12
عام

مدرسة عبد القادر الجزائري
قسم الرياضيات

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

تحذير هام

هذه الأوراق بمثابة دفتر مساعد للطالب لتوفير الوقت في كتابة السؤال ولكن الحذر كل الحذر من الإكتفاء بها فقط حيث أن كتاب الوزارة هو المرجع الأساسي في كل شئ وعلى الطالب أن يتدرب على حل التمارين الواردة في الكتاب المدرسي الموجودة نهاية كل درس ويناقش المعلم بها

math 2020

الوحدة السابعة
القطوع المخروطية والمعادلات الوسيطية

أ/ أحمد عطا

اسم الطالب / ....

اسم المدرسة / ....

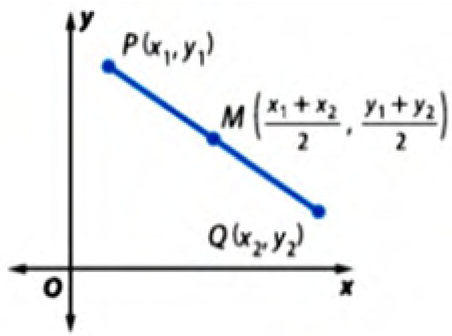
قراءة ذاتية

صيغتا نقطة المنتصف والمسافة

المفهوم الأساسي صيغة نقطة المنتصف

الشرح إذا كان لقطعة مستقيمة النقطتان الطرفيتان $P(x_1, y_1)$ و $Q(x_2, y_2)$، فإن إحداثيات نقطة المنتصف لهذه القطعة المستقيمة هي $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

النموذج



مثال 1 إيجاد نقطة المنتصف

أوجد إحداثيي النقطة M التي تمثل نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{JK}$، من أجل $J(-1, 2)$ و $K(6, 1)$.

تمرين موجّه

1A. أوجد إحداثيي نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ إذا كان $A(5, 12)$ و $B(-4, 8)$

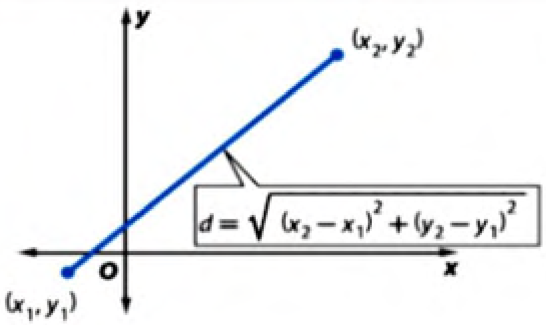
1B. أوجد إحداثيي نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{CD}$ إذا كان $C(4, 5)$ و $D(14, 13)$

المفهوم الأساسي صيغة المسافة

الشرح المسافة بين نقطتين لهما الإحداثيات (x_1, y_1) و (x_2, y_2) تعطى بالعلاقة:

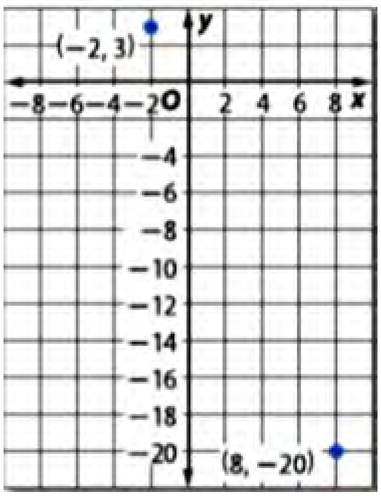
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

النموذج



مثال 2 من الحياة اليومية إيجاد المسافة بين نقطتين

جولف القرص قرص صانع قبل السلة بمسافة 20 ft وعلى بعد 8 ft إلى يمينها. في رميته الأولى، سقط القرص بعد السلة بمسافة 2 ft وعلى بعد 3 ft إلى يسارها. فإذا انتقل القرص وفق خط مستقيم، فكم المسافة التي قطعها؟



تمرين موجّه

ستضرب آمنة كرة جولف تقع على مسافة 3.6 m فوق الحفرة و 0.9 m إلى يسارها. في ضربتها الأولى انتقلت الكرة إلى مسافة 0.9 m فوق الحفرة و 0.3 m إلى يمينها. ما المسافة التي قطعتها الكرة في الضربة الأولى؟

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

مثال 3 على الاختبار المعياري إيجاد نقطة المنتصف بين الإحداثيات

توضع شبكة إحداثيات على خريطة. تقع المدينة A عند النقطة (3 ,13)، وتقع المدينة B عند النقطة (1- ,8). إذا كانت المدينة C تقع في منتصف المسافة بين المدينة A والمدينة B، فما العدد الأقرب إلى المسافة بين المدينة A والمدينة C ممثلا بالوحدات الإحداثية؟

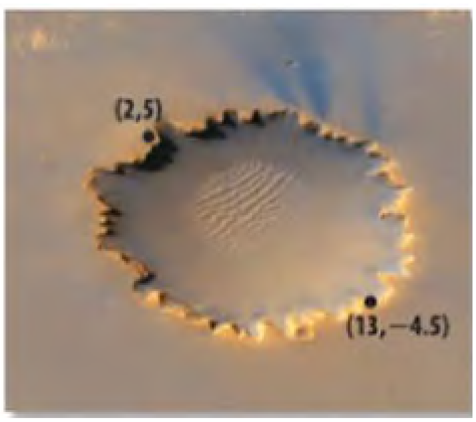
A 4.75 B 7.43 C 14.9 D 19

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

تمرين موجّه

إحداثيات النقطتين A و B هما $(-5, -4)$ و $(-7, 10)$، على الترتيب. أوجد المسافة بين نقطة منتصف A و B والنقطة B.

F $\sqrt{10}$ وحدة G $5\sqrt{10}$ وحدة H $\sqrt{50}$ وحدة J $10\sqrt{5}$ وحدة



الفضاء استخدم النقطتين المحددتين على مخطط الفوهة الدائرية على سطح المريخ لتقدير قطرها بالكيلومترات. افترض أن كل وحدة على نظام الإحداثيات تساوي 1 km.

أوجد نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة ذات النقطتين الطرفيتين عند الإحداثيات المعطاة. ثم أوجد المسافة بين النقاط.

$(-22, 42), (57, 2)$

$(-93, 15), (90, -15)$

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

سباقات المضمار والميدان ترمى كرة حديدية من داخل دائرة. توضع شبكة إحداثيات على دائرة الكرة الحديدية. توضع لوحة القدم في مقدمة الدائرة عند النقطة $(-4, 1)$، وتقع مؤخرة الدائرة عند النقطة $(2, 5)$. إذا كان مركز الدائرة في منتصف المسافة بين هاتين النقطتين، فما المسافة من لوحة القدم إلى مركز الدائرة؟

القطع المكافئ

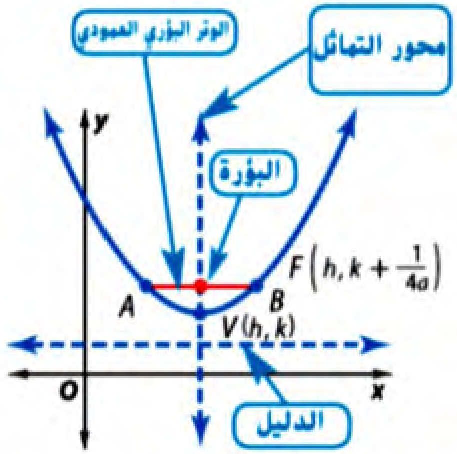
1 كتابة معادلات القطوع المكافئة بالصيغة القياسية.

2 تمثيل القطوع المكافئة بيانيًا.

1 معادلات القطوع المكافئة

يمكن تعريف **القطع المكافئ** بأنه مجموعة جميع النقاط في المستوى التي تبعد مسافةً واحدة عن نقطةٍ معطاةٍ تدعى **البؤرة** ومستقيمٍ معطى يدعى **الدليل**.

يطلق على القطعة المستقيمة المارة من بؤرة القطع المكافئ والعمودية على محور التماثل اسم **وتر بؤري عمودي**. تقع النقطتان الطرفيتان للوتر البؤري العمودي على القطع المكافئ.



المفهوم الأساسي صور معادلات القطوع المكافئة

صيغة المعادلة	$y = a(x-h)^2 + k$	$x = a(y-k)^2 + h$
اتجاه الفتحة	للأعلى إذا كانت $a > 0$. للأسفل إذا كانت $a < 0$	لليمين إذا كانت $a > 0$. لليسار إذا كانت $a < 0$
الرأس	(h, k)	(h, k)
محور التماثل	$x = h$	$y = k$
البؤرة	$\left(h, k+\frac{1}{4a}\right)$	$\left(h+\frac{1}{4a}, k\right)$
الدليل	$y = k - \frac{1}{4a}$	$x = h - \frac{1}{4a}$
طول الوتر البؤري العمودي	$\left\|\frac{1}{a}\right\|$ وحدة	$\left\|\frac{1}{a}\right\|$ وحدة

الصيغة القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي يقع رأسه عند النقطة (h, k) ومحور تماثله $x = h$ هي $y = a(x-h)^2 + k$.

- إذا كانت $a > 0$، فإن k تمثل القيمة الصغرى للدالة المرتبطة والقطع المكافئ مفتوح إلى الأعلى.
- إذا كانت $a < 0$، فإن k تمثل القيمة العظمى للدالة المرتبطة والقطع المكافئ مفتوح إلى الأسفل.

تمثل معادلة القطع المكافئ في الشكل $y = ax^2 + bx + c$ **الصيغة العامة**. أي معادلة بالصيغة العامة يمكن كتابتها بالصيغة القياسية. يعتمد شكل القطع المكافئ والمسافة بين البؤرة والدليل على قيمة a في المعادلة.

مثال 1 تحليل معادلة القطع المكافئ

اكتب $y = 2x^2 - 12x + 6$ بالصيغة القياسية. حدد رأس القطع المكافئ ومحور تماثله واتجاه فتحته.

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

تمرين موجّه

1. اكتب $y = 4x2 + 16x + 34$ بالصيغة القياسية. حدد رأس القطع المكافئ ومحور تماثله واتجاه فتحته.

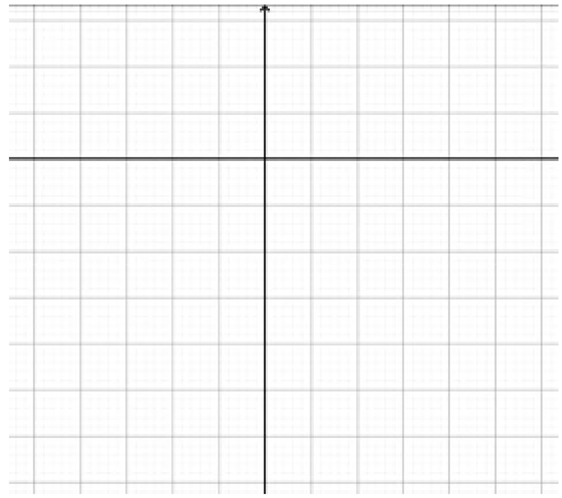
اكتب كل معادلة بالصيغة القياسية. حدد رأس القطع المكافئ ومحور تماثله واتجاه فتحته.

$x + 3y^2 + 12y = 18$

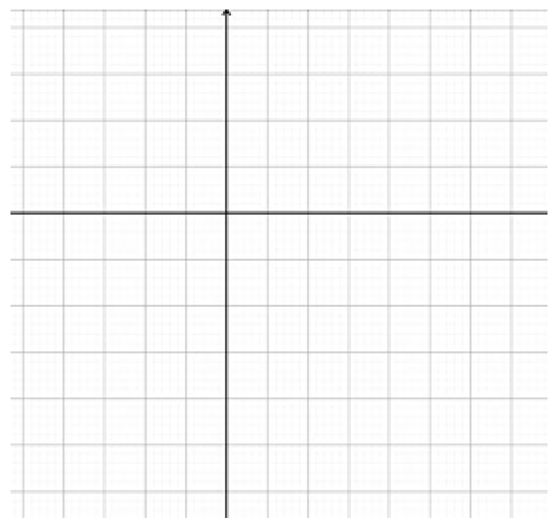
مثال 2 تمثيل القطع المكافئ بيانيًا

مثّل كل معادلة بيانيًا.

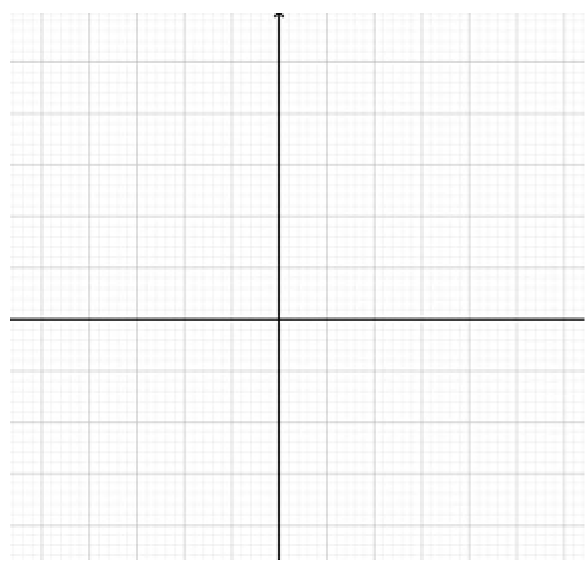
a. $y = -3x^2$



b. $y = -3(x-4)^2 + 5$



$y = 2(x-1)^2 - 4$



ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

مثال 3 التمثيل البياني لمعادلة بالصيغة العامة

مثّل كل معادلة بيانيًا.

a. $2x - y^2 = 4y + 10$

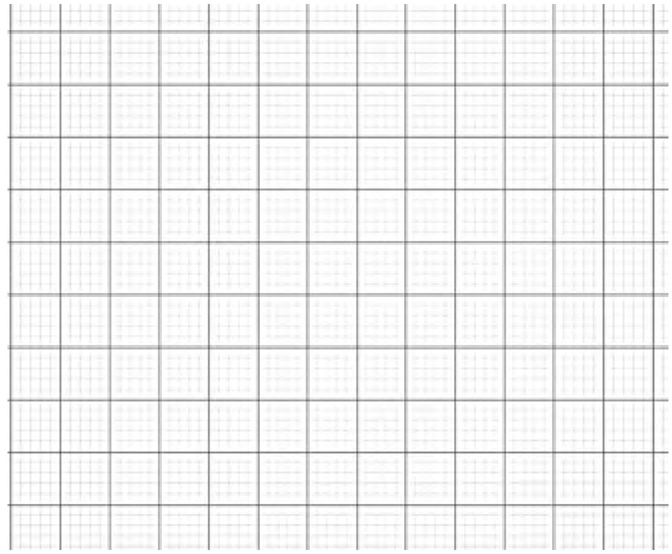
b. $y + 2x^2 + 32 = -16x - 1$

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

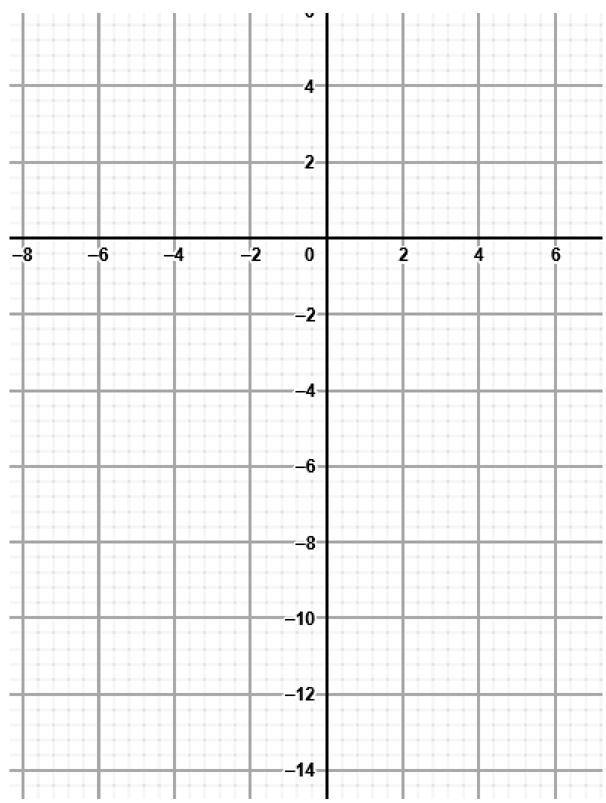
تمرين موجه

مثّل كل معادلة بيانيًا.

3A $3x - y^2 = 4x + 25$



3B. $y = x^2 + 6x - 4$



ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

مثال 4 كتابة معادلة القطع المكافئ

اكتب معادلة قطعٍ مكافئٍ يقع رأسه على النقطة $(-2, -4)$ ويقع دليله على النقطة $y = 1$. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

تمرين موجّه

اكتب معادلة لكل قطعٍ مكافئٍ موضح أدناه. ثم مثّل المعادلة بيانيًا.

4A. الرأس $(1, 3)$، البؤرة $(1, 5)$

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

4B. البؤرة $(5, 6)$، الدليل $x = -2$

مثال 5 من الحياة اليومية كتابة معادلة للقطع المكافئ

البيئة يمكن تسخير الطاقة الشمسية باستخدام مرايا لها شكل القطع المكافئ، وتعكس المرايا أشعة الشمس إلى بؤرة القطع المكافئ، محور كل مرآة لها شكل القطع المكافئ في المنشأة الموصوفة إلى اليسار يقع على ارتفاع ft 6.25 فوق الرأس. طول الوتر البؤري العمودي ft 25.

تمرين موجّه

5. اكتب ومثّل بيانيًا معادلة مرآة لها شكل القطع المكافئ تقع بؤرتها على ارتفاع 1.4 m فوق الرأس ووتر بؤري عمودي يبلغ طوله 5.5 m . عندما تكون البؤرة عند نقطة الأصل.

السيارات يحتوي مصباح سيارة على عاكس له شكل قطع مكافئ. يرتد الضوء المنبعث من المصدر عن العاكس ذو شكل القطع المكافئ ويضيء خارجا من الجزء الأمامي للمصباح. معادلة المقطع العرضي للعاكس هي $y = \frac{1}{12}x^2$. على أي بعد من الرأس يجب أن توضع شعيرة المصباح؟

المظلات مظلة شاطئ لها قوس على شكل قطع مكافئ مفتوح إلى الأسفل. وتمتد المظلة 6 ft من جانب لآخر ويبلغ ارتفاعها 1.5 ft . اكتب معادلة قطع مكافئ يمثل القوس، مفترضا بأن نقطة الأصل تقع عند النقطة التي يلتقي فيها العمود والمظلة مع رأس القوس.

1 كتابة معادلات الدوائر.

الدوائر

2 التمثيل البياني للدوائر.

المفهوم الأساسي صور معادلة الدائرة

الصيغة القياسية للمعادلة	$x^2 + y^2 = r^2$	$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$
المركز	$(0, 0)$	(h, k)
نصف القطر	r	r

مثال 1 من الحياة اليومية كتابة معادلة إذا علمت نصف القطر

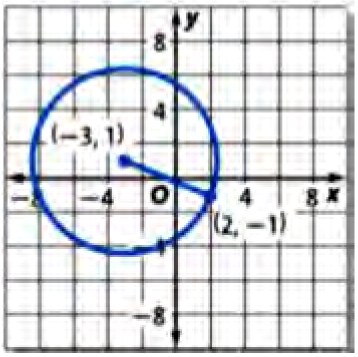
التوصيل الأجهزة + المزيد من عروض التوصيل المجاني في نطاق 35 كيلومترًا من المتجر. يقع متجر أبو ظبي على مسافة 100 km شمال مكتب الشركة و 45 km شرقًا. اكتب معادلة تمثل حدود التوصيل من متجر أبو ظبي إذا كان مصدر النظام الإحداثي هو مكتب الشركة.

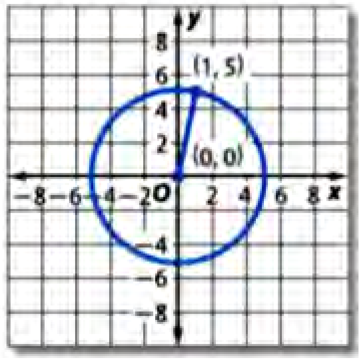
ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

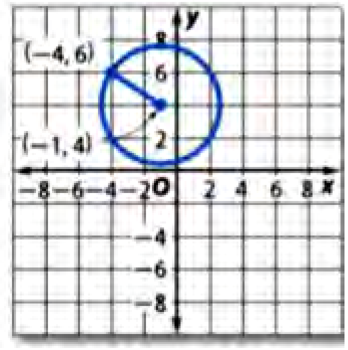
تمرين موجّه

1. **واي فاي** مدى أحد هواتف واي فاي 30 km في أي اتجاه. إذا كان الهاتف يقع على مسافة 4 km جنوب المقر الرئيسي و 3 km غربًا، فاكتب معادلة تمثل المساحة التي يمكن تشغيل الهاتف في مداها عبر نظام واي فاي.

مثال 2 كتابة معادلة من تمثيل بياني







ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

مثال 3 كتابة معادلة إذا كان القُطر معلومًا

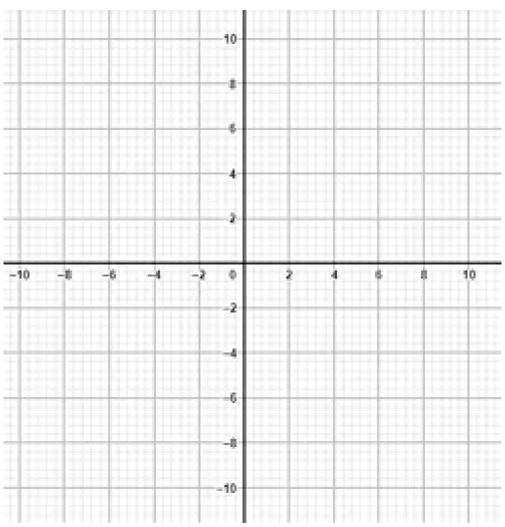
اكتب معادلة دائرةٍ النقطتان الطرفيتان لقطرها هما $(7, 6)$ و $(-1, -8)$.

تمرين موجّه

3. اكتب معادلة دائرةٍ النقطتان الطرفيتان لقطرها هما $(3, -3)$ و $(1, 5)$.

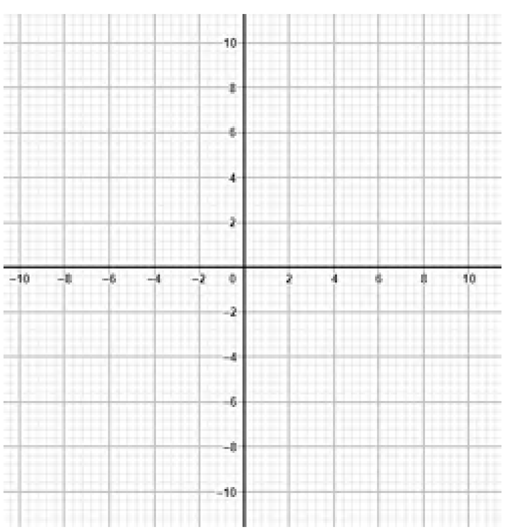
مثال 4 التمثيل البياني لمعادلة بالصيغة القياسية

أوجد مركز ونصف قطر دائرة معادلتها $x^2 + y^2 = 100$. ثم مثّل الدائرة بيانيًا.



تمرين موجّه

4. أوجد مركز ونصف قطر دائرة معادلتها $x^2 + y^2 = 81$. ثم مثّل الدائرة بيانيًا.

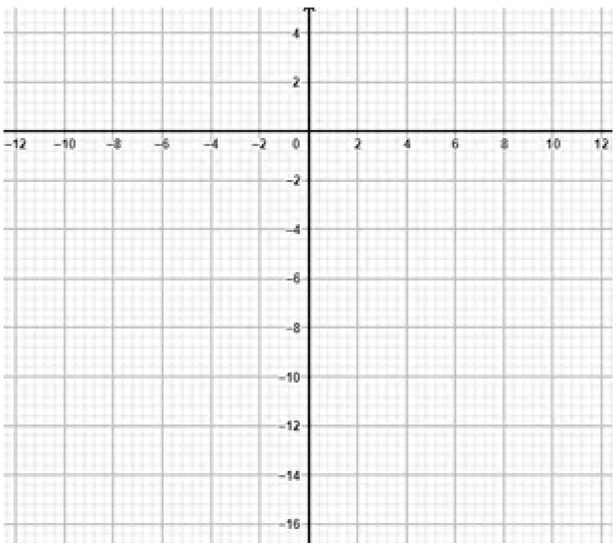


ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

يمكن تمثيل الدوائر التي لا تكون مراكزها $(0, 0)$ بيانياً باستخدام الإزاحة. التمثيل البياني لـ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ هو التمثيل البياني لـ $x^2+y^2=r^2$ مزاحا بمقدار h وحدة أفقيًا و k وحدة رأسيًا

مثال 5 التمثيل البياني لمعادلة ليست بالصيغة القياسية

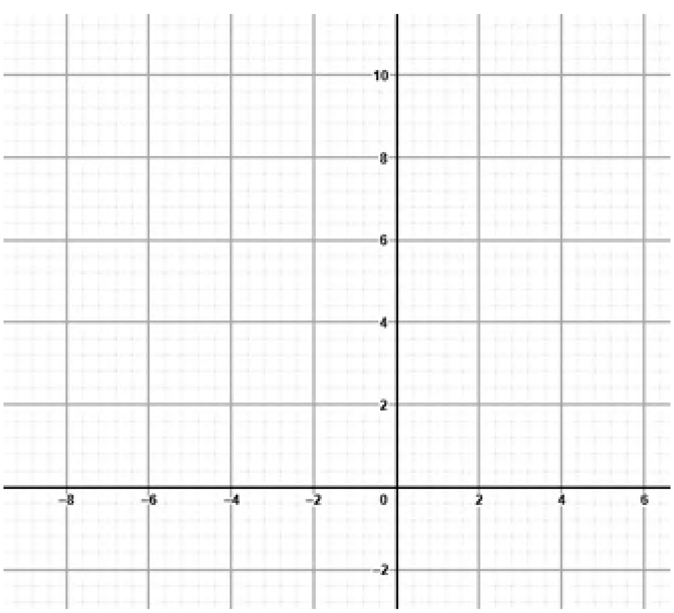
أوجد مركز ونصف قطر دائرة معادلتها $x^2+y^2-8x+12y-12=0$. ثم مثّل الدائرة بيانيًا.



ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

تمرين موجّه

5. أوجد مركز ونصف قطر دائرة معادلتها $x^2+y^2+4x-10y-7=0$. ثم مثّل الدائرة بيانيًا.



العناية بالعشب تعمل آلة رش على ري قطاع دائري من العشب.

a. اكتب معادلة لتمثيل حدود منطقة الرش إذا علمت أن النقطتين الطرفيتين للقطر هما (16 ,12−) و (16− ,12).

b. ما مساحة العشب التي ترويها آلة الرش؟

الفضاء كانت أبولو 8 أول مركبة فضاء مأهولة تدور حول القمر على ارتفاع متوسط يبلغ 185 km فوق سطح القمر. اكتب معادلة لتمثيل مدار دائري واحد لوحدة التحكم إذا علمت أن النقطتين الطرفيتين لقطر القمر هما (0 ,1740) و (0 ,1740−). افترض أن مركز القمر يقع عند نقطة أصل النظام الإحداثي الذي يتم قياسه بالكيلومتر

1 كتابة معادلات القطوع الناقصة.

القطع الناقص

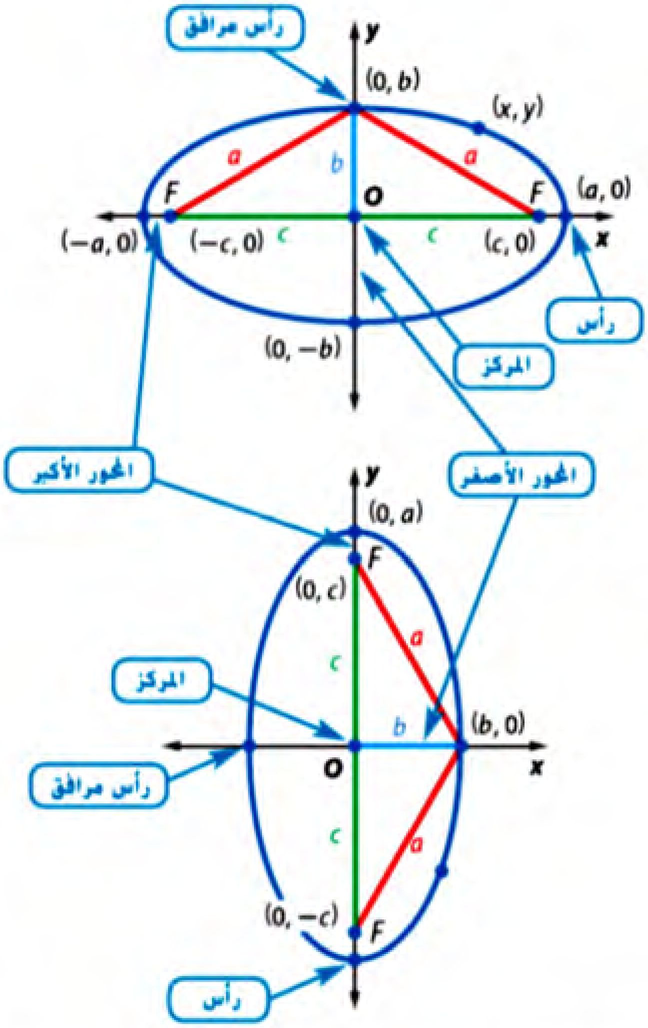
2 تمثيل القطوع الناقصة بيانيًا.

1 معادلات القطع الناقص التطع الناقص

هو مجموعة جميع النقاط في مستوى والتي يكون مجموع بعدي كلٍ منها عن نقطتين ثابتتين ثابتًا. يطلق على هاتين النقطتين **البؤرتان** للقطع الناقص.

ذكر الطلاب أن للقطع الناقص محوري تماثل، وهما **المحور الأكبر** و**المحور الأصغر**. المحوران متعامدان على **مركز** القطع الناقص.

تقع البؤرتان للقطع الناقص دائما على المحور الأكبر. النقاط الطرفية للمحور الأكبر هي **رؤوس** القطع الناقص والنقاط الطرفية للمحور الأصغر هي **الرؤوس المرافقة** للقطع الناقص.



المفهوم الأساسي صور معادلات القطوع الناقصة التي يقع مركزها عند نقطة الأصل

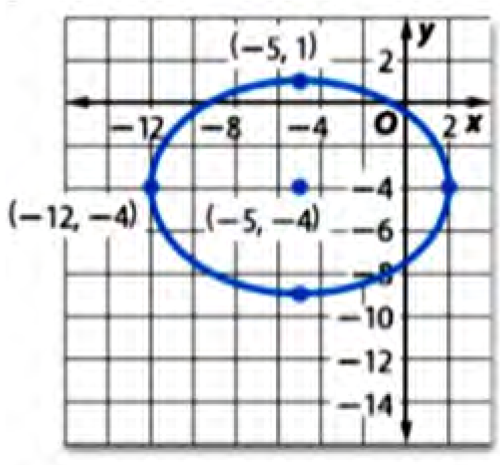
الصيغة القياسية	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$
الاتجاه	أفقي	رأسي
البؤرتان	$(c, 0), (-c, 0)$	$(0, c), (0, -c)$
طول المحور الأكبر	$2a$ وحدة	$2a$ وحدة
طول المحور الأصغر	$2b$ وحدة	$2b$ وحدة

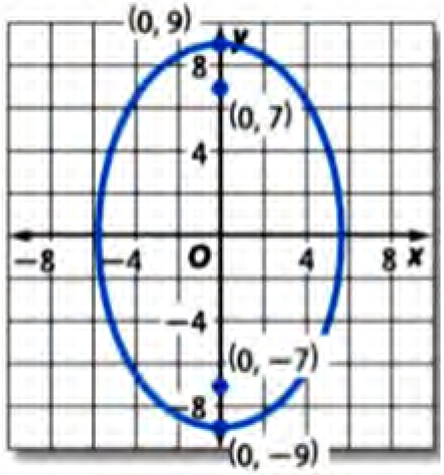
مجموع المسافتين من البؤرتين إلى أي نقطة على القطع الناقص، أو **المجموع الثابت**، يجب أن يكون أكبر من المسافة بين البؤرتين.

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

مثال 1 كتابة معادلة إذا علمت الرأسين والبعدين البؤريين

اكتب معادلة قطع ناقص.





تمرين موجّه

1. اكتب معادلة قطعٍ ناقص يقع رأساه عند النقطتين $(-4, 0)$ و $(4, 0)$ وبؤرتاه عند $(2, 0)$ و $(-2, 0)$.

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

المفهوم الأساسي صور معادلات القطوع الناقصة التي يقع مركزها عند (h, k)

الصيغة القياسية	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$
الاتجاه	أفقي	رأسي
البؤرتان	$(h \pm c, k)$	$(h, k \pm c)$
الرؤوس	$(h \pm a, k)$	$(h, k \pm a)$
الرؤوس المرافقة	$(h, k \pm b)$	$(h \pm b, k)$

اكتب معادلة للقطع الناقص الذي يحقق كل مجموعة من الشروط.

يقع الرأسان عند $(-6, 4)$ و $(12, 4)$، ويقع الرأسان المرافقان عند $(3, 12)$ و $(3, -4)$

يقع المركز عند $(-2, 6)$، ويقع الرأس عند $(-2, 16)$، ويقع الرأس المرافق عند $(1, 6)$

يقع الرأسان عند $(-11, 2)$ و $(-1, 2)$، ويقع الرأسان المرافقان عند $(-6, 0)$ و $(-6, 4)$

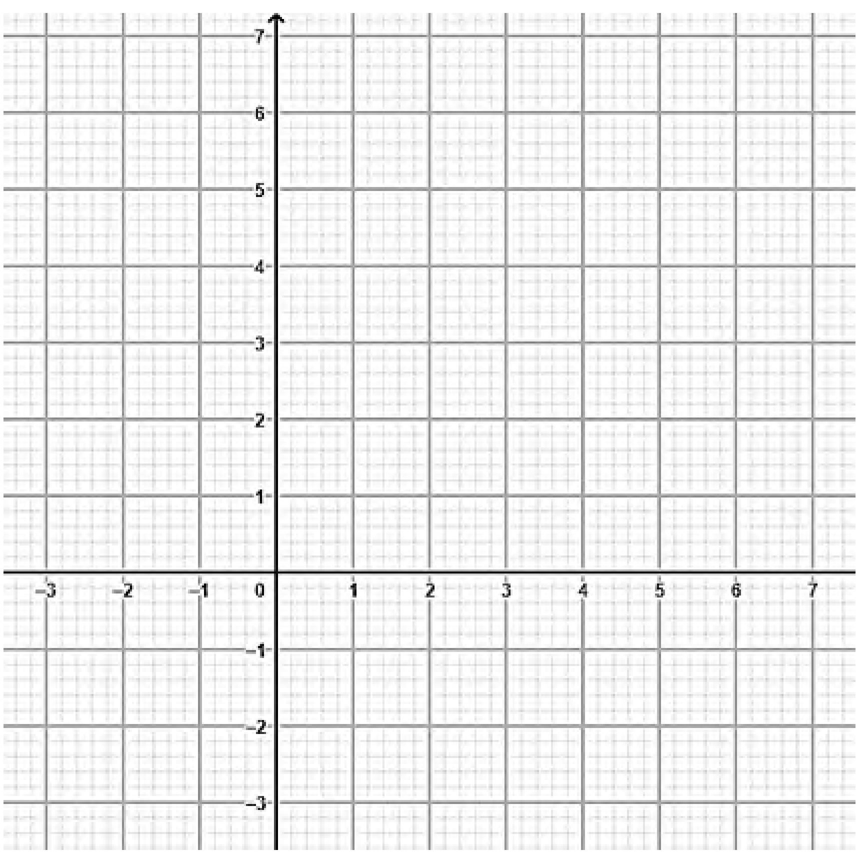
استخدام النماذج يمكن تمثيل فتحة نفق في الجبال بواسطة أشباه القطوع الناقصة أو أنصاف القطوع الناقصة. يبلغ عرض الفتحة 14.6 m وارتفاعها 8.6 m. حدد معادلة تمثل الفتحة بحيث يكون المركز عند نقطة الأصل.

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

الفضاء يبعد بلوتو عن الشمس مسافة 4.44 مليار كيلومتر عند الحضيض ويبعد 7.4 مليار كيلومتر تقريبًا عند الأوج. حدد معادلة تمثل مدار بلوتو حول الشمس بالمليار ميل بحيث يكون مركز القطع الناقص الأفقي عند نقطة الأصل.

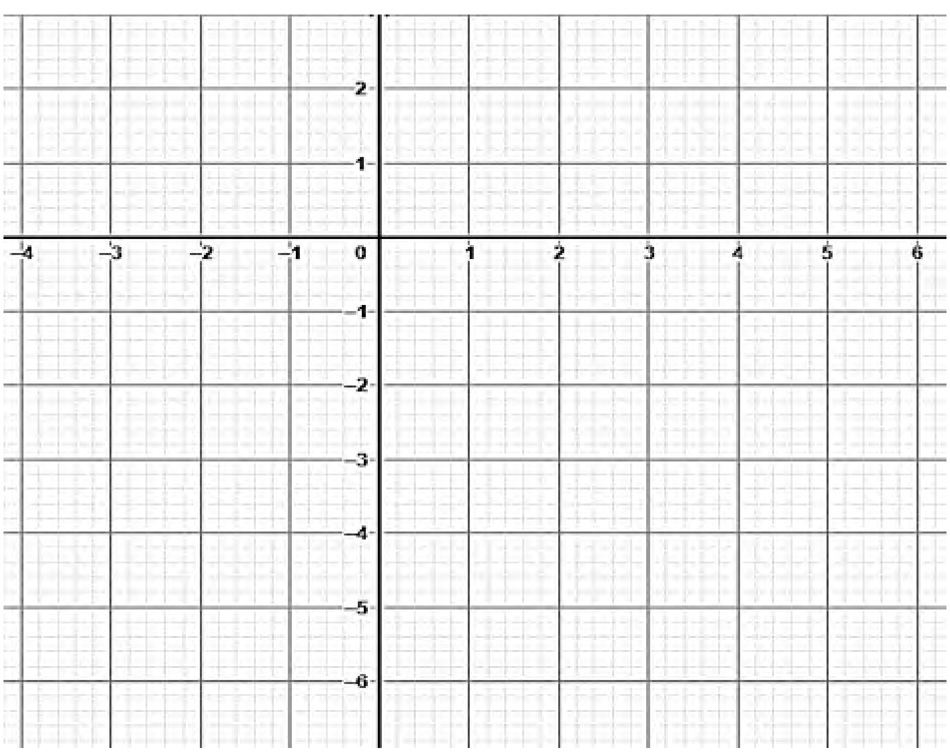
مثال 4 تمثيل قطع ناقص بيانيًا

أوجد إحداثيات المركز والبؤرتين، وطولي المحورين الأكبر والأصغر لقطع ناقص معادلته $25x^2 + 9y^2 + 250x - 36y + 436 = 0$. ثم مثّل القطع الناقص بيانيًا.



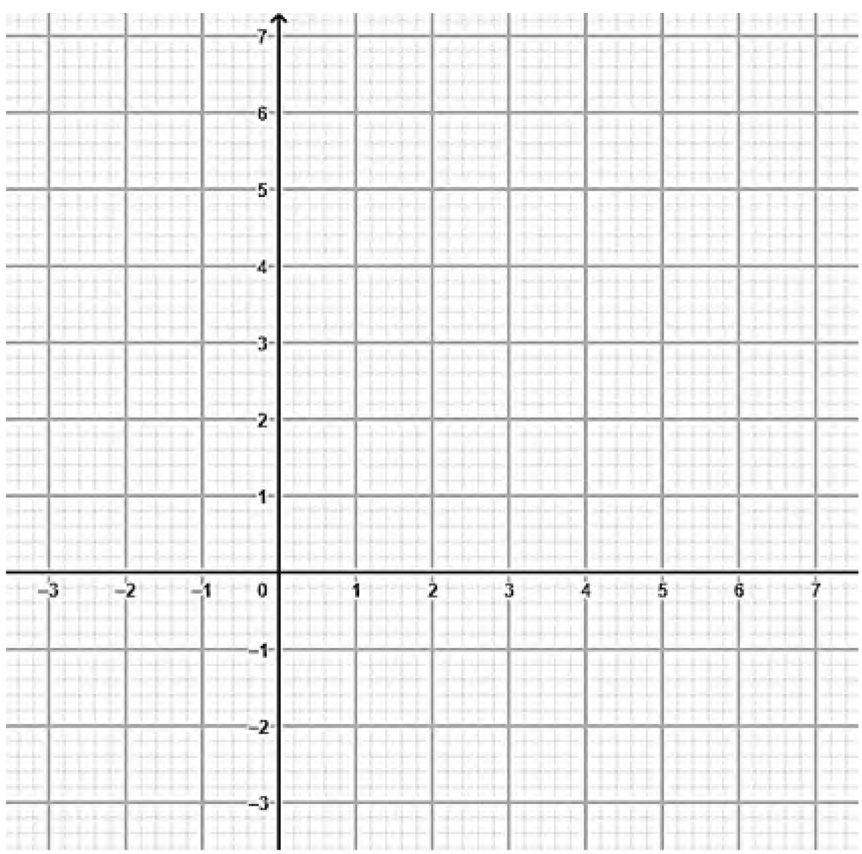
أوجد إحداثيات المركز والبؤرتين وطولي المحورين الأكبر والأصغر لقطع ناقص معادلته $x^2 + 4y^2 - 2x + 24y + 21 = 0$. ثم مثّل القطع الناقص بيانيًا.

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

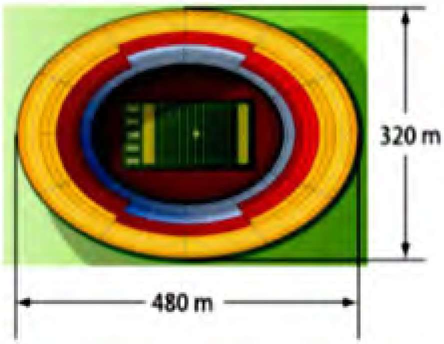


أوجد إحداثيات المركز والبؤرتين وطولي المحورين الأكبر والأصغر لقطع ناقص بالمعادلة المعطاة. ثم مثّل القطع الناقص بيانيًا.

$$4x^2 + y^2 - 32x - 4y + 52 = 0$$



ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL



الاستنتاج المنطقي أرسلت شركة هندسة معمارية عرضا إلى إحدى المدن لبناء المدرج الموضح.

a. حدد قيمة a و b.

b. بافتراض أن المركز يقع عند نقطة الأصل. اكتب معادلة تمثل القطع الناقص.

c. حدد إحداثيات البؤرتين.

الفضاء يبلغ مدار الأرض 147.1 مليون كيلومتر تقريبًا عند الحضيض و 152.1 مليون كيلومتر تقريبًا عند الأوج. حدد معادلة تمثل مدار الأرض حول الشمس بالمليون كيلومتر بحيث يكون مركز القطع الناقص الأفقي عند نقطة الأصل.

1 كتابة معادلات القطوع الزائدة.

القطع الزائد

2 تمثيل القطوع الزائدة بيانيًا.

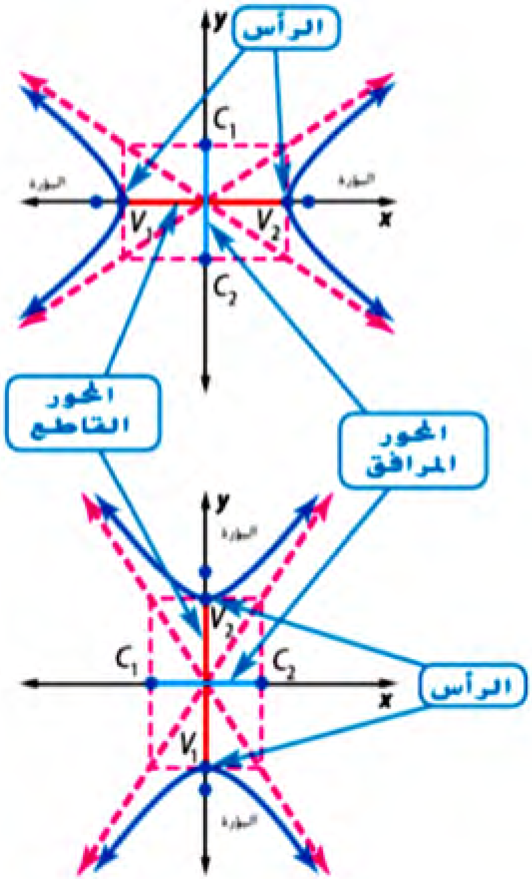
1 معادلات القطع الزائد

على غرار القطع الناقص، **القطع الزائد** هو مجموعة جميع النقاط في مستوى بحيث تكون القيمة المطلقة لفرق المسافتين من البؤرتين ثابتة.

لكل قطع زائد محورا تماثل، **محور قاطع** و**محور مرافق**. المحوران متعامدان على مركز القطع الزائد.

تقع **البؤرتان** للقطع الزائد دائما على المحور القاطع.
الرأسان هما النقطتان الطرفيتان للمحور القاطع.
الرأسان المرافقان هما النقطتان الطرفيتان للمحور المرافق.

بينما ينحسر القطع الزائد عن المركز، يقترب النصفان من خطوط التقارب.

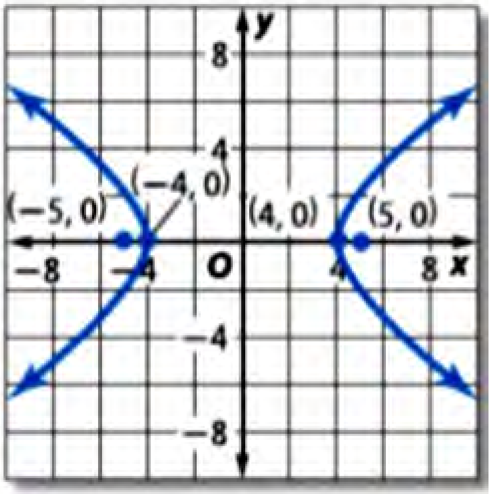


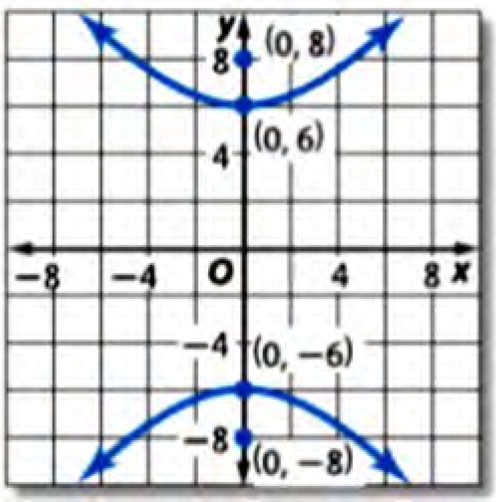
المفهوم الأساسي صور معادلات القطع الزائد التي يقع مركزها عند نقطة الأصل

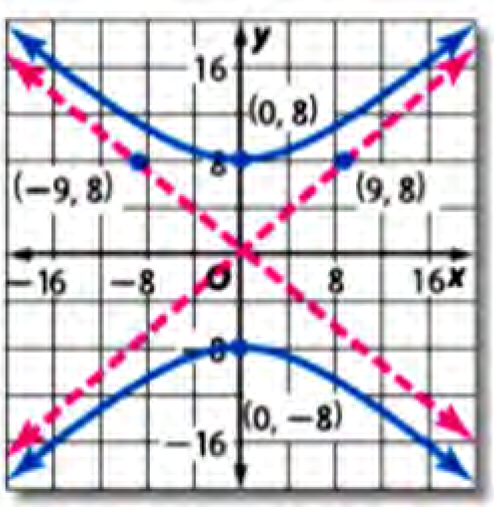
الصيغة القياسية	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
الاتجاه	أفقي	رأسي
البؤرتان	$(\pm c, 0)$	$(0, \pm c)$
طول المحور القاطع	$2a$ وحدات	$2a$ وحدات
طول المحور المرافق	$2b$ وحدات	$2b$ وحدات
معادلات خطوط التقارب	$y = \pm \frac{b}{a}x$	$y = \pm \frac{a}{b}x$

مثال 1 كتابة معادلة إذا علمت الرأسين والبؤرتين

اكتب معادلةً للقطع الزائد المبيّن في التمثيل البياني.







ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

تمرين موجّه

1. اكتب معادلة قطع زائد يقع رأساه عند النقطتين $(6, 0)$ و$(-6, 0)$ وبؤرتاه عند $(8, 0)$ و$(-8, 0)$.

مثال 2 كتابة معادلة إذا كانت خطوط التقارب معلومة

خطا التقارب لقطع زائد رأسي هما $y = \frac{5}{3}x$ و $y = -\frac{5}{3}x$ ويقع الرأسان عند $(0, 5)$ و$(0, -5)$. اكتب معادلة القطع الزائد.

خطا التقارب لقطع زائد أفقي هما $y = \frac{7}{9}x$ و $y = -\frac{7}{9}x$، الرأسان هما $(9, 0)$ و$(-9, 0)$. اكتب معادلة قطع زائد.

2 التمثيلات البيانية للقطع الزائد

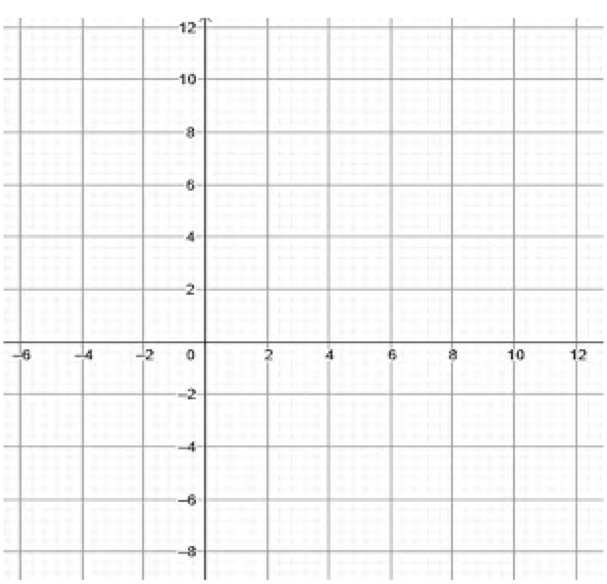
يمكن إزاحة القطع الزائد بنفس طريقة القطع الناقص.

المفهوم الأساسي صور معادلات القطوع الزائدة التي يقع مركزها عند (h, k)

الصيغة القياسية	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$
الاتجاه	أفقي	رأسي
البؤرتان	$(h \pm c, k)$	$(h, k \pm c)$
الرؤوس	$(h \pm a, k)$	$(h, k \pm a)$
الرؤوس المرافقة	$(h, k \pm b)$	$(h \pm b, k)$
معادلات خطوط التقارب	$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$	$y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$

مثال 3 التمثيل البياني للقطع الزائد

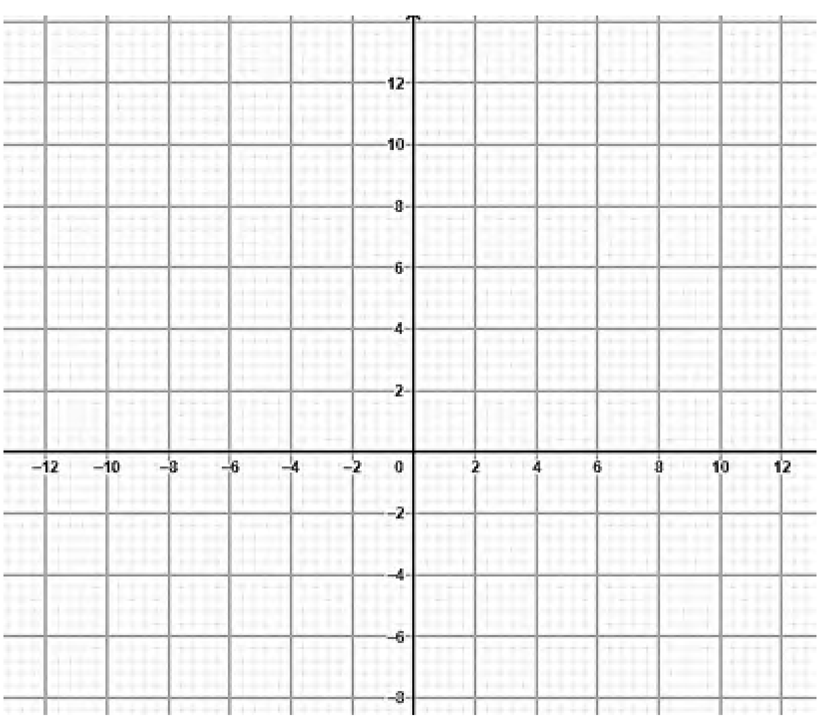
مثّل $\frac{(y+2)^2}{16}-\frac{(x-3)^2}{4}=1$ بيانيًا. حدّد الرأسين والبؤرتين وخطي التقارب.



تمرين موجّه

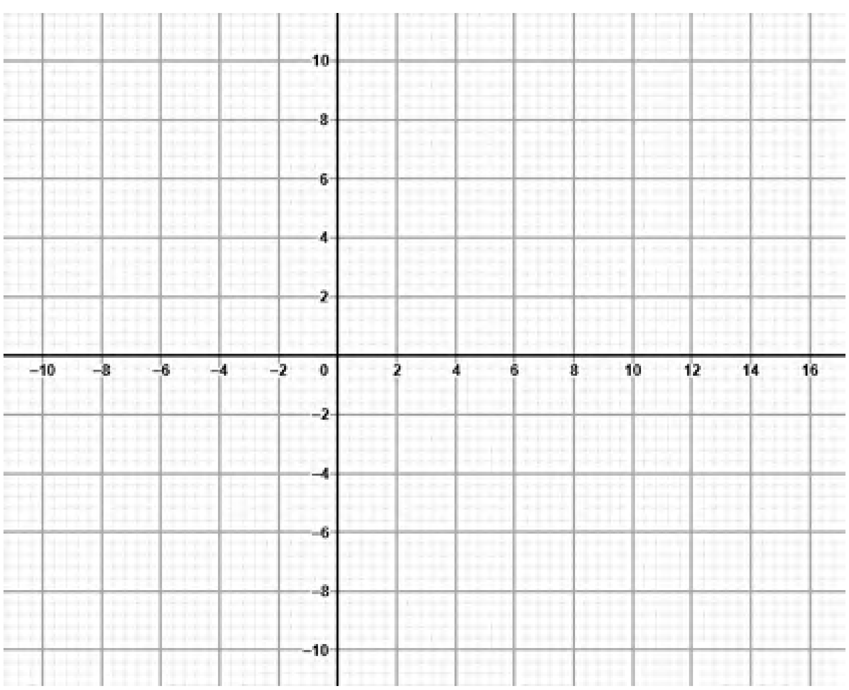
مثّل $1 = \frac{(x+3)^2}{25} - \frac{(y-4)^2}{9}$ بيانيًا. حدّد الرأسين والبؤرتين وخطي التقارب.

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL



مثّل كل قطع زائد بيانيًا. حدّد الرأسين والبؤرتين وخطي التقارب

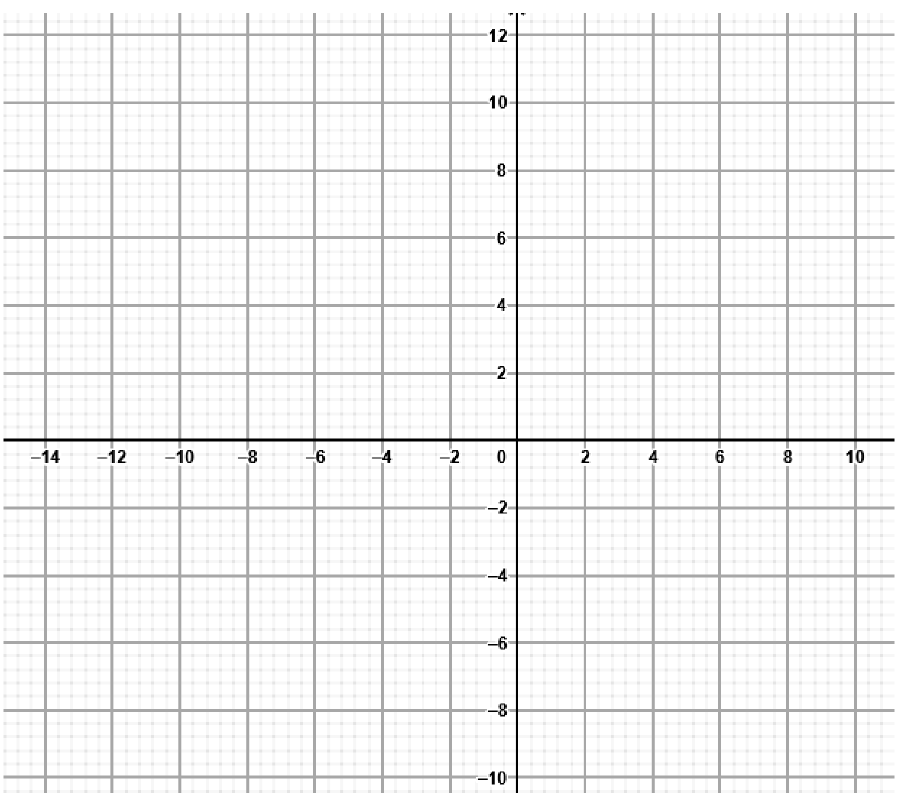
$$9y^2 - 4x^2 - 54y + 32x - 19 = 0$$



ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

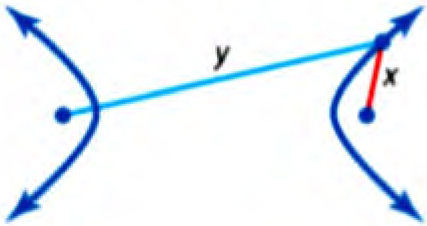
$$16x^2 - 9y^2 + 128x + 36y + 76 = 0$$

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL



في معادلة أي قطع زائد، تمثل قيمة $2a$ **الفرق الثابت**.
هذه هي القيمة المطلقة للفرق بين المسافتين من أي نقطة على القطع الزائد وبؤرتيه.

أي نقطة على القطع الزائد الموضح
لها نفس الفرق الثابت، $|y - x|$ أو $2a$.



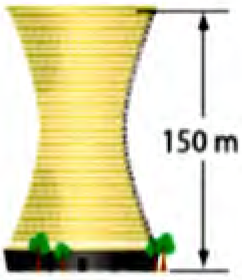
مثال 4 من الحياة اليومية كتابة معادلة قطع زائد

الفضاء تبعد الأرض عن الشمس بمسافة 146 مليون كيلومتر. يتبع المذنب مسارًا يشبه فرعًا من قطع زائد. افترض أن المسافة بين المذنب والشمس أكبر من المسافة بين المذنب والأرض بمقدار 30 مليون كيلومتر. حدد معادلة القطع الزائد الذي يقع مركزه عند نقطة الأصل لمسار المذنب.

تمرين موجّه

البحث والإنقاذ تتلقى محطتا استقبال المسافة بينهما 150 m إشارة من طائرة سقطت. تم تحديد المسافة بين الطائرة والمحطة A وكانت أكبر من المسافة بين الطائرة والمحطة B بمقدار 80 m. حدد معادلة القطع الزائد الذي يقع مركزه عند نقطة الأصل لموقع الطائرة.

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL



التبريد يتم بناء أبراج التبريد بتيارات الهواء الطبيعية على شكل قطوع زائدة للمزيد من كفاءة تبريد مصانع الطاقة.
يمكن تمثيل القطع المكافئ للبرج الموضح
بواسطة $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{225} = 1$ ، حيث الوحدات بالمتر. أوجد
عرض البرج عند القمة وعند أضيق نقطة في المنتصف.

الهندسة المعمارية كانت الأعمدة الضخمة ذات المقاطع العرضية على شكل قطوع زائدة شائعة في اليونان القديمة. يمكن تمثيل المنحنيات
بواسطة المعادلة $\frac{x^2}{0.16} - \frac{y^2}{4} = 1$، حيث الوحدات
بالقدم. إذا علمتَ أن طول الأعمدة 9 ft. فأوجد عرض كل عمود عند
القمة وعند أضيق نقطة في المنتصف. قرّب إلى أقرب جزء من المئة من القدم.

اكتب معادلة للقطع الزائد الذي يحقق كل مجموعة من الشروط.

الرأسان $(-8, 0)$ و $(8, 0)$. وطول المحور المرافق 20 وحدة

الرأسان $(-2, 6)$ و $(-2, -2)$. والبؤرتان $(-2, 10)$ و $(-2, -6)$

يقع المركز عند نقطة الأصل وطول المحور القاطع الرأسي 16 وحدة وطول المحور المرافق 12 وحدة

1 كتابة معادلات القطوع المخروطية بالصيغة القياسية.

تحديد القطوع المخروطية

2 تحديد القطوع المخروطية من معادلاتها.

1 القطوع المخروطية بالصيغة القياسية يمكن كتابة معادلة أي قطع مخروطي بالصيغة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$، حيث A و B و C غير أصفار جميعا. يمكن تحويل هذه الصيغة العامة إلى الصيغ القياسية أدناه من خلال إكمال المربع.

ملخص المفهوم الصيغ القياسية لمعادلات القطوع المخروطية

قطع مخروطي	الصيغة القياسية للمعادلة	
دائرة	$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	
	محور أفقي	محور رأسي
قطع مكافئ	$y = a(x-h)^2 + k$	$x = a(y-k)^2 + h$
قطع ناقص	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
قطع زائد	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

مثال 1 إعادة كتابة معادلة قطع مخروطي

اكتب $16x^2 - 25y^2 - 128x - 144 = 0$ بالصيغة القياسية. اذكر إن كان التمثيل البياني للمعادلة قطعًا مكافئًا أو دائرة أو قطعًا ناقصًا أو قطعًا زائدًا.

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

اكتب $4x^2 + y^2 - 16x + 8y - 4 = 0$ بالصيغة القياسية. اذكر إن كان التمثيل البياني للمعادلة قطعا مكافئًا أو دائرة أو قطعا ناقصا أو قطعا زائدا.

2 تحديد القطوع المخروطية

يمكنك تحديد نوع المخروط دون الحاجة إلى كتابة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ بالصيغة القياسية. عندما يكون هناك حد xy حيث $(B \neq 0)$. يمكنك استخدام المميز. $B^2 - 4AC$ هو مميز $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

ملخص المفهوم تصنيف القطوع المخروطية باستخدام المميز

المميز	القطع المخروطي
$B^2 - 4AC < 0;\ B = 0$ و $A = C$	دائرة
$B^2 - 4AC < 0;\ B \neq 0$ أو $A \neq C$	قطع ناقص
$B^2 - 4AC = 0$	قطع مكافئ
$B^2 - 4AC = 0$	قطع زائد

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

مثال 2 تحليل معادلة قطع مخروطي

بدون كتابة كل معادلة بالصيغة القياسية، اذكر إن كان التمثيل البياني لها قطعا مكافئًا أو دائرة أو قطعا ناقصا أو قطعا زائدًا.

a. $y^2 + 4x^2 - 3xy + 4x - 5y - 8 = 0$

b. $3x^2 - 6x + 4y - 5y^2 + 2xy - 4 = 0$

c. $4y^2 - 8x + 6y - 14 = 0$

تمرين موجّه

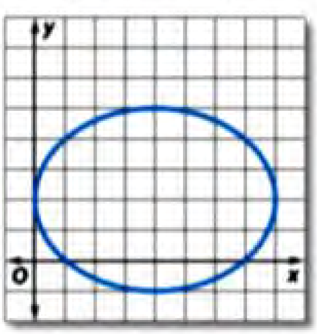
ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

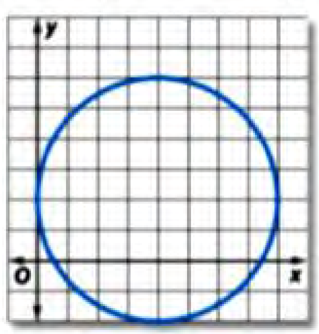
2A. $8y^2 - 6x^2 + 4xy - 6x + 2y - 4 = 0$

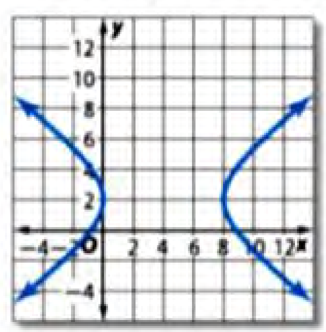
2B. $3xy + 4x^2 - 2y + 9x - 3 = 0$

صل كل تمثيل بياني بالمعادلة المقابلة له.

a. $x^2 + y^2 - 8x - 4y = -4$ b. $9x^2 - 16y^2 - 72x + 64y = 64$ c. $9x^2 + 16y^2 = 72x + 64y - 64$







2 حل أنظمة المتباينات الخطية واللاخطية بيانيًا.

حل الأنظمة الخطية واللاخطية

1 حل أنظمة المعادلات الخطية واللاخطية جبريًا وبيانيًا.

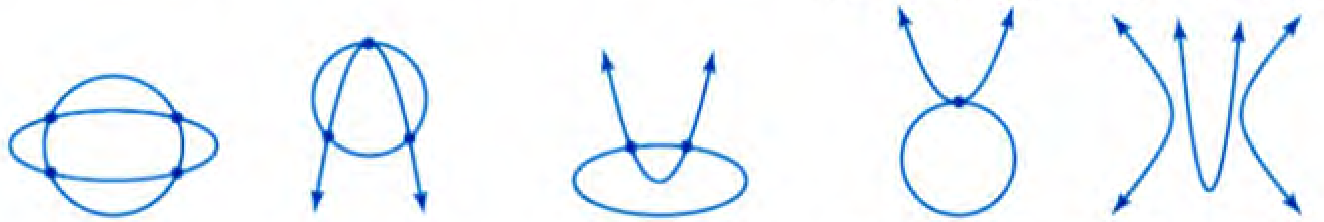
1 أنظمة المعادلات عندما يتكون نظام معادلات من معادلة خطية ولاخطية. فقد يكون للنظام حل أو اثنان أو لا يوجد حل. بعض الحلول المحتملة موضحة أدناه.

يمكنك حل الأنظمة التربيعية الخطية باستخدام الطرق البيانية أو الجبرية.

أوجد حلا لنظام المعادلات.

$$9x^2 + 25y^2 = 225$$
$$10y + 6x = 6$$

في نظام معادلات تربيعية يحتوي على قطوع مخروطية. قد يكون للنظام ما يصل إلى أربعة حلول أو لا يوجد حل. بعض التمثيلات البيانية موضحة أدناه.



يمكنك استخدام الحذف لحل الأنظمة التربيعية-التربيعية.

أوجد حلاً لنظام المعادلات.

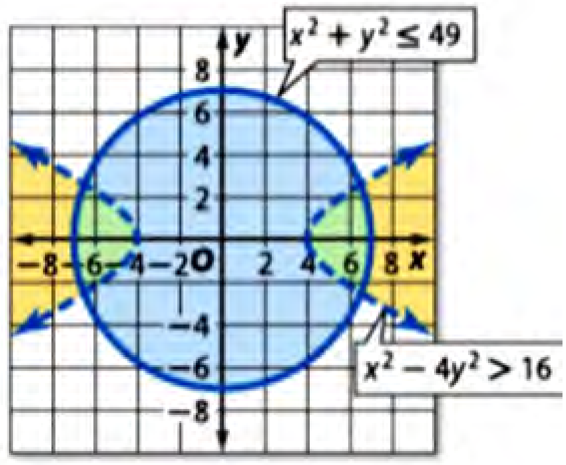
$$x^2 + y^2 = 45 \qquad (1)$$
$$y^2 - x^2 = 27 \qquad (2)$$

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

مثال 3 المتباينات التربيعية

حـــلّ أنظمة المتباينات باستخدام التمثيل البياني.

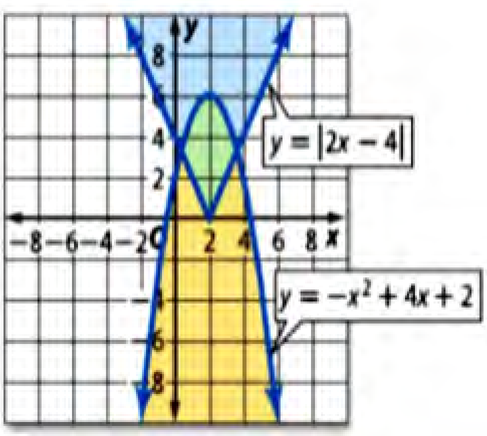
$$x^2 + y^2 \leq 49$$
$$x^2 - 4y^2 > 16$$



مثال 4 الأنظمة التربيعية ذات القيمة المطلقة

حـــلّ نظام المتباينات باستخدام التمثيل البياني.

$$y \geq |2x - 4|$$
$$y \leq -x^2 + 4x + 2$$



ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

1 تمثيل المعادلات الوسيطية بيانيًا

المعادلات الوسيطية

2 حلّ المعادلات المتصلة بحركة المقذوفات.

المفهوم الأساسي المعادلات الوسيطية

إذا كانت f و g دالّتين متصلتين لـ t في الفترة I. فإن مجموعة الأزواج المرتّبة $(f(t), g(t))$ تمثل منحنًى وسيطيًا. والمعادلتان

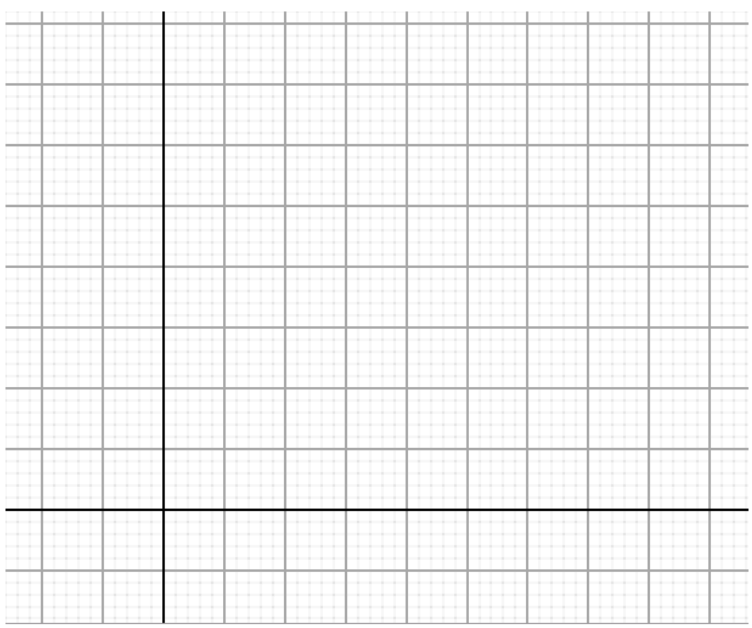
$$y = g(t) \text{ ،} x = f(t)$$

هما المعادلتان الوسيطيتان لهذا المنحنى، و t يرمز للوسيط، بينما I يرمز إلى فترة الوسيط.

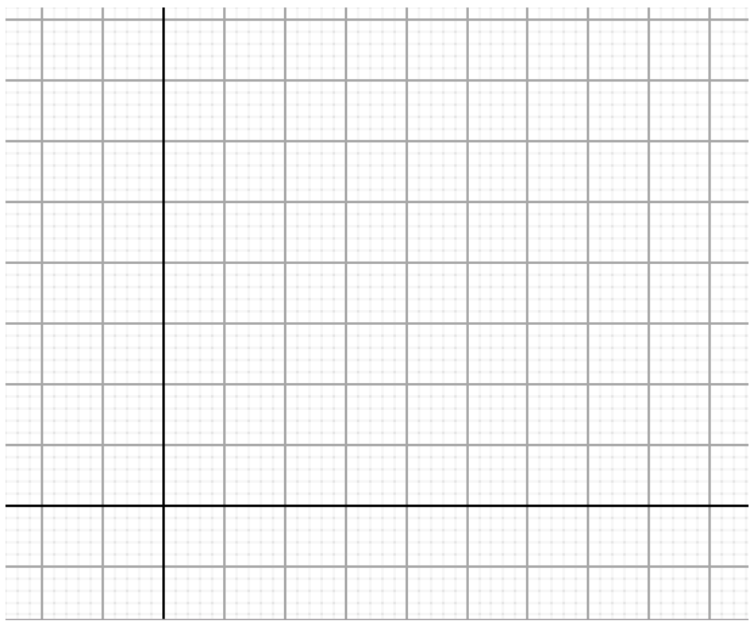
المثال 1 التمثيل البياني لمنحنيات المعادلات الوسيطية

مثّل بيانيًا المنحنى المقابل لكل زوج من المعادلات الوسيطية في الفترة المعطاة.

a. $x = t^2 + 5$ ، $y = \frac{t}{2} + 4; -4 \le t \le 4$



b. $x=\frac{t^2}{4}+5\,,\ y=\frac{t}{4}+4;\ -8\le t\le 8$



ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

المثال 2 الكتابة بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد

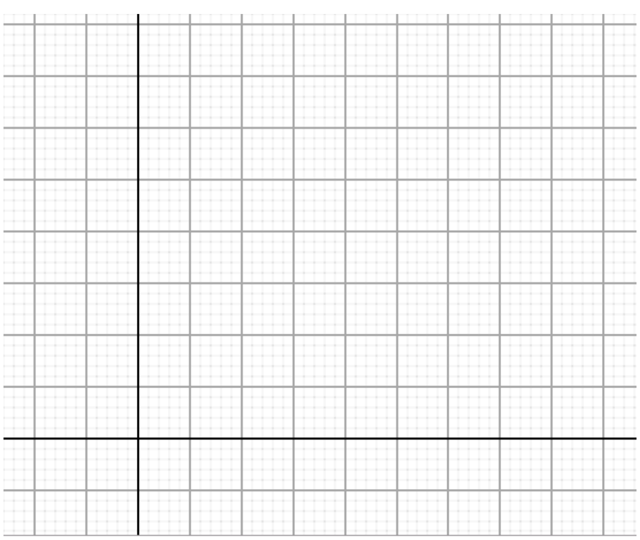
اكتب $x = -3t$ و $y = t^2 + 2$ في المستوى الإحداثي المتعامد.

اكتب $x = t^2 - 5$ و $y = 4t$ بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد.

ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

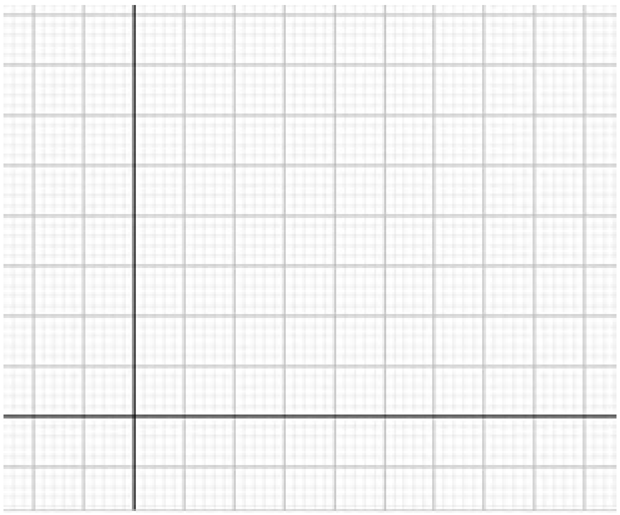
المثال 3 المستوى الإحداثي المتعامد مع قيود المجال

اكتب $x = \frac{1}{\sqrt{t}}$ و $y = \frac{t+1}{t}$ بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد. ثمّ مثّل المعادلة بيانيًا. واذكر أيّ قيودٍ خاصّةٍ بالمجال.



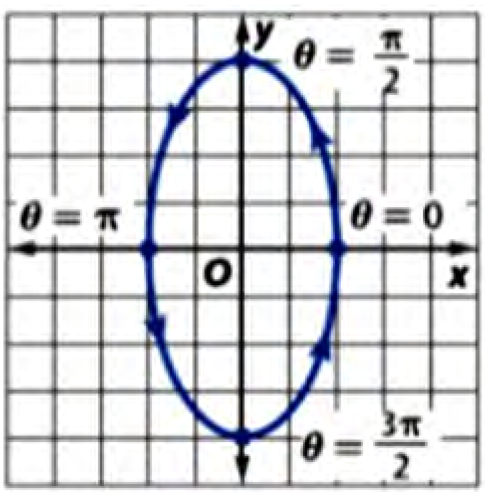
تمرين موجه

3. اكتب $x = \sqrt{t+4}$ و $y = \frac{1}{t}$ في المستوى الإحداثي المتعامد. ومثّل المعادلة بيانيًا. واذكر أيّ قيودٍ على المجال.



المثال 4 المعادلات بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد باستخدام الوسيط θ

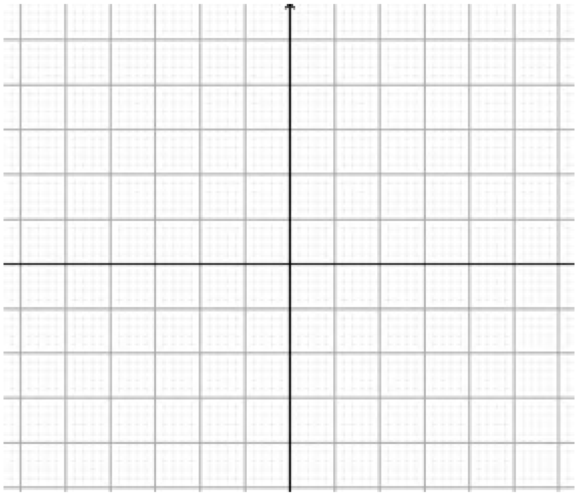
اكتب $x = 2\cos\theta$ و $y = 4\sin\theta$ في المستوى الإحداثي المتعامد. ثمّ مثّل المعادلة بيانيًا.



ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

تمرين موجه

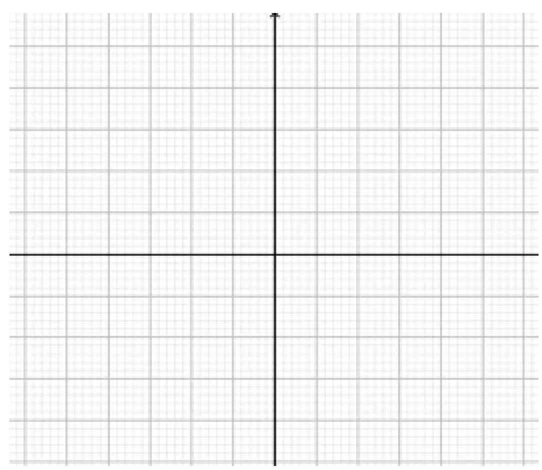
4. اكتب $x = 3\sin\theta$ و $y = 8\cos\theta$ بالصورة الديكارتية في المستوى الإحداثي المتعامد. ثم ارسم التمثيل البياني.



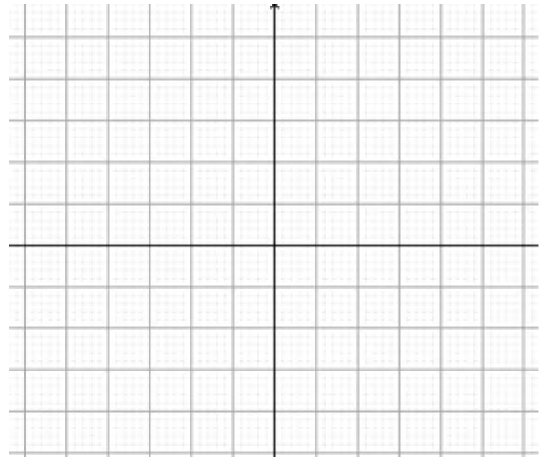
المثال 5 كتابة المعادلات الوسيطية من التمثيلات البيانية

استخدم كل وسيط لكتابة المعادلات الوسيطية التي يمكن أن تمثل $y = x^2 - 4$
ثمّ مثّل المعادلة بيانيًا، مع الإشارة إلى سرعة التمثيل وتوجيهه.

a. $t = x$

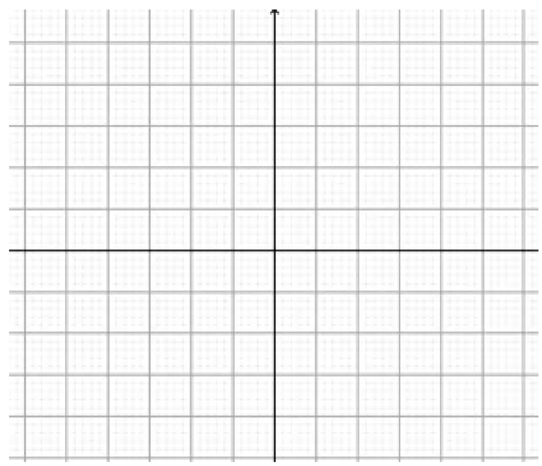


b. $t = 4x + 1$



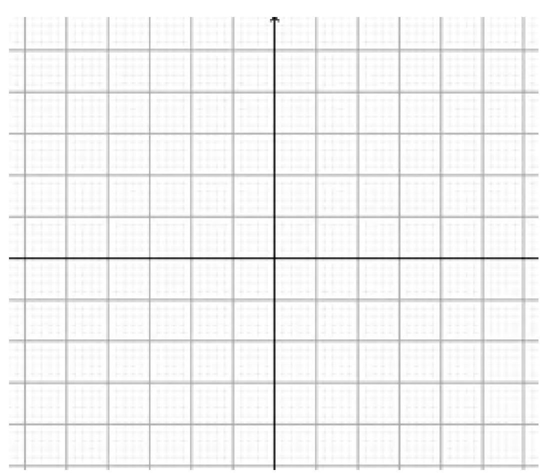
استخدم كل وسيط لتحديد المعادلات الوسيطية التي يمكن أن تمثل $x = 6 - y^2$ ثم مثّل المعادلة بيانيًا. مع الإشارة إلى السرعة والتوجيه.

$t = x + 1$



ABDEL QADER AL JAZAERI SCHOOL

$t = 4 - 2x$



2 حركة المقذوفات

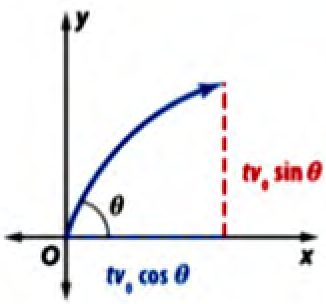
تستخدم المعادلات الوسيطية في أغلب الأحيان لمحاكاة حركة المقذوفات. ويمكن تمثيل مسار مقذوف أطلق بزاوية مغايرة لـ $90°$ مع خط الأفق بمعادلتين وسيطيتين.

المفهوم الأساسي حركة المقذوف

أطلق جسم صانعا زاوية θ مع خط الأفق وبسرعة متجهة ابتدائية v_0 حيث g ترمز إلى ثابت الجاذبية الأرضية. و t ترمز إلى الزمن و h_0 ترمز إلى الارتفاع الابتدائي.

المسافة الأفقية $x = tv_0 \cos \theta$

الموقع الرأسي $y = tv_0 \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$



مثال 6 من الحياة اليومية حركة المقذوفات

كرة السلة تتمرّن خديجة على الرميات الحرّة من أجل مباراة كرة السلة القادمة، حيث ترمي الكرة بسرعة متجهة ابتدائية تساوي 24 ft/s وبزاوية $53°$ بالنسبة خط الأفق. تساوي المسافة الأفقية من قوس الرميات الحرة إلى الحافة الأمامية من حلقة السلّة 13 ft. والمسافة الرأسية من الأرضية إلى حلقة السلة 3.1 m. تبعد الحافّة الأمامية للحلقة مسافة 10 ft عن لوحة الهدف.

ترمي خديجة الكرة عن ارتفاع 4.75 ft عن الأرض. فهل سوف تسجل؟