

العلاقات والدوال الأسية والكوفاريتمية

العلاقات والدوال الأسية واللوغاريتمية

التهيئة :

بسط كل عبارة مما يأتي مفترضا أن أيا من المتغيرات لا يساوي صفرا :

$(8x^3y^9z^6)$	$(2xy^3z^2)^3$ (2)	(a^{12})	$a^4a^3a^5$ (1)
$(\frac{4r^4}{81n^4t^2})$	$(\frac{-8r^2n}{36n^3t})^2$ (4)	$(\frac{-3x^6}{2y^3z^5})$	$\frac{-24x^8y^5z}{16x^2y^8z^6}$ (3)

(5) **كثافة :** تعرف الكثافة بأنها ناتج قسمة الكتلة علي الحجم . فإذا كانت كتلة جسم $7 \cdot 5 \times 10^3 g$ ، وحجمه $1 \cdot 5 \times 10^3 cm^3$ ، فما كثافته ؟

الحل : $\frac{7 \cdot 5 \times 10^3 g}{1 \cdot 5 \times 10^3 cm^3} = 5 g / cm^3$ الكثافة

أوجد معكوس كل دالة مما يأتي :

$f(x) = x - 3$ (7)	$f(x) = 2x + 5$ (6)
$f(x) = \frac{1}{4}x - 3$ (9)	$f(x) = -4x$ (8)
$y = \frac{1}{3}x + 4$ (11)	$f(x) = \frac{x - 1}{2}$ (10)

حدد إذا كانت كل دالتين مما يأتي دالة عكسية للأخرى ، أم لا ، وضح إجابتك :

$g(x) = x + 6$ ، $f(x) = x - 6$ (12)

الحل : نعم لأن : $[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$

$g(x) = 2x - 5$ ، $f(x) = 2x + 5$ (13)

الحل : لا لأن : $[f \circ g](x) = 4x - 5$

(14) **طعام :** تكلف شطيرة الجبنة 4 ريال ، وتكلف كل إضافة عليها 0.5 ريال . فإذا كانت الدالة $f(x) = 0.5x + 4$ تمثل تكلفة الشطيرة مضافا إليها x من الإضافات ،

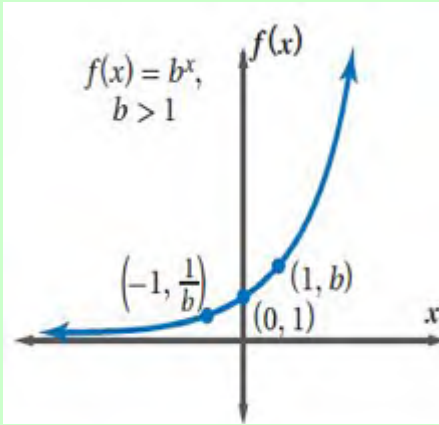
فأوجد $f^{-1}(x)$ ، موضحا ماذا تعني .

الحل : $f^{-1}(x) = 2x - 8$

تعريف :

الدالة الرئيسية (الأم) لدوال النمو الأسى

مفهوم أساسي

الدالة الرئيسية (الأم) : $f(x) = b^x, b > 1$

خصائص منحنى الدالة : متصل ، متباين ، متزايد

المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية

المدي : مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة

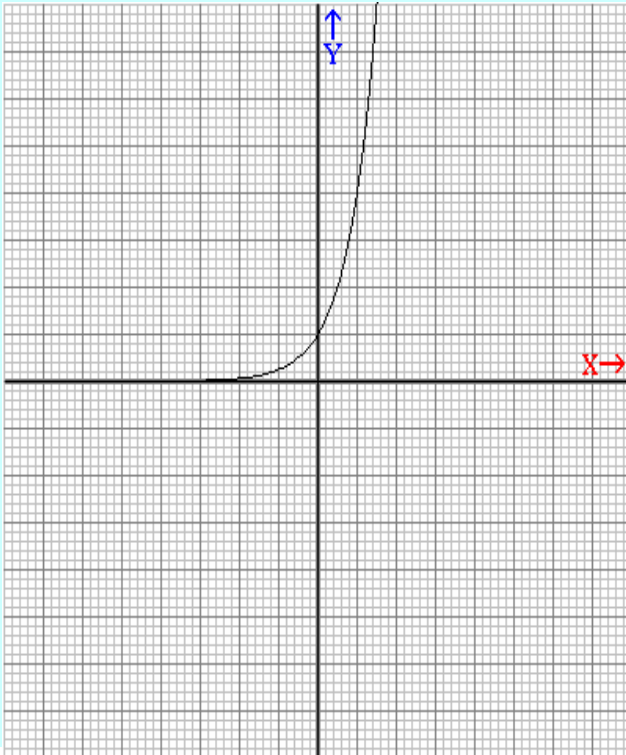
خط التقارب : المحور x

مقطع المحور : $y : (0, 1)$ تحقق من فهمك :1) مثل الدالة $y = 4^x$ بيانيا ، وحدد مجالها ومداها .الحل :

المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية

المدي : مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة

خط التقارب : المحور x

مقطع المحور : $y : (0, 1)$ 

تحويلات التمثيلات البيانية للدوال الأسية :

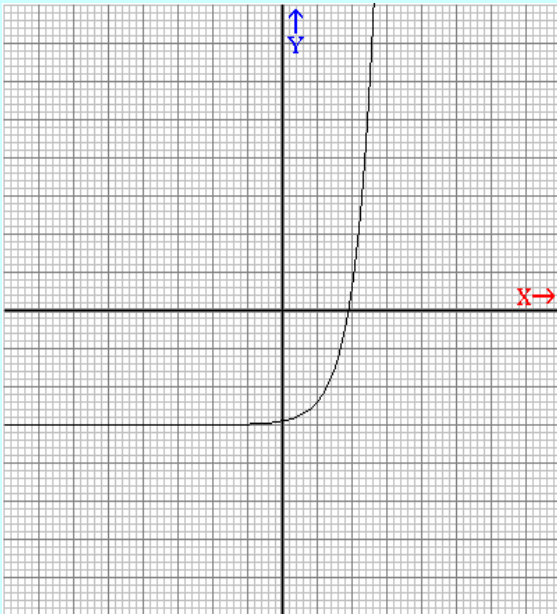
مفهوم أساسي		تحويلات التمثيلات البيانية للدوال الأسية
$f(x) = ab^{x-h} + k$		
h : إزاحة أفقية		k : إزاحة رأسية
إذا كانت h موجبة : إزاحة بمقدار h وحدة إلى اليمين .		إذا كانت k موجبة : إزاحة بمقدار k وحدة إلى الأعلى .
إذا كانت h سالبة : إزاحة بمقدار h وحدة إلى اليسار .		إذا كانت k سالبة : إزاحة بمقدار k وحدة إلى الأسفل .
a : الشكل والاتجاه		
إذا كانت $a < 0$ ، فإن التمثيل البياني ينعكس في المحور x عندما $k = 0$.		
إذا كانت $ a > 1$ ، فإن التمثيل البياني يتسع رأسيًا .		
إذا كانت $0 < a < 1$ ، فإن التمثيل البياني يضيق رأسيًا .		

تحقق من فهمك :

مثل كل دالة مما يأتي بيانيا ، وحدد مجالها ومداها .

$$y = 0 \bullet 1(6)^x - 3 \quad (2B)$$

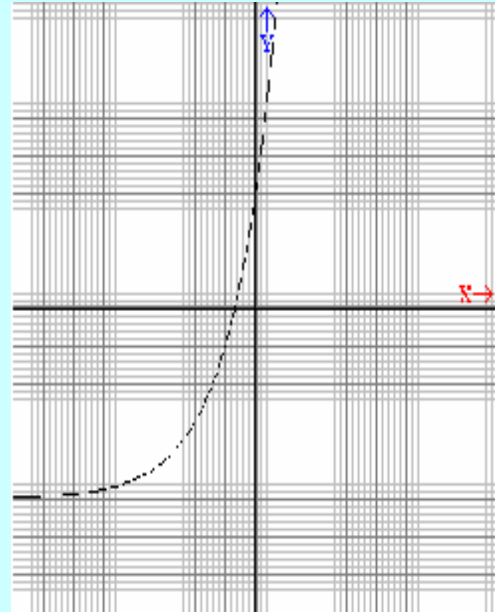
الحل :



المجال $R =$
المدي $\{ y \mid y > -3 \} =$

$$y = 2^{x+3} - 5 \quad (2A)$$

الحل :

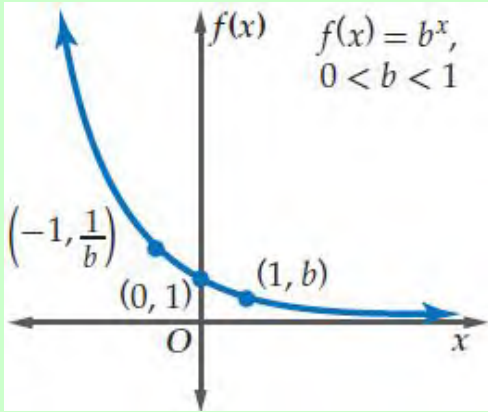


المجال $R =$
المدي $\{ y \mid y > -2 \} =$

الاضمحلال الأسّي:

الدالة الرئيسية (الأم) لدوال الاضمحلال الأسّي

مفهوم أساسي



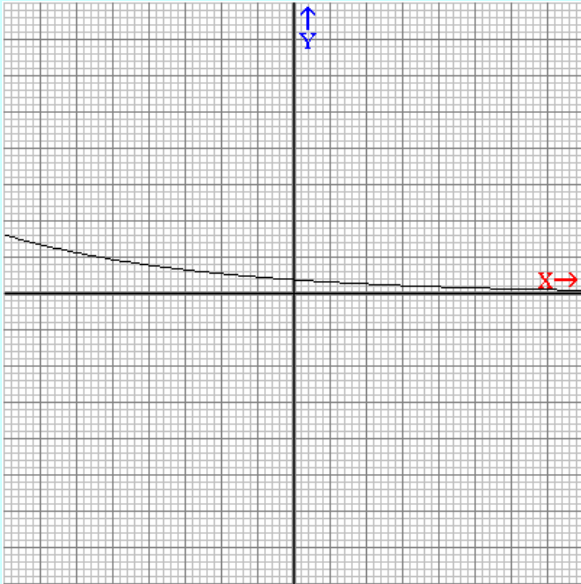
الدالة الرئيسية (الأم) : $f(x) = b^x, b < 1$
 خصائص منحنى الدالة : متصل ، متباين ، متزايد
 المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية (R)
 المدى : مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة (R^+)
 خط التقارب : المحور x
 مقطع المحور : $y : (0, 1)$

تحقق من فهمك :

مثل كل دالة مما يأتي بيانها ، وحدد مجالها ومداهما .

$$y = \frac{3}{8} \left(\frac{5}{6} \right)^{x-1} + 1 \quad (4B)$$

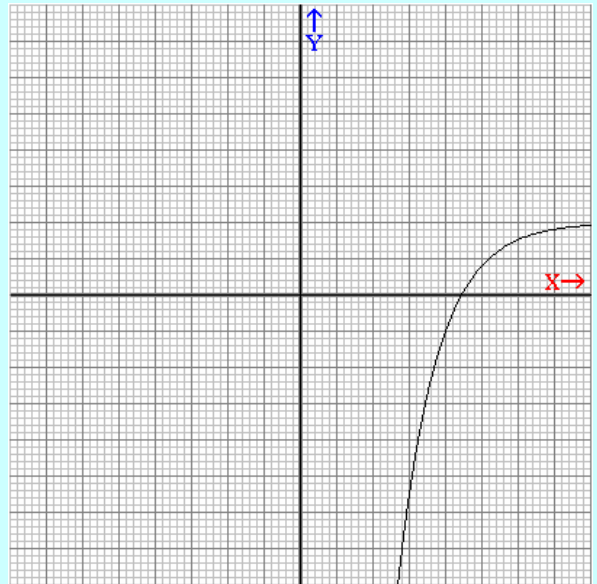
الحل :



المجال R =
 المدى $\{ y \mid y > 0 \}$

$$y = -3 \left(\frac{2}{5} \right)^{x-4} + 2 \quad (4A)$$

الحل :



المجال R =
 المدى $\{ y \mid y < 2 \}$

تحقق من فهمك :

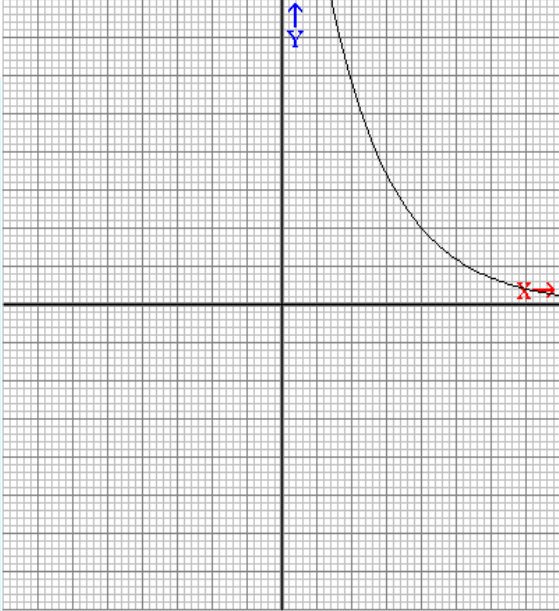
5) يحتوي كوب الشاي الأسود علي 68 mg من الكافيين . أوجد معادلة أسية تمثل الكافيين المتبقية في جسم شخص بالغ بعد شربه كوبا من الشاي الأسود ، ومثلها مستعلا الحاسبة البيانية ، ثم قدر كمية الكافيين المتبقية في جسمه بعد ساعتين من شربه الكوب .

الحل :

$$y = a(1-r)^t = 68(1-0.125)^t$$

بعد ساعتين

$$y = 68 (0.875)^2 \approx 52.06$$

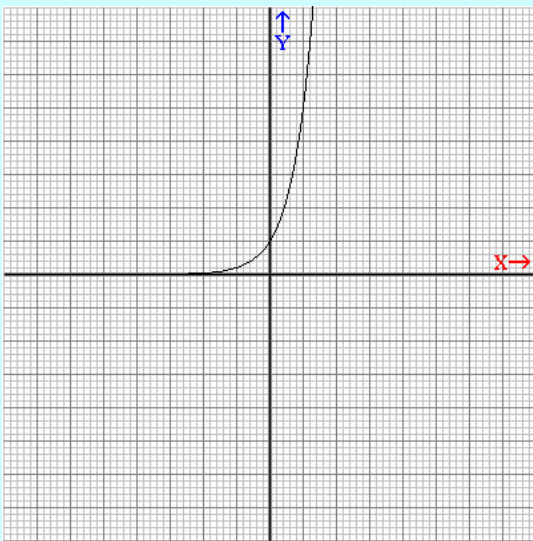


تدرب وحل المسائل :

مثل كل دالة مما يأتي بيانيا ، وحدد مجالها ومداها .

$$f(x) = 5^x \quad (2)$$

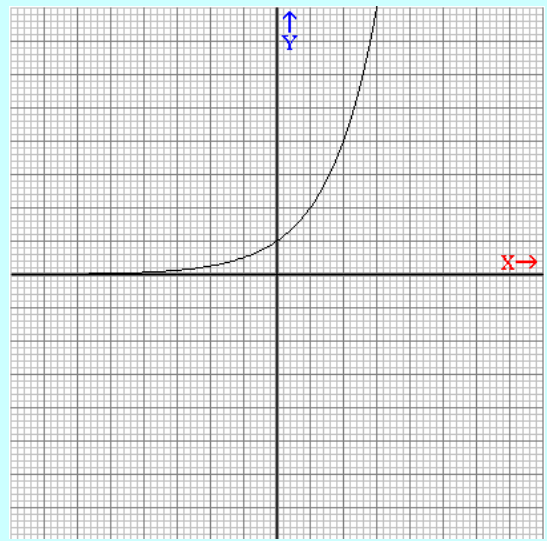
الحل :



$$R = \text{المجال} \\ \{ y \mid y > 0 \} = \text{المدى}$$

$$f(x) = 2^x \quad (1)$$

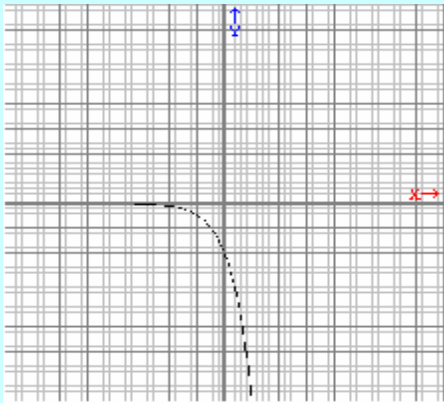
الحل :



$$R = \text{المجال} \\ \{ y \mid y > 0 \} = \text{المدى}$$

$$f(x) = -2(4^x) \quad (4)$$

الحل:

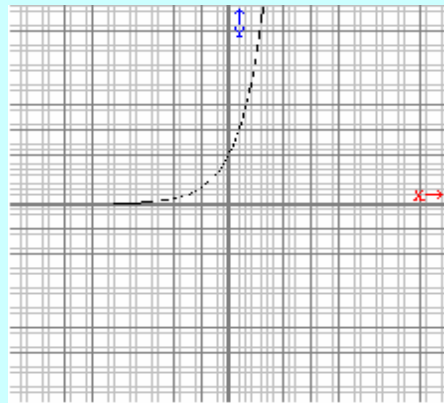


$R =$ المجال

$\{y \mid y < 0\} =$ المدى

$$f(x) = 2(3^x) \quad (3)$$

الحل:

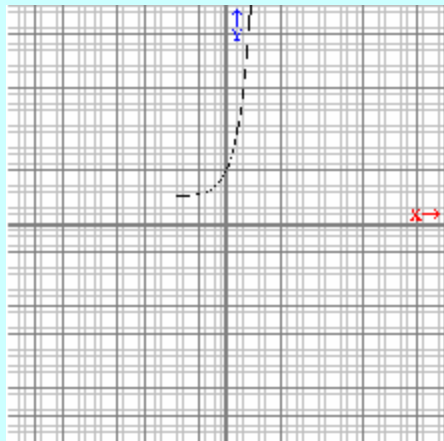


$R =$ المجال

$\{y \mid y > 0\} =$ المدى

$$f(x) = 3^{2x} + 1 \quad (6)$$

الحل:



$R =$ المجال

$\{y \mid y > 1\} =$ المدى

$$f(x) = 4^{x+1} - 5 \quad (5)$$

الحل:

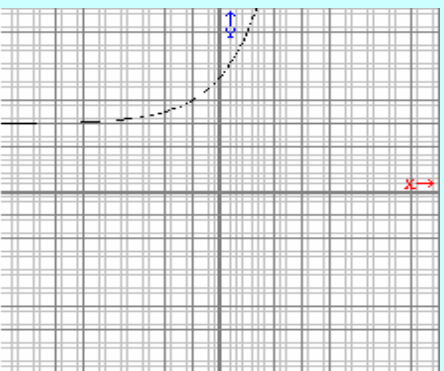


$R =$ المجال

$\{y \mid y > -5\} =$ المدى

$$f(x) = 2^{x+1} + 3 \quad (8)$$

الحل:

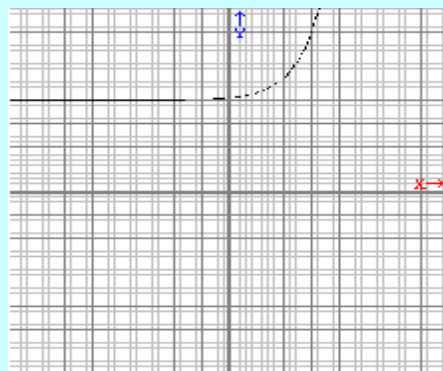


$R =$ المجال

$\{y \mid y > 3\} =$ المدى

$$f(x) = 3^{x-2} + 4 \quad (7)$$

الحل:

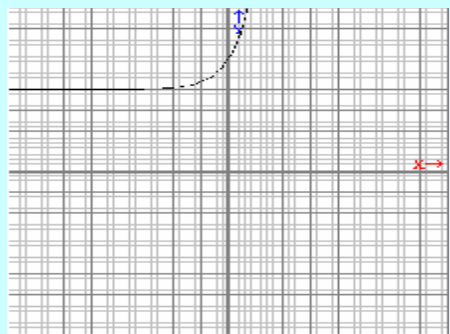


$R =$ المجال

$\{y \mid y > 4\} =$ المدى

$$f(x) = 3(2^x) + 8 \quad (10)$$

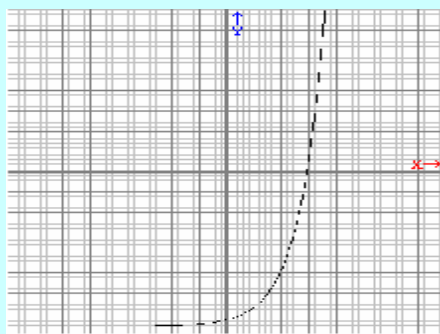
الحل:



المجال $R =$
المدى $\{y \mid y > 8\} =$

$$f(x) = 0.25(4^x) - 6 \quad (9)$$

الحل:

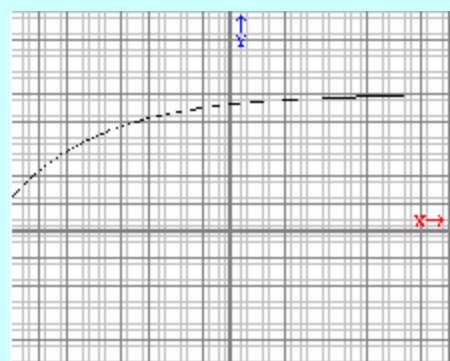


المجال $R =$
المدى $\{y \mid y > -6\} =$

مثل كل دالة مما يأتي بيانياً ، وحدد مجالها ومداهما .

$$f(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} + 5 \quad (13)$$

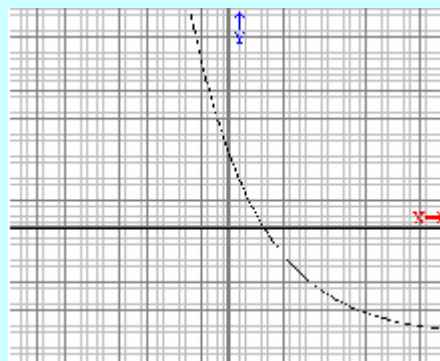
الحل:



المجال $R =$
المدى $\{y \mid y < 5\} =$

$$f(x) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{x-3} - 4 \quad (12)$$

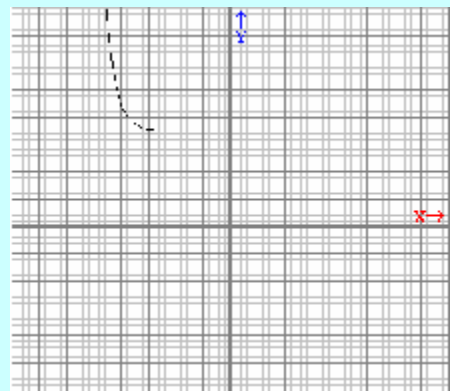
الحل:



المجال $R =$
المدى $\{y \mid y > -4\} =$

$$f(x) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^{x+6} + 7 \quad (15)$$

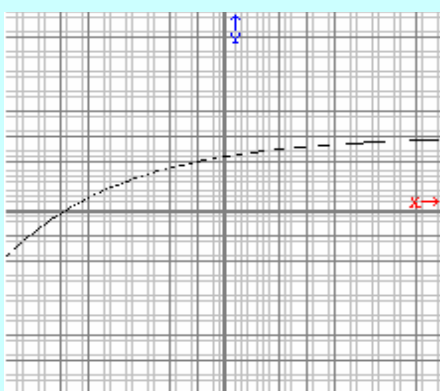
الحل:



المجال $R =$
المدى $\{y \mid y > 7\} =$

$$f(x) = -\frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^{x-4} + 3 \quad (14)$$

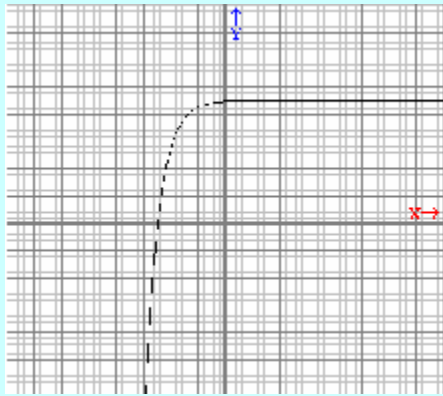
الحل:



المجال $R =$
المدى $\{y \mid y < 3\} =$

$$f(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}\right)^{x+2} + 9 \quad (17)$$

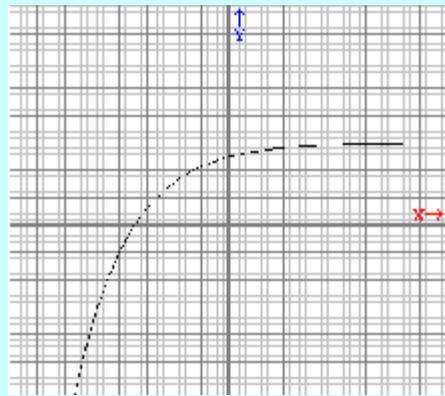
الحل:



المجال: R
المدى: $\{y \mid y < 9\}$

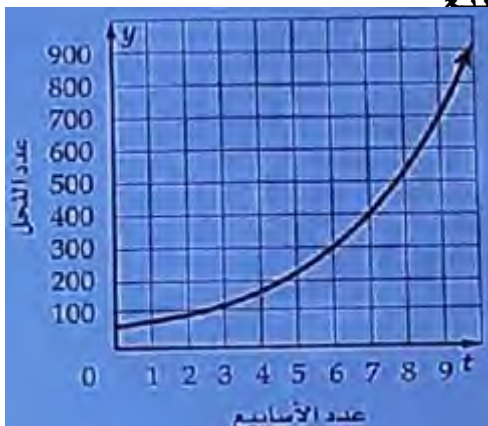
$$f(x) = -4\left(\frac{3}{5}\right)^{x+4} + 3 \quad (16)$$

الحل:



المجال: R
المدى: $\{y \mid y < 3\}$

(19) **علوم:** يتكاثر نحل في خلية فيزداد العدد بمعدل 30 % كل أسبوع ، إذا كان عدد النحل في البداية 65 نحلة فأوجد دالة أسية تمثل عدد النحل بعد t أسبوع، ومثلها بيانيا باستعمال الحاسبة البيانية ، ثم قدر عدد النحل بعد 10 أسابيع

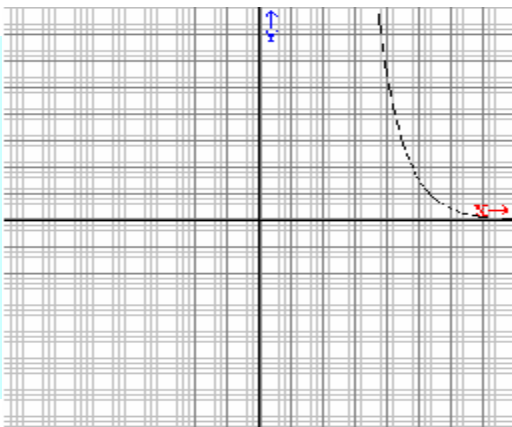


الحل: $y = a(1+r)^t = 65(1+0.3)^t$

بعد 10 أسابيع

$$y = 65(1+0.3)^{10} = 65(1.3)^{10} \approx 896$$

(20) **كرة سلة:** تناقص عدد الحضور لمباريات كرة قدم بمعدل 5 % لكل مباراة بعد خسارته في أحد المواسم ، أوجد دالة أسية تمثل عدد الحضور (y) في المباراة (t) ، إذا كان عددهم في المباراة الأولى 23500 ، ومثلها بيانيا باستعمال الحاسبة البيانية ، ثم قدر عدد الحضور في المباراة 15 .



الحل: $y = a(1-r)^t = 23500(1-0.05)^t$

بعد 15 مباراة

$$y = 23500(1-0.05)^{15} \\ = 23500(0.95)^{15} \approx 10887$$

حل المعادلات الأسية :

خاصية المساواة للدوال الأسية

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي : إذا كان $b > 0$, $b \neq 1$, فإن $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.مثال : إذا كان $3^x = 3^5$, فإن $x = 5$, وإذا كان $x = 5$, فإن $3^x = 3^5$.تحقق من فهمك :

حل كل معادلة مما يأتي :

$$5^{5x} = 125^{x+2} \quad (1B)$$

$$5^{5x} = 125^{x+2} \rightarrow 5^{5x} = (5^3)^{x+2} \quad \text{الحل:}$$

$$5^{5x} = 5^{3x+6} \rightarrow 5x = 3x+6$$

$$5x - 3x = 6 \rightarrow 2x = 6 \rightarrow x = 3$$

$$4^{2n-1} = 64 \quad (1A)$$

$$4^{2n-1} = 4^3 \rightarrow 2n-1 = 3 \quad \text{الحل:}$$

$$2n = 3 + 1 \rightarrow 2n = 4 \rightarrow n = 2$$

الربح المركب :

الربح المركب

مفهوم أساسي

يمكنك حساب الربح المركب باستعمال الصيغة $A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ حيث A المبلغ الكلي بعد t سنه ، P المبلغ الأصلي الذي تم استثماره أو رأس المال ، r معدل الربح السنوي المتوقع ، n عدد مرات إضافة الأرباح إلى رأس المال في السنة .تحقق من فهمك :

(3) استثمر علي مبلغ 100000 ريال في مشروع تجاري متوقعا ربعا سنويا نسبته 12 % ، بحيث تضاف الأرباح إلى رأس المال مرتين شهريا . كم المبلغ الكلي المتوقع بعد 5 سنوات إلى أقرب منزلتين عشريتين .

الحل: $p = 100000$, $r = 0.12$, $n = 24$, $t = 5$

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = 100000 \left(1 + \frac{0.12}{24}\right)^{120} \approx 181939.67$$

حل المتباينات الأسية : المتباينة الأسية هي متباينة تتضمن عبارة أسية أو أكثر .

خاصية التباين للدوال الأسية

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي : إذا كان $b > 1$, فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$.

و $b^x < b^y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$

مثال : إذا كان $2^x > 2^6$, فإن $x > 6$, وإذا كان $x > 6$, فإن $2^x > 2^6$.

تحقق من فهمك :

حل المتباينات الآتية :

$$2^{x+2} > \frac{1}{32} \quad (4B)$$

$$2^{x+2} > \frac{1}{2^5} \rightarrow 2^{x+2} > 2^{-5} \quad \text{الحل:}$$

$$x + 2 > -5 \rightarrow x > -7$$

$$3^{2x-1} \geq \frac{1}{243} \quad (4A)$$

$$3^{2x-1} \geq \frac{1}{3^5} \rightarrow 3^{2x-1} \geq 3^{-5} \quad \text{الحل:}$$

$$2x - 1 \geq -5 \rightarrow 2x \geq -4 \rightarrow x \geq -2$$

تدرب وحل المسائل :

حل كل معادلة مما يأتي :

$$5^{x-6} = 125 \quad (2)$$

$$5^{x-6} = 5^3 \rightarrow x - 6 = 3 \quad \text{الحل:}$$

$$x = 3 + 6 \rightarrow x = 9$$

$$8^{4x+2} = 64 \quad (1)$$

$$8^{4x+2} = 8^2 \rightarrow 4x + 2 = 2 \quad \text{الحل:}$$

$$4x = 2 - 2 \rightarrow 4x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$16^{2y-3} = 4^{y+1} \quad (4)$$

$$(4^2)^{2y-3} = 4^{y+1} \rightarrow 4^{4y-6} = 4^{y+1} \quad \text{الحل:}$$

$$4y - 6 = y + 1 \rightarrow 3y = 7 \rightarrow y = \frac{7}{3}$$

$$3^{5x} = 27^{2x-4} \quad (3)$$

$$3^{5x} = (3^3)^{2x-4} \rightarrow 3^{5x} = 3^{6x-12} \quad \text{الحل:}$$

$$5x = 6x - 12 \rightarrow x = 12$$

$$49^{x+5} = 7^{8x-6} \quad (6)$$

$$(7^2)^{x+5} = 7^{8x-6} \rightarrow 7^{2x+10} = 7^{8x-6} \quad \text{الحل:}$$

$$2x+10 = 8x-6 \rightarrow 6x = 16$$

$$\rightarrow x = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

$$2^{6x} = 32^{x-2} \quad (5)$$

$$2^{6x} = (2^5)^{x-2} \rightarrow 2^{6x} = 2^{5x-10} \quad \text{الحل:}$$

$$6x = 5x - 10 \rightarrow x = -10$$

$256^{b+2} = 4^{2-2b} \quad (8)$ $(4^4)^{b+2} = 4^{2-2b} \Rightarrow 4^{4b+8} = 4^{2-2b} \quad \text{الحل:}$ $4b + 8 = 2 - 2b \rightarrow 6b = -6 \rightarrow b = -1$	$81^{a+2} = 3^{3a+1} \quad (7)$ $(3^4)^{a+2} = 3^{3a+1} \rightarrow 3^{4a+8} = 3^{3a+1} \quad \text{الحل:}$ $4a + 8 = 3a + 1 \rightarrow a = -7$
$8^{2y+4} = 16^{y+1} \quad (10)$ $(2^3)^{2y+4} = (2^4)^{y+1} \rightarrow 2^{6y+12} = 2^{4y+4} \quad \text{الحل:}$ $6y + 12 = 4y + 4 \rightarrow 2y = -8 \rightarrow y = -4$	$9^{3c+1} = 27^{3c-1} \quad (9)$ $(3^2)^{3c+1} = (3^3)^{3c-1} \rightarrow 3^{6c+2} = 3^{9c-3} \quad \text{الحل:}$ $6c + 2 = 9c - 3 \rightarrow 5 = 3c \rightarrow c = \frac{5}{3}$

.....
 (13) استثمار حسن مبلغ 70000 ريال متوقعا ربعا سنويا نسبته % 3 • 4 ، بحيث تضاف الأرباح إلى رأس المال كل شهر . كم المبلغ الكلي المتوقع بعد 7 سنوات إلى أقرب منزلتين عشريتين .

الحل: $p = 70000 , r = 0 \cdot 043 , n = 12 , t = 7$

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = 70000 \left(1 + \frac{0 \cdot 043}{12}\right)^{84} \approx 94533 \cdot 78$$

.....
 (14) استثمار ماجد مبلغ 50000 ريال متوقعا ربعا سنويا نسبته % 25 • 2 ، بحيث تضاف الأرباح إلى رأس المال مرتين شهريا . كم المبلغ الكلي المتوقع بعد 6 سنوات إلى أقرب منزلتين عشريتين .

الحل: $p = 50000 , r = 0 \cdot 0225 , n = 24 , t = 6$

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = 50000 \left(1 + \frac{0 \cdot 0225}{24}\right)^{144} \approx 57223 \cdot 22$$

.....
 حل كل متباينة مما يأتي :

$2 \cdot 5^{y-3} \leq \left(\frac{1}{125}\right)^{y+3} \quad (16)$ $(5^2)^{y-3} \leq (5^{-3})^{y+3} \quad \text{الحل:}$ $5^{2y-6} \leq 5^{-3y-9}$ $2y - 6 \leq -3y - 9 \rightarrow y \leq \frac{-3}{5}$	$4^{2x+6} \leq 6 \cdot 4^{2x-4} \quad (15)$ $4^{2x+6} \leq (4^3)^{2x-4} \quad \text{الحل:}$ $4^{2x+6} \leq 4^{6x-12}$ $2x + 6 \leq 6x - 12 \rightarrow 18 \leq 4x$ $18 \leq 4x \geq 18 \rightarrow x \geq 4 \cdot 5$
---	--

$10^{5b+2} > 1000(18)$ $10^{5b+2} > 10^3$ الحل: $5b + 2 > 3 \rightarrow 5b > 1 \rightarrow b > \frac{1}{5}$	$625 \geq 5^{a+8} (17)$ $5^4 \geq 5^{a+8}$ الحل: $4 \geq a + 8 \rightarrow -4 \geq a \rightarrow a \leq -4$
$(\frac{1}{9})^{3t+5} \geq (\frac{1}{243})^{t-6} (20)$ $(3^{-2})^{3t+5} \geq (3^{-5})^{t-6}$ الحل: $3^{-6t-10} \geq 3^{-5t+30}$ $-6t - 10 \geq -5t + 30 \rightarrow -t \geq 40$ $t \leq -40$	$(\frac{1}{64})^{c-2} < 3 \cdot 2^{2c} (19)$ $(2^{-6})^{c-2} < (2^5)^{2c}$ الحل: $2^{-6c+12} < 2^{10c}$ $-6c + 12 < 10c \rightarrow 12 < 16c$ $16c \geq 12 \rightarrow c > 0.75$

.....

اكتب دالة أسية علي الصورة $y = ab^x$ للتمثيل البياني المار بكل زوج من النقاط فيما يأتي :

$(4, 81), (0, 256) (22)$ $y = ab^x$ الحل: بالتعويض بالنقطة $(0, 256)$ نجد أن $256 = ab^0 \rightarrow a = 256$ $y = 256b^x$ وبالتعويض بالنقطة $(4, 81)$ نجد أن $81 = 256b^4 \rightarrow b^4 = \frac{81}{256}$ $b^4 = \frac{81}{256} = (\frac{3}{4})^4 \rightarrow b = 0.75$ $y = 256(0.75)^x$	$(3, 100), (0, 6 \cdot 4) (21)$ $y = ab^x$ الحل: بالتعويض بالنقطة $(0, 6 \cdot 4)$ نجد أن $6 \cdot 4 = ab^0 \rightarrow a = 6 \cdot 4$ $y = 6 \cdot 4 b^x$ وبالتعويض بالنقطة $(3, 100)$ نجد أن $100 = 6 \cdot 4 b^3 \rightarrow b^3 = \frac{100}{6 \cdot 4}$ $b^3 = \frac{125}{8} = (\frac{5}{2})^3 \rightarrow b = 2.5$ $y = 6 \cdot 4(2.5)^x$
$(4, 21609), (0, 144) (24)$ $y = ab^x$ الحل: بالتعويض بالنقطة $(0, 144)$ نجد أن	$(5, 371293), (0, 128) (23)$ $y = ab^x$ الحل: بالتعويض بالنقطة $(0, 128)$ نجد أن

$$144 = \alpha b^0 \rightarrow \alpha = 144$$

$$y = 144 b^x$$

وبالتعويض بالنقطة (4 , 21609) نجد أن

$$21609 = 144b^4 \rightarrow b^4 = \frac{21609}{144}$$

$$b^4 = \frac{2401}{16} = \left(\frac{7}{2}\right)^4 \rightarrow b = 3 \cdot 5$$

$$y = 144(3 \cdot 5)^x$$

$$128 = \alpha b^0 \rightarrow \alpha = 128$$

$$y = 128 b^x$$

وبالتعويض بالنقطة (5 , 371293) نجد أن

$$371293 = 128b^5 \rightarrow b^5 = \frac{371293}{128}$$

$$b = \sqrt[5]{\frac{371293}{128}} \approx 4 \cdot 926$$

$$y = 128(4 \cdot 926)^x$$

(25) **علوم:** وضع كوب من الشاي درجة حرارته 90°C في وسط درجة حرارته ثابتة وتساوي 20°C فتناقصت درجة حرارة الشاي ، ويمكن تمثيل درجة حرارة الشاي بعد t

$$\text{دقيقة بالدالة : } y(t) = 20 + 70(1 \cdot 071)^{-t}$$

(a) أوجد درجة حرارة الشاي بعد 15 دقيقة .

(b) أوجد درجة حرارة الشاي بعد 30 دقيقة .

(c) إذا كانت درجة حرارة الشاي المناسبة لشرب الشاي هي 60°C ، فهل ستكون درجة حرارة الشاي مساوية لها أم أقل منها بعد 10 دقائق ؟

$$\text{(الحل: a)} \quad y(15) = 20 + 70(1 \cdot 071)^{-15} \approx 45 \cdot 02$$

$$\text{(b)} \quad y(30) = 20 + 70(1 \cdot 071)^{-30} \approx 28 \cdot 94$$

$$\text{(c)} \quad y(10) = 20 + 70(1 \cdot 071)^{-10} \approx 55 \cdot 25 \quad (\text{أقل})$$

(26) **أشجار:** يتناسب قطر قاعدة جذع شجرة بالسنتيمترات طرديا مع ارتفاعها بالأمتار مرفوعا للأس $\frac{3}{2}$ ، إذا بلغ ارتفاع شجرة 6m ، وقطر قاعدة جذعها $19 \cdot 1 \text{ cm}$. أكتب معادلة القطر d لقاعدة جذع الشجرة إذا كان ارتفاعها $h \text{ m}$.

$$\text{(الحل:)} \quad d = \alpha (h)^{\frac{3}{2}} \text{ ، وبالتعويض عن } d = 19 \cdot 1 \text{ cm ، } h = 6 \text{ m} = 600 \text{ cm}$$

$$19 \cdot 1 = \alpha (600)^{\frac{3}{2}} \rightarrow \alpha = \frac{19 \cdot 1}{(600)^{\frac{3}{2}}} = 19 \cdot 1 (600)^{-\frac{3}{2}} \rightarrow d = 19 \cdot 1 (600)^{-\frac{3}{2}} (h)^{\frac{3}{2}}$$

حل كل معادلة مما يأتي :

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-5} = 25^{3x+2} \quad (28)$$

$$((5^{-1}))^{x-5} = ((5^2))^{3x+2} \quad \text{الحل:}$$

$$5^{-x+5} = 5^{6x+4}$$

$$-x + 5 = 6x + 4 \rightarrow 7x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{7}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+1} = 8^{2x+1} \quad (27)$$

$$(2^{-1})^{4x+1} = (2^3)^{2x+1} \quad \text{الحل:}$$

$$2^{-4x-1} = 2^{6x+3}$$

$$-4x - 1 = 6x + 3 \rightarrow 10x = -4$$

$$x = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$$

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{3x+4} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2x+4} \quad (30)$$

$$((2^{-3}))^{3x+4} = ((2^{-2}))^{-2x+4} \quad \text{الحل:}$$

$$2^{-9x-12} = 2^{4x-8}$$

$$-9x - 12 = 4x - 8 \rightarrow 13x = -4$$

$$x = -\frac{4}{13}$$

$$216 = \left(\frac{1}{6}\right)^{x+3} \quad (29)$$

$$6^3 = (6^{-1})^{x+3} \quad \text{الحل:}$$

$$6^3 = 6^{-x-3}$$

$$3 = -x - 3 \rightarrow x = -3 - 3 \rightarrow x = -6$$

$$\left(\frac{25}{81}\right)^{2x+1} = \left(\frac{729}{125}\right)^{-3x+1} \quad (32)$$

$$\left(\left(\frac{5}{9}\right)^2\right)^{2x+1} = \left(\left(\frac{5}{9}\right)^{-3}\right)^{-3x+1} \quad \text{الحل:}$$

$$\left(\frac{5}{9}\right)^{4x+2} = \left(\frac{5}{9}\right)^{9x-3}$$

$$4x + 2 = 9x - 3 \rightarrow 5x = 5$$

$$x = 1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{5x+1} = \left(\frac{27}{8}\right)^{x-4} \quad (31)$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{5x+1} = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}\right)^{x-4} \quad \text{الحل:}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{5x+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3x+12}$$

$$5x + 1 = -3x + 12 \rightarrow 8x = 11$$

$$x = \frac{11}{8}$$

.....
(37) **تحذ:** حل المعادلة الآتية : $16^{18} + 16^{18} + 16^{18} + 16^{18} + 16^{18} = 4^x$

$$5(16)^{18} = 4^x \rightarrow \log 5(16)^{18} = \log 4^x \quad \text{الحل:}$$

$$\log 5 + 18 \log 16 = x \log 4 \rightarrow x = \frac{\log 5 + 18 \log 16}{\log 4} \approx 37.161$$

.....

(39) برهان: أثبت أن: $2 \cdot 7^{2x} \cdot 8 \cdot 1^{x+1} = 3^{2x+2} \cdot 9^{4x+1}$

$$\text{اليمين} = 3^{2x+2} \cdot (3^2)^{4x+1} = 3^{2x+2} \cdot 3^{8x+2} = 3^{10x+4} \quad \text{الحل:}$$

$$\text{اليسار} = (3^3)^{2x} \cdot (3^4)^{x+1} = 3^{6x} \cdot 3^{4x+4} = 3^{10x+4}$$

.....

(54) ماقيمة x التي تحقق المعادلة: $7^{x-1} + 7 = 8$

2(J 0(G 1 (H - 1 (F

الحل: الإجابة H $\rightarrow x = 1 \rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow 7^{x-1} = 7^0 \rightarrow 7^{x-1} = 8 - 7$

.....

(55) إذا كانت $f(x) = 5x$ فما قيمة $f[f(-1)]$ ؟

25 (D 5(C - 5 (B - 25 (A

الحل: الإجابة A $\rightarrow f[f(-1)] = f(-5) = -25$

.....

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية 2 - 3

تعريف:

اللوغاريتم للأساس b

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: إذا كان b, x عددين موجبين، حيث $b \neq 1$ ، يرمز للوغاريتم x للأساس b بالرمز $\log_b x$ ، ويعرف على أنه الأس y الذي يجعل المعادلة $b^y = x$ صحيحة.

الرموز: افرض أن $b > 0, b \neq 1$ فإن لكل $x > 0$ يوجد عدد y بحيث

$$b^y = x \leftrightarrow \log_b x = y$$

مثال: $\log_3 27 = y \leftrightarrow 3^y = 27$

.....

تحقق من فهمك :

أكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي علي الصورة الأسية :

(1A) $\log_4 16 = 2$ (1B) $\log_3 729 = 6$ (2) $16 = 4^2$ (3) $729 = 3^6$

أكتب كل معادلة أسية مما يأتي علي الصورة اللوغاريتمية :

(2A) $4^3 = 64$ (2B) $125^{\frac{1}{3}} = 5$ (3) $\log_4 64 = 3$ (4) $\log_{125} 5 = \frac{1}{3}$

تحقق من فهمك :

أكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي علي الصورة الأسية :

(3A) $\log_3 81$ (3B) $\log_{\frac{1}{2}} 256$ (4) (-8)

الخصائص الأساسية للوغاريتمات :

مفهوم أساسي		الخصائص الأساسية للوغاريتمات	
إذا كان $b > 0$, $b \neq 1$, x عدد حقيقي ، فإن الخصائص الآتية صحيحة :			
الخاصية		التبرير	
$\log_b 1 = 0$		$b^0 = 1$	
$\log_b b = 1$		$b^1 = b$	
$\log_b b^x = x$		$b^x = b^x$	
$b^{\log_b x} = x$, $x > 0$		$\log_b x = \log_b x$	

تحقق من فهمك :

أوجد قيمة كل مما يأتي :

(4A) $\log_9 81$ (2) (4B) $3^{\log_3 1}$ (1)

تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانياً :

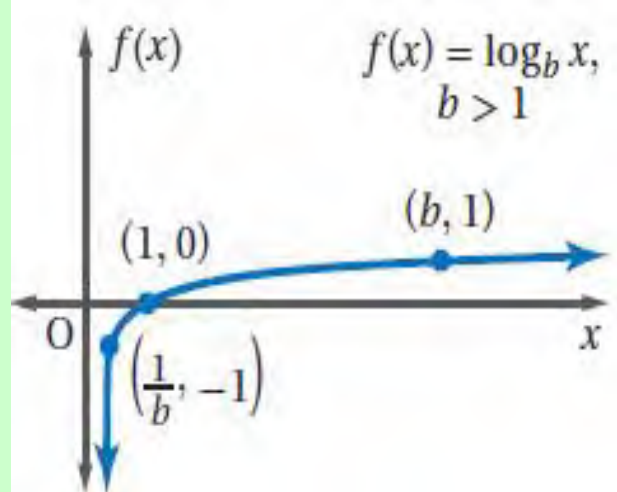
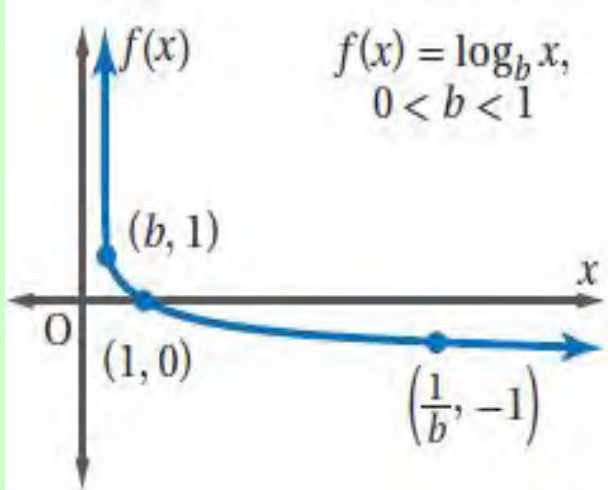
تسمى الدالة $f(x) = \log_b x$ ، حيث $b \neq 1$ دالة لوغاريتمية. والتمثيل البياني للدالة $f(x) = \log_b x$ هو التمثيل البياني للدالة الرئيسية (الأم) للدوال اللوغاريتمية .

الدالة الرئيسية (الأم) للدوال اللوغاريتمية

مفهوم أساسي

خصائص منحنى الدالة : متصل ، متباين
المدى : مجموعة الأعداد الحقيقية (R)
مقطع المحور x : النقطة (1 , 0)

الدالة الرئيسية (الأم) : $f(x) = \log_b x$
المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة
خط التقارب : المحور y

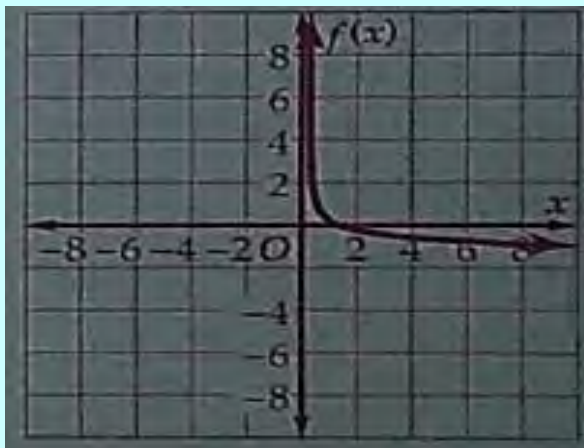


تحقق من فهمك :

مثل كل دالة مما يأتي بيانياً :

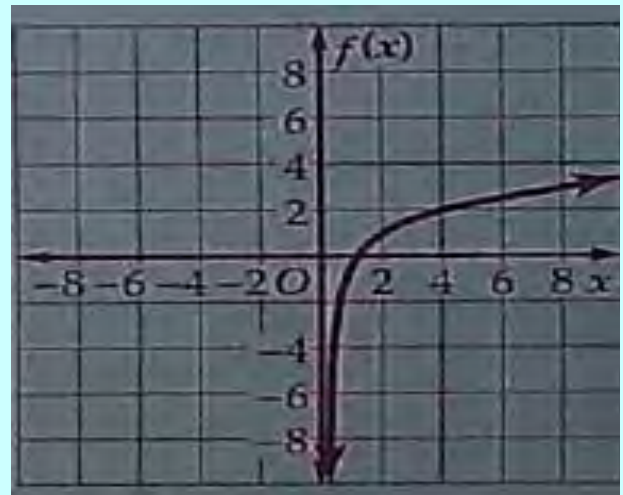
$$f(x) = \log_{\frac{1}{8}} x \quad (5B)$$

الحل: نستعمل النقاط الآتية لرسم الدالة :
(8 , -1) ، (1 , 0) ، ($\frac{1}{8}$, 1)



$$f(x) = \log_2 x \quad (5A)$$

الحل: نستعمل النقاط الآتية لرسم الدالة :
($\frac{1}{2}$, -1) ، (1 , 0) ، (2 , 1)



التحويلات لتمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانياً :

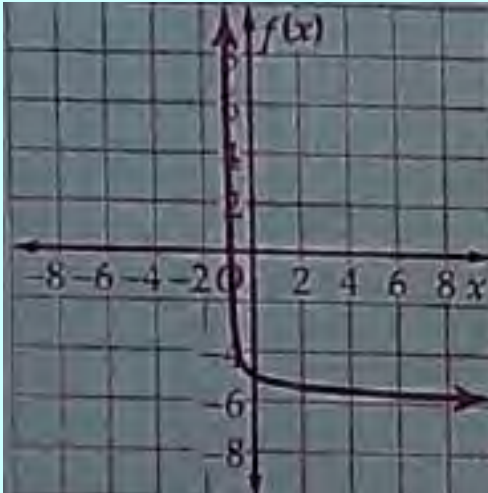
مفهوم أساسي		تحويلات التمثيلات البيانية للدوال اللوغاريتمية
$f(x) = \log_b(x - h) + k$		
h : إزاحة أفقية	k : إزاحة رأسية	
إذا كانت h موجبة : إزاحة بمقدار h وحدة إلى اليمين .	إذا كانت k موجبة : إزاحة بمقدار k وحدة إلى الأعلى .	
إذا كانت h سالبة : إزاحة بمقدار h وحدة إلى اليسار .	إذا كانت k سالبة : إزاحة بمقدار k وحدة إلى الأسفل .	
a : الشكل والاتجاه		
إذا كانت $a < 0$ ، فإن التمثيل البياني ينعكس في المحور x عندما $k = 0$.		
إذا كانت $ a > 1$ ، فإن التمثيل البياني يتسع رأسياً .		
إذا كانت $0 < a < 1$ ، فإن التمثيل البياني يضيق رأسياً .		

تحقق من فهمك :

مثل كل دالة مما يأتي بيانياً :

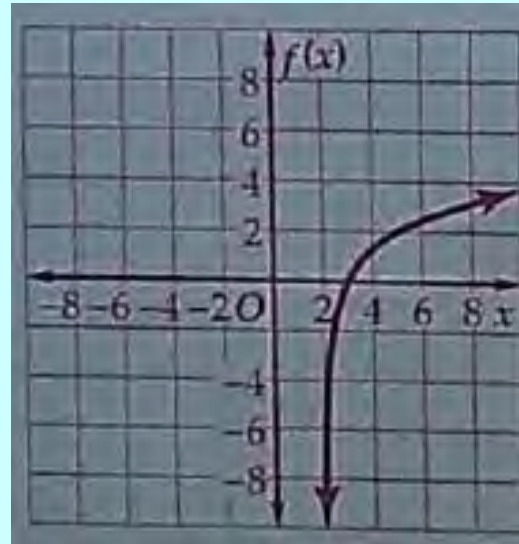
$$f(x) = \frac{1}{4} \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) - 5 \quad (6B)$$

الحل:



$$f(x) = 2 \log_3(x - 2) \quad (6A)$$

الحل:



تحقق من فهمك :

(7) أوجد معادلة المعكوس الدالة : $y = 0 \cdot 5^x$

$$x = (0 \cdot 5)^y \rightarrow y = \log_{0.5} x \quad \text{الحل:}$$

تدرب وحل المسائل :

اكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي علي الصورة الأسية :

$\log_5 625 = 4$ (2) $5^4 = 625$ <u>الحل :</u>	$\log_8 512 = 3$ (1) $8^3 = 512$ <u>الحل :</u>
$\log_7 343 = 3$ (4) $7^3 = 343$ <u>الحل :</u>	$\log_2 16 = 4$ (3) $2^4 = 16$ <u>الحل :</u>
$\log_3 \frac{1}{27} = -3$ (6) $3^{-3} = \frac{1}{27}$ <u>الحل :</u>	$\log_9 \frac{1}{81} = -2$ (5) $9^{-2} = \frac{1}{81}$ <u>الحل :</u>
$\log_9 1 = 0$ (8) $9^0 = 1$ <u>الحل :</u>	$\log_{12} 144 = 2$ (7) $(12)^2 = 144$ <u>الحل :</u>

.....

اكتب كل معادلة أسية مما يأتي علي الصورة اللوغاريتمية :

$16^{\frac{3}{4}} = 8$ (10) $\log_{16} 8 = \frac{3}{4}$ <u>الحل :</u>	$11^3 = 1331$ (9) $\log_{11} 1331 = 3$ <u>الحل :</u>
$6^{-3} = \frac{1}{216}$ (12) $\log_6 \frac{1}{216} = -3$ <u>الحل :</u>	$9^{-1} = \frac{1}{9}$ (11) $\log_9 \frac{1}{9} = -1$ <u>الحل :</u>
$4^6 = 4096$ (14) $\log_4 4096 = 6$ <u>الحل :</u>	$2^8 = 256$ (13) $\log_2 256 = 8$ <u>الحل :</u>
$25^{\frac{3}{2}} = 125$ (16) $\log_{25} 125 = \frac{3}{2}$ <u>الحل :</u>	$27^{\frac{2}{3}} = 9$ (15) $\log_{27} 9 = \frac{2}{3}$ <u>الحل :</u>

أوجد قيمة كل مما يأتي :

$\log_2 \frac{1}{128} \quad (18)$ <u>الحل:</u> نفرض أن $x = \log_2 \frac{1}{128}$ $2^x = \frac{1}{128} = 2^{-7} \rightarrow x = -7$	$\log_{13} 169 \quad (17)$ <u>الحل:</u> نفرض أن $x = \log_{13} 169$ $13^x = 169 = 13^2 \rightarrow x = 2$
$\log_4 1 \quad (20)$ <u>الحل:</u> نفرض أن $x = \log_4 1$ $4^x = 1 = 4^0 \rightarrow x = 0$	$\log_6 1 \quad (19)$ <u>الحل:</u> نفرض أن $x = \log_6 1$ $6^x = 1 = 6^0 \rightarrow x = 0$
$\log_{10} 0.01 \quad (22)$ <u>الحل:</u> نفرض أن $x = \log_{10} 0.01$ $10^x = 0.01 = 10^{-2} \rightarrow x = -2$	$\log_{10} 10 \quad (21)$ <u>الحل:</u> نفرض أن $x = \log_{10} 10$ $10^x = 10 \rightarrow x = 1$
$\log_4 \frac{1}{64} \quad (24)$ <u>الحل:</u> نفرض أن $x = \log_4 \frac{1}{64}$ $4^x = \frac{1}{64} = 4^{-3} \rightarrow x = -3$	$\log_3 \frac{1}{9} \quad (23)$ <u>الحل:</u> نفرض أن $x = \log_3 \frac{1}{9}$ $3^x = \frac{1}{9} = 3^{-2} \rightarrow x = -2$
$\log_{27} 3 \quad (26)$ <u>الحل:</u> نفرض أن $x = \log_{27} 3$ $27^x = 3 \rightarrow 3^{3x} = 3$ $3x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{3}$	$\log_6 216 \quad (25)$ <u>الحل:</u> نفرض أن $x = \log_6 216$ $6^x = 216 = 6^3 \rightarrow x = 3$
$\log_{121} 11 \quad (28)$ <u>الحل:</u> نفرض أن $x = \log_{121} 11$	$\log_{32} 2 \quad (27)$ <u>الحل:</u> نفرض أن $x = \log_{32} 2$

$$121^x = 11 \rightarrow 11^{2x} = 11$$

$$2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$32^x = 2 \rightarrow 2^{5x} = 2$$

$$5x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{5}$$

$$\log_{\frac{1}{8}} 512 \quad (30)$$

الحل: نفرض أن $x = \log_{\frac{1}{8}} 512$

$$\left(\frac{1}{8}\right)^x = 8^3 \rightarrow 8^{-x} = 8^3$$

$$-x = 3 \rightarrow x = -3$$

$$\log_{\frac{1}{5}} 3125 \quad (29)$$

الحل: نفرض أن $x = \log_{\frac{1}{5}} 3125$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x = 5^5 \rightarrow 5^{-x} = 5^5 \rightarrow x = -5$$

$$\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{216} \quad (31)$$

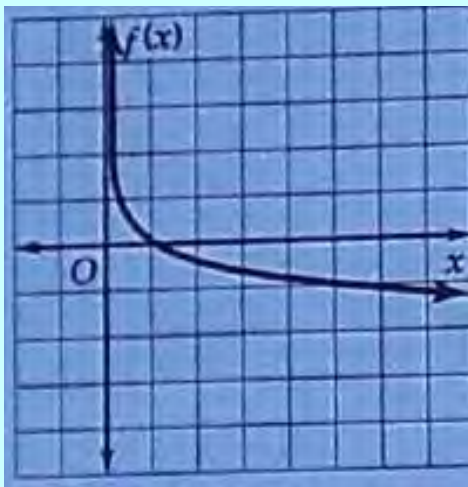
الحل: نفرض أن $x = \log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{216}$

$$\left(\frac{1}{6}\right)^x = \frac{1}{216} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \rightarrow x = 3$$

مثل كل دالة مما يأتي بيانها :

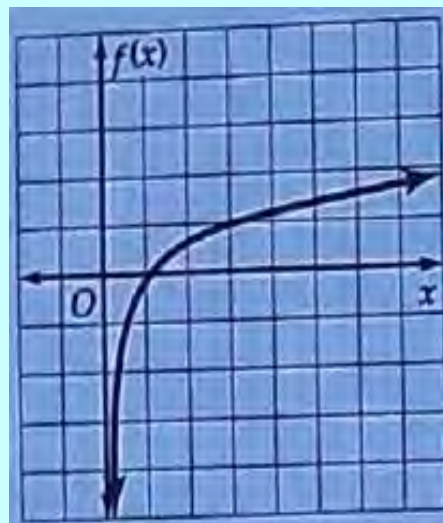
$$f(x) = \log_{\frac{1}{6}} x \quad (33)$$

الحل:



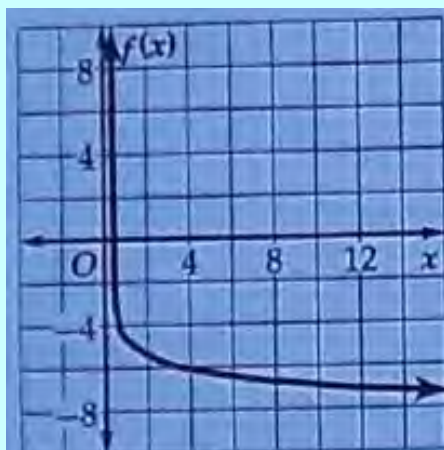
$$f(x) = \log_3 x \quad (32)$$

الحل:



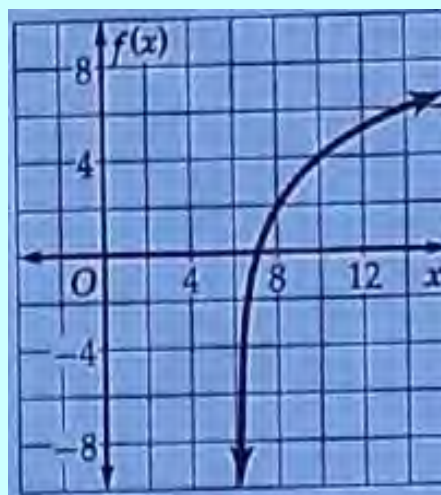
$$f(x) = 2\log_{\frac{1}{10}} x - 5 \quad (35)$$

الحل:



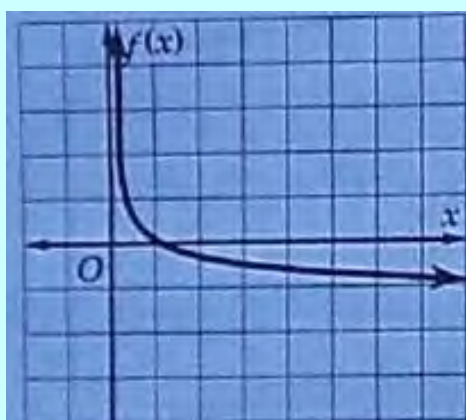
$$f(x) = 4\log_4(x - 6) \quad (34)$$

الحل:



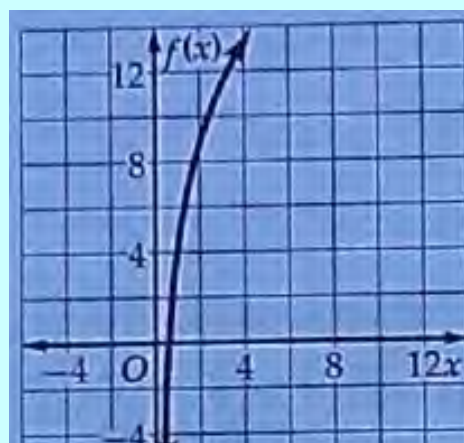
$$f(x) = \log_{\frac{1}{9}} x \quad (37)$$

الحل:



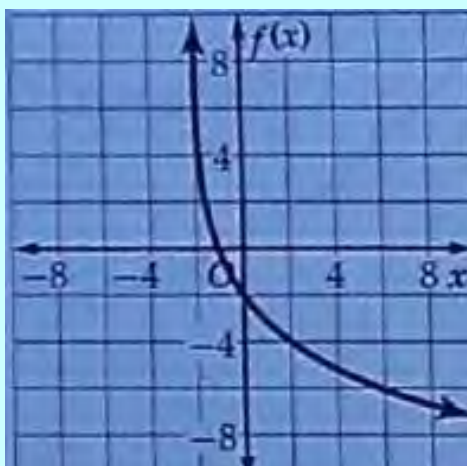
$$f(x) = 4\log_2 x + 6 \quad (36)$$

الحل:



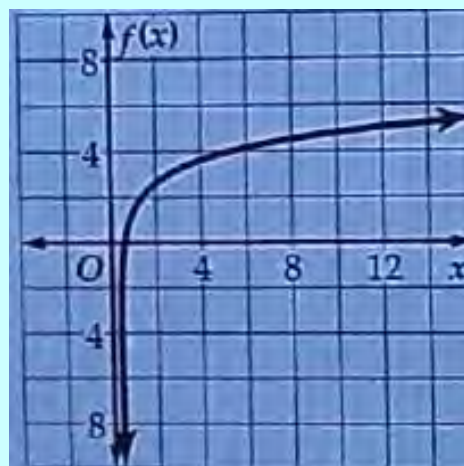
$$f(x) = 6\log_{\frac{1}{8}}(x + 2) \quad (39)$$

الحل:



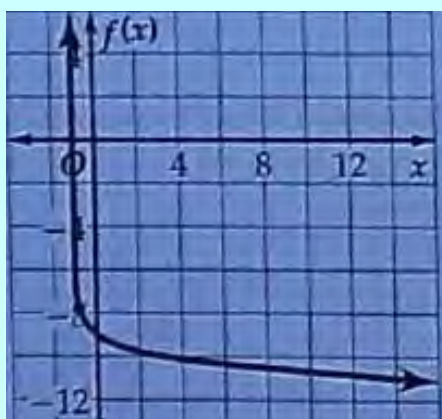
$$f(x) = -3\log_{\frac{1}{12}} x + 2 \quad (38)$$

الحل:



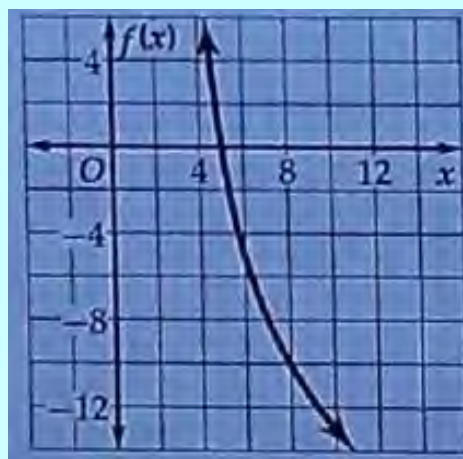
$$f(x) = \log_{\frac{1}{4}}(x+1) - 9 \quad (41)$$

الحل:



$$f(x) = -8\log_3(x-4) \quad (40)$$

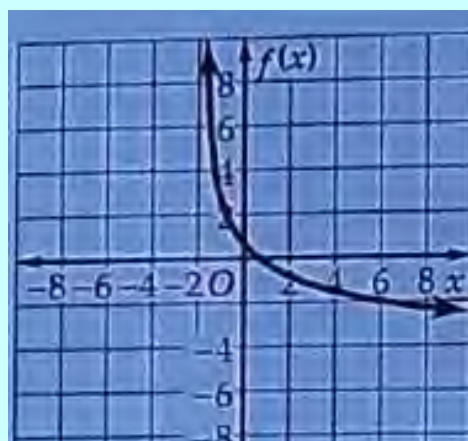
الحل:



مثل كل دالة مما يأتي بيانيا :

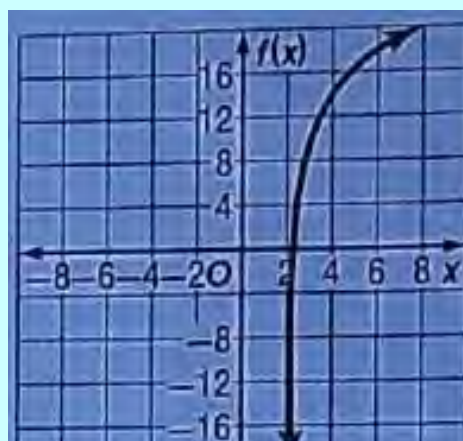
$$f(x) = -3\log_{12}(4x+3)+2 \quad (46)$$

الحل:



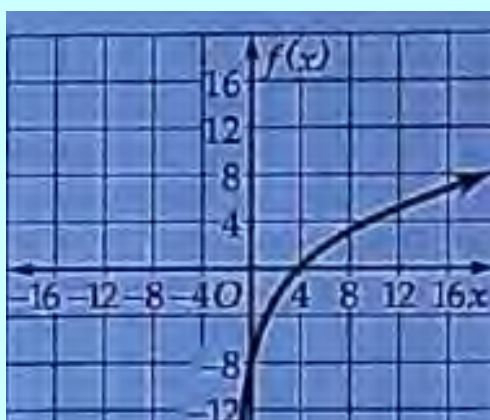
$$f(x) = 4\log_2(2x-4)+6 \quad (45)$$

الحل:



$$f(x) = 15\log_{14}(x+1)-9 \quad (47)$$

الحل:



(65) إذا كان $4^{x+2} = 48$ فأوجد قيمة 4^x ؟

الحل: $4^{x+2} = 48 \rightarrow 4^x \cdot 4^2 = 48 \rightarrow 4^x = \frac{48}{16} = 3$

(70) ماقيمة x في المعادلة $\log_8 16 = x$ ؟

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) 2

الحل: الإجابة (C) $8^x = 16 \rightarrow 2^{3x} = 2^4 \rightarrow 3x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{3}$

(71) ماقيمة $\log_2 \frac{1}{32}$

(A) 5 (B) $\frac{1}{5}$ (C) $-\frac{1}{5}$ (D) -5

الحل: نفرض أن $x = \log_2 \frac{1}{32} = x \leftarrow 2^x = \frac{1}{32} = 2^{-5} \leftarrow x = -5 \leftarrow$ الإجابة (D)

(72) مامقطع y للدالة الأسية $y = 4^x - 1$ ؟

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

الحل: بوضع $x = 0 \leftarrow y = 1 - 1 = 0 \leftarrow$ الإجابة (A)

2 - 4

خصائص اللوغاريتمات

خصائص اللوغاريتمات:

خاصية الضرب في اللوغاريتمات

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: لوغاريتم حاصل الضرب هو مجموع لوغاريتمات عوامله .
الرموز: إذا كانت a, b, x أعدادا حقيقية موجبة ، حيث $x \neq 1$ فإن:

$$\log_x ab = \log_x a + \log_x b$$

مثال: $\log_2 [(5)(6)] = \log_2 5 + \log_2 6$

تحقق من فهمك :

(1) استعمل $\log_4 2 = 0.5$ لإيجاد قيمة $\log_4 32$

الحل: $\log_4 32 = \log_4 2^5 = 5 \log_4 2 = 5(0.5) = 2.5$

خاصية القسمة في اللوغاريتمات

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: لوغاريتم ناتج القسمة يساوي لوغاريتم المقسوم مطروح منه لوغاريتم المقسوم عليه .

الرموز: إذا كانت a, b, x أعدادا حقيقية موجبة ، حيث $x \neq 1$ فإن:

$$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b$$

مثال: $\log_2 \frac{5}{6} = \log_2 5 - \log_2 6$

تحقق من فهمك :

(2) **صوت:** يقاس ارتفاع الصوت L بالديسبل (dB) ، ويعطي بالصيغة $L = 10 \log_{10} R$ ، حيث R شدة الصوت النسبية . أوجد شدة الصوت النسبية لصوت ارتفاعه 120dB .

الحل: $120 = 10 \log_{10} R \rightarrow 12 = \log_{10} R \rightarrow R = 10^{12}$

خاصية لوغاريتم القوة :

خاصية لوغاريتم القوة

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي: لوغاريتم القوة يساوي حاصل ضرب الأس في لوغاريتم أساسها .

الرموز: لأي عدد حقيقي p ، وأي عددين موجبين m, b ، حيث $b \neq 1$ فإن:

$$\log_b m^p = p \log_b m$$

مثال: $\log_2 6^5 = 5 \log_2 6$

تحقق من فهمك :

(3) إذا كان $\log_3 7 \approx 1.7712$ ، فاقرب قيمة $\log_3 49$.

الحل: $\log_3 49 = \log_3 7^2 = 2 \log_3 7 = 2(1.7712) = 3.5424$

تحقق من فهمك :

أوجد قيمة كل مما يأتي :

$$\log_7 \sqrt[6]{49} \quad (4B)$$

$$\begin{aligned} \log_7 \sqrt[6]{49} &= \log_7 7^{\frac{2}{6}} \\ &= \frac{2}{6} \log_7 7 = \frac{1}{3} \end{aligned} \quad \text{الحل:}$$

$$\log_6 \sqrt[3]{36} \quad (4A)$$

$$\begin{aligned} \log_6 \sqrt[3]{36} &= \log_6 6^{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{2}{3} \log_6 6 = \frac{2}{3} \end{aligned} \quad \text{الحل:}$$

تحقق من فهمك :

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة :

$$\log_6 5x^3y^7x^{0.5} \quad (5B)$$

$$\log_{13} 6a^3bc^4 \quad (5A)$$

$$\begin{aligned} \log_{13} 6a^3bc^4 &= \log_{13} 6 + \log_{13} a^3 + \log_{13} b + \log_{13} c^4 \\ &= \log_{13} 6 + 3 \log_{13} a + \log_{13} b + 4 \log_{13} c \end{aligned} \quad \text{الحل:}$$

$$\begin{aligned} \log_6 5x^3y^7x^{0.5} &= \log_6 5 + \log_6 x^3 + \log_6 y^7 + \log_6 x^{0.5} \\ &= \log_6 5 + 3 \log_6 x + 7 \log_6 y + 0.5 \log_6 x \end{aligned} \quad (5B)$$

تحقق من فهمك :

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة :

$$-5 \log_2 (x+1) + 3 \log_2 (6x) \quad (6A)$$

$$\log_3 (2x-1) - \frac{1}{4} \log_3 (x+1) \quad (6B)$$

$$\begin{aligned} -5 \log_2 (x+1) + 3 \log_2 (6x) &= \log_2 (x+1)^{-5} + \log_2 (6x)^3 \\ &= \log_2 216x^3 (x+1)^{-5} = \log_2 \frac{216x^3}{(x+1)^5} \end{aligned} \quad \text{الحل:}$$

$$\log_3(2x - 1) - \frac{1}{4}\log_3(x + 1) = \log_3(2x - 1) - \log_3(x + 1)^{\frac{1}{4}} \quad (6B)$$

$$= \log_3 \frac{(2x - 1)}{(x + 1)^{\frac{1}{4}}} = \log_3 \frac{2x - 1}{\sqrt[4]{x + 1}}$$

تدرب وحل المسائل :

استعمل $\log_4 5 \approx 1 \bullet 1610, \log_4 3 \approx 0 \bullet 7925$ لتقريب كل مما يأتي :

$\log_4 15 \quad (2)$ الحل : $\log_4 15 = \log_4 3 + \log_4 5$ $= 0 \bullet 7925 + 1 \bullet 1610$ $= 1 \bullet 9535$	$\log_4 18 \quad (1)$ الحل : $\log_4 18 = \log_4 2 + \log_4 9$ $= \log_4 4^{\frac{1}{2}} + \log_4 3^2$ $= \frac{1}{2} \log_4 4 + 2 \log_4 3$ $= \frac{1}{2} + 2(0 \bullet 7925)$ $= 0 \bullet 5 + 1 \bullet 585 = 2 \bullet 085$
$\log_4 \frac{3}{4} \quad (4)$ الحل : $\log_4 \frac{3}{4} = \log_4 3 - \log_4 4$ $= 0 \bullet 7925 - 1$ $= -0 \bullet 2075$	$\log_4 \frac{5}{3} \quad (3)$ الحل : $\log_4 \frac{5}{3} = \log_4 5 - \log_4 3$ $= 1 \bullet 1610 - 0 \bullet 7925$ $= 0 \bullet 3685$

استعمل $\log_4 5 \approx 1 \bullet 1610, \log_4 3 \approx 0 \bullet 7925, \log_4 2 = 0 \bullet 5$ لتقريب كل مما يأتي :

$\log_4 20 \quad (6)$ الحل :	$\log_4 30 \quad (5)$ الحل : $\log_4 30 = \log_4 2 + \log_4 3 + \log_4 5$
--	--

$\log_4 20 = \log_4 4 + \log_4 5$ $= 1 + 1 \bullet 1610 = 2 \bullet 1610$	$= 0 \bullet 5 + 0 \bullet 7925 + 1 \bullet 1610$ $= 2 \bullet 4535$
$\log_4 \frac{4}{3}$ (8) $\log_4 \frac{4}{3} = \log_4 4 - \log_4 3$:الحل $= 1 - 0 \bullet 7925 = 0 \bullet 2075$	$\log_4 \frac{2}{3}$ (7) $\log_4 \frac{2}{3} = \log_4 2 - \log_4 3$:الحل $= 0 \bullet 5 - 0 \bullet 7925 = -0 \bullet 2925$
$\log_4 8$ (10) $\log_4 8 = \log_4 2^3 = 3 \log_4 2$:الحل $= 3(0 \bullet 5) = 1 \bullet 5$	$\log_4 9$ (9) $\log_4 9 = \log_4 3^2 = 2 \log_4 3$:الحل $= 2(0 \bullet 7925) = 1 \bullet 585$

.....
 إذا كان $\log_3 5 \approx 1 \bullet 465, \log_5 7 \approx 1 \bullet 2091, \log_6 8 = 1 \bullet 1606, \log_7 9 = 1 \bullet 1292$
 لتقريب كل مما يأتي :

$\log_5 49$ (14) $\log_5 49 = \log_5 7^2 = 2 \log_5 7$:الحل $= 2(1 \bullet 2091) = 2 \bullet 4182$	$\log_3 25$ (13) $\log_3 25 = \log_3 5^2 = 2 \log_3 5$:الحل $= 2(1 \bullet 465) = 2 \bullet 93$
$\log_7 81$ (16) $\log_7 81 = \log_7 9^2 = 2 \log_7 9$:الحل $= 2 (1 \bullet 1292) = 2 \bullet 2584$	$\log_6 48$ (15) $\log_6 48 = \log_6 6 + \log_6 8$:الحل $= 1 + 1 \bullet 1606 = 2 \bullet 1606$
$\log_7 729$ (18) $\log_7 729 = \log_7 9^3 = 3 \log_7 9$:الحل $= 3(1 \bullet 1292) = 3 \bullet 3876$	$\log_6 512$ (17) $\log_6 512 = \log_6 8^3 = 3 \log_6 8$:الحل $= 3(1 \bullet 1606) = 3 \bullet 4818$

.....
 احسب قيمة كل مما يأتي :

$\log_2 \sqrt[5]{32}$ (20)	$\log_5 \sqrt[4]{25}$ (19)
----------------------------	----------------------------

$$\log_2 \sqrt[5]{32} = \log_2 2^{\frac{5}{5}} \quad \text{الحل:}$$

$$= \log_2 2 = 1$$

$$\log_5 \sqrt[4]{25} = \log_5 5^{\frac{2}{4}} \quad \text{الحل:}$$

$$= \frac{2}{4} \log_5 5 = \frac{1}{2}$$

$$4 \log_2 \sqrt{8} \quad (22)$$

$$4 \log_2 \sqrt{8} = 4 \log_2 2^{\frac{3}{2}} \quad \text{الحل:}$$

$$= 4 \left(\frac{3}{2} \right) \log_2 2 = 6$$

$$3 \log_7 \sqrt[6]{49} \quad (21)$$

$$3 \log_7 \sqrt[6]{49} = 3 \log_7 7^{\frac{2}{6}} \quad \text{الحل:}$$

$$= 3 \left(\frac{2}{6} \right) \log_7 7 = 1$$

$$\log_3 \sqrt[6]{243} \quad (24)$$

$$\log_3 \sqrt[6]{243} = \log_3 3^{\frac{5}{6}} \quad \text{الحل:}$$

$$= \frac{5}{6} \log_3 3 = \frac{5}{6}$$

$$50 \log_5 \sqrt{125} \quad (23)$$

$$50 \log_5 \sqrt{125} = 50 \log_5 5^{\frac{3}{2}} \quad \text{الحل:}$$

$$= 50 \left(\frac{3}{2} \right) \log_5 5 = 75$$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المطولة :

$$\log_9 6x^3y^5z \quad (25)$$

$$\log_9 6x^3y^5z = \log_9 6 + \log_9 x^3 + \log_9 y^5 + \log_9 z \quad \text{الحل:}$$

$$= \log_9 6 + 3 \log_9 x + 5 \log_9 y + \log_9 z$$

$$\log_{11} ab^{-4}c^{12}d^7 \quad (26)$$

$$\log_{11} ab^{-4}c^{12}d^7 = \log_{11} a + \log_{11} b^{-4} + \log_{11} c^{12} + \log_{11} d^7 \quad \text{الحل:}$$

$$= \log_{11} a - 4 \log_{11} b + 12 \log_{11} c + 7 \log_{11} d$$

$$\log_7 h^2j^{11}k^{-5} \quad (27)$$

$$\log_7 h^2j^{11}k^{-5} = \log_7 h^2 + \log_7 j^{11} + \log_7 k^{-5} \quad \text{الحل:}$$

$$= 2 \log_7 h + 11 \log_7 j - 5 \log_7 k$$

$$\log_4 10t^2uv^{-3} \quad (28)$$

$$\log_4 10t^2uv^{-3} = \log_4 10 + \log_4 t^2 + \log_4 u + \log_4 v^{-3} \quad \text{الحل:}$$

$$= \log_4 10 + 2\log_4 t + \log_4 u - 3\log_4 v$$

$$\log_5 a^6b^{-3}c^4 \quad (29)$$

$$\log_5 a^6b^{-3}c^4 = \log_5 a^6 + \log_5 b^{-3} + \log_5 c^4 \quad \text{الحل:}$$

$$= 6\log_5 a - 3\log_5 b + 4\log_5 c$$

$$\log_2 \frac{2x+3}{\sqrt[7]{1-5x}} \quad (30)$$

$$\log_2 \frac{2x+3}{\sqrt[7]{1-5x}} = \log_2 (2x+3) - \log_2 \sqrt[7]{1-5x} \quad \text{الحل:}$$

$$= \log_2 (2x+3) - \log_2 (1-5x)^{\frac{1}{7}}$$

$$= \log_2 (2x+3) - \frac{1}{7}\log_2 (1-5x)$$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية فيما يأتي بالصورة المختصرة:

$$3\log_5 x - \frac{1}{2}\log_5 (6-x) \quad (31)$$

$$3\log_5 x - \frac{1}{2}\log_5 (6-x) = \log_5 x^3 - \log_5 \sqrt{6-x} = \log_5 \frac{x^3}{\sqrt{6-x}} \quad \text{الحل:}$$

$$5\log_7 (2x) - \frac{1}{3}\log_7 (5x+1) \quad (32)$$

$$5\log_7 (2x) - \frac{1}{3}\log_7 (5x+1) = \log_7 (2x)^5 - \log_7 \sqrt[3]{5x+1} = \log_7 \frac{32x^5}{\sqrt[3]{5x+1}} \quad \text{الحل:}$$

$$7\log_3 a + \log_3 b - 2\log_3 (8c) \quad (33)$$

$$7\log_3 a + \log_3 b - 2\log_3 (8c) = \log_3 a^7 + \log_3 b - \log_3 (8c)^2 \quad \text{الحل:}$$

$$= \log_3 \frac{a^7 b}{64 c^2}$$

$$2 \log_8 (9x) - \log_8 (2x - 5) \quad (34)$$

$$2 \log_8 (9x) - \log_8 (2x - 5) = \log_8 (9x)^2 - \log_8 (2x - 5) \quad \text{الحل:}$$

$$= \log_8 \frac{81x^2}{(2x - 5)}$$

$$2 \log_6 (5a) + \log_6 b + 7 \log_6 c \quad (35)$$

$$2 \log_6 (5a) + \log_6 b + 7 \log_6 c = \log_6 (5a)^2 + \log_6 b + \log_6 c^7 \quad \text{الحل:}$$

$$= \log_6 25a^2 b c^7$$

$$\log_2 x - \log_2 y - 3 \log_2 z \quad (36)$$

$$\log_2 x - \log_2 y - 3 \log_2 z = \log_2 \frac{x}{y z^3} \quad \text{الحل:}$$

حدد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أم خطأ:

$$\log_8 (x - 3) = \log_8 x - \log_8 3 \quad (38)$$

$$\text{الحل: الأيسر} = \log_8 x - \log_8 3 = \log_8 \frac{x}{3} \neq \text{الأيمن}$$

الأيمن $\neq$ الأيسر ← العبارة خاطئة

$$\log_5 22x = \log_5 22 + \log_5 x \quad (39)$$

$$\text{الحل: الأيسر} = \log_5 22 + \log_5 x = \log_5 22x = \text{الأيمن}$$

الأيمن = الأيسر ← العبارة صحيحة

$$\log_{10} 19k = 19 \log_{10} k \quad (40)$$

$$\text{الحل: الأيسر} = 19 \log_{10} k = \log_{10} k^{19} \neq \text{الأيمن}$$

الأيمن $\neq$ الأيسر ← العبارة خاطئة

$$\log_2 y^5 = 5 \log_2 y \quad (41)$$

$$\text{الحل: الأيسر} = 5 \log_2 y = \log_2 y^5 = \text{الأيمن}$$

الأيمن = الأيسر ← العبارة صحيحة

$$\log_7 \frac{x}{3} = \log_7 x - \log_7 3 \quad (42)$$

الحل: الأيمن = الأيسر $\log_7 x - \log_7 3 = \log_7 \frac{x}{3}$

الأيمن = الأيسر ← العبارة صحيحة

$$\log_4 (z + 2) = \log_4 z + \log_4 2 \quad (43)$$

الحل: الأيمن $\neq$ الأيسر $\log_4 z + \log_4 2 = \log_4 2z \neq \log_4 (z + 2)$

الأيمن $\neq$ الأيسر ← العبارة خاطئة

$$\log_8 p^4 = (\log_8 p)^4 \quad (44)$$

الحل: الأيمن $\neq$ الأيسر $\log_8 p^4 \neq (\log_8 p)^4$

← العبارة خاطئة

$$\log_9 \frac{x^2 y^3}{z^4} = 2 \log_9 x + 3 \log_9 y - 4 \log_9 z \quad (45)$$

الحل: الأيمن = الأيسر $\log_9 x^2 + \log_9 y^3 - \log_9 z^4 = \log_9 \frac{x^2 y^3}{z^4}$

الأيمن = الأيسر ← العبارة صحيحة

(49) **تحد:** بسط العبارة اللوغاريتمية $\log_{\sqrt{a}}(a^2)$ لتجد القيمة العددية الدقيقة .

الحل: $\log_{\sqrt{a}}(a^2) = \log_{\sqrt{a}} \sqrt{a^4} = \log_{\sqrt{a}} (\sqrt{a})^4 = 4 \log_{\sqrt{a}} (\sqrt{a}) = 4$

(50) **تبرير:** استعمل خصائص اللوغاريتمات لبرهنة أن : $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$

الحل: $\log_a \frac{1}{x} = \log_a 1 - \log_a x = 0 - \log_a x = -\log_a x$

أوجد قيمة كل مما يأتي :

(-3)

$$\log_{10} 0.001 \quad (55)$$

(2x)

$$\log_4 16^x \quad (56)$$

(3x)

$$\log_3 27^x \quad (57)$$

(58) **كهرباء :** يمكن حساب كمية التيار الكهربائي I بالأمبير والتي يستهلكها جهاز

باستعمال المعادلة $I = \left(\frac{P}{R}\right)^{\frac{1}{2}}$ ، حيث P القدرة بالواط ، R المقاومة بالأوم ، مكمية

التيار الكهربائي اتلي يستهلكها جهاز ما إذا كانت $P = 120 \text{ W}$ ، $R = 3\Omega$. قرب الناتج إلي أقرب عشر .

$$\text{الحل: } I = \left(\frac{P}{R}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{120}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{40} \approx 6.3$$

حل كل معادلة مما يأتي وتحقق من صحة حلك :

$$3^{4x} = 3^{3-x} \quad (61)$$

$$3^{5x} \cdot 81^{1-x} = 9^{x-3} \quad (62)$$

$$49^x = 7^{x^2-15} \quad (63)$$

$$\log_2 (x + 6) = 5 \quad (64)$$

(65) ماقيمة $2\log_5 12 - \log_5 8 - 2\log_5 3$ ؟

(A) $\log_5 2$ (B) $\log_5 0.5$ (C) $\log_5 3$ (D) 1

(66) مامقطع y للدالة اللوغاريتمية $y = \log_2 (x + 1) + 3$ ؟

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية 2 – 5

حل المعادلات اللوغاريتمية : تحتوي المعادلات اللوغاريتمية علي لوغاريتم واحد أو أكثر. ويمكنك استعمال تعريف اللوغاريتم للمساعدة عل حل معادلات لوغاريتمية .

تحقق من فهمك :

حل المعادلات الآتية :

$$\log_{16} x = \frac{5}{2} \quad (1B)$$

$$x = 16^{\frac{5}{2}} = (4^2)^{\frac{5}{2}} = 4^5 = 1024 \quad \text{الحل:}$$

$$\log_9 x = \frac{3}{2} \quad (1A)$$

$$x = 9^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} = 3^3 = 27 \quad \text{الحل:}$$

خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية :

خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية

مفهوم أساسي

الرموز : إذا كان b عددا موجبا حيث $b \neq 1$ ، فإن $\log_b x = \log_b y$

إذا وفقط إذا كان $x = y$

مثال : إذا كان $\log_5 x = \log_5 8$ فإن $x = 8$ ، وإذا كان $x = 8$ فإن $\log_5 x = \log_5 8$

تحقق من فهمك :

$$\log_3 (x^2 - 15) = \log_3 2x \quad (2) \quad \text{حل المعادلة :}$$

$$15 \quad (J) \quad 5 \quad (H) \quad -1 \quad (G) \quad -3 \quad (F)$$

$$x^2 - 15 = 2x \rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \rightarrow (x - 5)(x + 3) = 0 \quad \text{الحل:}$$

$$x - 5 = 0 \rightarrow x = 5 \text{ أو } x + 3 = 0 \rightarrow x = -3 \text{ مرفوضة (H الإجابة)}$$

تحقق من فهمك :

حل المعادلات الآتية :

$$\log_6 x + \log_6 (x + 5) = 2 \quad (3B)$$

$$\log_6 x (x + 5) = 2 \quad \text{الحل:}$$

$$x(x + 5) = 6^2 \rightarrow x^2 + 5x - 36 = 0$$

$$x^2 + 5x - 36 = 0$$

$$(x - 4)(x + 9) = 0$$

$$x = 4 \text{ أو } x = -9 \text{ مرفوضة}$$

$$2 \log_7 x = \log_7 27 + \log_7 3 \quad (3A)$$

$$\log_7 x^2 = \log_7 27(3) \quad \text{الحل:}$$

$$x^2 = 81 \rightarrow x = \pm 9 \rightarrow x = 9$$

حل المتباينات اللوغاريتمية : المتباينة اللوغاريتمية هي متباينة تتضمن عبارة لوغاريتمية أو أكثر. يمكنك استعمال الخاصية التالية لحل متباينات لوغاريتمية تتضمن عبارة لوغاريتمية واحدة .

خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية

مفهوم أساسي

إذا كان $x > 0, b > 1$ و $\log_b x > y$ ، فإن $x > b^y$

إذا كان $x > 0, b > 1$ و $\log_b x < y$ ، فإن $x < b^y$

تحقق من فهمك :

حل المتباينات الآتية :

$$\log_2 x < 4 \quad (4B)$$

$$x < 2^4 \rightarrow x < 16 \quad \text{الحل:}$$

$$\{x \mid 0 < x < 16\}$$

$$\log_4 x \geq 3 \quad (4A)$$

$$x \geq 4^3 \rightarrow x \geq 64 \quad \text{الحل:}$$

$$\{x \mid x \geq 16\}$$

خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية :

خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية

مفهوم أساسي

الرموز : إذا كان $b > 1$ ، فإن $\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$

و $\log_b x < \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x < y$

مثال : إذا كان $\log_b x > \log_b 35$ فإن $x > 35$

تحقق من فهمك :

(5) حل المتباينة: $\log_5 (2x + 1) \leq \log_5 (x + 4)$

$$2x + 1 \leq x + 4 \rightarrow 2x - x \leq 4 - 1 \rightarrow x \leq 3 \rightarrow \{x \mid -0.5 < x \leq 3\} \quad \text{الحل:}$$

تدرب وحل المسائل :

حل كل معادلة مما يأتي :

$$\log_{16} x = \frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\log_8 x = \frac{4}{3} \quad (1)$$

$x = 16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^3 = 8$ <u>الحل:</u>	$x = 8^{\frac{4}{3}} = (2^3)^{\frac{4}{3}} = 2^4 = 16$ <u>الحل:</u>
$\log_{25} x = \frac{5}{2}$ (4)	$\log_{81} x = \frac{3}{4}$ (3)
$x = 25^{\frac{5}{2}} = (5^2)^{\frac{5}{2}} = 5^5 = 3125$ <u>الحل:</u>	$x = 81^{\frac{3}{4}} = (3^4)^{\frac{3}{4}} = 3^3 = 27$ <u>الحل:</u>
$\log_6 \frac{1}{36} = x$ (6)	$\log_8 \frac{1}{2} = x$ (5)
$6^x = \frac{1}{36} \rightarrow 6^x = 6^{-2} \rightarrow x = -2$ <u>الحل:</u>	$8^x = \frac{1}{2} \rightarrow 2^{3x} = 2^{-1}$ <u>الحل:</u>
	$3x = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{3}$
$\log_x 27 = \frac{3}{2}$ (8)	$\log_x 32 = \frac{5}{2}$ (7)
$x^{\frac{3}{2}} = 27 \rightarrow x = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$ <u>الحل:</u>	$x^{\frac{5}{2}} = 32 \rightarrow x = (2^5)^{\frac{2}{5}} = 2^2 = 4$ <u>الحل:</u>

.....

حل كل معادلة مما يأتي ، ثم تحقق من صحة الحل:

$5\log_2 x = \log_2 32$ (9)
$\log_2 x^5 = \log_2 32 \rightarrow x^5 = 32 \rightarrow x^5 = 2^5 \rightarrow x = 2$ <u>الحل:</u>
$3\log_2 x = \log_2 8$ (10)
$\log_2 x^3 = \log_2 8 \rightarrow x^3 = 8 \rightarrow x^3 = 2^3 \rightarrow x = 2$ <u>الحل:</u>
$\log_4 48 - \log_4 n = \log_4 6$ (11)
$\log_4 48 - \log_4 n = \log_4 6 \rightarrow \log_4 \frac{48}{n} = \log_4 6$ <u>الحل:</u>
$\frac{48}{n} = 6 \rightarrow 6n = 48 \rightarrow n = 8$
$\log_3 2x + \log_3 7 = \log_3 28$ (12)

$$\log_3 14x = \log_3 28 \rightarrow 14x = 28 \rightarrow x = 2 \quad \text{الحل:}$$

$$\log_2 (4x) + \log_2 5 = \log_2 40 \quad (13)$$

$$\log_2 20x = \log_2 40 \rightarrow 20x = 40 \rightarrow x = 2 \quad \text{الحل:}$$

$$\log_4 a + \log_4 8 = \log_4 24 \quad (14)$$

$$\log_4 a8 = \log_4 24 \rightarrow a8 = 24 \rightarrow a = 3 \quad \text{الحل:}$$

$$\log_2 n = \frac{1}{3} \log_2 27 + \log_2 36 \quad (15)$$

$$\log_2 n = \log_2 (3^3)^{\frac{1}{3}} + \log_2 36 \rightarrow \log_2 n = \log_2 108 \rightarrow n = 108 \quad \text{الحل:}$$

$$3 \log_{10} 8 - \frac{1}{2} \log_2 36 = \log_2 x \quad (16)$$

$$\log_{10} 8^3 - \log_2 (36)^{\frac{1}{2}} = \log_2 x \rightarrow \log_2 x = \log_2 \frac{512}{6} \rightarrow x = \frac{256}{3} \quad \text{الحل:}$$

حل كل متباينة مما يأتي :

$$\log_8 x \leq -2 \quad (18)$$

$$x \leq 8^{-2} \rightarrow x \leq \frac{1}{64} \quad \text{الحل:}$$

$$\{x \mid 0 < x \leq \frac{1}{64}\}$$

$$\log_5 x > 3 \quad (17)$$

$$x > 5^3 \rightarrow x > 125 \quad \text{الحل:}$$

$$\{x \mid x > 125\}$$

$$\log_4 x \geq 4 \quad (20)$$

$$x \geq 4^4 \rightarrow x \geq 256 \quad \text{الحل:}$$

$$\{x \mid x \geq 256\}$$

$$\log_6 x < -3 \quad (19)$$

$$x < 6^{-3} \rightarrow x < \frac{1}{216} \quad \text{الحل:}$$

$$\{x \mid 0 < x < \frac{1}{216}\}$$

$$\log_2 x \leq -2 \quad (22)$$

$$x \leq 2^{-2} \rightarrow x \leq \frac{1}{4} \quad \text{الحل:}$$

$$\log_3 x \geq -4 \quad (21)$$

$$x \geq 3^{-4} \rightarrow x \geq \frac{1}{81} \quad \text{الحل:}$$

$$\{x | 0 < x \leq \frac{1}{4}\}$$

$$\{x | x \geq \frac{1}{81}\}$$

حل كل متباينة مما يأتي ، ثم تحقق من صحة الحل:

$$\log_4(2x + 5) \leq \log_4(4x - 3) \quad (23)$$

الحل: $2x + 5 \leq 4x - 3 \rightarrow 5 + 3 \leq 4x - 2x \rightarrow 8 \leq 2x \rightarrow 4 \leq x \rightarrow x \geq 4$
 $\{x | x \geq 4\}$

$$\log_8(2x) > \log_8(6x - 8) \quad (24)$$

الحل: $2x > 6x - 8 \rightarrow 2x - 6x > -8 \rightarrow -4x > -8 \rightarrow x < 2$
 $\{x | \frac{4}{3} < x < 2\}$

$$\log_2(4x - 6) > \log_2(2x + 8) \quad (25)$$

الحل: $4x - 6 > 2x + 8 \rightarrow 4x - 2x > 8 + 6 \rightarrow 2x > 14 \rightarrow x > 7$
 $\{x | x > 7\}$

$$\log_7(x + 2) \geq \log_7(6x - 3) \quad (26)$$

الحل: $x + 2 \geq 6x - 3 \rightarrow 2 + 3 \geq 6x - x \rightarrow 5 \geq 5x \rightarrow 1 \geq x \rightarrow x \leq 1$
 $\{x | \frac{1}{2} < x \leq 1\}$

(27) **صوت:** يعطي ارتفاع الصوت L بالصيغة $L = 10 \log_{10} R$ ، حيث R هي الشدة النسبية للصوت . احسب الشدة النسبية لصوت منبه ارتفاع صوته 80 ديسبل .

الحل: $80 = 10 \log_{10} R \rightarrow \log_{10} R = 8 \rightarrow R = 10^8$

(30) **علوم:** تعطي سرعة الرياح w بالميل لكل ساعة قرب مركز الإعصار بالمعادلة $w = 93 \log_{10} d + 65$ ، حيث d المسافة التي يقطعها الإعصار بالميل .
 (a) اكتب المعادلة بصورة أسية .
 (b) ماسرعة الرياح قرب مركز إعصار قطع مسافة 525 ميلا ؟

الحل: (a) $w = 93 \log_{10} d + 65 \rightarrow w - 65 = \log_{10} d^{93}$

$$d^{93} = 10^{(w-65)} \rightarrow d = 10^{\frac{(w-65)}{93}}$$

$$w = 93 \log_{10} 525 + 65 \approx 317.97 \quad (b)$$

33) **تحديد:** أوجد قيمة $\log_3 27 + \log_9 27 + \log_{27} 27 + \log_{81} 27 + \log_{243} 27$

$$\log_3 27 + \log_9 27 + \log_{27} 27 + \log_{81} 27 + \log_{243} 27$$

$$= \log_3 3^3 + \log_9 9^{\frac{3}{2}} + 1 + \log_{81} 81^{\frac{3}{4}} + \log_{243} 243^{\frac{3}{5}}$$

$$= 3 \log_3 3 + \frac{3}{2} \log_9 9 + 1 + \frac{3}{4} \log_{81} 81 + \frac{3}{5} \log_{243} 243$$

$$= 3 + \frac{3}{2} + 1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{5} = \frac{137}{20}$$

الحل:

مراجعة تراكمية:

حل كل مما يأتي وتحقق من صحة حلك :

$$3^{3x-2} > 81 \quad (39)$$

$$3^{4x-7} = 27^{2x+3} \quad (40)$$

$$8^{x-4} = 2^{4-x} \quad (41)$$

أوجد قيمة كل عبارة مما يأتي :

$$\log_2 \frac{1}{8} \quad (43)$$

$$\log_4 256 \quad (42)$$

$$\log_7 2401 \quad (45)$$

$$\log_6 216 \quad (44)$$

بسّط كلا مما يأتي مفترضا أن أي من المتغيرات لا يساوي الصفر :

$$(2p^2n)^3 \quad (47)$$

$$x^5 \cdot x^3 \quad (46)$$

$$\left(\frac{c^9}{d^7}\right)^0 \quad (49)$$

$$\frac{x^4 y^6}{xy^2} \quad (48)$$

(51) أي مما يأتي يمثل حلاً للمعادلة : $\log_4 x - \log_4 (x - 1) = \frac{1}{2}$

- (A) $-\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) -2 (D) 2

الحل: $\log_4 \frac{x}{x-1} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{x}{x-1} = 4^{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{x}{x-1} = 2$
 $2x - 2 = x \rightarrow 2x - x = 2 \rightarrow x = 2 \rightarrow$ الإجابة (D)

2 - 6

اللوغاريتمات العشرية

اللوغاريتمات العشرية: نلاحظ أن أي دالة لوغاريتم للأساس 10 تكتب على الصورة

$y = \log_{10} x$ ، وتسمى باللوغاريتمات العشرية وتكتب دون الأساس 10 .

$\log_{10} x = \log x$, $x > 0$

تحقق من فهمك :

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقرباً الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف :

$\log 0.5$ (1B)

الحل: -0.3010

$\log 7$ (1A)

الحل: 0.8451

تحقق من فهمك :

(2) هزات أرضية : ترتبط كمية الطاقة E مقيسة بوحدة الأيرج التي تطلقها الأرض على مقياس ريختر M بالمعادلة $\log E = 11.8 + 1.5 M$. استعمل المعادلة لتجد كمية الطاقة التي تطلقها الأرض عند هزة أرضية بقوة 9 درجات على مقياس ريختر .

الحل: $\log E = 11.8 + 1.5 (9) = 11.8 + 13.5 = 25.3 \rightarrow E \approx 2(10^{25})$

تحقق من فهمك :

حل المعادلات الآتية وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف :

$6^x = 42$ (3B)

$\log 6^x = \log 42$ **الحل:**

$x \log 6 = \log 42 \rightarrow x = \frac{\log 42}{\log 6} \approx 2.09$

$3^x = 15$ (3A)

$\log 3^x = \log 15$ **الحل:**

$x \log 3 = \log 15 \rightarrow x = \frac{\log 15}{\log 3} \approx 2.46$

حل المتباينات الآتية وقرب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف :

$$4^y < 5^{2y+1} \quad (4B)$$

$$\log 4^y < \log 5^{2y+1} \quad \text{الحل:}$$

$$y \log 4 < (2y + 1) \log 5$$

$$y \log 4 - 2y \log 5 < \log 5$$

$$y (\log 4 - 2 \log 5) < \log 5$$

$$y (\log 4 - \log 25) < \log 5$$

$$y \log \frac{4}{25} < \log 5$$

$$y > \frac{\log 5}{\log \frac{4}{25}} \rightarrow y > -0.8782$$

$$\{y | y > -0.8782\}$$

$$3^{2x} \geq 6^{x+1} \quad (4A)$$

$$\log 3^{2x} \geq \log 6^{x+1} \quad \text{الحل:}$$

$$2x \log 3 \geq (x + 1) \log 6$$

$$2x \log 3 - x \log 6 \geq \log 6$$

$$x(2 \log 3 - \log 6) \geq \log 6$$

$$x(\log 9 - \log 6) \geq \log 6$$

$$x \log 1.5 \geq \log 6$$

$$x \geq \frac{\log 6}{\log 1.5} \rightarrow x \geq 4.42$$

$$\{x | x \geq 4.42\}$$

صيغة تغيير الأساس :

صيغة تغيير الأساس

مفهوم أساسي

الرموز: لأي أعداد موجبة a, b, n ، حيث $a \neq 1, b \neq 1$ فإن : $\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$

$$\log_3 11 = \frac{\log_5 11}{\log_5 3} \quad \text{مثال :}$$

تحقق من فهمك :

(5) أكتب $\log_6 8$ بدلالة اللوغاريتم العشري ، ثم أوجد قيمته مقربا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف :

$$\log_6 8 = \frac{\log 8}{\log 6} \approx 1.16 \quad \text{الحل:}$$

تدرب وحل المسائل :

استعمل الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف :

$$\log 0.4 \quad (3)$$

$$\text{الحل: } -0.3979$$

$$\log 21 \quad (2)$$

$$\text{الحل: } 1.3222$$

$$\log 5 \quad (1)$$

$$\text{الحل: } 0.6990$$

$\log 3 \cdot 2$ (6) الحل: 0.5051	$\log 11$ (5) الحل: 1.0414	$\log 3$ (4) الحل: 0.4771
$\log 0 \cdot 04$ (9) الحل: -1.3979	$\log 0 \cdot 9$ (8) الحل: -0.0458	$\log 8 \cdot 2$ (7) الحل: 0.9138

(10) **علوم:** ترتبط كمية الطاقة E مقيسة بوحدة الأيرج التي تطلقها الأرض مع قوة الهزة علي مقياس ريختر M بالمعادلة $\log E = 11 \cdot 8 + 1 \cdot 5 M$. استعمل المعادلة لإيجاد كمية الطاقة التي تطلقها الأرض عند هزة أرضية بقوة $8 \cdot 5$ درجات علي مقياس ريختر

الحل: $\log E = 11 \cdot 8 + 1 \cdot 5 (8 \cdot 5) = 11 \cdot 8 + 12 \cdot 75 = 24 \cdot 55$
 $E = 10^{24 \cdot 55} \approx 3 \cdot 55 (10^{24})$

حل كل معادلة مما يأتي ، وقرب الناتج إلي أقرب جزء من عشرة آلاف :

$2 \cdot 1^{a+2} = 8 \cdot 25$ (13) الحل: $\log 2 \cdot 1^{a+2} = \log 8 \cdot 25$ $(a + 2) \log 2 \cdot 1 = \log 8 \cdot 25$ $a + 2 = \frac{\log 8 \cdot 25}{\log 2 \cdot 1}$ $a = \frac{\log 8 \cdot 25}{\log 2 \cdot 1} - 2 \approx 0 \cdot 8442$	$6^x = 40$ (12) الحل: $\log 6^x = \log 40$ $x \log 6 = \log 40$ $x = \frac{\log 40}{\log 6} \approx 2 \cdot 0588$
$11^{b-3} = 5^b$ (15) الحل: $\log 11^{b-3} = \log 5^b$ $(b - 3) \log 11 = b \log 5$ $b \log 11 - 3 \log 11 = b \log 5$ $b \log 11 - b \log 5 = 3 \log 11$ $b (\log 11 - \log 5) = 3 \log 11$ $b = \frac{3 \log 11}{\log 11 - \log 5} \approx 9 \cdot 1237$	$7^{x^2} = 20 \cdot 42$ (14) الحل: $\log 7^{x^2} = \log 20 \cdot 42$ $x^2 \log 7 = \log 20 \cdot 42$ $x = \pm \sqrt{\frac{\log 20 \cdot 42}{\log 7}} \approx \pm 1 \cdot 2451$
$5^x = 55$ (17)	$8^x = 40$ (16)

$$\log 5^x = \log 55 \quad \text{الحل:}$$

$$x \log 5 = \log 55$$

$$x = \frac{\log 55}{\log 5} \approx 2.4899$$

$$\log 8^x = \log 40 \quad \text{الحل:}$$

$$x \log 8 = \log 40$$

$$x = \frac{\log 40}{\log 8} \approx 1.7740$$

$$15^{x^2} = 110 \quad (19)$$

$$\log 15^{x^2} = \log 110 \quad \text{الحل:}$$

$$x^2 \log 15 = \log 110$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{\log 110}{\log 15}} \approx \pm 1.3175$$

$$9^{b-1} = 7^b \quad (18)$$

$$\log 9^{b-1} = \log 7^b \quad \text{الحل:}$$

$$(b-1) \log 9 = b \log 7$$

$$b \log 9 - \log 9 = b \log 7$$

$$b \log 9 - b \log 7 = \log 9$$

$$b(\log 9 - \log 7) = \log 9$$

$$b = \frac{\log 9}{\log 9 - \log 7} \approx 8.7429$$

$$8^{2x-4} = 4^{x+1} \quad (21)$$

$$(2^3)^{2x-4} = (2^2)^{x+1} \quad \text{الحل:}$$

$$2^{6x-12} = 2^{2x+2}$$

$$6x - 12 = 2x + 2 \rightarrow 4x = 14$$

$$x = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

$$9^{6y-2} = 3^{3y+1} \quad (20)$$

$$(3^2)^{6y-2} = 3^{3y+1} \quad \text{الحل:}$$

$$3^{12y-4} = 3^{3y+1}$$

$$12y - 4 = 3y + 1 \rightarrow 9y = 5$$

$$y = \frac{5}{9}$$

$$2^y = \sqrt{3^{y-1}} \quad (23)$$

$$\log 2^y = \log \sqrt{3^{y-1}} \quad \text{الحل:}$$

$$y \log 2 = \frac{1}{2}(y-1) \log 3$$

$$2y \log 2 = y \log 3 - \log 3$$

$$\log 3 = y \log 3 - 2y \log 2$$

$$\log 3 = y(\log 3 - 2 \log 2)$$

$$y = \frac{\log 3}{\log 3 - 2 \log 2} \approx -3.8189$$

$$16^x = \sqrt{4^{x+3}} \quad (22)$$

$$2^{4x} = 2^{x+3} \quad \text{الحل:}$$

$$4x = x + 3 \rightarrow 3x = 3 \rightarrow x = 1$$

حل كل متباينة مما يأتي ، وقرب الناتج إلي أقرب جزء من عشرة آلاف :

$$6^{p-1} \leq 4^p \quad (25)$$

$$(p-1) \log 6 \leq p \log 4 \quad \text{الحل:}$$

$$p \log 6 - \log 6 \leq p \log 4$$

$$p \log 6 - p \log 4 \leq \log 6$$

$$p(\log 6 - \log 4) \leq \log 6$$

$$p \leq \frac{\log 6}{\log 6 - \log 4}$$

$$p \leq 4.4190 \rightarrow \{p | p \leq 4.4190\}$$

$$5^{4n} > 33 \quad (24)$$

$$4n \log 5 > \log 33 \quad \text{الحل:}$$

$$n > \frac{\log 33}{4 \log 5} \rightarrow n > 0.5431$$

$$\{n | n > 0.5431\}$$

$$5^{p-2} \leq 2^p \quad (27)$$

$$(p-2) \log 5 \leq p \log 2 \quad \text{الحل:}$$

$$p \log 5 - 2 \log 5 \leq p \log 2$$

$$p \log 5 - p \log 2 \leq 2 \log 5$$

$$p(\log 5 - \log 2) \leq 2 \log 5$$

$$p \leq \frac{2 \log 5}{\log 5 - \log 2}$$

$$p \leq 3.5129$$

$$\{p | p \leq 3.5129\}$$

$$3^{y-1} \leq 4^y \quad (26)$$

$$(y-1) \log 3 \leq y \log 4 \quad \text{الحل:}$$

$$y \log 3 - \log 3 \leq y \log 4$$

$$y \log 3 - y \log 4 \leq \log 3$$

$$y(\log 3 - \log 4) \leq \log 3$$

$$y \leq \frac{\log 3}{\log 3 - \log 4}$$

$$y \geq -3.8188$$

$$\{y | y \geq -3.8188\}$$

$$6^{3n} > 36 \quad (29)$$

$$3n \log 6 > \log 36 \quad \text{الحل:}$$

$$n > \frac{\log 36}{3 \log 6} \rightarrow n > \frac{2}{3}$$

$$\{n | n > \frac{2}{3}\}$$

$$2^{4x} \leq 20 \quad (28)$$

$$4x \log 2 \leq \log 20 \quad \text{الحل:}$$

$$x \leq \frac{\log 20}{4 \log 2} \rightarrow x \leq 1.0805$$

$$\{x | x \leq 1.0805\}$$

أكتب كلا مما يأتي بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربا الناتج إلي أقرب جزء من عشرة آلاف :

$\log_2 16$ (31) $\log_2 16 = \frac{\log 16}{\log 2} = 4$ <u>الحل:</u>	$\log_3 7$ (30) $\log_3 7 = \frac{\log 7}{\log 3} \approx 1.7712$ <u>الحل:</u>
$\log_3 21$ (33) $\log_3 21 = \frac{\log 21}{\log 3} \approx 2.7712$ <u>الحل:</u>	$\log_4 9$ (32) $\log_4 9 = \frac{\log 9}{\log 4} \approx 1.5850$ <u>الحل:</u>
$\log_7 \sqrt{5}$ (35) $\log_7 \sqrt{5} = \frac{\log 5}{2 \log 7} \approx 0.4135$ <u>الحل:</u>	$\log_5 (2 \cdot 7)^2$ (34) $\log_5 (2 \cdot 7)^2 = \frac{2 \log 2 \cdot 7}{\log 5} \approx 1.2343$ <u>الحل:</u>

(41) تحذ: حل المعادلة $\log_{\sqrt{a}} 3 = \log_a x$ لتجد قيمة x . وفسر كل خطوة.

الحل: نفرض أن $\log_{\sqrt{a}} 3 = \log_a x = y \leftarrow \log_{\sqrt{a}} 3 = \log_a x = y$ بالتربيع $3 = (\sqrt{a})^y$, $x = a^y$

$x = 9 \leftarrow 9 = a^y$

(43) برهان: أوجد قيمة كل من $\log_3 27$ ، $\log_{27} 3$ واكتب تخميننا حول العلاقة بين $\log_a b$ ، $\log_b a$ وبرهن تخمينك.

الحل: $\log_{27} 3 = \log_{27} (27)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_{27} 27 = \frac{1}{3}$

$\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3 \log_3 3 = 3$

$\log_a b = \frac{1}{9} \log_b a \leftarrow a = 27, b = 3$ بوضع

مراجعة تراكمية :

حل كل معادلة مما يأتي ، وتحقق من صحة حلك :

$$\log_5 7 + \frac{1}{2} \log_5 4 = \log_5 x \quad (45)$$

$$2 \log_2 x - \log_2 (x + 3) = 2 \quad (46)$$

$$\log_6 48 - \log_6 \frac{16}{5} + \log_6 5 = \log_6 5x \quad (47)$$

حل كل متباينة مما يأتي ، وتحقق من صحة حلك :

$$\log_8 (3y - 1) < \log_8 (y + 5) = x \quad (48)$$

$$\log_9 (9x + 4) \leq \log_9 (11x - 12) \quad (49)$$

50) افرض أن هناك 3500 طائر من نوع مهدد بالانقراض في العالم ، وأن عددها

يتناقص بنسبة 5% في السنة . تستعمل المعادلة اللوغاريتمية $t = \log_{0.95} \frac{p}{3500}$

لتقدير عدد السنوات t ليصبح هذا النوع من الطيور p طائرا . بعد كم سنة يصبح عدد الطيور من هذا النوع 3000 طائر ؟

(A) سنتان (B) 5 سنوات (C) 3 سنوات (D) 8 سنوات

$$t = \log_{0.95} \frac{3000}{3500} \approx 3 \rightarrow \text{الإجابة (C) } \quad \text{الحل:}$$

51) أي العبارات الآتية تمثل $f[g(x)]$ إذا كان $g(x) = x - 5$ ، $f(x) = x^2 + 4x + 3$ ؟

(A) $x^2 + 4x - 2$ (B) $x^2 - 6x + 8$ (C) $x^2 - 9x + 23$ (D) $x^2 - 14x + 6$

$$\text{الحل: } f[g(x)] = f(x - 5) = (x - 5)^2 + 4(x - 5) + 3 = x^2 - 10x + 25 + 4x - 20 + 3 = x^2 - 6x + 8 \rightarrow \text{الإجابة (B)}$$

52) أي مما يأتي يمثل حلا للمعادلة $27\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = 125$ ؟

(F) -4 (G) -2 (H) 2 (J) 4

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = \frac{5^3}{3^3} \rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-3} \rightarrow x + 1 = -3$$

الحل:

$$x = -4 \rightarrow \text{الإجابة (F)}$$

مراجعة الدروس:

تمثيل الدوال الأسية بيانيا

2 - 1

مثل كل دالة مما يأتي بيانيا ، وحدد مجالها ومداها :

$f(x) = -5(2)^x$ (9)	$f(x) = 3^x$ (8)
$f(x) = 3^{3x} + 5$ (11)	$f(x) = 3(4)^x - 6$ (10)
$f(x) = \frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} + 3$ (13)	$f(x) = 3\left(\frac{1}{4}\right)^x + 3$ (12)

(14) **سكان:** يبلغ عدد سكان مدينة ما 120000 نسمة ، وقد بدأ العدد بالتناقص بمعدل 3 % سنويا .

(a) أكتب دالة تمثل عدد سكان المدينة بعد t سنه .

(b) كم سيكون عدد السكان بعد 10 سنوات ؟

حل المعادلات والمتباينات الأسية

2 - 2

حل كل معادلة مما يأتي :

$3^{4x} = 9^{3x+7}$ (16)	$16^x = \frac{1}{64}$ (15)
$8^{3-3y} = 256^{4y}$ (18)	$64^{3n} = 8^{2n-3}$ (17)
$27^{3x} = 9^{2x-1}$ (20)	$9^{x-2} = \left(\frac{1}{81}\right)^{x+2}$ (19)

(21) **بكتيريا:** بدأت عينة خلايا بكتيرية بـ 5000 خلية . وبعد 8 ساعات أصبح عددها 28000 خلية تقريبا .

(a) أكتب دالة أسية تمثل عدد الخلايا البكتيرية بعد x ساعة إذا استمر تغير عدد الخلايا بالمعدل نفسه .

(b) ماعدد الخلايا البكتيرية المتوقعة بعد 32 h ؟

اللوغاريتمات والدوال اللوغاريتمية

2 - 3

(22) اكتب $\log_2 \frac{1}{16} = -4$ علي الصورة الأسية

(23) أكتب $10^2 = 100$ علي الصورة اللوغاريتمية

أوجد قيمة كل مما يأتي :

$$\log_2 \frac{1}{8} \quad (25)$$

$$\log_4 256 \quad (24)$$

مثل الدالتين الآتيتين بيانيا :

$$f(x) = \frac{1}{6} \log_{\frac{1}{3}}(x - 2) \quad (27)$$

$$f(x) = 2 \log_{10} x + 4 \quad (26)$$

خصائص اللوغاريتمات

2 - 4

استعمل $\log_5 16 \approx 1.7227, \log_5 2 \approx 0.4307$ لتقريب قيمة كل مما يأتي :

$$\log_5 64 \quad (29)$$

$$\log_5 8 \quad (28)$$

$$\log_5 \frac{1}{8} \quad (31)$$

$$\log_5 4 \quad (30)$$

$$\log_5 \frac{1}{2} \quad (32)$$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية مما يأتي بالصورة المطولة :

$$\log_3 2x^5 y^2 z^3 \quad (33)$$

$$\log_5 ab^{-3} c^4 d^{-2} \quad (34)$$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية مما يأتي بالصورة المختصرة :

$$3 \log_2 x^2 - \frac{1}{3} \log_2 (x - 4) \quad (35)$$

$$2 \log_2 (z - 1) - \log_2 (2z - 1) \quad (36)$$

.....
37) هزات أرضية : تقاس قوة الهزة الأرضية بمقياس لوغاريتمي يسمى مقياس ريختر ، وتعطي قوة الهزة M بالمعادلة $M = \log_{10} x$ ، حيث x سعة الموجة التي تسبب حركة الأرض . كم مرة تعادل سعة موجة هزة أرضية سجلت 10 درجات علي مقياس ريختر من سعة هزة أرضية أخرى سجلت 7 درجات علي المقياس نفسه ؟

حل المعادلات والمتباينات اللوغاريتمية

2 - 5

حل كل معادلة أو متباينة مما يأتي :

$$\log_2 \frac{1}{64} = x \quad (39)$$

$$\log_{16} x = \frac{3}{2} \quad (38)$$

$$\log_5 x \quad (41)$$

$$\log_4 x \quad (40)$$

$$\log_9 (3x - 1) = \log_9 (4x) \quad (42)$$

$$\log_2 (x^2 - 18) = \log_2 (-3x) \quad (43)$$

$$\log_3 (3x + 4) \leq \log_3 (x - 2) \quad (44)$$

.....
45) صوت : استعمل القانون $L = 10 \log_{10} R$ ، حيث L ارتفاع الصوت ، R الشدة النسبية للصوت لإيجاد كم مرة يعادل ارتفاع أصوات 20 شخصا يتكلمون في الوقت نفسه مقارنه بارتفاع صوت شخص واحد . علي فرض أن ارتفاع صوت الشخص الواحد يساوي 80 dB .

اللوغاريتمات العشرية

2 - 6

حل كل معادلة أو متباينة مما يأتي ، وقرب الناتج إلي أقرب جزء من عشرة آلاف :

$$6^{x^2} = 28 \quad (47)$$

$$3^x = 15 \quad (46)$$

$$12^{r-1} = 7^r \quad (49)$$

$$8^{m+1} = 30 \quad (48)$$

$$5^{x+2} \leq 3^x \quad (51)$$

$$3^{5n} > 24 \quad (50)$$

.....
(52) أكتب كلا مما يأتي بدلالة اللوغاريتم العشري، ثم أوجد قيمته مقربا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة آلاف :

$$\log_2 15 \quad (b)$$

$$\log_4 11 \quad (a)$$

.....
(53) استثمر خالد مبلغ 10000 ريال في مشروع تجاري ، وتوقع ربحا سنويا نسبته 5%

، وتضاف الأرباح إلى رأس المال كل 4 أشهر . استعمل القانون $A = p \left(1 + \frac{0.05}{3}\right)^{3t}$ ، حيث A المبلغ المتجمع بعد t سنة .

(a) كم الزمن المتوقع ليصبح المبلغ المتجمع 15000 ريال ؟

(b) كم الزمن المتوقع ليصبح المبلغ المتجمع مثلي المبلغ الأصلي ؟