(1) مراجعة الفصل الثاني

الحصة الرابعة.

① التقريبات الخطية:

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$L(x) = m(x - x_1) + y_1$$

مثال: التقريب الخطي للدالة $y = \ln(x^2)$ عند $x = e$

الحل

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$$

$$f(e) = 2$$
$$f'(e) = \frac{2}{e}$$

$$\boxed{L(x) \simeq 2 + \frac{2}{e}(x - e)}$$

$$L(x) \simeq \cancel{2} + \frac{2}{e}x - \cancel{2}$$

$$\boxed{L(x) = \frac{2x}{e}} \Rightarrow \ln(x^2) \simeq \frac{2x}{e}$$

② تقريبات نيوتن

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

نوجد x_0 باستخدام $f(x)=0$ Solve أقرب عدد صحيح

قدر صفر الدالة $f(x) = x^3 + 3x - 5$ باستخدام نيوتن لأقرب 4 منازل عشرية.

الحل،

الحاسبة

$$x_n = \left(x - \frac{x^3 + 3x - 5}{3x^2 + 2}\right)$$

$\boxed{x_0 = 1}$

نكتب القانون بالحاسبة ثم

$x_1 \leftarrow$ calc $x_0 =$

$x_2 \leftarrow$ ثم calc Ans

$\leftarrow$ calc Ans

تكرر الخطوات حتى يظهر نفس الحل.

$x_1 = 1.2$	$x_4 = 1.1539$
$x_2 = 1.1481$	$x_5 = 1.1542$
$x_3 = 1.1552$	$x_6 = 1.1541$

$$\boxed{x_7 = 1.1541}$$

(2)

ما عدد المراحل اللازمة للحصول على صفر تقريبي للدالة $f(x) = x^3+2x-1$ لأقرب 4 منازل عشرية

الحل

(1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 5

$$x_n = x - \frac{x^3+2x-1}{3x^2+2}$$

$x_0 = 0$

$x_1 = \frac{1}{2}$ $x_2 = \frac{5}{11}$ $x_3 = 0.4533$, $x_4 = 0.4533$

$$\lim_{x \to \infty} x \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$$

لوبيتال

نعوض عن x ← 99 ← 999
عندما $x \to \infty$

اذا كان الناتج اعداد سالبة ← $-\infty$
أو
عدد سالب $\times 10^{\text{رقم موجب}}$

اذا كان الناتج اعداد موجبة ← ∞
أو
عدد موجب $\times 10^{\text{رقم موجب}}$

اذا كان الناتج
عدد $\times 10^{\text{رقم سالب}}$ = صفر

اذا كان تقترب من عدد صحيح ← تقرب القيمة

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2x}+x}{3x+x^2} \simeq 0$$

$-1.0 \times 10^{-5} \to 0$

(3)

* **النقاط الحرجة:** هي النقاط التي تكون عندها $f'(x)=0$ أو غ.م $f'(x)$

* **القيم القصوى المحلية** (نقاط حرجة)

عظمى محلية: $f(c) \ge f(x)$ في جوار $x=c$

صغرى محلية: $f(c) \le f(x)$ في جوار $x=c$

فترات التزايد: من على محور x $f'(x)>0$ موجبة

فترات التناقص: من على محور x $f'(x)<0$ سالبة

إذا كانت $f(x)=x^3-3x+1$ جد
- النقاط الحرجة
- فترات التزايد والتناقص
- القيم القصوى المحلية

الحل

$f'(x)=3x^2-3$

$f'(x)=0$

$3x^2-3=0$

$x=1$, $x=-1$

نقاط حرجة

ثم نقسم داخل الفترات ثم نعوض بطرفي المشتقة لتحديد الإشارة

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	∞
f'		+		−		+	
f		تزايد ↗	$\boxed{3}$	تناقص ↘	$\boxed{-1}$	تزايد ↗	
			ع محلية		ص محلية		

فترات التقعر ونقاط الانعطاف

① فترات التقعر لأعلى : $f''(x) > 0$ موجبة

② فترات التقعر لأسفل : $f''(x) < 0$ سالبة

نقطة الانعطاف : في المنتصف بين القمة والقاع

وتكون $f''(x) = 0$

---

* اختبار المشتقة الثانية لمعرفة نوع القيم القصوى المحلية

$f''(x) < 0$	$f''(x) > 0$	$f''(x) = 0$
عظمى محلية	صغرى محلية	فشل الاختبار.

إذا كانت $(-1, 3)$ نقطة حرجة للدالة $f(x)$ حيث $f''(x) = x(x-2)$ فإن نوع القيمة القصوى هو ---

① عظمى ② صغرى ③ طرفية

نعوض عن x في $f''(x)$ ثم ندرس الإشارة

$$f''(-1) = -1(-1-2) = 3$$

صغرى محلية

القيم المثلى

قوانين مساحات وحجوم الاشكال الهندسية.

المستطيل

المحيط $P = 2x + 2y$

المساحة $A = x \cdot y$

المربع

المحيط $P = 4x$

المساحة $A = x^2$

المثلث المتساوي الاضلاع

$P = 3x$

$A = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2$

الدائرة

$C = 2\pi r$

$A = \pi r^2$

الاسطوانة

$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$, $V = \pi r^2 h$

الصندوق : $V = L \cdot w \cdot h$

المخروط : $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

المكعب : $A = 6x^2$, $V = x^3$

طريقة الحل

* نحدد المعطيات - المطلوب - داله الاشتقاق.

مثال أوجد اكبر مساحة لمستطيل محيطه 24cm.

① 144 ② 36 ③ 24 ④ 120

$P = 2x + 2y = 24$

$x + y = 12$

$y = 12 - x$

$A = x \cdot y$

$A = x(12 - x)$

$A = 12x - x^2$

$A' = 12 - 2x = 0$

الطول $\leftarrow$ $x = 6$

العرض $y = 12 - 6 = 6$

المعدلات الزمنية في الاشتقاق بالنسبة للزمن

نشتق المعادلة ثم نضع الرمز $\frac{d}{dt}$

تذكر العمليات

تذكر الاشارات . يزداد (+) ، يقل (-)

* مكعب ثلج ينصهر بمعدل $12 in^3/h$ أوجد معدل تناقص طول حرفه عندما يصل إلى 2 in

① -2 ② -1 ③ -3 ④ -4 in/h

$$V = x^3$$

$$\frac{dv}{dt} = -12$$

$$\frac{dx}{dt} ??$$

$$x = 2$$

$$\frac{dv}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt}$$

$$-12 = 3(2)^2 \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = -1 \text{ in/h}$$

* تطبيقات الاقتصاد .

الربح $P(x) = R(x) - C(x)$

الدخل التكلفة

$R(x) =$ السعر $\times$ عدد الوحدات

دالة مرونة السعر .

$$E = \frac{p\, f'(p)}{f(p)}$$

المحاضرة الثامنة

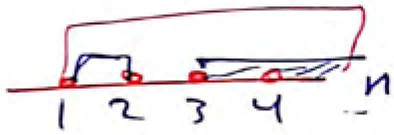
① قواعد التكامل

② المجموع والرمز سيجما .

① $\sum_{i=1}^{n} k = kn$ ② $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

③ $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ④ $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$$\sum_{i=3}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{2} i$$



$$\sum_{i=4}^{n} (2k+1) = \dots$$ أوجد

105
$n=10$

① $n(n+1)+4$ ② $\frac{n(n+1)}{2}+15$

③ $n^2+2n+15$ ③ $2n^2+4n+15$

$$\sum_{i=1}^{n} (2k+1) - \sum_{i=1}^{3} (2k+1)$$ 15

---

* مساحة ريمان

التقريب اليميني

$x_i = a + \Delta x\, i$

اليساري

$x_i = a + \Delta x(i-1)$

المنتصف

$x_i = a + \Delta x(i-\frac{1}{2})$

يعبر بالنهايات لمجموع ريمان للدالة $f(x)=x^2+1$ $[0,1]$ بالعلاقة ---

① $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$

② $x_i = a + \Delta x\, i = 0 + \frac{1}{n} i = \frac{i}{n}$

③ $f(x_i) = \left(\frac{i}{n}\right)^2 + 1 = \frac{i^2}{n^2} + 1$

④ $f(x_i) \cdot \Delta x = \left(\frac{i^2}{n^2} + 1\right) \frac{1}{n}$

⑤ $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i^2}{n^2} + 1\right)$

مجموع مربع أول 60 عدد فردي يعطى بالعلاقة

① $\sum_{i=1}^{60} (2i)^2$

② $\sum_{i=0}^{60} (4(i-1)$

③ $\sum_{i=1}^{60} (2i-1)^2$

④ $\sum_{i=0}^{59} (4i^2)$

العدد الفردي $2i-1$

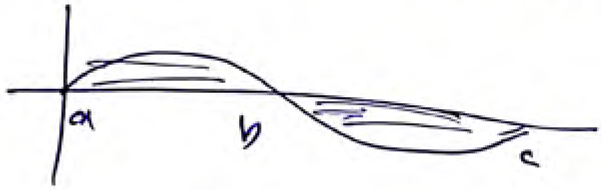
العدد الزوجي $2i$

* خواص التكامل المحدد

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

التكامل = صفر اذا كانت تقسم الفترة $[a, a]$

أو المساحة أعلى محور x = المساحة أسفل محور x



$$I = \int_a^c f(x)\,dx = \text{صفر}$$

$$\int_a^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{c} f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

نظرية القيمة المتوسطة

$$\text{avg}\, f(x) = \frac{I}{(b-a)}$$

اوجد قيمة c التي تحققها

نضع الدالة $f(x) = \text{avg}$

اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = x^2+1$ $[0, 2]$

ثم أوجد قيمة c .

$$\text{avg} = \frac{\int_0^2 (x^2+1)\,dx}{(2-0)} = \frac{7}{3}$$

لإيجاد c نضع $f(x) = \frac{7}{3}$

$$x^2+1 = \frac{7}{3} \quad \leftarrow -\frac{7}{3}$$

$$x^2+1-\frac{7}{3} = 0$$

$$x^2 - \frac{4}{3} = 0$$

$x = 1.15$

$x = -1.15$ مرفوضة خارج الفترة

الحد الأدنى والأعلى للتكامل.

$\min \le f(x) \le \max$

توجد القيمة العظمى والصغرى للدالة ثم نكامل

$\min(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \max(b-a)$

أوجد الحد الأدنى والأعلى للتكامل $\int_0^2 \sqrt{1+x^3}\,dx$

الحل

$f(x) = \sqrt{1+x^3}$

x	0	1	2
y	1	$\sqrt{2}$	3

min max

بالتكامل $1 \le f(x) \le 3$

$1(2-0) \le I \le 3(2-0)$

$2 \le I \le 6$

الحد الادني 2

الحد الأعلى 6

★ نظرية السيادة $f(x) \ge g(x)$

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$$

أوجد أقل قيمة $\int_0^4 (2f(x)-5)\,dx$ $\quad f(x) \ge 3$

نرتب التكامل

ضرب 2 $\quad 2f(x) \ge 6$

طرح 5 $\quad 2f(x)-5 \ge 1$

نكامل

$I \ge \int_0^4 1\,dx$

$I \ge 4$

النظرية الأساسية:

① $f(x)$ متصلة في $[a,b]$ لها بالتكامل

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

---

②

$$f(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} y(t)\,dt$$

$$f'(x) = y(h(x)).h'(x) - y(g(x)).g'(x)$$

بدل t نضع المتغير الأعلى * المشتقة

– المتغير الأسفل * المشتقة

* اذا كان أحدهما ثابت نضع صفر

أوجد $\frac{dy}{dx}$

① $$y = \int_{x^2}^{4} (\cos(t)+3)\,dt$$

$$y' = 0 - [\cos(x^2)+3](2x)$$

---

② $$y = \int_{2x}^{x^2} \cos t\,dt$$

$$y' = \cos(x^2).2x - \cos(2x).2$$

* التكامل بالتعويض

$$\int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx = \ldots \quad \text{فإن} \quad \int_1^2 f(t)\,dt = 5$$

① 5 ② 10 ③ $\frac{5}{2}$ ③ 20

الحل

x	1	4
u	1	2

$u = \sqrt{x}$

$u^2 = x$

$2u\,du = dx$

$$\int_1^2 \frac{f(u)}{\cancel{u}} \cdot 2\cancel{u}\,du = 2\int_1^2 f(u)\,du$$

$$= 2(5) = 10$$

---

* التكامل العددي:

قاعدة شبه المنحرف ، سيمبسون

يجب تكوين جدول قيم الدالة ثم نطبق القانون

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

شبه المنحرف

$$I_T = \frac{b-a}{2n}\left(f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + f(b) \right]$$

$$I_S = \frac{b-a}{3n}\left[f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots f(b) \right]$$

سيمبسون

بشرط n عدد زوجي

الخطأ في تقدير التكامل

$$E_T = I - I_T$$

الفعلية — التقديرية — شبه المنحرف

$$E_S = I - I_S$$ سمبسون

$$E_m = I - I_m$$ المنتصف

* يمكن حساب الخطأ في تقدير التكامل لقاعدة المنتصف - شبه المنحرف كما يلي،

① نوجد $f''_{(x)}$
② أكبر قيمة
$K = |f''_{(x)}|$
③ نعوضه بالقانون

$$E_M \leq \frac{K(b-a)^3}{24n^2}$$ المنتصف

$$E_T \leq \frac{K(b-a)^3}{12n^2}$$ شبه المنحرف

باستخدام سمبسون،

① نوجد $f^{(4)}_{(x)}$
② أكبر قيمة
$L = |f^{(4)}_{(x)}|$
③ نعوضه بالقانون

$$E_S \leq \frac{L(b-a)^5}{180n^4}$$

* اللوغاريتم كتكامل .

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \longrightarrow \ln s = \int_1^s \frac{1}{t}\, dt$$

خواص هامة

① $\ln(x) + \ln(y) = \ln(x \cdot y)$

② $\ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$

③ $\ln x^m = m \ln x$

$\ln(e^x) = x \quad , \quad e^{\ln x} = x$

$\ln e = 1 \qquad \ln(1) = 0$

$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b} \quad , \quad \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

$a^x = e^{x \ln a}$

$K = \ln(e^K)$

عدد

أي عدد
يكتب على شكل
لوغاريتم