{1}}, 4]$, $n = 16$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x$$

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$x_i = ?!$

$x_0 = a$

① $A_{16} = \sum_{i=1}^{16} f(x_i) \Delta x$ ② $\Delta x = \frac{4-1}{16} = \frac{3}{16}$

③ $i \Delta x = i \times \frac{3}{16} = \frac{3i}{16}$

● يميني :-

$x_i = x_0 + i \Delta x$

$x_i = 1 + \frac{3i}{16} = \left\{ \frac{16+3i}{16} \right\}$ ← في حال توحيد المقامات

$f(x_i) = \sqrt{x_i + 2} = \sqrt{① + \frac{3i}{16} + ②} = \sqrt{\frac{3i}{16} + 3}$

$A_{16} = \frac{3}{16} \sum_{i=1}^{16} \sqrt{\frac{3i}{16} + 3} = 6.2663$

● يساري :-

$A_{16} = \Delta x \sum_{i=1}^{16} f(x_i) = \frac{3}{16} \sum_{i=1}^{16} f(x_i)$

$x_i = x_0 + i \Delta x + \Delta x$

$x_i = ① + \frac{3i}{16} + \left(\frac{3}{16}\right) = \frac{3i}{16} + \frac{19}{16}$

$f(x_i) = \sqrt{x_i + 2} = \sqrt{\frac{3i}{16} + \frac{19}{16} + 2}$

$A_{16} = \frac{3}{16} \sum_{i=1}^{16} \sqrt{\frac{3i}{16} + \frac{51}{16}} = 6.4009$

• منتصفي :

$$x_i = x_0 + i\Delta x + \frac{\Delta x}{2}$$

$$x_i = 1 + \frac{3i}{16} + \frac{\frac{3}{16}}{2}$$

$$x_i = \frac{3i}{16} + 1 + \frac{3}{32} = \boxed{\frac{3i}{16} + \frac{35}{32}}$$

$$A_{16} = \frac{3}{16} \sum_{i=1}^{16} \sqrt{\frac{3i}{16} + \frac{35}{32} + 2} = \boxed{6.334}$$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

page 344 استخدمي مجموع ريمان ونهاية لإيجاد قيمة المساحة الدقيقة تحت المنحنى..

11) $y = x^2 + 1$, (a) $[0,1]$ $n = ?!$

ريمان $A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

① $\Delta x = \frac{b-a}{n} \longrightarrow \Delta x = \frac{1-0}{n} \Longrightarrow \boxed{\Delta x = \frac{1}{n}}$

② $i\Delta x = i \times \frac{1}{n} = \boxed{\frac{i}{n}}$

$= \frac{1}{n} i$

③ $x_i = x_0 + i\Delta x = 0 + \frac{i}{n} = \boxed{\frac{i}{n}}$

④ $f(x_i) = x_i^2 + 1 = \left(\frac{1}{n} i\right)^2 + 1 = \frac{1}{n^2} i^2 + 1$

$$\left(\frac{1}{n} i\right)^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 i^2 = \frac{1^2}{n^2} i^2$$

يتبع ←

$$A_n = \sum f(x_i)\,\Delta x$$

$$A_n = \sum \left(\frac{1}{n^2} i^2 + 1\right) \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{n^2} i^2 + 1\right]$$

$$= \frac{i}{n} \left[\frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 1(n)\right]$$

$$= \frac{1}{n} \times \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{\cancel{n}} (\cancel{n})$$

$$A_n = \frac{2n^2+3n+1}{6n^2}$$

$$A = \text{Lim } A_n = \text{Lim } \frac{2n^2 + \cdots}{6n^2 \cdots} + \text{Lim}$$

$$= \frac{2}{6} + 1 = \frac{4}{3}$$

$$\begin{array}{r} 2n^2 + n \\ +2n+1 \\ \hline 2n^2+3n+1 \end{array}$$

5-4 : التكامل المحدود

التكامل المحدد	التكامل
$\int_0^3 2x\,dx$	$\int 2x\,dx$
$= \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} + \cancel{c} = {}_0^3\left[x^2\right]$	$= \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} + c$
$= \left((3)^2\right) - \left(\cancel{(0)^2}\right) = 9$	$= x^2 + C$

ملاحظات :

① التكامل المحدود : $[a,b]$ او $\int_b^a$ او $a \le x \le b$

② $\int_{\underset{\text{صغير}}{a}}^{\overset{\text{كبير}}{b}}$

③ $\int_5^2 = -\int_2^5$

④ التكامل المحدد هو الناتج عن عدد ثابت .

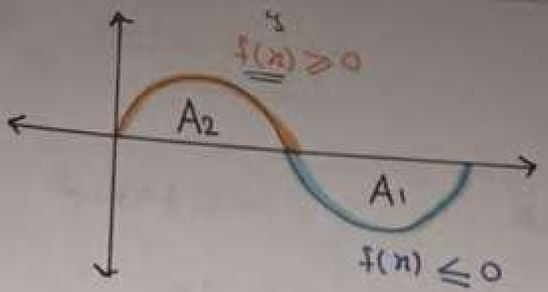
⑤ $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x}_{\text{المساحة}} \,,\ [a,b]$$

ex: $$\int_0^3 2x\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2x_i \cdot \Delta x$$

* قانون نقطة المنتصف :

⑥ $$C_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$$

7



تكامل عادي	مساحة
الجواب + ، - ، صفر	لا يكون الجواب سالب ولا صفر
$A_2 - A_1$	$A_1 + A_2$

$c_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$

page $\underline{\underline{356}}$ استخدمي قاعدة نقطة المنتصف مع $n = 6$ لتقدير قيمة التكامل :-

$\boxed{1}$ $\int_0^3 (x^3 + x)\,dx$

x_i , x_{i-1}

$$\int_0^3 (x^3 + x)\,dx = \sum_{i=1}^{6} f(c_i)\,\Delta x$$

① $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}$ ② $\Delta x_i = \boxed{\frac{1}{2} i}$

③ $x_i = x_0 + i\Delta x \longrightarrow x_i = 0 + \frac{1}{2} i \Longrightarrow x_i = \boxed{\frac{1}{2} i}$

④ $x_{i-1} = \frac{1}{2}(i-1)$

يتبع ←

⑤ $C_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$

$$C_i = \frac{\frac{1}{2} i + \frac{1}{2}(i-1)}{2} = \frac{\frac{1}{2}(i+i-1)}{2}$$

$$= \frac{1}{4}(2i-1)$$

$$F(c_i) = C_i^3 + C_i$$

$$= \left(\frac{1}{4}(2i-1)\right)^3 + \left(\frac{1}{4}(2i-1)\right)$$

$$\int \cdot \sum_{i=1}^{6} \left[\left(\frac{1}{4}(2i-1)^3 + \frac{1}{4}(2i-1)\right] \frac{1}{2} \leftarrow \Delta x$$

$$= \boxed{24.75}$$

page 356 استخدمي قاعدة نقطة المنتصف مع $n = 6$

لتقدير قيمة التكامل:

② $\int_0^3 \sqrt{x^2+1}\, dx$

خطوات الحل:

x_i, x_{i-1}

↓

c_i

↓

$f(c_i)$

↓

$\sum f(c_i)\Delta x$

$$\int_0^3 \sqrt{x^2+1}\, dx = \sum_{i=1}^{6} f(c_i)\Delta x$$

① $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = \frac{3}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}$

② $\Delta x_i = \boxed{\frac{1}{2} i}$

③ $x_i = x_0 + i\Delta x$
$= 0 + \frac{1}{2} i$
$= \boxed{\frac{1}{2} i}$

④ $x_{i-1} = \boxed{\frac{1}{2}(i-1)}$

⑤ $c_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2} = \frac{\frac{1}{2} i + \frac{1}{2}(i-1)}{2} = \frac{\frac{1}{2}(i+i-1)}{2} = \boxed{\frac{2i-1}{4}}$

⑥ $f(c_i) = \sqrt{c_i^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{2i-1}{4}\right)^2 + 1}$

⑦ $\int_0^3 \sqrt{x^2+1}\, dx = \sum_{i=1}^{6} f(c_i)\Delta x$

$$\sum_{i=1}^{6} \left(\sqrt{\left(\frac{2i-1}{4}\right)^2 + 1}\right)\frac{1}{2} = \boxed{5.64}$$

Page 356

③ $\int_0^\pi \sin x^2 \, dx = \sum_{i=1}^{6} f(c_i)\,\Delta x$

① $\Delta x = \frac{\pi}{6}$

② $i\,\Delta x = \frac{\pi}{6}\,i$

③ $x_i = x_0 + i\,\Delta x$
$= \frac{\pi}{6}\,i$

④ $x_{i-1} = \frac{\pi}{6}(i-1)$

⑤ $c_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2} = \frac{\frac{\pi}{6}\,i + \frac{\pi}{6}(i-1)}{2} = \frac{\frac{\pi}{6}(i+i-1)}{2}$

$= \frac{\pi(2i-1)}{12}$

⑥ $f(c_i) = \sin c_i^2 = \sin\left(\frac{\pi(2i-1)}{12}\right)^2$

⑦ $\int_0^\pi \sin x^2 \, dx = \sum_{i=1}^{6} \sin\left(\frac{\pi(2i-1)}{12}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{6}$

$= 0.8685$

page $\underline{\underline{356}}$

أوجد قيمة التكامل بحساب نهاية مجموع ريمان .

لا يوجد $\underline{\underline{n}}$

9) $\int_0^1 2x\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$

$\boxed{1}$ $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$ $\boxed{2}$ $i\,\Delta x = \frac{1}{n} i$

$\boxed{3}$ $x_i = 0 + \Delta x\, i \rightarrow x_i = 0 + \frac{1}{n} i = \frac{1}{n} i$

$\boxed{4}$ $f(x_i) = 2x_i \rightarrow f(x_i) = 2\left(\frac{1}{n} i\right) = \frac{2}{n} i$

- $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{n} \underline{\underline{i}}\right) \cdot \frac{1}{n}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2}}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{\cancel{2}}$

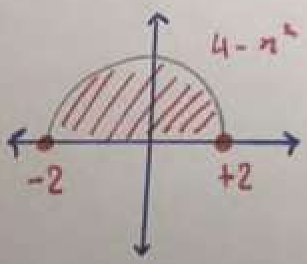
$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \boxed{1}$

---

page $\underline{\underline{356}}$

أكتب مجمل المساحة المعطاة في صورة تكامل .

⑮ المساحة فوق المحور -x وتحت $y = 4 - x^2$



$\int_{-2}^{2} (4-x^2)\,dx$

$4 - x^2 = 0$

$4 = x^2$

$x = \pm 2$

* أو باستخدام mode→5→3

* أو برسم جدول

15 → 20

page 356 أكتبي (مثل) المساحة المظللة في صورة تكامل أو مجموع تكاملات :

⑯ المساحة فوق المحور -x وتحت $y = 4x - x^2$

$4x - x^2 = 0$

$x(4 - x) = 0$

$x = 0 \quad x = 4$

$$\int_0^4 (4x - x^2)\,dx$$

---

⑰ المساحة تحت المحور -x وفوق $y = x^2 - 4$

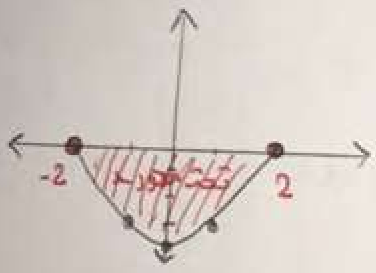
1 نوجد أصفار الدالة :

$x^2 - 4 = 0$

$x = \pm 2$

2 نرسم ضمن الأصفار :

x	-2	-1	0	1	2
y	0	-3	-4	-3	0



$$-\int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\,dx$$

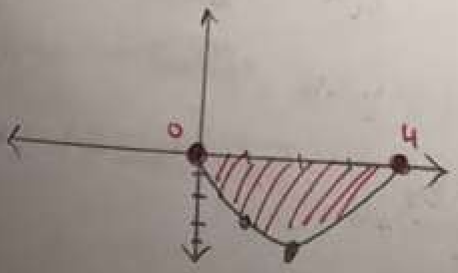
---

⑱ المساحة تحت المحور x وفوق $y = x^2 - 4x$

x	0	1	2	4
y	0	-3	-4	0

$x^2 - 4x = 0$

$\hookrightarrow x = 0 \ , \ x = 4$

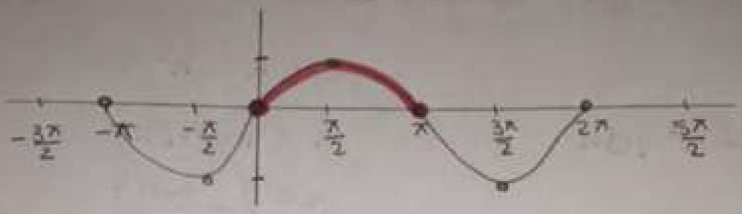


$$-\int_0^4 (x^2 - 4x)$$

page 356

⑲ المساحة بين $y = \sin x$ والمحور $-x$

لـ $0 \leq x \leq \pi$



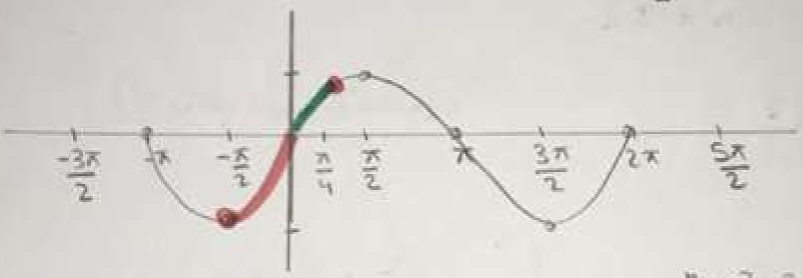
$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

---

⑳ المساحة بين $y = \sin x$ والمحور $-x$

لـ $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

$A = A_1 + A_2$



تحت محور x

فوق محور x

$$-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x \, dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin x \, dx$$

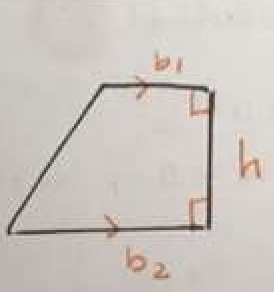
ملاحظات :-

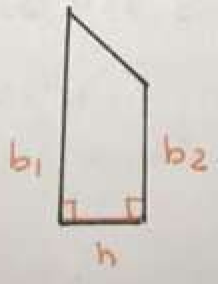
* مساحة المستطيل = $L \times w$

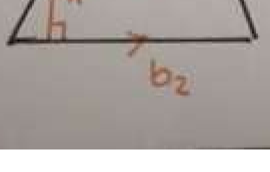
* مساحة المربع = x^2

* مساحة المثلث = $\frac{1}{2} hb$

* مساحة شبه المنحرف = $\frac{b_1 + b_2}{2} \times h$







page 356

احسبي $\int_0^4 f(x)\,dx$

23) $f(x) = \begin{cases} 2x & x < 1 \quad \text{إذا} \\ 4 & x \geq 1 \quad \text{إذا} \end{cases}$

ثابتة

الرسم :

$f(x) = 2x$

x	-1	0	①
y	-2	0	②

مفتوحة

$f(x) = 4$

x	1	2	3	4
y	4	4	4	4

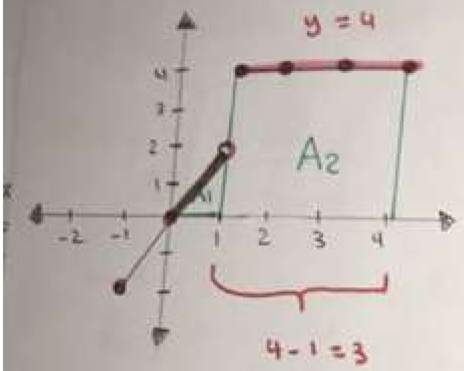
ملاحظة:

لأن الدالة غير متصلة لا نأخذ $\int_0^4$ مرة واحدة

- نجزئ من البداية ← الانفصال

النهص

- الانفصال ← النهاية



الطريقة (1)

$$\int_0^4 f(x) = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^4 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 2x\,dx + \int_1^4 4\,dx$$

الطريقة (2)

$$\int_0^4 f(x) = A_1 + A_2$$

$$A_1 \Delta = \frac{1}{2}(1)(2) = 1$$

$$A_2 \square = 3 \times 4 = 12$$

$>$ $12 + 1 = 13$

H.w page 356

$\int_0^4 f(x)\,dx$ احسبي

[illegible] 24) $f(x) = \begin{cases} 2 & x \leq 2 \\ 3x & x > 2 \end{cases}$

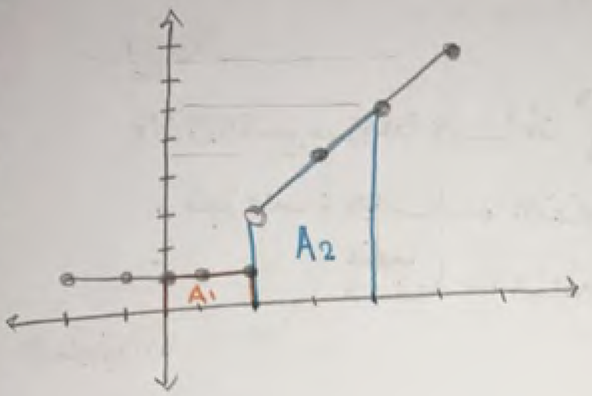
$\overset{2}{}\;\underset{2}{|}\;\overset{3x}{}$

$f(x) = 2$

x	-2	-1	0	1	2
y	2	2	2	2	2

$f(x) = 3x$

x	2	3	4	5
y	6	9	12	15



$$\int_0^4 f(x) = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^2 2\,dx + \int_2^4 3x\,dx$$

$$\int_0^4 f(x) = A_1 + A_2$$

$$A_1 \; \square = 2\ (2) = \boxed{4}$$

$$A_2 = \frac{b_1 + b_2}{2} \times h = \frac{4+12}{2} \times 2 = \boxed{16}$$

$$16 + 4 = \boxed{20}$$

* نظرية القيمة المتوسطة:

$$f_{ave} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

* تقدير التكامل من خلال القيمة المتوسطة:

$$(b-a) \min f \leq \int_a^b f(x) \leq (b-a) \overset{\max}{\cancel{\max}} f$$

---

page 356

احسبي القيمة المتوسطة للدالة في الفترة المعطاة:

25) $f(x) = 2x+1 \ , \ [0,4]$

$$f_{avg} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

$$f_{avg} = \frac{1}{4-0} \int_0^4 (2x+1)\, dx$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} + x \right]_0^4$$

$$= \frac{1}{4} \left[((4)^2 + (4)) - \cancel{((0)^2 + (0))} \right]$$

$$= \frac{1}{4} (20) = \boxed{5}$$

page 356

استخدمي نظرية القيمة المتوسطة في التكامل لتقدير قيمة التكامل :-

29) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos x^2 \, dx$

$$\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\left(3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \leq \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos x^2 \, dx \leq\right.$$

$$\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\left(3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right.$$

$$-1.227 \leq \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos x^2 \, dx \leq 0.7172$$

---

page 357

* استخدمي التمثيل البياني لتحديد ما إذا كانت $\int_0^2 f(x)\,dx$ موجبة أو سالبة :-

45)

46)

47)

48)

استخدمي الخواص لكتابة تعبير في صورة
تكامل مفرد.

page 356

35

(a) $\int_0^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{3} f(x)\,dx$

$\int_0^{3} f(x)\,dx$

(b) $\int_0^{3} f(x)\,dx - \int_2^{3} f(x)\,dx$

$\int_0^{2} f(x)\,dx$

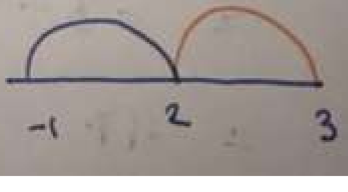
36

(a) $\int_0^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{1} f(x)\,dx$

$\int_0^{2} f(x)\,dx - \int_1^{2} f(x)\,dx$

$\int_0^{1} f(x)\,dx$

(b) $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{3} f(x)\,dx$



$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$

page 3<u>56</u> $\int_1^3 g(x)\,dx = -2$ و $\int_1^3 f(x)\,dx = 3$ فرضاً أنّ
أوجد :

37) (a) $\int_1^3 [f(x) + g(x)]\,dx = \int_1^3 f(x)\,dx + \int_1^3 g(x)\,dx$

$3 + (-2) = 1$

(b) $\int_1^3 [2f(x) - g(x)]\,dx$

$2(3) - (-2) =$
$6 + 2 = 8$

38) (a) $\int_3^1 [f(x) - g(x)]\,dx$

$= - \int_1^3 [f(x) - g(x)]\,dx$

$= - (3 - (-2))$

$= -5$

(b) $\int_1^3 [4g(x) - 3f(x)]\,dx$

$4(-2) - 3(3)$

$= -8 - 9$

$= -17$

5-5 : النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل

استخدمي الجزء الأول من النظرية الأساسية لحساب كل تكامل بدقة.

page $\underline{\underline{366}}$

① $\int_0^2 (2x-3)\,dx$

$$\left[\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} - 3x\right]_0^2 = \left[x^2 - 3x\right]_0^2$$

$$= \left((2)^2 - 3(2)\right) - \cancel{\left((0)^2 - 3(0)\right)}$$

$$= \boxed{-2}$$

---

② $\int_0^3 (x^2-2)\,dx$

$$\left[\frac{x^3}{3} - 2x\right]_0^3 = \left(\frac{(3)^3}{3} - 2(3)\right) - \left(\frac{(0)^3}{3} - 2(0)\right)$$

$$= 3 - 0 = \boxed{3}$$

---

5) $\int_1^4 \left(x\sqrt{x} + \frac{3}{x}\right) dx = \int_1^4 \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-1}\right) dx$

$$\left[x^{\frac{3}{2}} + 3x^{-1}\right]_1^4 = \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{3x^{\boxed{-1+1}}}{-1+1}\right]_1^4 \leftarrow = 0 \quad X$$

$\nearrow$

$\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} +$

+نحل بطريقة أخرى:-

page 366

5) $\int_1^4 (x\sqrt{x} + \frac{3}{x})\,dx = \int_1^4 (x \cdot x^{\frac{1}{2}} + 3\frac{1}{x})\,dx$

$= \int_1^4 x^{\frac{3}{2}} + 3\frac{1}{x} = {}_1^4\left[\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + 3\ln|x|\right]$

$(\frac{2(4)^{\frac{5}{2}}}{5}) + 3\ln|4| - (\frac{2(1)^{\frac{5}{2}}}{5} + 3\ln|1|$

$= 16.5589$

---

6) $\int_1^2 (4x - \frac{2}{x^2})\,dx = \int_1^2 (4x - 2x^{-2})\,dx$

$= {}_1^2\left[\frac{4x^2}{2} - 2\frac{x^{-1}}{-1}\right] = {}_1^2\left[2x^2 - 2x^{-1}\right]$

$= \left[2(2)^2 - 2(2)^{-1}\right] - \left[2(1)^2 - 2(1)^{-1}\right]$

$= 5$

page 366

$(-3x)' \rightarrow -3$

7) $\int_0^1 (6e^{\boxed{-3x}} + 4)\,dx = \int_0^1 6e^{-3x} + \int 4\,dx$

$6\int_0^1 \frac{-3}{3}\ e^{-3x}\,dx + \int 4\,dx$

$\frac{6}{-3}\int_0^1 -3e^{-3x}\,dx + \int 4\,dx$

$\Big[-2e^{-3x} + 4x\Big]_0^1 =$

$\Big[-2e^{-3(1)} + 4(1)\Big] - \Big[-2e^{-3(0)} + 4(0)\Big]$

$= 5.9004$

---

8) $\int_0^2 \left(\frac{e^{2x} - 2e^{3x}}{e^{3x}}\right) dx$

$\int_0^2 (e^{2x} - e^{3x})\,e^{-3x}\,dx = \int_0^2 e^{2x} \cdot e^{-3x} - e^{3x} \cdot e^{-3x}\,dx$

$(-x)' = -1$

$\int_0^2 e^{-x} - e^0 = \int e^{\boxed{-x}} - \int \boxed{e^0}' \leftarrow \frac{1}{-1}\int -1\,e^{-x} - \int x$

$\Big[-e^{-x} - x\Big]_0^2 = 3.1$

$\Big[-e^{-x} - x\Big]$

Page 366

أوجـــدي الاشـتقـــاق $f'(x)$

25) $\int_0^x (t^2 - 3t + 2)\,dt$

$\frac{d}{dx} \int_0^{x} (t^2 - 3t + 2)\,dt$

$(x')(x^2 - 3x + 2) - 0'(\cancel{0}^2 - 3\cancel{0} + 2)$

$1\,(x^2 - 3x + 2) - 0\,\cancel{(\cancel{0}^2 - 3\cancel{0} + \overset{2}{\cancel{2}})}$

$= (1)(x^2 - 3x + 2) = \boxed{x^2 - 3x + 2}$

---

26) $\frac{d}{dx} \int_2^x (t^2 - 3t - 4)\,dt$

$(x)'(x^2 - 3x - 4) - (2)'(\overset{2}{\cancel{x}}{}^2 - 3\overset{\times 2}{\cancel{x}} - 4)$

$1\,(x^2 - 3x - 4) - 0\,\cancel{(\overset{2}{\cancel{x}}{}^3 - 3\overset{\times 2}{\cancel{x}} - 4)}$

$= \boxed{x^2 - 3x - 4}$

---

27) $\int_0^{x^2} (e^{-t^2} + 1)\,dt$

$(x^2)'(e^{-(x^2)^2} + 1) - (0)'\,\cancel{(e^{-(0)^2} + 1)}$

$2x\,(e^{-x^4} + 1)$

page 366

17) $\int_0^t (e^{\frac{x}{2}})^2 \, dx$

$(e^{\frac{x}{2}})^2 = e^{\frac{x}{2}\cdot 2}$

$= e^x$

$\int_0^t e^x = {}_0^t[e^x]$

$= e^t - e^0 = \boxed{e^t - 1}$

18) $\int_0^t (\overset{=1}{\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x}}) \, dx$

$\int_0^t 1 = {}_0^t[x]$

$= (t) - (0)$

$= t$

ملاحظة :-

$\int_0^{t} x^2 \, dx = \frac{t^3}{3}$

$= {}_0^t\left[\frac{x^3}{3}\right]$

$\left(\frac{t^3}{3}\right) - \left(\cancel{\frac{0^3}{3}}\right)$

$\int_2^t x' \, dx$

$= {}_2^t\left[\frac{1}{2} x^2\right]$

$= \left(\frac{1}{2}(t)^2\right) - \left(\frac{1}{2}(2)^2\right)$

$= \frac{1}{2} t^2 - 2$

$\int_t^0 x \, dx'$

$= {}_t^0\left[\frac{1}{2} x^2\right]$

$= \cancel{\left(\frac{1}{2}(0)^2\right)} - \left(\frac{1}{2}(t^2)\right)$

$= -\frac{1}{2} t^2$

إذا كان لدينا تكامل محدد إلى
متحول أو من متحول إلى حد
وطلب منا التكامل نطبق قواعد التكامل
بشكل عادي ونعوض ..

Page 366

28) $\int_{x}^{2} \sec t \, dt$

$(2)' (\sec 2) - (x)' (\sec x)$

$0 \, (\cancel{\sec 2}) - 1 \, (\sec x)$

$= \boxed{-\sec x}$

---

29) $\int_{e^x}^{2-x} \sin t^2 \, dt$ *

$(2-x)' \sin (2-x)^2 - (e^x)' \sin (e^x)^2$

$-1 \, (\sin (2-x)^2) - e^x \, (\sin e^{2x})$

---

30) $\int_{2-x}^{xe^x} e^{2t} \, dt$

$(xe^x)' \, e^{2(xe^x)} - (2-x)' \, e^{2(2-x)}$

$(x' \cdot e^x + x(e^x)') \, e^{2(xe^x)} - (-1) \, e^{4-2x}$

$(e^x + xe^x) \, e^{2(xe^x)} + e^{4-2x}$

page 366

㉛ $\int_{x^2}^{x^3} \sin(3t)\, dt$

$f'(x) = (x^3)' \sin 3(x^3) - (x^2) \sin 3(x^2)$

$3x^2 \sin 3x^3 - x^2 \sin 3x^2$

㉜ $\int_{3x}^{\sin x} (t^2 + 4)\, dt$

$= (\sin x)' \left((\sin x)^2 + 4\right) - (3x)' \left((3x)^2 + 4\right)$

$\cos x\,(\sin^2 x + 4) - 3\,(9x^2 + 4)$

---

page 366

أوجدي المساحة المعطاة ..

19) المساحة فوق المحور x وتحت $y = 4 - x^2$

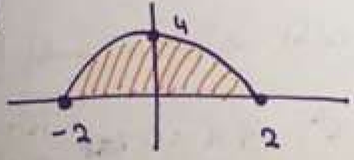
$\boxed{1}$ نحل $y = 4 - x^2 = 0$

$x = \pm 2$

$\boxed{2}$ نرسم ضمن هذه الحدود

x	-2	0	1	2
y	0	4	3	0

$\boxed{3}$



$\boxed{4}$ $A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}$

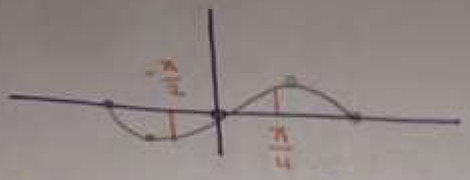
$\left(4(2) - \frac{(2)^3}{3}\right) - \left(4(-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right)$

$= 10.7$

page $\underline{\underline{366}}$

24) المساحة بين الدالة $y = \sin x$ والمحور x للـ

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$$



$$A = |A_1 + A_2|$$

$$A_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x = \left[-\cos x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}$$

$$(-\cos -\tfrac{\pi}{2}) - (-\cos 0)$$

$$0 \quad - \quad -1 \quad = \boxed{1}$$

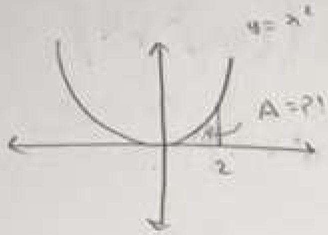
$$A_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x = \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$(-\cos 0) - (-\cos \tfrac{\pi}{2})$$

$$-1 \quad - 0 \quad = \boxed{-1}$$

---

21) مساحة المنطقة المحددة بين الدالة $y = x^2$, $x = 2$ والمحور x



$$A = \int_0^2 x^2 \, dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}$$

$$= \frac{8}{3}$$

---

20) المساحة تحت المحور x وفوقه $y = x^2 - 4x$

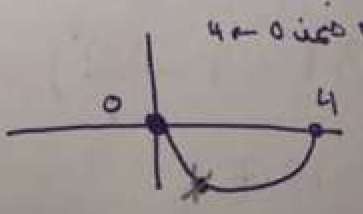
$$x^2 - 4x = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ x = 4 \end{matrix}$$

$$A = |-A|$$

$$A = \int_0^4 (x^2 - 4x)\,dx$$

x	1	2	4	0
y	-3	0	0	0

نرسم ضمن 0 ← 4

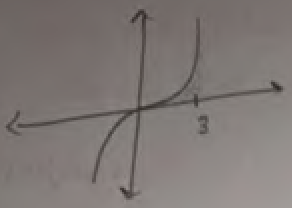


$$\left[\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2}\right]_0^4$$

$$\left(\frac{(4)^3}{3} - \frac{4(4)^2}{2}\right) - \left(\frac{(0)^3}{3} - \cancel{\frac{4(0)^2}{2}}\right)$$

$$= 10.7$$

22) مساحة المنطقة المحدودة بين الدالة $y = x^3$ و $x = 3$
والمحور x

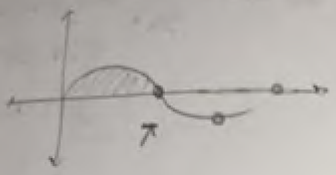


$$A = \int_0^3 x^3 \, dx = {}_0^3\left[\frac{x^4}{4} \right]$$

$$\frac{3^4}{4} - \cancel{\frac{0^4}{4}} = 20.25$$

---

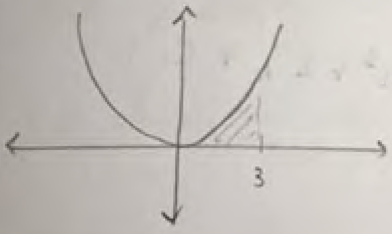
23) المساحة بين الدالة $y = \sin x$ والمحور x لكل
$0 \le x \le \pi$



$$A = \int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

$$= {}_0^{\pi}\left[-\cos x \right] = 2$$

سؤال خارجي :
مساحة المنطقة المحصورة ب $y = x^2$ و $x = 3$ والمحور x



$$A = \int_0^3 x^2 \, dx = {}_0^3\left[\frac{x^3}{3} \right]$$

$$= 9$$

الدرس 5-6 : التكامل بالتعويض :

page 376

استخدمي التعويض المعطى لايجاد قيمة التكامل غير المحدود :

① $\int x^2 \sqrt{x^3+2}\ dx \ , \ u = x^3+2$

$= \int x^2 (x^3+2)^{\frac{1}{2}} dx$

$\boxed{1}\ u = x^3+2 \Rightarrow \boxed{2}\ \frac{du}{dx} = \frac{3x^2}{1} \Rightarrow \boxed{3}\ dx = \frac{du}{3x^2}$

$\int \cancel{x^2}\ (u)^{\frac{1}{2}} \frac{du}{3\cancel{x^2}} = \int \frac{1}{3} u^{\frac{1}{2}} du$

$\frac{1}{3} \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{3} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1\times 2}{3\times 3} (x^3+2)^{\frac{3}{2}} + c$

$= \boxed{\frac{2}{9} (x^3+2)^{\frac{3}{2}} + C}$

① أفرض u

② أشتقها بالنسبة للمتحول

ملاحظة:

الذي أفرضه u هو الذي أسه أكبر

---

② $\int x^3 (x^4+1)^{-\frac{2}{3}} dx$

$u = x^4+1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{4x^3}{dx} \Rightarrow dx = \frac{du}{4x^3}$

$\int x^3 (u)^{-\frac{2}{3}} \frac{du}{4x^3} = \int \frac{1}{4} u^{-\frac{2}{3}} du$

$\frac{1}{4} \frac{u^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + c = \frac{1}{4} \frac{u^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + c \Rightarrow \boxed{\frac{1}{4} \times \frac{3}{1} (x^4+1)^{\frac{1}{3}} + c}$

page 376

③ $\int \frac{(\sqrt{x}+2)^3}{\sqrt{x}} \, du$

مشتقة ما تحت الجذر
ضعفي الجذر

$$u = \sqrt{x} + 2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \Rightarrow dx = \frac{2\sqrt{x}\, du}{1}$$

$$\int \frac{(u)^3}{\cancel{\sqrt{x}}} \cdot \frac{2\cancel{\sqrt{x}}\, du}{1} = \int 2u^3 \, du$$

$$\frac{2u^4}{4} + C = \frac{1}{2} u^4 + C$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} (\sqrt{x} + 2)^4 + C}$$

---

④ $\int \sin x \cdot \cos x \, dx$

$$u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\cos x}{1} \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\int u \cancel{\cos x} \frac{du}{\cancel{dx}\cancel{\cos x}} = \int u \, du$$

$$\frac{u^2}{2} = \boxed{\frac{(\sin x)^2}{2} + C}$$

- لا يمكن توزيع التكامل
حتى ضرب حد في جذر
- ما داخل القوس هو الذي أفرضه
u
- الذي أسه أكبر أفرضه u
غالباً ما يكون المشتق
الجزء الي داخل القوس أسه
أكبر

page 376

5) $\int x^3 \sqrt{x^4+3}\, dx \rightarrow x^3 (x^4+3)^{\frac{1}{2}} dx$

$u = x^4+3 \longrightarrow \frac{du}{dx} \times \frac{4x^3}{1} \rightarrow dx = \frac{1}{4x^3}$

$\int \cancel{x^3} \cdot (u)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{du}{4\cancel{x^3}} = \int \frac{1}{4} u^{\frac{1}{2}} du$

$= \frac{1}{4} \times \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{4} \times \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{1}{6} (x^4+3)^{\frac{3}{2}} + C$

---

6) $\int \sqrt{1+10x}\, dx = \int (1+10x)^{\frac{1}{2}} dx$

$u = 1+10x \longrightarrow \frac{du}{dx} \times \frac{10}{1} \rightarrow dx = \frac{du}{10}$

$\int (u)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{du}{10} = \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \cdot \frac{1}{10} + C = \frac{1}{10} \times \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} + C$

$= \frac{1}{15} (1+10x)^{\frac{3}{2}} + C$

---

8) $\int \sin^3 x \cdot \cos x\, dx \rightarrow \int \sin x \cdot \cos x\, dx$

$u = \sin x \longrightarrow \frac{du}{dx} \times \frac{\cos x}{1} \rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$

$\int u^3 \cdot \cancel{\cos x} \cdot \frac{du}{\cancel{\cos x}} = \int u^3\, du = \frac{u^4}{4} + C$

$\frac{(\sin x)^4}{4} + C$

page $\underline{\underline{376}}$

7) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\, dx \rightarrow \int \frac{\sin x}{(\cos x)^{\frac{1}{2}}}\, dx$

$u = \cos x \rightarrow \frac{du}{dx} \times \frac{-\sin x}{1} \longrightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$

$\int \frac{\sin x}{u^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{du}{-\sin x} = \int -u^{-\frac{1}{2}}\, du$

$- \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = - \frac{(\cos x)^{\frac{1}{2}}}{0.5}$

---

9) $\int t^{2} \cos t^{3}\, dt$

$u = t^{3} \longrightarrow \frac{du}{dt} \times \frac{3t^{2}}{1} \rightarrow dt = \frac{du}{3t^{2}}$

$\int \cancel{t^{2}} \cos u \frac{du}{3\cancel{t^{2}}} = \int \frac{1}{3} \cos u\, du$

$\frac{1}{3} \sin u + c = \frac{1}{3} \sin t^{3} + c$

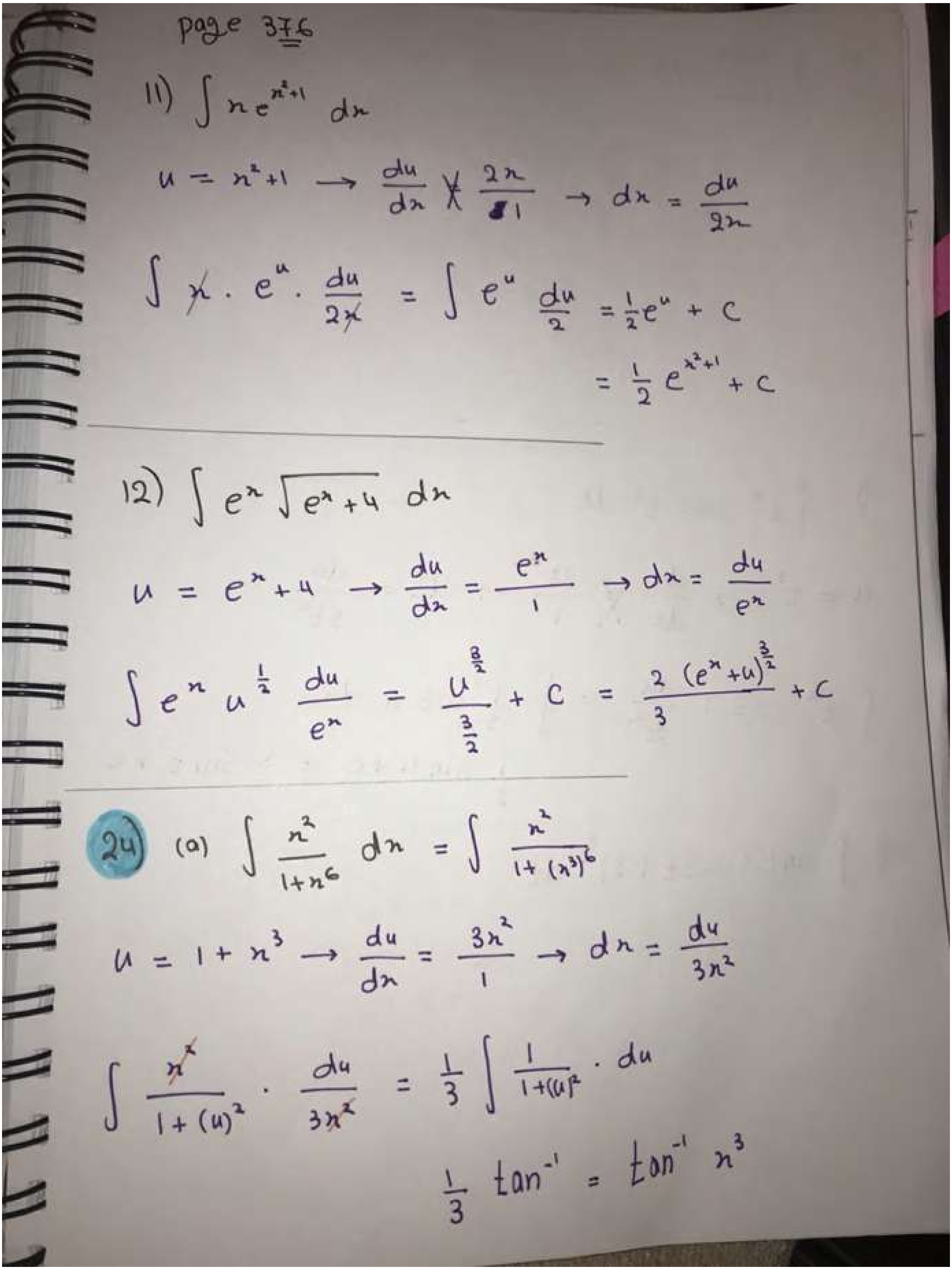
---

10) $\int \sin t (\cos t + 3)^{\frac{3}{4}}\, dt$

$u = \cos t + 3 \rightarrow \frac{du}{dt} = \times \frac{-\sin t}{1} \longrightarrow dt = \frac{du}{-\sin t}$

$\int \cancel{\sin t}\, (u)^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{du}{-\cancel{\sin t}} = \frac{-u^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} + c = \frac{-4}{7} u^{\frac{7}{4}} + C$

$= \frac{-4}{7} (\cos t + 3) + c$



page 376

11) $\int x e^{x^2+1} \, dx$

$u = x^2+1 \longrightarrow \frac{du}{dx} \times \frac{2x}{1} \rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

$\int \cancel{x} \cdot e^u \cdot \frac{du}{2\cancel{x}} = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}e^u + C$

$= \frac{1}{2} e^{x^2+1} + C$

12) $\int e^x \sqrt{e^x+4} \, dx$

$u = e^x+4 \longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{e^x}{1} \rightarrow dx = \frac{du}{e^x}$

$\int e^x u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{e^x} = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2 \, (e^x+4)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$

㉔ (a) $\int \frac{x^2}{1+x^6} \, dx = \int \frac{x^2}{1+(x^3)^6}$

$u = 1+x^3 \longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{3x^2}{1} \rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$

$\int \frac{\cancel{x^2}}{1+(u)^2} \cdot \frac{du}{3\cancel{x^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{1}{1+(u)^2} \cdot du$

$\frac{1}{3} \tan^{-1} = \tan^{-1} x^3$

page 376

㉔ (b) $\int \frac{x^5}{1+x^6}\, dx$

$$u = 1+x^6 \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{6x^5}{1} \rightarrow dx = \frac{du}{6x^5}$$

$$\int \frac{\cancel{x^5}}{u} \cdot \frac{du}{6\cancel{x^5}} = \frac{1}{6} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{6} \ln u$$

$$= \frac{1}{6} \ln \left| 1 + x^6 \right| + C$$

---

23) (a) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}$

$$u = x^2 \Longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{2x}{1} \Longrightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int \frac{\cancel{x}}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2} \sin^{-1} u + c$$

$$= \frac{1}{2} \sin^{-1} x^2 + c$$

---

23) (b) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\, dx$

$$u \overset{=}{\Rightarrow} 1 - x^4 \Longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{4x^3}{1} \Longrightarrow dx = \frac{du}{4x^3}$$

$$\int \frac{\cancel{x^3}}{u^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{du}{4\cancel{x^3}} = \int u^{-\frac{1}{2}}\, du = \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{2(1-x^4)^{\frac{1}{2}}}{1} + c$$

page 376

أوجدي قيمة التكامل المحدد :

31) $\int_0^2 x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int_0^2 x\,(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$u = x^2+1 \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{2x}{1} \rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

$\int_0^2 \cancel{x}\,(u)^{\frac{1}{2}}\,\frac{du}{2\cancel{x}} = {}_0^2\!\int (u)^{\frac{1}{2}}\,\frac{du}{2}$

$\int_0^2 \frac{1}{2}\,u^{\frac{1}{2}}\,du = {}_0^2\!\left[\frac{1}{2}\,\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]$

الطريقة (1)

${}_0^2\!\left[\frac{1}{3}\,u^{\frac{3}{2}}\right] = {}_0^2\!\left[\frac{1}{3}\,(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]$

$= \left(\frac{1}{3}\left((2^2+1)\right)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{1}{3}\,(0^2+1)^{\frac{3}{2}}\right)$

$= 3.39$

الطريقة (2)

$u = x^2+1$

$u(0) = (0)^2+1) = 1$

$u(2) = 2^2+1 = 5$

$\int_0^2 \frac{1}{3}\,u^{\frac{1}{2}}\,du = \int_1^5 \frac{1}{3}\,u^{\frac{1}{2}}\,du$

${}_1^5\!\left[\frac{1}{3}\,u^{\frac{3}{2}}\right] = \left(\frac{1}{3}\,(5)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{1}{3}\,(1)^{\frac{3}{2}}\right)$

$= 3.39$

أوجدي قيمة التكامل المحدود :

page 376

34) $\int_0^2 t^2 e^{t^3} dt$

$u = t^3 \longrightarrow \frac{du}{d\text{[redacted]}t} = \frac{3t^2}{\text{[redacted]}1} \longrightarrow dt = \frac{du}{3t^2}$

$\int_0^2 \cancel{t^2}\cdot e^{u}\cdot\frac{du}{3\cancel{t^2}} = \int_0^2 e^{u}\cdot\frac{du}{3} = \int_0^2 \frac{1}{3}e^{u}\cdot du$

$= {}_0^2\left[\frac{1}{3}e^{u}\right] = {}_0^2\left[\frac{1}{3}e^{t^3}\right] = \left(\frac{1}{3}e^{(0)^3}\right) - \left(\frac{1}{3}e^{(2)^3}\right)$

$=$ [redacted]993.3

ضع التعويض المعطى لدالة غير محددة f(x) :

47) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, f(\sin x)\, dx$

$u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\cos x}{1} \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$

$u(\frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$u(0) = \sin 0 = 0$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cancel{\cos x}\cdot f(u)\cdot\frac{du}{\cancel{\cos x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)\cdot du = {}_0^{1\text{[redacted]}}\left[F(u)\right]$

$= f(1) - f(0)$

القاعدة :-

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = {}_a^b\left[F(x)\right] = f(b) - f(a)}$$

page 376 ضعي التعويض المعطى للدالة غير محددة f(x)

48) $\int_0^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$

$u = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = \frac{2\sqrt{x}\,du}{1}$

$\int_0^4 \frac{f(u)}{\sqrt{\cancel{x}}} \cdot \frac{2\sqrt{\cancel{x}}\,du}{1} = \int_0^4 2f(u)\,du$

$\left[2f(u)\right]_0^4 = \left[2f(\sqrt{x})\right]_0^4$

$(2f(\sqrt{4})) - (2f(\sqrt{0}))$

5-7 : التكامل العددي :

n غير معلومة ،

المثال 7.11 : تحديد عدد الخطوات التي تضمن دقة معطاة :

حدد عدد الخطوات لضمان عدد الخطوات

page 389

لضمان دقة 10^{-6} باستخدام

① T_n ② m_n ③ S_n

(25) $\int_1^2 \ln x \, dx \quad [1,2] \quad f(x) = \ln x$

$f(x) = \ln x$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ $\boxed{f'' = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}}$

$f''' = -(-2x^{-3}) = 2x^{-3} \rightarrow f^{(4)} = -6x^{-4} = \boxed{\frac{-6}{x^4}}$

f'' $|K|$ قيمة مطلقة

$|L|$

$f''(1) = -\frac{1}{1} = \boxed{1} = K$

$f''(2) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

$f^{(4)}(1) = \frac{6}{1^4} = \boxed{6} \leftarrow L$

$f^{(4)}(2) = \frac{6}{2^4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

a → b

$|E_{m_n}| \le K \frac{(b-a)^3}{24n^2}$

$|E_{T_n}| \le K \frac{(b-a)^3}{12n^2}$

f'' K

$f^{(4)}$

$|E_{S_n}| \le L \frac{(b-a)^5}{180n^4}$

L

a → b

① $|ET_n| \le K \frac{(b-a)^3}{12n^2} \le 10^{-6}$

$$1 \frac{(2-1)^3}{12n^2} \le \boxed{10^{-6}} \swarrow \frac{1}{10^6}$$

$$\frac{1}{12n^2} \cancel{\le} \frac{1}{10^6} \Rightarrow \frac{\cancel{12}n^2}{\cancel{12}} \le \frac{10^6}{12}$$

$$n^2 \le \frac{10^6}{12} \longrightarrow n \le \sqrt{\frac{10^6}{12}} \approx \boxed{288.67}$$

② $|E_{mn}| \le 1 \frac{(2-1)^3}{24n^2} \le 10^{-6}$

$$\frac{1}{24n^2} \cancel{\le} \frac{1}{10^6} \longrightarrow 24n^2 \le \frac{1}{10^6}$$

$$n \le \sqrt{\frac{10^6}{24}} \approx \boxed{204.12}$$

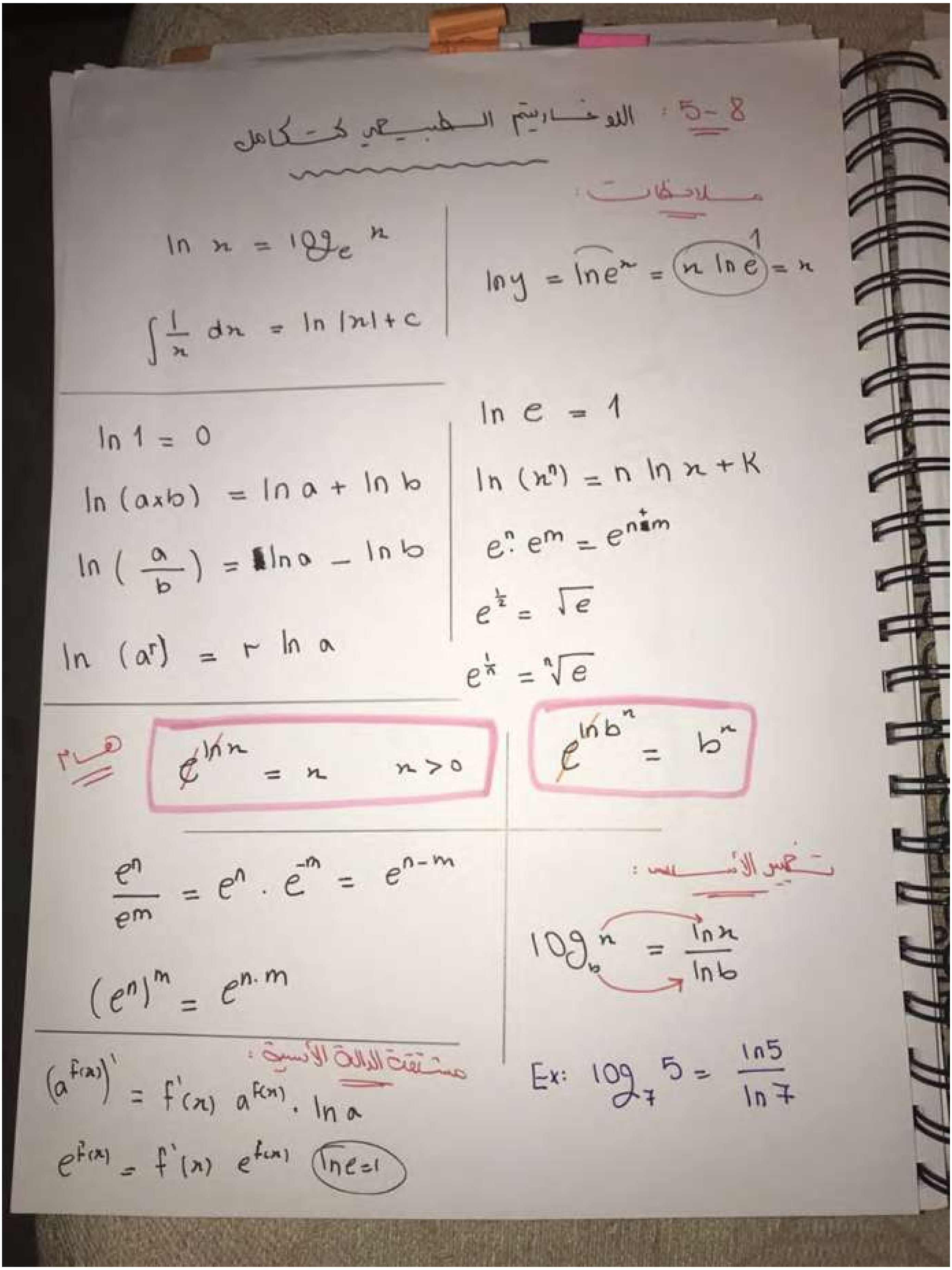
③ $|E_{Sn}| \le L \frac{(b-a)^5}{180n^4} \le 10^{-6}$

$$6 \frac{(2-1)^5}{180n^4} \le \frac{1}{10^6}$$

$$\frac{6}{180n^4} \cancel{\le} \frac{1}{10^6} \Rightarrow \frac{1\cancel{8}0n^4}{\cancel{180}} \le \frac{6\times10^6}{180} \nearrow$$

$$n \le \sqrt[4]{\frac{6\times10^6}{180}}$$

$$\approx \boxed{13.512}$$



5-8 : اللوغاريتم الطبيعي كتكامل

ملاحظات :

$\ln y = \ln e^{x} = x \ln \overset{1}{e} = x$

$\ln x = \log_e x$

$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln |x| + c$

$\ln e = 1$

$\ln (x^n) = n \ln x + K$

$e^n \cdot e^m = e^{n+m}$

$e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

$e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e}$

$\ln 1 = 0$

$\ln (a \times b) = \ln a + \ln b$

$\ln \left(\frac{a}{b} \right) = \ln a - \ln b$

$\ln (a^r) = r \ln a$

هام

$\boxed{e^{\ln x} = x \quad x > 0}$

$\boxed{e^{\ln b^n} = b^n}$

$\frac{e^n}{e^m} = e^n \cdot e^{-m} = e^{n-m}$

$(e^n)^m = e^{n \cdot m}$

تغيير الأساس :

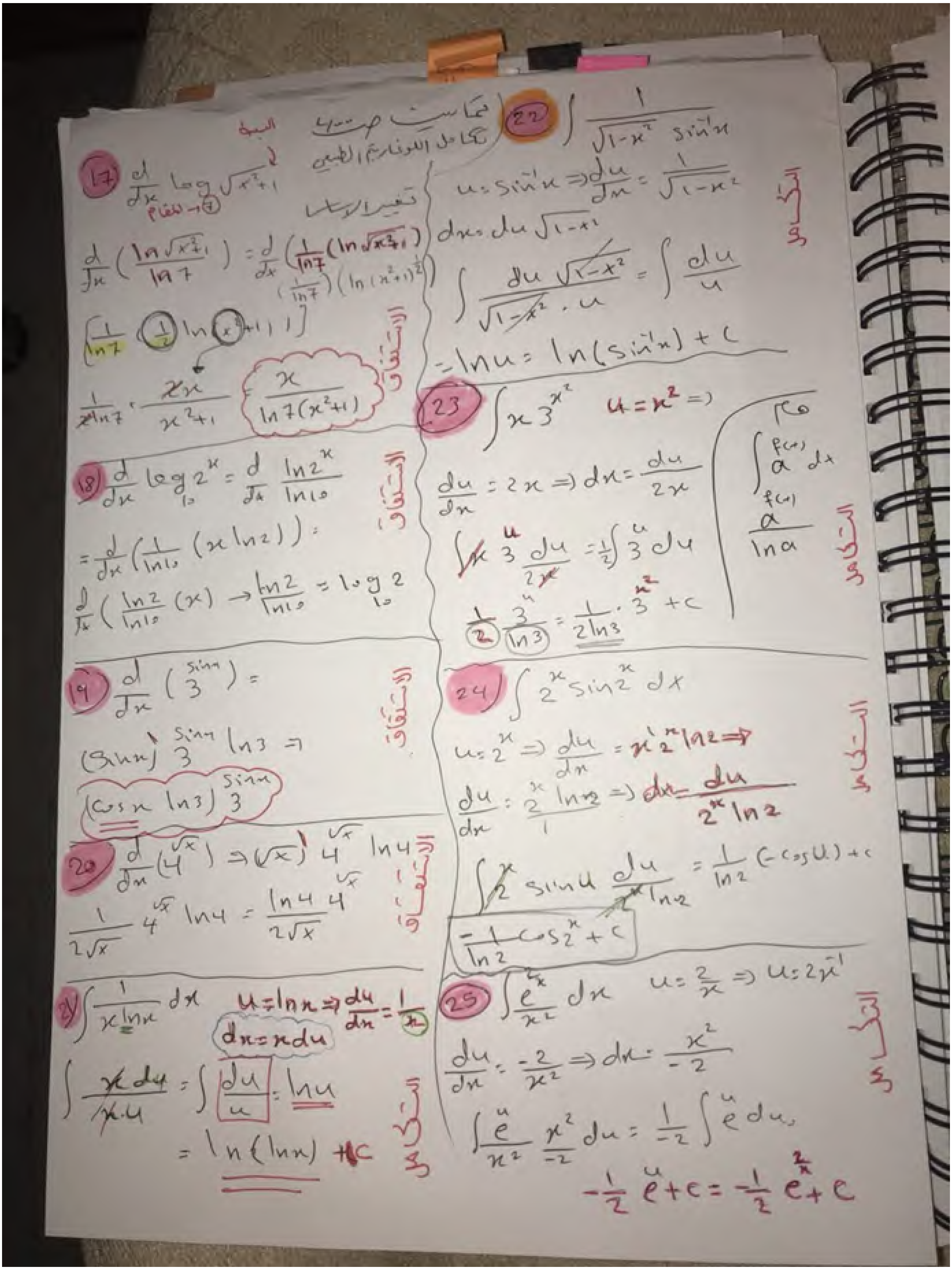
$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$

Ex: $\log_7 5 = \frac{\ln 5}{\ln 7}$

مشتقة الدالة الأسية :

$(a^{f(x)})' = f'(x)\, a^{f(x)} \cdot \ln a$

$e^{f(x)} = f'(x)\, e^{f(x)}$ $\ln e = 1$



تمارين صعبة

تكامل اللوغاريتم الطبيعي

البسط

تغيير الأساس

⑰ $\frac{d}{dx}\log_7\sqrt{x^2+1}$ الأساس → ⑦

$\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln\sqrt{x^2+1}}{\ln 7}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\ln 7}(\ln\sqrt{x^2+1})\right)$

$\left(\frac{1}{\ln 7}\right)\left(\ln(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)$

$\left[\frac{1}{\ln 7}\left(\frac{1}{2}\right)\ln(x^2+1)\right]$

$\frac{1}{\cancel{2}\ln 7}\cdot\frac{\cancel{2}x}{x^2+1}=\frac{x}{\ln 7(x^2+1)}$

الاشتقاق

⑱ $\frac{d}{dx}\log_{10}2^x=\frac{d}{dx}\frac{\ln 2^x}{\ln 10}$

$=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\ln 10}(x\ln 2)\right)=$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln 2}{\ln 10}(x)\right)\rightarrow\frac{\ln 2}{\ln 10}=\log_{10}2$

الاشتقاق

⑲ $\frac{d}{dx}\left(3^{\sin x}\right)=$

$(\sin x)'\,3^{\sin x}\ln 3\Rightarrow$

$(\cos x\ln 3)\,3^{\sin x}$

الاشتقاق

⑳ $\frac{d}{dx}\left(4^{\sqrt{x}}\right)\Rightarrow(\sqrt{x})'\,4^{\sqrt{x}}\ln 4$

$\frac{1}{2\sqrt{x}}4^{\sqrt{x}}\ln 4=\frac{\ln 4\;4^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

الاشتقاق

㉑ $\int\frac{1}{x\ln x}dx$ $u=\ln x\Rightarrow\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}$

$dx=x\,du$

$\int\frac{\cancel{x}\,du}{\cancel{x}\cdot u}=\int\boxed{\frac{du}{u}}=\ln u$

$=\ln(\ln x)+c$

التكامل

㉒ $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,\sin^{-1}x}$

$u=\sin^{-1}x\Rightarrow\frac{du}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$dx=du\sqrt{1-x^2}$

$\int\frac{du\,\cancel{\sqrt{1-x^2}}}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}\cdot u}=\int\frac{du}{u}$

$=\ln u=\ln(\sin^{-1}x)+c$

التكامل

㉓ $\int x\,3^{x^2}$ $u=x^2\Rightarrow$

$\frac{du}{dx}=2x\Rightarrow dx=\frac{du}{2x}$

$\int\cancel{x}\,3^{u}\frac{du}{2\cancel{x}}=\frac{1}{2}\int 3^{u}du$

$\frac{1}{2}\frac{3^{u}}{\ln 3}=\frac{1}{2\ln 3}\cdot 3^{x^2}+c$

ص

$\int a^{f(x)}dx$

$\frac{a^{f(x)}}{\ln a}$

التكامل

㉔ $\int 2^x\sin 2^x\,dx$

$u=2^x\Rightarrow\frac{du}{dx}=x'\,2^x\ln 2\Rightarrow$

$\frac{du}{dx}=\frac{2^x\ln 2}{1}\Rightarrow dx=\frac{du}{2^x\ln 2}$

$\int\cancel{2^x}\sin u\frac{du}{\cancel{2^x}\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}(-\cos u)+c$

$\boxed{-\frac{1}{\ln 2}\cos 2^x+c}$

التكامل

㉕ $\int\frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2}dx$ $u=\frac{2}{x}\Rightarrow u=2x^{-1}$

$\frac{du}{dx}=\frac{-2}{x^2}\Rightarrow dx=\frac{x^2}{-2}$

$\int\frac{e^{u}}{x^2}\frac{x^2}{-2}du=\frac{1}{-2}\int e^{u}du$

$-\frac{1}{2}e^{u}+c=-\frac{1}{2}e^{\frac{2}{x}}+c$

التكامل

ص 400
اللوغاريتم كامل

(26) $\int \frac{\sin(\ln x^3)}{x}$ $u = \ln x^3 \Rightarrow$

$\frac{du}{dx} = \frac{3x^2}{x^3} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{3}{x} \Rightarrow$

$dx = \frac{x\,du}{3} \Rightarrow \int \frac{\sin u}{x} \frac{x\,du}{3}$

$\frac{1}{3}\int \sin u\,du = \frac{1}{3}(-\cos u) + c$

$-\frac{1}{3}\cos(\ln x^3) + c$

---

(7) $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3-4}dx$ $u = x^3 - 4$

$\frac{du}{dx} = \frac{3x^2}{1} \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$

$\int_1 \frac{x^2}{u}\frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3}\ln u + c$

$\left[\frac{1}{3}\ln(x^3-4)\right]_0^1 + \cancel{c} = \frac{1}{3}\ln\frac{3}{4}$

---

(8) $\int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ نأخذ المقام مشتقه

$(e^x + e^{-x})' = e^x - e^{-x}$
= البسط

ⓒ ln له البسط = مشتق المقام →

$\left[\ln(e^x + e^{-x})\right] = \ln\left(\frac{e + e^{-1}}{2}\right)$

---

(9) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx$ $u = \ln x = 1$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = \frac{x\,du}{1}$

$\int_1^2 \frac{u \cdot x\,du}{x} = \int_1^2 u\,du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_1^2$

$\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]^2 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 1$

---

(15) $\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{x^4}{x^5+1}\right)$

$\frac{d}{dx}\left(4\ln x - \ln(x^5+1)\right)$

$4 \cdot \frac{1}{x} - \frac{5x^4}{x^5+1}$

1 صار 2

$\ln\frac{x^4}{x^5+1} =$

$\ln x^4 - \ln(x^5+1)$

$4\ln x - \ln(x^5+1)$

---

(16) $\frac{d}{dx}\left(\ln\sqrt{\frac{x^3}{x^5+1}}\right)$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln x^3 - \frac{1}{2}\ln(x^5+1)\right) =$

$\frac{1}{2}\left(\frac{3x^2}{x^3}\right) - \frac{1}{2}\frac{5x^4}{x^5+1} =$

$\frac{3}{2x} - \frac{5x^4}{2(x^5+1)}$

1 صار 2

$\ln\left(\frac{x^3}{x^5+1}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{2}\ln\frac{x^3}{x^5+1}$

$= \frac{1}{2}\ln x^3 - \frac{1}{2}\ln(x^5+1)$

---

(14) $\frac{d}{dx}\ln(x^5 \sin x \cos x)$

$\frac{d}{dx}\left(\ln x^5 + \ln\sin x + \ln\cos x\right)$

$= 5\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x}$

---

(13) $\frac{d}{dx}\left(\ln\sqrt{x^2+1}\right) =$

$\frac{d}{dx}\left(\ln(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right) =$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$