الصف الثاني عشر

الفصل الدراسي الثاني

Unit 3
Vectors المتجهات

اسم الطالب/ .....

اسم المدرسة / ..... الشعبة /.....

مقدمة في المتجهات
Introduction to Vectors

مخرجات التعلم

يجري العمليات على المتجهات و يمثلها هندسيا ، و يحل مسائل المتجهات ، ويحلل المتجهات إلى مركباته المتعامدة

Represent and operate with vectors geometrically, solve vector problems, and resolve vectors into their rectangular

الكميات القياسية والكميات المتجهة يمكن وصف الكثير من الكميات الفيزيائية مثل الكتلة بقيمة عددية واحدة، وعندئذٍ تُسمى **كمية قياسية (عددية)**، ويدل هذا العدد على مقدار الكمية أو قياسها. أما **الكمية المتجهة** فهي كمية لها مقدار واتجاه؛ فمثلاً سرعة الكرة المتجهة نحو المرمى جنوبًا تمثل كلًا من: مقدار سرعة الكرة، واتجاه حركتها.

تحديد الكميات المتجهة

حدّد الكميات المتجهة، والكميات القياسية (العددية) في كلٍّ مما يأتي:

1. يسير قارب بسرعة 15 mi/h في اتجاه الجنوب الغربي.

.....

2. يسير شخص على قدميه بسرعة 75 m/min جهة الغرب.

.....

3. قطعت سيارة مسافة قدرها 20 km .

.....

4. تسير سيارة بسرعة 60 mi / h ، وبزاوية 15° جهة الجنوب الشرقي.

.....

5. هبوط مظلّي رأسيًّا إلى أسفل بسرعة 12.5 mi / h .

.....

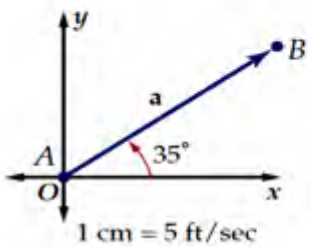
6. طول قطعةٍ مستقيمةٍ 5 cm .

.....

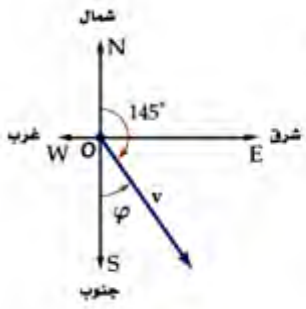
المتجهات:

يمكن تمثيل الكمية المتجهة بسهم يُظهر كلًّا من المقدار والاتجاه ويسمى هذا التمثيل **متجهًا**. ويمثّل الشكل المجاور المتجه الذي له **نقطة البداية** A، **ونقطة النهاية** B. ويرمز لهذا المتجه بالرمز $\overrightarrow{AB}$ أو $\vec{a}$ أو **a** .

أما **طول المتجه** فهو مقدار المتجه ويمثله طول القطعة المستقيمة، ويتناسب مع مقدار الكمية المتجهة، ففي الشكل المجاور، إذا كان مقياس الرسم هو 1 cm = 5 ft/s، فإن طول المتجه **a** ، ويُرمز له بالرمز |**a**| ، يساوي 5 × 2.6 أو 13 ft/s .



يكون المتجه في **الوضع القياسي**. إذا كانت نقطة بداية المتجه هي نقطة الأصل ويعبّر عن **اتجاه المتجه** بالزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الأفقي (الاتجاه الموجب للمحور x). فمثلًا: اتجاه المتجه **a** هو 35° .



ويمكن التعبير عن اتجاه المتجه أيضًا باستعمال زاوية **الاتجاه الربعي** φ ، وتُقرأ فاي، وهي زاوية قياسها بين $0°$ و $90°$ شرق أو غرب الخط الرأسي (خط شمال – جنوب). فمثلًا زاوية الاتجاه الربعي للمتجه $\mathbf{v}$ في الشكل المجاور هي $35°$ جنوب شرق، وتُكتب $S\ 35°\ E$.

كما يمكن استعمال زاوية **الاتجاه الحقيقي** ، حيث تُقاس الزاوية مع عقارب الساعة بدءًا من الشمال. ويُقاس الاتجاه الحقيقي بثلاثة أرقام، فمثلًا يُكتب الاتجاه الذي يحدّد زاوية قياسها $25°$ من الشمال مع عقارب الساعة باستعمال الاتجاه الحقيقي على الصورة $025°$.

تمثيل المتجه هندسيًّا

استعمل مسطرةً ومنقلةً؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

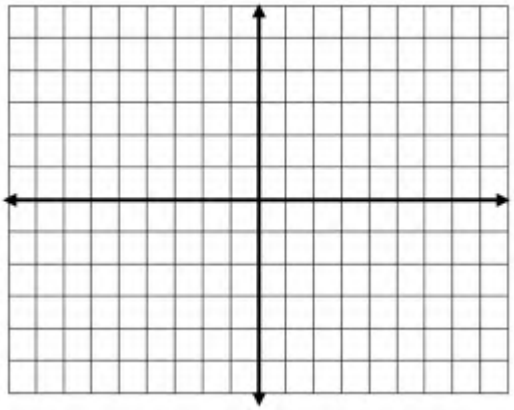
[7] $a = 20\ ft/s$ باتجاه $030°$.

[8] $v = 75\ N$ ، بزاوية قياسها $140°$ مع الاتجاه الأفقي.

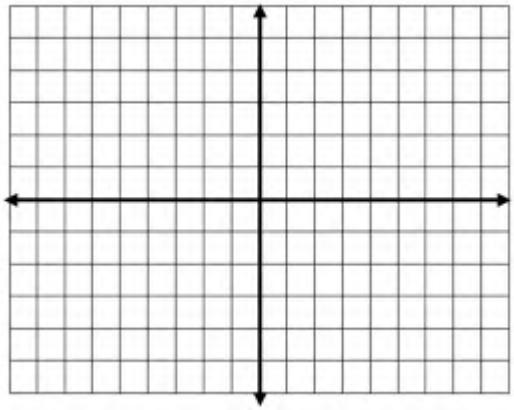
[9] $z = 30\ mi/h$ ، باتجاه $S\ 60°\ W$.

[10] $t = 20\ ft/s$ ، باتجاه $065°$.

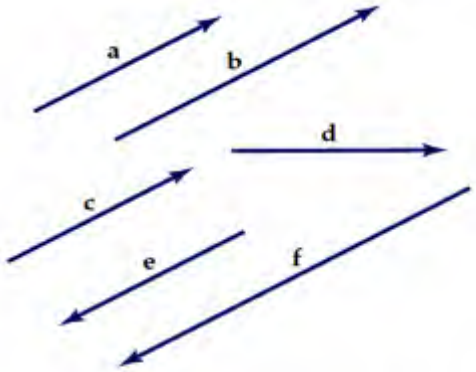
12) $\mathbf{m} = 60\,\mathrm{N}$ ، بزاوية قياسها $80°$ مع الاتجاه الأفقي.



11) $\mathbf{u} = 15\ \mathrm{mi/h}$ ، باتجاه S 25° E



عند إجرائك العمليات على المتجهات، فإنك تحتاج إلى الأنواع الشائعة الآتية من المتجهات:

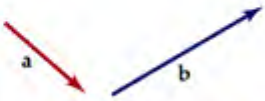


- **المتجهات المتوازية** لها الاتجاه نفسه، أو اتجاهان متعاكسان، وليس بالضرورة أن يكون لها الطول نفسه. فمثلًا في الشكل المجاور $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \parallel \mathbf{c} \parallel \mathbf{e} \parallel \mathbf{f}$.
- **المتجهات المتساوية** لها الاتجاه نفسه، والطول نفسه. ففي الشكل المجاور $\mathbf{a}, \mathbf{c}$ ؛ لهما الطول والاتجاه نفساهما، لذا هما متساويان، ويعبَّر عنه بالرموز: $\mathbf{a} = \mathbf{c}$.
لاحظ أن $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ ؛ لأن $|\mathbf{a}| \neq |\mathbf{b}|$ و $\mathbf{a} \neq \mathbf{d}$ ؛ لأن لهما اتجاهين مختلفين.
- **معكوس المتجه** هو متجه له طول المتجه $\mathbf{a}$ ، ولكنه في اتجاه معاكس له، ويكتب على الصورة $-\mathbf{a}$، ففي الشكل المجاور $\mathbf{e} = -\mathbf{a}$.

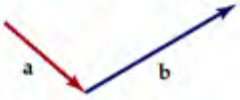
مفهوم أساسي — إيجاد المحصلة

قاعدة المثلث

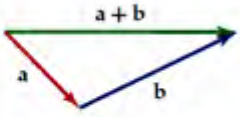
لإيجاد محصلة المتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، اتبع الخطوتين الآتيتين:



الخطوة 1 أجر انسحابًا للمتجه $\mathbf{b}$ ، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة نهاية المتجه $\mathbf{a}$.



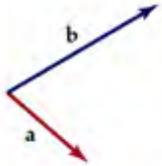
الخطوة 2 محصلة المتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هي المتجه المرسوم من نقطة بداية $\mathbf{a}$ إلى نقطة نهاية $\mathbf{b}$.



قاعدة متوازي الأضلاع

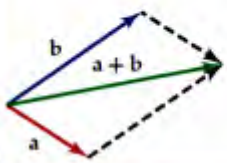
لإيجاد محصلة المتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، اتبع الخطوات الآتية :

الخطوة 1 أجر انسحابًا للمتجه $\mathbf{b}$ ، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية المتجه $\mathbf{a}$.



الخطوة 2 أكمل رسم متوازي الأضلاع الذي ضلعاه $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

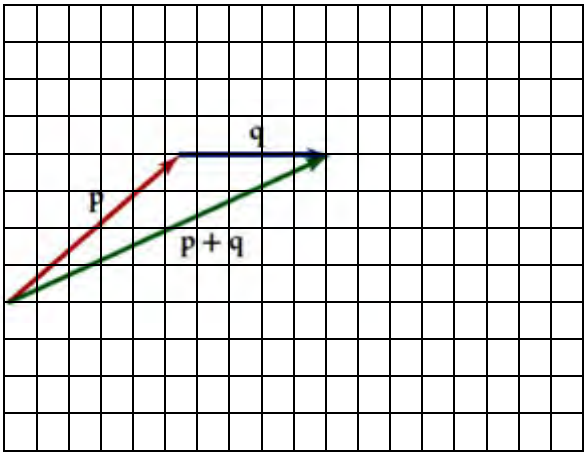
الخطوة 3 محصلة المتجهين هي المتجه الذي يُمثله قطر متوازي الأضلاع .



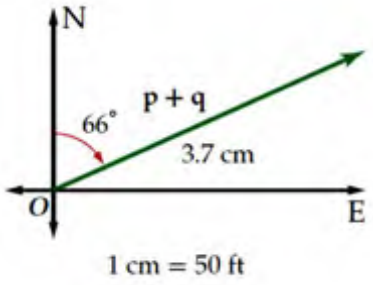
إيجاد محصلة متجهين

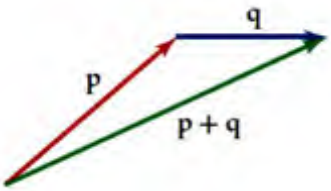
13 **رياضة المشي:** قطع عبد الله في سباق للمشي، مسافة 120 m باتجاه N 50° E، ثم مسافة 80 m في اتجاه الشرق. كم يبعُد عبد الله عن نقطة البداية، وما هي زاوية الاتجاه الربعي؟

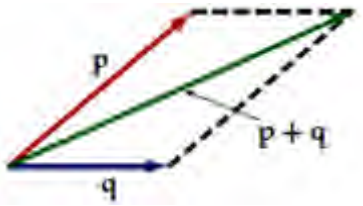
خطوات الحل



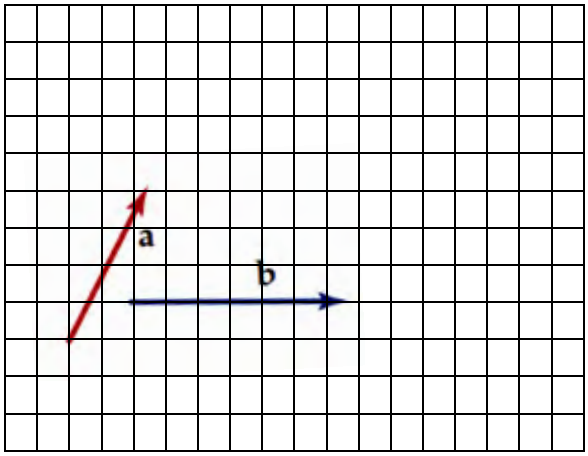
الإجابة

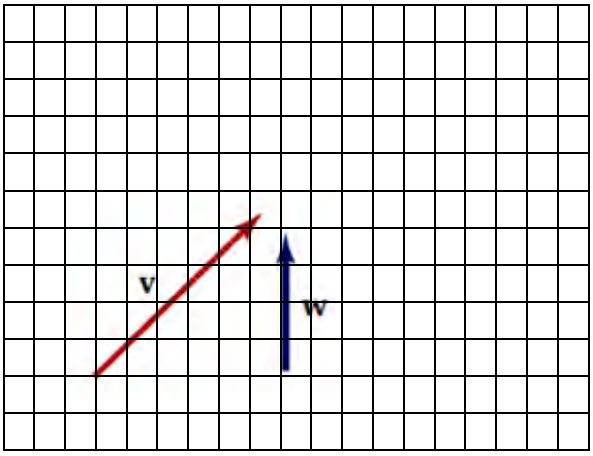




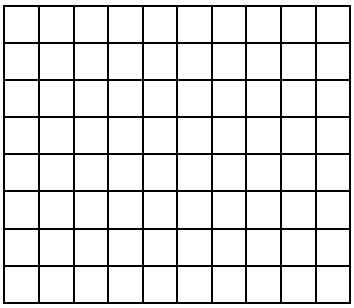


أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملًا قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع. ثمّ حدّد اتجاهها بالنسبة للأفقي.

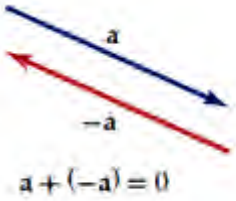




14 **لعبة أطفال:** رمى طفل كرةً صغيرةً في لعبة مخصصة للأطفال بسرعة $7\,in/s$ ، باتجاه $310°$ ، فارتدت باتجاه $055°$ ، وبسرعة $4\,in/s$. أوجد مقدار محصلة حركة الكرة والاتجاه الحقيقي لها.
(قرب طول المحصلة إلى أقرب بوصة، والاتجاه إلى أقرب درجة)



عند جمع متجهين متعاكسين لهما الطول نفسه، فإن المحصلة هي **المتجه الصفري**. ويرمز له بالرمز $\vec{0}$ أو 0 ، وطوله صفر ، وليس له اتجاه. وعملية طرح المتجهات تشبه عملية طرح الأعداد. لإيجاد $p - q$ ، اجمع معكوس q إلى p ؛ أي أن: $p - q = p + (-q)$.



و كذلك يمكن ضرب المتجه في عددٍ حقيقيٍّ:

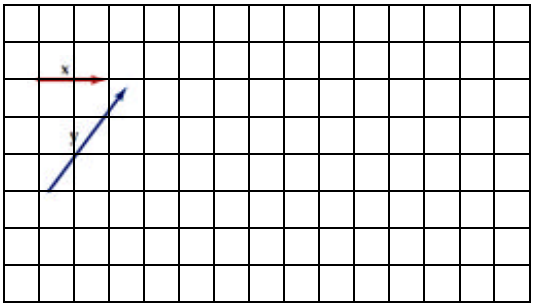
مفهوم أساسي — **ضرب المتجه في عدد حقيقي**

إذا ضُرب المتجه $\mathbf{v}$ في عدد حقيقي k ينتج المتجه $k\mathbf{v}$ الذي يوازي المتجه $\mathbf{v}$، ويكون طول المتجه $k\mathbf{v}$ هو $|k|\,|\mathbf{v}|$. ويتحدّد اتجاهه بإشارة k .

- إذا كانت $k > 0$ ، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو اتجاه $\mathbf{v}$ نفسه.
- إذا كانت $k < 0$ ، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو عكس اتجاه $\mathbf{v}$.

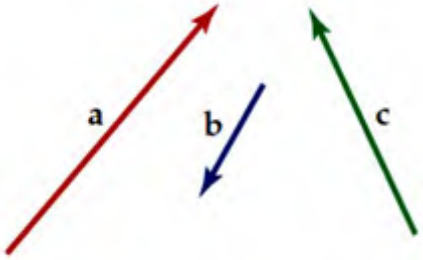
العمليات على المتجهات

15 ارسم المتجه $3\mathbf{x} - \frac{3}{4}\mathbf{y}$ ، حيث $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ متجهان كما في الشكل المجاور.

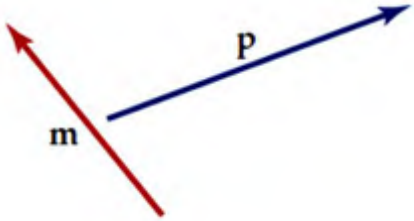


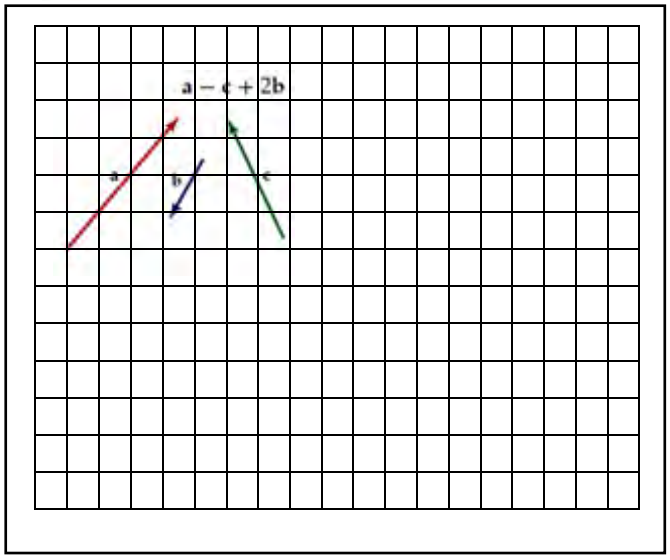
16 ارسم المتجه الذي يُمثّل كلًّا مما يأتي :

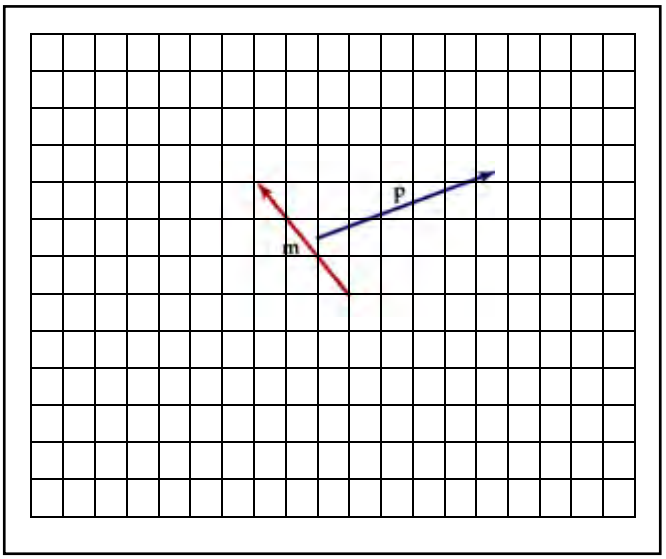
$\mathbf{a} - \mathbf{c} + 2\mathbf{b}$



$\mathbf{m} - \frac{1}{4}\mathbf{p}$







تطبيقات المتجهات: يُسمى المتجهان اللّذان ناتج جمعهما المتجه r ، **مركبتي** r . ومع أن مركبتي المتجه يمكن أن تكونا في أي اتجاه، إلا أنه من المفيد غالبًا تحليل المتجه إلى **مركبتين متعامدتين**، واحدة أفقية، والأخرى رأسية. ففي الشكل المجاور، يمكن اعتبار القوة r المبذولة لسحب العربة بصفتها مجموع مركبتين هما أفقية x تحرك العربة إلى الأمام، ورأسية y تسحب العربة إلى أعلى.

تحليل القوة إلى مركبتين متعامدتين

17 **قص العشب:** يدفع علي عربة قصِّ العشب بقوة مقدارها 450 N ، وبزاوية قياسها 56° مع الأفقي (سطح الأرض).

a) ارسم شكلًا يوضِّح تحليل القوة التي يبذلها علي إلى مركبتين متعامدتين.

.....

.....

.....

.....

.....

b) أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين؛ الأفقية والرأسية للقوة.

.....

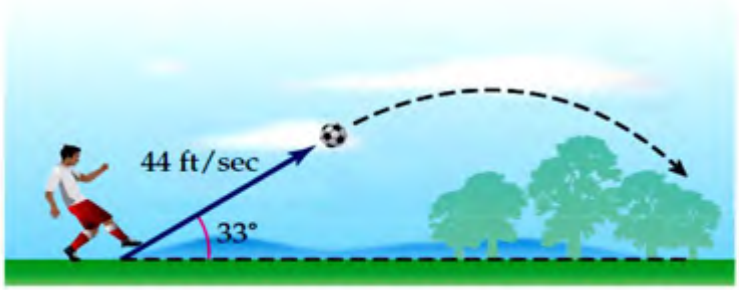
.....

.....

.....

.....

18 **كرة قدم:** يركل لاعبٌ كرةَ قدمٍ من سطح الأرض بسرعةٍ مقدارها 44 ft/s ، وبزاوية قياسها 33° مع سطح الأرض كما في الشكل أدناه.



A) ارسم شكلًا يوضِّح تحليل هذه السرعة إلى مركبتين متعامدتين.

.....

.....

.....

.....

.....

B) أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة .

.....

.....

.....

.....

.....

19 **تنظيف:** يدفع حسن عصا مكنسة التنظيف بقوة مقدارها 190 N ، وبزاوية قياسها 33° مع سطح الأرض كما في الشكل المجاور. **(مثال 5)**

a) ارسم شكلًا يوضِّح تحليل هذه القوة إلى

.....

.....

.....

.....

b) أوجد مقدار كلٍّ من المركبة الأفقية والمركبة الرأسية.

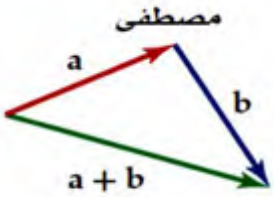
.....

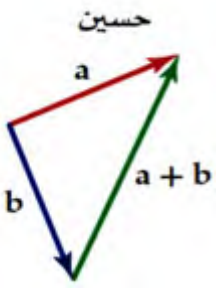
.....

.....

.....

20 **اكتشف الخطأ:** حاول كلٌّ من حسين ومصطفى إيجاد محصلة المتجهين a , b . أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.





.....

.....

.....

.....

.....

المتجهات في المستوى الإحداثي
Vectors in the Coordinate Plane

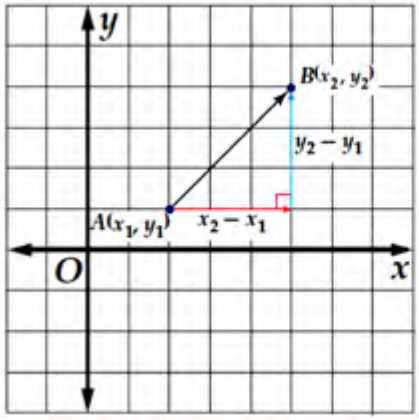
مخرجات التعلم

يجري العمليات على المتجهات في المستوى الإحداثي ويمثلها بيانيا ، ويكتب المتجه بالتوافق الخطي لمتجهي الوحدة

Represent and operate with vectors in the coordinate plane and write a vector as a linear combination of unit vectors

مفهوم أساسي

الصورة الإحداثية لمتجه



الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ ، ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي :

$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$

التعبير عن المتجه بالصورة الإحداثية

[1] أوجد الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ ، الذى نقطة بدايته $A(-4, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

.....

.....

.....

أوجد الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي:

[2] $A(-2, -7), B(6, 1)$ [3] $A(0, 8), B(-9, -3)$

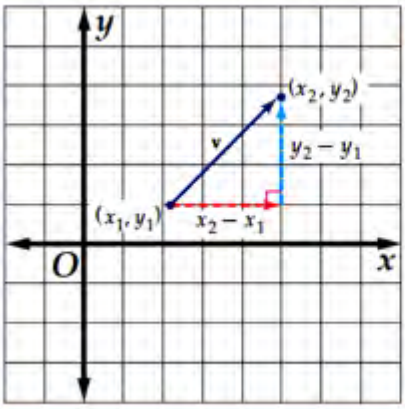
.....

.....

.....

مفهوم أساسي

طول المتجه في المستوى الإحداثي



إذا كان $\mathbf{v}$ متجهًا، نقطة بدايته (x_1, y_1) ، ونقطة نهايته (x_2, y_2) ، فإن طول $\mathbf{v}$ يُعطى بالصيغة:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وإذا كانت $\langle a, b \rangle$ هي الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ فإن :

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

4 أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-4, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

.....

.....

.....

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي:

5 $A(-2, -7), B(6, 1)$

.....

.....

.....

6 $A(0, 8), B(-9, -3)$

.....

.....

.....

7 $A(-3, 1), B(4, 5)$

.....

.....

.....

8 $A(-2, 6), B(1, 10)$

.....

.....

.....

9 $A(10, -2), B(3, -5)$

.....

.....

.....

مفهوم أساسي العمليات على المتجهات

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ متجهين، و k عددًا حقيقيًا، فإن:

جمع متجهين	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$
طرح متجهين	$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$
ضرب متجهٍ في عددٍ حقيقيٍّ	$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$

10 أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات $\mathbf{a} = \langle 2, 5 \rangle, \mathbf{b} = \langle -3, 0 \rangle, \mathbf{c} = \langle -4, 1 \rangle$:

(a $\mathbf{c} + \mathbf{a}$ (b $\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$

.....

.....

.....

11 أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{a} = \langle 2, 5 \rangle, \mathbf{b} = \langle -3, 0 \rangle, \mathbf{c} = \langle -4, 1 \rangle$:

$4\mathbf{c} + \mathbf{b}$ $-3\mathbf{c}$ $2\mathbf{c} + 4\mathbf{a} - \mathbf{b}$

.....

.....

.....

.....

.....

متجهات الوحدة: يُسمَّى المتجه الذي طوله 1 **متجه الوحدة**، ويرمز له بالرمز **u**، ولإيجاد متجه الوحدة **u** الذي له نفس اتجاه المتجه **v** ، اقسم المتجه **v** على طوله $|\mathbf{v}|$.

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$

وبذلك يكون $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\,\mathbf{u}$. ونكون قد عبَّرنا عن المتجه غير الصفريّ **v** في صورة حاصل ضرب متجه وحدة بنفس اتجاه **v** في عددٍ حقيقيٍّ.

إيجاد متجه وحدة له نفس الاتجاه لمتجه معطى

12 أوجد متجه الوحدة $\mathbf{u}$ الذي له نفس اتجاه $\mathbf{v} = \langle -2, 3 \rangle$.

.....

.....

.....

.....

.....

أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه المُعطى في كلٍّ ممَّا يأتي:

أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه المُعطى في كلٍّ ممَّا يأتي:

13 $\mathbf{w} = \langle 6, -2 \rangle$

.....

.....

.....

.....

.....

14 $\mathbf{x} = \langle -4, -8 \rangle$

.....

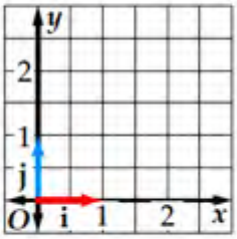
.....

.....

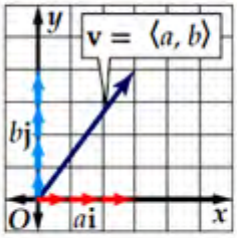
.....

.....

يُرمز لمتجهي الوحدة بالاتجاه الموجب لمحور x، والاتجاه الموجب لمحور y بالرمزين $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$, $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$ ، على الترتيب كما في الشكل 3.2.3 . كما يُسمَّى المتجهان $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ **متجهَي الوحدة القياسيين**.



الشكل 3.2.3



الشكل 3.2.4

ويمكن استعمال هذين المتجهين للتعبير عن أي متجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ على الصورة $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ كما في الشكل 3.2.4؛ وذلك لأن:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \langle a, b \rangle && \text{الصورة الإحداثية} \\ &= \langle a, 0 \rangle + \langle 0, b \rangle && \text{أعد كتابة المتجه على صورة ناتج جمع متجهين} \\ &= a\langle 1, 0 \rangle + b\langle 0, 1 \rangle && \text{اضرب متجه في عدد حقيقي} \\ &= a\mathbf{i} + b\mathbf{j} && \langle 1, 0 \rangle = \mathbf{i}, \langle 0, 1 \rangle = \mathbf{j} \end{aligned}$$

تسمى الصورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ **توافقًا خطيًّا** للمتجهين $\mathbf{i}, \mathbf{j}$. ويُقصد بها كتابة المتجه بدلالة متجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$

كتابة متجه على صورة توافق خطي لمتجهَي الوحدة

15 إذا كانت نقطة بداية المتجه $\overrightarrow{DE}$ هي $D(-2, 3)$ ، ونقطة نهايته $E(4, 5)$ ، فاكتب $\overrightarrow{DE}$ على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$.

.....

.....

.....

.....

.....

اكتب المتجه $\overrightarrow{DE}$ المُعطى نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ في كلٍّ ممَّا يأتي :

16 $D(-6, 0), E(2, 5)$

.....

.....

.....

.....

.....

17 $D(-3, -8), E(7, 1)$

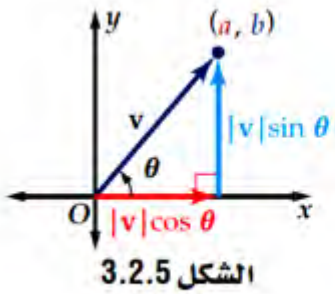
.....

.....

.....

.....

.....



الشكل 3.2.5

ويمكن كتابة المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ ، باستعمال زاوية الاتجاه التي يصنعها $\mathbf{v}$ مع الاتجاه الموجب لمحور x. فمن الشكل 3.2.5 يمكن كتابة $\mathbf{v}$ على الصورة الإحداثية، أو على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ كما يأتي:

$$\mathbf{v} = \langle a, b \rangle \quad \text{الصورة الإحداثية}$$
$$= \langle |\mathbf{v}| \cos\theta, |\mathbf{v}| \sin\theta \rangle \quad \text{عوّض}$$
$$= |\mathbf{v}| (\cos\theta)\mathbf{i} + |\mathbf{v}| (\sin\theta)\mathbf{j} \quad \text{توافق خطي من } \mathbf{i}, \mathbf{j}$$

إيجاد الصورة الإحداثية

18 أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ الذي طوله 10 ، وزاوية اتجاهه $120°$ مع الأفقي.

.....

.....

.....

.....

.....

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي في كلٍّ ممَّا يأتي :

19 $|\mathbf{v}| = 8, \theta = 45°$

.....

.....

.....

.....

.....

20 $|\mathbf{v}| = 24, \theta = 210°$

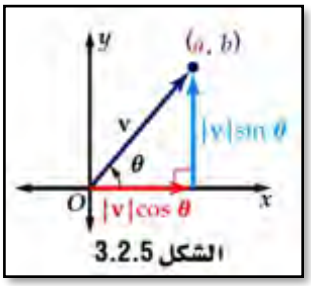
.....

.....

.....

.....

.....



الشكل 3.2.5

فمن الشكل 3.2.5 تستنتج أنه يمكن إيجاد زاوية اتجاه المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ مع الاتجاه الأفقي (الموجب لمحور x) بحَلّ المعادلة المثلثية: $\tan\theta = \frac{|\mathbf{v}|\sin\theta}{|\mathbf{v}|\cos\theta}$، أو $\tan\theta = \frac{b}{a}$.

زوايا الاتجاه للمتجهات

21 أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x.

(a $\mathbf{p} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

.....

.....

.....

.....

.....

(b $\mathbf{r} = \langle 4, -5 \rangle$

.....

.....

.....

.....

.....

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهين الآتيين مع الاتجاه الموجب لمحور x.

22 $-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

.....

.....

.....

.....

.....

23 $\langle -3, -8 \rangle$

.....

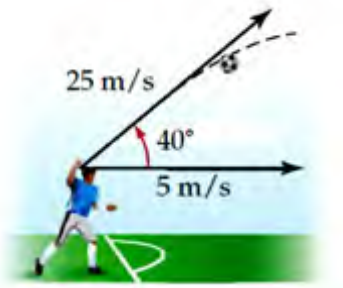
.....

.....

.....

.....

تطبيق العمليات على المتجهات



24 **كرة قدم:** يركض حارس مرمى في لعبة كرة القدم للأمام بسرعة 5 m/s ، ليرمي الكرة بسرعة 25 m/s ، بزاوية 40° مع الأفقي. أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

كرة قدم: أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة إذا تحرك اللاعب إلى الأمام بسرعة 7 m/s

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

الضرب الداخلي
Dot Product

مخرجات التعلم

يجد الضرب الداخلي لمتجهين ، ويستخدمه في إيجاد الزاوية بينهما.

Find the dot product of two vectors, and use the dot product to find the angle between them

مفهوم أساسي — الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى الإحداثي

يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ كالآتي :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

لاحظ أنه خلافًا لعمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات، فإن حاصل الضرب الداخلي لمتجهين يكون عددًا وليس متجهًا. ويتعامد متجهان غير صفريين، إذا وفقط إذا كان حاصل ضربهما الداخلي صفرًا. ويقال للمتجهين اللّذين حاصل ضربهما الداخلي صفر: **متجهان متعامدان** .

مفهوم أساسي — المتجهان المتعامدان

يكون المتجهان غير الصفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ متعامدين، إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

استعمال الضرب الداخلي في التحقق من تعامد متجهين

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

[1] $\mathbf{u} = \langle 3, 6 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 2 \rangle$

.....

.....

.....

[2] $\mathbf{u} = \langle 2, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 4 \rangle$

.....

.....

.....

[3] $\mathbf{u} = \langle -2, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 9, -6 \rangle$

.....

.....

.....

[4] $\mathbf{u} = \langle 3, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 1 \rangle$

.....

.....

.....

[5] $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

.....

.....

.....

.....

[6] $\mathbf{u} = 11\mathbf{i} + 7\mathbf{j}, \mathbf{v} = -7\mathbf{i} + 11\mathbf{j}$

.....

.....

.....

.....

.....

نظريَّة

خصائص الضرب الداخلي

إذا كانت $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ متجهات، وكان k عددًا حقيقيًّا، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

الخاصية الإبدالية	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
خاصية التوزيع	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
خاصية الضرب في عدد حقيقي	$k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v}$
خاصية الضرب الداخلي في المتجه الصفري	$0 \cdot \mathbf{u} = 0$
العلاقة بين الضرب الداخلي وطول المتجه	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$

البرهان

إثبات أن: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$

افترض أن: $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$

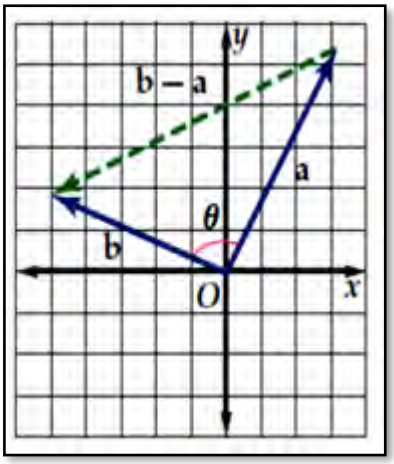
الضرب الداخلي	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2$
اكتب على صورة مربع جذر $(u_1^2 + u_2^2)$	$= \left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\right)^2$
$\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \lvert\mathbf{u}\rvert$	$= \lvert\mathbf{u}\rvert^2$

استعمال الضرب الداخلي لإيجاد طول متجه

7 استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول كلٍّ من المتجهات الآتية :

$\mathbf{a} = \langle -5, 12 \rangle$ $\mathbf{b} = \langle 12, 16 \rangle$ $\mathbf{c} = \langle -1, -7 \rangle$

.....



الزاوية θ بين أي متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هي الزاوية بين هذين المتجهين، عندما يكونان في وضع قياسي كما في الشكل المجاور، حيث: $0 \le \theta \le \pi$ ، أو $0° \le \theta \le 180°$ ، ويمكن استعمال الضرب الداخلي؛ لإيجاد قياس **الزاوية بين متجهين** غير صفريين.

مفهوم أساسي — **الزاوية بين متجهين**

إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، فإن:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

إيجاد قياس الزاوية بين متجهين

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

8) $\mathbf{u} = \langle 6, 2 \rangle , \mathbf{v} = \langle -4, 3 \rangle$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

9) $\mathbf{u} = \langle 3, 1 \rangle , \mathbf{v} = \langle 3, -3 \rangle$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

10 $\mathbf{u} = \langle -5, -2 \rangle , \mathbf{v} = \langle 4, 4 \rangle$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

11 $\mathbf{u} = \langle 9, 5 \rangle , \mathbf{v} = \langle -6, 7 \rangle$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

12 **مواصلات:** انطلق القطاران A , B من نقطة واحدة. إذا كان $\langle 33, 12 \rangle$ يُمثّل مسار القطار A ، و $\langle 55, 4 \rangle$ يُمثّل مسار القطار B ، فأوجد قياس الزاوية بين المتجهين.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

من واقع الحياة

13

سيارة: يدفع شخص سيارةً بقوةٍ ثابتةٍ مقدارها 120 N بزاوية 45° كما في الشكل المجاور، أوجد الشغل المبذول بالجول لتحريك السيارة 10 m (بإهمال قوة الاحتكاك).

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

14

تنظيف: يدفع إبراهيم مكنسةً كهربائيةً بقوةٍ مقدارها 25 N، إذا كان قياس الزاوية بين ذراع المكنسة وسطح الأرض 60°، فأوجد الشغل بالجول الذي يبذله إبراهيم عند تحريك المكنسة مسافة 6 m؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مع خالص الدعاء لكم بالنجاح والتوفيق

MATH 2020