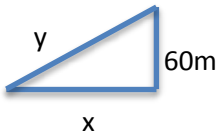
س١ – يمسك صبي بطائرة ورقية تشدها الريح بسرعة افقية مقدارها 5m/s بحيث تبقى على ارتفاع ثابت مقداره 60m جد سرعه شد الخيط عندما تكون الطائرة على بعد 100m عن الصبي .

Sol: x ,y



$\frac{dx}{dt} = \frac{5m}{s}$

$\frac{dy}{dt} = ?$

$y = 100m$

$y^2 = x^2 + (60)^2$

$(100)^2 = x^2 + (60)^2$

$10000 = x^2 + 3600$

$x^2 = 10000 - 3600$

$x^2 = 6400$

$\Rightarrow x = 80m$

$2y\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} \quad \div 2$

$y\frac{dy}{dt} = x\frac{dx}{dt}$

$\Rightarrow 100\frac{dy}{dt} = 80(5)$

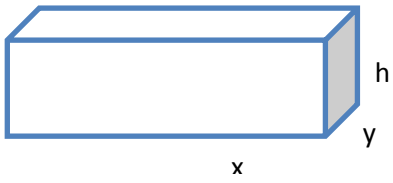
$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{400}{100} = 4\ m/s$

حسين فاضل الخماسي

@grade12ua_e

س٢ – حوض على شكل متوازي المستطيلات طوله 8m وعرضه 3m وارتفاعه 4m يراد تفريغه من الماء بمعدل $1.2m^3/min$ جد معدل انخفاض الماء.

Sol:



نفرض الطول x

نفرض العرض y

نفرض الارتفاع h

$v = xyh$

$\Rightarrow v = 8(3)h$

$\Rightarrow v = 24h$

$\frac{dv}{dt} = 24\frac{dh}{dt}$

$\Rightarrow -1.2 = 24\frac{dh}{dt}$

$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{-12}{240}$

$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{-1}{20}$

$\frac{dh}{dt} = -0.05m/min$

$\frac{dv}{dt} = -1.2m^3/min$

$x = 8m$

$y = 3m$

$h = 4m$

$\frac{dh}{dt} = ?$

حسين فاضل الخماسي

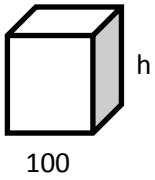
@grade12ua_e

س٣ – خزان ماء على شكل مكعب طول حرفه $100cm$ يتسرب منه الماء بمعدل $100cm^3/s$
جد معدل انخفاض عمق السائل في الخزان

Sol:

نفرض طول ضلع القاعدة x

نفرض الارتفاع h



$$v = x^2 h$$

$$\Rightarrow v = (100)^2 h$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = (100)^2 \frac{dh}{dt}$$

$$-100 = (100)^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{-100}{(100)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{-1}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = -0.01cm/s$$

$\frac{dv}{dt} = -100cm^3/s$

$\frac{dh}{dt} = ?$

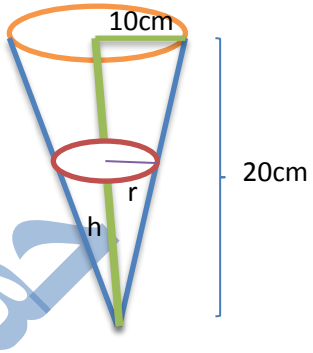
$x = 100cm$

حسين فاضل الخماسي

@grade12ua_e

س٤ – جد معدل تسرب الماء من مرشح مخروطي دائري قائم قاعدته افقية ورأسه للأسفل اذا كان نصف قطر قاعدته 10cm وارتفاعه 20cm اذا علمت انه عندما يكون ارتفاع الماء بالمرشح 10cm يكون معدل النقصان في نصف قطر قاعدته يساوي $\frac{1}{10\pi}\ cm/s$.

Sol:



نفرض نصف قطر السائل r

نفرض ارتفاع السائل h

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{10\pi}\ cm/s$$

$$\frac{dv}{dt} = ?$$

$$r = 10cm$$

$$v = \frac{\pi}{3}r^2h$$

$$tan\theta = \frac{10}{20}$$

$$\Rightarrow \frac{r}{h} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow h = 2r$$

$$\Rightarrow v = \frac{\pi}{3}r^2(2r)$$

$$\Rightarrow v = \frac{2\pi}{3}r^3$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = 2\pi r^2\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = 2\pi(100)\frac{-1}{10\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = -20cm^3/s$$

حسين فاضل الخماسي

@grade12ua_e

س٥ – تتدحرج كرة صلدة نصف قطرها 18cm على ارض جليدية بحيث يزداد حجمها محافظا على شكله الكروي بمعدل $54cm^3/s$ جد المعدل الزمني لزيادة سمك الجليد في الحظة التي يكون فيها سمك الجليد 3cm .

SOl:

x نفرض سمك الجليد

$\frac{dv}{dt} = 54cm^3/s$

$\frac{dx}{dt} = ?$

$x = 3cm$

حجم الكرة الصلدة – حجم الكرة الجليدية = حجم الجليد

$$v = \frac{4\pi}{3}(18+x)^3 - (18)^3$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = 4\pi(18+x)^2 \frac{dx}{dt}$$

$$54 = 4\pi(18+3)^2 \frac{dx}{dt}$$

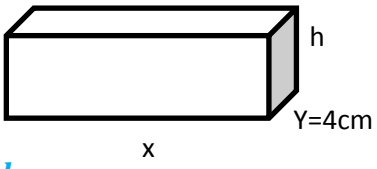
$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{54}{4(21)^2\pi} = \frac{3}{98\pi} cm/s$$

حسين فاضل الخماسي

@grade12ua_e

س٦ – خزان على شكل متوازي مستطيلات عرضه $4cm$ يتسرب منه الماء بمعدل $10cm^3/s$ وكان معدل انخفاض الماء $0.5cm/s$ جد طول الخزان

Sol:



نفرض طول ضلع القاعدة x

نفرض العرض y

نفرض الارتفاع h

$\frac{dv}{dt} = -10cm^3/s$

$\frac{dh}{dt} = -0.5cm/s$

$y = 4cm\ ,x = ?$

$v = xyh$

$\Longrightarrow v = 4xh$

$\Longrightarrow \frac{dv}{dt} = 4x\frac{dh}{dt}$

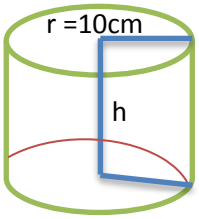
$\Longrightarrow -10 = 4(-0.5)x$

$\Longrightarrow x = \frac{10}{2} = 5cm$

حسين فاضل الخماسي

@grade12ua_e

س٧ – وعاء اسطواني الشكل نصف قطر قاعدته 10cm وارتفاعه 60cm فاذا كان الوعاء فارغ وصب فيه الماء بمعدل $30\pi cm^3/s$ جد معدل ارتفاع الماء في الوعاء



SOl:

نفرض نصف قطر القاعدة r

نفرض الارتفاع h

$\frac{dv}{dt} = 30\pi cm^3/s$

$r = 10cm$

$h = 60cm$

$\frac{dh}{dt} = ?$

$v = \pi r^2 h$

$\Rightarrow v = 100\pi h$

$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = 100\pi \frac{dh}{dt}$

$30\pi = 100\pi \frac{dh}{dt}$

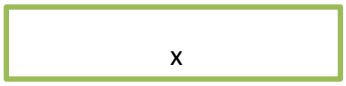
$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{3}{10}$

$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = 0.3cm/s$

حسين فاضل الخماسي

@grade12ua_e

س٨ ــ صفيحة مستطيلة الشكل تتمدد بانتظام بحيث طولها يزداد بمعدل 2cm/s ويزداد عرضها بمعدل 1cm/s وفي لحظة معينة كان طولها 8cm وعرضها 6cm جد معدل التغير في محيطها ومساحتها وقطرها .



Sol: x , y

$\frac{dx}{dt} = 2cm/s$

$\frac{dy}{dt} = 1cm/s$

$x = 8cm$

$\frac{dr}{dt} = ?$

$p = 2(x + y)$

$\Longrightarrow \frac{dp}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right)$

$\Longrightarrow \frac{dp}{dt} = 2(2 + 1)$

$\Longrightarrow \frac{dp}{dt} = 6\ cm/s$

$A = xy$

$\Longrightarrow \frac{dA}{dt} = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}$

$\Longrightarrow \frac{dA}{dt} = 8(1) + 6(2)$

$\Longrightarrow \frac{dA}{dt} = 20cm^2/s$

$r^2 = 64 + 36 = 100$

$\Longrightarrow r = 10$

$r^2 = x^2 + y^2$

$\Longrightarrow r\frac{dr}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}$

$\Longrightarrow 10\frac{dr}{dt} = 8(2) + 6(1)$

$\frac{dr}{dt} = \frac{16+6}{10} = 2.2cm/s$

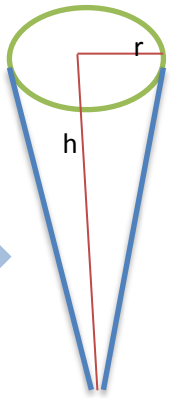
حسين فاضل الخماسي

@grade12ua_e

س٩ – مخروط دائري قائم حجمه ثابت دائما ويساوي $50\pi cm^3$ يزداد ارتفاعه بمعدل $0.2cm/s$ جد معدل تغير نصف القطر للقاعدة عند اللحظة التي يكون فيها الارتفاع $6cm$.

Sol:

نفرض نصف القطر r ، نفرض الارتفاع h



$$v = \frac{\pi}{3}r^2h$$

$$\Rightarrow 50\pi = \frac{\pi}{3}r^2h$$

$$\Rightarrow 50 = \frac{1}{3}r^2h$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{150}{h}}$$

$$0 = \frac{1}{3}r^2\frac{dh}{dt} + \frac{2}{3}rh\frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{3}\left(\frac{150}{6}\right)(0.2) + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{150}{6}}.6\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{1}{3}(25)(0.2) + 20\frac{dr}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow 20\frac{dr}{dt} = -\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \boxed{-\frac{1}{12}cm/s}$$

$\frac{dh}{dt} = 0.2cm/s$

$v = 50\pi cm^3$

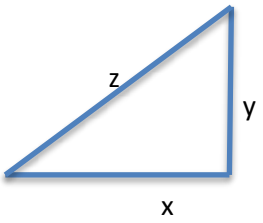
$\frac{dr}{dt} = ?$

$h = 6cm$

حسين فاضل الخماسي

@grade12ua_e

س١٠ – اذا تغير اطوال اضلاع مثلث قائم الزاوية مع بقاء المحيط ثابتا ويساوي 40cm وكان معدل تغير طول الوتر هو 7cm/min عند اللحظة التي يكون فيها اضلاع المثلث 8cm,15cm,17cm جد معدل كل من الضلعين الاخرين .



Sol: x ,y ,z

$x + y + z = 40$

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = 0$

$z^2 = x^2 + y^2$

$\Rightarrow 2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$

$\Rightarrow 14(17) = 30\frac{dx}{dt} + 16\frac{dy}{dt}$

$\frac{dx}{dy} + \frac{dy}{dt} = -7$

$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = -7 - \frac{dx}{dt}$

$14(17) = 30\frac{dx}{dt} + 16\left(-7 - \frac{dx}{dt}\right)$

$\Rightarrow 14(17) = 14\frac{dx}{dt} - 112$

$\frac{dx}{dt} = 25\ cm/s$

$\frac{dy}{dt} = -32cm/s$

$\frac{dz}{dt} = 17cm/s$

$z = 17cm$

$x = 15cm$

$y = 8cm$

$\frac{dx}{dt} = ?$

$\frac{dy}{dt} = ?$

$p = 40cm$

حسين فاضل الخماسي

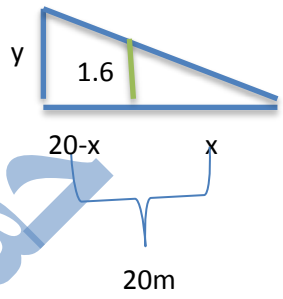
@grade12ua_e

س١١ – مصدر ضوئي موضوع على الارض يبعد 20m عن حائط .يمشي رجل طوله 1.6m باتجاه الحائط بسرعة 2.5m/min ، ما معدل التغير في ارتفاع ظل الرجل عندما يبعد الرجل 8m عن الحائط.

Sol:

نفرض بعد الرجل عن مصدر الضوء x

وطول الظل على الحائط y



من تشابه المثلثين نحصل على

$$\frac{y}{1.6}=\frac{20}{x}$$

$$\Rightarrow xy=32$$

$$\Rightarrow y=\frac{32}{x}$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{32}{x^2}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{-32}{144}(2.5)$$

$$\frac{dy}{dt}=-0.56m/min$$

$$\frac{dx}{dt}=2.5m/min$$

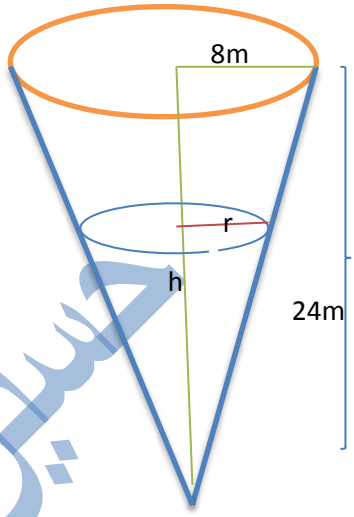
$$\frac{dy}{dt}=?$$

$$x=20-8=12$$

حسين فاضل الخماسي

@grade12ua_e

س١٢ – خزان على شكل مخروط دائري قائم ارتفاعه 24m وطول نصف قطر قاعدته 8m مملوء بالسائل يتسرب منه السائل بمعدل $2\pi m^3/s$ جد معدل انخفاض السائل في اللحظة التي يكون فيها نصف قطره داخل الخزان 4m .



Sol:

نفرض نصف القطر r ، نفرض الارتفاع h

$$tan\theta = \frac{8}{24}$$

$$\Longrightarrow \frac{r}{h} = \frac{1}{3}$$

$$\Longrightarrow r = \frac{h}{3}$$

$$.r = 4 \Longrightarrow h = 12$$

$$v = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

$$\Longrightarrow v = \frac{\pi}{27} h^3$$

$$\Longrightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{9} h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$-2\pi = \frac{\pi}{9}\ 144 \frac{dh}{dt}$$

$$\Longrightarrow -1 = 8\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{8}\ m/s$$

$$h = 24\ cm$$

$$r = 8\ cm$$

$$\frac{dv}{dt} = -2\pi\ cm^3/s$$

$$\frac{dh}{dt} = ?$$

$$r = 4cm$$

حسين فاضل الخماسي

@grade12ua_e

س ١٣ ــ نقطة تتحرك على المنحني $x^2 - xy + y^2 = 9$ جد احداثياتها عندما يكون معدل الزمني لتغير x يساوي ضعف المعدل الزمني لتغير y .

SOl:

$$2x\frac{dx}{dt} - \left(x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}\right) + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

$$(x\ ,y)$$

$$\Rightarrow 2x\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow 2x\frac{dx}{dt} - x\frac{dx}{dt} - y\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dx}{dt} = 0 \qquad \div \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow 4x - 2y - x + 2y = 0$$

$$\Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3$$

$(0, 3)$, *(0,-3)*

س١٤ ــ نقطة تتحرك على منحني الدالة $y = \sqrt{x}$ بحيث معدل تغير الاحداثي الصادي يزداد بمعدل 1uint/s عندما يكون x=4 جد معدل الاحداثي السيني عند تلك اللحظة.

$$y = \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{4}\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = 4\ uint/s$$

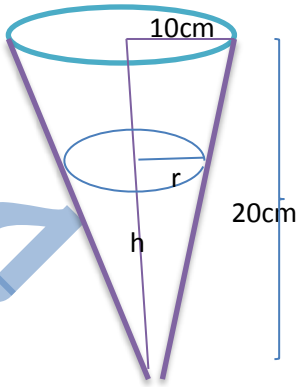
حسين فاضل الخماسي

@grade12ua_e

س١٥ - مرشح مخروطي قاعدته افقية ورأسه الى الاسفل يتسرب منه الماء بمعدل $5cm^3/s$ فاذا كان نصف قطر قاعدة المرشح 10cm وارتفاعه 20cm جد معدل انخفاض الماء فيه عندما يكون ارتفاع الماء 15cm.

Sol :

نفرض نصف القطر r ، نفرض الارتفاع h



$$tan\theta = \frac{10}{20}$$

$$\Longrightarrow \frac{r}{h} = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow r = \frac{h}{2}$$

$$v = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{12} h^3$$

$$\Longrightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{4} r^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\Longrightarrow -5 = \frac{\pi}{4} 225 \frac{dh}{dt}$$

$$-1 = \frac{45\pi}{4} \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{4}{45\pi}\ cm/s$$

$h = 20\ cm$

$r = 10\ cm$

$\frac{dv}{dt} = -5\ cm^3/s$

$\frac{dh}{dt} = ?$

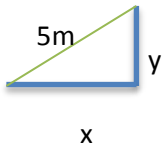
$h = 15cm$

حسين فاضل الخماسي

@grade12ua_e

س١٦ – سلم طوله 5m يرتكز على حائط رأسي فاذا تحرك الطرف الاعلى نحو الارض بمعدل 0.1m جد معدل تحرك الطرف الاسفل عن الحائط عند اللحظة التي يكون فيها بعد الطرف الاسفل 4m . ثم جد معدل تغير مساحة المثلث الذي يصنعه السلم مع الحائط والارض عندئذ .

Sol:



نفرض بعد الطرف الاسفل عن الحائط x

نفرض بعد الطرف الاعلى عن الارض y

$$\frac{dy}{dt} = -0.1\ m/s$$

$$\frac{dx}{dt} = ?$$

$$x = 4$$

$$25 = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow y^2 = 25 - 16$$

$$y^2 = 9$$

$$\Rightarrow y = 3$$

$$0 = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$0 = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow 4\frac{dx}{dt} + 3(-0.1) = 0$$

$$\Rightarrow 4\frac{dx}{dt} = 0.3$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{0.3}{4} = \frac{3}{40}\ m/s$$

$$A = \frac{1}{2}xy$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left(4(-0.1) + 3\left(\frac{3}{40}\right)\right)$$

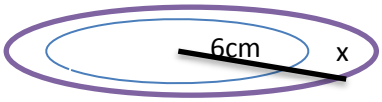
$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{-0.7}{8} = -\frac{7}{80}\ m^2/s$$

حسين فاضل الخماسي

@grade12ua_e

س١٧ – كرة معدنية طول قطرها $12cm$ مغطاة بطبقة من الجليد فاذا بدأ الجليد بالذوبان بمعدل $20cm^3/min$ وجد ان معدل تناقص سمك الجليد $\frac{1}{20\pi}\ cm/min$ بحيث يظل الجليد محتفظا بشكله الكروي جد سمك طبقة الجليد ثم جد معدل تغير السطح الخارجي لهذه الطبقة .

Sol:



نفرض سمك الجليد x

حجم الجليد = الحجم الكرة المغطاة بالجليد – حجم الكرة

$$v = \frac{4\pi}{3}(x+6)^3 - \frac{4\pi}{3}6^3$$

$$\Longrightarrow \frac{dv}{dt} = 4\pi(x+6)^2\frac{dx}{dt}$$

$$\Longrightarrow -20 = 4\pi(x+6)^2\frac{-1}{20\pi}$$

$$\Longrightarrow -20 = 4\pi(x+6)^2\frac{-1}{5}$$

$$-20(5) = -(x+6)^2$$

$$-100 = -(x+6)^2$$

$$\Longrightarrow x+6 = 10 \Longrightarrow x = 4cm$$

$$A = 4\pi(x+6)^2$$

$$\Longrightarrow \frac{dA}{dt} = 8\pi(x+6)\frac{dx}{dt}$$

$$\Longrightarrow \frac{dA}{dt} = 8\pi(4+6)(-\frac{1}{20\pi})$$

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{80}{20} = -4\ cm^2/min$$

$2r = 12cm$

$\frac{dv}{dt} = -20cm^3/min$

$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{20\pi}\ cm/min$

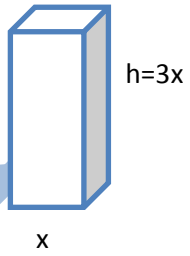
$x = ?$

$\frac{dA}{dt} = ?$

حسين فاضل الخماسي

@grade12ua_e

س١٨ ــ متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل وارتفاعه ثلاث امثال طول قاعدته يتمدد بالحرارة جد معدل التغير في حجمه ومساحته السطحية عند اللحظة التي يكون فيها طول قاعدته 8cm علما ان معدل التغير في طول قاعدنه $\frac{1}{4}\,cm/s$.



SOl:

نفرض طول القاعدة x والارتفاع h

$h = 3x$

$\frac{dv}{dt} = ?$

$\frac{dA}{dt} = ?$

$x = 8cm$

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{4}cm/s$

$$v = x^2h = x^2(3x) = 3x^3$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = 9x^2\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = 9(64)\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = 144\ cm^3/s$$

$$A = 4x(3x) + 2x^2$$

$$A = 14x^2$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = 28x\frac{dx}{dt}$$

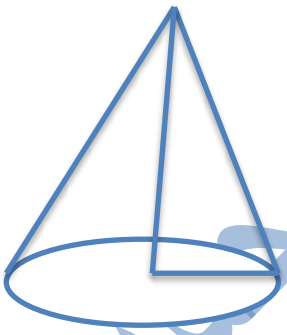
$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = 28(8)\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = 56\ cm^2/s$$

حسين فاضل الخماسي

@grade12ua_e

س١٩ ــ ينهال رمل من فتحة ويشكل كومة مخروطية الشكل ارتفاعها يساوي دائما $\frac{3}{4}$ نصف قطر القاعدة . جد معدل تزايد حجم الرمل عندما يكون نصف قطر القاعدة 6cm ومعدل تزايد نصف القطر يساوي 6cm/s .



Sol:

نفرض نصف القطر r

تفرض الارتفاع h

$$v = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

$$h = \frac{3}{4} r$$

$$v = \frac{\pi}{3} r^2 \left(\frac{3}{4} r\right)$$

$$\frac{dv}{dt} = ?$$

$$v = \frac{\pi}{4} r^3$$

$$r = 6cm$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{3\pi}{4} r^2 \frac{dr}{dt}$$

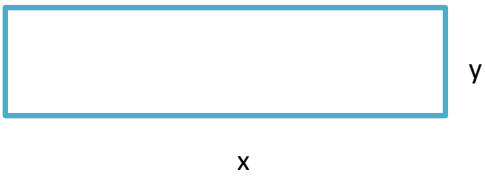
$$\frac{dr}{dt} = 6cm/s$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{3\pi}{4} (36)(6)$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = 162\pi\ cm^3/s$$

@grade12ua_e

س٢٠ / مستطيل طوله ثلاث امثال عرضه . تتزايد مساحته بمعدل 3cm/min جد معدل تغير محيطه عندما يكون الطول يساوي 12cm.



Sol: x , y

نفرض الطول x

نفرض العرض y

$$\frac{dA}{dt} = 3\ cm^2/min$$

$$x = 3y$$

$$\frac{dp}{dt} = ?$$

$$x = 12cm$$

$$A = xy$$

$$A = 3y^2$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = 6y\frac{dy}{dt}$$

$$x = 12 \Rightarrow 12 = 3y \Rightarrow y = 4$$

$$3 = 6(4)\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}\ cm/s$$

$$p = 2(x + y)$$

$$p = 2(3y + y) = 8y$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dt} = 8\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dp}{dt} = 8\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$\frac{dp}{dt} = 1\ cm/s$$

حسين فاضل الخماسي

@grade12ua_e

س٢١ ـ تتحرك نقطة على منحني القطع المكافئ $y = x^2$ جد احداثيي هذه النقطة في اللحظة التي يتساوى فيها المعدلان الزمنيان لتغير كل من الاحداثي x والاحداثي y.واذا علمت ان :

$y = sin^2 t,$ $x = sint$ فجد معدل تغير الاحداثي x في تلك اللحظة.

Sol : $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$

$y = x^2$

$\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = 2x\frac{dy}{dt}$

$\Rightarrow 1 = 2x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$y = x^2 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \quad (x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

$x = sin\, t$

$\frac{1}{2} = sint \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$

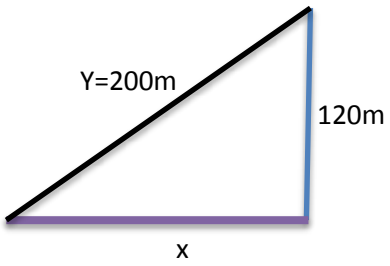
$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = cos\, t$

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

حسين فاضل الخماسي

@grade12ua_e

س٢٢ – يمسك صبي بيده خيط طائرة ورقية مرتفعة 120m والرياح تأخذ الطائرة من الصبي افقياً بمعدل 8m/ s كم السرعة التي يعطي بها الصبي الخيط عندما تبتعد الطائرة عنه 200m ؟



Sol: x , y

$$400 = 14400 + x^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 25600$$

$$\Rightarrow x = 160$$

$$y^2 = x^2 + (120)^2$$

$$\Rightarrow 2y\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow y\frac{dy}{dt} = x\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow 200\frac{dy}{dt} = 160(8)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1280}{200}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = 6.4\ m/s$$

$\frac{dx}{dt} = 8\ m/s$

$\frac{dy}{dt} = ?$

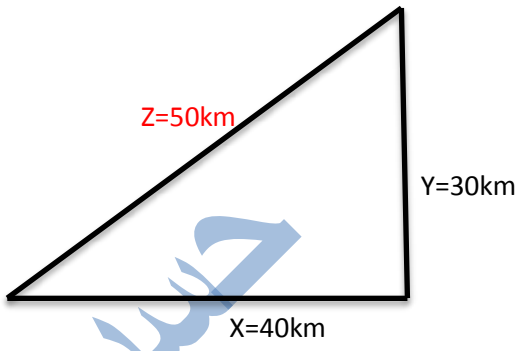
حسين فاضل الخماسي

@grade12ua_e

س٢٣ – من ميناء واحد انطلقت سفينتان الاولى باتجاه الشرق بسرعه 20 km/h والثانية باتجاه الشمال بسرعة 15 km/h . أوجد المعدل الزمني الذي تبتعد فيه السفينتان عن بعضهما بعد ساعتين من لحظة ابحارهما .

Sol: x , y ,z

البعد = السرعة x الزمن



$x = 20 \times 2 = 40km$

$y = 15 \times 2 = 30km$

$z^2 = 1600 + 900 = 2500$

$z = 50km$

$\frac{dx}{dt} = 20\ km/h$

$\frac{dy}{dt} = 15\frac{km}{h}, t = 2h$

$\frac{dz}{dt} = ?$

$z^2 = x^2 + y^2$

$\Rightarrow 2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$

$\Rightarrow z\frac{dz}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}$

$50\frac{dz}{dt} = 40(20) + 30(15)$

$\Rightarrow 50\frac{dz}{dt} = 800 + 450$

$50\frac{dz}{dt} = 1250$

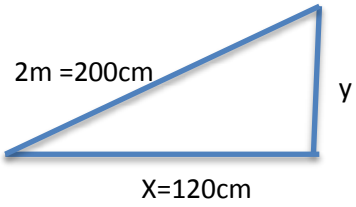
$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{1250}{50}$

$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = 25km/h$

حسين فاضل الخماسي

@grade12ua_e

س٢٤ – سلم طوله 2m يرتكز على جدار رأسي من احد طرفيه والطرف الاخر على ارض افقية فاذا كان الطرف العلوي ينزلق بسرعة 5cm/s فأوجد السرعة التي يتحرك بها الطرف السفلي من اللحظة التي يكون فيها على بعد 120cm من الجدار .



$\frac{dx}{dt}=?$

$\frac{dy}{dt}=5cm/s$

Sol: x ,y

$$(200)^2 = x^2 + y^2$$

$$40000 = 14400 + y^2$$

$$\Rightarrow y^2 = 25600$$

$$\Rightarrow y = 160cm$$

$$0 = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$0 = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow 0 = 120\frac{dx}{dt} + 160(5)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{800}{120}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = 6.67\ cm/s$$

حسين فاضل الخماسي

@grade12ua_e

س٢٥ ـ تتحرك نقطة على منحني الدالة $y=\sqrt{x^2+5}$ بحيث يزداد احداثيها السيني بمعدل $3\sqrt{10}cm/s$ جد معدل تغير بعدها عن النقطة (1,0) عندما تكون x=2 cm .

Sol: let N(x , y) , M(1 ,0)

$$s=\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}$$

$$s=\sqrt{x^2-2x+1+y^2} \qquad , y^2=x^2+5$$

$$s=\sqrt{2x^2-2x+6}$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{4x-2}{2\sqrt{2x^2-2x+6}}.\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{8-2}{2\sqrt{8-4+6}}.3\sqrt{10}$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{9\sqrt{10}}{\sqrt{10}}$$

$$\Longrightarrow \frac{ds}{dt}=9cm/s$$

٢٧ ـ تتحرك نقطة على المنحني $x^2-4y^2=36$ بحيث يزداد x بمعدل ثابت مقداره 20 unit/sec ماهي سعة التغير الاحداثي y عند النقطة (10 ,4) ؟

$$x^2-4y^2=36$$

$$2x\frac{dx}{dt}-8y\frac{dy}{dt}=0 \qquad \div 2$$

$$x\frac{dx}{dt}-4y\frac{dy}{dt}=0$$

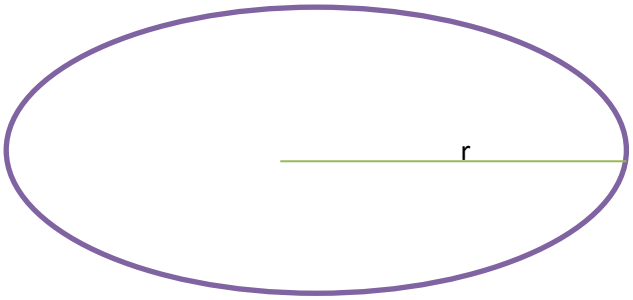
$$10(20)-4(4)\frac{dy}{dt}=0$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{200}{16}$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{25}{2}=12.5\ uint/s$$

@grade12ua_e

س٢٦ – بالون كروي يتمدد نتيجة تأثر اشعة الشمس فاذا كن معدل تزايد نصف قطره يساوي 2cm/m ، أوجد معدل تغير حجم البالون عندما يكون نصف قطره يساوي 5cm.



Sol: r , v

$$v = \frac{4\pi}{3} r^3$$

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi(25)(2)$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = 200\pi\ cm^3/m$$

$\frac{dr}{dt} = 2cm/m$

$\frac{dv}{dt} = ?$

r =5cm

س٢٧ – صفيحة من المعدن على شكل مربع تتعرض للحرارة فتتمدد بحيث تحتفظ بشكلها ، احسب معدل التغير في طول ضلعها عندما تتغير المساحة بمقدار $9cm^2/s$ من اللحظة التي يكون طول ضلعها 4cm.

Sol: $A = l^2$

$$\frac{dA}{dt} = 2l\frac{dl}{dt}$$

$$9 = 2(4)\ \frac{dl}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dl}{dt} = \frac{9}{8} cm/s$$

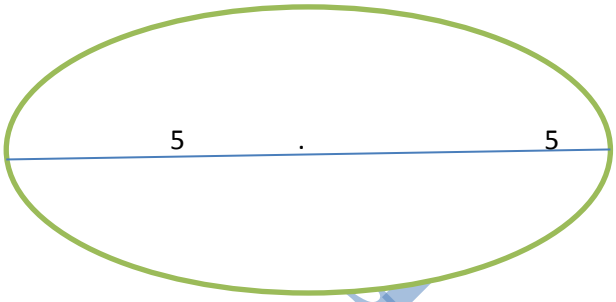
$\frac{dA}{dt} = 9cm^2/s$

$\frac{dl}{dt} = ?\ \ , l = 4cm$

حسين فاضل الخماسي

@grade12ua_e

س٢٨ – بالون كروي يزداد حجمه بمعدل $0.4cm^3/s$ بحيث يبقى على شكل كروي جد معدل ازدياد مساحته السطحية عندما يكون قطره 10 وحدات.



$\frac{dv}{dt} = 0.4cm^3/s$

$\frac{dA}{dt} = ?$

Sol: $v = \frac{4\pi}{3}r^3$

$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$

$\Rightarrow 0.4 = 4\pi(5)^2 \frac{dr}{dt} \quad \div 4$

$0.1 = 25\pi \frac{dr}{dt}$

$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{0.1}{25\pi} cm/s$

$A = 4\pi r^2$

$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$

$\frac{dA}{dt} = 8\pi(5).\left(\frac{0.1}{25\pi}\right)$

$\frac{dA}{dt} = \frac{0.8}{5}$

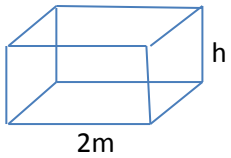
$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{8}{50}$

$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{16}{100} = 0.16cm^2/s$

@grade12ua_e

س٢٩ - خزان على شكل مكعب طول ضلعه 2m يصب فيه الماء بمعدل $3m^3/min$ جد معدل ارتفاع الماء.

Sol: v , h



$$v = (2)^2 h$$

$$v = 4h$$

$$\frac{dv}{dt} = 4\frac{dh}{dt}$$

$\frac{dv}{dt} = 3m^3/min$

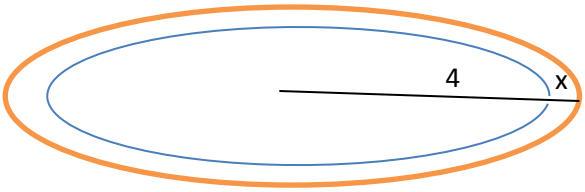
$\frac{dh}{dt} = ?$

$$3 = 4\frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = 0.75\ m/min$$

س٣٠ – كرة حديدية قطرها 8cm مغطاة بطبقة من الجليد يذوب بمعدل $10c\ m^3/s$. كم تكون سرعة نقصان سمك الجليد عندما يكون سمكه 2cm وما سرعة نقصان مساحته السطحية للسطح الخارجي .

Sol: $v = \frac{4\pi}{3}(4+x)^3 - \frac{4\pi}{3}(4)^3$



$$\frac{dv}{dt} = 4\pi(4+x)^2\frac{dx}{dt}$$

$$-10 = 4\pi(36)\frac{dx}{dt}$$

$\frac{dv}{dt} = -10cm^3/s$

$\frac{dx}{dt} = ?,\ \frac{dA}{dt} = ?$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{-10}{144\pi} = \frac{-5}{72\pi}\ cm/s$$

$$A = 4\pi(4+x)^2 - 4\pi(4)^2$$

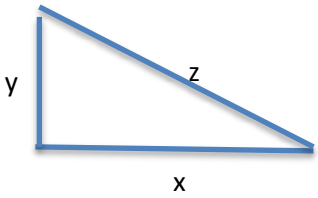
$$\frac{dA}{dt} = 8\pi(4+x)\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 8\pi(6).\frac{-5}{72\pi} = -\frac{10}{3}cm^2/s$$

حسين فاضل الخماسي

@grade12ua_e

س٣١ ــ دراجة هوائية تسير بمعدل 10m/s عندما اجتازتها دراجة نارية سرعتها 20m/s انعطفت الدراجة النارية بزاوية 90 . احسب السرعة بين الدراجتين بعد مرور 25sec من لحظة الاجتياز .



$\frac{dx}{dt} = 10m/s$

$\frac{dy}{dt} = 20m/s$

$\frac{dz}{dt} = ?$

Sol: $x = 10 \times 25 = 250m$

$y = 20 \times 25 = 500m$

$z^2 = x^2 + y^2$

$\Rightarrow z^2 = 250000 + 62500 = 312500$

$z^2 = x^2 + y^2$

$\Rightarrow 2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$

$\Rightarrow z\frac{dz}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}$

$\sqrt{312500}\ \frac{dz}{dt} = (250)(10) + (500)(20)$

$\frac{dz}{dt} = \frac{12500}{\sqrt{312500}}m/s$

س٣٢ ــ تتحرك نقطة على المنحني $y = x^2 - 2x$. عند اي نقطة يكون المعدل الزمني لتغير قيمة الاحداثي y ضعف المعدل الزمني لتغير الاحداثي x بالنسبة للزمن ، جد احداثي هذه النقطة .

Sol: $y = x^2 - 2x$

$\frac{dy}{dt} = (2x - 2)\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt} = 2\frac{dx}{dt}$

$\frac{dx}{dt} = (x - 1)\frac{dx}{dt}$

$1 = x - 1 \Rightarrow x = 2$

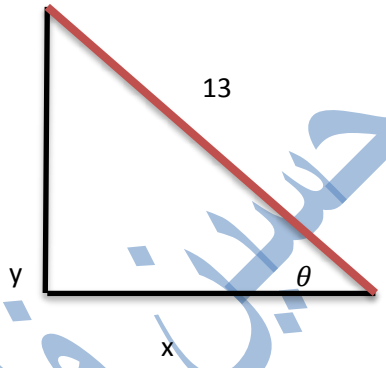
$y = (2)^2 - 2(2) = 0$

النقطة $(2, 0)$,

@grade12ua_e

س٣٣ – سلم طوله 13m يتكئ بطرفه الاسفل على ارض افقية وبطرفه الاعلى حائط رأسي فاذا انزلق الطرف الا سفل مبتعدا عن الحائط بحيث يكون معدل تغير الزاوية بين السلم والارض تتناقص بمعدل $\frac{1}{3} rad/sec$ جد معدل ابتعاد الطرف الاعلى عن الارض عندما يكون الطرف الاسفل على بعد 5m عن الحائط .

Sol: x ,y



$$sin\theta = \frac{y}{13}$$

$$\Rightarrow sin\theta = \frac{1}{13}\, y$$

$$cos\theta \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{13} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{x}{13} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{13} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{5}{13} \cdot \frac{-1}{3} = \frac{1}{13} \cdot \frac{dy}{dt}$$

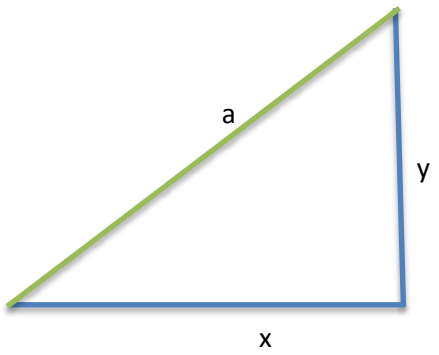
$$\frac{dy}{dt} = \frac{-5}{3} m/sec$$

$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{3} rad/s$

$\frac{dy}{dt} = ?$, $x = 5m$

س٣٤ – سلم يتكئ بطرفه الاسفل على ارض افقية وبطرفه الاعلى على حائط راسي فاذا انزلق طرفه الاسفل مبتعدا عن الحائط بمعدل 2m/sec ، جد معدل انزلاق الطرف العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والارض يساوي $\frac{\pi}{4}$.

Sol: x ,y , a



$$tan\frac{\pi}{4} = \frac{y}{x}$$

$$1 = \frac{y}{x} \Rightarrow x = y$$

$$a^2 = x^2 + y^2$$

$$0 = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$0 = 4x + 2x\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-4x}{2x} = -2m/s$$

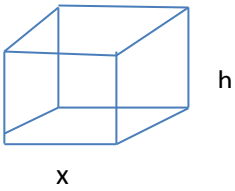
$\frac{dx}{dt} = 2m/s$

$\frac{dy}{dt} = ?$

@grade12ua_e

س٣٥ – متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة وحجمه ثابت ويساوي $128cm^3$. فاذا ازداد طول ضلع قاعدته بمعدل $0.5cm/s$ جد معدل تناقص ارتفاعه في اللحظة التي يكون فيها ارتفاعه $8cm$.

Sol: x , h



$V=128$

$\frac{dx}{dt} = 0.5\ cm/s$

$\frac{dh}{dt} =?\ \ , h = 8cm$

$$128 = x^2 h$$

$$\Rightarrow 128 = 8x^2$$

$$x^2 = 16 \Rightarrow x = 4cm$$

$$0 = x^2 \frac{dh}{dt} + 2xh \frac{dx}{dt}$$

$$0 = 16 \frac{dh}{dt} + 2(4)(8)(0.5)$$

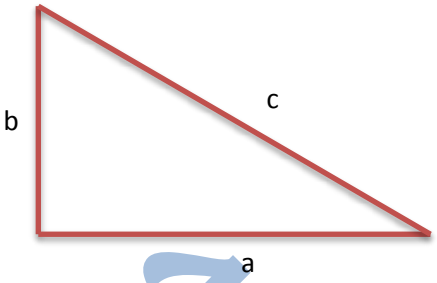
$$0 = 16 \frac{dh}{dt} + 32$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = -2\ cm/s$$

حسين فاضل الخماسي

@grade12ua_e

س٣٦ – لتكن O نقطة الاصل ولتكن a, b نقطتين تتحركان من نقطة الاصل كما يأتي : تتحرك a على المحور x بسرعة 4 unit/sec وتتحرك b على المحور y بسرعة 3 unit/sec ، جد معدل ابتعاد النقطتين a, b عن بعضهما بعد مرور 6sec.



Sol:

البعد = السرعة x الزمن

$$a = 4 \times 6 = 24\,unit$$

$$b = 3 \times 6 = 18\,unit$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow c^2 = 576 + 324 = 900$$

$$\Rightarrow c = 30unit$$

$$2c\frac{dc}{dt} = 2a\frac{da}{dt} + 2b\frac{db}{dt}$$

$$c\frac{dc}{dt} = a\frac{da}{dt} + b\frac{db}{dt}$$

$$30\frac{dc}{dt} = 24(4) + 18(3)$$

$$\Rightarrow 30\ \frac{dc}{dt} = 150$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{150}{30} = \mathbf{5\ uint/sec}$$

$$\frac{dx}{dt} = 4unit/s$$

$$\frac{dy}{dt} = 3unit/s$$

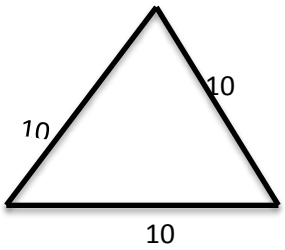
$$\frac{dz}{dt} = ?$$

$$t = 6sec$$

حسين فاضل الخماسي

@grade12ua_e

س٣٧ – مثلث متساوي الاضلاع طول ضلعه 10cm وينقص بمعدل 0.2 cm/s احسب المعدل الزمني الذي ينقص فيه المساحة .



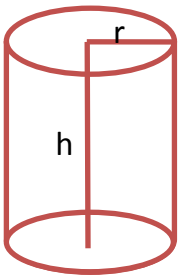
Sol: A ,x

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2}x\ \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2}(10)(-0.2) = -\sqrt{3}\ cm^2/s$$

س٣٨ - أسطوانة دائرية قائمة يزداد ارتفاعها بمقدار $0.5\ cm/s$ بحيث يظل حجمها دائما مساويا إلى $320\ \pi\ cm^3$ جد معدل تغير نصف قطر القاعدة عندما يكون الارتفاع $5\ cm$.



sol: h , r

$$(320\ \pi = r^2\ \pi\ h) \div \pi$$

$$320 = r^2\ h \quad , \quad h = 5$$

$$320 = r^2\ (5)$$

$$r^2 = \frac{320}{5} = 64 \Longrightarrow r = 8$$

$$0 = r^2\ \frac{dh}{dt} + h\ .\ (2\ r)\ \frac{dr}{dt}$$

$$64\ .\ (0.5) + 2\ (5)\ 8\ \frac{dr}{dt} = 0$$

$$80\ \frac{dr}{dt} = -\ 32$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{-32}{80} = -\ 0.4\ m/s$$

$\frac{dh}{dt} = 0.5cm/s$

$v = 320\pi cm^3$

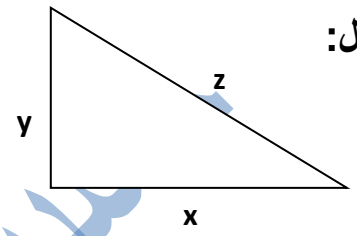
$\frac{dr}{dt} = ?$

$h = 5cm$

@grade12ua_e

س٣٩: طريقان متعامدان يلتقيان بنقطة m تحركت سيارتان كل منهما في طريق و كان معدل سرعة السيارة الأولى (80km/h) ومعدل سرعة السيارة الثانية (60km/h) جد معدل الابتعاد بين السيارتين بعد ربع ساعة من بدء الحركة من m

الحل:



نفرض البعد بين السيارة الأولى و نقطة m = x

ونفرض البعد بين السيارة الثانية ونقطة m = y

ونفرض البعد بين السيارتين = z

$$x^2 + y^2 = z^2$$

البعد = السرعة x الزمن

$$x = 80\left(\frac{1}{4}\right) = 20km$$

$$y = 60\left(\frac{1}{4}\right) = 15km$$

$$(20)^2 + (15)^2 = z^2$$

$$z^2 = 400 + 225 = 625 \Longrightarrow z = 25$$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2z\frac{dz}{dt}$$

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = z\frac{dz}{dt}$$

$$(20)(80) + (15)(60) = (25)\frac{dz}{dt}$$

$$1600 + 900 = 25\frac{dz}{dt}$$

$$\Longrightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{2500}{25} = 100\,km/h$$

$$\frac{dx}{dt} = 80km/h$$

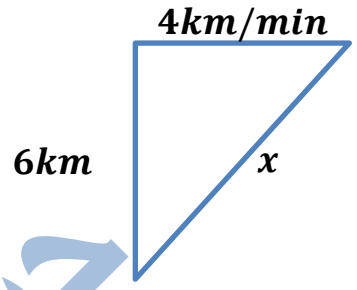
$$\frac{dy}{dt} = 60km/h$$

$$\frac{dz}{dt} = ?$$

$$t = \frac{1}{4}$$

@grade12ua_e

س٠٤: أقلعت طائرة مروحية من نقطة على الأرض رأسيا وبعد أن قطعت مسافة $6km$ اتجهت أفقيا بسرعة $4\ km/min$ فما معدل التغير في البعد بين الطائرة ونقطة الإقلاع بعد مرور $2min$ من انحرافها



ارتفاع الطائرة = $6km$

$\frac{dy}{dt} = 4km/min$

$\frac{dx}{dt} = ?$

$t = 2min$

البعد = السرعة x الزمن

$y = 4 \times 2 = 8km$

$x^2 = y^2 + 6^2$

$x^2 = 64 + 36$

$x^2 = 100 \quad \Rightarrow \quad x = 10$

$2x\frac{dx}{dt} = 2y\frac{dy}{dt}$

$x\frac{dx}{dt} = y\frac{dy}{dt}$

$10\frac{dx}{dt} = 8(4)$

$10\frac{dx}{dt} = 32$

$\frac{dx}{dt} = \frac{32}{10}$

$\frac{dx}{dt} = 3.2\ km/min$

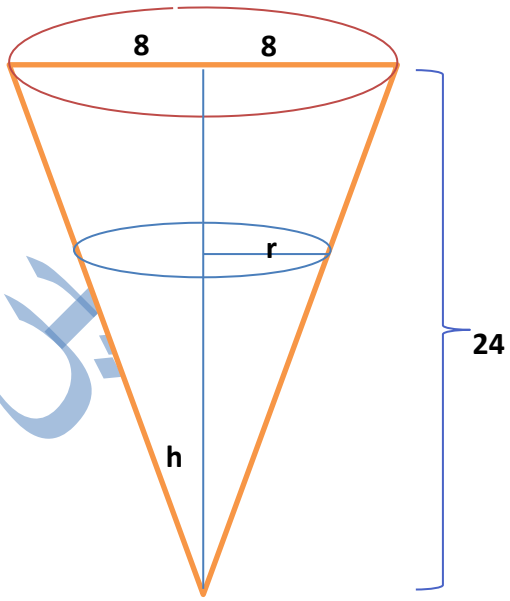
حسين فاضل الخماسي

@grade12ua_e

س١ ٤) مرشح مخروطي قاعدته افقية وراسه للأسفل ارتفاعه 24 cm وطول قطر قاعدته 16cm يصب فيه سائل بمعدل $5cm^3/s$ بينما يتسرب منه السائل $1cm^3/s$.جد معدل تغير نصف قطر السائل في اللحظة التي يكون فيها نصف القطر 4cm.

sol: r = نفرض نصف القطر

h = نفرض ارتفاع المخروط المائي



$$v = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

$$\tan\theta = \frac{8}{24} \Rightarrow \frac{r}{h} = \frac{1}{3}$$

$$h = 3r$$

$$v = \frac{\pi}{3} r^2 . (3r)$$

$$\Rightarrow v = \pi r^2$$

$$\frac{dh}{dt} = 3\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow 4 = 3\pi (4)^2 . \frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow 4 = 3\pi . 16 \frac{dr}{dt}$$

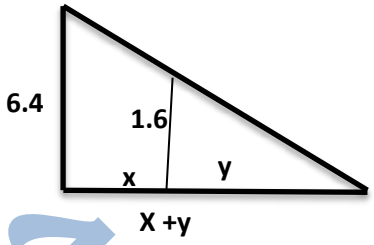
$$4 = 48\pi \frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{4}{48\pi} = \frac{1}{12\pi}\ cm/s$$

حسين فاضل الخماسي

@grade12ua_e

س٤٢/ مصباح على ارتفاع (6.4) متر مثبت على عمود شاقولي وشخص طوله (1.6) متر يتحرك مبتعداً عن العمود بسرعة 30 m/min جد سرعة تغير طول ظل الرجل .



Sol : X = نفرض بعد الرجل عن العمود

Y = نفرض طول ظل الرجل

$$\frac{6.4}{1.6} = \frac{x+y}{y}$$

$$\Rightarrow 4 = \frac{x+y}{y}$$

$$\Rightarrow 4y = x + y$$

$$x = 4y - y$$

$$\Rightarrow x = 3y$$

$$\frac{dx}{dt} = 3\ \frac{dy}{dt}$$

$$30 = 3\ \frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{30}{3} = 10 \text{ m/min}$$

حسين فاضل الخماسي

@grade12ua_e

س٣ ٤٣ / جد نقطة او اكثر تنتمي للدائرة $x^2+y^2-4x=4$ والتي يكون عندها معدل ازدياد x مساوياً لمعدل ازدياد y بالنسبة للزمن t .

Sol:-

$$x^2+y^2-4x=4 \quad \ldots..(1)$$

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}-4\frac{dx}{dt}=0 \quad \div 2$$

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}-2\frac{dx}{dt}=0$$

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dx}{dt}-2\frac{dx}{dt}=0 \quad \div \frac{dx}{dt}$$

$$x+y-2=0$$

$$y=2-x \ (2)in(1)$$

$$x^2+(2-x)^2-4x=4$$

$$x^2+4-4x+x^2-4x=4$$

$$2x^2-8x=0 \quad \div 2$$

$$x^2-4x=0$$

$$x(x-4)=0$$

اما$x=0 \implies y=2$

النقطة $(0,2)$

او$x-4=0 \implies x=4 \implies y=-2$

النقطة $(4,-2)$

حسين فاضل الخماسي

@grade12ua_e

س٤ / تتحرك نقطة على الدائرة $x^2+y^2+4x-6y+3=0$ فاذا كان معدل تغير الاحداثي x لها هو $3\ unit/min$ عند النقطة $(1,2)$ جد معدل تغير الاحداثي y لها عند نفس النقطة .

$$x^2+y^2+4x-6y+3=0$$

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}+4\frac{dx}{dt}-6\frac{dy}{dt}=0 \quad \div 2$$

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+2\frac{dx}{dt}-3\frac{dy}{dt}=0$$

$$(1)(3)+2\frac{dy}{dt}+(2)(3)-3\frac{dy}{dt}=0$$

$$3+2\frac{dy}{dt}+6-3\frac{dy}{dt}=0$$

$$9-\frac{dy}{dt}=0$$

$$\frac{dy}{dt}=9\ unit/min$$

س٥ / تتحرك نقطة على منحني القطع المكافئ $y=x^2$ جد احداثيي هذه النقطة في اللحظة التي يتساوى فيها المعدلان الزمنيان لتغير كل من الاحداثي x,y .

$$y=x^2$$

$$\frac{dy}{dt}=2x\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt}=2x\frac{dx}{dt} \quad \div\frac{dx}{dt}$$

$$1=2x\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^2\Rightarrow y=\frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$$

حسين فاضل الخماسي

@grade12ua_e

س٦ ٤ / جد نقطة او اكثر تنتمي للدائرة $x^2+y^2=32$ والتي يكون عندها معدل ازدياد x مساوياً لمعدل ازدياد y بالنسبة للزمن t .

$$x^2+y^2=32 \ldots..(1)$$

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0 \quad \div 2$$

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=0$$

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dx}{dt}=0 \quad \div \frac{dx}{dt}$$

$$x+y=0$$

$$y=-x \ (2)in(1)$$

$$x^2+(-x)^2=32$$

$$x^2+x^2=32$$

$$2x^2=32$$

$$x^2=16 \Rightarrow x=\pm 4$$

$$y^2=16 \Rightarrow y=\mp 4$$

$$(4,-4),(-4,4)$$

حسين فاضل الخماسي

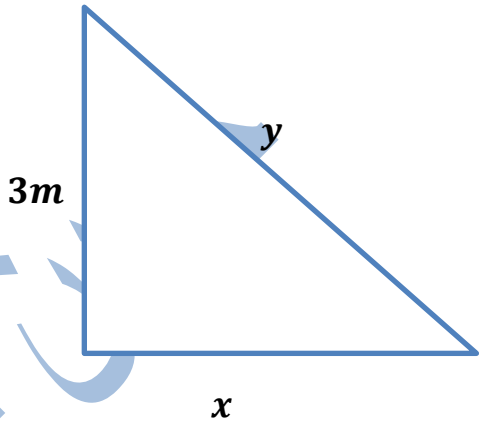
@grade12ua_e

س٤٧/ سيارة تسير بسرعة $30m/s$ اجتازت اشارة مرورية حمراء ارتفاعها $3m$ عن سطح الارض وبعد ان ابتعدت عنها مسافة $3\sqrt{3}\ m$ اصطدمت بسيارة اخرى نتيجة عدم الالتزام بقوانين المرور . جد سرعة تغير المسافة بين السيارة والاشارة الضوئية ؟

Sol:-

نفرض بعد السيارة عن العمود = x

نفرض بعد السيارة عن الاشارة = y



$$y^2 = x^2 + 9$$

$$\left(3\sqrt{3}\right)^2 = x^2 + 9$$

$$27 = x^2 + 9$$

$$x^2 = 27 - 9 \quad x^2 = 18 \quad x = 3\sqrt{2}$$

$$2y\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} \quad \div 2$$

$$y\frac{dy}{dt} = x\frac{dx}{dt}$$

$$3\sqrt{3}\frac{dy}{dt} = 3\sqrt{2}(30)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{90\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ m/s$$

$\frac{dx}{dt} = 30m/s$

ارتفاع الاشارة = $3m$

$y = 3\sqrt{3}\ m$

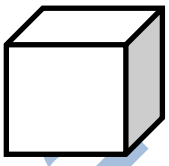
$\frac{dy}{dt} = ?$

@grade12ua_e

س٤٨/ مكعب من الثلج يتناقص طول ضلعه بمعدل $0.001cm/s$ احسب معدل تناقص كل من حجمه ومساحته السطحية في اللحظة التي يكون فيها طول ضلعه $10cm$

Sol:-

نفرض طول ضلع المكعب x



$$\frac{dx}{dt} = -0.001cm/s$$

$$\frac{dv}{dt} = ?$$

$$\frac{dA}{dt} = ?$$

$$x = 10cm$$

$$v = x^3$$

$$\frac{dv}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = 3(10)^2(-0.001)$$

$$\frac{dv}{dt} = 300(-0.001)$$

$$\frac{dv}{dt} = -0.3\ cm^3/s$$

$$A = 6x^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 12x \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 12(10)(-0.001)$$

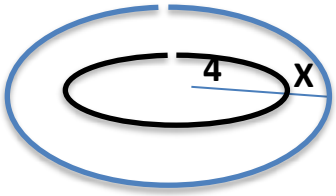
$$\frac{dA}{dt} = -0.12cm^2/s$$

حسين فاضل الخماسي

@grade12ua_e

س٤٩ / كرة صلدة قطرها 8cm مغطاة بطبقة من الجليد بحيث شكلها يبقى كرة فاذا بدأ الجليد بالذوبان بمعدل $5cm^3/s$ جد معدل النقصان بسمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها سمك الجليد 1cm .

SOl:



x نفرض سمك الجليد

حجم الجليد = حجم الكرة الجليدية – حجم الكرة الصلدة

$$v = \frac{4\pi}{3}(4+x)^3 - (18)^3$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = 4\pi(4+x)^2 \frac{dx}{dt}$$

$$-5 = 4\pi(4+1)^2 \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{-5}{4(5)^2\pi} = \frac{-1}{20\pi} cm/s$$

$\frac{dv}{dt} = -5cm^3/s$

$\frac{dx}{dt} = ?$

$x = 1cm$

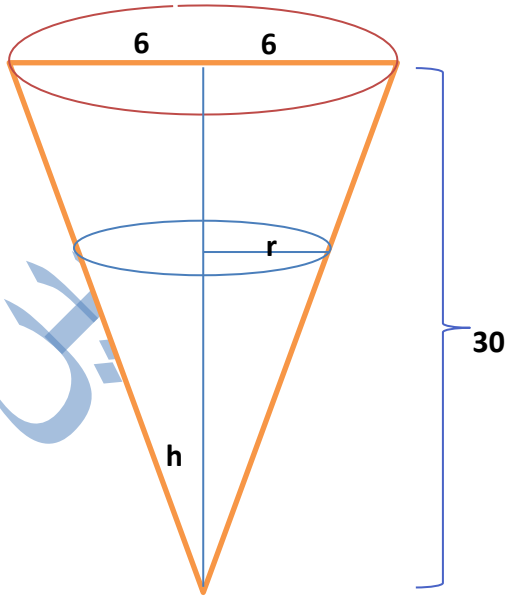
حسين فاضل الخماسي

@grade12ua_e

س٥٠/خزان على شكل مرشح مخروطي دائري قائم قاعدته الى الاعلى نصف قطره $6cm$ وارتفاعه $30cm$ ينساب اليه الماء بمعدل $3cm^3/s$ جد معدل تغير عمق الماء وجد معدل تغير نصف القطر في اللحظة التي يكون فيها ارتفاع الماء يساوي $10cm$

sol: r = نفرض نصف القطر

h = نفرض ارتفاع المخروط المائي



$$v = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

$$\tan\theta = \frac{6}{30} \Rightarrow \frac{r}{h} = \frac{1}{5}$$

$$h = 5r$$

1) $$\Rightarrow r = \frac{h}{5}$$

$$v = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{h^2}{25} \cdot h \Rightarrow v = \frac{\pi}{75} h^3$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\pi}{25} h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow 3 = \frac{\pi}{25} (10)^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow 3 = \frac{\pi}{25} \cdot 100 \frac{dh}{dt}$$

$$3 = 4\pi \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{3}{4\pi}\ cm/s$$

$$\frac{dv}{dt} = 3cm^3/s$$

$$\frac{dh}{dt} = ?$$

$$\frac{dr}{dt} = ?$$

$$h = 10cm$$

2) $h = 5r \Rightarrow 10 = 5r \Rightarrow r = 2$

$$v = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

$$\Rightarrow v = \frac{\pi}{3} r^2 (5r) \Rightarrow v = \frac{5\pi}{3} r^3$$

$$\frac{dv}{dt} = 5\pi r^2 \frac{dr}{dt} \Rightarrow 3 = 5\pi(4) \frac{dr}{dt}$$

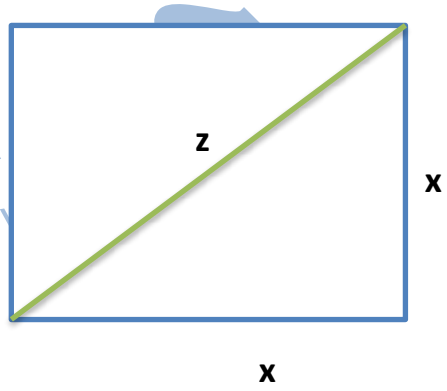
$$\frac{dr}{dt} = \frac{3}{20\pi}\ cm/s$$

@grade12ua_e

س١ ٥/ مربع يتمدد طول حرفه بمعدل $2cm/s$ جد معدل تغير قطره عندما يكون طول ضلع المربع $10cm$ ؟

نفرض طول ضلع المربع x

وقطر المربع z



$$z^2 = x^2 + x^2$$

$$z^2 = 2x^2$$

$$z^2 = 2(10)^2 = 2(100) = 200$$

$$z = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}\ cm$$

$$2z\frac{dz}{dt} = 4x\frac{dx}{dt} \quad \div 2$$

$$z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

$$10\sqrt{2}\ \frac{dz}{dt} = 2(10)(2)$$

$$10\sqrt{2}\ \frac{dz}{dt} = 40$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{40}{10\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\ cm/s$$

$$\frac{dx}{dt} = 2cm/s$$

$$\frac{dz}{dt} = ?$$

$$x = 10cm$$

@grade12ua_e

س٢ ٥/ مستطيل من المعدن ينقص طوله بمعدل $0.3\ cm/s$ ويزداد عرضه بمعدل $0.1\ cm/s$ فاذا كان طول ضلعه يساوي $8cm$ وعرضه $6cm$ جد معدل التغير في كل من مساحته وقطره

نفرض الطول x

والعرض y

$$A = xy$$

$$\frac{dA}{dt} = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 8(0.1) + 6(-0.3)$$

$$\frac{dA}{dt} = 0.8 - 1.8$$

$$\frac{dA}{dt} = -1\ cm^2/s$$

$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$z^2 = (8)^2 + (6)^2$$

$$z^2 = 64 + 36 = 100$$

$$\Longrightarrow z = 10cm$$

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \quad \div 2$$

$$z\frac{dz}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}$$

$$10\frac{dz}{dt} = 8(-0.3) + 6(0.1)$$

$$10\ \frac{dz}{dt} = -2.4 + 0.6$$

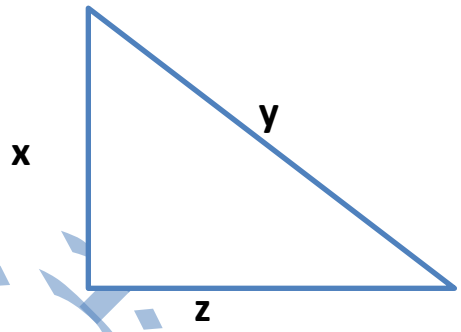
$$10\ \frac{dz}{dt} = -1.8\ cm/s$$

@grade12ua_e

س٣٥/ طريقان متعامدان يلتقيان في نقطة M تسير سيارة على الطريق الاول وبسرعة منتظمة قدرها $52km/h$ فجد معدل ابتعادها عن منزل يقع على بعد $5km$ وعلى الطريق الاخر من النقطة M وذلك عندما تكون السيارة على بعد $12km$ من النقطة M ؟

نفرض بعد السيارة عن النقطة $x = M$

نفرض بعد السيارة عن المنزل $y =$



$$y^2 = x^2 + z^2$$

$$y^2 = (12)^2 + (5)^2$$

$$y^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow y = 13$$

$$2y\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

$$y\frac{dy}{dt} = x\frac{dx}{dt}$$

$$13\frac{dy}{dt} = 12(52)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{12(52)}{13} = 48\ km/h$$

$\frac{dx}{dt} = 52km/h$

$\frac{dy}{dt} = ?$

$z = 5km$

$x = 12km$

حسين فاضل الخماسي

@grade12ua_e

س٤٥/ قطعة معدنية على شكل مثلث متساوي الاضلاع تزداد مساحتها بمعدل $\frac{\sqrt{3}}{8} cm^2/s$ بحيث تحافظ على شكلها. جد معدل التغير في ارتفاعها في اللحظة الذي يكون فيها طول ضلع المثلث $25cm$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}(2x)^2$$

$$A = \sqrt{3}x^2$$

$$tan\frac{\pi}{3} = \frac{h}{x}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{3}\,x \Rightarrow 2h = \sqrt{3}(2x) \Rightarrow 2h = 25\sqrt{3}$$

$$A = \sqrt{3}\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}}h^2$$

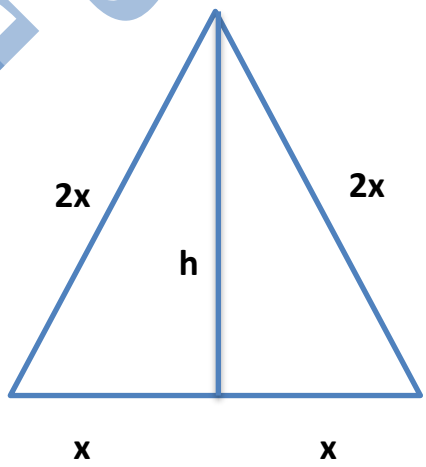
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,2h\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{1}{\sqrt{3}}(25\sqrt{3})\ \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{8} = 25\ \frac{dh}{dt}$$

$$\sqrt{3} = 200\ \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{200} cm/s$$



$$\frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{8} cm^2/s$$

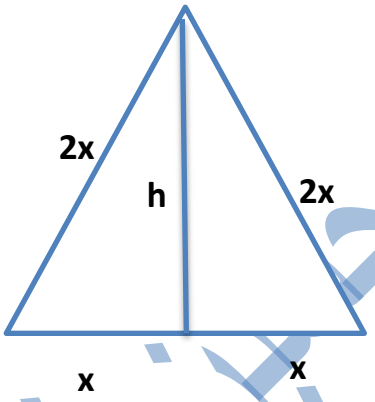
$$\frac{dh}{dt} = ?$$

$$2x = 25cm$$

حسين فاضل الخماسي

@grade12ua_e

س٥٥/ مثلث متساوي الاضلاع يزداد طول محيطه بمعدل $0.3\ cm/s$ جد معدل ازدياد ارتفاعه في اللحظة التي يكون فيها طول ضلعه $4cm$



$$p = 6x$$

$$\frac{dp}{dt} = 6\frac{dx}{dt}$$

$$0.3 = 6\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{0.3}{6} = \frac{3}{60} = \frac{1}{20} = 0.05$$

$$(2x)^2 = h^2 + x^2$$

$$4x^2 = h^2 + x^2$$

$$h^2 = 4x^2 - x^2$$

$$h^2 = 3x^2$$

$$h^2 = 3(2)^2 \Longrightarrow h^2 = 12 \Longrightarrow h = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$2h\frac{dh}{dt} = 6x\frac{dx}{dt}$$

$$h\frac{dh}{dt} = 3x\frac{dx}{dt}$$

$$2\sqrt{3}\ \frac{dh}{dt} = 6\left(\frac{1}{20}\right)$$

$$\sqrt{3}\ \frac{dh}{dt} = 3\left(\frac{1}{20}\right)$$

$$20\sqrt{3}\ \frac{dh}{dt} = 3$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{3}{20\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{20}cm/s$$

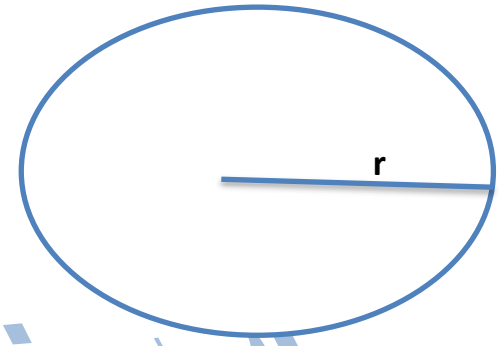
$\frac{dp}{dt} = 0.3cm/s$

$\frac{dh}{dt} = ?$

$2x = 4cm$

@grade12ua_e

س٥٦/ بركة ماء راكدة القي فيها حجر فاحدث موجات دائرية ، وفي لحظة ما كانت مساحة الموجات تزداد بمعدل $21\pi m^2/min$. اوجد معدل التغير في محيط تلك الموجة اذا كان نصف القطر عندئذ هو $7m$



$$A = \pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$21\pi = 2\pi(7)\ \frac{dr}{dt}$$

$$3 = 2\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{3}{2}$$

$$p = 2\pi r$$

$$\frac{dp}{dt} = 2\pi \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dp}{dt} = 2\pi\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{dp}{dt} = 3\pi\ m/min$$

$$\frac{dA}{dt} = 21\pi\ m^2/min$$

$$\frac{dp}{dt} = ?$$

$$r = 7m$$

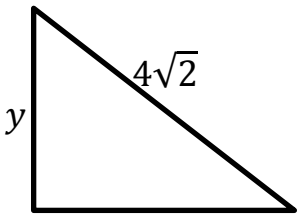
حسين فاضل الخماسي

@grade12ua_e

س٥٧/ سلم طوله $4\sqrt{2}\ m$ يستند طرفه الاسفل على ارض افقية وطرفه الاعلى على حائط فأذا انزلق الطرف الاسفل فكم يبتعد عن الحائط عندما تتساوى سرعتا طرفيهما

نفرض بعد الطرف الاسفل عن الحائط = x

نفرض بعد الطرف الاعلى عن الارض = y



$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

$x = ؟$

$$(4\sqrt{2})^2 = x^2 + y^2$$

$$32 = x^2 + y^2 \quad \ldots..(1$$

$$0 = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \qquad \div 2$$

$$0 = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

$$0 = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dx}{dt} \qquad \div \frac{dx}{dt}$$

$$x + y = 0 \implies y = -x \quad in(1)$$

$$32 = x^2 + (-x)^2$$

$$32 = x^2 + x^2$$

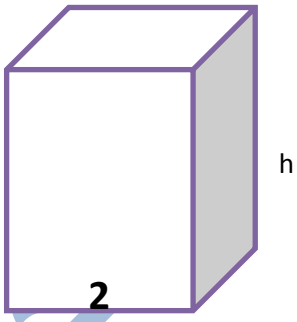
$$32 = 2\,x^2$$

$$\implies x^2 = 16 \implies x = 4m$$

حسين فاضل الخماسي

@grade12ua_e

س٥٨/ خزان على شكل متوازي المستطيلات قاعدته مربعة الشكل وطول ضلعها $2m$ فاذا صب فيه ماء بمعدل $8m^3/h$ احسب سرعة ارتفاع الماء في الخزان ؟



$\frac{dv}{dt} = 8\ m^3/h$

$\frac{dh}{dt}$ = ?, x=2m

Sol: V = نفرض الحجم

X = نفرض طول الضلع

h = نفرض ارتفاع الماء

$V = x^2\ h \implies v = 4h$

$\frac{dv}{dt} = 4\ \frac{dh}{dt} \implies 8 = 4\ \frac{dh}{dt}$

$\frac{dh}{dt} = \frac{8}{4} =$ **2m/h**

حسين فاضل الخماسي

@grade12ua_e

حسين فاضل الخماسي

@grade12ua_e