# التهيئة للفصل

بسّط كل عبارة مما يأتي:

1) $\frac{9}{10}-\frac{4}{15}+\frac{1}{3}$

2) $\frac{8}{9}-\frac{7}{6}+\frac{1}{3}$

3 ) حل التناسب التالي $\frac{9}{18}=\frac{6}{m}$

4) حل التناسب التالي $\frac{9}{12}=\frac{p}{36}$

# ضرب العبارات النسبية وقسمتها

ضرب وقسمة العبارات النسبية مثل ضرب وقسمة الكسور الاعتيادية
كما ان تبسيط العبارات النسبية مثل تبسيط الكسور حيث يحلل البسط والمقام الي عواملة الاولية بالتحليل كعامل مشترك او كفرق بين مربعين او مجموع مكعبين ار الفرق بين مكعبين او مقدار ثلاثي
اما متي تكون العبارة غير معرفة ذلك بوضع المقام = 0 وايجاد قيم المجهول $x$

**مثال 1** **بسط العبارة الآتية ، وحدد متى تكون غير معرفة :**

$$= \frac{5x(x^2+4x+3)}{(x-6)(x^2-9)}$$

**تحقق من فهمك :**

بسّط كل عبارة مما يأتي، وحدد متى تكون غير معرّفة:

**(1A** $\frac{4y(y-3)(y+4)}{y(y^2-y-6)}$

**(1B** $\frac{2z(z+5)(z^2+2z-8)}{(z-1)(z+5)(z-2)}$

**مثال 2**

ما قيم $x$ التي تجعل العبارة $\frac{x^2(x^2-5x-14)}{4x(x^2+6x+8)}$ غير معرفة؟

**A** $-2, -4$ **C** $0, -2, -4$ **B** $-2, 7$ **D** $0, -2, -4, 7$

**تحقق من فهمك :**

ما قيم $x$ التي تجعل العبارة $\frac{x(x^2+8x+12)}{-6(x^2-3x-10)}$ غير معرفة؟

**A** $5, 0, -2$ **B** $5, -2$ **C** $0, -2, -6$ **D** $5, -2, -6$

## ضرب العبارات النسبية

لضرب عبارتين نسبيتين، اضرب البسط في البسط والمقام في المقام.

## قسمة العبارات النسبية

لقسمة عبارة نسبية على اخرى اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه.

**مثال 3**

بسِّط كل عبارة مما يأتي:

(a $\frac{6c}{5d} \cdot \frac{15cd^2}{8a}$

(b $\frac{18xy^3}{7a^2b^2} \div \frac{12x^2y}{35a^2b}$

**تحقق من فهمك :** بسِّط كل عبارة مما يأتي:

**(4A** $\frac{12c^3d^2}{21ab} \cdot \frac{14a^2b}{8c^2d}$

**(4D** $\frac{12x^4y^2}{40a^4b^4} \div \frac{6x^2y^4}{16a^2x}$

**مثال 4** بسّط كلّا من العبارتين الآتيتين:

**(a** $\frac{x^2-6x-16}{x^2-16x+64} \cdot \frac{x-8}{x^2+5x+6}$

**(b** $\frac{x^2-16}{12y+36} \div \frac{x^2-12x+32}{y^2-3y-18}$

**تحقق من فهمك :** بسّط كلّا من العبارتين الآتيتين:

$$\frac{8x-20}{x^2+2x-35} \cdot \frac{x^2-7x+10}{4x^2-16}$$

$$\frac{x^2-9x+20}{x^2+10x+21} \div \frac{x^2-x-12}{6x+42}$$

**مثال 5** **تبسيط الكسور المركبة :**

بسّط كلّا من العبارتين الآتيتين:

a) $\dfrac{\frac{a+b}{4}}{\frac{a^2+b^2}{4}}$

b) $\dfrac{\frac{x^2}{x^2-y^2}}{\frac{4x}{y-x}}$

**تحقق من فهمك :** بسّط كلّا من العبارتين الآتيتين:

$$\frac{\frac{(x-2)^2}{2(x^2-5x+4)}}{\frac{x^2-4}{4x-10}}$$

$$\frac{\frac{x^2-y^2}{y^2-49}}{\frac{y-x}{y+7}}$$

# تمارين

## بسط كلا من العبارات الآتية

$$\frac{x^2-5x-24}{x^2-64}$$

$$\frac{y^2+3y-40}{25-y^2}$$

$$\frac{12x^3y}{13ab^2} \div \frac{36xy^3}{26b}$$

$$\frac{x^2-4x-21}{x^2-6x+8} \cdot \frac{x-4}{x^2-2x-35}$$

# جمع العبارات النسبية وطرحها

لجمع العبارات النسبية وطرحها يجب اولا توحيد المقامات بايجاد LCM
وذلك بضرب قوي العوامل التي لها الاس الاكبر

**مثال 1** أوجد LCM لكل مجموعة من كثيرات الحدود مما يأتي:

(a $6xy\ ,\ 15x^2\ ,\ 9xy^4$ (b $y^4+8y^3+15y^2\ ,\ y^2-3y-4$

**تحقق من فهمك :** أوجد LCM لكل مجموعة من كثيرات الحدود مما يأتي:

(a $12a^2b\ ,\ 15abc\ ,\ 8b^3c^4$ (b $4a^2-12a-16\ ,\ a^3-9a^2+20a$

**جمع العبارات النسبية وطرحها** عند جمع عبارتين نسبيتين أو طرحهما يجب أن نوحد مقاميهما، تمامًا كما في جمع الكسور وطرحها.

**مثال 2** **جمع عبارات مقاماتها وحيدات حد**

**بسط العبارة** $\frac{3y}{2x^3}+\frac{5z}{8xy^2}$

**تحقق من فهمك : بسط كلا من العبارتين الآتيتين:**

(a $\frac{4}{5a^3b^2}+\frac{9c}{10ab}$

(b $\frac{3a^2}{16b^2}-\frac{8x}{5a^3b}$

**مثال 3** عبارات مقاماتها كثيرات حدود

**بسط العبارة** $\frac{5}{6x-18} - \frac{x-1}{4x^2-14x+6}$

**تحقق من فهمك : بسط كلا من العبارتين الآتيتين:**

a) $\frac{x-1}{x^2-x-6} - \frac{4}{5x+10}$

b) $\frac{x-8}{4x^2+21x+5} - \frac{6}{12x+3}$

**مثال 4 تبسيط الكسور المركبة**

**بسط العبارة** $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{y}}$

**تحقق من فهمك : بسط كل عبارة مما يأتي:**

**a)** $\dfrac{1+\frac{2}{x}}{\frac{3}{y}-\frac{4}{x}}$

**b)** $\dfrac{\frac{a}{b}+1}{1-\frac{b}{a}}$

# تمارين

1) أوجد LCM لكل مما يأتي:

$12xy^4, 14x^4y^2, 5xyz^3, 15x^5y^3$

$x^2 - 5x - 24, x^2 - 9, 3x^2 + 8x - 3$

2) بسط كل عبارة مما يأتي:

$$\frac{8}{x^2 - 6x - 16} + \frac{9}{x^2 - 3x - 40}$$

$$\frac{4 + \frac{2}{x}}{3 - \frac{2}{x}}$$

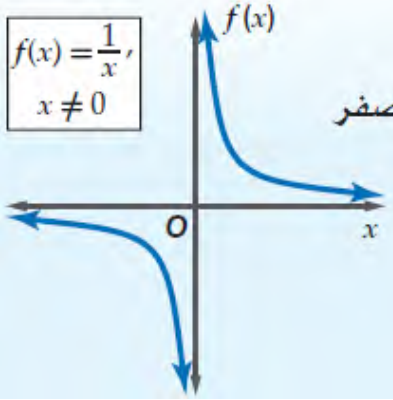
3) إذا كان $\frac{2a}{a} + \frac{1}{a} = 4$، فما قيمة $a$؟

A) $-\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 2

# تمثيل دوال المقلوب بيانيًّا

## الدالة الرئيسة (الأم) لدوال المقلوب

| | |
|---|---|
| الدالة الرئيسة (الأم): | $f(x)=\frac{1}{x}$ |
| شكل التمثيل البياني: | قطع زائد |
| المجال والمدى: | جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر |
| خطا التقارب: | $x=0$ و $y=0$ |
| المقطعين: | لا يوجد |
| تكون الدالة غير معرفة عندما: | $x=0$ |




مجال دالة المقلوب هو مجموعة القيم التي تكون الدالة عندها معرفة

**مثال 1** القيود على المجال (القيم التي تجعل الدالة غير معرفة)

**حدد قيمة $x$ التي تجعل الدالة $f(x)=\frac{3}{2x+5}$ غير معرفة .**

**تحقق من فهمك :**

حدد قيمة $x$ التى تجعل كل دالة مما يأتي غير معرّفة:

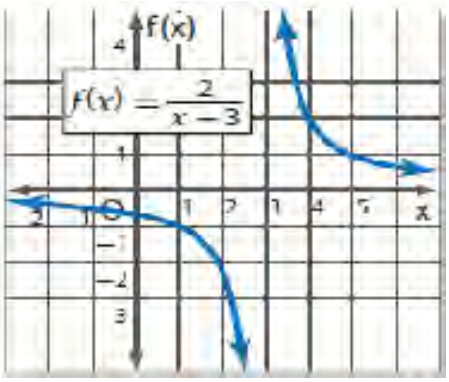
$$f(x)=\frac{7}{3x+2}$$

$$f(x)=\frac{2}{x-1}$$

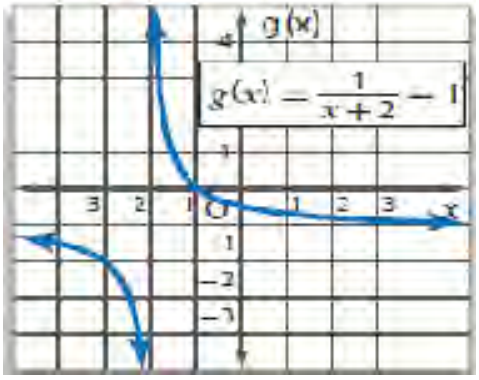
التمثيل البياني لدالة المقلوب ($f(x)=\frac{1}{a(x)}$) غير متصلة عند القيمة المستثناة من مجالها، ويكون له **خط تقارب** عندها، وهو المستقيم الذي يقترب منه التمثيل البياني للدالة.

**مثال 2** حدد خطوط التقارب، والمجال، والمدى لكل من الدالتين الآتيتين:

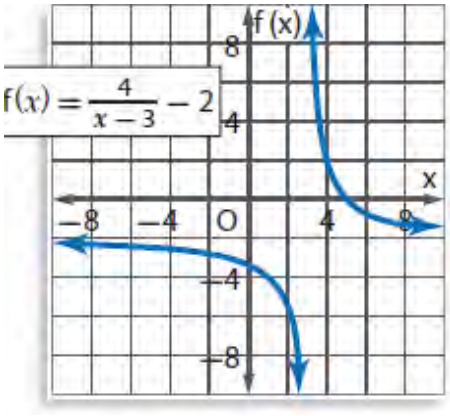
**(a**

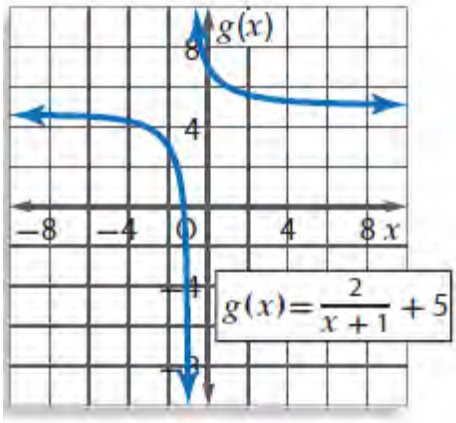



**(b**




**تحقق من فهمك :** حدد خطوط التقارب، والمجال، والمدى لكل من الدالتين الآتيتين:



## تحويلات التمثيلات البيانية لدوال المقلوب

$$f(x)=\frac{a}{x-h}+k$$

**$h$: إزاحة أفقية**

إزاحة بمقدار $|h|$ وحدة إلى اليمين إذا كانت $h$ موجبة.

إزاحة بمقدار $|h|$ وحدة إلى اليسار إذا كانت $h$ سالبة.

خط تقارب رأسي عند $x=h$.

**$k$: إزاحة رأسية**

إزاحة بمقدار $|k|$ وحدة إلى الأعلى إذا كانت $k$ موجبة.

إزاحة بمقدار $|k|$ وحدة إلى الأسفل إذا كانت $k$ سالبة.

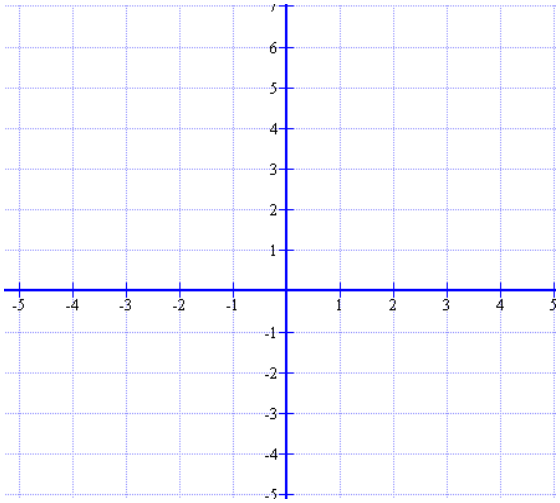
خط تقارب أفقي عند $y=k$.

**$a$: الشكل والاتجاه**

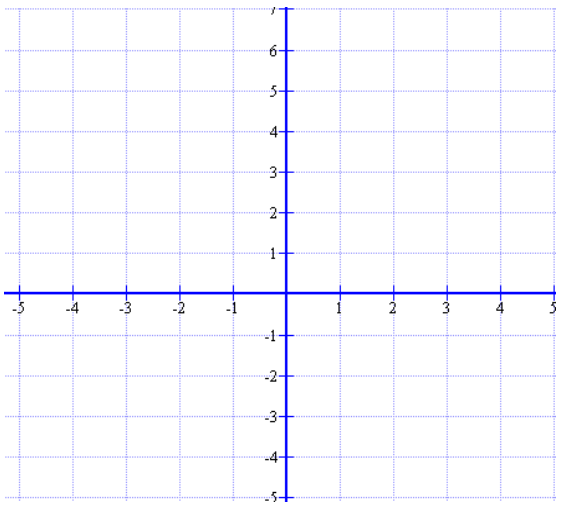
إذا كانت $a<0$، فإن التمثيل البياني ينعكس حول المحور $x$، وإذا كانت $|a|>1$، فإن التمثيل البياني يتسع رأسيًا. وإذا كانت $0<|a|<1$، فإن التمثيل البياني يضيق رأسيًا.

**مثال 3** مثّل كلًّا من الدالتين الآتيتين بيانيًّا، وحدّد مجال ومدى كلٍّ منهما:

(a $f(x)=\frac{2}{x-4}+2$

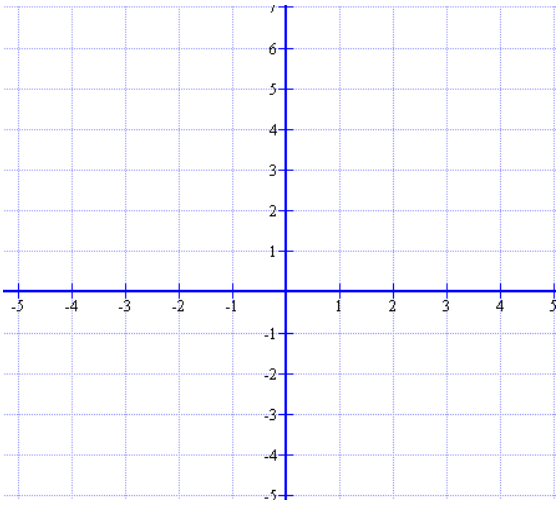


(b $f(x)=\frac{-3}{x+1}-4$

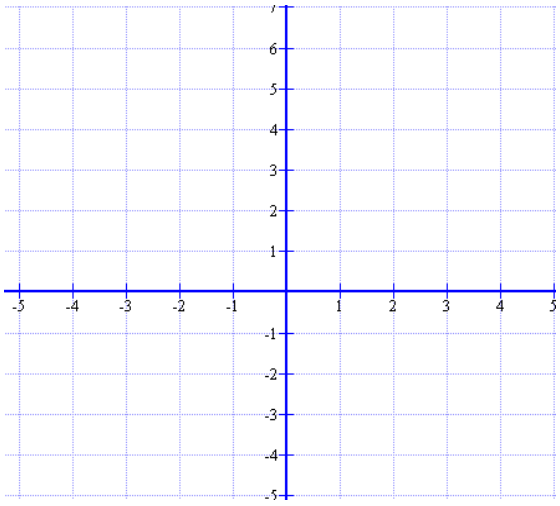


**تحقق من فهمك :** مثّل كلًّا من الدالتين الآتيتين بيانيًّا، وحدّد مجال ومدى كلٍّ منهما:

**a)** $f(x) = \frac{-2}{x+4} + 1$

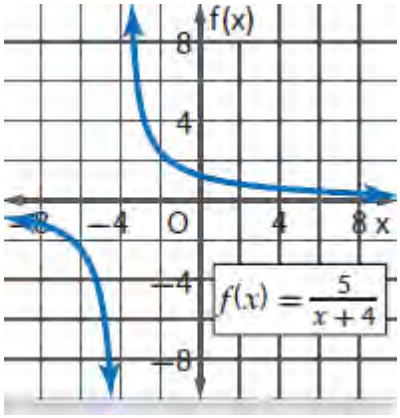


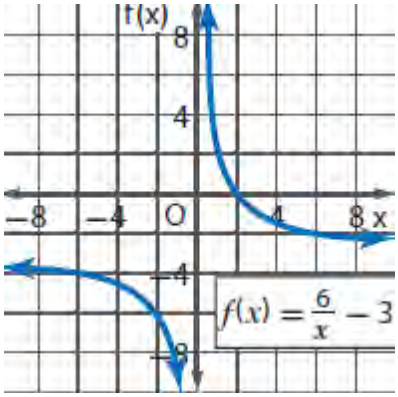
**b)** $g(x) = \frac{1}{3(x-1)} - 2$



# تمارين

**1)** حدد خطوط التقارب، والمجال، والمدى لكل من



# تمثيل الدوال النسبية بيانيًّا

**الدالة النسبية** هي دالة على الصورة $f(x)=\frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $a(x)$ و $b(x)$ دالتان كثيرتا حدود، و $b(x)\neq 0$ .

لتمثيل الدالة النسبية بيانيًّا يكون من المفيد تحديد أصفارها، وخطوط التقارب لها. فأصفار الدالة $f(x)=\frac{a(x)}{b(x)}$ هي جميع قيم $x$ التي يكون عندها $a(x)=0$ .

## خطوط التقارب الرأسية والأفقية

**التعبير اللفظي:** إذا كان $f(x)=\frac{a(x)}{b(x)}$ ، حيث $a(x)$ , $b(x)$ دالتان كثيرتا حدود

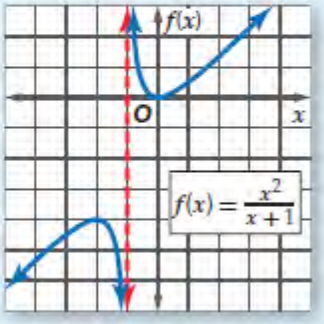
لا يوجد بينهما عوامل مشتركة غير الواحد، و $b(x)\neq 0$ فإنه:

- يوجد للدالة $f(x)$ خط تقارب رأسي عندما $b(x)=0$ .
- يوجد للدالة $f(x)$ خط تقارب أفقي واحد على الأكثر.
- إذا كانت درجة $a(x)$ أكبر من درجة $b(x)$ فلا يوجد خط تقارب أفقي.
- إذا كانت درجة $a(x)$ أقل من درجة $b(x)$ فإن خط التقارب الأفقي هو المستقيم $y=0$.
- إذا كانت درجة $a(x)$ تساوي درجة $b(x)$ فإن خط التقارب الأفقي هو المستقيم:

$$y=\frac{\text{المعامل الرئيس لـ } a(x)}{\text{المعامل الرئيس لـ } b(x)}$$ .

**أمثلة:**

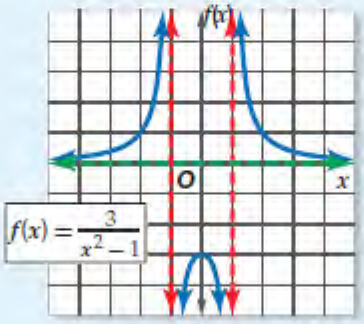
لا يوجد خط تقارب أفقي




خط التقارب الرأسي:

$x=-1$

يوجد خط تقارب أفقي واحد

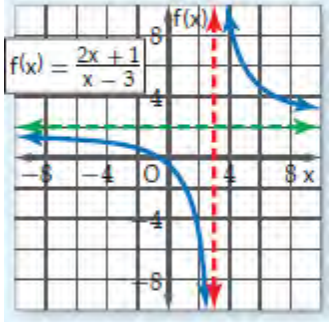



خطا التقارب الرأسي:

$x=-1, x=1$

خط التقارب الأفقي:

$y=0$




خط التقارب الرأسي:

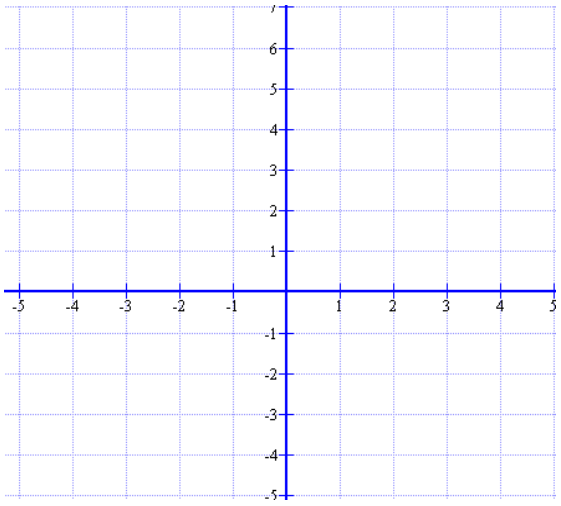
$x=3$

خط التقارب الأفقي:

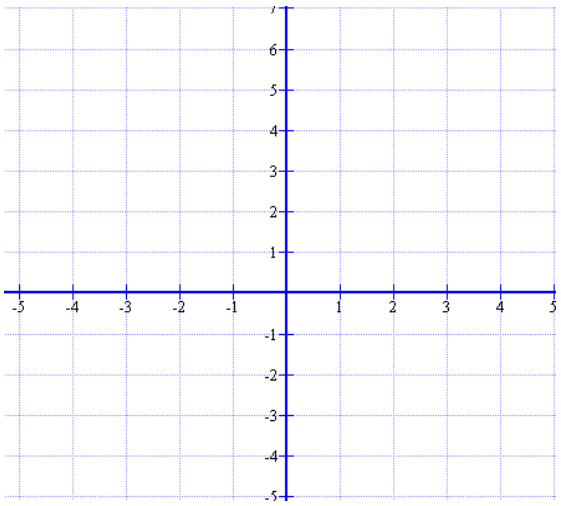
$y=2$

**مثال 1** التمثيل البياني لدالة نسبية ليس لها خط تقارب أفقي

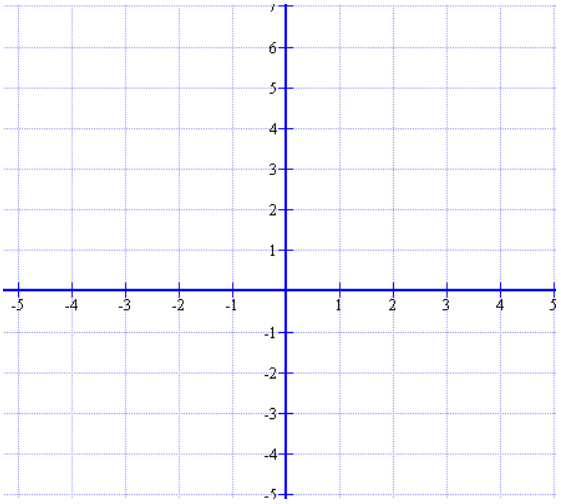
مثِّل الدالة $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ بيانياً :



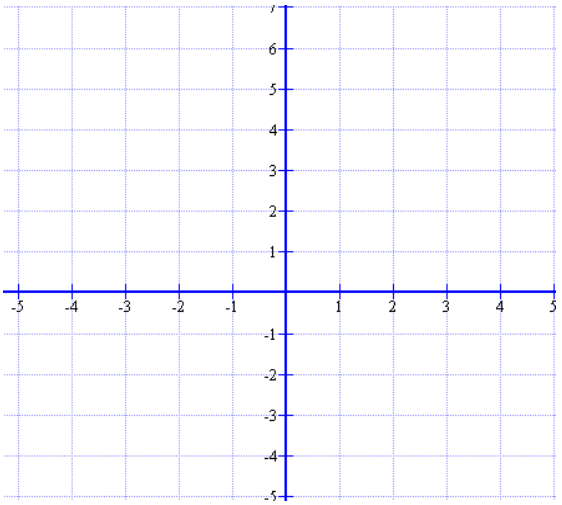
**تحقق من فهمك :** مثِّل الدالة $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x+1}$ بيانياً :



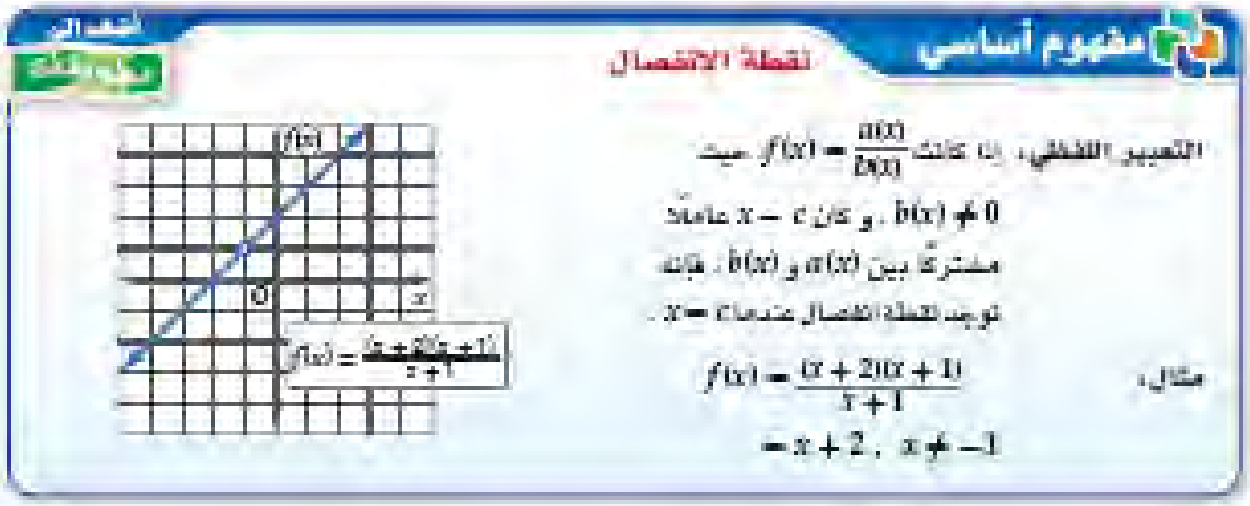
**مثال 2** مثّل الدالة $f(x) = \frac{x}{x+2}$ بيانياً :



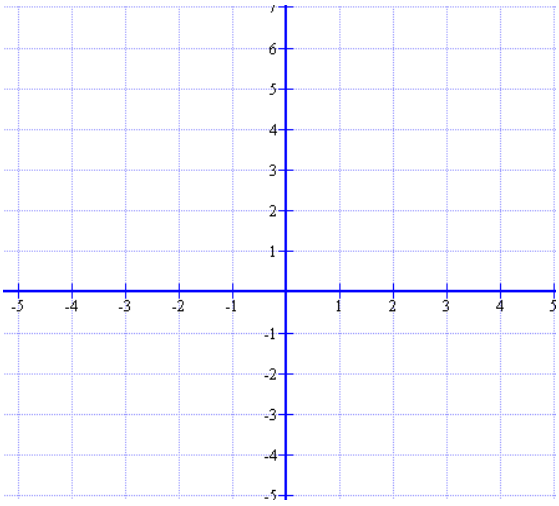
**تحقق من فهمك :** مثّل الدالة $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$ بيانياً :



**نقطة الانفصال** يوجد في بعض الأحيان **نقط انفصال** في التمثيل البياني للدالة النسبية، ويظهر هذا النقط على شكل فجوات في التمثيل البياني للدالة لأن الدالة تكون غير معرّفة عند تلك النقاط.

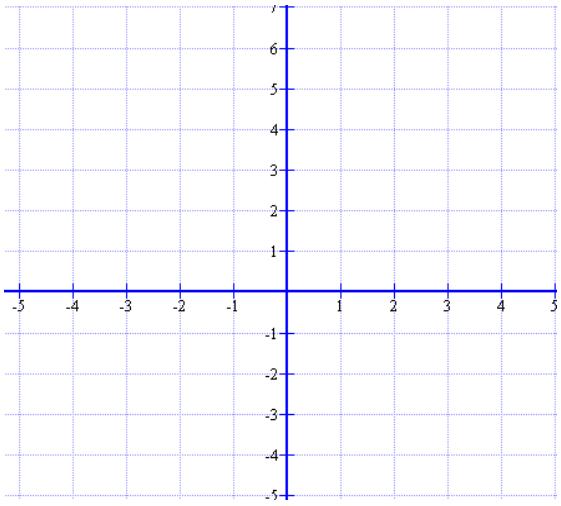


**مثال 3** مثّل الدالة $f(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$ بيانياً :

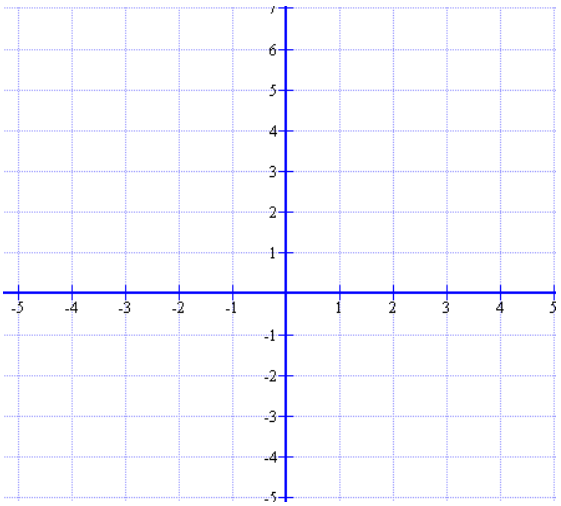


**تحقق من فهمك :** مثّل كلاً من الدالتين الآتيتين بيانياً :

**(a** $f(x) = \frac{x^2+4x-5}{x+5}$



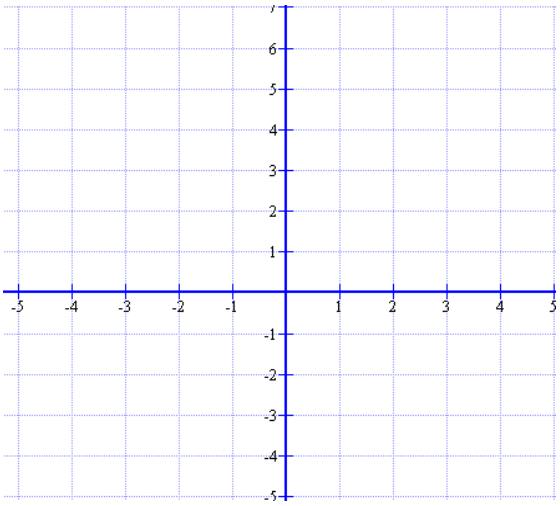
**(b** $f(x) = \frac{x^3+2x^2-9x-18}{x^2-9}$



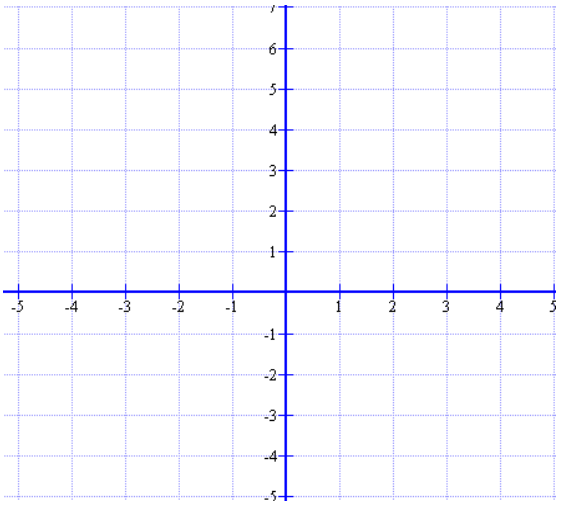
# تمارين

مثّل كلاً من الدوال الآتية بيانيا :

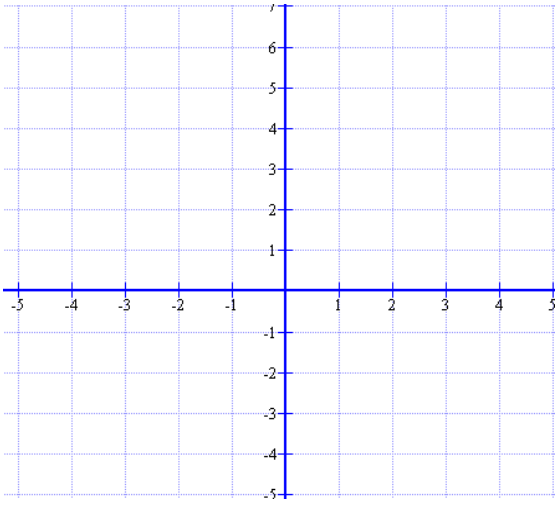
1) $f(x) = \frac{x^2-2}{x-1}$



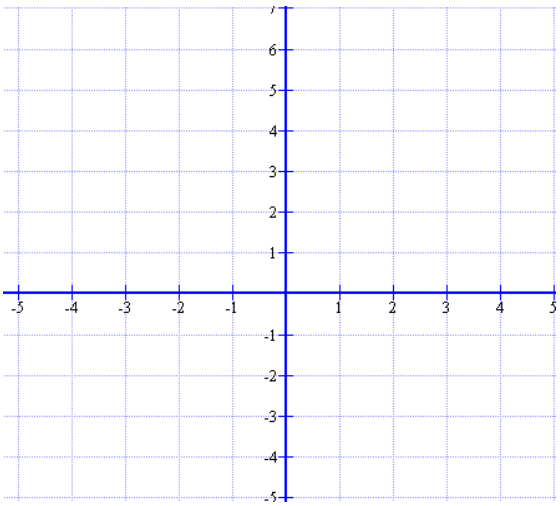
2) $f(x) = \frac{7+x}{2+x}$



3) $f(x) = \frac{x^2-4x-5}{x+1}$



4) $f(x) = \frac{2x}{(x+2)(x-5)}$



# دوال التغيّر

مفهوم أساسي

أضف إلى دفترك

## التغيّر الطردي

التعبير اللفظي: تتغيّر $y$ طرديًا مع $x$ إذا وجد عدد $k \neq 0$، بحيث $y = kx$.
ويسمى العدد $k$ ثابت التغيّر.

مثال: إذا كان $y = 3x$, $x = 7$، فإن $y = 3(7) = 21$.

**ملاحظة هامة** : إذا كانت $y$ تتغير طرديا مع $x$ فإنَّ $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$

**مثال 1** إذا كانت $y$ تتغير طرديا مع $x$ وكانت $y = 15$ عندما $x = -5$ فأوجد $y$ عندما $x = 7$

**تحقق من فهمك :** إذا كانت $r$ تتغير طرديا مع $t$ وكانت $r = -20$ عندما $t = 4$ فأوجد قيمة $r$ عندما $t = -6$

هناك نوع آخر من التغير يُسمى **التغير المشترك** ويحدث عندما تتغير كمية ما طرديًا مع حاصل ضرب كميتين أخريين أو أكثر.

**مفهوم أساسي** — التغير المشترك

التعبير اللفظي: تتغير $y$ تغيرًا مشتركًا مع $x$ و $z$ إذا وجد عدد $k \neq 0$ بحيث $y = kxz$.

مثال: إذا كان $x = 6, z = -2$، $y = 5xz$، فإن $y = 5(6)(-2) = -60$.

**ملاحظة هامة** : إذا كانت $y$ تتغير تغيراً مشتركاً مع $x$ و $z$ فإنَّ $\frac{y_1}{x_1 z_1} = \frac{y_2}{x_2 z_2}$

**مثال 2** إذا كانت $y$ تتغير تغيراً مشتركاً مع $x$ و $z$ ، فأوجد قيمة $y$ عندما $x = 9$ و $z = 2$

إذا علمت أنَّ $y = 20$ عندما $z = 3$ و $x = -5$

**تحقق من فهمك :** إذا كانت $r$ تتغير تغيراً مشتركاً مع $v$ و $t$ ، وكانت $r = 70$ عندما $v = 10$ و $t = 4$

فأوجد قيمة $r$ عندما $v = 2$ و $t = 8$

**التغيُّر العكسي والتغيُّر المركب** هناك نوع آخر من التغيُّر هو **التغيُّر العكسي** ، فإذا تغيَّرت الكميتان عكسيًّا فحاصل ضربهما يساوي ثابتًا $k$ .

نقول إن كميتين تتغيَّران عكسيًّا إذا كانت إحداهما تزيد بنقصان الأخرى، فعلى سبيل المثال تتغيَّر السرعة والزمن اللازمان لقطع مسافة ثابتة تغيرًا عكسيًّا؛ فكلما زادت السرعة قلّ الزمن اللازم لقطع المسافة.

## التغيُّر العكسي

**التعبير اللفظي:** تتغير $y$ عكسيًا مع $x$ إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث

$x\,y = k$ أو $y = \frac{k}{x}$ حيث $x \neq 0$ و $y \neq 0$

**مثال:** إذا كانت $xy = 2$ ، $x = 6$ فإن $y = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ .

**ملاحظة هامة** : **إذا كانت $y$ تتغير عكسياً مع $x$ فإنَّ $\frac{y_2}{x_1} = \frac{y_1}{x_2}$**

**مثال 3** **إذا كانت $a$ تتغير عكسياً مع $b$ وكانت $a = 28$ عندما $b = -2$ فأوجد قيمة $a$ عندما $b = -10$**

**تحقق من فهمك : إذا كانت $x$ تتغير عكسياً مع $y$ وكانت $x = 24$ عندما $y = 4$ فأوجد قيمة $x$ عندما $y = 12$**

**التغيُّر المركب**، ويحدث عندما تتغيَّر كمية ما طرديًّا أو عكسيًّا أو كليهما معًا مع كميتين أخر بين أو أكثر.

**ملاحظة هامة** : **إذا كانت $y$ تتغير طردياً مع $x$ و عكسياً مع $z$ فإنَّ** $\frac{y_1}{x_1 z_2} = \frac{y_2}{x_2 z_1}$

**مثال 4** **إذا كانت $y$ تتغير طردياً مع $x$ و عكسياً مع $z$ وكانت $x = 24$ عندما $z = 2$ و $y = 6$**
**فأوجد قيمة $x$ عندما $y = 18$ و $z = -3$**

**تحقق من فهمك :**

إذا كانت $p$ تتغيَّر طرديًّا مع $r$ وعكسيًّا مع $t$ ، وكانت $t = 20$ عندما $p = 4$ ، و $r = 2$ . فأوجد قيمة $t$ عندما $r = 10$ و $p = -5$ ؟

# تمارين

1) حدد إذا كانت المعادلة في كل مما يأتي تمثل تغيّرًا طرديًا، أو عكسيًا، أو مشتركًا، أو مركبًا، ثم أوجد ثابت التغيُّر (التناسب) في كل منها :

(19 $a = 27b$ (20 $c = \frac{7}{d}$ (21 $-10 = gh$ (22 $m = 20cd$

2) إذا كانت $x$ تتغير تغيراً مشتركاً مع $y$ و $z$ ، فأوجد قيمة $y$ عندما $x = 9$ و $z = 2$

إذا علمت أنَّ $y = 20$ عندما $z = 3$ و $x = -5$

3)

## تدريب على اختبار

29) إذا كانت $a$ تتغيّر طرديًّا مع $b$ ، وعكسيًّا مع $c$ ، وكانت $b=15$ عندما $c=2$, $a=4$ فما قيمة $b$ عندما $a=7$, $c=-8$ ؟

A $\frac{-1}{105}$ C $\frac{1}{105}$

B $-105$ D $105$

30) ما التغيُّر الذي تمثله العلاقة الموضحة بالجدول المجاور؟

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 15 | 5 |
| 18 | 6 |
| 21 | 7 |
| 24 | 8 |

A طردي C مشترك

B عكسي D مركب

# حل المعادلات والمتباينات النسبية

**حل المعادلات النسبية** تُسمى المعادلة التي تحتوي على عبارة نسبية أو أكثر **معادلة نسبية**، ويكون حل هذه المعادلة عادة أسهل عندما نتخلص من الكسور، وذلك بضرب طرفي المعادلة في LCM للمقامات.

ومن الممكن الحصول على حلول دخيلة عند ضرب طرفي المعادلة النسبية في LCM للمقامات.

**مثال 1** حل معادلة نسبية

حل المعادلة $\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2-x-10}{x^2+8x+15} = \frac{3}{x+3}$ ، وتحقق من صحة الحل .

## تحقق من فهمك

حُلّ كل معادلة مما يأتي، وتحقق من صحة حلك:

**(1A** $\frac{5}{y-2}+2=\frac{17}{6}$

**(1B** $\frac{2}{z+1}-\frac{1}{z-1}=\frac{-2}{z^2-1}$

**حل المتباينات النسبية** لحل المتباينات النسبية، وهي المتباينات التي تحتوي على عبارة نسبية أو أكثر. اتبع الخطوات الآتية:

**مفهوم أساسي** — **حل المتباينات النسبية**

اضغط وتعلم

**الخطوة 1:** حدد القيم المستثناة وهي القيم التي يكون عندها المقام صفرًا.

**الخطوة 2:** حل المعادلة المرتبطة.

**الخطوة 3:** استعمل القيم التي حصلت عليها في الخطوتين السابقتين لتقسيم خط الأعداد إلى فترات.

**الخطوة 4:** اختبر قيمة من كل فترة لتحديد الفترات التي تحتوي قيمًا تحقق المتباينة.

**مثال 2** حل متباينة نسبية

حل المتباينة النسبية $\frac{3}{x} - \frac{1}{x-2} < \frac{x+1}{4}$

**تحقق من فهمك** حل كلًّا من المتباينتين

**(5A** $\frac{5}{x}+\frac{6}{5x}>\frac{2}{3}$

**(5A** $\frac{4}{3x}+\frac{7}{x}<\frac{5}{9}$

# تمارين

1) يحتاج ناصر ومحمد إلى 6 h لطلاء سور إذا عملا معًا، ويحتاج ناصر إلى 10h للقيام بالعمل وحده. كم ساعة يحتاج محمد إذا قام بالعمل وحده؟

2)

## تدريب على اختبار

**23)** ما حل المعادلة: $\frac{11}{a+2}-\frac{10}{a+5}=\frac{36}{a^2+7a+10}$ ؟

**A** $-1$ **B** $-\frac{1}{2}$ **C** $\frac{1}{2}$ **D** $1$

**24)** ما قيمة $x$ في المعادلة $\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right)=4$ ؟

**A** $-7$ **B** $-\frac{1}{2}$ **C** $-\frac{1}{7}$ **D** $7$