# الرياضيات المتقدمة

# الفصل الدراسي الثاني 2018-2019

# حل ملخص الوحدة الخامسة التكامل

**تقديم مدرس الرياضيات**

**صكبان صالح محمد**

**تتكون أوراق العمل من :-**

**1): - أسئلة إختيار من متعدد الوحدة الخامسة.**

**2):- أسئلة مقالية الوحدة الخامسة فقط.**

**السؤال الأول :- لكل فقرة أربع إجابات إختر الإجابة الصحيحة :-**

**1):-** $\int \frac{3}{4}\sin\frac{3}{4}x\,dx =$

$a)\ -\frac{9}{16}\cos x + c$ $\quad$ $(b)\ -\cos\frac{3}{4}x + c$ $\quad$ $c)\ \cos x + c$ $\quad$ $d)\ -\cos\frac{3}{8}x^2 + c$

---

**2):-** $\int 3e^{6x}\,dx =$

$(a)\ \frac{1}{2}e^{6x} + c$ $\quad$ $b)\ \frac{1}{2}e^{3x} + c$ $\quad$ $c)\ -\frac{1}{2}e^{6x} + c$ $\quad$ $d)\ 2e^{6x} + c$

---

**3):-** $\int \frac{x}{1+x^2}dx =$

$a)\ \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c$ $\quad$ $b)\ 2\tan^{-1}x + c$ $\quad$ $c)\ 2\ln(1+x^2)+c$ $\quad$ $(d)\ \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c$

---

**4):- الدالة الأصلية لهذا التكامل** $\int \frac{2xe^{3x} - 3x^2e^{3x}}{e^{6x}}dx =$ **هي :-**

$a)\ \frac{x^2}{e^{6x}} + c$ $\quad$ $b)\ \frac{x^3}{e^{2x}} + c$ $\quad$ $c)\ \frac{x^2e^{3x} - e^{6x}}{e^{3x}} + c$ $\quad$ $(d)\ \frac{x^2}{e^{3x}} + c$

---

**5):- إذا كان** $\sum_{i=1}^{9}(2i + K) = 99$ **فإن قيمة** $K =$

$a)\ 189$ $\quad$ $b)\ 90$ $\quad$ $(c)\ 1$ $\quad$ $d)\ 0$

---

**6):- عندما** $n \to \infty$ **يكون** $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}(\frac{i}{n}+2) =$

$(a)\ 2.5$ $\quad$ $b)\ 3.5$ $\quad$ $c)\ 1$ $\quad$ $d)\ 0$

**7):-** $\int \cot 2x\, dx =$

$a)\ 2\ln|\sin 2x|+c$ $\quad b)\ -\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+c$

$c)\ \frac{\ln|\sin 2x|}{2}+c$ $\quad d)\ \frac{\ln|\cos 2x|}{2}+c$

**8):-** إذا كانت القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[1,7]$ هي **5** فإن قيمة التكامل $\int_1^7 f(x)dx =$

$a)\ 6$ $\quad b)\ 5$ $\quad c)\ 35$ $\quad d)\ 30$

**9):-** لكتابة التعبير $\int_0^2 f(x)dx+\int_2^1 f(x)dx$ على شكل تكامل منفرد يكون بالشكل :-

$a)\ \int_0^2 f(x)dx$ $\quad b)\ -\int_1^0 f(x)dx$ $\quad c)\ \int_1^2 f(x)dx$ $\quad d)\ \int_{-1}^1 f(x)dx$

**10):-** عند استخدام القوانين الهندسية تكون قيمة التكامل :- $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx =$

$a)\ \frac{9}{4}\pi$ $\quad b)\ \frac{9}{2}\pi$ $\quad c)\ 9\pi$ $\quad d)\ \frac{1}{4}\pi$

**11):-** الحدين الأدنى والأعلى للتكامل $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$ دون حساب عملية التكامل هي الفترة

$a)\ [0,4]$ $\quad b)\ [4,8]$ $\quad c)\ [0,8]$ $\quad d)\ [1,4]$

**12):-** $\int(\tan x+\tan^3 x)dx =$

$a)\ -\ln|\cos x|+c$ $\quad b)\ \tan^2 x+c$ $\quad c)\ \frac{1}{2}\sec^2 x+c$ $\quad d)\ \frac{1}{2}\tan^2 x+c$

**13):-** $\int_{-3}^{-1} \frac{2}{x}dx =$

$a)\ -\ln 3+c$ $\quad b)\ -3\ln 2$ $\quad c)\ -2\ln 3$ $\quad d)\ 2\ln 3$

14):- مشتقة الدالة $F(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\sqrt{1-t^2}\,dt=$

$a)\ \sin^{-1}x$ $\quad$ $b)\ -1$ $\quad$ $c)\ \sqrt{1-\cos^2 x}$ $\quad$ $d)\ \sqrt{1-\sin^2 x}$

---

15):- عند استخدام التكامل بالتعويض تكون قيمة $\int \sec^2 x\,(-3\tan x+8)^3\,dx=$

$a)\ -\frac{1}{12}(-3\tan x+8)^4+c$ $\quad$ $b)\ -\frac{1}{3}(-3\tan x+8)^4+c$

$c)\ \frac{1}{12}(3\tan x+8)^4+c$ $\quad$ $d)\ \frac{1}{3}(3\tan x+8)^4+c$

---

16):- قيمة التكامل $\int \frac{1+x}{1+x^2}dx=$

$a)\ \tan^{-1}x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c$ $\quad$ $b)\ \tan^{-1}x+2\ln(1+x^2)+c$

$c)\ \tan^{-1}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c$ $\quad$ $d)\ \tan^{-1}x-2\ln(1+x^2)+c$

---

17):- عبر عن رمز المجموع . الجذر التربيعي لمجموع أول 20 عدداً صحيحاً موجباً بالشكل .

$a)\ \sum_{i=1}^{20}\sqrt{20i}$ $\quad$ $b)\ \sum_{i=1}^{20}\sqrt{i}$ $\quad$ $c)\ \sqrt{\sum_{i=1}^{20} i}$ $\quad$ $d)\ \sqrt{\sum_{i=1}^{20}\sqrt{i}}$

---

18):- المساحة الواقعة تحت المنحنى $f(x)=\sin x$ على الفترة $[0,\pi]$ تساوي :-

$a)\ 0$ $\quad$ $b)\ 1$ $\quad$ $c)\ -2$ $\quad$ $d)\ 2$

---

19):- إذا كانت الدالة $f$ متصلة على الفترة $[a,b]$ وكانت $F(x)=\int_x^a f(t)dt$ فإن $F'(x)=$

$a)\ f(x)$ $\quad$ $b)\ f(t)$ $\quad$ $c)\ -f(x)$ $\quad$ $d)\ 0$

---

20):- $\int e^{\sin x-\ln\sec x}dx=$

$a)\ \sin x+c$ $\quad$ $b)\ e^{\sin x}+c$ $\quad$ $c)\ \sec x\,e^{\sin x}+c$ $\quad$ $d)\ \cos x+c$

**21):-** $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x} =$

(a) $\ln|\tan x|+c$ b) $\ln|\cot x|+c$ c) $\frac{1}{2}\sin 2x+c$ d) $2\cos 2x+c$

---

**22):- إذا كانت السرعة المتجهة لجسم ما هي** $v(t)=\sin x \ , m/\sec$ **فإن دالة الموقع** $s(t)$ **عند** $s(0)=2$ **هي :-**

a) $\cos x+3$ b) $-\cos x-3$ c) $-\sin x+3$ (d) $-(\cos x-3)$

---

**23):- إذا كان ميل المنحنى عند أي نقطة .** $(x,y)$ **هو** $\frac{x}{y}$ **والمنحنى يمر بالنقطة** $f(1)=1$ **فإن معادلة المنحنى هي :-**

(a) $y^2-x^2=0$ b) $y+x^2=0$ c) $y^2+x^2=1$ d) $y^2+x^2=0$

---

**24):- إذا كانت** $G(x)=\int_{3x^2}^{5} \tan t\, dt$ **فإن** $G'(x)=$

a) $6x\tan(3x^2)$ b) $6x\sec^2(x)$ (c) $-6x\tan(3x^2)$ d) $3x^2\tan t$

---

**25):-** $\int \frac{2x^3}{x^4+5}dx =$

a) $\ln(x^4+5)+c$ (b) $\frac{1}{2}\ln(x^4+5)+c$ c) $2\ln|x^4+5|+c$ d) $\frac{2}{5}\ln|x^4+5|+c$

---

**26):-** $\int e^{-2x+15}dx =$

a) $-x^2+15x+c$ (b) $-\frac{1}{2}e^{-2x+15}+c$ c) $-\frac{1}{2}x^2-15x+c$ d) $2e^{-2x+15}+c$

---

(27 $\int \sin x\cos x\,dx =$

a) $-\cos x.\sin x+c$ b) $\frac{1}{2}\cos^2 x+c$ (c) $-\frac{1}{2}\cos^2 x+c$ d) $-\frac{1}{2}\sin^2 x+c$

---

(28 $\int \sin x(\csc x-\cot x)dx =$

(a) $x-\sin x+c$ b) $x-\cos x+c$ c) $-x+\sin x+c$ d) $x+\sin x+c$

---

## السؤال الثاني:- المطلوب الإجابة على جميع الأسئلة :-

**س1):- إستخدام التكامل بالتعويض لإيجاد التكاملات التالية :-**

1) $\int \frac{dx}{1-e^x}$

$\int \frac{dx}{e^x(e^{-x}-1)} \rightarrow \int \frac{e^{-x}dx}{(e^{-x}-1)}$

$= -\ln|e^{-x}-1| + c$

2) $\int \frac{\cot x}{\ln(\sin x)}dx$

$u = \ln \sin x$

$\frac{du}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x}$ , $\rightarrow \frac{du}{\cot x} = dx$

$\int \frac{\cot x}{u}\cdot\frac{du}{\cot x}$ ; $\int \frac{1}{u}du$

$= \ln|u| + c$ ; $= \ln|\ln(\sin x)| + c$

3) $\int \tan^5 x \cdot \frac{1}{\sin^2 x}dx$

$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}dx$ , $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x \cdot \cos^2 x}dx$

$\int \tan^3 x \cdot \sec^2 x\, dx$ , $u = \tan x$ ,.....

$= \frac{1}{4}\tan^4 x + c$

4) $\int \frac{\tan^{-1}(3x)}{1+9x^2}dx$

$u = \tan^{-1}(3x)$ , $\rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{3}{1+9x^2}$

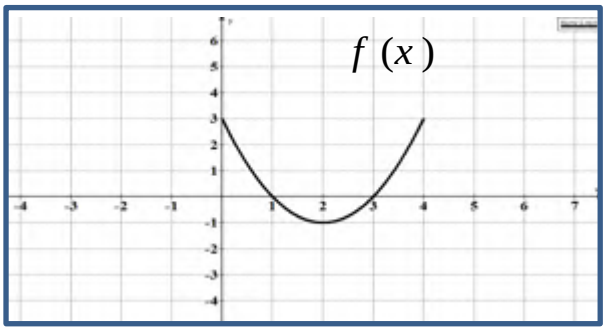
$dx = \frac{1+9x^2}{3}du$

$\int \frac{u}{1+9x^2}\cdot\frac{1+9x^2}{3}du$

$\frac{1}{3}\int u\, du$ , $= \frac{1}{3}\cdot\frac{u^2}{2} + c$

$\frac{1}{6}(\tan^{-1}(3x))^2 + c$

**السؤال الثاني :-** 1):- **الشكل المجاور يمثل بيان** $f(x)$ **حيث :-**




**والمطلوب :-** $g(x)=\int_0^x f(t)dt$

$g'(x)=f(x)$

**1):- النقاط الحرجة للدالة** $f(x)$ **:-**

$\{1,3\}$

**2):- فترات التزايد وفترات التناقص للدالة** $f(x)$

increasing (0,1) , (3,4)

dcreasing (1,3)

**3):- أيهما أكبر**

$\int_0^3 f(x)dx \quad , \quad \int_0^2 f(x)dx$

$\int_0^3 f(x)dx \quad > \quad \int_0^2 f(x)dx$

---

**2):- قرب قيمة** $\int_0^1 3x^2dx$ **باستخدام قاعدة سيمبسون مع** $n=6$

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_n(f)=\frac{b-a}{3n}[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+....f(x_n)]$$

$$S_n(f)=\frac{1-0}{3\times 4}\left[f(0)+4f(\frac{1}{6})+2f(\frac{2}{6})+4f(\frac{3}{6})+2f(\frac{4}{6})+4f(\frac{5}{6})+2f(\frac{6}{6})\right]$$

$$S_n(f)=\frac{1}{12}[.....]=.....$$

---

**3):- أوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة** $(2,5)$ **وأن ميله عند كل نقطه** $(x,y)$ **من نقاطه هو** $\frac{x-1}{y}$ .

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-1}{y}$$

$$ydy=(x-1)dx \quad ,\rightarrow \int ydy=\int(x-1)dx$$

$$\frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}-x+c \qquad (2,5)$$

$$\frac{25}{2}=\frac{4}{2}-2+c$$

$$\frac{25}{2}=c$$

$$\frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}-x+\frac{25}{2}$$

$$y^2=x^2-2x+25$$

**4):-** إذا كانت المشتقة الثانية لدالة $y'' = 6x$ وكان للدالة قيمة عظمى محلية عند النقطة $(-1,4)$ أوجد تلك الدالة .

$\int y''dy = \int 6x\,dx$

$y' = \frac{6x^2}{2} + c \quad , \quad y' = 3x^2 + c$

$y' = 0$

$0 = 3(-1)^2 + c \quad , c = -3$

$y' = 3x^2 - 3$

$\int y'dy = \int (3x^2 - 3)dx$

$y = \frac{3x^3}{3} - 3x + c \quad , y = x^3 - 3x + c \qquad (-1,4)$

$4 = 3(1)^3 - 3(-1) + c \quad , \quad c = +2 \qquad y = x^3 - 3x + 2$

**5):-** أوجد :- $\int \frac{1}{x - x^{\frac{2}{3}}}\,dx$

$\int \frac{1}{x(1 - x^{\frac{-1}{3}})}\,dx$

$\int \frac{1}{x(1 - x^{\frac{-1}{3}})}\,dx$

$\int \frac{x^{-1}}{(1 - \frac{1}{x^{1/3}})}\,dx \rightarrow \int \frac{x^{\frac{-2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} - 1}\,dx$

$let\ u = x^{\frac{1}{3}} - 1$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{3}.x^{\frac{-2}{3}} \quad , \quad 3du = x^{\frac{-2}{3}}dx$

$3\int \frac{1}{u}\,du \quad , \quad \rightarrow 3\ln|u| + c$

**6):-** أوجد $\int x^5 (x^3 + 1)^{\frac{7}{5}}\,dx$

$\int x^5 (u)^{\frac{7}{5}} . \frac{du}{3x^2}$

$\frac{1}{3}\int x^3 (u)^{\frac{7}{5}} du \quad , \quad \frac{1}{3}\int (u-1)u^{\frac{7}{5}} du \quad , \rightarrow complete$

$u = x^3 + 1 \quad , \quad \frac{du}{dx} = 3x^2 \quad , \quad \frac{du}{3x^2} = dx$

**7):-** إذا كان $\int_2^3 f(x)dx = 8$ أوجد $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} f(\sqrt{x})dx$

$u = \sqrt{x} \quad , \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad 2\sqrt{x}\,du = dx$

$x = 4 \quad \rightarrow u = 2$

$x = 9 \quad \rightarrow u = 3$

$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x}} f(u).2\sqrt{x}\,du = 16$

**مع تحياتي للجميع وإلى اللقاء مع الفصل الثالث والأخير**