قناة ملازم الرياضيات http://t.me/alllaaam82
مدرس الرياضيات http://t.me/mustafaallam

McGraw-Hill Education

الرياضيات

المسار العام

نسخة الإمارات العربية المتحدة

Mc Graw Hill Education

Project: McGraw-Hill Education United Arab Emirates Edition Grade 09 Integrated Math Vol 2

FM. Front Matter, from Integrated Math I © 2012
7. Quadratic Expressions and Equations, from Integrated Math II Chapter 1 © 2012
8. Exponents and Exponential Functions, from Integrated Math I Chapter 7 © 2012
& Radical Functions, Rational Functions, and Geometry, from Integrated Math I Chapter 8 © 2012
9. Set Theory, from Math in Our World Chapter 2 © 2019
10. Reasoning and Proof, from Geometry Chapter 02 © 2014
EM. End Matter/Glossary, from Integrated Math I © 2012

صورة الغلاف: hunthomas/Shutterstock.com

mheducation.com/prek-12

جميع الحقوق محفوظة © للعام 2020 لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

جميع الحقوق محفوظة. لا يجوز إعادة إنتاج أي جزء من هذا المنشور أو توزيعه في أي صورة أو بأي وسيلة كانت أو تخزينه في قاعدة بيانات أو نظام استرداد من دون موافقة خطية مسبقة من McGraw-Hill Education، بما في ذلك، على سبيل المثال لا الحصر، التخزين على الشبكة أو الإرسال عبرها أو البث لأغراض التعليم عن بُعد.

الحقوق الحصرية للتصنيع والتصدير عائدة لمؤسسة McGraw-Hill Education. لا يمكن إعادة تصدير هذا الكتاب من البلد الذي باعته له McGraw-Hill Education. هذه النسخة الإقليمية غير متاحة خارج أوروبا والشرق الأوسط وإفريقيا.

طُبع في دولة الإمارات العربية المتحدة.

رقم النشر الدولي: 978-1-52-689935-4 (نسخة الطالب)
MHID: 1-52-689935-3 (نسخة الطالب)
رقم النشر الدولي: 978-1-52-689937-8 (نسخة المعلم)
MHID: 1-52-689937-X (نسخة المعلم)

النسخة الإلكترونية

رقم النشر الدولي: 978-1-52-689945-3 (نسخة الطالب)
MHID: 1-52-689945-0 (نسخة الطالب)
رقم النشر الدولي: 978-1-52-689947-7 (نسخة المعلم)
MHID: 1-52-689947-7 (نسخة المعلم)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 XXX 22 21 20 19 18 17

ملخص المحتويات

الوحدة 1 التعابير والمعادلات والدوال

الوحدة 2 المعادلات الخطية

الوحدة 3 الدوال الخطية

الوحدة 4 معادلات الدوال الخطية

الوحدة 5 المتباينات الخطية

الوحدة 6 أنظمة المعادلات والمتباينات الخطية

الوحدة 7 التعابير والمعادلات التربيعية

الوحدة 8 الأسس والتعابير الجذرية

الوحدة 9 نظرية المجموعات

الوحدة 10 المنطق والبرهان الرياضي

الوحدة 11 التبرير والبرهان

الوحدة 12 المستقيمات المتوازية والمتعامدة

الوحدة 13 المثلثات المتطابقة

كتيب الطالب

chapter sourced from Integrated Math I © 2012 McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مدرسة

الوحدة 7 التعابير والمعادلات التربيعية

الاستعداد للوحدة 7 363

الاستكشاف: مختبر الجبر جمع وطرح كثيرات الحدود 365

7-1 جمع كثيرات الحدود وطرحها 367

7-2 ضرب كثيرة حدود في أحادية حد 374

الاستكشاف: مختبر الجبر ضرب كثيرات الحدود 380

7-3 ضرب كثيرات الحدود 382

7-4 نواتج الضرب الخاصة 388

■ اختبار منتصف الوحدة 394

الاستكشاف: مختبر الجبر التحليل الى العوامل الأولية باستخدام خاصية التوزيع 395

7-5 استخدام خاصية التوزيع 396

الاستكشاف: مختبر الجبر تحليل ثلاثية الحدود للعوامل الأولية 403

7-6 حل $x^2+bx+c=0$ 405

7-7 حل $ax^2+bx+c=0$ 412

7-8 الفرق بين مربعين 318

7-9 المربعات الكاملة 424

التقويم

■ دليل الدراسة والمراجعة 432

■ تدريب على الاختبار 437

■ التحضير للاختبارات المعيارية 438

■ تدريب على الاختبار المعياري، للوحدة 7 440

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 8 الأسس والتعابير الجذرية

الاستعداد للوحدة 8 443

8-1 خواص ضرب الأسس 445

8-2 خواص قسمة الأسس 452

8-3 الأسس النسبية 460

8-4 الترميز العلمي 468

■ اختبار منتصف الوحدة 475

8-5 تبسيط التعابير الجذرية 477

التوسّع: مختبر الجبر الأعداد النسبية وغير النسبية 483

8-6 العمليات على التعابير الجذرية 484

التوسّع: مختبر الجبر تبسيط تعابير الجذور النونية 489

التقويم

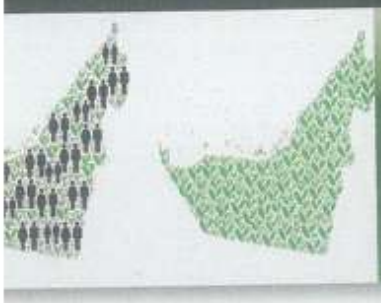
■ دليل الدراسة والمراجعة 491

■ تدريب على الاختبار 495

■ التحضير للاختبارات المعيارية 496

■ تدريب على الاختبار المعياري، الوحدات 1 الى 8 498

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



الوحدة 9 نظرية المجموعات

الاستعداد للوحدة 9 501

9-1 مقدمة في نظرية المجموعات 502

■ مجموعة التمارين 510

9-2 المجموعات الجزئية والعمليات على المجموعات 515

■ مجموعة التمارين 523

9-3 استخدام مخططات فن Venn لدراسة العمليات على المجموعات 526

■ مجموعة التمارين 535

9-4 استخدام المجموعات لحل المسائل 537

■ مجموعة التمارين 544

9-5 المجموعات غير المنتهية 547

■ مجموعة التمارين 551

■ الملخص 552

التقويم

■ تمارين المراجعة 553

■ اختبار على الوحدة 556

■ المشاريع 557

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 10 المنطق والبرهان الرياضي

الاستعداد للوحدة 10 559

10-1 التبرير الاستقرائي والتخمين 561

10-2 المنطق 569

10-3 العبارات الشرطية 577

التوسّع: **مختبر الهندسة** عبارات ثنائية الشرط 586

10-4 التبرير الإستنتاجي 587

تقويم

- **دليل الدراسة والمراجعة** 596
- **تدريب على الاختبار** 599
- **التحضير للاختبارات المعيارية** 600
- **تدريب على الاختبار المعياري، الوحدات من 1 إلى 10** 602

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

كتيب الطالب

الرموز والصيغ والمفاهيم الأساسية

الرموز EM-1

القياسات EM-2

العمليات والعلاقات الحسابية EM-3

الصيغ والمفاهيم الجبرية EM-3

الصيغ والمفاهيم الهندسية EM-5

الدوال والمتطابقات المثلثية EM-6

الدوال الأصلية والعمليات الحسابية على الدوال EM-7

النهايات والتفاضل والتكامل EM-7

الصيغ والمفاهيم الاحصائية EM-8

قاموس المصطلحات متوفر في النسخة الإلكترونية

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 7

التعابير والمعادلات التربيعية

Chapter sourced from Quadratic Expressions and Equations, Enriched Math II Chapter 1 © 2012 McGraw-Hill Education
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

السابق

- قبل تطبيق قوانين الأسس واستكشاف الدوال الخطية.

الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:
  - جمع، طرح ، وضرب كثيرات الحدود.
  - تحليل ثلاثية الحدود إلى العوامل.
  - تحليل الفرق بين مربعين إلى العوامل.
  - تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا.
  - حل المعادلات التربيعية.

لماذا؟

- **الهندسة المعمارية** يمكن استخدام المعادلات التربيعية لتمثيل نموذج أشكال المباني المعمارية مثل أطول نصب تذكاري في الولايات المتحدة وهو قوس جيت واي بولاية ميسوري.

الاستعداد للوحدة

تحديد مدى الاستعداد حل اختبار التدريب السريع أدناه للتحقق من المهارات المطلوبة لديك. وعد إلى المراجعة السريعة للمساعدة.

مراجعة سريعة

أعد كتابة كل تعبير باستخدام خاصية التوزيع، ثم بسّط.

1. $a(a + 5)$
2. $2(3 + x)$
3. $n(n - 3n^2 + 2)$
4. $-6(x^2 - 5x + 6)$
5. **المعرفة المالية** خمسة أصدقاء سوف يدفعون AED 9 لكل تذكرة، و AED 3 لكل مشروب، و AED 6 لكل عبوة فشار في السينما. اكتب تعبيرًا يمكن استخدامه لتحديد تكلفة ذهابهم إلى السينما.

بسّط كل تعبير مما يلي. إذا لم يكن هذا ممكنًا، فاكتب مبسّط.

6. $3u + 10u$
7. $5a - 2 + 6a$
8. $6m^2 - 8m$
9. $4w^2 + w + 15w^2$
10. $2x^2 + 5 - 11x^2$
11. $8v^3 - 27$
12. $4k^2 + 2k - 2k + 1$
13. $a^2 - 4a - 4a + 16$
14. $6y^2 + 2y - 3y - 1$
15. $9g^2 - 3g - 6g + 2$

بسّط.

16. $b(b^6)$
17. $4n^3(n^2)$
18. $8m(4m^2)$
19. $-5z^4(3z^5)$
20. $5xy(4x^3y)$
21. $(-2a^4c^5)(7ac^4)$
22. **الهندسة** مربع يبلغ طول ضلعه $6X^3$ cm. ما مساحة المربع؟

تدريب سريع

مثال 1

أعِد كتابة $6x(-3x - 5x - 5x^2 + x^3)$ باستخدام خاصية التوزيع. ثم بسّط.

$$\begin{aligned}6x(-3x - 5x - 5x^2 + x^3) &= 6x(-3x) + 6x(-5x) + 6x(-5x^2) + 6x(x^3)\\ &= -18x^2 - 30x^2 - 30x^3 + 6x^4\\ &= -48x^2 - 30x^3 + 6x^4\end{aligned}$$

مثال 2

بسّط $8c + 6 - 4c + 2c^2$.

$$\begin{aligned}8c + 6 - 4c + 2c^2 &= 2c^2 + 8c - 4c + 6\\ &= 2c^2 + (8 - 4)c + 6\\ &= 2c^2 + 4c + 6\end{aligned}$$

مثال 3

بسّط $(-2y^3)(9y^4)$.

$$\begin{aligned}(9y^3)(-2y^4) &= (-2 \cdot 9)(y^3 \cdot y^4)\\ &= (-2 \cdot 9)(y^{3+4})\\ &= -18y^7\end{aligned}$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

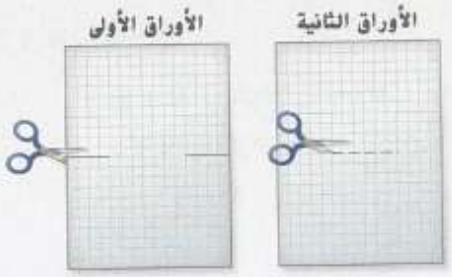
البدء في هذه الوحدة

سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهاراتٍ ومفرداتٍ جديدةٍ أثناء دراستك لهذه الوحدة. ولكي تستعد، حدّد المفردات المهمّة ونظّم مواردك. قد تحتاج إلى العودة إلى وحدات سابقة لمراجعة المهارات المطلوبة.

المطويات منظّم الدراسة

التعابير والمعادلات التربيعية شكّل المطوية التالية لمساعدتك في تنظيم ملاحظاتك عن التعابير والمعادلات التربيعية. وابدأ بخمس ورقات تمثيل بياني.

1 **اطوِ** الورق إلى نصفين بالعرض. على أول ثلاث ورقات، قصّ مسافة 5 سنتيمترات على طول الطية من على الجانبين. على الورقتين الباقيتين، قصّ من المنتصف. وتوقف على مسافة 5 سنتيمترات من الجانبين.



2 **أدخل** مجموعة الأوراق الأولى خلال المجموعة الثانية وحاذِ بين الطيّتين. سمّ الوجه الأمامي الوحدة 7. التعابير والمعادلات التربيعية. وسمّ الصفحات بأرقام الدرس والصفحة الأخيرة بالمفردات.

المفردات الجديدة

كثيرة الحدود Polynomial

ذات الحدّين Binomial

ثلاثية الحدود Trinomial

درجة أحادية الحد Degree of a monomial

درجة كثيرة الحدود Degree of a polynomial

الصيغة القياسية Standard form of a Polynomial لكثيرة الحدود

معامل رئيس Leading coefficient

طريقة فويل FOIL method

تعبير تربيعي Quadratic expression

التحليل إلى العوامل Factoring

التحليل إلى العوامل بالتجميع Factoring by grouping

خاصية الضرب الصفري Zero Product Property

كثيرة حدود أولية Prime polynomial

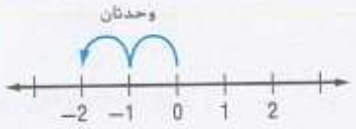
فرق بين مربعين Difference of two Squares

ثنائية حدود مربع كامل Perfect square trinomial

خاصية الجذر التربيعي Square Root Property

مراجعة المفردات

القيمة المطلقة القيمة المطلقة لأي عدد n هي مقدار المسافة بينه وبين الصفر على خط الأعداد وتكتب $|n|$



القيمة المطلقة للعدد 2- هي 2 لأنها عبارة عن وحدتين بداية من الصفر.

المُربع الكامل عدد يكون جذره التربيعي عددًا نسبيًا

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مختبر الجبر
جمع كثيرات الحدود وطرحها

يمكن استخدام القطع الجبرية لتمثيل كثيرات الحدود. كثيرة الحدود هي تعبير أحادي الحد أو مجموع تعابير أحادية الحد. يوضح الرسم التخطيطي أدناه النماذج.

نماذج كثيرة الحدود

- يتم تمثيل نماذج كثيرة الحدود باستخدام ثلاثة أنواع من المربعات.
- لكل مربع عدد مقابل.

النشاط 1 تمثيل كثيرات الحدود

استخدم القطع الجبرية لتمثيل كل كثيرة حدود.

- $5x$

لتمثيل كثيرة الحدود هذه، ستحتاج إلى x 5 مربعات خضراء.

- $-2x^2 + x + 3$

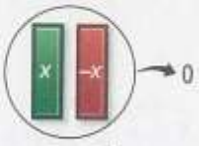
لتمثيل كثيرة الحدود هذه، ستحتاج إلى $-x^2$ 2 مربع أحمر و1 مربع أخضر x و3 مربعات صفراء من الفئة 1.

تسمى الدوال أحادية الحد مثل $3x$ و$-2x$ حدود *متشابهة* لأن لهما نفس المتغير مرفوع إلى القوة نفسها.

نماذج كثيرة الحدود

- تُمثَّل الحدود المتشابهة عن طريق مربعات لها نفس الشكل والحجم.
- A زوج صفري يمكن تكوينه عن طريق جمع مربع واحد مع مقابله. يمكنك إزالة الزوجين الصفريين أو إضافتهما دون تغيير كثيرة الحدود.

حدود متشابهة



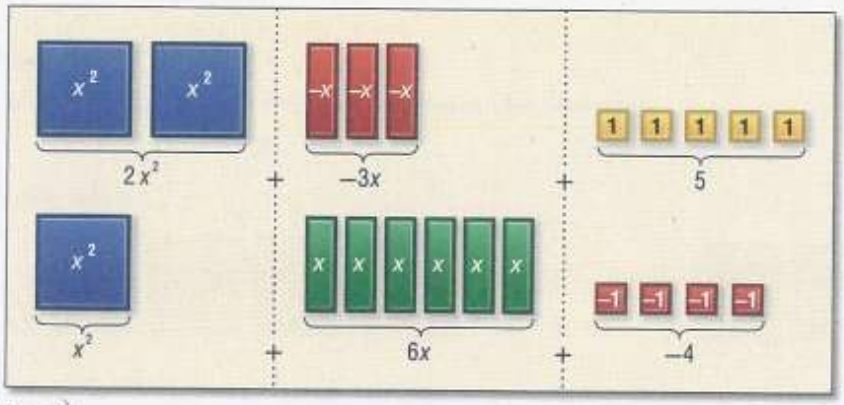
زوج صفري

النشاط 2 جمع كثيرات الحدود

استخدم القطع الجبرية لإيجاد $(2x^2 - 3x + 5) + (x^2 + 6x - 4)$.

الخطوة 1

مثّل كل كثيرة حدود.



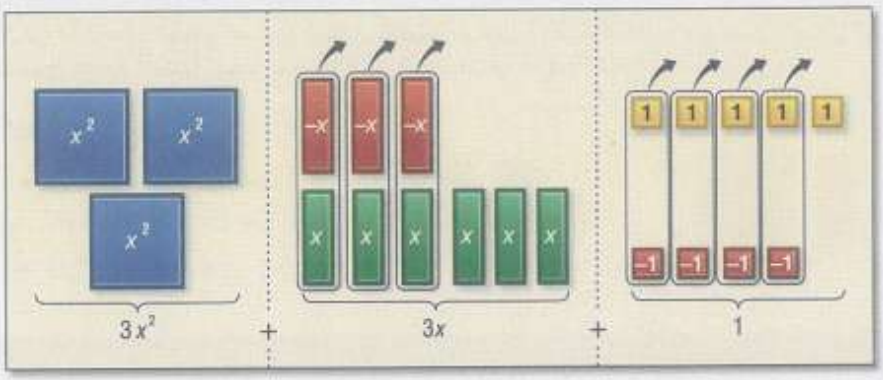
(يتبع في الصفحة التالية)

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

جمع كثيرات الحدود وطرحها تابع

الخطوة 2

اجمع الحدود المتشابهة واحذف الأزواج الصفرية.



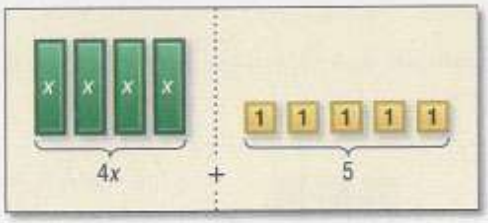
الخطوة 3 اكتب كثيرة الحدود.

$$(2x^2 - 3x + 5) + (x^2 + 6x - 4) = 3x^2 + 3x + 1$$

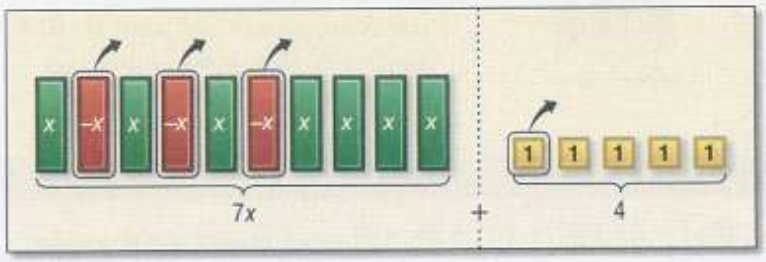
النشاط 3 طرح كثيرات الحدود

استخدم القطع الجبرية لإيجاد $(4x + 5) - (-3x + 1)$.

الخطوة 1 مثّل كثيرة الحدود $4x + 5$.



الخطوة 2 لطرح $-3x + 1$ ، احذف 3 مربعات حمراء $-x$ و 1 مربع أصفر من الفئة 1. يمكنك حذف مربع من الفئة 1. ولكن لا توجد مربعات $-x$. أضف ثلاثة أزواج صفرية من المربعات. ثم احذف $-x$ المربعات الحمراء الثلاثة.



الخطوة 3 اكتب كثيرة الحدود.

$$(4x + 5) - (-3x + 1) = 7x + 4$$

النموذج والتحليل

استخدم القطع الجبرية لتمثيل كل كثيرة حدود. ثم قم بتصميم رسم تخطيطي.

1. $-2x^2$
2. $5x - 4$
3. $x^2 - 4x$

اكتب تعبيرًا جبريًا لكل نموذج.

4.

5.

استخدم القطع الجبرية لإيجاد كل مجموع أو فرق فيما يلي.

6. $(x^2 + 5x - 2) + (3x^2 - 2x + 6)$
7. $(2x^2 + 8x + 1) - (x^2 - 4x - 2)$
8. $(-4x^2 + x) - (x^2 + 5x)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 7-1

جمع كثيرات الحدود وطرحها

السابق
- لقد تعرفت على الدوال أحادية الحد وخواصها.

الحالي
1. كتابة كثيرات الحدود بالصيغة القياسية.
2. جمع الدوال كثيرة الحدود وطرحها.

لماذا؟
- يتوقع أن تصل مبيعات مشغلات الصوت الرقمية في عام 2017 إلى أرقام قياسية. ويمكن تمثيل بيانات المبيعات من خلال المعادلة $U = -2.7t^2 + 49.4t + 128.7$، حيث تعبر U عن عدد الوحدات التي يتم شحنها بالملايين وتعبر t عن عدد الأعوام منذ 2005. ويعد التعبير $-2.7t^2 + 49.4t + 128.7$ مثالاً على الدالة كثيرة الحدود. ويمكن استخدام الدوال كثيرات الحدود لتمثيل الحالات.

1 الصيغة القياسية للدوال كثيرة الحدود

تتكون **الدالة كثيرة الحدود** من دالة أحادية الحد أو مجموع دوال أحادية الحد يسمى كل منها حدًا في الدالة كثيرة الحدود. ويكون لبعض الدوال كثيرة الحدود أسماء خاصة. تتكون **الدالة ذات الحدين** من مجموع دالتين أحادية الحد، وتتكون **الدالة ثلاثية الحدود** من مجموع ثلاث دوال أحادية الحد.

أحادية الحد	ثنائية الحد	ثلاثية الحدود
$5x$	$2x^2 + 7$	$x^3 - 10x + 1$

درجة الدالة أحادية الحد هي مجموع أسس جميع متغيراتها. ويكون للحد الثابت غير الصفري الدرجة صفر. ولا يكون للصفر درجة.

درجة الدالة كثيرة الحدود هي أكبر درجة لأي حد في الدالة كثيرة الحدود. ويمكنك إيجاد درجة كثيرة الحدود من خلال إيجاد درجة كل حد. ويتم تسمية كثيرات الحدود على أساس درجاتها.

الدرجة	الاسم
0	ثابتة
1	خطية
2	تربيعية
3	تكعيبية
4	من الدرجة الرابعة
5	من الدرجة الخامسة
6 أو أكثر	من الدرجة السادسة والدرجة السابعة وهكذا

المفردات الجديدة
- كثيرة الحدود polynomial
- ذات الحدين binomial
- ثلاثية الحدود trinomial
- درجة أحادية الحد degree of a monomial
- درجة كثيرة الحدود degree of a polynomial
- الصيغة القياسية لكثيرة الحدود standard form of a polynomial
- معامل رئيس leading coefficient

ممارسات في الرياضيات
بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.

مثال 1 تحديد كثيرات الحدود

حدد ما إذا كان كل تعبير مما يلي كثير حدود أم لا. وإذا كان كذلك، فجد الدرجة وحدد ما إذا كان *أحادي الحد* أو *ثنائي الحدود* أو *ثلاثي الحدود*.

التعبير	هل هو كثير الحدود؟	الدرجة	أحادي الحد أو ثنائي الحدود أو ثلاثي الحدود؟
a. $4y - 5xz$	نعم؛ $4y - 5xz$ مجموع $4y$ و $-5xz$.	2	ثنائي الحدود
b. -6.5	نعم؛ -6.5 عدد حقيقي.	0	أحادي الحد
c. $7a^{-3} + 9b$	لا؛ $7a^{-3} = \frac{7}{a^3}$، والذي ليس أحادي الحد.	—	———
d. $6x^3 + 4x + x + 3$	نعم؛ $6x^3 + 4x + x + 3 = 6x^3 + 5x + 3$ مجموع الدوال الثلاث أحادية الحد.	3	ثلاثي الحدود

تمرين موجه

1A. x

1B. $-3y^2 - 2y + 4y - 1$

1C. $5rx + 7tuv$

1D. $10x^{-4} - 8x^a$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكن كتابة حدود الدالة كثيرة الحدود بأي ترتيب. ومع ذلك، عادةً ما تكون كثيرات الحدود المكونة من متغير واحد مكتوبة بالصيغة القياسية. وتكون الحدود في **الصيغة القياسية لكثيرة الحدود** مرتبة من الدرجة الأكبر إلى الدرجة الأقل. وفي هذه الصيغة، يسمى معامل الحد الأول **المعامل الرئيسي**.

الصيغة القياسية: $4x^3 - 5x^2 + 2x + 7$

مثال 2 الصيغة القياسية للدالة كثيرة الحدود

اكتب كل كثيرة حدود بالصيغة القياسية. وحدّد المعامل الرئيسي.

a. $3x^2 + 4x^5 - 7x$

جد درجة كل حد.

الدرجة: 2 5 1

كثيرة حدود: $3x^2 + 4x^5 - 7x$

أكبر درجة هي 5. وبالتالي يمكن كتابة كثيرة الحدود بالصيغة $4x^5 + 3x^2 - 7x$. حيث يكون المعامل الرئيسي 4.

b. $5y - 9 - 2y^4 - 6y^3$

جد درجة كل حد.

الدرجة: 1 0 4 3

كثيرة حدود: $5y - 9 - 2y^4 - 6y^3$

أكبر درجة هي 4. وبالتالي يمكن كتابة كثيرة الحدود بالصيغة $-2y^4 - 6y^3 + 5y - 9$. حيث يكون المعامل الرئيسي -2.

تمرين موجه

2A. $8 - 2x^2 + 4x^4 - 3x$

2B. $y + 5y^3 - 2y^2 - 7y^6 + 10$

2 جمع الدوال كثيرة الحدود وطرحها

يتضمن جمع الدوال كثيرة الحدود جمع الحدود المتشابهة. ويمكنك تجميع الحدود المتشابهة باستخدام تنسيق أفقي أو عمودي.

مثال 3 جمع كثيرات الحدود

جد مجموع كل مما يلي.

a. $(2x^2 + 5x - 7) + (3 - 4x^2 + 6x)$

الطريقة الأفقية

ادمج الحدود المتشابهة وجمّعها.

$(2x^2 + 5x - 7) + (3 - 4x^2 + 6x)$

$= [2x^2 + (-4x^2)] + [5x + 6x] + [-7 + 3]$ جمّع الحدود المتشابهة.

$= -2x^2 + 11x - 4$ ادمج الحدود المتشابهة.

b. $(3y + y^3 - 5) + (4y^2 - 4y + 2y^3 + 8)$

الطريقة الرأسية

حاذِ الحدود المتشابهة في أعمدة واجمعها.

$y^3 + 0y^2 + 3y - 5$ أدرج عنصرًا نائبًا للمساعدة في محاذاة الحدود.

$(+)\ 2y^3 + 4y^2 - 4y + 8$ حاذِ الحدود المتشابهة واجمعها.

$3y^3 + 4y^2 - y + 3$

تمرين موجه

3A. $(5x^2 - 3x + 4) + (6x - 3x^2 - 3)$

3B. $(y^4 - 3y + 7) + (2y^3 + 2y - 2y^4 - 11)$

نصيحة دراسية

الطريقة الرأسية لاحظ أن الدوال كثيرة الحدود مكتوبةبالصيغة القياسية مع محاذاة الحدود المتشابهة. وبما أنه لا يوجد حد y^2 في الدالة كثيرة الحدود الأولى، يتم استخدام $0y^2$ كعنصر نائب.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكنك طرح دالة كثيرة الحدود عن طريق إضافة المعكوس الجمعي لها. ولإيجاد المعكوس الجمعي لدالة كثيرة الحدود، اكتب الأعداد المعاكسة لكل حد، كما هو مبين.

$$-(3x^2 + 2x - 6) = \underbrace{-3x^2 - 2x + 6}_{\text{المعكوس الجمعي}}$$

نصيحة دراسية

المعكوس الجمعي عند إيجاد المعكوس الجمعي لكثيرة حدود، تضرب كل حد في 1−.

مثال 4 طرح كثيرات الحدود

جـد ناتج طرح كل مما يلي.

a. $(3 - 2x + 2x^2) - (4x - 5 + 3x^2)$

الطريقة الأفقية

اطرح $4x - 5 + 3x^2$ عن طريق إضافة المعكوس الجمعي لها.

$(3 - 2x + 2x^2) - (4x - 5 + 3x^2)$ — المعكوس الجمعي

$= (3 - 2x + 2x^2) + (-4x + 5 - 3x^2)$ — $4x - 5 + 3x^2$ is $-4x + 5 - 3x^2$ لـ

$= [2x^2 + (-3x^2)] + [(-2x) + (-4x)] + [3 + 5]$ — اجمع الحدود المتشابهة.

$= -x^2 - 6x + 8$ — اجمع الحدود المتشابهة.

b. $(7p + 4p^3 - 8) - (3p^2 + 2 - 9p)$

الطريقة الرأسية

حاذِ الحدود المتشابهة في أعمدة واطرحها عن طريق إضافة المعكوس الجمعي لها.

$$\begin{array}{rr} & 4p^3 + 0p^2 + 7p - 8 \\ (-) & 3p^2 - 9p + 2 \end{array} \quad \xrightarrow{\text{اجمع المعاكس.}} \quad \begin{array}{rr} & 4p^3 + 0p^2 + 7p - 8 \\ (+) & -3p^2 + 9p - 2 \\ \hline & 4p^3 - 3p^2 + 16p - 10 \end{array}$$

تمرين موجه

4A. $(4x^3 - 3x^2 + 6x - 4) - (-2x^3 + x^2 - 2)$

4B. $(8y - 10 + 5y^2) - (7 - y^3 + 12y)$

يعطي جمع أعدادٍ صحيحةٍ أو طرحها عددًا صحيحًا. ولذلك فإن الجمع والطرح محصوران ضمن مجموعة الأعداد الصحيحة. وبصورةٍ مشابهة، ينتج عن جمع كثيرات الحدود أو طرحها كثيرة حدود. ولذلك فإن الجمع والطرح محصوران ضمن مجموعة كثيرات الحدود.

مثال 5 من الحياة اليومية جمع الدوال كثيرة الحدود وطرحها

الإلكترونيات تمثل المعادلات $P = 7m + 137$ و$C = 4m + 78$ عدد الهواتف الخلوية P والكاميرات الرقمية C التي تم بيعها في m أشهر في متجر أجهزة إلكترونية. اكتب معادلة لمجموع المبيعات الشهرية T من الهواتف والكاميرات. ثم استنتج عدد الهواتف والكاميرات التي تم بيعها في 10 أشهر.

لكتابة معادلة تمثل إجمالي المبيعات T، اجمع المعادلات التي تمثل عدد الهواتف الخلوية P والكاميرات الرقمية C.

$T = 7m + 137 + 4m + 78$

$= 11m + 215$

عوّض بالرقم 10 عن m لاستنتاج عدد الهواتف والكاميرات التي تم بيعها في 10 أشهر.

$T = 11(10) + 215$

$= 110 + 215$ or 325

وبالتالي، سيتم بيع ما مجموعه 325 هاتف خلوي وكاميرا رقمية في 10 أشهر.

تمرين موجه

5. استخدم المعلومات الواردة أعلاه لكتابة معادلة تمثل الفرق في المبيعات الشهرية من الهواتف الخلوية والمبيعات الشهرية من الكاميرات الرقمية. استخدم المعادلة لاستنتاج الفرق في المبيعات الشهرية في 24 شهرًا.

الربط بالحياة اليومية

زادت مبيعات الكاميرات الرقمية مؤخرًا بنسبة 42% في سنة واحدة. ويتوقع أن تزيد المبيعات بنسبة 15% على الأقل كل عام نظرًا لتحديث المستهلكين للكاميرات الخاصة بهم.

المصدر: شركة التسويق "Big Planet Marketing"

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

مثال 1 **حدد ما إذا كان كل تعبير مما يلي كثير حدود أم لا. وإذا كان كذلك، فجد الدرجة وحدد ما إذا كان أحادي الحد أم ثنائي الحدود أم ثلاثي الحدود.**

1. $7ab + 6b^2 - 2a^3$
2. $2y - 5 + 3y^2$
3. $3x^2$
4. $\frac{4m}{3p}$
5. $5m^2p^3 + 6$
6. $5q^{-4} + 6q$

مثال 2 **اكتب كل كثيرة حدود بالصيغة القياسية. وحدّد المعامل الرئيس.**

7. $2x^5 - 12 + 3x$
8. $-4d^4 + 1 - d^2$
9. $4z - 2z^2 - 5z^4$
10. $2a + 4a^3 - 5a^2 - 1$

المثالان 3-4 **جد المجموع أو الفرق لكل مما يلي.**

11. $(6x^3 - 4) + (-2x^3 + 9)$
12. $(g^3 - 2g^2 + 5g + 6) - (g^2 + 2g)$
13. $(4 + 2a^2 - 2a) - (3a^2 - 8a + 7)$
14. $(8y - 4y^2) + (3y - 9y^2)$
15. $(-4z^3 - 2z + 8) - (4z^3 + 3z^2 - 5)$
16. $(-3d^2 - 8 + 2d) + (4d - 12 + d^2)$
17. $(y + 5) + (2y + 4y^2 - 2)$
18. $(3n^3 - 5n + n^2) - (-8n^2 + 3n^3)$

مثال 5

19. **الاستنتاج المنطقي** يتكون العدد الإجمالي للطلاب T الذين سافروا لعطلة الربيع من مجموعتين: الطلاب الذين ركبوا الطائرة إلى وجهتهم F والطلاب الذين ركبوا السيارة إلى وجهتهم D. يمكن تمثيل عدد الطلاب (بالآلاف) الذين ركبوا الطائرة والعدد الإجمالي للطلاب الذين ركبوا الطائرة أو ركبوا السيارة عن طريق المعادلات التالية، حيث يشير n إلى عدد الأعوام منذ عام 1995.

$$T = 14n + 21 \qquad F = 8n + 7$$

a. اكتب معادلة توضح عدد الطلاب الذين ركبوا السيارة إلى وجهتهم خلال هذه الفترة الزمنية.

b. استنتج عدد الطلاب الذين سيركبون السيارة إلى وجهتهم في عام 2020.

c. كم عدد الطلاب سيركبون السيارة أو سيركبون الطائرة إلى وجهتهم في عام 2025؟

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **حدد ما إذا كان كل تعبير مما يلي كثير حدود أم لا. وإذا كان كذلك، فجد الدرجة وحدد ما إذا كان أحادي الحد أم ثنائي الحدود أم ثلاثي الحدود.**

20. $\frac{5y^3}{x^2} + 4x$
21. 21
22. $c^4 - 2c^2 + 1$
23. $d + 3d^c$
24. $a - a^2$
25. $5n^3 + nq^3$

مثال 2 **اكتب كل كثيرة حدود بالصيغة القياسية. وحدّد المعامل الرئيس.**

26. $5x^2 - 2 + 3x$
27. $8y + 7y^3$
28. $4 - 3c - 5c^2$
29. $-y^3 + 3y - 3y^2 + 2$
30. $11t + 2t^2 - 3 + t^5$
31. $2 + r - r^3$
32. $\frac{1}{2}x - 3x^4 + 7$
33. $-9b^2 + 10b - b^6$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

المثالان 3-4 **جـد المجموع أو الفرق لكل مما يلي.**

34. $(2c^2 + 6c + 4) + (5c^2 - 7)$

35 $(2x + 3x^2) - (7 - 8x^2)$

36. $(3c^3 - c + 11) - (c^2 + 2c + 8)$

37. $(z^2 + z) + (z^2 - 11)$

38. $(2x - 2y + 1) - (3y + 4x)$

39. $(4a - 5b^2 + 3) + (6 - 2a + 3b^2)$

40. $(x^2y - 3x^2 + y) + (3y - 2x^2y)$

41. $(-8xy + 3x^2 - 5y) + (4x^2 - 2y + 6xy)$

42. $(5n - 2p^2 + 2np) - (4p^2 + 4n)$

43. $(4rxt - 8r^2x + x^2) - (6rx^2 + 5rxt - 2x^2)$

مثال 5 **44. الحيوانات الأليفة** من عام 1999 حتى عام 2009، يتم تمثيل عدد الكلاب D وعدد القطط C (بالمئات) الذي تم اعتماده من ملاجئ الحيوانات في الولايات المتحدة عن طريق المعادلتين $D = 2n + 3$ و $C = n + 4$، حيث تمثل n عدد الأعوام منذ عام 1999.

a. اكتب دالة تمثل العدد الإجمالي T بالمئات للكلاب والقطط التي تم اعتمادها لهذه الفترة الزمنية.

b. إذا استمر الأمر على هذا النحو، فكم عدد الكلاب والقطط التي سيتم اعتمادها في عام 2013؟

صنّف كل كثيرة حدود وفقًا لدرجتها وعدد حدودها.

45. $4x - 3x^2 + 5$

46. $11z^3$

47. $9 + y^4$

48. $3x^3 - 7$

49. $-2x^5 - x^2 + 5x - 8$

50. $10t - 4t^2 + 6t^3$

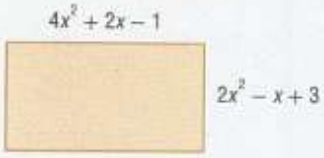
51. الالتحاق في نظام مدرسي سريع النمو، يتم تمثيل العدد الإجمالي للطلاب (بالمئات) بالحرف N وعدد الطلاب من رياض الأطفال وحتى الصف الخامس بالحرف P. وتمثل المعادلتان $N = 1.25t2 - t + 7.5$ و $P = 0.7t2 - 0.95t + 3.8$، عدد الطلاب المسجلين من عام 2000 حتى عام 2009، حيث تمثل t عدد الأعوام منذ عام 2000.

a. اكتب معادلة تمثل عدد الطلاب S في الصفوف من السادس إلى الثاني عشر الذين التحقوا خلال هذه الفترة الزمنية.

b. كم عدد الطلاب الذين التحقوا في الصفوف من السادس إلى الثاني عشر في النظام المدرسي في عام 2007؟

52. الاستنتاج يمكن تمثيل محيط المثلث عن طريق التعبير $3x^2 - 7x + 2$. اكتب كثيرة حدود تمثل قياس الضلع الثالث.

53. الهندسة انظر إلى المستطيل.



a. ماذا تمثل $(4x^2 + 2x - 1)(2x^2 - x + 3)$؟

b. ماذا تمثل $2(4x^2 + 2x - 1) + 2(2x^2 - x + 3)$؟

جـد المجموع أو الفرق لكل مما يلي.

54. $(4x + 2y - 6z) + (5y - 2z + 7x) + (-9z - 2x - 3y)$

55. $(5a^2 - 4) + (a^2 - 2a + 12) + (4a^2 - 6a + 8)$

56. $(3c^2 - 7) + (4c + 7) - (c^2 + 5c - 8)$

57. $(3n^3 + 3n - 10) - (4n^2 - 5n) + (4n^3 - 3n^2 - 9n + 4)$

58. كرة القدم ينقسم الدوري الوطني لكرة القدم إلى رابطتين، الأمريكية A والوطنية N. من عام 2002 حتى عام 2009، يمكن تمثيل عدد الجمهور الإجمالي T (بالآلاف) لكلا الرابطتين وألعاب الرابطة الأمريكي عن طريق المعادلات التالية، حيث تمثل x عدد الأعوام منذ عام 2002.

$T = -0.69x^3 + 55.83x^2 + 643.31x + 10,538$ $A = -3.78x^3 + 58.96x^2 + 265.96x + 5257$

قدّر عدد الأشخاص الذين حضروا مباريات الدوري الوطني لكرة القدم في عام 2009.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

59 **استئجار السيارات** تبلغ تكلفة استئجار سيارة ليوم واحد AED 15 بالإضافة إلى AED 0.15 لكل كيلو·متر يتم قطعه أثناء القيادة.

a. اكتب كثيرة حدود تمثل تكلفة استئجار سيارة لمسافة m km.

b. إذا كانت تتم قيادة السيارة لمسافة 145 km. فكم ستبلغ تكلفة استئجارها؟

c. إذا كانت تتم قيادة السيارة لمسافة 105 km كل يوم لمدة أربعة أيام. فكم ستبلغ تكلفة استئجارها؟

d. إذا كانت تتم قيادة السيارة لمسافة 220 km كل يوم لمدة سبعة أيام. فكم ستبلغ تكلفة استئجارها؟

60. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة. ستستكشف المحيط والمساحة.

a. **هندسيًا** ارسم ثلاثة مستطيلات يبلغ محيط كل منها 400 cm.

b. **جدوليّ** سجل عرض كل مستطيل وطوله في جدول مثل الجدول الموضح أدناه. جـد مساحة كل مستطيل.

المستطيل	الطول	العرض	المساحة
1	100 cm		
2	50 cm		
3	75 cm		
4	x cm		

c. **بيانيًا** على نظام إحداثي. ارسم رسمًا بيانيًا لمساحة المستطيل 4 من حيث الطول، x. استخدم الرسم البياني لتحديد أكبر مساحة ممكنة.

d. **تحليليًا** حدد الطول والعرض اللذان ينتجان أكبر مساحة.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

61. **النقد** يعمل خالد وسلمان على إيجاد حل $(2x^2 - x) - (3x + 3x^2 - 2)$. هل أي منهما صواب؟ اشرح استنتاجك.

خالد

$(2x^2 - x) - (3x + 3x^2 - 2)$
$= (2x^2 - x) + (-3x + 3x^2 - 2)$
$= 5x^2 - 4x - 2$

سلمان

$(2x^2 - x) - (3x + 3x^2 - 2)$
$= (2x^2 - x) + (-3x - 3x^2 - 2)$
$= -x^2 - 4x - 2$

62. **الاستنتاج** حدد ما إذا كانت كل من العبارات التالية صحيحة أم خاطئة. واشرح استنتاجك.

a. يمكن أن يكون لذات الحدين درجة الصفر.

b. ترتيب كثيرات الحدود التي يتم طرحها غير مهم.

63. **تحدٍّ** اكتب كثيرة حدود تمثل مجموع عدد صحيح فردي $2n + 1$ والعددين الصحيحين الفرديين التاليين.

64. **الكتابة في الرياضيات** لماذا تجمع أو تطرح معادلات تمثل مواقف من الحياة اليومية؟ اشرح.

65. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيفية جمع وطرح كثيرات الحدود باستخدام كل من التنسيقين الرأسي والأفقي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

66. يمكن تمثيل ثلاثة أعداد صحيحة متتالية عن طريق x، و $x + 1$، و $x + 2$. ما مجموع الأعداد الصحيحة الثلاثة هذه؟

A $x(x + 1)(x + 2)$ C $3x + 3$

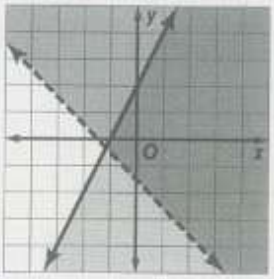
B $x^3 + 3$ D $x + 3$

67. إجابة قصيرة ما محيط مربع طول ضلعه $2x + 3$ وحدة؟

68. يقطع جمال لوحة على شكل سداسي منتظم ويدق مسمار عند كل رأس، كما هو مبين. كم عدد الأشرطة المطاطية التي سيحتاجها لتمديد شريط مطاطي بين كل زوج ممكن من المسامير؟

F 15 G 14 H 12 J 9

69. أي زوج مرتّب في مجموعة حل نظام المتباينات المبين في التمثيل البياني؟



A $(-3, 0)$ C $(5, 0)$

B $(0, -3)$ D $(0, 5)$

مراجعة شاملة

بسّط ما يلي.

70. $\sqrt{72}$ **71.** $\sqrt{18} \cdot \sqrt{14}$ **72.** $\sqrt{44x^4y^3}$ **73.** $\frac{3}{\sqrt{18}}$

74. $\sqrt{\frac{28}{75}}$ **75.** $\frac{\sqrt{8a^6}}{\sqrt{108}}$ **76.** $\frac{5}{4 - \sqrt{2}}$ **77.** $\frac{4\sqrt{3}}{2 + \sqrt{5}}$

78. المعرفة المالية لنفترض أنك اشتريت 3 قمصان وبنطلونين من التخفيضات في أحد متاجر بيع الملابس مقابل 72 AED. في اليوم التالي، اشترى صديق قميصين و 4 بناطيل مقابل 96 AED. فإذا كانت القمصان التي اشتراها كل منكما بنفس السعر وكانت البناطيل أيضا بنفس السعر، فما هو ثمن كل قميص وكل بنطلون؟

مثّل النقاط التالية تمثيلاً بيانيًا وصل بينها لتكوين شكل.

79. $A(-5, 3)$, $B(3, -4)$ و $C(-2, -3)$

80. $P(-2, 1)$, $Q(3, 4)$, $R(5, 1)$ و $S(0, -2)$

البقالة جد الوزن المتري بالجرامات **لكل عنصر.**

81.

الوزن الصافي: 15 أونصة

82.

الوزن الصافي: 8.2 أونصة

83.

الوزن الصافي: 2.5 أونصة

مراجعة المهارات

بسّط ما يلي.

84. $t(t^5)(t^7)$ **85.** $n^3(n^2)(-2n^3)$ **86.** $(5t^5v^2)(10t^3v^4)$ **87.** $(-8u^4z^5)(5uz^4)$

88. $[(3)^2]^3$ **89.** $[(2)^3]^2$ **90.** $(2m^4k^3)^2(-3mk^2)^3$ **91.** $(6xy^2)^2(2x^2y^2z^2)^3$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

7-2 ضرب كثيرة حدود في أحادية حد

السابق
- لقد قمت بضرب أحاديات الحد.

الحالي
1. ضرب كثيرة حدود في أحادية حدّ.
2. حل المعادلات التي تتضمن نواتج ضرب أحاديات الحدود وكثيرات الحدود.

لماذا؟
- تفتتح ياسمين خالد نادٍ للياقة البدنية وأخبرت المقاول أن طول غرفة اللياقة البدنية يجب أن يكون ثلاثة أمثال عرضها بالإضافة إلى 8 ft ولتغطية أرضية فصول التمرين بالسجاد. تحتاج السيدة ياسمين إلى معرفة مساحة الأرضية. لذلك فإنها تضرب العرض في الطول. $w(3w + 8)$.

ممارسات في الرياضيات
استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

1 ضرب كثيرة الحدود في أحادية حد

ضرب كثيرة الحدود في أحادية حد لإيجاد ناتج ضرب كثيرة حدود في أحادية حد. يمكنك استخدام خاصية التوزيع.

مثال 1 ضرب كثيرة الحدود في أحادية حد

جد ناتج $-3x^2(7x^2 - x + 4)$.

الطريقة الأفقية

$-3x^2(7x^2 - x + 4)$	التعبير الأصلي
$= -3x^2(7x^2) - (-3x^2)(x) + (-3x^2)(4)$	خاصية التوزيع
$= -21x^4 - (-3x^3) + (-12x^2)$	اضرب.
$= -21x^4 + 3x^3 - 12x^2$	بسّط.

الطريقة الرأسية

$$\begin{array}{rr} & 7x^2 - x + 4 \\ (\times) & -3x^2 \\ \hline & -21x^4 + 3x^3 - 12x^2 \end{array}$$

خاصية التوزيع

اضرب.

تمرين موجّه

جد كل ناتج ضرب مما يلي.

1A. $5a^2(-4a^2 + 2a - 7)$

1B. $-6d^3(3d^4 - 2d^3 - d + 9)$

يمكننا استخدام هذه الطريقة نفسها أكثر من مرة لتبسيط التعابير الكبيرة.

مثال 2 تبسيط التعابير

بسّط $2p(-4p^2 + 5p) - 5(2p^2 + 20)$.

$2p(-4p^2 + 5p) - 5(2p^2 + 20)$	التعبير الأصلي
$= (2p)(-4p^2) + (2p)(5p) + (-5)(2p^2) + (-5)(20)$	خاصية التوزيع
$= -8p^3 + 10p^2 - 10p^2 - 100$	اضرب.
$= -8p^3 + (10p^2 - 10p^2) - 100$	خاصيتا التبديل والتجميع
$= -8p^3 - 100$	جمع الحدود المتشابهة.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف ©

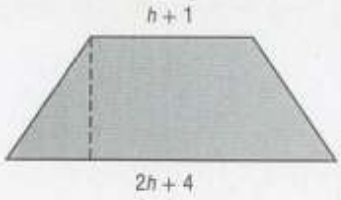
تمرين موجّه

بسّط كل تعبير مما يلي.

2A. $3(5x^2 + 2x - 4) - x(7x^2 + 2x - 3)$ **2B.** $15t(10y^3t^5 + 5y^2t) - 2y(yt^2 + 4y^2)$

يمكننا استخدام خاصية التوزيع لضرب أحاديات الحدود في كثيرات الحدود وحل مسائل من الحياة اليومية.

مثال 3 من الحياة اليومية كتابة كثيرة الحدود وإيجاد قيمتها



إجابة شبكية موضوع حفلة مدرسية هو "الذهب الصلب". من أجل التزيين، يغطي سليم قطعة من لوحة ملصقات على شكل شبه منحرف بورق معدني ذهبي اللون لتبدو وكأنها قالب من الذهب. فإذا كان ارتفاع لوحة الملصقات 18 cm، فكم ورقة معدنية سوف تحتاجها سليم بالسنتيمتر المربع؟

قراءة فقرة الاختبار

يطلب منك السؤال إيجاد مساحة شبه منحرف ارتفاعه h وقاعدتاه $h + 1$ و $2h + 4$.

حل فقرة الاختبار

اكتب معادلة تمثل مساحة شبه المنحرف.

افترض أن $b_1 = h + 1$ وافترض أن $b_2 = 2h + 4$ وافترض أن h هو ارتفاع شبه المنحرف.

مساحة شبه المنحرف

$b_1 = h + 1$ و $b_2 = 2h + 4$

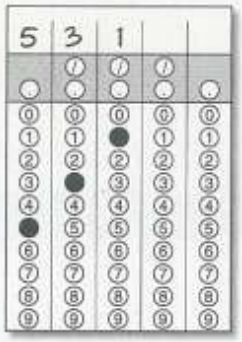
اجمع وبسّط.

خاصية التوزيع

$h = 18$

بسّط.

$$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$$
$$= \frac{1}{2}h[(h + 1) + (2h + 4)]$$
$$= \frac{1}{2}h(3h + 5)$$
$$= \frac{3}{2}h^2 + \frac{5}{2}h$$
$$= \frac{3}{2}(18)^2 + \frac{5}{2}(18)$$
$$= 531$$



سيحتاج سليم $231\ cm^2$ من الورق المعدني.

مثّل إجابتك 531 شبكيًا.

نصيحة عند حل الاختبار

الأدوات تقدم العديد من الاختبارات المعيارية أوراق قوانين تحتوي على القوانين الأكثر استعمالاً. إذا لم تكن متأكدًا من القانون الصحيح، فتحقق من الورقة قبل البدء في حل المسألة.

تمرين موجّه

3. إجابة قصيرة تصنع سعاد أربطة رأس مثلثية الشكل للقطط في نادي الحيوانات الأليفة الخاص بها. طول قاعدة رباط الرأس يساوي طول الطوق مع إضافة 4 in إلى كل طرف من أجل ربطه. يبلغ الارتفاع $\frac{1}{2}$ طول الطوق.

a. إذا كان طول طوق قطة كريمة 12 in، فكم ستحتاج من القماش بالبوصة المربعة؟

b. إذا صنعت سعاد رباط رأس لقطة صديقة لها بطوق طوله 6 in، فكم ستحتاج من القماش بالبوصة المربعة؟

الربط بالحياة اليومية

في العام الأخير، حققت تجارة مستلزمات الحيوانات الأليفة مبيعات تقدر بنحو 7.05 مليار درهم. وتتراوح هذه التجارة من الطعام اللذيذ إلى التيجان المصنوعة من حجر الراين، والقلادات المصنوعة من اللؤلؤ، والمعاطف المصنوعة من الكشمير.

المصدر: مجلة *Entrepreneur*

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 حل المعادلات ذات التعابير كثيرة الحدود

يمكننا استخدام خاصية التوزيع لحل المعادلات التي تتضمن نواتج أحاديات الحد وكثيرات الحدود.

مثال 4 المعادلات ذات التعابير كثيرة الحدود على كلا الطرفين

حُـــلّ $2a(5a - 2) + 3a(2a + 6) + 8 = a(4a + 1) + 2a(6a - 4) + 50$.

$2a(5a - 2) + 3a(2a + 6) + 8 = a(4a + 1) + 2a(6a - 4) + 50$	المعادلة الأصلية
$10a^2 - 4a + 6a^2 + 18a + 8 = 4a^2 + a + 12a^2 - 8a + 50$	خاصية التوزيع
$16a^2 + 14a + 8 = 16a^2 - 7a + 50$	اجمع الحدود المتشابهة.
$14a + 8 = -7a + 50$	اطرح $16a^2$ من الطرفين.
$21a + 8 = 50$	اجمع $7a$ إلى الطرفين.
$21a = 42$	اطرح 8 من الطرفين.
$a = 2$	اقسم الطرفين على 21.

تحقق

$$2a(5a - 2) + 3a(2a + 6) + 8 = a(4a + 1) + 2a(6a - 4) + 50$$
$$2(2)[5(2) - 2] + 3(2)[2(2) + 6] + 8 \stackrel{?}{=} 2[4(2) + 1] + 2(2)[6(2) - 4] + 50$$
$$4(8) + 6(10) + 8 \stackrel{?}{=} 2(9) + 4(8) + 50 \quad \text{بسّط.}$$
$$32 + 60 + 8 \stackrel{?}{=} 18 + 32 + 50 \quad \text{اضرب.}$$
$$100 = 100 \checkmark \quad \text{اجمع واطرح.}$$

تصيحة دراسية

جمع الحدود المتشابهة عند تبسيط تعبير طويل، قد يكون من المفيد وضع دائرة حول مجموعة من الحدود المشابهة، ومستطيل حول مجموعة أخرى، ومثلث حول مجموعة أخرى، وهكذا.

تمرين موجّه

حُـــلّ كل من المعادلات التالية.

4A. $2x(x + 4) + 7 = (x + 8) + 2x(x + 1) + 12$

4B. $d(d + 3) - d(d - 4) = 9d - 16$

التحقق من فهمك

مثال 1 **جـــد كل ناتج ضرب مما يلي.**

1. $5w(-3w^2 + 2w - 4)$

2. $6g^2(3g^3 + 4g^2 + 10g - 1)$

3. $4km^2(8km^2 + 2k^2m + 5k)$

4. $-3p^4r^3(2p^2r^4 - 6p^6r^3 - 5)$

5 $2ab(7a^4b^2 + a^5b - 2a)$

6. $c^2d^3(5cd^7 - 3c^3d^2 - 4d^3)$

مثال 2 **بسّط كلًّا من التعابير التالية.**

7. $t(4t^2 + 15t + 4) - 4(3t - 1)$

8. $x(3x^2 + 4) + 2(7x - 3)$

9. $-2d(d^3c^2 - 4dc^2 + 2d^2c) + c^2(dc^2 - 3d^4)$

10. $-5w^2(8w^2x - 11wx^2) + 6x(9wx^4 - 4w - 3x^2)$

مثال 3 **11. إجابة شبكية** اشترت منى تلفزيون بلازما جديد. يبلغ ارتفاع شاشة التلفزيون نصف عرضها بالإضافة إلى 5 in. ويبلغ العرض 30 in. جـــد ارتفاع الشاشة بالبوصة.

مثال 4 **حُـــلّ كل من المعادلات التالية.**

12. $-6(11 - 2c) = 7(-2 - 2c)$

13. $t(2t + 3) + 20 = 2t(t - 3)$

14. $-2(w + 1) + w = 7 - 4w$

15. $3(y - 2) + 2y = 4y + 14$

16. $a(a + 3) + a(a - 6) + 35 = a(a - 5) + a(a + 7)$

17. $n(n - 4) + n(n + 8) = n(n - 13) + n(n + 1) + 16$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **جـد ناتج ضرب كل مما يلي.**

18. $b(b^2 - 12b + 1)$

19. $f(f^2 + 2f + 25)$

20. $-3m^3(2m^3 - 12m^2 + 2m + 25)$

21. $2j^2(5j^3 - 15j^2 + 2j + 2)$

22. $2pr^2(2pr + 5p^2r - 15p)$

23. $4t^3u(2t^2u^2 - 10tu^4 + 2)$

مثال 2 **بسّط كلاً من التعابير التالية.**

24. $-3(5x^2 + 2x + 9) + x(2x - 3)$

25. $a(-8a^2 + 2a + 4) + 3(6a^2 - 4)$

26. $-4d(5d^2 - 12) + 7(d + 5)$

27. $-9g(-2g + g^2) + 3(g^2 + 4)$

28. $2j(7j^2k^2 + jk^2 + 5k) - 9k(-2j^2k^2 + 2k^2 + 3j)$

29. $4n(2n^3p^2 - 3np^2 + 5n) + 4p(6n^2p - 2np^2 + 3p)$

مثال 3

30. السدود هناك سد جديد يجري بناؤه على شكل شبه منحرف. يبلغ طول القاعدة في أسفل السد مثلي الارتفاع، ويبلغ طول القاعدة في أعلى السد $\frac{1}{5}$ الارتفاع ناقص 30 ft.

a. اكتب تعبيرًا لإيجاد مساحة مقطع شبه المنحرف العرضي للسد.

b. إذا كان ارتفاع السد 180 ft، فجـد مساحة هذا المقطع العرضي.

مثال 4 **حُـلّ كل من المعادلات التالية.**

31 $7(t^2 + 5t - 9) + t = t(7t - 2) + 13$

32. $w(4w + 6) + 2w = 2(2w^2 + 7w - 3)$

33. $5(4z + 6) - 2(z - 4) = 7z(z + 4) - z(7z - 2) - 48$

34. $9c(c - 11) + 10(5c - 3) = 3c(c + 5) + c(6c - 3) - 30$

35. $2f(5f - 2) - 10(f^2 - 3f + 6) = -8f(f + 4) + 4(2f^2 - 7f)$

36. $2k(-3k + 4) + 6(k^2 + 10) = k(4k + 8) - 2k(2k + 5)$

بسّط كل تعبير.

37. $\frac{2}{3}np^2(30p^2 + 9n^2p - 12)$

38. $\frac{3}{5}r^2t(10r^3 + 5rt^3 + 15t^2)$

39. $-5q^2w^3(4q + 7w) + 4qw^2(7q^2w + 2q) - 3qw(3q^2w^2 + 9)$

40. $-x^2z(2z^2 + 4xz^3) + xz^2(xz + 5x^3z) + x^2z^3(3x^2z + 4xz)$

41. إيقاف السيارات يتقاضى كراج سيارات 30 AED في الشهر بالاضافة إلى 0.5 AED في الساعة أثناء النهار و 0.25 AED في الساعة أثناء الليل وعطلات نهاية الأسبوع. لنفترض أن محمود يوقف سيارته في الكراج لمدة 47 ساعة في شهر يناير وأن h ساعة منها تكون أثناء الليل وعطلات نهاية الأسبوع.

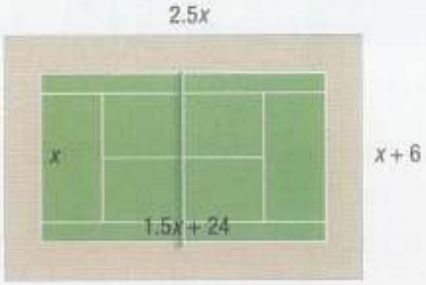
a. جـد التعبير الخاص لحساب قيمة فاتورة محمود خلال شهر يناير.

b. جـد التكلفة إذا أوقف محمود سيارته لمدة 12 ساعة أثناء الليل وعطلات نهاية الأسبوع.

42. تمثيل النماذج يبني سمير بيتًا لقطته الجديدة، ويكون الوجه العلوي للبيت على شكل شبه منحرف. فإذا كان ارتفاع شبه المنحرف 12 cm. فجـد مساحة وجه هذه القطعة من المنزل.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

43 التنس يبني نادي التنس ملعبًا جديدًا للتنس مع مسار حوله.



a. اكتب تعبيرًا لمساحة ملعب التنس.

b. اكتب تعبيرًا لمساحة المسار.

c. إذا كانت $x = 36$ ft، فما محيط الجانب الخارجي للمسار؟

44. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، سوف تستكشف من درجة ناتج ضرب أحادية حدود وكثيرة حدود.

a. **جدوليّ** اكتب ثلاث دوال أحادية الحدود من درجات مختلفة وثلاث دوال كثيرة الحدود من درجات مختلفة. حدد درجة كل أحادية حدود وكثيرة حدود. اضرب أحاديات الحدود في كثيرات الحدود. حدد درجة كل ناتج ضرب. سجّل النتائج في جدول مثل الجدول الموضح أدناه.

أحادية الحد	الدرجة	كثيرة حدود	الدرجة	ناتج ضرب أحادية الحد في كثيرة الحدود	الدرجة

b. **لفظيًا** خمّن درجة حاصل ضرب أحادية حدود وكثيرة حدود. ما هي درجة حاصل ضرب أحادية حدود من الدرجة a وكثيرة حدود من الدرجة b؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

45. تحليل الخطأ قدم كل من سلام ونادية حلاً لهذه المسألة. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

سلام

$2x^2(3x^2 + 4x + 2)$

$6x^4 + 8x^2 + 4x^2$

$6x^4 + 12x^2$

نادية

$2x^2(3x^2 + 4x + 2)$

$6x^4 + 8x^3 + 4x^2$

46. المثابرة جد قيمة p حيث إن $3x^p(4x^{2p+3} + 2x^{3p-2}) = 12x^{12} + 6x^{10}$.

47. تحدٍ بسّط $4x^{-3}y^2(2x^5y^{-4} + 6x^{-7}y^6 - 4x^0y^{-2})$.

48. الاستنتاج هل توجد قيمة لـ x تجعل العبارة $(x + 2)^2 = x^2 + 2^2$ صحيحة؟ إذا كان الأمر كذلك، فجد قيمة x. اشرح استنتاجك.

49. مسألة غير محددة الإجابة اكتب أحادية حدود وكثيرة حدود باستخدام n كمتغير. جد ناتج ضربهما.

50. الكتابة في الرياضيات اذكر خطوات ضرب كثيرة الحدود في أحادية الحد.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبار المعياري

51. يبيع أحد المتاجر كل أسبوع j بنطال جينز و t قميص. يربح المتجر AED 8 في كل قميص و AED 12 من كل بنطلون. أي من العبارات التالية يمثل المبلغ الإجمالي -بالدرهم- للأموال التي يربحها المتجر كل أسبوع؟

A $8j + 12t$
B $12j + 8t$
C $20(j + t)$
D $96jt$

52. إذا كانت $a = 5x + 7y$ وكانت $b = 2y - 3x$. فما ناتج $a + b$؟

F $2x - 9y$
G $3y + 4x$
H $2x + 9y$
J $2x - 5y$

53. الهندسة مثلث له ضلع طوله 5 cm وضلع 8.5 cm. أي مما يلي لا يمكن أن يكون طول الضلع الثالث؟

A 3.5 cm
B 4 cm
C 5.5 cm
D 12 cm

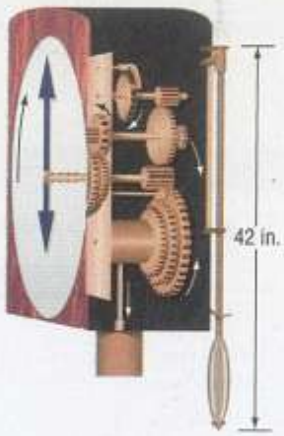
54. إجابة قصيرة اكتب معادلة تتغير فيها x طرديًا مع مكعب y وعكسيًا مع مربع z.

مراجعة شاملة

جد كل مجموع أو فرق.

55. $(2x^2 - 7) + (8 - 5x^2)$
56. $(3z^2 + 2z - 1) + (z^2 - 6)$
57. $(2a - 4a^2 + 1) - (5a^2 - 2a - 6)$
58. $(a^3 - 3a^2 + 4) - (4a^2 + 7)$
59. $(2ab - 3a + 4b) + (5a + 4ab)$
60. $(8c^3 - 3c^2 + c - 2) - (3c^3 + 9)$

61. الساعات مدة البندول هو الزمن اللازم للتأرجح مرة واحدة كاملة ذهابًا وإيابًا. قانون المدة P في ثواني بندول هو $P = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{32}}$، حيث تمثل ℓ طول البندول بالقدم.



a. ما هي مدة البندول في الساعة الموضحة لأقرب عشر من الثانية؟
b. كم بوصة تقريبًا يجب أن يقطعها البندول من أجل فترة قدرها ثانية واحدة؟

حل كل متباينة.

62. $-14n \geq 42$
63. $p + 6 > 15$
64. $-2a - 5 < 20$
65. $5x \leq 3x - 26$

مراجعة المهارات

بسّط ما يلي.

66. $b(b^2)(b^3)$
67. $2y(3y^2)$
68. $-y^4(-2y^3)$
69. $-3z^3(-5z^4 + 2z)$
70. $2m(-4m^4) - 3(-5m^3)$
71. $4p^2(-2p^3) + 2p^4(5p^6)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

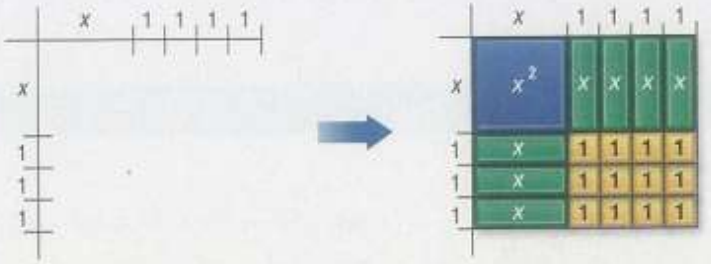
7-3 مختبر الجبر
ضرب كثيرات الحدود

يمكنك استخدام القطع الجبرية لإيجاد ناتج ضرب ذوات الحدين.

النشاط 1 ضرب ذوات الحدين

يمكنك استخدام القطع الجبرية لإيجاد $(x + 4)(x + 3)$.

سيكون عرض المستطيل $x + 3$ وطوله $x + 4$. استخدم القطع الجبرية لتحديد الأبعاد على نموذج ناتج الضرب. ثم أكمل المستطيل باستخدام القطع الجبرية.

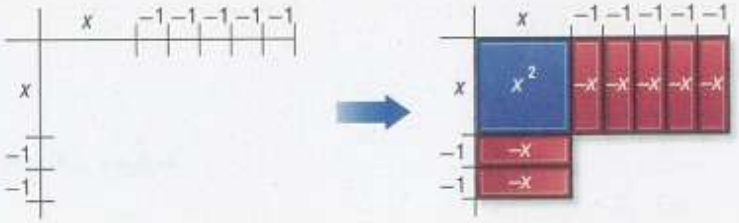


يتكون المستطيل من 1 مربع أزرق x^2، و 7 مربعات خضراء x، و 12 مربعًا أصفرًا من الفئة 1. مساحة المستطيل هي $x^2 + 7x + 12$. إذًا، $(x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12$.

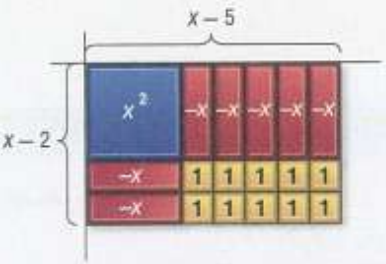
النشاط 2 ضرب ذوات الحدين

استخدم القطع الجبرية لإيجاد $(x - 5)(x - 2)$.

الخطوة 1 سيكون عرض المستطيل $x - 2$ وطوله $x - 5$. استخدم القطع الجبرية لتحديد الأبعاد على نموذج ناتج الضرب. ثم ابدأ عمل المستطيل باستخدام القطع الجبرية.



الخطوة 2 حدد ما إذا كنت ستستخدم 10 مربعات صفراء من الفئة 1 أو 10 مربعات حمراء من الفئة 1− لإكمال المستطيل. تكون مساحة كل مربع أصفر هي حاصل ضرب 1− في 1−. املأ الفراغ باستخدام 10 مربعات صفراء من الفئة 1 لإكمال المستطيل.

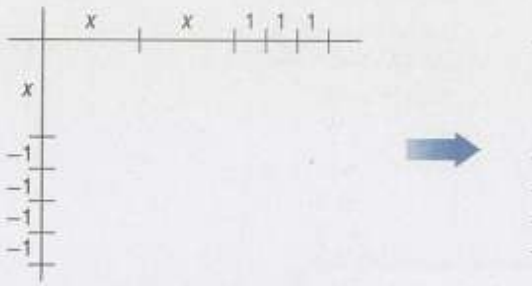


يتكون المستطيل من 1 مربع أزرق x^2، و $x - 7$ مربعات حمراء، و 10 مربعات صفراء من الفئة 1. مساحة المستطيل هي $x^2 - 7x + 10$. إذًا، $(x - 2)(x - 5) = x^2 - 7x + 10$.

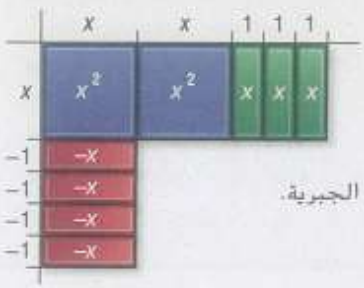
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

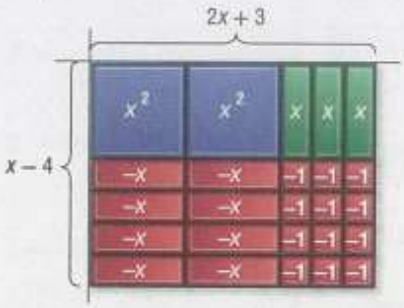
النشاط 3 ضرب ذوات الحدين

استخدم القطع الجبرية لإيجاد $(x - 4)(2x + 3)$.



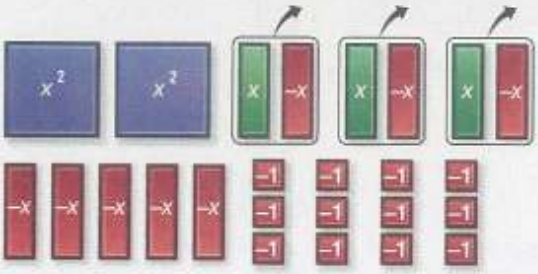
الخطوة 1 سيكون عرض المستطيل $x - 4$ وطوله $x + 3$.
استخدم القطع الجبرية لتحديد الأبعاد على نموذج ناتج الضرب. ثم ابدأ عمل المستطيل باستخدام القطع الجبرية.





الخطوة 2 حدد ما لون المربعات ذات الفئة x وما لون المربعات ذات الفئة 1 المستخدمة لإكمال المستطيل.
مساحة كل مربع أحمر هي x هي حاصل ضرب x في -1.
تُمثل كل مساحة مربع أحمر من الفئة 1 بواسطة $1(-1)$ أو -1.

أكمل المستطيل باستخدام 4 مربعات حمراء من الفئة x و 12 مربعًا أحمرًا من الفئة -1.



الخطوة 3 أعد ترتيب المربعات لتبسيط كثيرة الحدود التي كونتها.
لاحظ أنه تم تكوين 3 أزواج صفرية عن طريق ثلاثة مربعات موجبة وثلاثة أخرى سلبية x.

يوجد 2 مربع أزرق x^2 و 5 مربعات حمراء $-x$ و 12 مربع أحمر من الفئة -1. في أبسط صورة، $(x - 4)(2x + 3) = 2x^2 - 5x - 12$.

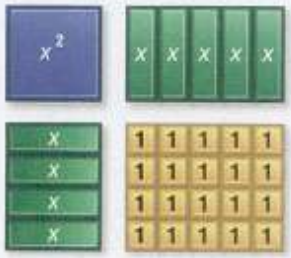
النموذج والتحليل

استخدم القطع الجبرية لإيجاد كل ناتج ضرب.

1. $(x + 1)(x + 4)$
2. $(x - 3)(x - 2)$
3. $(x + 5)(x - 1)$
4. $(x + 2)(2x + 3)$
5. $(x - 1)(2x - 1)$
6. $(x + 4)(2x - 5)$

هل العبارات التالية صحيحة أم *خاطئة*؟ برر إجابتك مع رسم القطع الجبرية.

7. $(x - 4)(x - 2) = x^2 - 6x + 8$
8. $(x + 3)(x + 5) = x^2 + 15$



9. **الكتابة في الرياضيات** يمكنك أيضًا استخدام خاصية التوزيع لإيجاد حاصل ضرب ذوات الحدين. يُبين الشكل الموجود على اليمين نموذجًا لـ $(x + 5)(x + 4)$ مقسمًا إلى أربعة أجزاء. اكتب جملة أو اثنتين يوضحان كيف يبين هذا النموذج استخدام خاصية التوزيع.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

7-3 ضرب كثيرات الحدود

السابق
- قمت بضرب كثيرات الحدود في أحاديات الحدود.

الحالي
1. ضرب القيم ذوات الحدين باستخدام طريقة فويل.
2. ضرب كثيرات الحدود باستخدام خاصية التوزيع.

لماذا؟
- تُصنع ألواح السباحة، التي تستخدم لركوب الأمواج، من الفوم وتكون ذات شكل مستطيل أكثر من ألواح التزلج على الماء. وتُحدد أبعاد ألواح السباحة حسب طول المستخدم ومستوى مهارته.

يجب أن يكون طول لوح السباحة الخاص بعمر هو نفس ارتفاع عمر h ناقص 32 in أو $h - 32$. ويجب أن يكون عرض لوح السباحة نصف ارتفاع عمر زائد 11 in أو $\frac{1}{2}h + 11$. ولتقريب مساحة لوح السباحة، تحتاج إلى إيجاد $(h - 32)\left(\frac{1}{2}h + 11\right)$.

المفردات الجديدة
- **طريقة فويل** (FOIL method)
- **تعبير تربيعي** (quadratic expression)

ممارسات في الرياضيات
محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

1 ضرب ذوات الحدين

لضرب زوج من ذوات الحدين مثل $h - 32$ و $\frac{1}{2}h + 11$، تستخدم خاصية التوزيع. يمكن ضرب ذوات الحدين أفقيًا أو عموديًا.

مثال 1 خاصية التوزيع

جد ناتج الضرب

a. $(2x + 3)(x + 5)$

الطريقة الرأسية

اضرب في 5.

$$\begin{array}{r} 2x + 3 \\ (\times)\ x + 5 \\ \hline 10x + 15 \end{array}$$

$5(2x + 3) = 10x + 15$

اضرب في x.

$$\begin{array}{r} 2x + 3 \\ (\times)\ x + 5 \\ \hline 2x^2 + 3x \end{array}$$

$x(2x + 3) = 2x^2 + 3x$

اجمع الحدود المتشابهة.

$$\begin{array}{r} 2x + 3 \\ (\times)\ x + 5 \\ \hline 10x + 15 \\ 2x^2 + 3x \\ \hline 2x^2 + 13x + 15 \end{array}$$

الطريقة الأفقية

أعد الكتابة في صورة مجموع ناتجي ضرب.
خاصية التوزيع
اجمع الحدود المتشابهة.

$$\begin{aligned} (2x + 3)(x + 5) &= 2x(x + 5) + 3(x + 5) \\ &= 2x^2 + 10x + 3x + 15 \\ &= 2x^2 + 13x + 15 \end{aligned}$$

b. $(x - 2)(3x + 4)$

الطريقة الرأسية

اضرب في 4.

$$\begin{array}{r} x - 2 \\ (\times)\ 3x + 4 \\ \hline 4x - 8 \end{array}$$

$4(x - 2) = 4x - 8$

اضرب في $3x$.

$$\begin{array}{r} x - 2 \\ (\times)\ 3x + 4 \\ \hline 3x^2 - 6x \end{array}$$

$3x(x - 2) = 3x^2 - 6x$

اجمع الحدود المتشابهة.

$$\begin{array}{r} x - 2 \\ (\times)\ 3x + 4 \\ \hline 4x - 8 \\ 3x^2 - 6x \\ \hline 3x^2 - 2x - 8 \end{array}$$

الطريقة الأفقية

أعد الكتابة في صورة الفرق بين ناتجي ضرب.
خاصية التوزيع
اجمع الحدود المتشابهة.

$$\begin{aligned} (x - 2)(3x + 4) &= x(3x + 4) - 2(3x + 4) \\ &= 3x^2 + 4x - 6x - 8 \\ &= 3x^2 - 2x - 8 \end{aligned}$$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.

تمرين موجّه

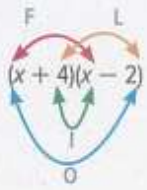
1A. $(3m + 4)(m + 5)$ **1B.** $(5y - 2)(y + 8)$

يُطلق على الصيغة المختصرة لخاصية التوزيع لضرب ذوات الحدين **طريقة فويل**

المفهوم الأساسي طريقة فويل

الشرح لضرب زوج من ذوات الحدين، جد مجموع نواتج ضرب حدود F الذي يشير إلى الكلمة الإنجليزية *First* (الأولين)، وحدود O الذي يشير إلى الكلمة الإنجليزية *Outer* (الطرفين)، والحدود التي تشير إلى الكلمة الإنجليزية *Inner* (الداخليين)، وحدود L الذي يشير إلى الكلمة الإنجليزية *Last* (الأخيرين).

مثال



الحدود الاولية الحدود الطرفية الحدود الداخلية الحدود الاخيرة

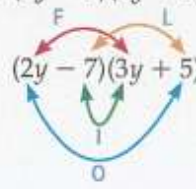
$$(x + 4)(x - 2) = (x)(x) + (x)(-2) + (4)(x) + (4)(-2)$$
$$= x^2 - 2x + 4x - 8$$
$$= x^2 + 2x - 8$$

قراءة في الرياضيات
كثيرات الحدود في صورة عوامل
التعبير $(x + 4)(x - 2)$ يُقرأ في صورة *الكمية* x *مجموعة إلى* 4 *الكل مضروبًا في الكمية* x *ناقص* 2.

مثال 2 طريقة فويل

جد ناتج الضرب في كل مما يلي.

a. $(2y - 7)(3y + 5)$



$$(2y - 7)(3y + 5) = (2y)(3y) + (2y)(5) + (-7)(3y) + (-7)(5)$$ طريقة فويل
$$= 6y^2 + 10y - 21y - 35$$ اضرب.
$$= 6y^2 - 11y - 35$$ اجمع الحدود المتشابهة.

b. $(4a - 5)(2a - 9)$

$$(4a - 5)(2a - 9)$$ طريقة فويل
$$= (4a)(2a) + (4a)(-9) + (-5)(2a) + (-5)(-9)$$ اضرب.
$$= 8a^2 - 36a - 10a + 45$$ اجمع الحدود المتشابهة.
$$= 8a^2 - 46a + 45$$

تمرين موجّه

2A. $(x + 3)(x - 4)$ **2B.** $(4b - 5)(3b + 2)$

2C. $(2y - 5)(y - 6)$ **2D.** $(5a + 2)(3a - 4)$

لاحظ أنه عند ضرب زوج من التعابير الخطية، تصبح النتيجة عبارة عن تعبيرًا تربيعيًا. **التعبير التربيعي** هو تعبير ذو متغير واحد من الدرجة الثانية. عند ضرب ثلاثة من التعابير الخطية، تصبح النتيجة من الدرجة الثالثة.

ويمكن استخدام طريقة فويل لإيجاد تعبير يمثل مساحة مستطيل وذلك عندما تعطى أطوال الأضلاع كمقادير ذات حدين.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الربط بالحياة اليومية

تعتمد تكلفة حمام السباحة على عدة عوامل، من ضمنها حجم الحمام، وما إذا كان الحمام فوق الأرض أم داخل الأرض بالإضافة إلى المواد المستخدمة.

المصدر: American Dream Homes

مثال 3 من الحياة اليومية طريقة فويل

حمام السباحة يبني أحد المقاولين ممر حول حمام سباحة مستطيل الشكل حيث يكون الممر x ft من كل جانب من جوانب الحمام. اكتب تعبيرًا للمساحة الكلية للحمام والممر.

الاستيعاب نحتاج إلى إيجاد تعبير للمساحة الكلية للحمام والممر.

الخطة جـد ناتج ضرب طول وعرض الحمام في الممر.

الحل حيث إن الممر يبعد نفس المسافة عن كل جانب من جوانب الحمام، وطول وعرض الحمام هو أطول بمقدار $2x$. إذًا، فإنه يمكن تمثيل الطول بـ $2x + 20$ ويمكن تمثيل العرض بـ $2x + 15$.

المساحة = العرض × الطول

$= (2x + 20)(2x + 15)$ مساحة المستطيل

$= (2x)(2x) + (2x)(15) + (20)(2x) + (20)(15)$ عوّض

$= 4x^2 + 30x + 40x + 300$ طريقة فويل. اضرب.

$= 4x^2 + 70x + 300$ اجمع الحدود المتشابهة.

إذًا، المساحة الكلية للممر والحمام هي $4x^2 + 70x + 300$.

تحقق اختر قيمة لكل من x. وعوض بهذه القيمة في $(2x + 20)(2x + 15)$ و $4x^2 + 70x + 300$. ينبغي أن تكون النتيجة متماثلة لكلا التعبيرين.

تمرين موجّه

3. إذا كان يبلغ طول الحمام 25 ft ويبلغ عرضه 20 ft. فجـد مساحة الحمام والممر المحيطة به.

2 ضرب كثيرات الحدود

يمكن أيضًا استخدام خاصية التوزيع لضرب أي زوج من كثيرات الحدود.

مثال 4 خاصية التوزيع

جـد ناتج الضرب

a. $(6x + 5)(2x^2 - 3x - 5)$

$(6x + 5)(2x^2 - 3x - 5)$

$= 6x(2x^2 - 3x - 5) + 5(2x^2 - 3x - 5)$ خاصية التوزيع

$= 12x^3 - 18x^2 - 30x + 10x^2 - 15x - 25$ اضرب.

$= 12x^3 - 8x^2 - 45x - 25$ اجمع الحدود المتشابهة.

b. $(2y^2 + 3y - 1)(3y^2 - 5y + 2)$

$(2y^2 + 3y - 1)(3y^2 - 5y + 2)$

$= 2y^2(3y^2 - 5y + 2) + 3y(3y^2 - 5y + 2) - 1(3y^2 - 5y + 2)$ خاصية التوزيع

$= 6y^4 - 10y^3 + 4y^2 + 9y^3 - 15y^2 + 6y - 3y^2 + 5y - 2$ اضرب.

$= 6y^4 - y^3 - 14y^2 + 11y - 2$ اجمع الحدود المتشابهة.

تمرين موجّه

4A. $(3x - 5)(2x^2 + 7x - 8)$

4B. $(m^2 + 2m - 3)(4m^2 - 7m + 5)$

نصيحة دراسية

ضرب كثيرات الحدود

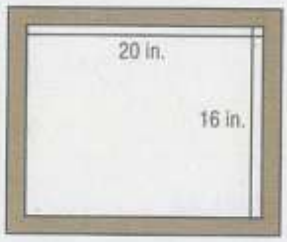
إذا ضُربت تعبير كثيرة حدود بها c من الحدود في تعبير كثير الحدود بها d من الحدود، هناك $c \cdot d$ من الحدود قبل التبسيط. ففي المثال 4a، هناك 3 × 2 أو 6 حدود قبل التبسيط.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

المثالان 1 و 2 **جـد ناتج الضرب**

1. $(x+5)(x+2)$
2. $(y-2)(y+4)$
3. $(b-7)(b+3)$
4. $(4n+3)(n+9)$
5. $(8h-1)(2h-3)$
6. $(2a+9)(5a-6)$



مثال 3 7. **إطار** يُصمم زيد إطارًا كما هو موضح على اليسار. حيث يبلغ عرض الإطار x in في محيطه بأكمله .
اكتب تعبيرًا يمثل المساحة الكلية للصورة والإطار.

مثال 4 **جـد ناتج الضرب**

8. $(2a-9)(3a^2+4a-4)$
9. $(4y^2-3)(4y^2+7y+2)$
10. $(x^2-4x+5)(5x^2+3x-4)$
11. $(2n^2+3n-6)(5n^2-2n-8)$

التمرين وحل المسائل

المثالان 1 و 2 **جـد ناتج الضرب**

12. $(3c-5)(c+3)$
13. $(g+10)(2g-5)$
14. $(6a+5)(5a+3)$
15. $(4x+1)(6x+3)$
16. $(5y-4)(3y-1)$
17. $(6d-5)(4d-7)$
18. $(3m+5)(2m+3)$
19. $(7n-6)(7n-6)$
20. $(12t-5)(12t+5)$
21. $(5r+7)(5r-7)$
22. $(8w+4x)(5w-6x)$
23. $(11z-5y)(3z+2y)$

مثال 3 24. **الحديقة** يحيط ممر بحديقة مستطيلة. يبلغ عرض الحديقة 8 m. وطولها 6 m. حيث يكون العرض x للممر.
المحيط بالحديقة هو نفسه على كل جانب. اكتب تعبيرًا يمثل المساحة الكلية للحديقة والممر.

مثال 4 **جـد ناتج الضرب**

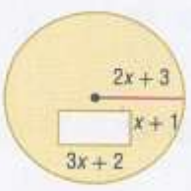
25. $(2y-11)(y^2-3y+2)$
26. $(4a+7)(9a^2+2a-7)$
27. $(m^2-5m+4)(m^2+7m-3)$
28. $(x^2+5x-1)(5x^2-6x+1)$
29. $(3b^3-4b-7)(2b^2-b-9)$
30. $(6z^2-5z-2)(3z^3-2z-4)$

بسّط.

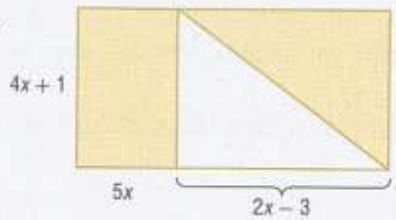
31. $(m+2)\left[(m^2+3m-6)+(m^2-2m+4)\right]$
32. $\left[(t^2+3t-8)-(t^2-2t+6)\right](t-4)$

البنية جـد تعبيرًا لتمثيل مساحة كل منطقة مظللة.

33.



34.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

35 **كرة طائرة** تُمثل أبعاد الملعب الرملي للكرة الطائرة بعرض $6y - 5$ قدمًا وطول $3y + 4$ قدمًا.

a. اكتب تعبيرًا يُمثّل مساحة الملعب.

b. إذا كان يبلغ طول الملعب الرملي للكرة الطائرة 31 ft. فجـد مساحة الملعب.

36. **الهندسة** اكتب تعبيرًا لمساحة مثلث بقاعدة $2x + 3$ وطول $3x - 1$.

جـد ناتج الضرب

37. $(a - 2b)^2$

38. $(3c + 4d)^2$

39. $(x - 5y)^2$

40. $(2r - 3t)^3$

41. $(5g + 2h)^3$

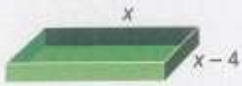
42. $(4y + 3z)(4y - 3z)^2$

43. **الإنشاء** تُمكنك أدوات صندوق الرمال من إنشاء صندوق رمال مربع الشكل أو مستطيل الشكل كما هو مُبين.

a. ما هي القيمة المحتملة لـ x؟ اشرح.

b. ما الشكل الذي له مساحة أكبر؟

c. ما الفرق في المساحة بين كل منهما؟



44. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف مربع مجموع.

a. **جدولي** انسخ الجدول لكل مجموع وأكمله.

التعبير	مربع التعبير
$x + 5$	
$3y + 1$	
$z + q$	

b. **لفظيًا** خمن حدود مربع مجموع.

c. **رمزيًا** لإيجاد مجموع الصيغة $a + b$. اكتب تعبيرًا لمربع المجموع.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

45. **التبرير** حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة *أحيانًا*، أم *دائمًا*، أم غير صحيحة على الإطلاق. اشرح استنتاجك.

يمكن استخدام طريقة فويل لضرب ثنائي الحدود وثلاثي الحدود.

46. **تحدٍ** جـد $(x^m + x^p)(x^{m-1} - x^{1-p} + x^p)$.

47. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب تعبيرًا ذو حدين وتعبيرًا ذو ثلاثة الحدود يتضمن متغيرًا واحدًا. ثم جـد ناتج ضربهما.

48. **توافق** قارن ووضح الفرق بين الإجراء المستخدم لضرب تعبير ثلاثي الحدود في تعبير ذو حدين باستخدام الطريقة الرأسية والإجراء المستخدم لضرب عدد مكون من ثلاثة أرقام في عدد مكون من رقمين.

49. **الكتابة في الرياضيات** لخص الطرق التي يمكن استخدامها لضرب كثيرات الحدود.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تدريب على الاختبار المعياري

50. ما ناتج ضرب $2x - 5$ في $3x + 4$؟

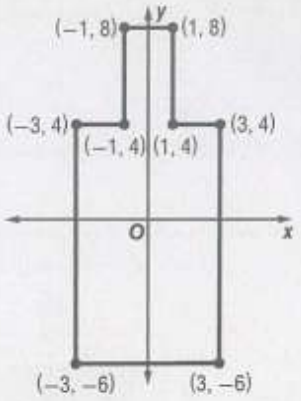
A $5x - 1$

B $6x^2 - 7x - 20$

C $6x^2 - 20$

D $6x^2 + 7x - 20$

51. أي العبارات صحيحة بشأن تماثل هذا التصميم؟



F التصميم متماثلًا فقط حول محور y.

G التصميم متماثلًا فقط حول محور x.

H التصميم متماثلًا حول كل من محوري y x.

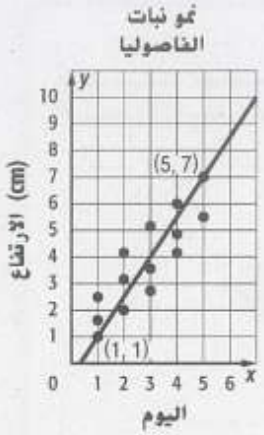
J ليس للتصميم تماثل.

52. أي نقطة على خط الأعداد تُمثل العدد الذي سينتج عن تكعيبه عددًا أكبر منه؟

A P C R

B Q D T

53. إجابة قصيرة اختارت خديجة ثلاث ثمرات من نبات الفاصوليا متساوية الارتفاع من أجل مشروع علمي. وظلت تقيس ارتفاعها بالسنتيمترات لمدة خمسة أيام. ثم رسمت القيم على التمثيل البياني أدناه.



رسمت المستقيم الأمثل مواءمة على التمثيل البياني. ما ميل المستقيم الذي رسمته؟

مراجعة شاملة

54. المدخرات لدى حمدة AED 6000 للاستثمار. وضعت x درهم في حساب المدخرات الذي يحقق نسبة مرابحة تساوي 2% سنويًا. واستخدمت باقي المبلغ لشراء شهادة إيداع التي تحقق ربحًا بنسبة 4%.
اكتب تعبيرًا للمبلغ المالي الذي سوف تحصل عليه حمدة في سنة واحدة. (الدرس 2-7)

جد المجموع أو الفرق. (الدرس 1-7)

55. $(7a^2 - 5) + (-3a^2 + 10)$

56. $(8n - 2n^2) + (4n - 6n^2)$

57. $(4 + n^3 + 3n^2) + (2n^3 - 9n^2 + 6)$

58. $(-4u^2 - 9 + 2u) + (6u + 14 + 2u^2)$

59. $(b + 4) + (c + 3b - 2)$

60. $(3a^3 - 6a) - (3a^3 + 5a)$

61. $(-4m^3 - m + 10) - (3m^3 + 3m^2 - 7)$

62. $(3a + 4ab + 3b) - (2b + 5a + 8ab)$

مراجعة المهارات

بسّط.

63. $(-2t^4)^3 - 3(-2t^3)^4$

64. $(-3h^2)^3 - 2(-h^3)^2$

65. $2(-5y^3)^2 + (-3y^3)^3$

66. $3(-6n^4)^2 + (-2n^2)^2$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

7-4 نواتج الضرب الخاصة

السابق

- قمت بضرب ذوات الحدين باستخدام طريقة فويل.

الآن

1. إيجاد ناتج مربع تعبير ذو حدين.
2. إيجاد ناتج ضرب المجموع في الفرق.

لماذا؟

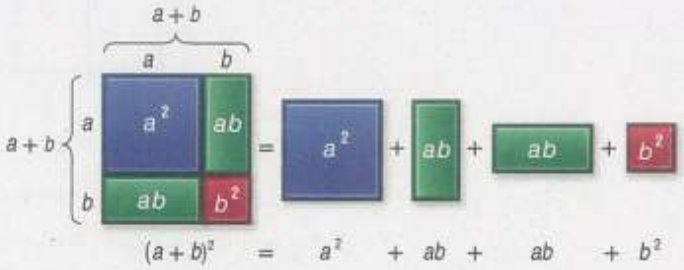
- يريد أحمد تثبيت لوحة أسهم على قطعة مربعة من لوح من الفلين. إذا كان نصف قطر لوحة الأسهم هو $r + 12$، فكم يجب أن يكون لوح الفلين المربع؟

يعرف أحمد أن قطر دائرة لوحة الأسهم يبلغ $2(r + 12)$ أو $2r + 24$. كما أن كل ضلع من أضلاع المربع يبلغ $2r + 24$. لإيجاد المقدار اللازم من لوح الفلين، يتعين على أحمد إيجاد مساحة المربع: $A = (2r + 24)^2$.

ممارسات في الرياضيات
البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

1 مربعات المجموع والفرق

بعض أزواج التعابير، مثل المربعات على غرار $(2r + 24)^2$، لها نواتج ضرب تتبع نمطًا معينًا. مربع مجموع، $(a + b)^2$ أو $(a + b)(a + b)$، هو أحد نواتج الضرب هذه.



المفهوم الأساسي مربع المجموع

الألفاظ مربع $a + b$ هو مربع a زائد مثلي ناتج ضرب a و b زائد مربع b.

الرموز $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$
$= a^2 + 2ab + b^2$

مثال $(x + 4)^2 = (x + 4)(x + 4)$
$= x^2 + 8x + 16$

مثال 1 مربع مجموع

جد $(3x + 5)^2$.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ قم بتربيع المجموع

$(3x + 5)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(5) + 5^2$ $a = 3x$, $b = 5$

$= 9x^2 + 30x + 25$ بسّط. واستخدم طريقة فويل للتحقق من حلك.

تمرين موجّه

جد ناتج الضرب في كل مما يلي.

1A. $(8c + 3d)^2$

1B. $(3x + 4y)^2$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

يوجد أيضًا نمط *لمربع الفرق*. اكتب $a - b$ على شكل $a + (-b)$ وجـد مربعها باستخدام نمط مربع ناتج الجمع.

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= [a+(-b)]^2 \\ &= a^2 + 2(a)(-b) + (-b)^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

قم بتربيع المجموع
بسّط.

المفهوم الأساسي مربع الفرق

الشرح مربع $a - b$ هو مربع a ناقص ضعف ناتج ضرب a في b زائد مربع b.

الرموز $(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$
$= a^2 - 2ab + b^2$

مثال $(x-3)^2 = (x-3)(x-3)$
$= x^2 - 6x + 9$

انتبه!
الانتظام تذكر أن $(x-7)^2$ لا يساوي $x^2 - 7^2$ أو $x^2 - 49$.

$$\begin{aligned}&(x-7)^2 \\ &= (x-7)(x-7) \\ &= x^2 - 14x + 49\end{aligned}$$

مثال 2 مربع الفرق

جـد $(2x - 5y)^2$.

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (2x-5y)^2 &= (2x)^2 - 2(2x)(5y) + (5y)^2 \\ &= 4x^2 - 20xy + 25y^2\end{aligned}$$

قم بتربيع الفرق
$b = 5y$ و $a = 2x$
بسّط.

تمرين موجّه

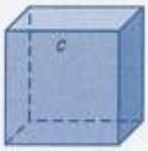
جـد ناتج الضرب في كل مما يلي.

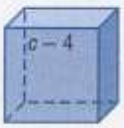
2A. $(6p - 1)^2$ **2B.** $(a - 2b)^2$

يُسمى ناتج ضرب مربع المجموع أو مربع الفرق ثلاثي حدود مربع *كامل*. يمكننا استخدام هذه الخطوات لإيجاد الأنماط لحل مسائل من الحياة اليومية.

مثال 3 من الحياة اليومية مربع الفرق

العلوم الفيزيائية **كل حافة مكعب من الألومينيوم تكون أقل من حافة مكعب من** النحاس **بمقدار 4 cm.**
اكتب تعبير يمثل **مساحة سطح مكعب الألومينيوم.**





افترض أن c طول كل حافة من مكعب النحاس.
إذًا، كل حافة من مكعب الألومينيوم تكون $c - 4$.

$$\begin{aligned}SA &= 6s^2 && \text{صيغة مساحة سطح مكعب} \\ SA &= 6(c-4)^2 && \text{عوّض عن } s \text{ بـ } c-4. \\ SA &= 6[c^2 - 2(4)(c) + 4^2] && \text{قم بتربيع الفرق} \\ SA &= 6(c^2 - 8c + 16) && \text{بسّط.}\end{aligned}$$

تمرين موجّه

3. البستنة يمتلك علي حديقة يبلغ طولها g ft ويبلغ عرضها g ft. يرغب علي في إضافة 3 ft إلى الطول والعرض.

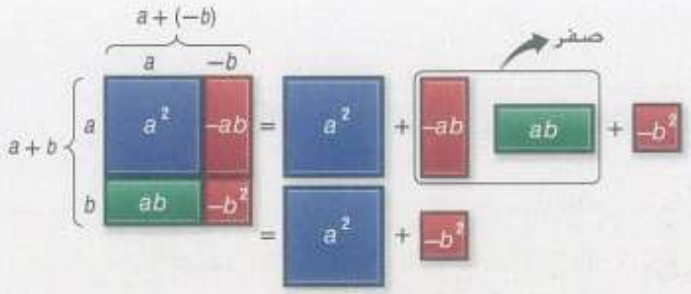
A. اشرح كيف يمكن تمثيل المساحة الجديدة للحديقة عن طريق مربع تعبير ذو حدين.

B. جـد مربع هذا التعبير ذو الحدين.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 ناتج ضرب المجموع والفرق

سوف نرى الآن نتيجة ضرب مجموع في فرق. أو $(a + b)(a - b)$.
تذكر أن $a - b$ يمكن كتابتها بالصيغة $a + (-b)$.



لاحظ أن الحدود الوسطى أعداد متعاكسة مجموعها يساوي صفر. إذًا
$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$.

نصيحة دراسية

الأنماط عند استخدام أي من هذه الأنماط، يمكن أن تكون a و b أرقامًا أو متغيرات أو تعابير تحتوي على أرقام ومتغيرات.

المفهوم الأساسي ناتج ضرب مجموع وفرق

الشرح: ناتج ضرب $a + b$ في $a - b$ هو مربع a ناقص مربع b.

الرموز:
$$(a + b)(a - b) = (a - b)(a + b)$$
$$= a^2 - b^2$$

مثال 4 ناتج ضرب المجموع في الفرق

جد $(2x^2 + 3)(2x^2 - 3)$.

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	ناتج ضرب المجموع في الفرق
$(2x^2 + 3)(2x^2 - 3) = (2x^2)^2 - (3)^2$	$b = 3$ و $a = 2x^2$
$= 4x^4 - 9$	بسّط.

تمرين موجّه

جد ناتج الضرب في كل مما يلي.

4A. $(3n + 2)(3n - 2)$

4B. $(4c - 7d)(4c + 7d)$

التحقق من فهمك

المثالان 2 – 1 **جد ناتج الضرب في كل مما يلي.**

1. $(x + 5)^2$

2. $(11 - a)^2$

3. $(2x + 7y)^2$

4. $(3m - 4)(3m - 4)$

5. $(g - 4h)(g - 4h)$

6. $(3c + 6d)^2$

مثال 3

7. الجينات يرتبط لون شعر كلاب لابرادور ريتريفر بالجينات. تسود جينات الألوان الداكنة D على جينات اللون الأصفر y. الكلاب التي لديها الجينات DD أو Dy سيكون شعرها داكن اللون. أما الكلاب الذي لديها الجينات yy فسيكون شعرها أصفر اللون. وتكون جينات لون شعر الكلاب A Dy، وجينات B yy.

	D	y
D	DD	Dy
y	Dy	yy

a. اكتب تعبيرًا لألوان الشعر المحتملة لكل من القطط A و B.

b. ما احتمال أن تمتلك إحدى الكلاب لون فراء أصفر؟

McGraw-Hill Education مؤسسة لصالح محفوظة © حقوق الطبع والتأليف

مثال 4 جـد كل ناتج ضرب مما يلي.

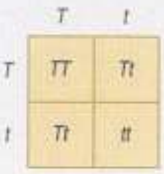
8. $(a - 3)(a + 3)$
9. $(x + 5)(x - 5)$
10. $(6y - 7)(6y + 7)$
11. $(9t + 6)(9t - 6)$

التمرين وحل المسائل

المثالان 2 – 1 جـد ناتج الضرب في كل مما يلي.

12. $(a + 10)(a + 10)$
13. $(b - 6)(b - 6)$
14. $(h + 7)^2$
15. $(x + 6)^2$
16. $(8 - m)^2$
17. $(9 - 2y)^2$
18. $(2b + 3)^2$
19. $(5t - 2)^2$
20. $(8h - 4n)^2$

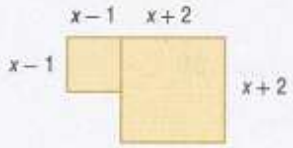
مثال 3



21. **الجينات** القدرة على لف لسانك هي سمة موروثة جينيًا من الوالدين إذا كان أحد الوالدين لديه السمة السائدة T. وبالتالي فإن الأطفال الذين لا توجد لدى والديهم هذه السمة لن يكونوا قادرين على لف ألسنتهم.
   a. وضح كيف يمكن تمثيل التوافيق عن طريق مربع مجموع.
   b. توقع النسبة المئوية للأطفال الذين سيكون لديهم كلا الجينين سائدين، وجين واحد سائد، وكلا الجينين متنحيين.

مثال 4 جـد ناتج الضرب في كل مما يلي.

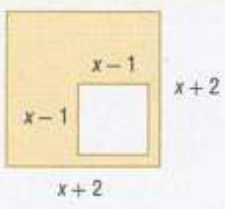
22. $(u + 3)(u - 3)$
23. $(b + 7)(b - 7)$
24. $(2 + x)(2 - x)$
25. $(4 - x)(4 + x)$
26. $(2q + 5r)(2q - 5r)$
27. $(3a^2 + 7b)(3a^2 - 7b)$
28. $(5y + 7)^2$
29. $(8 - 10a)^2$
30. $(10x - 2)(10x + 2)$
31. $(3t + 12)(3t - 12)$
32. $(a + 4b)^2$
33. $(3q - 5r)^2$
34. $(2c - 9d)^2$
35. $(g + 5h)^2$
36. $(6y - 13)(6y + 13)$
37. $(3a^4 - b)(3a^4 + b)$
38. $(5x^2 - y^2)^2$
39. $(8a^2 - 9b^3)(8a^2 + 9b^3)$
40. $\left(\frac{3}{4}k + 8\right)^2$
41. $\left(\frac{2}{5}y - 4\right)^2$
42. $(7z^2 + 5y^2)(7z^2 - 5y^2)$
43. $(2m + 3)(2m - 3)(m + 4)$
44. $(r + 2)(r - 5)(r - 2)(r + 5)$



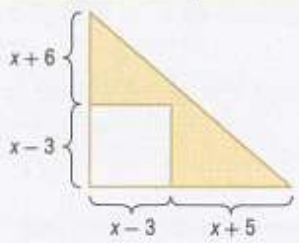
45. **الاستنتاج المنطقي** اكتب معادلة كثيرة الحدود تمثل مساحة الشكل الموجود على اليسار.
46. **الأطباق الطائرة** يحلق طبق طائر على شكل دائرة نصف قطرها $x + 3$ بوصة.
   a. اكتب تعبيرًا يمثل مساحة الطبق الطائر.
   b. توجد فتحة نصف قطرها $x - 1$ بوصة في منتصف القرص. اكتب تعبيرًا يمثل المساحة المتبقية.

هندسة جـد مساحة المنطقة المظللة في كل مما يلي.

47.



48.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

جـد ناتج الضرب في كل مما يلي.

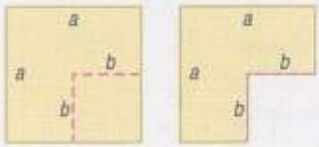
49. $(c + d)(c + d)(c + d)$ **50.** $(2a - b)^3$ **51.** $(f + g)(f - g)(f + g)$

52. $(k - m)(k + m)(k - m)$ **53.** $(n - p)^2(n + p)$ **54.** $(q + r)^2(q - r)$

55 المصارعة يجب أن تكون حصيرة المصارعة في مدرسة ثانوية على شكل مربع يبلغ طول ضلعه 38 ft وتحتوي على دائرتين كما هو مبين. لنفرض أن الدائرة الداخلية نصف قطرها r ft. وأن نصف قطر الدائرة الخارجية أطول من نصف قطر الدائرة الداخلية من بمقدار 9 ft.

a. اكتب تعبيرًا لمساحة الدائرة الكبيرة.

b. اكتب تعبيرًا لمساحة الجزء الذي يقع خارج الدائرة الكبيرة من المربع.



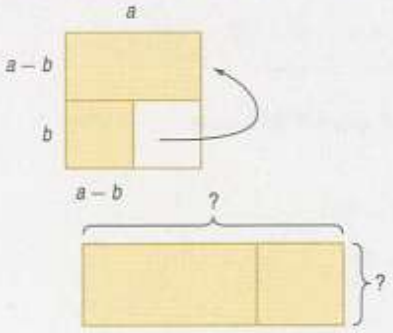
56. التمثيلات المتعددة في هذه المسألة، سوف تستكشف نمطًا.
ابدء بقطعة مربعة من الورق المقوى. سمِّ جميع حواف الورقة a.
في أي زاوية من الزوايا، ارسم مربعًا أصغر وسمِّ الحواف b.

a. عدديًا أوجد جبريًا مساحة جميع المربعات.

b. عمليًا اقطع المربع الأصغر من الزاوية.
ما مساحة الشكل؟

c. تحليليًا قم بإزالة المستطيل الأصغر في الجزء السفلي.
قم بإدارته وتحريكه إلى جانب المستطيل العلوي. ما طول الترتيب الجديد؟ وكم يبلغ العرض؟ وكم تبلغ المساحة؟

D. تحليليًا ما النمط الذي يثبته ذلك؟



مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

57. أي مما يلي لا ينتمي إلى المجموعة؟ ما التعبير الذي لا ينتمي؟ مع الشرح.

$(2c - d)(2c - d)$	$(2c + d)(2c - d)$	$(2c + d)(2c + d)$	$(c + d)(c + d)$

58. البنية هل يوجد نمط لمكعب مجموع $(a + b)^3$؟

a. استكشف هذه المسألة عن طريق إيجاد ناتج ضرب $(a + b)(a + b)(a + b)$.

b. استخدم النمط الذي اكتشفته في الجزء a لإيجاد $(x + 2)^3$.

C. ارسم رسمًا تخطيطيًا للتمثيل الهندسي للتعبير $(a + b)^3$.

d. ما نمط مكعب الفرق $(a - b)^3$؟

59. الاستنتاج جـد قيمة c التي تجعل $25x^2 - 90x + c$ تعبيرًا تربيعيًا ثلاثي الحدود كاملاً.

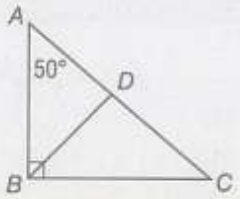
60. مسألة غير محددة الإجابة اكتب زوجًا من ذوات الحدين بناتج ضرب مكون من حدين.
ثم اكتب زوجًا من ذوات الحدين بناتج ضرب غير مكون من حدين.

61. الكتابة في الرياضيات اشرح كيفية تربيع مجموع مقدارين وتربيع فرق مقدارين وكيفية إيجاد ناتج ضرب مجموع مقدارين وفرق مقدارين.

McGraw-Hill Education محفوظة لناشر مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبار المعياري

62. إجابة شبكية في المثلث قائم الزاوية، ينصف $\overline{DB}$ الزاوية $\angle B$. ما قياس الزاوية $\angle ADB$ بالدرجات؟



63. ما ناتج ضرب $(2a - 3)$ و $(2a - 3)$؟

A $4a^2 + 12a + 9$
B $4a^2 + 9$
C $4a^2 - 12a - 9$
D $4a^2 - 12a + 9$

64. يستطيع مازن قطع 4 km بالسيارة في m دقائق. بهذا المعدل، ما عدد الدقائق التي سيستغرقها لقطع 19 km بالسيارة؟

F $76m$
G $\frac{19m}{4}$
H $\frac{4m}{19}$
J $\frac{4}{19m}$

65. ما الخواص التي يمكن استخدامها لحل المعادلة $2x + 0 = 2x$؟

A خاصية التبديل في الجمع
B خاصية المعكوس الجمعي
C خاصية المحايد الجمعي
D خاصية التجميع في الجمع

مراجعة شاملة

جد ناتج الضرب في كل مما يلي.

66. $(y - 4)(y - 2)$
67. $(2c - 1)(c + 3)$
68. $(d - 9)(d + 5)$
69. $(4h - 3)(2h - 7)$
70. $(3x + 5)(2x + 3)$
71. $(5m + 4)(8m + 3)$

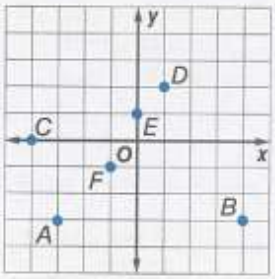
بسّط.

72. $x(2x - 7) + 5x$
73. $c(c - 8) + 2c(c + 3)$
74. $8y(-3y + 7) - 11y^2$
75. $-2d(5d) - 3d(d + 6)$
76. $5m(2m^3 + m^2 + 8) + 4m$
77. $3p(6p - 4) + 2\left(\frac{1}{2}p^2 - 3p\right)$

بسّط.

78. $\sqrt{48}$
79. $\sqrt{162}$
80. $\sqrt{25a^6b^4}$
81. $\sqrt{45xy^8}$

اكتب الزوج المرتّب المقابل لكل نقطة موضحة على الشكل.



82. A
83. B
84. C
85. D
86. E
87. F

مراجعة المهارات

اكتب كثيرة الحدود بالصيغة القياسية في كل مما يلي. وحدّد المعامل الرئيس.

88. $2x^2 - x^4 - 8 + x$
89. $-5p^4 + p^2 + 12 + 2p^5$
90. $-10 + a^3 - a + 6a^2$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

اختبار منتصف الوحدة
الدروس من 1–7 إلى 4–7

حدد إذا كان كل تعبير فيما يلي كثير الحدود أم لا. وإذا كان كذلك، فجد الدرجة وحدد إذا كان *أحادي الحد* أو *ثنائي الحدود* أو *ثلاثي الحدود*. (الدرس 1–7)

1. $3y^2 - 2$
2. $4t^5 + 3t^2 + t$
3. $\frac{3x}{5y}$
4. ax^{-3}
5. $3b^2$
6. $2x^{-3} - 4x + 1$

7. **السكان** يبين الجدول الكثافة السكانية في إحدى الدول لسنوات مختلفة. (الدرس 1–7)

العام	سنوات منذ 1930	عدد الأشخاص/ الميل المربع
1930	0	0.8
1960	30	2.6
1980	50	7.3
1990	60	10.9
2000	70	18.2

a. يمكن تمثيل الكثافة السكانية d في هذه الدولة بين عامي 1930 و 2000 عن طريق $d = 0.005n^2 - 0.127n + 1$. حيث إن n يمثل عدد السنوات منذ عام 1930. حدد نوع كثير الحدود لـ $0.005n^2 - 0.127n + 1$.

b. ما درجة كثير الحدود؟

c. توقع الكثافة السكانية في هذه الدولة لعام 2020 وعام 2030.

جد المجموع أو الفرق في كل مما يلي. (الدرس 1–7)

8. $(y^2 + 2y + 3) + (y^2 + 3y - 1)$
9. $(3n^3 - 2n + 7) - (n^2 - 2n + 8)$
10. $(5d + d^2) - (4 - 4d^2)$
11. $(x + 4) + (3x + 2x^2 - 7)$
12. $(3a - 3b + 2) - (4a + 5b)$
13. $(8x - y^2 + 3) + (9 - 3x + 2y^2)$

جد ناتج الضرب في كل مما يلي. (الدرس 2–7)

14. $6y(y^2 + 3y + 1)$
15. $3n(n^2 - 5n + 2)$
16. $d^2(-4 - 3d + 2d^2)$
17. $-2xy(3x^2 + 2xy - 4y^2)$
18. $ab^2(12a + 5b - ab)$
19. $x^2y^4(3xy^2 - x + 2y^2)$

20. **الاختيار من متعدد** بسّط $x(4x + 5) + 3(2x^2 - 4x + 1)$. (الدرس 2–7)

A $10x^2 + 17x + 3$ C $2x^2 - 7x + 3$
B $10x^2 - 7x + 3$ D $2x^2 + 17x + 3$

جد ناتج الضرب في كل مما يلي. (الدرس 3–7)

21. $(x + 2)(x + 5)$
22. $(3b - 2)(b - 4)$
23. $(n - 5)(n + 3)$
24. $(4c - 2)(c + 2)$
25. $(k - 1)(k - 3k^2)$
26. $(8d - 3)(2d^2 + d + 1)$

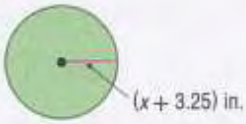
27. **التصنيع** تقوم الشركة بتصميم عبوة للمعكرونة الجافة على شكل منشور مستطيل حيث يزيد طوله عن عرضه بـ 2 in ويزيد ارتفاعه عن طوله بـ 3 in. اكتب تعبيرًا بدلالة العرض لحجم العبوة. (الدرس 3–7)

جد ناتج الضرب في كل مما يلي. (الدرس 4–7)

28. $(x + 2)^2$
29. $(n - 11)^2$
30. $(4b - 2)^2$
31. $(6c + 3)^2$
32. $(5d - 3)(5d + 3)$
33. $(9k + 1)(9k - 1)$

34. **جولف القرص** تختلف الأقراص المصرح باستخدامها في جولف القرص في أحجامها. (الدرس 4–7)

القرص الأكبر



القرص الأصغر

a. اكتب تعبيرين مختلفين لمساحة أكبر قرص.
b. إذا كان x هو 10.5، فما مساحة كل من أكبر قرص وأصغر قرص؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

7-5 التحليل إلى العوامل باستخدام خاصية التوزيع

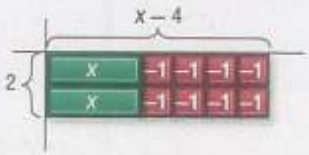
مختبر الجبر

عند ضرب عددين، يكون هذان العددان *عاملين* لناتج الضرب. تعطى الطالب أحيانًا ناتج ضرب ثنائيتي حدود ويطلب منك إيجاد العوامل. ويدعى هذا بالتحليل إلى العوامل. ويمكنك استخدام القطع الجبرية لتحليل ثنائيات الحد إلى العوامل.

النشاط 1 استخدام القطع الجبرية لتحليل $2x - 8$ إلى العوامل

الخطوة 1 مثّل $2x - 8$.

الخطوة 2 رتّب القطع على هيئة مستطيل، تمثل مساحة المستطيل الكلية ناتج الضرب، وبمثل طوله وعرضه العاملين.

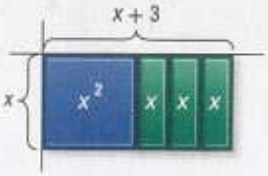


للمستطيل عرض يساوي 2 وطول يساوي $x - 4$. ولهذا فإن $2x - 8 = 2(x - 4)$.

النشاط 2 استخدم القطع الجبرية لتحليل $x^2 + 3x$ إلى العوامل

الخطوة 1 مثّل $x^2 + 3x$.

الخطوة 2 رتّب القطع في صورة مستطيل.



للمستطيل عرض يساوي x وطول يساوي $x + 3$. ولذلك فإن $x^2 + 3x = x(x + 3)$.

النموذج والتحليل

استخدام القطع الجبرية لتحليل كل ثنائية حدود إلى العوامل.

1. $4x + 12$
2. $4x - 6$
3. $3x^2 + 4x$
4. $10 - 2x$

حدد إن كان يمكن تحليل كل ثنائية حدود إلى العوامل. وبرر إجابتك برسم

5. $6x - 9$
6. $5x - 4$
7. $4x^2 + 7$
8. $x^2 + 3x$

9. **الكتابة في الرياضيات** اكتب فقرةً تشرح فيها كيف يمكنك استخدام القطع الجبرية لتحديد ما إذا كان من الممكن تحليل ثنائية حدود. وأورد مثالاً عن ثنائية حد واحدة يمكن تحليلها وأخرى لا يمكن تحليلها.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

7–5 استخدام خاصية التوزيع

السابق
- استخدام خاصية التوزيع لإيجاد قيم التعابير.

الحالي
1. تحليل المقادير كثيرة الحدود إلى العوامل باستخدام خاصية التوزيع.
2. حل المعادلات ذات الصيغة $ax^2 + bx = 0$.

لماذا؟
- تحدد تكلفة إيجار متجر السيد كريم بالقدم المربعة من المكان. ويمكن تمثيل مساحة المتجر بالمعادلة $A = 1.6w^2 + 6w$. حيث w عرض المتجر بالأقدام. يمكننا استخدام التحليل إلى العوامل وخاصية ناتج الضرب الصفري لإيجاد الأبعاد الممكنة.

المفردات الجديدة
التحليل إلى العوامل (factoring)
التحليل إلى العوامل بالتجميع (factoring by grouping)
خاصية ناتج الضرب الصفري (Zero Product Property)

ممارسات في الرياضيات
التفكير بطريقة تجريدية وكمية.

1 استخدام خاصية التوزيع للتحليل إلى العوامل

لقد استخدمت خاصية التوزيع لضرب أحادية حد بكثيرة حدود. يمكنك الحل بترتيب عكسي للتعبير عن كثيرة حدود بأنها ناتج ضرب عامل أحادي الحد وعامل كثير الحدود.

$$1.6w^2 + 6w = 1.6w(w) + 6(w)$$
$$= w(1.6w + 6)$$

إذًا، $w(1.6w + 6)$ تمثل *الصيغة المحللة إلى العوامل* لـ $1.6w^2 + 6w$. ينطوي **تحليل كثيرة حدود إلى العوامل** إيجاد صيغتها المحللة *بالكامل* إلى العوامل.

مثال 1 استخدام خاصية التوزيع

استخدِم خاصية التوزيع لتحليل كل كثيرة حدود إلى العوامل.

a. $27y^2 + 18y$

جـد العامل المشترك الأكبر لكل حد.

$27y^2 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot y \cdot y$ — حلل كل حد.

$18y = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot y$ — ضع دوائر حول العوامل المشتركة

$GCF = 3 \cdot 3 \cdot y = 9y$

اكتب كل حد بصيغة ناتج ضرب للعامل المشترك الأكبر وعوامله المتبقية. ثم استخدم خاصية التوزيع *للتحليل بإخراج* العامل المشترك الأكبر.

$27y^2 + 18y = 9y(3y) + 9y(2)$ — أعد كتابة كل حد باستخدام العامل المشترك الأكبر.

$= 9y(3y + 2)$ — خاصية التوزيع

b. $-4a^2b - 8ab^2 + 2ab$

$-4a^2b = -1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot b$ — حلل كل حد.

$-8ab^2 = -1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a \cdot b \cdot b$ — ضع دوائر حول العوامل المشتركة.

$2ab = 2 \cdot a \cdot b$

$GCF = 2 \cdot a \cdot b = 2ab$

$-4a^2b - 8ab^2 + 2ab = 2ab(-2a) - 2ab(4b) + 2ab(1)$ — أعد كتابة كل حد باستخدام العامل المشترك الأكبر.

$= 2ab(-2a - 4b + 1)$ — خاصية التوزيع

تمرين موجّه

1A. $15w - 3v$

1B. $7u^2t^2 + 21ut^2 - ut$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يطلق على استخدام خاصية التوزيع لتحليل كثيرة حدود ذات أربعة حدود أو أكثر اسم **التحليل إلى العوامل بالتجميع** لأن الحدود توضع في مجموعات ثم تُحلّل إلى العوامل. تُطبق خاصية التوزيع بعد ذلك على عامل مشترك ثنائي الحدود.

المفهوم الأساسي التحليل إلى العوامل بالتجميع

الشرح يمكن تحليل كثيرة حدود إلى العوامل بالتجميع إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية معًا.

- هناك أربعة حدود أو أكثر.
- للحدود عوامل مشتركة يمكن تجميعها معًا.
- هناك عاملان مشتركان متطابقان أو يعدّان معكوسين جمعيين لبعضهما بعضًا.

الرموز

$$\begin{aligned} ax + bx + ay + by &= (ax + bx) + (ay + by) \\ &= x(a + b) + y(a + b) \\ &= (x + y)(a + b) \end{aligned}$$

مثال 2 التحليل إلى العوامل بالتجميع

حلّل إلى العوامل: $4qr + 8r + 3q + 6$.

$4qr + 8r + 3q + 6$	التعبير الأصلي
$= (4qr + 8r) + (3q + 6)$	جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة.
$= 4r(q + 2) + 3(q + 2)$	حلّل بإخراج العامل المشترك الأكبر لكل مجموعة.

لاحظ أن الحد $(q + 2)$ مشترك في كلتا المجموعتين. ولذلك فإنه يصبح العامل المشترك الأكبر.

$= (4r + 3)(q + 2)$	خاصية التوزيع

تمرين موجّه

حلّل كثيرة الحدود إلى العوامل فيما يلي.

2A. $rn + 5n - r - 5$ **2B.** $3np + 15p - 4n - 20$

قد يكون من المفيد تمييز الحالات التي تكون فيها ثنائيات الحدود معكوسات جمعية بالنسبة لبعضها بعضًا. $6 - a = -1(a - 6)$.

مثال 3 التحليل إلى العوامل بالتوزيع بوجود معكوسات جمعية

حلل إلى العوامل: $2mk - 12m + 42 - 7k$.

$2mk - 12m + 42 - 7k$	
$= (2mk - 12m) + (42 - 7k)$	جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة.
$= 2m(k - 6) + 7(6 - k)$	حلل بإخراج العامل المشترك الأكبر من كل مجموعة.
$= 2m(k - 6) + 7[(-1)(k - 6)]$	$6 - k = -1(k - 6)$
$= 2m(k - 6) - 7(k - 6)$	خاصية التجميع
$= (2m - 7)(k - 6)$	خاصية التوزيع

تمرين موجّه

حلّل كثيرة الحدود إلى العوامل فيما يلي.

3A. $c - 2cd + 8d - 4$ **3B.** $3p - 2p^2 - 18p + 27$

نصيحة دراسية

تحقق تحليل التعابير إلى العوامل للتحقق من إجاباتك في التحليل للعوامل، اضرب العوامل معًا. ينبغي أن تكون النتيجة التي تحصل عليها هي التعبير الأصلي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 حل المعادلات بالتحليل إلى العوامل

يمكن حل المعادلات بالتحليل الى العوامل. فكر بالتالي.

$3(0) = 0$ $\quad 0(2 - 2) = 0$ $\quad -312(0) = 0$ $\quad 0(0.25) = 0$

لاحظ في كل حالة أن واحدا من العوامل على الأقل يساوي 0. وهذه الأمثلة براهين عن **خاصية ناتج الضرب الصفري**.

المفهوم الأساسي خاصية ناتج الضرب الصفري

الشرح إذا كان ناتج ضرب عاملين يساوي 0. فأحدهما على الأقل يجب أن يساوي 0.

الرموز بالنسبة لأي أعداد حقيقية a و b. إذا كان $ab = 0$ فإن $a = 0$ أو $b = 0$. أو كلّ من a و b يساوي 0.

تذكر أن حل معادلة أو جذرها هو أي قيمةٍ تجعل المعادلة صحيحة

مثال 4 حل المعادلات

حُـــلّ كل معادلة مما يلي. ثم تحقق من صحة حلولك.

a. $(2d + 6)(3d - 15) = 0$

$(2d + 6)(3d - 15) = 0$ المعادلة الأصلية

$2d + 6 = 0$ أو $3d - 15 = 0$ خاصية ناتج الضرب في صفر

$2d = -6$ $\quad 3d = 15$ حُـــل كل معادلة.

$d = -3$ $\quad d = 5$ اقسم.

الجذران هما -3 و 5.

تحقق عوّض بـ -3 و 5 بدلاً عن d في المعادلة الأصلية.

$(2d + 6)(3d - 15) = 0$ $\quad (2d + 6)(3d - 15) = 0$

$[2(-3) + 6][3(-3) - 15] \stackrel{?}{=} 0$ $\quad [2(5) + 6][3(5) - 15] \stackrel{?}{=} 0$

$(-6 + 6)(-9 - 15) \stackrel{?}{=} 0$ $\quad (10 + 6)(15 - 15) \stackrel{?}{=} 0$

$(0)(-24) \stackrel{?}{=} 0$ $\quad 16(0) \stackrel{?}{=} 0$

$0 = 0$ ✓ $\quad 0 = 0$ ✓

b. $c^2 = 3c$ المعادلة الأصلية

$c^2 = 3c$ اطرح $3c$ من كل طرف لتحصل على 0 في أحد طرفي المعادلة

$c^2 - 3c = 0$ اخراج العامل المشترك الأكبر لتحصل على الصيغة $ba = 0$

$c(c - 3) = 0$ خاصية ناتج الضرب في صفر

$c = 0$ $\quad c - 3 = 0$ حَلّ كل معادلة.

$c = 3$ تحقق بالتعويض بـ 0 و 3 عن c.

الجذران هما 0 و 3.

تمرين موجّه

4A. $3n(n + 2) = 0$ $\quad$ **4B.** $8b^2 - 40b = 0$ $\quad$ **4C.** $x^2 = -10x$

انتبه!

القيمة المجهولة ربما يغريك حل معادلةٍ بقسمة كل طرفٍ على متغير. بيد أن للمتغير قيمة مجهولة. ولذلك ربّما تقسم على 0. وذلك قيمة غير معرّفة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 5 من الحياة اليومية استخدام التحليل إلى العوامل

الرشاقة في خفة الحركة تنافس أحد الكلاب المشهورة **مع مدرّبها على مضمار الرشاقة. وضمن المضمار**، كان على الكلب **أن يقفز فوق حاجز. يمكن تمثيل** قفزته **بالمعادلة** $h = -16t^2 + 20t$، **وفيها** h **ارتفاع القفزة بالبوصات عند** t **ثانية. جد قيم** t **عندما يكون** $h = 0$.

$h = -16t^2 + 20t$ المعادلة الأصلية

$0 = -16t^2 + 20t$ عوّض $h = 0$.

$0 = 4t(-4t + 5)$ اخراج العامل المشترك الأكبر.

$4t = 0$ أو $-4t + 5 = 0$ خاصية ناتج الضرب في صفر

$t = 0$ $-4t = -5$ حلّ كل معادلة.

$t = \frac{5}{4} = 1.25$ اقسم كل طرف على -4.

ارتفاع الكلب يساوي 0 in عند 0 و 1.25 s ضمن القفزة.

تمرين موجّه

5. **الكنغر** يمكن تمثيل قفزة الكنغر بالمعادلة $h = 24t - 16t^2$ حيث تمثل h ارتفاع القفزة بالأقدام و t الزمن بالثانية. جد قيم t عندما يكون $h = 0$.

الربط بالحياة اليومية

تختبر رشاقة الكلاب مهارات الشخص بمثابة مدرب وصاحب الكلاب، حيث يتسابق المنافسون على مضمار من العوائق يضم حواجز وأنفاقًا وأرجوحةً وأعمدة قائمة.

المصدر: رابطة رشاقة الكلاب في الولايات المتحدة

التحقق من فهمك

مثال 1 **استخدم خاصية التوزيع لتحليل كل كثيرة حدود إلى العوامل.**

1. $21b - 15a$
2. $14c^2 + 2c$
3. $10g^2h^2 + 9gh^2 - g^2h$
4. $12jk^2 + 6j^2k + 2j^2k^2$

المثالان 2-3 **حلّل كل كثيرة حدود إلى العوامل.**

5. $np + 2n + 8p + 16$
6. $xy - 7x + 7y - 49$
7. $3bc - 2b - 10 + 15c$
8. $9fg - 45f - 7g + 35$

مثال 4 **حُلّ كل معادلة مما يلي. ثم تحقق من صحة الحل.**

9. $3k(k + 10) = 0$
10. $(4m + 2)(3m - 9) = 0$
11. $20p^2 - 15p = 0$
12. $r^2 = 14r$

مثال 5

13. **العناكب** يمكن العثور على العناكب الوائبة بصورةٍ شائعةٍ في المنازل والإسطبلات. ويمكن تمثيل قفزة العنكبوت الوائب بالمعادلة $h = 33.3t - 16t^2$، والتي يمثل فيها t الزمن بالثواني و h الارتفاع بالأقدام.
   a. متى يكون ارتفاع العنكبوت 0 من الأقدام؟
   b. ما ارتفاع العنكبوت بعد ثانية واحدة؟ وبعد ثانيتين؟

14. **الاستنتاج** خلال احتفال وطني، يُطلق صاروخٌ باتجاه مستقيم إلى الأعلى وبسرعة منجهة بدائية قدرها 125 ft/sec. يُمثّل ارتفاع الصاروخ h بالأقدام فوق سطح البحر بالقانون $h = 125t - 16t^2$. وتمثل فيه t الزمن بالثواني بعد إطلاق الصاروخ.
   a. ما ارتفاع الصاروخ عند عودته إلى الأرض؟
   b. افرض أن $h = 0$ في المعادلة وحلّها لإيجاد t.
   c. كم ثانيةً سيستغرق الصاروخ كي يعود إلى الأرض؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw Hill Education

التمارين وحل المسائل

مثال 1 استخدِم خاصية التوزيع لتحليل كل كثيرة حدود إلى العوامل.

15. $16t - 40y$

16. $30v + 50x$

17. $2k^2 + 4k$

18. $5z^2 + 10z$

19. $4a^2b^2 + 2a^2b - 10ab^2$

20. $5c^2v - 15c^2v^2 + 5c^2v^3$

المثالان 2-3 حلّل كل كثيرة حدود إلى العوامل.

21 $fg - 5g + 4f - 20$

22. $a^2 - 4a - 24 + 6a$

23. $hj - 2h + 5j - 10$

24. $xy - 2x - 2 + y$

25. $45pq - 27q - 50p + 30$

26. $24ty - 18t + 4y - 3$

27. $3dt - 21d + 35 - 5t$

28. $8r^2 + 12r$

29. $21th - 3t - 35h + 5$

30. $vp + 12v + 8p + 96$

31. $5br - 25b + 2r - 10$

32. $2nu - 8u + 3n - 12$

33. $5gf^2 + g^2f + 15gf$

34. $rp - 9r + 9p - 81$

35. $27cd^2 - 18c^2d^2 + 3cd$

36. $18r^3t^2 + 12r^2t^2 - 6r^2t$

37. $48tu - 90t + 32u - 60$

38. $16gh + 24g - 2h - 3$

مثال 4 حُـــلّ كل معادلة مما يلي. ثم تحقق من صحة الحل.

39. $3b(9b - 27) = 0$

40. $2n(3n + 3) = 0$

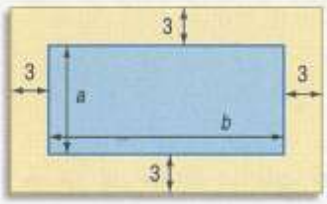
41. $(8z + 4)(5z + 10) = 0$

42. $(7x + 3)(2x - 6) = 0$

43. $b^2 = -3b$

44. $a^2 = 4a$

مثال 5



45. الاستنتاج المنطقي استخدم الرسم التخطيطي إلى اليمين.

a. اكتب تعبيرًا بالصيغة المحللة إلى العوامل لتمثيل مساحة الجزء الأزرق.

b. اكتب تعبيرًا بالصيغة المحللة إلى العوامل لتمثيل مساحة المنطقة التي تشكلها الحافة الخارجية.

c. اكتب تعبيرًا بالصيغة المحللة إلى العوامل لتمثيل المنطقة الصفراء.

46. الألعاب النارية تُطلق قذيفة ألعاب نارية من مستوى سطح الأرض. يُعطى ارتفاع القذيفة بالأقدام من خلال الصيغة $h = 263t - 16t^2$. وفيها t الزمن بالثواني بعد الإطلاق.

a. اكتب التعبير الذي يمثل الارتفاع بالصيغة المحللة إلى العوامل.

b. ما الزمن الذي عنده الارتفاع يساوي 0؟ هل الإجابة عملية؟ اشرح.

c. ما ارتفاع القذيفة بعد 8 و 10 ثوانٍ من إطلاقها؟

d. عند الثانية العاشرة، هل تكون القذيفة صاعدةً أم هابطة؟

47. الهندسة المعمارية إطار أحد المداخل قوسٌ يمكن تمثيله بالتمثيل البياني للمعادلة $y = -3x^2 + 12x$. حيث يقاس x و y بالأقدام. وتُمثّل الأرضية على المستوى الإحداثي بالمحور الأفقي x.

a. أعدّ جدولاً يقيم ارتفاع القوس إذا كان x يساوي 0 ft و 1 ft و 2 ft و 3 ft و 4 ft.

b. مثّل النقاط من الجدول على مستوى إحداثي واربط النقاط لتشكل منحنى منتظمًا لتمثيل القوس.

c. ما ارتفاع المدخل؟

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

48. **ألعاب الملاهي** افترض أنه يمكن تمثيل ارتفاع راكب بعد هبوطه بالمعادلة $h = -16t^2 - 96t + 160$. وفيها h الارتفاع بالأقدام و t الزمن بالثواني.

a. اكتب تعبيرًا لتمثيل الارتفاع بالصيغة المحللة إلى العوامل.

b. ما الارتفاع الذي هبط منه الراكب بدايةً؟

c. ما ارتفاع الراكب بعد 3 s؟ هل ذلك ممكن؟ اشرح.

49. **رمي السهام** يمكن تمثيل ارتفاع سهم h بالأقدام من خلال المعادلة $h = 64t - 16t^2$. وفيها t الزمن بالثواني. بإهمال ارتفاع الرامي، كم الزمن الذي سيستغرقه السهم بعد إطلاقه ليصطدم بالأرض؟

50. **التنس** يضرب لاعب تنس الكرة إلى الأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها 80 ft/s. يمكن تمثيل ارتفاع كرة التنس بالأقدام h بالمعادلة $h = 80t - 16t^2$. وفيها t الزمن بالثواني. بإهمال ارتفاع اللاعب، كم تستغرق الكرة كي تصطدم بالأرض؟

51. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف طريقة *الصندوق* في التحليل إلى العوامل. لتحليل $x^2 + x - 6$ إلى العوامل، اكتب الحد الأول في الزاوية العلوية اليسرى من الصندوق، ثم اكتب الحد الأخير في الزاوية السفلية اليمنى.

?	?
?	x^2	?
?	?	-6

a. **تحليليًا** حدّد العاملين اللذين ناتج ضربهما يساوي -6 ومجموعهما 1.

b. **رمزيًا** اكتب كل عامل في مربع فارغ من الصندوق. واشتمل على الإشارة الموجبة أو السالبة والمتغير

c. **تحليليًا** جد عامل كل صف وعمود في الصندوق. ما عوامل $x^2 + x - 6$؟

d. **لفظيًا** صف كيف تستخدم طريقة الصندوق لتحليل $x^2 - 3x - 40$ إلى العوامل.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

52. **النقد** يحل هاني وريم المعادلة $2m^2 = 4m$. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

هاني

$2m^2 = 4m$

$\frac{2m^2}{m} = \frac{4m^2}{2m}$

$2m = 2$

$m = 1$

ريم

$2m^2 = 4m$

$2m^2 - 4m = 0$

$2m(m - 2) = 0$

$2m = 0$ أو $m - 2 = 0$

$m = 0$ أو 2

53. **تحدٍّ** لديك المعادلة $(ax + b)(ax - b) = 0$. جد حلها من أجل x. ماذا تعرف عن قيمتي a و b؟

54. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب كثيرة حدود من أربعة حدود يمكن تحليلها إلى العوامل بالتجميع. ثم حللها إلى العوامل.

55. **الاستنتاج** لديك المعادلة $c = a^2 - ab$. ما قيمتا a و b اللتان تجعلان $c = 0$؟

56. **الكتابة في الرياضيات** اشرح طريقة حل معادلة تربيعية باستخدام خاصية ناتج الضرب في صفر.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

57. أي مما يلي عاملٌ $6z^2 - 3z - 2 + 4z$؟

A $2z + 1$
B $3z - 2$
C $z + 2$
D $2z - 1$

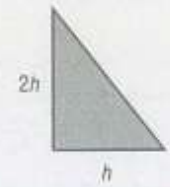
58. الاحتمالات بحوزة هلال 10 مكعبات: اثنان أحمران و 4 زرقاء و 3 صفراء ومكعب واحد أخضر. فما احتمال أن يعطي الاختبار العشوائي مكعبًا أحمر أو أصفر؟

F $\frac{3}{10}$
G $\frac{1}{5}$
H $\frac{1}{2}$
J $\frac{7}{10}$

59. إجابة شبكية يصنع راشد لحافًا أبعاده 140 in في 160 in بواسطة قطع مربعة طول ضلع كل منها 8 in. فكم عدد المربعات التي سيحتاج إليها لصنع اللحاف؟

60. الهندسة مساحة المثلث قائم الزاوية الموضح أدناه $5h\ \text{cm}^2$. فما ارتفاع المثلث؟

A 2 cm
B 5 cm
C 8 cm
D 10 cm



مراجعة شاملة

61. الوراثة جينات العيون البنية B سائدة على جينات العيون الزرقاء b. فإذا كان شخص لديه الجينان BB أو Bb فإن عينيه بنيتان. ومن لديه الجينان bb فإن له عينين زرقاوين. عينا لميس زرقاوان ولهما الجينان Bb. وعينا باسم زرقاوان. اكتب تعبيرًا يحدد ألوان العين الممكنة لطفل لميس وباسم. وحدّد الاحتمال في أن يكون للطفل عينان زرقاوان. (الدرس 4–7)

جـد ناتج الضرب في كل مما يلي. (الدرس 2–7)

62. $n(n^2 - 4n + 3)$
63. $2b(b^2 + b - 5)$
64. $-c(4c^2 + 2c - 2)$
65. $-4x(x^3 + x^2 + 2x - 1)$
66. $2ab(4a^2b + 2ab - 2b^2)$
67. $-3xy(x^2 + xy + 2y^2)$

68. الرحلة الصفية يركب طلاب صف الأستاذ أيمن لمادة التاريخ سيارة أجرة من الفندق الذي يمكثون فيه في أبوظبي باتجاه المتحف الوطني. تساوي تعرفة الكيلو متر الأول AED 2.75 ويضاف إليها مبلغ AED 1.25 لكل كيلو متر إضافي. المسافة تساوي m km ويحتاج الصف إلى t سيارة أجرة. اكتب تعبيرًا تكلفة نقل الصف. (الدرس 2–7)

جـد درجة التعبير كثير الحدود. (الدرس 1–7)

69. 2
70. $-3a$
71. $5x^2 + 3x$
72. $d^4 - 6c^2$
73. $2x^3 - 4z + 8xz$
74. $3d^4 + 5d^3 - 4c^2 + 1$

مراجعة المهارات

جـد كل ناتج الضرب في مما يلي.

75. $(a + 2)(a + 5)$
76. $(d + 4)(d + 10)$
77. $(z - 1)(z - 8)$
78. $(c + 9)(c - 3)$
79. $(x - 7)(x - 6)$
80. $(g - 2)(g + 11)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

7-6 مختبر الجبر
تحليل ثلاثيات الحدود إلى العوامل

يمكنك استخدام القطع الجبرية لتحليل ثلاثيات الحدود إلى العوامل. فإذا كانت ثلاثية حدود تمثل مساحة مستطيل مُشكّل من قطع جبرية، إذا فإن طول المستطيل وعرضه *عاملان* للمساحة. وإذا كان من غير الممكن تشكيل مستطيل لتمثيل ثلاثية الحد، إذًا فهي غير قابلة للتحليل إلى العوامل.

النشاط 1 حلّل $x^2 + bx + c$ إلى العوامل

استخدم القطع الجبرية لتحليل $x^2 + 4x + 3$ إلى العوامل.

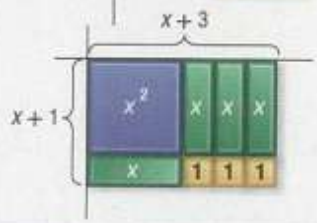
الخطوة 1 مثّل $x^2 + 4x + 3$.

الخطوة 2 ضع القطعة x^2 في زاوية نموذج ناتج الضرب. ورتّب القطع الجبرية الممثلة للعدد 1 في صف مستطيل. ونظرًا إلى أن العدد 3 أولي، يمكن ترتيب القطع الـ 3 في المستطيل بطريقة واحدة، ألا وهي مستطيل أبعاده 1 في 3.

الخطوة 3 أكمل المستطيل بالقطع الجبرية x

للمستطيل عرض يساوي $x + 1$ وطول يساوي $x + 3$.

ولذلك، $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$.

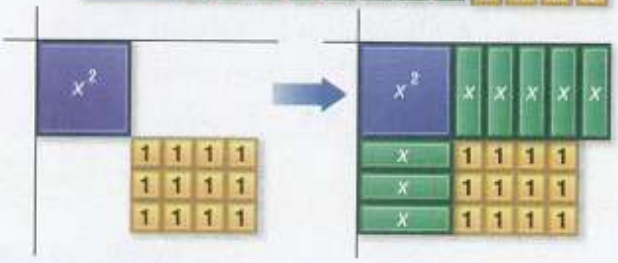


النشاط 2 حلّل $x^2 + bx + c$ إلى العوامل

استخدم القطع الجبرية لتحليل $x^2 + 8x + 12$ إلى العوامل.

الخطوة 1 مثّل $x^2 + 8x + 12$.

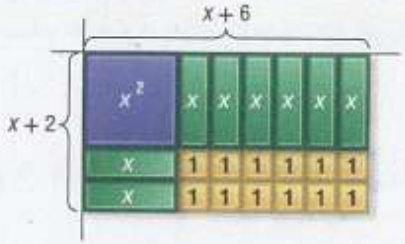
الخطوة 2 ضع القطعة الجبرية x^2 في زاوية نموذج ناتج الضرب. ورتب القطع الجبرية الممثلة للعدد 1 في صف مستطيل. بما أن $12 = 3 \times 4$، جرّب مستطيلاً بعداه 3 في 4. حاول إكمال المستطيل. ولاحظ أن هناك قطعة x إضافية.



الخطوة 3 رتّب القطع الجبرية الممثلة للعدد 1 في صف مستطيل بعداه 2 في 6 . يمكنك هذه المرة إكمال المستطيل بواسطة قطع x الجبرية.

للمستطيل عرض يساوي $x + 2$ وطول يساوي $x + 6$.

لذلك، $x^2 + 8x + 12 = (x + 2)(x + 6)$.

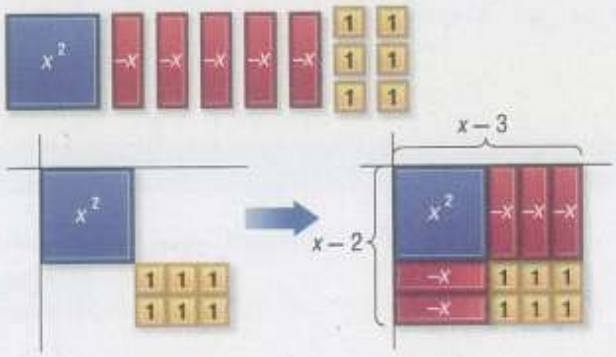


حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تحليل ثلاثيات الحدود إلى العوامل تابع

النشاط 3 حلّل $x^2 + bx + c$ إلى العوامل

استخدم القطع الجبرية لتحليل $x^2 - 5x + 6$ إلى العوامل.



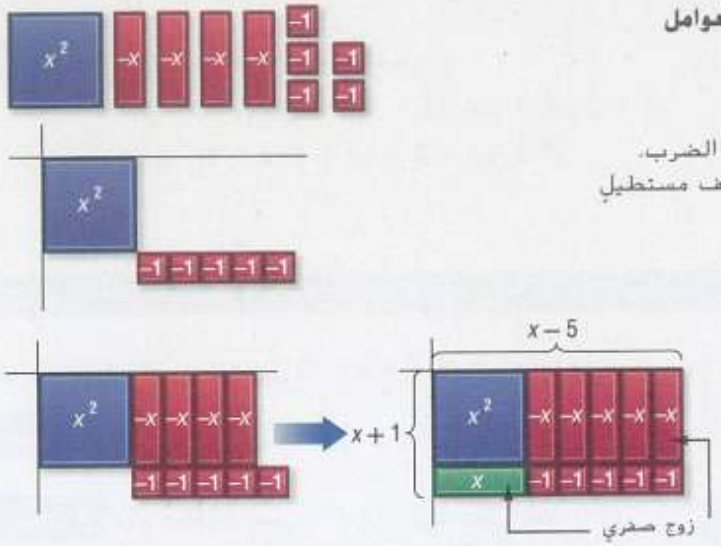
الخطوة 1 مثّل $x^2 - 5x + 6$.

الخطوة 2 ضع القطعة الجبرية x^2 في زاوية نموذج ناتج الضرب. ورتّب القطع الجبرية الممثلة للعدد 1 في صفيف مستطيل بعداه 2 في 3 كما هو موضح.

الخطوة 3 أكمل المستطيل بالقطع الجبرية x. للمستطيل عرض يساوي $x - 2$ وطول يساوي $x - 3$.
ولذلك. $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

نشاط 4 حلّل $x^2 + bx - c$ إلى العوامل

استخدم القطع الجبرية لتحليل $x^2 - 4x - 5$ إلى العوامل



الخطوة 1 مثّل $x^2 - 4x - 5$.

الخطوة 2 ضع القطعة الجبرية x^2 في زاوية نموذج ناتج الضرب. ورتّب القطع الجبرية الممثلة للعدد 1 في صف مستطيل بعداه 1 في 5 كما هو موضح.

الخطوة 3 ضع القطعة الجبرية x كما هو موضح. يمكنك جمع الأزواج الصفرية بدون تغيير قيمة كثيرة الحدود. وفي هذه الحالة، أضف زوجًا صفريًا من x مربعًا جبريًا. للمستطيل عرض يساوي $x + 1$ و a وطول يساوي $x - 5$.
ولذلك. $x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x - 5)$.

النموذج والتحليل

استخدام القطع الجبرية لتحليل كل ثلاثية حد إلى العوامل.

1. $x^2 + 3x + 2$
2. $x^2 + 6x + 8$
3. $x^2 + 3x - 4$
4. $x^2 - 7x + 12$
5. $x^2 + 7x + 10$
6. $x^2 - 2x + 1$
7. $x^2 + x - 12$
8. $x^2 - 8x + 15$

اذكر إن كان يمكن تحليل كل ثلاثية حدود إلى العوامل. وبرر إجابتك برسم

9. $x^2 + 3x + 6$
10. $x^2 - 5x - 6$
11. $x^2 - x - 4$
12. $x^2 - 4$

13. **الكتابة في الرياضيات** كيف يمكنك استخدام القطع الجبرية لتحديد ما إذا كانت ثلاثية حدودٍ قابلةً للتحليل إلى العوامل؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

6-7 حلّ $x^2 + bx + c = 0$

السابق

- قمت بضرب القيم ذات الحدين عن طريق استخدام طريقة فويل.

الحالي

1 تحليل ثلاثيات الحدود ذات الصيغة $x^2 + bx + c$ إلى العوامل.

2 حلّ المعادلات ذات الصيغة $x^2 + bx + c = 0$.

لماذا؟

- تريد دينا تركيب حوض سباحة أرضي مستطيل. وتودّ أن يحاط الحوض بسور امتداده 24 ft. يحتل حوض السباحة مساحة مقدارها $36\ ft^2$. فما الأبعاد التي ينبغي أن تكون لحوض السباحة؟

لحلّ هذه المسألة، يحتاج المهندس منسق المناظر الطبيعية إلى عددين ناتج ضربهما 36 ومجموعهما 12. وهو نصف محيط حوض السباحة.

المفردات الجديدة

معادلة تربيعية
quadratic equation

ممارسات في الرياضيات

محاولة إيجاد البنية واستخدامها.
البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

1 تحليل $x^2 + bx + c$ إلى العوامل. لقد تعلمت كيفية ضرب ثنائيتي حدود باستخدام طريقة فويل لضرب الأقواس. وكانت كل من ثنائيتي الحدود عاملاً لناتج الضرب. ويمكن استخدام نمط ضرب ثنائيات الحدود لتحليل أنواع محددة من ثلاثيات الحدود إلى العوامل.

استخدم طريقة فويل لضرب الأقواس. $(x + 3)(x + 4) = x^2 + 4x + 3x + 3 \cdot 4$

خاصية التوزيع $= x^2 + (4 + 3)x + 3 \cdot 4$

بسّط. $= x^2 + 7x + 12$

لاحظ أن معامل الحد الأوسط $7x$، هو مجموع 3 و 4، وأن الحد الأخير، 12، هو ناتج ضرب 3 و 4.

لاحظ النمط التالي في الضرب.

$$(x + 3)(x + 4) = x^2 + (4 + 3)x + (3 \cdot 4)$$

بفرض أن $m = 3$ و $p = 4$. $(x + m)(x + p) = x^2 + (p + m)x + mp$

خاصية التبديل (+) $= x^2 + (m + p)x + mp$

$b = m + p$ و $c = mp$ $x^2 + bx + c$

لاحظ أن معامل الحد الأوسط يساوي مجموع m و p، وأن الحد الأخير يساوي ناتج ضرب m و p. يمكن استخدام هذا النمط لتحليل ثلاثيات الحدود ذات الصيغة $x^2 + bx + c$ إلى العوامل.

المفهوم الأساسي تحليل $x^2 + bx + c$ إلى العوامل

الشرح لتحليل ثلاثيات الحدود ذات الصيغة $x^2 + bx + c$ إلى العوامل، جد عددين صحيحين m و p مجموعهما b وناتج ضربهما c. ثم اكتب $x^2 + bx + c$ بالصيغة $(x + m)(x + p)$.

الرموز $x^2 + bx + c = (x + m)(x + p)$ عندما $m + p = b$ و $mp = c$.

مثال $x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$، لأن $2 + 4 = 6$ و $2 \cdot 4 = 8$.

عندما يكون c موجبًا، فإن لعوامله الإشارة نفسها، فإما أن يكون كلا العاملين موجبًا أو سالبًا استنادًا إلى إشارة b . فإذا كان إشارة b موجبة، إذًا فالعاملان موجبان. وإذا كانت إشارة b سالبة، فالعاملان سالبان.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 1 b و c موجبان

حلّل $x^2 + 9x + 20$ إلى العوامل.

في ثلاثية الحدود هذه، $b = 9$ و $c = 20$. بما أن c موجب و b موجب، فأنت بحاجة إلى عاملين موجبين مجموعهما 9 وناتج ضربهما 20. شكّل قائمة منظمة من عوامل العدد 20، وابحث عن زوج من العوامل مجموعهما 9.

عوامل العدد 20	مجموع العوامل
1, 20	21
2, 10	12
4, 5	9

العاملان الصحيحان هما 4 و 5.

اكتب النمط. $x^2 + 9x + 20 = (x + m)(x + p)$

$m = 4$ و $p = 5$ $= (x + 4)(x + 5)$

تحقق يمكنك التحقق من هذه النتيجة بضرب العاملين. وينبغي أن يساوي ناتج الضرب التعبير الأصلي.

طريقة فويل لضرب الأقواس $(x + 4)(x + 5) = x^2 + 5x + 4x + 20$

بسّط. $= x^2 + 9x + 20$ ✓

نصيحة في حل المسائل

التخمين والتحقق عند تحليل ثلاثية حدود، قم بتخمين مدروس. وتحقق من مدى الصحة، ثم عدّل التخمين إلى أن تعثر على الإجابة الصحيحة.

تمرين موجه

حلّل كثيرة الحدود في كل مما يلي إلى العوامل.

1A. $d^2 + 11x + 24$

1B. $9 + 10t + t^2$

عند تحليل ثلاثية حدود فيها b سالب وc موجب إلى العوامل. استخدم ما تعرفه عن ناتج ضرب ثلاثيات الحدود لتضييق قائمة العوامل الممكنة.

مثال 2 b سالب و c موجب

حلّل $x^2 - 8x + 12$ إلى العوامل. وتحقق من صحة إجابتك باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

في ثلاثية الحدود $b = -8$ و $c = 12$. بما أن c موجب و b سالب، فإنك بحاجة إلى إيجاد عاملين سالبين مجموعهما -8 وناتج ضربهما 12.

عوامل العدد 12	مجموع العوامل
$-1, -12$	-13
$-2, -6$	-8
$-3, -4$	-7

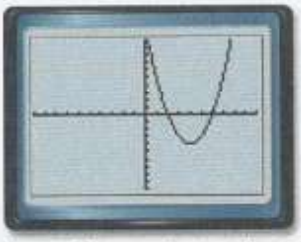
العاملان الصحيحان هما -2 و -6.

اكتب النمط. $x^2 - 8x + 12 = (x + m)(x + p)$

$m = -2$ و $p = -6$ $= (x - 2)(x - 6)$

تحقق مثّل بيانيًا $y = x^2 - 8x + 12$ و $y = (x - 2)(x - 6)$ على الشاشة نفسها. وبما أنه يظهر تمثيل بياني واحد فقط، فلا بد أن التمثيلين البيانيين متطابقان.

ولذلك فإن ثلاثية الحدود قد حللت على نحوٍ صحيح. ✓



[−10, 10] scl: 1 by [−10, 10] scl: 1

نصيحة دراسية

التوافق عندما تعثر على العوامل الصحيحة، لا يلزم تجريب أي عوامل أخرى. في المثال 2، -2 و -6 هما العاملان الصحيحان. إذًا فلا حاجة لتجريب -3 و -4.

تمرين موجه

حلّل كثيرة الحدود في كل مما يلي إلى العوامل.

2A. $21 - 22m + m^2$

2B. $w^2 - 11w + 28$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

عندما يكون c سالبًا، فإن لعامليه إشارتين متعاكستين. ولتحديد أيّ من العاملين موجب وأي منهما سالب، انظر إلى إشارة b. ويكون للعامل ذي القيمة المطلقة الأكبر إشارة مماثلة لإشارة b.

مراجعة المفردات

القيمة المطلقة المسافة التي يبعدها العدد عن الصفر على مستقيم الأعداد. وتُكتب $|n|$

مثال 3 c سالب

حلّل كثيرة الحدود في كل مما يلي إلى العوامل. تأكد من الحلول باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

a. $x^2 + 2x - 15$

في ثلاثية الحدود $b = 2$ و $c = -15$. بما أن c سالب، فإن للعاملين m و p إشارتان متعاكستان. إذًا إما أن يكون m أو p سالبًا، وليس كلاهما. وبما أن b موجب، فإن العامل ذا القيمة المطلقة الأكبر موجب أيضًا.

أدرج عوامل -15، بحيث يكون لعاملٍ واحدٍ من كل زوجٍ إشارة سالبة. ابحث عن الزوج المؤلف من عاملين مجموعهما 2.

عوامل العدد -15	مجموع العوامل
$-1, 15$	14
$-3, 5$	2

العاملان الصحيحان هما -3 و 5.

اكتب النمط.

$m = -3$ و $p = 5$

$$x^2 + 2x - 15 = (x + m)(x + p)$$
$$= (x - 3)(x + 5)$$

تحقق طريقة فويل لضرب الأقواس بسّط.

$$(x - 3)(x + 5) = x^2 + 5x - 3x - 15$$
$$= x^2 + 2x - 15 \checkmark$$

b. $x^2 - 7x - 18$

في ثلاثية الحدود $b = -7$ و $c = -18$. إما m أو p سالب، ولكن ليس كلاهما. وبما أن b سالب، فالعامل ذو القيمة المطلقة الأكبر سالب أيضًا.

أدرج عوامل -18، بحيث يكون لعاملٍ واحدٍ من كل زوجٍ إشارة سالبة. ابحث عن الزوج المؤلف من عاملين مجموعهما -7.

عوامل العدد -18	مجموع العوامل
$1, -18$	-17
$2, -9$	-7
$3, -6$	-3

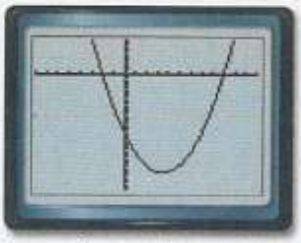
العاملان الصحيحان هما 2 و -9.

اكتب النمط.

$m = 2$ و $p = -9$

$$x^2 - 7x - 18 = (x + m)(x + p)$$
$$= (x + 2)(x - 9)$$

تحقّق مثّل $y = x^2 - 7x - 18$ و $y = (x + 2)(x - 9)$ بيانيًا على الشاشة نفسها.



[−10, 15] scl: 1 by [−40, 20] scl: 1

يتطابق التمثيلان البيانيان. ولذلك فقد حُلّلت ثلاثية الحدود إلى العوامل على نحوٍ صحيح. ✓

تمرين موجه

3A. $y^2 + 13y - 48$

3B. $r^2 - 2r - 24$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 حل المعادلات بالتحليل إلى العوامل

يمكن أن تُكتب **المعادلة التربيعية** بالصيغة القياسية $ax^2 + bx + c = 0$، حيث $a \neq 0$. يمكن حلّ بعض المعادلات ذات الصيغة $ax^2 + bx + c = 0$ باستخدام التحليل إلى العوامل ومن ثم استخدام خاصية ناتج الضرب الصفري.

مثال 4 حل معادلة بالتحليل إلى العوامل

حُـــلّ المعادلة $x^2 + 6x = 27$. ثم تحقق من صحة الحل.

$x^2 + 6x = 27$	المعادلة الأصلية
$x^2 + 6x - 27 = 0$	اطرح 27 من كل طرف.
$(x - 3)(x + 9) = 0$	حلل إلى العوامل.
$x - 3 = 0$ or $x + 9 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$x = 3$ $\quad x = -9$	حُلّ كل معادلة.

الجذران هما 3 و9−.

تحقق عوّض بـ 3 و 9− عن x في المعادلة الأصلية.

$x^2 + 6x = 27$
$(-9)^2 + 6(-9) \stackrel{?}{=} 27$
$81 - 54 \stackrel{?}{=} 27$
$27 = 27$ ✓

$x^2 + 6x = 27$
$(3)^2 + 6(3) \stackrel{?}{=} 27$
$9 + 18 \stackrel{?}{=} 27$
$27 = 27$ ✓

تمرين موجه

حُـــلّ كل معادلة مما يلي. وتحقق من حلولك.

4A. $z^2 - 3z = 70$

4B. $x^2 + 3x - 18 = 0$

نصيحة دراسية

حل معادلة بالتحليل إلى العوامل تذكّر أن تصفّر أحد طرفي المعادلة قبل التحليل إلى عوامل.

يمكن أن يكون التحليل إلى العوامل مفيدًا عند حل مسائل من الحياة اليومية.

مثال 5 من الحياة اليومية حل المسائل بالتحليل إلى العوامل

التصميم يصمم أحمد ملصقًا. طول الجزء العلوي من الملصق 4 in وطول بقية الملصق أكبر 2 in من عرضه. فإذا كان الملصق يستهلك $616\ ft^2$ من لوحة تثبيت الملصقات، فجـد عرض الملصق w.

الفهم يتعين عليك إيجاد عرض الملصق.

التخطيط بما أن الملصق مستطيل، فإن العرض × الطول = المساحة.

الحل ليكن w = عرض الملصق. الطول يساوي $w + 2 + 4$ أو $w + 6$.

$w(w + 6) = 616$	اكتب المعادلة.
$w^2 + 6w = 616$	اضرب.
$w^2 + 6w - 616 = 0$	اطرح 616 من كل طرف.
$(w + 28)(w - 22) = 0$	حلل إلى العوامل.
$w + 28 = 0$ or $w - 22 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$w = -28$ $\quad w = 22$	حُل كل معادلة.

تحقق بما أن الأبعاد لا يمكن أن تكون سالبة، فإن العرض يساوي 22 in. إذا كان عرض الملصق يساوي 22 in، فإن مساحته تساوي $22 \cdot (22 + 6)$ أو $616\ in^2$. وهو المقدار الذي يحتاج إليه الملصق. ✓

تمرين موجه

5. **الهندسة** يقلّ ارتفاع متوازي أضلاع بمقدار 18 cm عن طول قاعدته. فإذا كانت مساحة متوازي الأضلاع تساوي 175 cm. فما ارتفاعه؟

الربط بالحياة اليومية

توصي شركة تصنع لافتات للمناسبات باستخدام ألواح من الفلين بالنسبة للافتات التي تستخدم مرة واحدة. أما بالنسبة للافتات التي تستخدم أكثر من مرة، فإنها توصي باستخدام ألواح من نوع أقوى من الفلين.

المصدر: MegaPrint Inc.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

التحقق من فهمك

الأمثلة 1-3 **حلّل كثيرة الحدود في كل مما يلي إلى العوامل. تأكد من الحلول باستخدام حاسبة التمثيل البياني.**

1. $x^2 + 14x + 24$
2. $y^2 - 7y - 30$
3. $n^2 + 4n - 21$
4. $m^2 - 15m + 50$

مثال 4 **حُـــلّ كل معادلة مما يلي. ثم تحقق من صحة الحل.**

5. $x^2 - 4x - 21 = 0$
6. $n^2 - 3n + 2 = 0$
7. $x^2 - 15x + 54 = 0$
8. $x^2 + 12x = -32$
9. $x^2 - x - 72 = 0$
10. $x^2 - 10x = -24$

مثال 5 11. **إعداد الإطارات** اشترت سعاد إطارًا لصورة. ولكن الصورة أكبر بكثير من أن يلائمها الإطار. تحتاج سعاد إلى تصغير طول الصورة وعرضها بالمقدار نفسه. حيث ينبغي تصغير مساحة الصورة إلى نصف مساحتها الأصلية. فإذا كان بعدا الصورة الأصلية 12 in في 16 in. فكم بعدا الصورة الأصغر؟

التمرين وحل المسائل

الأمثلة 1-3 **حلّل كثيرة الحدود في كل مما يلي إلى العوامل. تأكد من الحلول باستخدام حاسبة التمثيل البياني.**

12. $x^2 + 17x + 42$
13. $y^2 - 17y + 72$
14. $a^2 + 8a - 48$
15. $n^2 - 2n - 35$
16. $44 + 15h + h^2$
17. $40 - 22x + x^2$
18. $-24 - 10x + x^2$
19. $-42 - m + m^2$

مثال 4 **حُـــلّ كل معادلة مما يلي. ثم تحقق من صحة الحل.**

20. $x^2 - 7x + 12 = 0$
21. $y^2 + y = 20$
22. $x^2 - 6x = 27$
23. $a^2 + 11a = -18$
24. $c^2 + 10c + 9 = 0$
25. $x^2 - 18x = -32$
26. $n^2 - 120 = 7n$
27. $d^2 + 56 = -18d$
28. $y^2 - 90 = 13y$
29. $h^2 + 48 = 16h$

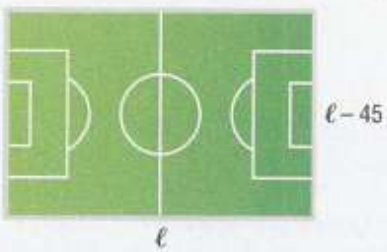
مثال 5 30. **الهندسة** لمثلث مساحة قدرها $36\ ft^2$. فإذا كان ارتفاع المثلث أكبر من طول قاعدته بـ 6 in. فما ارتفاع المثلث وطول قاعدته؟

31. **الهندسة** لمستطيل مساحة تمثّل بالعلاقة $x^2 - 4x - 12$ قدمًا مربعة. فإذا كان طول المستطيل يساوي $x + 2$ قدمًا. فما عرضه؟

32. **كرة القدم** يقلّ عرض ملعب كرة القدم في مدرسة ثانوية عن طوله بمقدار 45 yd.

a. عرّف متغيرًا واكتب تعبيرًا يمثل مساحة الملعب.

b. مساحة الملعب $9000\ yd^2$. جـد بعديه.



البنية **حلّل كثيرة الحدود في كل مما يلي إلى العوامل.**

33. $q^2 + 11qr + 18r^2$
34. $x^2 - 14xy - 51y^2$
35. $x^2 - 6xy + 5y^2$
36. $a^2 + 10ab - 39b^2$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

37. **السباحة** يزيد طول حوض سباحة 20 ft عن عرضه. ومساحته تساوي $525\ ft^2$.

a. عرّف متغيرًا واكتب معادلة لإيجاد مساحة بركة السباحة.

b. حُـــلّ المعادلة.

c. فسّر الحل. هل كلا الحلين منطقيين؟ اشرح.

الهندسة جـد تعبيرًا لمحيط مستطيلٍ إذا أعطيت مساحته.

38. $A = ^2 + 24x - 81$

39. $A = x^2 + 13x - 90$

40. **التمثيلات المتعددة** سوف تستكشف في هذه المعادلة التحليل إلى العوامل عندما لا يساوي معامل الحدّ الأعلى رتبةً 1.

a. **جدوليّ** انسخ الجدول أدناه وأكمله.

ناتج ضرب ثنائيتي حدود	$ax^2 + mx + px + c$	$ax^2 + bx + c$	$m \times p$	$a \times c$
$(2x + 3)(x + 4)$	$2x^2 + 8x + 3x + 12$	$2x^2 + 11x + 12$	24	24
$(x + 1)(3x + 5)$				
$(2x - 1)(4x + 1)$				
$(3x + 5)(4x - 2)$				

b. **تحليليًا** ما علاقة m و p بـــ a و c؟

c. **تحليليًا** ما علاقة m و p بـــ b؟

d. **لفظيًا** صف عملية يمكنك استخدامها لتحليل كثيرة حدود من الصيغة $ax^2 + bx + c$ إلى العوامل.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

41. **تحليل الخطأ** حلّل جميل و بشير $x^2 + 6x - 16$ إلى العوامل. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

جميل

$x^2 + 6x - 16 = (x + 2)(x - 8)$

بشير

$x^2 + 6x - 16 = (x - 2)(x + 8)$

البراهين جـد قيم k في كل مما يلي بحيث يمكن تحليل كل كثيرة حدود إلى العوامل باستخدام أعداد صحيحة.

42. $x^2 + kx - 19$

43. $x^2 + kx + 14$

44. $x^2 - 8x + k,\ k > 0$

45. $x^2 - 5x + k,\ k > 0$

46. **الاستنتاج** أيًا كانت $x^2 + bx + c$ ثلاثية حدود قابلة للتحليل إلى العوامل، هل ستكون القيمة المطلقة لـــ b أحيانًا أم دائمًا أم لن تكون على الإطلاق أصغر من القيمة المطلقة لـــ c؟ اشرح.

47. **مسألة غير محددة الإجابة** أعط مثالاً عن ثلاثية حدود يمكن تحليلها إلى العوامل باستخدام التقنيات الواردة في هذا الدرس للتحليل إلى العوامل. ثم حلل ثلاثية الحدود إلى العوامل.

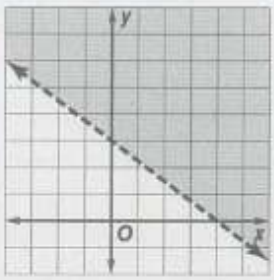
48. **تحدٍّ** حلّل $(4y - 5)^2 + 3(4y - 5) - 70$ إلى العوامل.

49. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيفية تحليل ثلاثيات الحدود ذات الصيغة $x^2 + bx + c$ إلى العوامل وكيفية تحديد إشارات العوامل c.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبار المعياري

50. أي المتباينات تظهر في التمثيل البياني أدناه؟



A $y \leq -\frac{3}{4}x + 3$

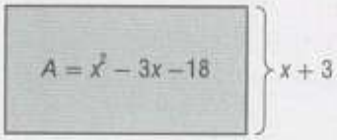
B $y < -\frac{3}{4}x + 3$

C $y > -\frac{3}{4}x + 3$

D $y \geq -\frac{3}{4}x + 3$

51. إجابة قصيرة يجب أن تجني أماني أكثر من AED 254 من بيع قطع الحلوى كي تتمكن من الذهاب في رحلة مع جمعية الحي. فإذا كانت قطعة الحلوى الواحدة تباع بمبلغ AED 1.25. فكم قطعة حلوى عليها أن تبيع على الأقل؟

52. الهندسة ما التعبير الذي يمثل طول المستطيل؟



F $x + 5$

G $x + 6$

H $x - 6$

J $x - 5$

53. الفرق بين العدد 21 وعددٍ آخر n يساوي العدد 6. ما المعادلة التي توضح هذه العلاقة؟

A $21 - n = 6$

B $21 + n = 6$

C $21n = 6$

D $6n = -21$

مراجعة شاملة

حلّل كثيرة الحدود في كل مما يلي إلى العوامل. (الدرس 5-7)

54. $10a^2 + 40a$

55. $11x + 44x^2y$

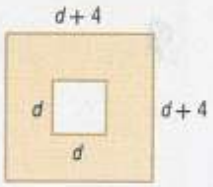
56. $2m^3p^2 - 16mp^2 + 8mp$

57. $2ax + 6xc + ba + 3bc$

58. $8ac - 2ad + 4bc - bd$

59. $x^2 - xy - xy + y^2$

60. اكتب كثيرة حدود تمثل مساحة المنطقة المظللة في الشكل الموجود على اليسار. (الدرس 4-7)



راجع مخططات التحويل على الوجه الداخلي لغلاف كتابك في نهايته.

61. الركض يشارك أحمد في سباقٍ خيري مسافته 5 km في عطلة نهاية الأسبوع المقبلة. فما مسافة السباق مقدرةً بالأميال تقريبًا؟

62. الطبيعة يزن فيل إفريقي 9 Ton. فكم كيلوجرامًا يساوي ذلك تقريبًا؟

63. الرياضة طول ملعب لكرة القدم يساوي 100 yd من إحدى نهايتيه إلى النهاية الأخرى. فكم قدمًا يساوي طول الملعب؟

مراجعة المهارات

حلّل كثيرة الحدود في كل مما يلي إلى العوامل.

64. $6mx - 4m + 3rx - 2r$

65. $3ax - 6bx + 8b - 4a$

66. $2d^2g + 2fg + 4d^2h + 4fh$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

7-7 حلّ $ax^2 + bx + c = 0$

السابق:
- حللت ثلاثيات الحدود ذات الصيغة $x^2 + bx + c$.

الحالي:
1 تحليل ثلاثيات حدود ذات الصيغة $ax^2 + bx + c$.

2 حل المعادلات ذات الصيغة $ax^2 + bx + c = 0$.

لماذا؟
- يمكن تمثيل مسار راكب على سفينة الملاهي الموضحة إلى الجهة اليمنى بالعلاقة $16t^2 - 5t + 120$.

يمكن أن يساعد تحليلُ هذا التعبير إلى العوامل مشغلي سفينة الملاهي على تحديد زمن الشوط الابتدائي لحركة الراكب.

المفردات الجديدة

كثيرة حدود أولية
prime polynomial

ممارسات في الرياضيات

استخدام نماذج الرياضيات.

1 تحليل $ax^2 + bx + c$ إلى العوامل

في الدرس الأخير، حللّت تعابير تربيعية من الصيغة $ax^2 + bx + c$، حيث $a = 1$. وفي هذا الدرس ستطبق طرق التحليل إلى العوامل على تعابير تربيعية فيها a لا يساوي 1.

بعدا المستطيل المشكل من القطع الجبرية يساوي عاملي $2x^2 + 5x + 3$. وعوامل $2x^2 + 5x + 3$ يساويان $x + 1$ و $2x + 3$.

يمكنك أيضًا استخدام طريقة التحليل إلى العوامل بالتجميع لحل هذا التعبير.

الخطوة 1 طبق النمط: $2x^2 + 5x + 3 = 2x^2 + mx + px + 3$.

الخطوة 2 نواتج ضربهما 2 • 3 أو 6 ومجموعهما 5.

عوامل العدد 6	مجموع العوامل
1, 6	7
2, 3	5

الخطوة 3 استخدم التجميع لإيجاد العوامل.

$2x^2 + 5x + 3 = 2x^2 + mx + px + 3$ — اكتب النمط.

$= 2x^2 + 2x + 3x + 3$ — $m = 2$ و $p = 3$

$= (2x^2 + 2x) + (3x + 3)$ — جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة.

$= 2x(x + 1) + 3(x + 1)$ — حلل بأخراج العامل المشترك الأكبر.

$= (2x + 3)(x + 1)$ — $x + 1$ هو العامل المشترك.

لذلك، $2x^2 + 5x + 3 = (2x + 3)(x + 1)$.

المفهوم الأساسي تحليل $ax^2 + bx + c$ إلى العوامل

الشرح

لتحليل ثلاثيات حدود لها الصيغة $ax^2 + bx + c$ إلى العوامل، جد عددين صحيحين m و p مجموعهما b ونواتج ضربهما ac. ثم اكتب $ax^2 + bx + c$ as $ax^2 + mx + px + c$، وحلل إلى العوامل بالتجميع.

مثال

$5x^2 - 13x + 6 = 5x^2 - 10x - 3x + 6$ — $m = -10$ و $p = -3$

$= 5x(x - 2) + (-3)(x - 2)$

$= (5x - 3)(x - 2)$

McGraw-Hill Education © محفوظ الطبع والتأليف لصالح مؤسسة

مثال 1 تحليل $ax^2 + bx + c$ إلى العوامل

حلّل ثلاثية الحدود في كل مما يلي إلى العوامل.

a. $7x^2 + 29x + 4$

في ثلاثية الحدود، $a = 7$ و $b = 29$ و $c = 4$. أنت بحاجة إلى إيجاد عددين مجموعهما 29 وناتج ضربهما $7 \cdot 4$ أو 28. أعدّ قائمة بعوامل العدد 28 وابحث عن العاملين اللذين لهما المجموع 29.

عوامل العدد 28	مجموع العوامل
1, 28	29

العاملان الصحيحان هما 1 و 28.

$7x^2 + 29x + 4 = 7x^2 + mx + px + 4$ — اكتب النمط.

$= 7x^2 + 1x + 28x + 4$ — $p = 28$ و $m = 1$

$= (7x^2 + 1x) + (28x + 4)$ — جمّع العوامل ذات الحدود المشتركة.

$= x(7x + 1) + 4(7x + 1)$ — حلل بإخراج العامل المشترك الأكبر.

$= (x + 4)(7x + 1)$ — $7x + 1$ هو العامل المشترك.

b. $3x^2 + 15x + 18$

العامل المشترك الأكبر للحدود $15x$ و $3x^2$ و 18 يساوي 3. حلّله إلى العوامل أولاً.

$3x^2 + 15x + 18 = 3(x^2 + 5x + 6)$ — خاصية التوزيع

$= 3(x + 3)(x + 2)$ — جِد عاملين للعدد 6 مجموعهما 5.

تمرين موجه

1A. $5x^2 + 13x + 6$ **1B.** $6x^2 + 22x - 8$

نصيحة دراسية

العامل المشترك الأكبر

ابحث دائمًا على عامل مشترك أكبر لكثيرة الحدود قبل التحليل إلى العوامل.

أحيانًا، يكون معامل الحدّ x سالبًا.

مثال 2 تحليل $ax^2 - bx + c$ إلى العوامل

حلّل $3x^2 - 17x + 20$ إلى العوامل.

في ثلاثية الحدود $a = 3$ و $b = -17$ و $c = 20$. وبما أن b سالب، إذًا m + p سيكون سالبًا. وبما أن c موجب، إذًا سيكون mp موجبًا.

لتحديد m و p، أدرج العوامل السالبة لـ ac أو 60. ينبغي أن مجموع m و p يساوي القيمة -17.

عوامل العدد 60	مجموع العوامل
$-2, -30$	-32
$-3, -20$	-23
$-4, -15$	-19
$-5, -12$	-17

العاملان الصحيحان هما -5 و -12.

$3x^2 - 17x + 20 = 3x^2 - 12x - 5x + 20$ — $p = -5$ و $m = -12$

$= (3x^2 - 12x) + (-5x + 20)$ — جمّع الحدود ذات العوامل المشتركة.

$= 3x(x - 4) + (-5)(x - 4)$ — حلل بإخراج العامل المشترك الأكبر.

$= (3x - 5)(x - 4)$ — خاصية التوزيع

تمرين موجه

2A. $2n^2 - n - 1$ **2B.** $10y^2 - 35y + 30$

مهنة من الحياة اليومية

مخطط المناطق الحضرية يصمم مخططو المناطق الحضرية مخططات المناطق. ويأخذون في الحسبان مساحة الأرض المتاحة فضلاً عن عوامل جغرافية وبيئية لتصميم منطقة تنفع المجتمع المحلي أكثر من غيره. يحمل مخططو المناطق الحضرية شهادة بكالوريوس في التخطيط ونصفهم تقريبًا يحمل درجة الماجستير.

حقوق الطبع والتأليف © تعود ملكيتها لشركة McGraw-Hill Education

تسمى كثيرة الحدود التي لا يمكن أن تُكتب بصيغة ناتج ضرب كثيرتي حدود اثنتين فيهما معاملات متكاملة بـ**كثيرة الحدود الأولية**.

مثال 3 تحديد إن كانت كثيرة الحدود أولية

حلّل $4x^2 - 3x + 5$ إلى العوامل إن أمكن. وإذا لم يكن ممكنًا تحليل كثيرة الحدود باستخدام أعداد صحيحة، فاكتب *أولية*.

في ثلاثية الحدود هذه، $a = 4$ و $b = -3$ و $c = 5$. وبما أن b سالب، فإن $m + p$ سالب. وبما أن c موجب، فإن mp موجب. إذًا m و p كلاهما سالبان. بعد ذلك، أدرج عوامل العدد 20. وابحث عن عددين مجموعهما -3.

عوامل العدد 20	مجموع العوامل
$-20, -1$	-21
$-4, -5$	-9
$-2, -10$	-12

ليس هناك عاملان مجموعهما -3. إذًا لا يمكن تحليل التعبير التربيعي باستخدام أعداد صحيحة. ولذلك فإن $4x^2 - 3x + 5$ أولية.

تمرين موجه

حلّل كل كثيرة حدود مما يلي إلى العوامل، إذا كان ممكنًا. فإذا كان من غير الممكن تحليل كثيرة الحدود إلى العوامل باستخدام الأعداد الصحيحة، فاكتب *أولية*.

3A. $4r^2 - r + 7$ **3B.** $2x^2 + 3x - 5$

2 حل معادلات باستخدام التحليل إلى العوامل

يمكننا إيجاد ارتفاع قذيفة بالعلاقة $h = -16t^2 + vt + h_0$. وفيها h الارتفاع بالقدم، و t الزمن بالثواني، و v السرعة المتجهة الابتدائية نحو الأعلى بالقدم في الثانية، و h_0 الارتفاع الابتدائي بالأقدام. يمكن حل المعادلات ذات الصيغة $ax^2 + bx + c = 0$ بالتحليل إلى العوامل وباستخدام خاصية ناتج الضرب في الصفر.

مثال 4 من الحياة اليومية حلّ المعادلات بالتحليل إلى العوامل

الحياة البرية افترض أن فهدًا يثب على ظبي بسرعة ابتدائية متجهة إلى الأعلى قيمتها 19 ft/sec. كم يبقى الفهد في الهواء إذا هبَط على الربع الخلفي من جسد الظبي على ارتفاع 3 ft عن الأرض؟

$h = -16t^2 + vt + h_0$	معادلة الارتفاع
$3 = -16t^2 + 19t + 0$	$h = 3$، $v = 19$، و $h_0 = 0$
$0 = -16t^2 + 19t - 3$	اطرح 3 من كل طرف.
$0 = 16t^2 - 19t + 3$	اضرب كل طرف بـ -1.
$0 = (16t - 3)(t - 1)$	حلل إلى العوامل $16t^2 - 19t + 3$
$16t - 3 = 0$ or $t - 1 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$16t = 3$ $\quad t = 1$	حُلّ كل معادلة.
$t = \frac{3}{16}$	

الحلان هما $\frac{3}{16}$ sec و 1 sec. يستغرق الفهد $\frac{3}{16}$ sec ليبلغ ارتفاع 3 ft في طريقه إلى الأعلى. ويستغرق ثانية واحدة للوصول إلى ارتفاع 3 ft في ريقه إلى الأسفل. إذًا يبقى الفهد لمدة ثانية واحدة قبل أن يمسك بالظبي.

تمرين موجه

4. **العلوم الفيزيائية** يرمي شخص كرة إلى الأعلى من بناء ارتفاعه 506 ft. ويعطى ارتفاع الكرة h ft بعد t ثانية بالمعادلة $h = -16t^2 + 48t + 506$. تحطّ الكرة على شرفة ارتفاعها 218 ft فوق سطح الأرض. فكم ثانية بقيت في الهواء؟

الربط بالحياة اليومية

الفهود أسرع الحيوانات البرية في العالم، وتصل إلى سرعات تصل إلى 70 mph. ويمكن أن تتسارع من 0 إلى 40 mph في 3 خطوات. ويستغرق الفهد ثواني فقط للوصول إلى سرعته الكاملة البالغة 70 mph.

المصدر: صندوق الحفاظ على الفهود

انتبه!

احتفظ بـ -1 ولا تنس حمل الـ -1 الذي حلّل إلى العوامل خلال باقي الخطوات أو اضرب كلا الطرفين بـ -1.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف ©

التحقق من فهمك

الأمثلة 1-3

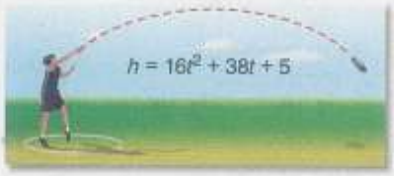
حلّل كل كثيرة حدود مما يلي إلى العوامل، إذا كان ممكنًا. فإذا كان من غير الممكن تحليل كثيرة الحدود إلى العوامل باستخدام الأعداد الصحيحة، فاكتب *أولية*.

1. $3x^2 + 17x + 10$
2. $2x^2 + 22x + 56$
3. $5x^2 - 3x + 4$
4. $3x^2 - 11x - 20$

مثال 4

حُـــلّ كل معادلة. تأكد من الحلول باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

5. $2x^2 + 9x + 9 = 0$
6. $3x^2 + 17x + 20 = 0$
7. $3x^2 - 10x + 8 = 0$
8. $2x^2 - 17x + 30 = 0$



9. **تمثيل النماذج** يرمي كنان قرصًا في لقاء مدرسي.
   a. ما الارتفاع الأولي للقرص؟
   b. بعد كم ثانية يصطدم القرص بالأرض؟

التمرين وحل المسائل

الأمثلة 1-3

حلّل كل كثيرة حدود مما يلي إلى العوامل، إذا كان ممكنًا. فإذا كان من غير الممكن تحليل كثيرة الحدود إلى العوامل باستخدام الأعداد الصحيحة، فاكتب *أولية*.

10. $5x^2 + 34x + 24$
11. $2x^2 + 19x + 24$
12. $4x^2 + 22x + 10$
13. $4x^2 + 38x + 70$
14. $2x^2 - 3x - 9$
15. $4x^2 - 13x + 10$
16. $2x^2 + 3x + 6$
17. $5x^2 + 3x + 4$
18. $12x^2 + 69x + 45$
19. $4x^2 - 5x + 7$
20. $5x^2 + 23x + 24$
21. $3x^2 - 8x + 15$

مثال 4

22. **رمي الكرة الحديدية** يرمي رياضي كرة حديدية بسرعة ابتدائية متجهة إلى الأعلى مقدارها 29 ft/sec ومن ارتفاع ابتدائي يساوي 6 ft.
   a. اكتب معادلة تمثل ارتفاع الكرة الحديدية بالأقدام بالنسبة للزمن بالثواني.
   b. بعد كم ثانية ستصطدم الكرة الحديدية بالأرض؟

حُـــلّ كل معادلة. تأكد من الحلول باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

23. $2x^2 + 9x - 18 = 0$
24. $4x^2 + 17x + 15 = 0$
25. $-3x^2 + 26x = 16$
26. $-2x^2 + 13x = 15$
27. $-3x^2 + 5x = -2$
28. $-4x^2 + 19x = -30$

29. **كرة السلة** عندما يرمي جابر رمية حرة، يكون ارتفاع الكرة 6 ft عن الأرض، وسرعتها الابتدائية إلى الأعلى تساوي 20 ft/sec. ترتفع السلة 10 ft عن الأرض.
   a. استخدم نموذج الحركة الرأسية لتوضيح معادلة تمثل رمية جابر الحرة.
   b. كم ثانية تستغرق كرة السلة قبل وصولها إلى السلة؟
   c. يرمي رائد رمية حرة من ارتفاع 5 ft و 9 in عن الأرض وبالسرعة المتجهة نفسها إلى الأعلى. هل ستبقى الكرة في الهواء لمدة أطول أم أقصر؟ اشرح.

30. **الغطس** يغطس بلال من منصة ارتفاعها 36 ft. تمثل المعادلة $h = -16t^2 + 14t + 36$ الغطسة. فكم سيستغرق بلال وقتًا ليصل إلى الماء؟

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © محفوظة الطبع والتأليف

31) **نظرية الأعداد** ستة أمثال مربع عدد x زائد 11 مثلاً من العدد تعطي 2. فما القيم المحتملة لـ x؟

حلّل كثيرة الحدود في كل مما يلي إلى العوامل، إذا كان ممكنًا. فإذا كان من غير الممكن تحليل كثير الحدود إلى العوامل باستخدام الأعداد الصحيحة، فاكتب *أولية*.

32. $-6x^2 - 23x - 20$

33. $-4x^2 - 15x - 14$

34. $-5x^2 + 18x + 8$

35. $-6x^2 + 31x - 35$

36. $-4x^2 + 5x - 12$

37. $-12x^2 + x + 20$

38. **تخطيط المناطق الحضرية** كلفت المدينةُ ببناء منتزهٍ مستطيل. يمكن التعبير عن مساحة المنتزه بالعلاقة $660x^2 + 524x + 85$. حلل هذا التعبير إلى العوامل من خلال معاملات صحيحة تمثل الأبعاد الممكنة للمنتزه. فإذا كان $x = 8$. فما المحيط المحتمل للمنتزه؟

39. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف تحليل نوع خاص من كثيرات الحدود إلى العوامل.

a. **هندسيًا** ارسم مربعًا وسمّ أضلاعه a. داخل هذا المربع، ارسم مربعًا أصغر يشترك معه برأس واحد. وسمّ أضلاعه b. ما مساحتا المربعين؟

b. **هندسيًا** قُصّ المربع الصغير واحذفه. ما مساحة المنطقة المتبقية؟

c. **تحليليًا** ارسم مستقيمًا قطريًا بين الزاوية الداخلية والزاوية الخارجية للشكل. وقُصّ على طول هذا الخط لتشكّل قطعتين متطابقتين. ثم أعد ترتيب القطعتين لتشكل مستطيلاً. ما أبعاد المستطيل؟

d. **تحليليًا** اكتب مساحة المستطيل في صورة ناتج ضربٍ لثنائيتي حدود.

e. **لفظيًا** أكمل العبارة: ... = $a^2 - b^2$ ما سبب صحة هذه العبارة؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

40. **النقد** يحلّ زكريا و سامي المعادلة $6x^2 - x = 12$. هل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

زكريا

$6x^2 - x = 12$

$x(6x - 1) = 12$

$x = 12$ or $6x - 1 = 12$

$6x = 13$

$x = \frac{13}{6}$

سامي

$6x^2 - x = 12$

$6x^2 - x - 12 = 0$

$(2x - 3)(3x + 4) = 0$

$2x - 3 = 0$ or $3x + 4 = 0$

$x = \frac{3}{2}$ $x = -\frac{4}{3}$

41. **الاستنتاج** لديك مربع مساحته $9x^2 + 30xy + 25y^2$ بوصة مربعة. وبعداه ثنائيتا حدود من عوامل صحيحة موجبة. فما محيط المربع؟ اشرح.

42. **تحدٍّ** جد كل قيم k التي تنتج تحليل $2x^2 + kx + 12$ إلى العوامل في صيغة ثنائيتي حدود باستخدام أعداد صحيحة.

43. **الكتابة في الرياضيات** ما الذي عليك التفكير به عند حل معادلة تربيعية تمثل حالةً من الحياة اليومية؟

44. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيفية تحديد القيم التي ينبغي اختيارها لـ m و p عند تحليل كثيرة حدود من الصيغة $ax^2 + bx + c$ إلى العوامل.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

تدريب على الاختبار المعياري

45. **إجابة شبكية** لساميا أختان. إحداهما أكبر منها بـ 8 سنوات والأخرى أصغر منها بسنتين. ناتج ضرب عمري أختي ساميا يساوي 56. فكم عمر ساميا؟

46. ما ناتج ضرب $\frac{2}{3}a^3b^5$ و $\frac{3}{5}a^5b^2$ ؟

A $\frac{2}{5}a^8b^7$

B $\frac{2}{5}a^2b^3$

C $\frac{2}{5}a^8b^3$

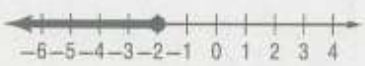
D $\frac{2}{5}a^2b^7$

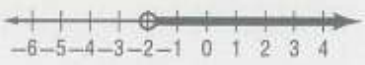
47. ما مجموعة حلول $x^2 + 2x - 24 = 0$؟

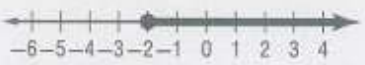
F $\{-4, 6\}$ H $\{-3, 8\}$

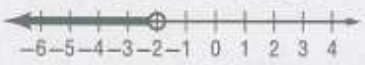
G $\{3, -8\}$ J $\{4, -6\}$

48. ما مجموعة حلول $x \geq -2$؟

A 

B 

C 

D 

مراجعة شاملة

حلّل كل كثيرة حدود إلى العوامل. (الدرس 6-7)

49. $x^2 - 9x + 14$

50. $n^2 - 8n + 15$

51. $x^2 - 5x - 24$

52. $z^2 + 15z + 36$

53. $r^2 + 3r - 40$

54. $v^2 + 16v + 63$

حُـــلّ كلّ معادلة مما يلي، ثم تحقق من صحة الحل. (الدرس 5-7)

55. $a(a - 9) = 0$

56. $(2y + 6)(y - 1) = 0$

57. $10x^2 - 20x = 0$

58. $8b^2 - 12b = 0$

59. $15a^2 = 60a$

60. $33x^2 = -22x$

سمّ طريقة ملائمة لحل كل نظام من أنظمة المعادلات. ثم جـد حل النظام.

61. $-5x + 2y = 13$
$2x + 3y = -9$

62. $y = -5x + 7$
$y = 3x - 17$

63. $x - 8y = 16$
$7x - 4y = -18$

أكمل كل جملة.

64. 54 in. = ___?___ ft

65. 275 mm = ___?___ m

66. 7 gal ___?___ pt

67. **عربات النقل** حد التحميل الأقصى لسقف سيارة رياضية 75 lb.
تريد وضع حاملٍ للبضائع و 4 قطع من الأمتعة فوق السقف. اكتب متباينةً وحلّها لإيجاد الوزن المتوسط المسموح به لكل قطعةٍ من الأمتعة.

مراجعة المهارات

جـد الجذر التربيعي الرئيسي لكل عدد.

68. 16

69. 36

70. 64

71. 81

72. 121

73. 100

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

7-8 الفرق بين مربعين

السابق
- حللت ثلاثيات حدود إلى ثنائيتي حدود.

الحالي
1. تحليل ثنائيات الحدود التي تمثل فرق مربعي حدين.
2. استخدام فرق مربعي حدين لحل المسائل.

لماذا؟
- يستخدم مصممو الرسومات الحاسوبية مزيجًا من المهارات الفنية والرياضية لتصميم صور ومقاطع فيديو. وهم يستخدمون معادلاتٍ لصياغة أشكال ومستقيماتٍ على الحاسوب. ويمكن أن يساعد التحليل إلى العوامل على تحديد أبعاد الأشكال وهيئاتها.

المفردات الجديدة
الفرق بين مربعين (difference of two squares)

ممارسات في الرياضيات
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها.

1 تحليل الفرق بين مربعين إلى العوامل

لقد تعلمت سابقًا عن ناتج ضرب مجموع كميتين بفرقهما. ويُطلق على ناتج الضرب هذا **الفرق بين مربعين**. إذًا، تدعى الصيغة المحللة إلى العوامل للفرق بين مربعين بناتج ضرب مجموع كميتين بفرقهما.

المفهوم الأساسي الفرق بين مربعين

الرموز: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ أو $(a - b)(a + b)$

الأمثلة:
$x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$ أو $(x - 5)(x + 5)$
$t^2 - 64 = (t + 8)(t - 8)$ أو $(t - 8)(t + 8)$

مثال 1 تحليل فرق مربعي حدين إلى العوامل

حلّل كثيرة الحدود في كل مما يلي إلى العوامل.

a. $16h^2 - 9a^2$

$16h^2 - 9a^2 = (4h)^2 - (3a)^2$ اكتب بالصيغة $a^2 - b^2$.
$= (4h + 3a)(4h - 3a)$ حلل الفرق بين مربعين.

b. $121 - 4b^2$

$121 - 4b^2 = (11)^2 - (2b)^2$ اكتب بالصيغة $a^2 - b^2$.
$= (11 - 2b)(11 + 2b)$ حلل الفرق بين مربعين.

c. $27g^3 - 3g$

نظرًا إلى أن للحدود عاملاً مشتركًا، حلل بإخراج العامل المشترك الأكبر أولاً. ثم تابع من خلال التقنيات الأخرى للتحليل إلى العوامل.

$27g^3 - 3g = 3g(9g^2 - 1)$ إخراج العامل المشترك الأكبر $3g$.
$= 3g[(3g)^2 - (1)^2]$ اكتب بالصيغة $a^2 - b^2$.
$= 3g(3g - 1)(3g + 1)$ حلل الفرق بين مربعين.

تمرين موجّه

1A. $81 - c^2$
1B. $64g^2 - h^2$
1C. $9x^3 - 4x$
1D. $-4y^3 + 9y$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

لتحليل كثيرة حدود إلى عواملها بالكامل، قد يحتاج الأمر إلى تطبيق تقنية أكثر من مرة واحدة. وينطبق ذلك أيضًا على نمط فرق مربعين.

مثال 2 تطبيق تقنية أكثر من مرة

حلّل كثيرة الحدود في كل مما يلي إلى العوامل.

a. $b^4 - 16$

$b^4 - 16 = (b^2)^2 - (4)^2$ اكتب $b^4 - 16$ بالصيغة $a^2 - b^2$.

$= (b^2 + 4)(b^2 - 4)$ حلل الفرق بين مربعين.

$= (b^2 + 4)(b^2 - 2^2)$ $b^2 - 4$ أيضًا فرق مربعين.

$= (b^2 + 4)(b + 2)(b - 2)$ حلل الفرق بين مربعين.

b. $625 - x^4$

$625 - x^4 = (25)^2 - (x^2)^2$ اكتب $625 - x^4$ بالصيغة $a^2 - b^2$.

$= (25 + x^2)(25 - x^2)$ حلل الفرق بين مربعين.

$= (25 + x^2)(5^2 - x^2)$ اكتب $25 - x^2$ بالصيغة $a^2 - b^2$.

$= (25 + x^2)(5 - x)(5 + x)$ حلل الفرق بين مربعين.

تمرين موجّه

2A. $y^4 - 1$

2B. $4a^4 - b^4$

2C. $81 - x^4$

2D. $16y^4 - 1$

انتبه!

مجموع مربعين لا يُحلل مجموع المربعين $a^2 + b^2$ إلى $(a + b)(a + b)$. بل إن مجموع مربعين هو كثيرة حدود أولية، ولا يمكن تحليلها إلى العوامل.

وفي بعض الأحيان، يتطلب الأمر تطبيق أكثر من تقنية تحليل واحدة إلى العوامل لضمان التحليل الكامل لكثيرة الحدود.

مثال 3 تطبيق تقنيات مختلفة

حلّل كثيرة الحدود في كل مما يلي إلى العوامل.

$5x^5 - 45x = 5x(x^4 - 9)$ إخراج العامل المشترك الأكبر.

$= 5x[(x^2)^2 - (3)^2]$ اكتب $x^4 - 9$ بالصيغة $a^2 - b^2$.

$= 5x(x^2 - 3)(x^2 + 3)$ حلل الفرق بين مربعين.

$x^2 - 3$ ليس فرقًا بين مربعي حدين لأن العدد 3 ليس مربعًا كاملاً.

b. $7x^3 + 21x^2 - 7x - 21$

$7x^3 + 21x^2 - 7x - 21$ التعبير الأصلي.

$= 7(x^3 + 3x^2 - x - 3)$ حلل بإخراج العامل المشترك.

$= 7[(x^3 + 3x^2) - (x + 3)]$ جمع الحدود ذات العوامل المشتركة.

$= 7[x^2(x + 3) - 1(x + 3)]$ حلل كل مجموعة إلى العوامل.

$= 7(x + 3)(x^2 - 1)$ $x + 3$ هو العامل المشترك.

$= 7(x + 3)(x + 1)(x - 1)$ حلل الفرق بين مربعين.

تمرين موجّه

3A. $2y^4 - 50$

3B. $6x^4 - 96$

3C. $2m^3 + m^2 - 50m - 25$

3D. $r^3 + 6r^2 + 11r + 66$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 حلّ المعادلات بالتحليل إلى العوامل

بعد التحليل إلى العوامل، يمكنك تطبيق خاصية ناتج الضرب في صفر على المعادلات المكتوبة بصيغة ناتج ضرب عوامل يساوي ناتجها 0.

مثال 4 من الحياة اليومية حل معادلة بالتحليل إلى العوامل

في المعادلة $y = x^2 - \frac{9}{16}$، أي مما يلي قيمة لـ x عندما $y = 0$؟

A $-\frac{9}{4}$ B 0 C $\frac{3}{4}$ D $\frac{9}{4}$

قراءة فقرة الاختبار

عوّض عن y بـ 0 ثم حُـــلّ.

حَل فقرة الاختبار

$y = x^2 - \frac{9}{16}$ المعادلة الأصلية

$0 = x^2 - \frac{9}{16}$ عوّض عن y بـ 0

$0 = x^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$ اكتب بالصيغة $a^2 - b^2$

$0 = \left(x + \frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right)$ حلل الفرق بين مربعين

$0 = x + \frac{3}{4}$ أو $0 = x - \frac{3}{4}$ خاصية ناتج الضرب الصفري

$x = -\frac{3}{4}$ $x = \frac{3}{4}$ الإجابة الصحيحة هي C.

نصيحة عند حل الاختبار

الاستنتاج المنطقي من الطرق الأخرى التي يمكن استخدامها لحل هذه المعادلة تعويض كل خيار محتمل للحل في المعادلة.

تمرين موجّه

4. ما حلول $18x^3 = 50x$؟

F $0, \frac{5}{3}$ G $-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}$ H $-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 0$ J $-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 1$

التحقق من فهمك

الأمثلة 3-1

حلّل كل تعبير كثير الحدود إلى العوامل.

1. $x^2 - 9$
2. $4a^2 - 25$
3. $9m^2 - 144$
4. $2p^3 - 162p$
5. $u^4 - 81$
6. $2d^4 - 32f^4$
7. $20r^4 - 45n^4$
8. $256n^4 - c^4$
9. $2c^3 + 3c^2 - 2c - 3$
10. $f^3 - 4f^2 - 9f + 36$
11. $3t^3 + 2t^2 - 48t - 32$
12. $w^3 - 3w^2 - 9w + 27$

مثال 4

إجابة موسعة يمكن أن تنتج علامات الانزلاق أثناء الحوادث المرورية عن الضغط المفاجئ على المكابح. تقدّر الصيغة $d = \frac{1}{24}s^2$ سرعة المركبة s بالميل في الساعة إذا أعطينا طول علامات الانزلاق d بالأقدام على الإسمنت الجاف.

13. إذا كان طول علامات الانزلاق على الإسمنت الجاف 54 ft، فما السرعة التي كانت تسير بها السيارة عند الضغط على المكابح؟

14. إذا كان طول علامات الانزلاق على الإسمنت الجاف 150 ft، فما السرعة التي كانت تسير بها السيارة عند الضغط على المكابح

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

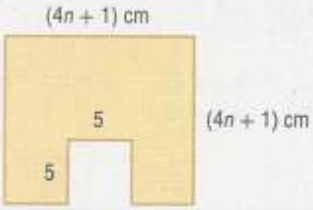
التمرين وحل المسائل

الأمثلة 1-3 حلّل كل تعبير كثير الحدود إلى العوامل.

15. $q^2 - 121$
16. $r^4 - k^4$
17. $6n^4 - 6$
18. $w^4 - 625$
19. $r^2 - 9t^2$
20. $2c^2 - 32d^2$
21. $h^3 - 100h$
22. $h^4 - 256$
23. $2x^3 - x^2 - 162x + 81$
24. $x^2 - 4y^2$
25. $7h^4 - 7p^4$
26. $3c^3 + 2c^2 - 147c - 98$
27. $6k^2h^4 - 54k^4$
28. $5a^3 - 20a$
29. $f^3 + 2f^2 - 64f - 128$
30. $3r^3 - 192r$
31. $10q^3 - 1210q$
32. $3xn^4 - 27x^3$
33. $p^3r^5 - p^3r$
34. $8c^3 - 8c$
35. $r^3 - 5r^2 - 100r + 500$
36. $3t^3 - 7t^2 - 3t + 7$
37. $a^2 - 49$
38. $4m^3 + 9m^2 - 36m - 81$
39. $3m^4 + 243$
40. $3x^3 + x^2 - 75x - 25$
41. $12a^3 + 2a^2 - 192a - 32$
42. $x^4 + 6x^3 - 36x^2 - 216x$
43. $15m^3 + 12m^2 - 375m - 300$

مثال 4

44. **الهندسة** الرسم المبين في الجهة اليمنى مربع قد قُصّ منه مربع.



a. اكتب تعبيرًا يمثل مساحة المنطقة المظللة.

b. جـد بعدي مستطيلٍ له مساحة المنطقة المظللة نفسها في الرسم. وافترض أن بعدي المستطيل يجب أن يمثلا بثنائيتي حدود ذواتي معاملات متكاملة.

45. **الديكورات** استخدم قوسٌ عليه بالونات لتزيين النادي الرياضي استعدادًا لحفل الربيع الراقص. يمكن تمثيل شكل القوس بالمعادلة $y = -0.5x^2 + 4.5x$. حيث x و y يقاسان بالأقدام ويمثل المحور الأفقي x الأرضية.

a. اكتب التعبير الذي يمثل ارتفاع القوس بصيغة محللة إلى العوامل.

b. ما المسافة الفاصلة بين نقطتي تلامس القوس مع الأرض؟

c. مثل هذه المعادلة على حاسبتك. ما ارتفاع النقطة العليا في القوس؟

46. **الاستنتاج المنطقي** تنشئ زينة شرفة في الفناء الخلفي. وتوضح المخططات الخاصة بالشرفة أن بعديه هما 24 في 24 ft. تودّ زينة تقليل بعدٍ واحدٍ بمقدار عدد الأقدام وزيادة البعد الآخر بالمقدار نفسه. فإذا كانت مساحة الشرفة الصغرى 512 ft^2. فما بعدا الشرفة؟

47. **المبيعات** يمكن تمثيل مبيعات قرص موسيقي بالمعادلة $S = -25m^2 + 125m$. حيث S عددُ الأقراص المبيعة بالآلاف. و m عدد الأشهر منذ طرحها في السوق.

a. في أي شهرٍ على متجر التسجيلات الموسيقية أن يتوقع توقف بيع الأقراص؟

b. في أي شهرٍ ستبلغ مبيعات الأقراص ذروتها؟

c. كم نسخةً ستباع من القرص في ذروة المبيعات؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

حُـــلّ كل معادلة بالتحليل إلى العوامل. تحقق من الحلول باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

48. $36w^2 = 121$

49. $100 = 25x^2$

50. $64x^2 - 1 = 0$

51. $4y^2 - \frac{9}{16} = 0$

52. $\frac{1}{4}b^2 = 16$

53. $81 - \frac{1}{25}x^2 = 0$

54. $9d^2 - 81 = 0$

55. $4a^2 = \frac{9}{64}$

56. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف ثلاثيات حدود المربعات الكاملة.

a. **جدولي** انسخ الجدول أدناه وأكمله بتحليل كل كثيرة حدود إلى العوامل.ثم اكتب الحدين الأول والأخير لكثيرات الحدود المعطاة في صورة مربعات كاملة.

b. **تحليليًا** اكتب الحد المتوسط لكل كثيرة حدود باستخدام الجذرين التربيعيين للمربعين الكاملين للحدين الأول والأخير.

كثيرة حدود	كثيرة حدود محللة إلى العوامل	الحد الأول	الحد الأخير	الحد الأوسط
$4x^2 + 12x + 9$	$(2x + 3)(2x + 3)$	$4x^2 = (2x)^2$	$3^2 = 9$	
$9x^2 - 24x + 16$				
$4x^2 - 20x + 25$				
$16x^2 + 24x + 9$				
$25x^2 + 20x + 4$				

c. **جبريًا** اكتب نمط ثلاثية حدود مربع كامل.

d. **لفظيًا** ما الشروط التي يجب أن تتحقق لتُصنّف ثلاثية حدود على أنها ثلاثية حدود مربع كامل؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

57. **تحليل الخطأ** تحللّ سارة و خلود تعبيرًا إلى عوامله. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

سارة

$16x^4 - 25y^2 =$
$(4x^2 - 5y)(4x^2 + 5y)$

خلود

$16x^4 - 25y^2 =$
$(4x - 5y)(4x + 5y)$

58. **تحدٍّ** حلّل وبسّط $(k + 3)^2 - 9$ التي تمثل فرق مربعي حدّين.

59. **المثابرة** حلّل $x^{16} - 81$ إلى العوامل.

60. **الاستنتاج** اكتب ثنائية حدودٍ تمثل فرق مربعي حدين كاملين عاملهما المشترك الأكبر يساوي $5mk$ إلى عواملها.

61. **التبرير** حدّد إذا كانت العبارة التالية صحيحة أو خاطئة. وأعط مثالاً أو مثالاً مضادًا لتبرير إجابتك.
كل ثنائيات الحدود التي بعدّ كلّ من حدّيها مربعًا كاملاً قابلةٌ للتحليل إلى العوامل.

62. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب ثنائية حدودٍ يتعين تكرار نمط الفرق بين مربعين فيها لتحليلها بالكامل إلى العوامل. ثم حللها إلى عواملها.

63. **الكتابة في الرياضيات** صِف السبب في عدم احتواء نمط الفرق بين مربعين على حدٍ أوسط ذي متغير.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

64. أحد جذري $2x^2 + 13x = 24$ يساوي -8. فما الجذر الآخر؟

A $-\frac{3}{2}$ C $\frac{2}{3}$

B $-\frac{2}{3}$ D $\frac{3}{2}$

65. أيّ مما يلي هو مجموع حلّي المعادلة $x^2 + 3x = 54$؟

F -21 H 3

G -3 J 21

66. ما نقاط التقاطع مع المحور الأفقي x للتمثيل البياني الخاص بـ $y = -3x^2 + 7x + 20$؟

A $\frac{5}{3}, -4$ C $-\frac{5}{3}, 4$

B $-\frac{5}{3}, -4$ D $\frac{5}{3}, 4$

67. إجابة موسعة تغادر سيارتان المدينة A في الوقت نفسه من متطقتين مختلفتين من المدينة وتتجهان إلى المدينة B. يمكن تمثيل بعد السيارتين بالأميال عن مركز المدينة A بالمعادلتين الموضحتين أدناه. حيث يمثل t الزمن بالساعات.

السيارة الأولى: $65t + 15$ السيارة الثانية: $60t + 25$

a. أيهما أسرع؟ اشرح.

b. جـد تعبيرا يمثل المسافة بين السيارتين.

c. كم ستكون المسافة بين السيارتين بعد ساعتين ونصف ساعة؟

مراجعة شاملة

حلل ثلاثية الحدود في كل مما يلي إلى العوامل إذا كان ممكنا. فإذا كان من غير الممكن تحليل ثلاثية الحدود إلى العوامل باستخدام الأعداد الصحيحة، فاكتب ***أولية***. (الدرس 7-7)

68. $5x^2 - 17x + 14$

69. $5a^2 - 3a + 15$

70. $10x^2 - 20xy + 10y^2$

حـــلّ كلّ معادلة مما يلي، ثم تحقق من صحة الحل. (الدرس 7-6)

71. $n^2 - 9n = -18$

72. $10 + a^2 = -7a$

73. $22x - x^2 = 96$

حـــلّ كلّ معادلة مما يلي، وتحقق من الحلول. (الدرس 7-4)

74. $2x^2 = 32$

75. $(x - 4)^2 = 25$

76. $4x^2 - 4x + 1 = 16$

77. $2x^2 + 16x = -32$

78. $(x + 3)^2 = 5$

79. $4x^2 - 12x = -9$

جـد ناتج المجموع أو الفرق في كل مما يلي. (الدرس 7-1)

80. $(3n^2 - 3) + (4 + 4n^2)$

81. $(2d^2 - 7d - 3) - (4d^2 + 7)$

82. $(2b^3 - 4b^2 + 4) - (3b^4 + 5b^2 - 9)$

83. $(8 - 4h^2 + 6h^4) + (5h^2 - 3 + 2h^3)$

مراجعة المهارات

جـد ناتج الضرب في كل مما يلي.

84. $(x - 6)^2$

85. $(x - 2)(x - 2)$

86. $(x + 3)(x + 3)$

87. $(2x - 5)^2$

88. $(6x - 1)^2$

89. $(4x + 5)(4x + 5)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

7-9 المربعات الكاملة

السابق
- جـدت ناتج ضرب المجموع والفرق.

الحالي
1. تحليل ثلاثيات الحدود المربعة الكاملة إلى العوامل.
2. حل معادلات تتضمن مربعات كاملة.

لماذا؟
- في الفراغ، سوف تسقط الريشة والبيانو بنفس السرعة أو السرعة المتجهة. ولإيجاد الزمن الذي يستغرقه جسم للاصطدام بالأرض إذا سقط من ارتفاع ابتدائي h_0 بالقدم فوق سطح الأرض، فيجب عليك حل المعادلة $-16t^2 + h_0 = 0$. حيث t هو الزمن بالثواني بعد سقوط الجسم.

المفردات الجديدة
تحليل ثلاثية حدود مربع كامل إلى العوامل (perfect square trinomial)

ممارسات في الرياضيات
مراعاة الدقة.

1 تحليل ثلاثيات حدود مربع كامل إلى العوامل

لقد تعلمت أنماط نواتج ضرب ذات الحدين $(a + b)^2$ و $(a - b)^2$. تذكر أن نواتج الضرب هذه خاصة وتتبع أنماطًا محددة.

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) \qquad (a - b)^2 = (a - b)(a - b)$$
$$= a^2 + ab + ab + b^2 \qquad = a^2 - ab - ab + b^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 \qquad = a^2 - 2ab + b^2$$

يُطلق على نواتج الضرب هذه **ثلاثيات حدود مربع كامل**. لأنها مربعات ثلاثيات الحدود. وتساعدك الأنماط السابقة في تحليل ثلاثيات حدود المربعة الكاملة إلى العوامل.

حتى تصبح ثلاثية الحدود قابلة للتحليل في صورة مربع كامل، يجب أن يكون الحدان الأول والأخير عبارة عن مربعات كاملة وأن يكون الحد الأوسط عبارة عن مثلي الجذرين التربيعيين للحدين الأول والأخير.

ثلاثية الحدود $16x^2 + 24x + 9$ هي ثلاثية حدود مربع كامل، كما هو موضح أدناه.

$16x^2 + 24x + 9$

- هل الحد الأول مربع كامل؟ نعم، لأن $16x^2 = (4x)^2$.
- هل الحد الأوسط يساوي مثلي ناتج ضرب الجذرين التربيعيين للحدين الأول والأخير؟ نعم، لأن $24x = 2(4x)(3)$.
- هل الحد الأخير مربع كامل؟ نعم، لأن $9 = 3^2$.

المفهوم الأساسي تحليل ثلاثيات الحدود مربع كامل إلى العوامل

الرموز
$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b) = (a + b)^2$
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)(a - b) = (a - b)^2$

الأمثلة
$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)(x + 4) = (x + 4)^2$
$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)(x - 3) = (x - 3)^2$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

مثال 1 التعرف على ثلاثيات حدود مربع كامل وتحليلها إلى العوامل

حدد ما إذا كانت كل ثلاثية حدود هي ثلاثية حدود مربع كامل أم لا. اكتب نعم أو لا. وإن كانت كذلك، فحلّلها إلى عواملها.

a. $4y^2 + 12y + 9$

1. هل الحد الأول مربع كامل؟ نعم. لأن $4y^2 = (2y)^2$
2. هل الحد الأول مربع كامل؟ نعم. لأن $9 = 3^2$
3. هل الحد الأوسط يساوي $2(2y)(3)$؟ نعم. لأن $12y = 2(2y)(3)$

بما أن الشروط الثلاثة مستوفاة. إذًا $4y^2 + 12y + 9$ هي ثلاثية حدود مربع كامل.

اكتب في صورة $a^2 + 2ab + b^2$. $4y^2 + 12y + 9 = (2y)^2 + 2(2y)(3) + 3^2$

حلل إلى العوامل باستخدام النمط. $= (2y + 3)^2$

b. $9x^2 - 6x + 4$

1. هل الحد الأول مربع كامل؟ نعم. لأن $9x^2 = (3x)^2$
2. هل الحد الأول مربع كامل؟ نعم. لأن $4 = 2^2$
3. هل الحد الأوسط يساوي $-2(3x)(2)$؟ لا. لأن $-6x \neq -2(3x)(2)$

بما أن الحد الأوسط لا يستوفي الشروط. إذًا $9x^2 - 6x + 4$ ليست ثلاثية حدود مربع كامل.

تمرين موجّه

1A. $9y^2 + 24y + 16$

1B. $2a^2 + 10a + 25$

نصيحة دراسية

التعرّف على ثلاثيات الحدود مربع كامل إذا كان الحد الثابت في ثلاثية الحدود سالبًا، فإن ثلاثية الحدود ليست ثلاثية حدود مربع كامل؛ ولذلك لا يجب عليك التحقق من الشروط الأخرى.

تكون كثيرة الحدود قد تم تحليلها بالكامل إلى العوامل عندما تُكتب في صورة عملية ضرب ثلاثيات الحدود. وقد تحتاج إلى أكثر من طريقة لتحليل كثيرة الحدود بالكامل إلى العوامل. عندما تقوم بتحليل كثيرة حدود إلى العوامل بالكامل. قد يساعدك ملخص المفهوم في تحديد المكان الذي ينبغي البدء منه. تذكر، إذا لم تتوافق كثيرة الحدود مع أي نمط أو لم تستطع تحليلها إلى العوامل، فإن كثيرة الحدود أولية.

ملخص المفهوم طرق التحليل إلى العوامل

الخطوات	عدد الحدود	الأمثلة
الخطوة 1 تحليل العامل المشترك الأكبر.	أي عدد	$4x^3 + 2x^2 - 6x = 2x(2x^2 + x - 3)$
الخطوة 2 التحقق من وجود اختلاف بين المربعات أو ثلاثية الحدود مربع كامل.	2 أو 3	$9x^2 - 16 = (3x + 4)(3x - 4)$ $16x^2 + 24x + 9 = (4x + 3)^2$
الخطوة 3 تطبيق أنماط التحليل إلى العوامل لـ $x^2 + bx + c$ أو $ax^2 + bx + c$ (ثلاثية حدود عامة)، أو التحليل إلى العوامل من خلال التجميع.	3 أو 4	$x^2 - 8x + 12 = (x - 2)(x - 6)$ $2x^2 + 13x + 6 = (2x + 1)(x + 6)$ $12y^2 + 9y + 8y + 6$ $= (12y^2 + 9y) + (8y + 6)$ $= 3y(4y + 3) + 2(4y + 3)$ $= (4y + 3)(3y + 2)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 2 التحليل إلى العوامل بالكامل

حلّل كل كثيرة حدود مما يلي إلى العوامل، إذا كان ممكنًا. فإذا كان من غير الممكن تحليل كثيرة الحدود إلى العوامل، فاكتب *أولية*.

a. $5x^2 - 80$

الخطوة 1 العامل المشترك الأكبر في $5x^2$ و -80 هو 5. إذا يُمكنك تحليلها إلى العوامل.

الخطوة 2 نظرًا لأن هناك حدان، تحقق من وجود أختلاف في المربعات.

$5x^2 - 80 = 5(x^2 - 16)$ — 5 هو العامل المشترك الأكبر للحدين.

$= 5(x^2 - 4^2)$ — $16 = 4 \times 4$ و $x^2 = x \times x$

$= 5(x - 4)(x + 4)$ — حلل الفرق بين مربعين.

b. $9x^2 - 6x - 35$

الخطوة 1 العامل المشترك الأكبر لـ $9x^2$، و $-6x$، و -35 هو 1.

الخطوة 2 نظرًا لأن 35 ليس مربعًا كاملاً، فإنه ليس ثلاثية حدود مربع كامل.

الخطوة 3 حلل إلى العوامل باستخدام النمط $ax^2 + bx + c$. هل هناك عددان لهما ناتج الضرب $9(-35)$ أو -315 ومجموعهما هو -6؟ نعم. ناتج ضرب 15 و -21 هو -315، ومجموعهما هو -6.

$9x^2 - 6x - 35 = 9x^2 + mx + px - 35$ — اكتب النمط.

$= 9x^2 + 15x - 21x - 35$ — $m = 15$ و $n = -21$

$= (9x^2 + 15x) + (-21x - 35)$ — ضع الحدود التي لها نفس العوامل في مجموعة واحدة.

$= 3x(3x + 5) - 7(3x + 5)$ — اخرج العامل المشترك الأكبر لكل مجموعة.

$= (3x + 5)(3x - 7)$ — $3x + 5$ هو العامل المشترك.

تمرين موجّه

2A. $2x^2 - 32$

2B. $12x^2 + 5x - 25$

نصيحة دراسية

تحقق من إجابتك يُمكنك التحقق من إجابتك من خلال:

- استخدام طريقة فويل.
- استخدم خاصية التوزيع.
- تمثيل التعبير الأصلي والتعبير المحلل إلى العوامل بيانيًا، ومقارنة التمثيلين البيانيين.

إذا كان ناتج ضرب العوامل لا يساوي التعبير الأصلي بالضبط، فإن الإجابة تكون غير صحيحة.

2 حل المعادلات التي تتضمن مربعات كاملة

عند حل معادلات تتضمن عوامل متكررة، يجب عليك فقط أن تجعل أحد العوامل المتكررة يساوي صفرًا.

مثال 3 حل المعادلات باستخدام العوامل المتكررة

حُـــلّ المعادلة $9x^2 - 48x = -64$.

$9x^2 - 48x = -64$ — المعادلة الأصلية

$9x^2 - 48x + 64 = 0$ — أضف 64 إلى الطرفين.

$(3x)^2 - 2(3x)(8) + (8)^2 = 0$ — انظر إلى $9x^2 - 48x + 64$ على أنها ثلاثية حدود مربع كامل.

$(3x - 8)^2 = 0$ — حلل ثلاثية الحدود مربع كامل إلى العوامل.

$(3x - 8)(3x - 8) = 0$ — اكتب $(3x - 8)^2$ في صورة عاملين.

$3x - 8 = 0$ — اجعل العامل المكرر يساوي صفرًا.

$3x = 8$ — أضف 8 إلى الطرفين.

$x = \frac{8}{3}$ — اقسم الطرفين على 3.

تمرين موجّه

حُـــلّ المعادلة في كل مما يلي. ثم تحقق من صحة الحل.

3A. $a^2 + 12a + 36 = 0$

3B. $y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9} = 0$

McGraw-Hill Education مؤسسة محفوظة لصالح © حقوق الطبع والتأليف

لقد حللت معادلات مثل $x^2 - 16 = 0$ من خلال التحليل إلى العوامل. ويُمكنك أيضًا استخدام تعريف الجذر التربيعي لحل المعادلة.

$x^2 - 16 = 0$	المعادلة الأصلية
$x^2 = 16$	أضف 61 إلى الطرفين.
$x = \pm\sqrt{16}$	احسب الجذر التربيعي للطرفين.

قراءة في الرياضيات
حلول الجذر التربيعي
$\pm\sqrt{16}$ يُقرأ موجب أو سالب الجذر التربيعي للعدد 16.

تذكر أن هناك جذرين تربيعيين للعدد 16. وهما 4 و 4−. إذًا مجموعة الحل هي {4, 4−}. ويُمكنك التعبير عن هذا بهذه المجموعة {±4}.

المفهوم الأساسي خاصية الجذر التربيعي

الشرح لحل معادلة تربيعية في صيغة $x^2 = n$، احسب الجذر التربيعي للطرفين.

الرموز لأي عدد $n \geq 0$، إذا كان $x^2 = n$، فإن $x = \pm\sqrt{n}$.

مثال
$x^2 = 25$
$x = \pm\sqrt{25}$ أو ± 5

في المعادلة $x^2 = n$، إذا كان n ليس مربعًا كاملاً، فإنك تحتاج إلى تقريب الجذر التربيعي. استخدم آلة حاسبة لإيجاد التقريب. إذا كان n مربعًا كاملاً، فسوف تحصل على حل دقيق.

مثال 4 استخدم خاصية الجذر التربيعي

حُـــلّ المعادلة في كل مما يلي. ثم تحقق من صحة الحل.

a. $(y - 6)^2 = 81$

$(y - 6)^2 = 81$	المعادلة الأصلية
$y - 6 = \pm\sqrt{81}$	خاصية الجذر التربيعي
$y - 6 = \pm 9$	$81 = 9 \times 9$
$y = 6 \pm 9$	أضف 6 إلى الطرفين.
$y = 6 + 9$ أو $y = 6 - 9$	افصل إلى معادلتين.
$= 15$ $= -3$	بسّط.

تحقق من الحل في المعادلة الأصلية.

الجذران هما 15 و 3−.

b. $(x + 6)^2 = 12$

$(x + 6)^2 = 12$	المعادلة الأصلية
$x + 6 = \pm\sqrt{12}$	خاصية الجذر التربيعي
$x = -6 \pm \sqrt{12}$	اطرح 6 من الطرفين.

الجذران هما $-6 \pm \sqrt{12}$ أو $-6 + \sqrt{12}$ و $-6 - \sqrt{12}$.

باستخدام آلة حاسبة، $-6 + \sqrt{12} \approx -2.54$ و $-6 - \sqrt{12} \approx -9.46$.

نصيحة دراسية
الحل بالفحص
يُمكن عادة حل المعادلات التي تتضمن جذورًا تربيعية ذهنيًا. لحل $x^2 = n$، فكّر كما يلي: *ما العدد الذي مربعه هو* n؟ عندما يكون n مربعًا كاملاً، فإن x يكون عددًا نسبيًا. وإذا كان الأمر غير ذلك، فإن x يكون عددًا غير نسبي.

تمرين موجّه

4A. $(a - 10)^2 = 121$

4B. $(z + 3)^2 = 26$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 5 من الحياة اليومية حل المعادلة

العلوم الفيزيائية سقطت كرة من ارتفاع **205 ft**. يمكن استخدام الصيغة $h = -16t^2 + h_0$ لتقريب عدد الثواني التي يستغرقها t حتى تصل الكرة إلى الارتفاع h من الارتفاع الابتدائي h_0 بالقدم. جد **الزمن** الذي تستغرقه الكرة للوصول إلى الأرض.

في مستوى الأرض، $h = 0$ والارتفاع الابتدائي هو 205، إذًا $h_0 = 205$.

$h = -16t^2 + h_0$	الصيغة الأصلية
$0 = -16t^2 + 205$	عوّض عن h بـ 0 وعن h_0 بـ 205.
$-205 = -16t^2$	اطرح 205 من الطرفين.
$12.8125 = t^2$	اقسم الطرفين على -16.
$\pm 3.6 \approx t$	استخدم خاصية الجذر التربيعي.

بما أن العدد السالب ليس له معنى في هذه الحالة، فإن الحل هو 3.6. تستغرق الكرة حوالي 3.6 ثانية للوصول إلى الأرض.

تمرين موجّه

5. جد الزمن الذي تستغرقه الكرة للوصول إلى الأرض إذا سقطت من نقطة يبلغ ارتفاعاه نصف الارتفاع السابق.

الربط بتاريخ الرياضيات

جاليليو جاليلي (1564–1642)
كان جاليليو هو أول من أثبت أن الأجسام التي لها أوزان مختلفة تسقط بنفس السرعة المتجهة، وذلك من خلال إسقاط جسمين لهما وزنين مختلفين من قمة برج بيزا المائل عام 1589.

التحقق من فهمك

مثال 1 **حدد ما إذا كانت كل ثلاثية حدود هي ثلاثية حدود مربع كامل أم لا. اكتب نعم أو لا. وإن كانت كذلك، فحلّلها إلى عواملها.**

1. $25x^2 + 60x + 36$
2. $6x^2 + 30x + 36$

مثال 2 **حلّل كثيرة الحدود في كل مما يلي إلى العوامل، إذا كان ممكنًا. فإذا كان من غير الممكن تحليل كثيرة الحدود إلى العوامل، فاكتب *أولية*.**

3. $2x^2 - x - 28$
4. $6x^2 - 34x + 48$
5. $4x^2 + 64$
6. $4x^2 + 9x - 16$

المثالان 3 و 4 **حُلّ كل معادلة. تأكد من الحلول باستخدام حاسبة التمثيل البياني.**

7. $4x^2 = 36$
8. $25a^2 - 40a = -16$
9. $64y^2 - 48y + 18 = 9$
10. $(z + 5)^2 = 47$

مثال 5

11. **الاستنتاج** بينما كان حسن يطلي غرفته، سقطت فرشاة الطلاء من فوق السلم من ارتفاع 6 ft. استخدم الصيغة $h = -16t^2 + h_0$ لتقريب عدد الثواني التي تستغرقها فرشاة الطلاء للاصطدام بالأرض.

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **حدد ما إذا كانت كل ثلاثية حدود هي ثلاثية حدود مربع كامل أم لا. اكتب نعم أو لا. وإن كانت كذلك، فحلّلها إلى عواملها.**

12. $4x^2 - 42x + 110$
13. $16x^2 - 56x + 49$
14. $81x^2 - 90x + 25$
15. $x^2 + 26x + 168$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 2 **حلّل كثيرة الحدود في كل مما يلي إلى العوامل، إذا كان ممكنًا. فإذا كان من غير الممكن تحليل كثيرة الحدود إلى العوامل، فاكتب *أولية*.**

16. $24d^2 + 39d - 18$
17. $8x^2 + 10x - 21$
18. $2b^2 + 12b - 24$
19. $8y^2 - 200z^2$
20. $16a^2 - 121b^2$
21. $12m^3 - 22m^2 - 70m$
22. $8c^2 - 88c + 242$
23. $12x^2 - 84x + 147$
24. $w^4 - w^2$
25. $12p^3 - 3p$
26. $16q^3 - 48q^2 + 36q$
27. $4t^3 + 10t^2 - 84t$
28. $x^3 + 2x^2y - 4x - 8y$
29. $2a^2b^2 - 2b^2 - 2ab^3 + 2ab$
30. $2r^3 - r^2 - 72r + 36$
31. $3k^3 - 24k^2 + 48k$
32. $4c^4d - 10c^3d + 4c^2d^3 - 10cd^3$
33. $g^2 + 2g - 3h^2 + 4h$

المثالان 3 و 4 **حُـــلّ كل معادلة. تأكد من الحلول باستخدام حاسبة التمثيل البياني.**

34. $4m^2 - 24m + 36 = 0$
35. $(y - 4)^2 = 7$
36. $a^2 + \frac{10}{7}a + \frac{25}{49} = 0$
37. $x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} = 0$
38. $x^2 + 8x + 16 = 25$
39. $5x^2 - 60x = -180$
40. $4x^2 = 80x - 400$
41. $9 - 54x = -81x^2$
42. $4c^2 + 4c + 1 = 15$
43. $x^2 - 16x + 64 = 6$

44. **العلوم الفيزيائية** هناك مثال من درس الفيزياء وهو سقط بالون ماء من نافذة المدرسة، ويصل ارتفاع النافذة إلى 40 ft. فما المدة التي يستغرقها البالون حتى يصطدم بالأرض؟ قرّب الحل لأقرب جزء من مئة.

45. **الشاشات** يُمكن تمثيل المساحة A بالقدم المربع للصورة المعروضة لشاشة السينما من خلال المعادلة $A = 0.25d^2$، حيث d تمثل المسافة من المسلاط إلى شاشة السينما. ما المسافة التي عندها ستكون مساحة الصورة المعروضة هي $100\ ft^2$؟

مثال 5 46. **الهندسة** يتم تمثيل مساحة المربع من خلال $9x^2 - 42x + 49$. جـد طول كل ضلع.

47. **الهندسة** يتم تمثيل مساحة المربع من خلال $16x^2 + 40x + 25$. جـد طول كل ضلع.

48. **الهندسة** يتم تمثيل حجم المنشور المستطيل من خلال التعبير $8y^3 + 40y^2 + 50y$. جـد الأبعاد الممكنة للمنشور إذا كانت الأبعاد يتم تمثيلها باستخدام ثلاثيات حدود بمعاملات صحيحة.

49. **حمامات السباحة** يريد عمر أن يشتري حمام سباحة مرتفعًا عن سطح الأرض ليضعه داخل حديقة منزله. يبلغ عمق النموذج A 42 in ويتسع $1750\ ft^3$. ويزيد طول حمام السباحة المستطيل عن عرضه بمقدار 5 ft.

a. ما مساحة سطح الماء؟

b. ما أبعاد حمام السباحة؟

c. يتسع النموذج B لمثلي كمية الماء التي يتسع لها النموذج A. ما بعض الأبعاد الممكنة لحمام السباحة؟

d. يزيد طول النموذج C وعرضه بمقدار المثلين عن النموذج A. لكن النموذجان لهما نفس الارتفاع. ما نسبة حجم النموذج A إلى النموذج C؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

50. **الهندسة** استخدم المنشور المستطيل الموجود على اليسار.

a. اكتب تعبيرًا لارتفاع المنشور بدلالة الطول ℓ.

b. اكتب ثلاثية حدود لحجم المنشور بدلالة طوله ℓ

51. **الدقة** لدى حديقة حيوان حوض سمك يأخذ شكل منشور مستطيل. ويبلغ حجمه $180\ ft^3$. ويزيد ارتفاع حوض السمك عن عرضه بمقدار $9\ ft$. وينقص الطول عن العرض بمقدار $4\ ft$. ما أبعاد حوض السمك؟

52. **الانتخابات** يقوم خالد من أجل انتخابات مجلس الطلاب بصنع صندوق للاقتراع يبلغ حجمه $96\ in^3$. ما أبعاد صندوق الاقتراع؟

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

53. **تحليل الخطأ** يقوم سعيد و رامي بتحليل التعبير $x^8 - x^4$ إلى العوامل بالكامل. هل إحداهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

سعيد
$x^8 - x^4 = x^4(x^2 + 1)(x^2 - 1)$

رامي
$x^8 - x^4 = x^4(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$

54. **تحدٍ** حلل $x^{n+6} + x^{n+2} + x^n$ إلى العوامل بالكامل.

55. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب معادلة لثلاثية حدود مربع كامل واجعل معامل الحد الأوسط سالبًا والحد الأخير عبارة عن كسر. حل المعادلة.

56. **الاستنتاج** المثال المضاد هو عبارة عن حالة محددة تكون فيه جملة خطأ. جد مثالاً مضادًا للجملة التالية.

المعادلة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة دائمًا لديها ثلاثة حلول.

57. **التوافق** اشرح كيف تقوم بتحليل كثيرة الحدود إلى العوامل بالكامل.

58. **أيّ مما يلي لا ينتمي إلى المجموعة؟** حدد ثلاثية الحدود التي لا تنتمي إلى المجموعة. مع الشرح.

$4x^2 - 36x + 81$ | $25x^2 + 10x + 1$ | $4x^2 + 10x + 4$ | $9x^2 - 24x + 16$

59. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب ثنائية حدود يُمكن تحليلها إلى العوامل باستخدام الفرق بين مربعين مرتين. اجعل ثنائية الحدود تساوي صفرًا وحل المعادلة.

60. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيفية تحديد ما إذا كانت ثلاثية الحدود هي ثلاثية حدود مربع كامل أم لا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

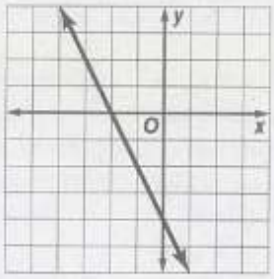
تدريب على الاختبار المعياري

61. ما مجموعة حل المعادلة $(x - 3)^2 = 25$؟

A $\{-8, 2\}$ C $\{4, 14\}$

B $\{-2, 8\}$ D $\{-4, 14\}$

62. إجابة قصيرة اكتب معادلة في صيغة الميل والمقطع للتمثيل البياني الموضح أدناه.



63. في مدرج، بلغت قيمة مقعدين على العشب ومقعدين في الجناح AED 120. وبلغت قيمة 3 مقاعد على العشب و 4 مقاعد في الجناح AED 225. كم تبلغ تكلفة المقعد على العشب والمقعد في الجناح؟

F AED 20 و AED 41.25

G AED 10 و AED 50

H AED 15 و AED 45

J AED 30 و AED 30

64. الهندسة محيط دائرة يساوي $\frac{6\pi}{5}$ وحدة. ما مساحة هذه الدائرة؟

A $\frac{9\pi}{25}$ وحدة^2 C $\frac{6\pi}{5}$ وحدة^2

B $\frac{3\pi}{5}$ وحدة^2 D $\frac{12\pi}{5}$ وحدة^2

مراجعة شاملة

حلّل كثيرة الحدود في كل مما يلي إلى العوامل(إن أمكن). فإن لم يكن من الممكن تحليل كثيرة الحدود، فاكتب ***أولية***. (الدرس 8-7)

65. $x^2 - 16$ **66.** $4x^2 - 81y^2$ **67.** $1 - 100p^2$

68. $3a^2 - 20$ **69.** $25n^2 - 1$ **70.** $36 - 9c^2$

حـــلّ كل معادلة. تأكد من الحلول باستخدام حاسبة التمثيل البياني. (الدرس 7-7)

71. $4x^2 - 8x - 32 = 0$ **72.** $6x^2 - 48x + 90 = 0$ **73.** $14x^2 + 14x = 28$

74. $2x^2 - 10x = 48$ **75.** $5x^2 - 25x = -30$ **76.** $8x^2 - 16x = 192$

77. لعبة الملاهي يبلغ ارتفاع سيارة موجودة على منحدر الخروج لجولة سقوط حر h بالقدم. ويُمكن تمثيلها من خلال $h(t) = -16t^2 + s$. حيث t هو الزمن بالثواني بعد سقوط السيارة، و s هو الارتفاع الابتدائي للسيارة بالقدم. إذا كان المصمم يريد للعبة أن تستمر لمدة 3 ثوانٍ. ما الارتفاع الابتدائي بالقدم الذي ينبغي تصميمه. (الدرس 9-7)

حلّل كثيرة الحدود في كل مما يلي إلى العوامل. فإن لم يكن من الممكن تحليل كثيرة الحدود، فاكتب *أولية*. (الدرس 8-7)

78. $x^2 - 81$ **79.** $a^2 - 121$ **80.** $n^2 + 100$

81. $-25 + 4y^2$ **82.** $p^4 - 16$ **83.** $4t^4 - 4$

مراجعة المهارات

جـــد ميل المستقيم المار بكل زوج من النقاط.

84. (5, 7), (−2, −3) **85.** (2, −1), (5, −3) **86.** (−4, −1), (−3, −3)

87. (−3, −4), (5, −1) **88.** (−2, 3), (8, 3) **89.** (−5, 4), (−5, −1)

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

7 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

العمليات على كثيرات الحدود (الدروس من 7-1 إلى 7-4)

- جمع كثيرات الحدود أو طرحها. وجمع الحدود المتشابهة وطرحها.
- لضرب كثيرات الحدود، استخدم خاصية التوزيع.
- نواتج الضرب الخاصة:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

التحليل إلى العوامل باستخدام خاصية التوزيع (الدرس 7-5)

- يُطلق على استخدام خاصية التوزيع لتحليل كثيرات الحدود إلى العوامل بأربعة حدود أو أكثر اسم التحليل إلى العوامل من خلال التجميع.

$$ax + bx + ay + by = x(a+b) + y(a+b)$$
$$= (a+b)(x+y)$$

حل المعادلات التربيعية بالتحليل إلى العوامل (الدروس من 7-6 إلى 7-8)

- لتحليل $x^2 + bx + c$ إلى العوامل، جد m وp بمجموع b ونواتج ضرب c. ثم اكتب $x^2 + bx + c$ في صورة $(x+m)(x+p)$.
- لتحليل $ax^2 + bx + c$ إلى العوامل، جد m وp بمجموع b ونواتج ضرب ac. ثم اكتب ذلك في صورة $ax^2 + mx + px + c$ وحلل إلى العوامل من خلال التجميع.

حل المربعات الكاملة والتحليل إلى العوامل (الدرس 7-9)

- حتى تصبح ثلاثية الحدود مربعة كاملة، يجب أن يكون الحدان الأول والأخير عبارة عن مربعات كاملة وأن يكون الحد الأوسط عبارة عن مثلي ناتج ضرب الجذرين التربيعيين للحدين الأول والأخير.
- لأي عدد $n \geq 0$، إذا كان $x^2 = n$، فإن $x = \pm\sqrt{n}$.

المطويات منظّم الدراسة

تأكد من تدوين المفاهيم الأساسية في المطوية.

المفردات الأساسية

ثنائية الحدود (binomial)
درجة أحادية الحد (degree of a monomial)
درجة كثيرة الحدود (degree of a polynomial)
الفرق بين مربعين (difference of two squares)
التحليل إلى العوامل (factoring)
التحليل إلى العوامل بالتجميع (factoring by grouping)
طريقة فويل (FOIL method)
المعامل الرئيس (leading coefficient)
ثنائية حدود مربعة كاملة (perfect square trinomial)
كثيرة الحدود (polynomial)
كثيرة حدود أولية (prime polynomial)
معادلة تربيعية (quadratic equation)
تعبير تربيعي (quadratic expression)
خاصيّة الجذر التربيعي (Square Root Property)
الصيغة القياسية لكثيرة الحدود (standard form of a polynomial)
ثلاثية الحدود (trinomial)
خاصية ناتج الضرب في الصفر (Zero Product Property)

مراجعة المفردات

اكتب ما إذا كانت كل عبارة صحيحة أم *خاطئة*. إن كانت *خاطئة*، فاستبدل الكلمة أو الكلمات التي تحتها خط لجعل الجملة صحيحة.

1. $x^2 + 5x + 6$ هو مثال لكثيرة حدود أولية.
2. $(x+5)(x-5)$ هو عبارة عن تحليل الفرق بين المربعات إلى العوامل.
3. $4x^2 - 2x + 7$ هي كثيرة حدود من الدرجة 2.
4. $(x+5)(x-2)$ هي الصيغة المحللة إلى العوامل من $x^2 - 3x - 10$.
5. يُمكن في بعض الأحيان للتعبيرات التي تضم أربعة حدود أو حدودًا غير متشابهة أن يتم تحليلها إلى العوامل من خلال التجميع.
6. تنص خاصية ناتج الضرب الصفري على أنه إذا كان $ab = 1$، فإن a أو b يساوي 1.
7. $x^2 - 12x + 36$ هو مثال على ثلاثية حدود مربع كامل.
8. المعامل الرئيسي لـ $1 + 6a + 9a^2$ هو 1.
9. $x^2 - 16$ هو مثال لثلاثية حدود مربع كامل.
10. تُستخدم طريقة فويل في ضرب اثنين من ثلاثيات الحدود.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

7-1 جمع كثيرات الحدود وطرحها

مثال 1

اكتب $x^2 + 4x - 3$ بالصيغة القياسية.

الخطوة 1 جـد درجة كل حد.

-3، الدرجة 0

$-x^2$، الدرجة 2

$4x$، الدرجة 1

الخطوة 2 اكتب الحدود بترتيب تنازلي حسب الدرجة.

$3 - x^2 + 4x = -x^2 + 4x + 3$

مثال 2

جـد $(8r^2 + 3r) - (10r^2 - 5)$.

$(8r^2 + 3r) - (10r^2 - 5)$

$= (8r^2 + 3r) + (-10r^2 + 5)$ استخدم المعاكس الجمعي.

$= (8r^2 - 10r^2) + 3r + 5$ ضع الحدود المتشابهة في مجموعة واحدة.

$= -2r^2 + 3r + 5$ أضف الحدود المتشابهة.

اكتب كثيرة الحدود بالصيغة القياسية في كل مما يلي.

11. $x + 2 + 3x^2$
12. $1 - x^4$
13. $2 + 3x + x^2$
14. $3x^5 - 2 + 6x - 2x^2 + x^3$

جـد المجموع أو الفرق لكل مما يلي.

15. $(x^3 + 2) + (-3x^3 - 5)$
16. $a^2 + 5a - 3 - (2a^2 - 4a + 3)$
17. $(4x - 3x^2 + 5) + (2x^2 - 5x + 1)$

18. **إطارات الصور** تقوم عائشة بصنع إطار للوحة مستطيلة الشكل. ما محيط الإطار؟

7-2 ضرب كثيرة الحدود في أحادية حد

مثال 3

حُـلّ المعادلة $m(2m - 5) + m = 2m(m - 6) + 16$.

$m(2m - 5) + m = 2m(m - 6) + 16$

$2m^2 - 5m + m = 2m^2 - 12m + 16$

$2m^2 - 4m = 2m^2 - 12m + 16$

$-4m = -12m + 16$

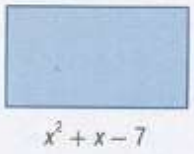
$8m = 16$

$m = 2$

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

19. $x^2(x + 2) = x(x^2 + 2x + 1)$
20. $2x(x + 3) = 2(x^2 + 3)$
21. $2(4w + w^2) - 6 = 2w(w - 4) + 10$

22. **الهندسة** جـد مساحة المستطيل.



7-3 ضرب كثيرات الحدود

مثال 4

جـد $(6x - 5)(x + 4)$.

$(6x - 5)(x + 4)$

F O I L

$= (6x)(x) + (6x)(4) + (-5)(x) + (-5)(4)$

$= 6x^2 + 24x - 5x - 20$ اضرب.

$= 6x^2 + 19x - 20$ اجمع الحدود المتشابهة.

جـد ناتج الضرب في كل مما يلي.

23. $(x - 3)(x + 7)$
24. $(3a - 2)(6a + 5)$
25. $(3r - 7t)(2r + 5t)$
26. $(2x + 5)(5x + 2)$

27. **ساحة انتظار السيارات** سيتم رصف ساحة انتظار السيارات. ما مساحة المنطقة التي سيتم رصفها؟

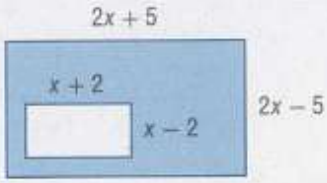
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

7-4 نواتج الضرب الخاصة

جـد ناتج الضرب في كل مما يلي.

28. $(x + 5)(x - 5)$
29. $(3x - 2)^2$
30. $(5x + 4)^2$
31. $(2x - 3)(2x + 3)$
32. $(2r + 5t)^2$
33. $(3m - 2)(3m + 2)$

34. **الهندسة** اكتب تعبيرًا لتمثيل مساحة المنطقة المظللة.



مثال 5

جـد $(x - 7)^2$.

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ مربع الفرق

$(x - 7)^2 = x^2 - 2(x)(7) + (-7)^2$ $b = 7$ و $a = x$

$= x^2 - 14x + 49$ بسّط.

مثال 6

جـد $(5a + 4)(5a - 4)$.

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ ناتج ضرب المجموع والفرق $b = 4$ و $a = 5a$

$(5a - 4)(5a + 4) = (5a)^2 - (4)^2$ بسّط.

$= 25a^2 - 16$

7-5 استخدام خاصية التوزيع

استخدِم خاصية التوزيع لتحليل كل كثيرة حدود إلى العوامل.

35. $12x + 24y$
36. $14x^2y - 21xy + 35xy^2$
37. $8xy - 16x^3y + 10y$
38. $a^2 - 4ac + ab - 4bc$
39. $2x^2 - 3xz - 2xy + 3yz$
40. $24am - 9an + 40bm - 15bn$

حُـلّ المعادلة في كل مما يلي. وتحقق من حلولك.

41. $x(3x - 6) = 0$
42. $6x^2 = 12x$
43. $x^2 = 3x$
44. $3x^2 = 5x$

45. **الهندسة** مساحة المستطيل الموضحة هي $x^3 - 2x^2 + 5x$ وحدة مربعة. كم يبلغ الطول؟

مثال 7

حلّل $12y^2 + 9y + 8y + 6$ إلى العوامل.

$12y^2 + 9y + 8y + 6$

ضع الحدود التي لها نفس العوامل في مجموعة واحدة.

$= (12y^2 + 9y) + (8y + 6)$

اخرج العامل المشترك الأكبر لكل مجموعة.

$= 3y(4y + 3) + 2(4y + 3)$

خاصية التوزيع

$= (4y + 3)(3y + 2)$

مثال 8

حُـلّ $x^2 - 6x = 0$. وتحقق من حلولك.

اكتب المعادلة بحيث تكون على شكل $ab = 0$.

$x^2 - 6x = 0$ المعادلة الأصلية

$x(x - 6) = 0$ اخرج باستخدام العامل المشترك الأكبر.

$x = 0$ or $x - 6 = 0$ خاصية ناتج الضرب الصفري

$x = 6$ حل.

الجذران هما 0 و6. تحقق من خلال التعويض بالعددين 0 و6 عن x في المعادلة الأصلية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

7-6 حل $x^2 + bx + c = 0$

حلل ثلاثية الحدود إلى العوامل. تأكد من الحلول باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

46. $x^2 - 8x + 15$

47. $x^2 + 9x + 20$

48. $x^2 - 5x - 6$

49. $x^2 + 3x - 18$

حُـــلّ المعادلة في كل مما يلي. ثم تحقق من صحة الحل.

50. $x^2 + 5x - 50 = 0$

51. $x^2 - 6x + 8 = 0$

52. $x^2 + 12x + 32 = 0$

53. $x^2 - 2x - 48 = 0$

54. $x^2 + 11x + 10 = 0$

55. الفن يعمل فنان على رسم لوحة يزيد طولها 3in عن عرضها. وتبلغ مساحة اللوحة 154in. ما طول اللوحة؟

مثال 9

حلّ $x^2 + 10x + 21$ إلى العوامل

بما أن $b = 10$ و $c = 21$. إذا $m + p$ موجب و mp موجب. إذًا، m و p يجب أن يكونا موجبين. اكتب عوامل 21 الموجبة. وابحث عن أزواج العوامل التي مجموعها يساوي 10.

عوامل العدد 21	مجموع 10
1, 21	22
3, 7	10

العاملان الصحيحان هما 3 و 7.

$x^2 + 10x + 21 = (x + m)(x + p)$ اكتب النمط.

$= (x + 3)(x + 7)$ $p = 7, m = 3$

7-7 حلّ $ax^2 + bx + c = 0$

حلّل ثلاثية الحدود في كل مما يلي إلى العوامل، إذا كان ممكنًا. فإذا كان من غير الممكن تحليل ثلاثية الحدود إلى العوامل، فاكتب *أولية*.

56. $12x^2 + 22x - 14$

57. $2y^2 - 9y + 3$

58. $3x^2 - 6x - 45$

59. $2a^2 + 13a - 24$

حُـــلّ المعادلة في كل مما يلي. تأكد من الحلول باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

60. $40x^2 + 2x = 24$

61. $2x^2 - 3x - 20 = 0$

62. $-16t^2 + 36t - 8 = 0$

63. $6x^2 - 7x - 5 = 0$

64. الهندسة مساحة المستطيل الموضح أدناه تساوي $6x^2 + 11x - 7$ وحدات مربعة. ما عرض المستطيل؟

$2x - 1$

مثال 10

حلّ $12a^2 + 17a + 6$ إلى العوامل

$a = 12$، و $b = 17$، و $c = 6$. بما أن b is موجب، فإن $m + p$ موجب. وبما أن c موجب، فإن mp موجب. إذًا m موجب و p موجب كذلك. اكتب عوامل 12(6) أو 72 إذا كان العاملان موجبين.

عوامل العدد 72	مجموع 17
1, 72	73
2, 36	38
3, 24	27
4, 18	22
6, 12	18
8, 9	17

العاملان الصحيحان هما 8 و 9.

$12a^2 + 17a + 6 = 12a^2 + ma + pa + 6$

$= 12a^2 + 8a + 9a + 6$

$= (12a^2 + 8a) + (9a + 6)$

$= 4a(3a + 2) + 3(3a + 2)$

$= (3a + 2)(4a + 3)$

إذًا، $12a^2 + 17a + 6 = (3a + 2)(4a + 3)$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

7-8 الفرق بين مربعين

حلّل كثيرة الحدود في كل مما يلي إلى العوامل.

65. $y^2 - 81$

66. $64 - 25x^2$

67. $16a^2 - 21b^2$

68. $3x^2 - 3$

حُـــلّ المعادلةفي كل مما يلي بالتحليل إلى العوامل. تحقق من الحلول باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

69. $a^2 - 25 = 0$ **70.** $9x^2 - 25 = 0$

71. $81 - y^2 = 0$ **72.** $x^2 - 5 = 20$

73. التعرية تسقط صخرة كبيرة من جبل إلى الماء بعمق 64 قدمًا. ويمكن حساب المسافة d التي قطعتها الصخرة خلال t ثانية بالمعادلة $d = 16t^2$. ما الوقت الذي تستغرقه الصخرة للاصطدام بالماء؟

مثال 11

حُـــلّ المعادلة $x^2 - 4 = 12$ من خلال التحليل إلى العوامل.

$x^2 - 4 = 12$	المعادلة الأصلية
$x^2 - 16 = 0$	اطرح 12 من الطرفين.
$x^2 - (4)^2 = 0$	$16 = 4^2$
$(x + 4)(x - 4) = 0$	حلل فرق بين مربعين إلى العوامل.
$x + 4 = 0$ or $x - 4 = 0$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$x = -4$ $x = 4$	جـد حل كل معادلة.

الحلّان هما -4 و 4.

7-9 المربعات الكاملة

حلّل كثيرة الحدودفي كل مما يلي إلى العوامل، إذا كان ممكنًا. فإذا كان من غير الممكن تحليل كثيرة الحدود إلى العوامل، فاكتب *أولية*.

74. $x^2 + 12x + 36$

75. $x^2 + 5x + 25$

76. $9y^2 - 12y + 4$

77. $4 - 28a + 49a^2$

78. $x^4 - 1$

79. $x^4 - 16x^2$

حُـــلّ كل معادلة. تأكد من الحلول باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

80. $(x - 5)^2 = 121$ **81.** $4c^2 + 4c + 1 = 9$

82. $4y^2 = 64$ **83.** $16d^2 + 40d + 25 = 9$

84. تنسيق الحدائق يتم بناء رصيف مشاة له عرض متساوٍ حول حديقة مربعة. ما عرض الرصيف؟

مثال 12

حُـــلّ المعادلة $(x - 9)^2 = 144$.

$(x - 9)^2 = 144$	المعادلة الأصلية
$x - 9 = \pm\sqrt{144}$	خاصية الجذر التربيعي
$x - 9 = \pm 12$	$12 \cdot 12 = 144$
$x = 9 \pm 12$	اجمع 9 إلى الطرفين.
$x = 9 + 12$ or $x = 9 - 12$	خاصية ناتج الضرب الصفري
$x = 21$ $x = -3$	جـد الحل.

تحقق

$(x - 9)^2 = 144$	$(x - 9)^2 = 144$
$(21 - 9)^2 \stackrel{?}{=} 144$	$(-3 - 9)^2 \stackrel{?}{=} 144$
$(12)^2 \stackrel{?}{=} 144$	$(-12)^2 \stackrel{?}{=} 144$
$144 = 144$ ✓	$144 = 144$ ✓

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

7 تدريب على الاختبار

جـد المجموع أو الفرق لكل مما يلي.

1. $(x + 5) + (x^2 - 3x + 7)$
2. $(7m - 8n^2 + 3n) - (-2n^2 + 4m - 3n)$
3. **الاختيار من متعدد** تغطي خديجة غرفتين في منزلها بالسجاد. والأبعاد موضحة أدناه. ما التعبير الذي يمثل المساحة الكلية المطلوب تغطيتها بالسجاد؟

A $x^2 + 3x$
B $2x^2 + 6x - 10$
C $x^2 + 3x - 5$
D $8x + 12$

جـد ناتج الضرب في كل مما يلي.

4. $a(a^2 + 2a - 10)$
5. $(2a - 5)(3a + 5)$
6. $(x - 3)(x^2 + 5x - 6)$
7. $(x + 3)^2$
8. $(2b - 5)(2b + 5)$
9. **المعرفة المالية** افترض أنك تستثمر AED 4000 في شهادة إيداع لعامين.

a. إذا كانت نسبة مرابحة الشهادة هي 5% في العام، فيمكن حل التعبير $4000(1 + 0.05)^2$ لإيجاد إجمالي قيمة المال بعد عامين. اشرح الأعداد الواردة في هذا التعبير.

b. جـد القيمة بعد نهاية العامين.

c. افترض أنك استثمرت AED 10,000 في شهادة إيداع لأربعة أعوام بنسبة مرابحة سنوية 6.25%. ما إجمالي المال الذي ستحصل عليه بعد مرور 4 أعوام؟

10. **الاختيار من متعدد** مساحة المستطيل الموضح أدناه تساوي $2x^2 - x - 15$ وحدة مربعة. ما عرض هذا المستطيل؟

F $x - 5$
G $x + 3$
H $x - 3$
J $2x - 3$

حُـلّ كلًا من المعادلات الآتية.

11. $5(t^2 - 3t + 2) = t(5t - 2)$
12. $3x(x + 2) = 3(x^2 - 2)$

حلّل كثيرة الحدود في كل مما يلي إلى العوامل.

13. $5xy - 10x$
14. $7ab + 14ab^2 + 21a^2b$
15. $4x^2 + 8x + x + 2$
16. $10a^2 - 50a - a + 5$

حُـلّ كلًا من المعادلات الآتية. تأكد من الحلول باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

17. $y(y - 14) = 0$
18. $3x(x + 6) = 0$
19. $a^2 = 12a$
20. **الاختيار من متعدد** تغطي عائشة غرفة بالسجاد تبلغ مساحتها $x^2 - 100$ قدم مربع. إذا كان عرض الغرفة يساوي $x - 10$ قدم، ما طول الغرفة؟

A $x - 10$ ft
B $x + 10$ ft
C $x - 100$ ft
D 10 ft

حلّل ثلاثية الحدود في كل مما يلي إلى العوامل.

21. $x^2 + 7x + 6$
22. $x^2 - 3x - 28$
23. $10x^2 - x - 3$
24. $15x^2 + 7x - 2$
25. $x^2 - 25$
26. $4x^2 - 81$
27. $9x^2 - 12x + 4$
28. $16x^2 + 40x + 25$

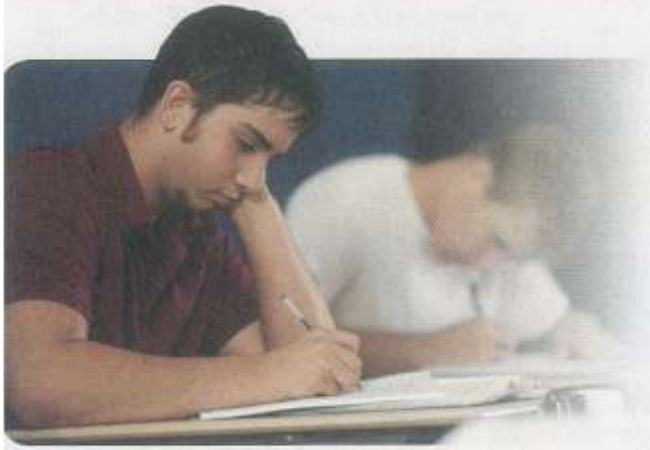
حُـلّ كلًا من المعادلات الآتية. تأكد من الحلول باستخدام حاسبة التمثيل البياني.

29. $x^2 - 4x = 21$
30. $x^2 - 2x - 24 = 0$
31. $6x^2 - 5x - 6 = 0$
32. $2x^2 - 13x + 20 = 0$
33. **الاختيار من متعدد** ما الاختيار الذي يمثل عاملاً لـ $x^4 - 1$ عندما يتم تحليله بالكامل إلى العوامل؟

F $x^2 - 1$
G $x - 1$
H x
J 1

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

7 التحضير للاختبارات المعيارية



حل المسائل متعددة الخطوات

في بعض المسائل ضمن الاختبارات المعيارية، يجب عليك حل أجزاء متعددة من أجل التوصل إلى الحل النهائي. استخدم هذا الدرس لممارسة هذه الأنواع من المسائل.

إستراتيجيات حل المسائل متعددة الخطوات

الخطوة 1

اقرأ المسألة بعناية.

اسأل نفسك:

- ما المطلوب مني حله؟ وما المعطيات؟
- هل توجد أي خطوات وسيطة ينبغي أن تكتمل قبل محاولة حل المسألة؟

الخطوة 2

نظّم طريقة حلك.

- اكتب قائمة بالخطوات التي ستحتاج إلى إكمالها من أجل حل المسألة.
- تذكر أنه قد توجد أكثر من طريقة ممكنة لحل المسألة.

الخطوة 3

حلّ المسألة وتحقق من الحل.

- حُل بكفاءة قدر المستطاع من أجل إكمال كل خطوة والوصول للحل.
- إذا سمح الوقت، فتحقق من إجابتك.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة. حدد ما تحتاج لمعرفته. ثم استخدم المعلومات المعطاة بالمسألة لحلها.

يريد بائع زهور استخدام 80 وردة و50 زهرة زنبق و20 زهرة سوسن في تكوين باقات زهور. ويريد عمل أكبر عدد ممكن من الباقات باستخدام كل هذه الزهور. ينبغي أن تتضمن كل باقة نفس العدد من كل نوع من الزهور. كم عدد الزهور في كل باقة؟

A 4 زهور

B 8 زهور

C 10 زهور

D 15 زهرة

حقوق الطبع والتأليف © مجموعة لمنالج مؤسسة McGraw-Hill Education

اقرأ المسألة بعناية. أنت تعرف عدد الورود والزنبق والسوسن. وتعرف كذلك أن باقات الزهور ستتضمن نفس العدد من الزهور. وتحتاج إلى إيجاد عدد الزهور التي ستضمنها كل باقة.

الخطوة 1 جـد العامل المشترك الأكبر لعدد الورود والزنبق والسوسن.

الخطوة 2 استخدم العامل المشترك الأكبر في تحديد عدد الباقات التي ستصنعها.

الخطوة 3 اقسم إجمالي عدد الزهور على عدد الباقات.

الخطوة 1 اكتب التحليل إلى العوامل أولية لكل عدد من الزهور لإيجاد العامل المشترك الأكبر.

$80 = \mathbf{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \mathbf{5}$

$50 = \mathbf{2} \cdot \mathbf{5} \cdot 5$

$20 = \mathbf{2} \cdot 2 \cdot \mathbf{5}$

العامل المشترك الأكبر $= 10 = 5 \cdot 2$

الخطوة 2 نعرف من خلال العامل المشترك الأكبر لعدد الورود والزنبق والسوسن عدد الباقات التي يُمكننا صنعها على أن تتضمن كل باقة نفس العدد من الزهور. إذًا، يُمكن لبائع الزهور صنع إجمالي 10 باقات.

الخطوة 3 اقسم عدد الزهور على عدد الباقات لإيجاد عدد الزهور في كل باقة.

$$\frac{80}{10} = 8$$

إذًا، ستكون هناك 8 زهور في كل باقة. الإجابة هي B.

التمارين

اقرأ كل مسألة مما يلي، وحدّد ما تحتاج لمعرفته، ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها.

1. أي من القيم التالية ليست حلاً لـ

$x^3 - 3x^2 - 25x + 75 = 0$?

A $x = 5$
C $x = -3$
B $x = 3$
D $x = -5$

2. سيذهب 12 معلمًا و90 طالبًا و36 متطوعًا من أولياء الأمور إلى الرحلة الميدانية. وتريد السيدة خولة أن تقسم إجمالي عدد الجميع على مجموعات متساوية بنفس العدد من المعلمين والطلاب وأولياء الأمور في كل مجموعة. إذا صنعت أكبر عدد من المجموعات، فما سيكون عدد الطلاب في كل مجموعة؟

F 6
H 12
G 9
J 15

3. ما مساحة المربع؟

A $x^2 + 16$
B $4x - 16$
C $x^2 - 8x - 16$
D $x^2 - 8x + 16$

4. يبيع الطلاب المجلات لجمع الأموال من أجل الرحلة الميدانية. ويجنون AED 2.75 لكل مجلة يبيعونها. إذا كانوا يريدون جمع AED 600. فما أقل عدد من المجلات التي ينبغي بيعها؟

F 121
H 202
G 177
J 219

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

تراكمي. الوحدة 7

الاختيار من متعدّد

1. أي مما يلي يُعد حلاً لـ $x^2 + 6x - 112 = 0$؟

F -14

G -8

H 6

J 12

2. أي من كثيرات الحدود التالية أولية؟

A $5x^2 + 34x + 24$

B $4x^2 + 22x + 10$

C $4x^2 + 38x + 70$

D $5x^2 + 3x + 4$

3. أي مما يلي لا يُعد عاملاً لكثيرة الحدود $45a^2 - 80b^2$؟

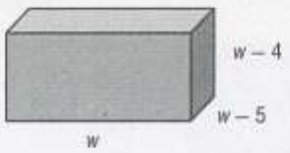
F 5

G $3a - 4b$

H $2a - 5b$

J $3a + 4b$

4. يُمكن تمثيل أبعاد عبوة هدية مستطيلة الشكل بالشكل الموضح. وحجم العبوة يساوي $56w$ بوصة مكعبة. أي مما يلي *ليس* بُعدًا للعبوة؟



A 6 in.

B 7 in.

C 8 in.

D 12 in.

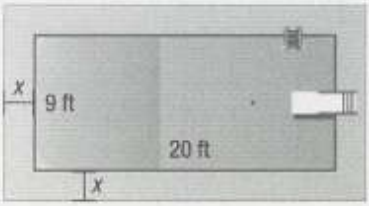
إجابة مختصرة/إجابة شبكية

اكتب الإجابات في ورقة الإجابة التي قدمها إليك المعلم أو ورقة أخرى.

5. تمثل المعادلة $h = -16t^2 + 40t + 3$ الارتفاع h لكرة قدم بالأقدام، وذلك بعد t ثانية. ما ارتفاع الكرة بعد ثانيتين؟

6. حلّل $2x^4 - 32$ إلى العوامل بالكامل.

7. **إجابة شبكية** تقوم خديجة بتركيب ممر أسمنتي حول محيط حمام سباحة بالأبعاد الموضحة أدناه. إذا كان $x = 3$، فأوجد مساحة حمام السباحة والممر الأسمنتي بالقدم المربع.



الإجابة الموسعة

دوّن إجاباتك على ورقة. اكتب الحل هنا.

8. يُمكن إيجاد ارتفاع نموذج صاروخ بالقدم بعد مرور t ثانية من إطلاقه إلى الهواء من خلال الدالة $h(t) = -16t^2 + 200t$.

a. اكتب التعبير الذي يمثل ارتفاع الصاروخ بصيغة محللة إلى العوامل.

b. ما الزمن (الفترات الزمنية) الذي سيكون ارتفاع الصاروخ فيه صفرًا قدمًا فوق مستوى الأرض؟ اشرح معنى حلك في الحياة اليومية.

c. ما أقصى ارتفاع وصل إليه نموذج الصاروخ؟ ومتى حدث ذلك؟

حقوق الطبع والتأليف © مجموعة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

ملاحظاتي

الوحدة 8

8 الأسس والتعابير الجذرية

السابق

لقد وجدت قيم التعابير التي تتضمن أسسًا.

الحالي

بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:

- تبسيط التعابير التي تتضمن أسسًا وتنفيذ العمليات عليها.
- تطبيق خواص أسس العدد الصحيح على الأسس النسبية.
- استخدام الترميز العلمي.
- تبسيط التعابير الجذرية وإجراء العمليات عليها.

لماذا؟

الفضاء يعتبر مصفوف المراصد العظيم VLA ترتيبًا من 27 هوائيًا لاسلكيًا على شكل Y. يستخدم الفلكيون حول العالم البيانات التي تجمعها الهوائيات لدراسة الكواكب والنجوم. يستخدم علماء الفيزياء الفلكية خواص الأسس ويطبقونها لتمثيل بعد الأجرام السماوية ومدارها.

Chapter sourced from 8. Exponents and Exponential Functions, Integrated Math I, Chapter 7, 8, 9, 12 & Radical Functions, Rational Functions, and Geometry, from Integrated Math I Chapter 8 © 2012 McGraw-Hill Education
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الاستعداد للوحدة

1 خيار الكتاب المدرسي أجب عن أسئلة التدريب السريع التالية. يُرجى الرجوع إلى الجزء "مراجعة سريعة" للحصول على المساعدة.

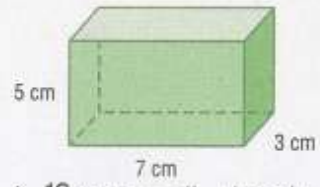
تدريب سريع

اكتب كل تعبير باستخدام الأسس.

1. $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$ 4^5
2. $y \times y \times y$
3. 6×6 6^2
4. $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
5. $b \times b \times b \times b \times b \times b$
6. $m \times m \times m \times p \times p \times p \times p \times p \times p$
7. $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$
8. $\frac{x}{y} \times \frac{x}{y} \times \frac{x}{y} \times \frac{x}{y} \times \frac{w}{z} \times \frac{w}{z}$

جد مساحة كل شكل أو حجمه.

9.

10. 

11. **التصوير الفوتوغرافي** يبلغ مقاس الصورة 10 cm في 15 cm. فما مساحة الصورة؟

جد قيمة كل تعبير.

12. 2^3
13. $(-5)^2$
14. 3^3
15. $(-4)^3$
16. $\left(\frac{2}{3}\right)^2$
17. $\left(\frac{1}{2}\right)^4$

18. **المدرسة** احتمال تخمين الإجابة الصحيحة على 5 أسئلة من نوع صحيح/خطأ هي $\left(\frac{1}{2}\right)^5$. عبّر عن هذا الاحتمال في صورة كسر بدون أسس.

مراجعة سريعة

مثال 1

اكتب $x \times x \times x \times x + 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$ باستخدام الأسس.

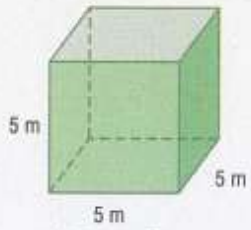
4 عوامل للرقم 5 هي 5^4.

3 عوامل للرقم x هي x^3.

إذًا، $5 \times 5 \times 5 \times 5 + x \times x \times x = 5^4 + x^3$.

مثال 2

جد حجم الشكل.



حجم منشور مستطيل

$V = \ell wh$

$\ell = 5, w = 5, h = 5$

$= 5 \quad 5 \quad 5 \quad 125$

الحجم هو 125 مترًا مكعبًا. أو x x

مثال 3

جد قيمة $\left(\frac{5}{7}\right)^2$.

$\left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{5^2}{7^2}$ الأسس لناتج قسمة

$= \frac{25}{49}$ بسّط.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

البدء في هذه الوحدة

سوف تتعلم عدة مفاهيم ومهارات ومفردات جديدة خلال دراستك لهذه الوحدة. للاستعداد، حدد المصطلحات المهمة ونظّم مواردك. قد ترغب بالرجوع إلى وحدات سابقة لمراجعة المهارات المطلوبة.

مطويات منظم الدراسة

الأسس والدوال الأسية اصنع هذه المطوية لتساعدك في تنظيم ملاحظاتك في هذه الوحدة عن الأسس والدوال الأسيّة. ابدأ باستخدام تسع ورقات من الدفتر.

1 **قم** بترتيب الورق في حزمة.

2 **قم** بالتدبيس بطول الجانب الأيسر. بدءًا من الورقة الثانية، اقطع بطول الجانب الأيمن لتشكيل ألسنة.

3 **اكتب** على ورقة الغطاء "الأسس والدوال الأسية" واكتب على كل لسان رقم درس.

المفردات الجديدة

أحادي الحدّ	monomial
ثابت	constant
الأس الصفري	zero exponent
الأس السالب	negative exponent
رتبة المقدار	order of magnitude
الأس النسبي	rational exponent
الجذر التكعيبي	cube root
الجذر النوني n	nth root
المعادلة الأسية	exponential equation
الترميز العلمي	scientific notation
الدالة الأسية	exponential function
النمو الأسي	exponential growth
التضاؤل الأسي	exponential decay
المرابحة المركبة	compound interest
متتالية هندسية	geometric sequence
نسبة مشتركة	common ratio
صيغة تكرارية	recursive formula

مراجعة المفردات

الأساس في تعبير بالصيغة x^n، الأساس هو x.

خاصية التوزيع لأي أعداد a ، b و c

و

الأس في تعبير بالصيغة x^n، الأس هو n. يشير إلى عدد مرات استخدام x كعامل.

أس

$$x^n = \underbrace{x \times x \times x \times x \times x \times \ldots \times x}_{n \text{ مرات}}$$

أساس

الدرس 1-8

خواص ضرب الأسس

السابق
- أوجدت قيمة التعابير ذات الأسس.

الحالي
1. ضرب أحاديات الحدود باستخدام خواص الأسس.
2. تبسيط التعابير باستخدام خواص الضرب في الأسس.

لماذا؟
- تحتوي الكثير من الصيغ على *أحاديات الحدود*. مثال. صيغة القدرة الحصانية لسيارة هي $H = w\left(\frac{v}{234}\right)^3$ تمثل H القدرة الحصانية التي ينتجها المحرك. W تساوي وزن السيارة مع الركاب، و V هي سرعة السيارة في نهاية أربعة أعشار الكيلومتر. كلما زادت السرعة، زادت القدرة الحصانية.

المفردات الجديدة
أحادي الحدّ monomial
ثابت constant

ممارسات في الرياضيات
البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

1 ضرب أحاديات الحد

أحادية الحد هي عدد أو متغير أو ناتج ضرب عدد في واحد أو أكثر من المتغيرات ذات الأسس الصحيحة غير السالبة. تحتوي على حد واحد فقط. في قانون حساب القدرة الحصانية لسيارة، الحد $w\left(\frac{v}{234}\right)^3$ أحادي.

التعبير الذي يتضمن القسمة على متغير مثل $\frac{ab}{c}$ ليس أحادي الحد.

الدالة الثابتة هي دالة أحادية الحد عبارة عن عدد حقيقي. الدالة أحادية الحد $3x$ مثال على تعبير خطي بما أن أس x هو 1. الدالة أحادية الحد $2x^2$ تُعتبر تعبيرًا غير خطي بما أن الأس عدد موجب بخلاف العدد 1.

مثال 1 تحديد الدوال أحادية الحد

حدد ما إذا كان كل تعبير يمثل دالة أحادية حد. اكتب نعم أو لا. اشرح استنتاجك.

a. 10
نعم؛ فهذه دالة ثابتة، ولذلك فهي أحادية الحد.

b. $f + 24$
لا؛ فهذا التعبير يحتوي على جمع، ولذلك فإنه يحتوي على أكثر من حد.

c. h^2
نعم؛ فهذا التعبير هو ناتج ضرب المتغيرات.

d. j
نعم؛ فالتغيرات المنفردة أحادية الحدود.

تمرين موجّه

1A. $-x + 5$

1B. $23abcd^2$

1C. $\frac{xyz^2}{2}$

1D. $\frac{mp}{n}$

تذكّر أن التعبير بالصيغة x^n يُسمى القوة النونية ويمثل نتيجة ضرب x في نفسها n من المرات. و x هي الأساس. تُستخدم كلمة القوة أحيانًا أيضًا للإشارة إلى الأس.

$$3^4 = \overbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}^{\text{4 عوامل}} = 81$$

أس
أساس

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

بتطبيق تعريف الأسس، يمكنك الوصول إلى ناتج ضرب الأسس.
البحث عن نمط في الأسس.

$4^3 \times 4^2 = \overbrace{4 \times 4 \times 4}^{\text{3 عوامل}} \times \overbrace{4 \times 4}^{\text{عاملان}}$

$\overbrace{3 + 2 = 5}^{\text{عوامل 5}}$

$2^2 \times 2^4 = \overbrace{2 \times 2}^{\text{عاملان}} \times \overbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2}^{\text{4 عوامل}}$

$\overbrace{2 + 4 = 6}^{\text{عوامل 6}}$

توضح هذه الأمثلة خاصية ناتج ضرب الأسس.

المفهوم الأساسي ناتج ضرب الأسس

الشرح: لضرب قوتين لهما أساس واحد، اجمع أسيهما. (عند ضرب المقادير الأسية الأسس تُجمع)

الرموز: لأي عدد حقيقي a وأي أعداد صحيحة m و p. $a^m \times a^p = a^{m+p}$.

أمثلة: $g^4 \times g^6 = g^{4+6}$ أو g^{10} $\quad b^3 \times b^5 = b^{3+5}$ أو b^8

مثال 2 ناتج ضرب الأسس

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

a. $(6n^3)(2n^7)$

$(6n^3)(2n^7) = (6 \times 2)(n^3 \times n^7)$ قم بتجميع المعاملات المشتركة والمتغيرات.

$= (6 \times 2)(n^{3+7})$ ناتج ضرب الأسس

$= 12n^{10}$ بسّط.

b. $(3pt^3)(p^3t^4)$

$(3pt^3)(p^3t^4) = (3 \times 1)(p \times p^3)(t^3 \times t^4)$ قم بتجميع المعاملات المشتركة والمتغيرات.

$= (3 \times 1)(p^{1+3})(t^{3+4})$ ناتج ضرب الأسس

$= 3p^4t^7$ بسّط.

تمرين موجّه

2A. $(3y^4)(7y^5)$ **2B.** $(-4rx^2t^3)(-6r^5x^2t)$

نصيحة دراسية
المعاملات المشتركة والقوى
العدد 1 يمكن افتراض أن المتغير بدون أس أو معامل مشترك ظاهر له أس ومعامل مشترك يبلغ 1. على سبيل المثال، $x = 1x^1$.

يمكننا استخدام خاصية ناتج ضرب الأسس للتوصل إلى الرفع لأس أخر.
في الأمثلة التالية، ابحث عن نمط في الأسس.

$(r^4)^3 = \overbrace{(r^4)(r^4)(r^4)}^{\text{3 عوامل}}$

$= r^{4+4+4}$

$= r^{12}$

$(3^2)^4 = \overbrace{(3^2)(3^2)(3^2)(3^2)}^{\text{4 عوامل}}$

$= 3^{2+2+2+2}$

$= 3^8$

توضح هذه الأمثلة خاصية الرفع لقوة.

المفهوم الأساسي ناتج رفع الأس لأس آخر/ رفع القوى

الشرح: لإيجاد ناتج رفع الأس لأس آخر، اضرب الأسس. (عند رفع المقادير الأسية لأس تُضرب الأسس)

الرموز: لأي عدد حقيقي a وأي عددين صحيحين m و p. $(a^m)^p = a^{m \times p}$.

أمثلة: $(g^6)^7 = g^{6 \times 7}$ or g^{42} $\quad (b^3)^5 = b^{3 \times 5}$ or b^{15}

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

نصيحة دراسية

الانتظام تُعتبر قواعد الأسس أساليب عامة. إذا لم تكن متأكدًا متى تضرب الأسس ومتى تجمع الأسس، فاكتب التعبير بالصيغة الموسعة.

مثال 3 على الاختبار المعياري رفع القوى

بسّط $[(2^3)^2]^4$.

A 2^{24} B 2^{12} C 2^{10} D 2^9

قراءة فقرة الاختبار

تحتاج إلى تطبيق قاعدة رفع القوى.

حَل فقرة الاختبار

$[(2^3)^2]^4 = (2^{3x2})^4$ رفع القوى

$= (2^6)^4$ بسّط.

$= 2^{6x4}$ or 2^{24} رفع القوى

الاختيار الصحيح هو A.

تمرين موجّه

3. بسّط $[(2^2)^2]^4$

F 2^8 G 2^{10} H 2^{16} J 2^{24}

يمكننا استخدام خاصية ناتج ضرب الأسس وخاصية رفع القوى لإيجاد الأس لناتج ضرب. ابحث عن نمط في الأسس أدناه.

$(tw)^3 = \overbrace{(tw)(tw)(tw)}^{\text{3 عوامل}}$
$= (t \times t \times t)(w \times w \times w)$
$= t^3w^3$

$(2yz^2)^3 = \overbrace{(2yz^2)(2yz^2)(2yz^2)}^{\text{3 عوامل}}$
$= (2 \times 2 \times 2)(y \times y \times y)(z^2xz^2xz^2)$
$= 2^3y^3z^6 = 8y^3z^6$

توضح هذه الأمثلة خاصية ناتج ضرب الأسس.

المفهوم الأساسي الأس لناتج ضرب

الشرح للتوصل إلى الأس لناتج ضرب، جد الأس لكل عامل واضرب.

الرموز لأي عددين حقيقيين a وأي عدد صحيح m، $(ab)^m = a^m b^m$.

مثال $(-2xy^3)^5 = (-2)^5x^5y^{15}$ أو $-32x^5y^{15}$

مثال 4 الأس لناتج ضرب

الهندسة عبّر عن مساحة الدائرة بدالة أحادية حد.

المساحة $= \pi r^2$ قانون مساحة الدائرة

$= \pi(2xy^2)^2$ عوض عن r بـ $2xy^2$.

$= \pi\, 2^2x^2y^4$ أس ناتج الضرب

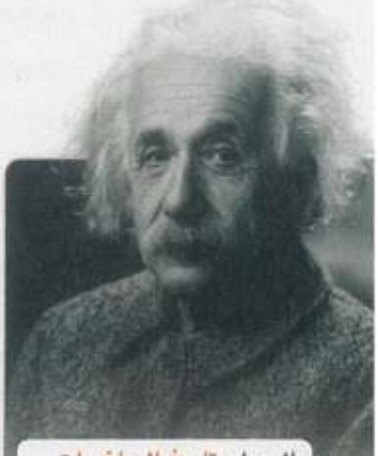
$= 4x^2y^4\pi$ بسّط.

مساحة الدائرة $4x^2y^4\pi$ وحدة مربعة.

تمرين موجّه

4A. عبّر عن مساحة مربع يبلغ طول أضلاعه $3xy^2$ على شكل دالة أحادية حد.

3a. عبّر عن مساحة مثلث بالارتفاع $4a$ والقاعدة $5ab^2$ على شكل دالة أحادية حد.



الربط بتاريخ الرياضيات

ألبرت أينشتاين (1879-1955) ربما يكون ألبرت أينشتاين العالم الأشهر في القرن العشرين. قانونه $E = mc^2$، حيث E تمثل الطاقة m هي كتلة المادة c هي سرعة الضوء، يوضح أنه إذا تسارعت الكتلة بالقدر الكافي، يمكن تحويلها إلى طاقة قابلة للاستخدام.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 تحويل التعابير لأبسط صورة

يمكننا الجمع بين هذه الخصائص واستخدامها لتحويل التعابير التي تتضمن أحاديات الحد لأبسط صورة.

المفهوم الأساسي حوّل التعابير لأبسط صورة

لتحويل تعبير أحادي الحد لأبسط صورة، اكتب تعبيرًا مكافئًا حيث:

- يظهر أساس كل متغير مرة واحدة فقط.
- لا يوجد أسس مرفوعة لأسس أخرى.
- جميع الكسور في أبسط صورة.

مثال 5 تحويل التعابير لأبسط صورة

بسّط $(3xy^4)^2[(-2y)^2]^3$.

$$(3xy^4)^2[(-2y)^2]^3 = (3xy^4)^2(-2y)^6 \quad \text{رفع القوى}$$
$$= (3)^2x^2(y^4)^2(-2)^6y^6 \quad \text{أس ناتج الضرب}$$
$$= 9x^2y^8(64)y^6 \quad \text{رفع القوى}$$
$$= 9(64)x^2 \times y^8 \times y^6 \quad \text{تبديل}$$
$$= 576x^2y^{14} \quad \text{ناتج ضرب الأسس}$$

تمرين موجّه

5. بسّط $\left(\frac{1}{2}a^2b^2\right)^3[(-4b)^2]^2$

نصيحة دراسية

التحويل لأبسط صورة عند تبسيط تعابير يوجد أقواس مختلفة، ابدأ بالتعبير الداخلي أولاً واتجه للخارج.

التحقق من فهمك

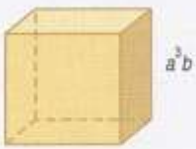
مثال 1 **حدد ما إذا كان كل تعبير يمثل دالة أحادية حد. اكتب نعم أو لا. اشرح استنتاجك.**

1. 15
2. $2 - 3a$
3. $\frac{5c}{d}$
4. $-15g^2$
5. $\frac{r}{2}$
6. $7b + 9$

الأمثلة 2-3 **حوّل كل تعبير لأبسط صورة.**

7. $k(k^3)$
8. $m^4(m^2)$
9. $2q^2(9q^4)$
10. $(5u^4v)(7u^4v^3)$
11. $[(3^2)^2]^2$
12. $(xy^4)^6$
13. $(4a^4b^9c)^2$
14. $(-2f^2g^3h^2)^3$
15. $(-3p^5t^6)^4$

مثال 4



16. **الهندسة** قانون مساحة سطح المكعب هو $SA = 6s^2$. حيث SA هي المساحة السطحية، s هي طول أي ضلع.
   a. عبّر عن مساحة سطح المكعب بدالة أحادية حد.
   b. ما مساحة سطح المكعب إذا كانت $a = 3$ و $b = 4$؟

مثال 5 **حوّل كل تعبير لأبسط صورة.**

17. $(5x^2y)^2(2xy^3z)^3(4xyz)$
18. $(-3d^2f^3g)^2[(-3d^2f)^3]^2$
19. $(-2g^3h)(-3gj^4)^2(-ghj)^2$
20. $(-7ab^4c)^3[(2a^2c)^2]^3$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **حدد ما إذا كان كل تعبير يمثل دالة أحادية حد. اكتب نعم أو لا. اشرح استنتاجك.**

21. 122 **22.** $3a^4$ **23.** $2c + 2$

24. $\frac{-2g}{4h}$ **25.** $\frac{5k}{10}$ **26.** $6m + 3n$

الأمثلة 2-3 **حوّل كل تعبير لأبسط صورة.**

27. $(q^2)(2q^4)$ **28.** $(-2u^2)(6u^6)$ **29.** $(9w^2x^8)(w^6x^4)$

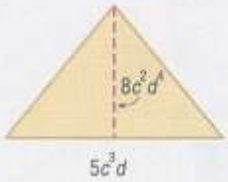
30. $(y^6z^9)(6y^4z^2)$ **31.** $(b^8c^6d^5)(7b^6c^2d)$ **32.** $(14fg^2h^2)(-3f^4g^2h^2)$

33. $(j^5k^7)^4$ **34.** $(n^3p)^4$ **35.** $[(2^2)^2]^2$

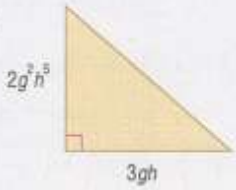
36. $[(3^2)^2]^4$ **37.** $[(4r^2t)^3]^2$ **38.** $[(-2xy^2)^3]^2$

مثال 4 **الهندسة** عبّر عن مساحة كل مثلث بدالة أحادية حد.

39.



40.



مثال 5 **حوّل كل تعبير لأبسط صورة.**

41. $(2a^3)^4(a^3)^3$ **42.** $(c^3)^2(-3c^5)^2$

43. $(2gh^4)^3\left[(-2g^4h)^3\right]^2$ **44.** $(5k^2m)^3\left[(4km^4)^2\right]^2$

45. $(p^5r^2)^4(-7p^3r^4)^2(6pr^3)$ **46.** $(5x^2y)^2(2xy^3z)^3(4xyz)$

47. $(5a^2b^3c^4)(6a^3b^4c^2)$ **48.** $(10xy^5z^3)(3x^4y^6z^3)$

49. $(0.5x^3)^2$ **50.** $(0.4h^5)^3$

51. $\left(-\frac{3}{4}c\right)^3$ **52.** $\left(\frac{4}{5}a^2\right)^2$

53. $(8y^3)(-3x^2y^2)\left(\frac{3}{8}xy^4\right)$ **54.** $\left(\frac{4}{7}m\right)^2(49m)(17p)\left(\frac{1}{34}p^5\right)$

55. $(-3r^3w^4)^3(2rw)^2(-3r^2)^3(4rw^2)^3(2r^2w^3)^4$

56. $(3ab^2c)^2(-2a^2b^4)^2(a^4c^2)^3(a^2b^4c^5)^2(2a^3b^2c^4)^3$

57. المعرفة المالية يملك عمر مالاً في حساب يكسب مرابحة بسيطة بنسبة 3%. صيغة حساب المرابحة البسيطة هي $I = Prt$. حيث هي المرابحة المكتسبة. p تمثل المبلغ الأساسي الذي وضعه في الحساب. r هي معدل المرابحة (بصيغة عشرية). t تمثل الزمن بالسنوات.

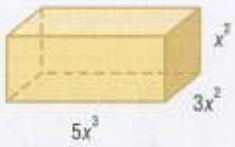
a. أودع عمر مبلغ AED 2c وتركه لمدة سنتين. اكتب دالة أحادية الحد تمثل المرابحة المكتسبة.

b. إذا كانت c تمثل هدية تخرج بقيمة AED 250. فكم المبلغ الذي سيكون لدى عمر في هذا الحساب بعد سنتين؟

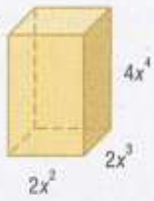
الأدوات عبّر عن حجم كل مجسم بدالة أحادية الحد.

58.

59.



60.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

61. **التغليف** في فصل للقنون التجارية. يجب على رانا أن تصمم حاوية جديدة لقطع الحلويات المغلفة بشكل منفرد. كان الشكل الذي اختارته هو الأسطوانة.
قانون حجم الأسطوانة هو $V = \pi r^2 h$.

a. يبلغ نصف القطر الذي ترغب رانا في استخدامه $2p^3$. والارتفاع $4p^3$.
اكتب دالة أحادية الحد تمثل حجم عبوتها.

b. اصنع جدولاً بخمسة قياسات محتملة لنصف قطر أسطوانة وارتفاعها لها القياس نفسه.

c. ما حجم حاوية رانا إذا كان الارتفاع الضعف؟

62. **الطاقة** يوضح قانون ألبرت أينشتاين $E = mc^2$ أنه إذا تسارعت الكتلة بالقدر الكافي، يمكن تحويلها إلى طاقة قابلة للاستخدام. يتم قياس الطاقة E بالجول والكتلة m kg وسرعة الضوء c تبلغ 300,000,000 m/sec تقريبًا.

a. استكمل حسابات تحويل 3 kg من الغازولين بالكامل إلى طاقة.

b. ماذا يحدث للطاقة إذا تضاعف مقدار الغازولين؟

63. **تمثيلات متعددة** في هذه المسألة، سوف تستكشف الأسس.

a. **جدوليًا** استخدم حاسبة لاستكمال الجدول.

القوة الأسية	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4
القيمة	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$					

b. **تحليليًا** كم تبلغ في رأيك قيمتا 5^0 و5^{-1}؟ تحقق من فرضيتك باستخدام حاسبة.

c. **تحليليًا** اكمل: لأي عدد غير الصفر a وأي عدد صحيح n.
$a^{-n} =$ _____.

d. **لفظيًا** صف قيمة عدد غير الصفر مرفوعًا إلى القوة صفر.

مسائل مهارات التفكير العليا

64. **المثابرة** لأي عددين حقيقيين غير الصفر a, b وأي عددين صحيحين m, t. حوّل لأبسط صورة التعبير $\left(-\frac{a^m}{b^t}\right)^{2t}$ وصف كل خطوة.

65. **التبرير** انسخ الجدول أدناه.

المعادلة	التعبير المرتبط	القوة لـ x	خطي أم غير خطي
$y = x$			
$y = x^2$			
$y = x^3$			

a. لكل معادلة، اكتب التعبير المرتبط بها وسجّل القوة لـ x.

b. مثّل كل معادلة بيانيًا باستخدام حاسبة بيانية.

c. ضع تصنيفًا لكل تمثيل بياني باعتباره خطيًا أو غير خطي.

d. اشرح كيفية تحديد ما إذا كانت المعادلة أو التعبير المرتبط بها خطيًا أو غير خطي بدون تمثيل بياني.

66. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب ثلاثة تعابير مختلفة يمكن تحويلها لأبسط صورة إلى x^6.

67. **الكتابة في الرياضيات** اكتب قانونين يحتويان على تعابير أحادية الحد. اشرح كيف يُستخدم كل قانون في موقف من الحياة اليومية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

68. أي مما يلي لا يمثل دالة أحادية حد؟

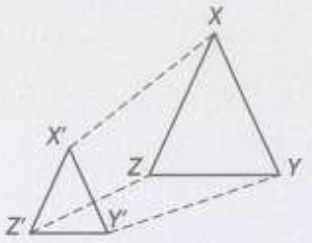
A $-6xy$

B $\frac{1}{2}a^2$

C $-\frac{1}{2b^3}$

D $5gh^4$

69. الهندسة يوضح الرسم التخطيطي المصاحب تحويل $\triangle XYZ$ إلى $\triangle X'Y'Z'$.



هذا التحويل مثال على

F تغيير أبعاد (تمدد)

G انعكاس حول مستقيم

H دوران

J إزاحة

70. السيارات في عام 2002، كان متوسط سعر السيارة المحلية الجديدة AED 19,126. في عام 2008، كان متوسط السعر AED 28,715. بناء على نموذج خطي، ما متوسط السعر المتوقع لعام 2014؟

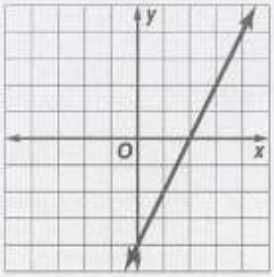
A AED 45,495

B AED 38,304

C AED 35,906

D AED 26,317

71. الإجابة القصيرة إذا كان للمستقيم ميل موجب ونقطة تقاطع مع المحور الرأسي y سالبة، ماذا يحدث لنقطة التقاطع الأفقي x إذا تضاعف كل من الميل ونقطة التقاطع y؟



مراجعة شاملة

حُـل أنظمة المتباينات في كل مما يلي باستخدام التمثيل البياني.

72. $y < 4x$
$2x + 3y \geq -2$

73. $y \geq 2$
$21y + 2x \leq 2$

74. $y > -2x - 1$
$4y \leq 3x + 2$

75. $3x + 2y < 10$
$2x + 12y < -6$

76. الرياضات في دورة الألعاب الأولمبية الشتوية لعام 2006، كان العدد الإجمالي لميداليات الذهب والفضة التي فازت بها الولايات المتحدة 18. كان إجمالي النقاط التي تحققت للميداليات الذهبية والفضية 45. اكتب نظام معادلات وجد حله للتوصل إلى عدد الميداليات الذهبية والفضية التي فازت بها الولايات المتحدة

77. القيادة يجب أن يظل ضغط الإطارات في حدود رطلين للبوصة المربعة (psi) من القيمة الموصى بها من جهة التصنيع. إذا كان الموصى به للإطار هو 30 psi، فما مجال قيم الضغط المقبولة؟

78. مجالسة الأطفال تحصل سهيلة على AED 10 بالإضافة إلى AED 4 في الساعة لمجالسة الأطفال. تحتاج سهيلة إلى AED 40 إضافية على الأقل لشراء تلفاز تدخر المال لشرائه. اكتب متباينة لهذا الموقف. هل ستتمكن من الحصول على التلفاز إذا جالست أطفال لمدة 5 ساعات؟

مراجعة المهارات

جـد ناتج قسمة كل مما يلي.

79. $-64 \div (-8)$

80. $-78 \div 1.3$

81. $42.3 \div (-6)$

82. $-23.94 \div 10.5$

83. $-32.5 \div (-2.5)$

84. $-98.44 \div 4.6$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

8-2 خواص قسمة الأسس

السابق:
- ضربت أحاديات الحدود باستخدام خواص الأسس.

الحالي:
1. قسمة أحاديات الحدود باستخدام خواص الأسس.
2. تحويل التعابير المحتوية على أسس سالبة وصفرية لأبسط صورة.

لماذا؟
- يبلغ طول أطول شجرة خشب أحمر 112 m أو حوالي 10^2 m. متوسط ارتفاع شجرة الخشب الأحمر 15 m. أقرب قوة للعشرة للوصول إلى 15 هي 10^1. ولهذا فإن متوسط طول الخشب الأحمر يبلغ 10^1 m تقريبًا. تبلغ نسبة ارتفاع أطول شجرة إلى متوسط ارتفاع الشجرة $\frac{10^2}{10^1}$ أو 10^1. وهذا يعني أن أطول شجرة خشب أحمر يبلغ تقريبًا 10 أمثال متوسط طول شجرة الخشب الأحمر.

المفردات الجديدة

الأس الصفري zero exponent
الأس السالب negative exponent
رتبة المقدار order of magnitude

ممارسات في الرياضيات

التفكير بطريقة تجريدية وكمية.

1 قسمة أحاديات الحدود يمكننا استخدام مبادئ اختزال الكسور للتوصل إلى نواتج قسمة أحاديات الحدود مثل $\frac{10^2}{10^1}$. في الأمثلة التالية، ابحث عن نمط في الأسس.

$$\frac{t^4}{t^3} = \frac{\overbrace{\cancel{t}\times\cancel{t}\times\cancel{t}\times t}^{\text{4 عوامل}}}{\underbrace{\cancel{t}\times\cancel{t}\times\cancel{t}}_{\text{3 عوامل}}} = t$$

$$\frac{2^7}{2^4} = \frac{\overbrace{\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times 2\times 2\times 2}^{\text{7 عوامل}}}{\underbrace{\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{2}}_{\text{4 عوامل}}} = 2\times 2\times 2 = 2^3$$

نوضح هذه الأمثلة قاعدة ناتج قسمة الأسس.

المفهوم الأساسي ناتج قسمة الأسس

الشرح	لقسمة أسين لهما الأساس نفسه، اطرح الأسين. (عند قسمة المقادير الأسيّة الأسس تُطرح)
الرموز	بالنسبة لأي عدد غير الصفر a، وأي عددين صحيحين m و p، $\frac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$
أمثلة	$\frac{r^5}{r^2} = r^{5-2} = r^3$ $\quad$ $\frac{c^{11}}{c^8} = c^{11-8} = c^3$

مثال 1 ناتج قسمة الأسس

حوّل لأبسط صورة $\frac{g^3h^5}{gh^2}$. افترض أنه لا يوجد مقام يساوي صفرًا.

$\frac{g^3h^5}{gh^2} = \left(\frac{g^3}{g}\right)\left(\frac{h^5}{h^2}\right)$ قم بتجميع المقادير ذات الأساس نفسه.

$= (g^{3-1})(h^{5-2})$ ناتج قسمة الأسس

$= g^2h^3$ بسّط.

تمرين موجّه

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. افترض أنه لا يوجد مقام يساوي صفرًا.

1A. $\frac{x^3y^4}{x^2y}$ **1B.** $\frac{k^7m^{10}p}{k^5m^3p}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكننا استخدام قاعدة ناتج ضرب الأسس للتوصل إلى أسس نواتج قسمة أحاديات الحدود. في المثال التالي، ابحث عن نمط في الأسس.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \overbrace{\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)}^{\text{3 عوامل}} = \frac{\overbrace{3\times3\times3}^{\text{3 عوامل}}}{\underbrace{4\times4\times4}_{\text{3 عوامل}}} = \frac{3^3}{4^3}$$

$$\left(\frac{c}{d}\right)^2 = \overbrace{\left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{c}{d}\right)}^{\text{عاملان}} = \frac{\overbrace{c\times c}^{\text{عاملان}}}{\underbrace{d\times d}_{\text{عاملان}}} = \frac{c^2}{d^2}$$

نصيحة دراسية

قواعد الأس ذات المتغيرات

تسري قواعد الأسس على المتغيرات كما تسري على الأعداد. على سبيل المثال:

$$\left(\frac{3a}{4b}\right)^3 = \frac{(3a)^3}{(4b)^3} = \frac{27a^3}{64b^3}$$

المفهوم الأساسي أس ناتج قسمة

الشرح: للتوصل إلى أس ناتج قسمة، جد الأس للبسط والأس للمقام.

الرموز: لأي أعداد حقيقية a و b، $b \neq 0$، وأي عدد صحيح m، فإن $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.

أمثلة: $\left(\frac{r}{t}\right)^5 = \frac{r^5}{t^5}$ $\quad$ $\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4}$

مثال 2 إيجاد الأس لناتج قسمة

بسّط $\left(\frac{3p^3}{7}\right)^2$.

$$\left(\frac{3p^3}{7}\right)^2 = \frac{(3p^3)^2}{7^2} \quad \text{الأس لناتج قسمة}$$

$$= \frac{3^2(p^3)^2}{7^2} \quad \text{الأس لناتج ضرب}$$

$$= \frac{9p^6}{49} \quad \text{رفع القوى}$$

تمرين موجّه

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

2A. $\left(\frac{3x^4}{4}\right)^3$ **2B.** $\left(\frac{5x^5y}{6}\right)^2$ **2C.** $\left(\frac{2y^2}{3z^3}\right)^2$ **2D.** $\left(\frac{4x^3}{5y^4}\right)^3$

مهنة من الحياة اليومية

الفلكي يدرس الفلكي الكون ويحلل السفر عبر الفضاء واتصالات القمر الصناعي. مطلوب أن يحصل على درجة البكالوريوس لكي يكون فنيًا أو مساعد أبحاث.

يمكن استخدام حاسبة لاستكشاف التعابير التي أسها صفر. هناك طريقتان لشرح السبب في أن الحاسبة تعطي القيمة 1 لـ 3^0.

الطريقة 1

ناتج قسمة الأسس: $\frac{3^5}{3^5} = 3^{5-5}$

بسّط. $= 3^0$

الطريقة 2

تعريف الأسس: $\frac{3^5}{3^5} = \frac{\cancel{3}\times\cancel{3}\times\cancel{3}\times\cancel{3}\times\cancel{3}}{\cancel{3}\times\cancel{3}\times\cancel{3}\times\cancel{3}\times\cancel{3}}$

بسّط. $= 1$

بما أن $\frac{3^5}{3^5}$ لا يمكن أن يكون لها إلا قيمة واحدة، يمكننا استنتاج أن $3^0 = 1$. **الأس الصفري** هو أي عدد غير الصفر مرفوع إلى القوة صفر.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مفهوم رئيسي خاصية الأس الصفري

الشرح: أي عدد غير الصفر مرفوع إلى القوة صفر يساوي 1.

الرموز: بالنسبة لأي عدد غير الصفر a، فإن $a^0 = 1$.

أمثلة: $15^0 = 1$ $\quad \left(\frac{b}{c}\right)^0 = 1$ $\quad \left(\frac{2}{7}\right)^0 = 1$

مثال 3 الأس الصفري

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. افترض أنه لا يوجد مقام يساوي صفرًا.

a. $\left(\frac{4n^2q^5r^2}{9n^3q^2r}\right)^0$

$\left(\frac{4n^2q^5r^2}{9n^3q^2r}\right)^0 = 1$ $\quad a^0 = 1$

b. $\frac{x^5y^0}{x^3}$

$\frac{x^5y^0}{x^3} = \frac{x^5(1)}{x^3}$ $\quad a^0 = 1$

$= x^2$ $\quad$ ناتج قسمة الأسس

تمرين موجّه

3A. $\frac{b^4c^2d^0}{b^2c}$

3B. $\left(\frac{2f^4g^7h^3}{15f^3g^9h^6}\right)^0$

نصيحة دراسية

الأس الصفري انتبه إلى الأقواس. التعبير $(5x)^0$ يساوي 1 لكن $5x^0 = 5$.

2 الأسس السالبة

أي عدد حقيقي غير الصفر مرفوع إلى قوة سالبة هو **أس سالب**. للتحقيق في معنى الأس السالب، يمكننا تبسيط تعابير مثل $\frac{c^2}{c^5}$ باستخدام طريقتين.

الطريقة 1

ناتج قسمة الأسس: $\frac{c^2}{c^5} = c^{2-5}$

بسّط. $= c^{-3}$

الطريقة 2

تعريف الأسس: $\frac{c^2}{c^5} = \frac{\cancel{c} \times \cancel{c}}{\cancel{c} \times \cancel{c} \times c \times c \times c}$

بسّط. $= \frac{1}{c^3}$

بما أن $\frac{c^2}{c^5}$ لا يمكن أن يكون لها إلا قيمة واحدة، يمكننا استنتاج أن $c^{-3} = \frac{1}{c^3}$.

مفهوم رئيسي خاصية الأس السالب

الشرح: لأي عدد غير الصفر a وأي عدد صحيح n، فإن a^{-n} هو المعكوس الضربي لـ a^n. وأيضًا المعكوس الضربي لـ a^{-n} هو a^n.

الرموز: لأي عدد غير الصفر a وأي عدد صحيح n، فإن $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

أمثلة: $\frac{1}{f^{-4}} = f^4$ $\quad 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

McGraw-Hill Education محفوظ لناشر مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

يتم التعبير في أبسط صورة عندما يحتوي على أسس موجبة فقط ويظهر كل أساس مرة واحدة بالضبط ولا يوجد أس مرفوعًا لأس وكل الكسور في أبسط صورة.

مثال 4 الأسس السالبة

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. افترض أنه لا يوجد مقام يساوي صفرًا.

a. $\dfrac{n^{-5}p^4}{r^{-2}}$

$$\frac{n^{-5}p^4}{r^{-2}} = \left(\frac{n^{-5}}{1}\right)\left(\frac{p^4}{1}\right)\left(\frac{1}{r^{-2}}\right)$$ اكتب ناتج ضرب الكسور.

$$= \left(\frac{1}{n^5}\right)\left(\frac{p^4}{1}\right)\left(\frac{r^2}{1}\right)$$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ و $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$

$$= \frac{p^4r^2}{n^5}$$ اضرب.

b. $\dfrac{5r^{-3}t^4}{-20r^2t^7u^{-5}}$

$$\frac{5r^{-3}t^4}{-20r^2t^7u^{-5}} = \left(\frac{5}{-20}\right)\left(\frac{r^{-3}}{r^2}\right)\left(\frac{t^4}{t^7}\right)\left(\frac{1}{u^{-5}}\right)$$ قم بتجميع المقادير الأسية ذات الأساس نفسه.

$$= \left(-\frac{1}{4}\right)(r^{-3-2})(t^{4-7})(u^5)$$ ناتج قسمة الأسس وخاصية الأسس السالبة

$$= -\frac{1}{4}r^{-5}t^{-3}u^5$$ بسّط.

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{r^5}\right)\left(\frac{1}{t^3}\right)(u^5)$$ خاصية الأس السالب

$$= -\frac{u^5}{4r^5t^3}$$ اضرب.

c. $\dfrac{2a^2b^3c^{-5}}{10a^{-3}b^{-1}c^{-4}}$

$$\frac{2a^2b^3c^{-5}}{10a^{-3}b^{-1}c^{-4}} = \left(\frac{2}{10}\right)\left(\frac{a^2}{a^{-3}}\right)\left(\frac{b^3}{b^{-1}}\right)\left(\frac{c^{-5}}{c^{-4}}\right)$$ قم بتجميع المقادير الأسية ذات الأساس نفسه.

$$= \left(\frac{1}{5}\right)(a^{2-(-3)})(b^{3-(-1)})(c^{-5-(-4)})$$ ناتج قسمة الأسس وخاصية الأسس السالبة

$$= \frac{1}{5}a^5b^4c^{-1}$$ بسّط.

$$= \frac{1}{5}(a^5)(b^4)\left(\frac{1}{c}\right)$$ خاصية الأس السالب

$$= \frac{a^5b^4}{5c}$$ اضرب.

تمرين موجّه

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. افترض أنه لا يوجد مقام يساوي صفرًا.

4A. $\dfrac{v^{-3}wx^2}{wy^{-6}}$ **4B.** $\dfrac{32a^{-8}b^3c^{-4}}{4a^3b^5c^{-2}}$ **4C.** $\dfrac{5j^{-3}k^2m^{-6}}{25k^{-4}m^{-2}}$

نصيحة دراسية

الإشارات السالبة انتبه إلى مكان وضع الإشارة السالبة. $-5^{-1} = -\frac{1}{5}$. بينما $-5^1 \neq \frac{1}{5}$

الربط بالحياة اليومية

يبلغ وزن الإنسان البالغ 70 kg تقريبًا ويبلغ وزن البقرة الحلوب البالغة 700kg تقريبًا. يختلف وزنهما برتبة مقدار واحدة.

تستخدم رتبة المقدار لمقارنة المقاييس ولتقدير حسابات تقريبية وإجرائها. **رتبة المقدار** لكمية هي العدد مقربًا إلى أقرب قوة للعدد 10. على سبيل المثال القوة للعدد 10 الأقرب إلى 95,000,000,000 هي 10^{11} أو 100,000,000,000. إذًا فرتبة المقدار للعدد 95,000,000,000 هي 10^{11}.

الربط بالحياة اليومية

هناك أكثر من 14,000 نوع من النمل يعيش في جميع أنحاء العالم. يستطيع بعض النمل أن يحمل أشياء يبلغ وزنها 50 ضعف وزن النملة.

المصدر: رابطة ولاية ماين لحماية الحيوانات

مثال 5 من الحياة اليومية تطبيق خواص الأسس

الطول افترض أن متوسط طول رجل يبلغ 1.7 m تقريبًا ومتوسط طول نملة يبلغ 0.0008 m. كم عدد رتب مقدار الرجل بالنسبة إلى النملة؟

الفهم يجب أن نصل إلى رتبة مقدار طولي الرجل والنملة، ثم جد نسبة رتبة مقدار طول الرجل إلى رتبة مقدار طول النملة.

التخطيط قم بتقريب كلا الطولين إلى أقرب قوة للعدد عشرة، ثم جد نسبة طول الرجل إلى طول النملة.

جد حل متوسط طول الرجل يقترب من متر. إذًا فرتبة المقدار هي 10^0 m . يبلغ متوسط طول النملة 0.001 m تقريبًا. إذًا رتبة المقدار هي 10^{-3} m.

تبلغ نسبة طول الرجل إلى طول النملة حوالي $\frac{10^0}{10^{-3}}$.

$\frac{10^0}{10^{-3}} = 10^{0-(-3)}$ ناتج قسمة الأسس

$= 10^3$ $0-(-3) = 0+3 = 3$

$= 1000$ بسّط.

إذًا فطول الرجل يبلغ 1000 مرة مثل طول النملة تقريبًا، أو طول الرجل يبلغ 3 رتب مقدار طول النملة.

التحقق تبلغ نسبة طول الرجل إلى طول النملة $\frac{1.7}{0.0008} = 2125$. رتبة مقدار 2125 هي 10^3. ✓

تمرين موجّه

5. **علم الفلك** رتبة مقدار كتلة الكرة الأرضية حوالي 10^{27}. رتبة مقدار مجرة درب التبانة حوالي 10^{44}. كم عدد رتب مقدار حجم مجرة درب التبانة بالنسبة إلى الكرة الأرضية؟

التحقق من فهمك

الأمثلة 1-4 **حوّل كل تعبير لأبسط صورة. افترض أنه لا يوجد مقام يساوي صفرًا.**

1. $\frac{t^5u^4}{t^2u}$
2. $\frac{a^6b^4c^{10}}{a^3b^2c}$
3. $\frac{m^6r^5p^3}{m^5r^2p^3}$
4. $\frac{b^4c^6f^8}{b^4c^3f^5}$
5. $\frac{g^8h^2m}{hg^7}$
6. $\frac{r^4t^7v^2}{t^7v^2}$
7. $\frac{x^3y^2z^6}{z^5x^2y}$
8. $\frac{n^4q^4w^6}{q^2n^3w}$
9. $\left(\frac{2a^3b^5}{3}\right)^2$
10. $\frac{r^3v^{-2}}{t^{-7}}$
11. $\left(\frac{2c^3d^5}{5g^2}\right)^5$
12. $\left(-\frac{3xy^4z^2}{x^3yz^4}\right)^0$
13. $\left(\frac{3f^4gh^4}{32f^3g^4h}\right)^0$
14. $\frac{4r^2v^0t^5}{2rt^3}$
15. $\frac{f^{-3}g^2}{h^{-4}}$
16. $\frac{-8x^2y^8z^{-5}}{12x^4y^{-7}z^7}$
17. $\frac{2a^2b^{-7}c^{10}}{6a^{-3}b^2c^{-3}}$

مثال 5

18. **المعرفة المالية** الناتج المحلي الإجمالي (GDP) للولايات المتحدة في عام 2008 كان 52.199 تريليون دولار. وكان نصيب الفرد من الناتج المحلي الإجمالي 174,850 $. استخدم رتبة المقدار لتقدير العدد التقريبي لسكان الولايات المتحدة في عام 2008.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التمرين وحل المسائل

الأمثلة 1-4 **حوّل كل تعبير لأبسط صورة. افترض أنه لا يوجد مقام يساوي صفرًا.**

19. $\frac{m^4p^2}{m^2p}$

20. $\frac{p^{12}t^3r}{p^2tr}$

21. $\frac{3m^{-3}r^4p^2}{12t^4}$

22. $\frac{c^4d^4f^3}{c^2d^4f^3}$

23. $\left(\frac{3xy^4}{5z^2}\right)^2$

24. $\left(\frac{3t^6u^2v^5}{9tuv^{21}}\right)^0$

25. $\left(\frac{p^2t^7}{10}\right)^3$

26. $\frac{x^{-4}y^9}{z^{-2}}$

27. $\frac{a^7b^8c^8}{a^5bc^7}$

28. $\left(\frac{3np^3}{7q^2}\right)^2$

29. $\left(\frac{2r^3t^6}{5u^9}\right)^4$

30. $\left(\frac{3m^5r^3}{4p^8}\right)^4$

31. $\left(-\frac{5f^9g^4h^2}{fg^2h^3}\right)^0$

32. $\frac{p^{12}t^7r^2}{p^2t^7r}$

33. $\frac{p^4t^{-3}}{r^{-2}}$

34. $-\frac{5c^2d^5}{8cd^5f^0}$

35. $\frac{-2f^3g^2h^0}{8f^2g^2}$

36. $\frac{12m^{-4}p^2}{-15m^3p^{-9}}$

37. $\frac{k^4m^3p^2}{k^2m^2}$

38. $\frac{14f^{-3}g^2h^{-7}}{21k^3}$

39. $\frac{39t^4uv^{-2}}{13t^{-3}u^7}$

40. $\left(\frac{a^{-2}b^4c^5}{a^{-4}b^{-4}c^3}\right)^2$

41. $\frac{r^3t^{-1}x^{-5}}{tx^5}$

42. $\frac{g^0h^7j^{-2}}{g^{-5}h^0j^{-2}}$

مثال 5

43. **الإنترنت** في أحد الأعوام مؤخرًا، كان هناك تقريبًا 3.95 مليون مستضيف إنترنت. افترض أن هناك 208 مليون مستخدم للإنترنت. حدد رتبة مقدار مستضيفي الإنترنت ومستخدمي الإنترنت. باستخدام رتب المقدار، كم عدد مستخدمي الإنترنت المتواجدين بالمقارنة بمستضيفي الإنترنت؟

44. **الاحتمالات** عند القاء حجر نرد احتمال الحصول على عدد زوجي يساوي $\frac{1}{2}$. إذا تم القاء حجر النرد مرتين، فاحتمال الحصول على عدد زوجي في كلتا المرتين هو $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$ أو $\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

a. ما الذي تمثله $\left(\frac{1}{2}\right)^4$؟

b. اكتب تعبيرًا لتمثيل احتمال القاء حجر النرد d من المرات والحصول على عدد زوجي في كل مرة. اكتب التعبير في صورة قوة للعدد 2.

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. افترض أنه لا يوجد مقام يساوي صفرًا.

45. $\frac{-4w^{12}}{12w^3}$

46. $\frac{13r^7}{39r^4}$

47. $\frac{(4k^3m^2)^3}{(5k^2m^{-3})^{-2}}$

48. $\frac{3wy^{-2}}{(w^{-1}y)^3}$

49. $\frac{20qr^{-2}t^{-5}}{4q^0r^4t^{-2}}$

50. $\frac{-12c^3d^0f^{-2}}{6c^5d^{-3}f^4}$

51. $\frac{(2g^3h^{-2})^2}{(g^2h^0)^{-3}}$

52. $\frac{(5pr^{-2})^{-2}}{(3p^{-1}r)^3}$

53. $\left(\frac{-3x^{-6}y^{-1}z^{-2}}{6x^{-2}yz^{-5}}\right)^{-2}$

54. $\left(\frac{2a^{-2}b^4c^2}{-4a^{-2}b^{-5}c^{-7}}\right)^{-1}$

55. $\frac{(16x^2y^{-1})^0}{(4x^0y^{-4}z)^{-2}}$

56. $\left(\frac{4^0c^2d^3f}{2c^{-4}d^{-5}}\right)^{-3}$

57. **التبرير المنطقي** تبلغ سرعة المعالج في حاسوب مكتبي قديم 10^8 من الأوامر في الثانية تقريبًا. يستطيع الحاسوب الجديد معالجة 10^{10} من الأوامر في الثانية. كم ضعفًا تبلغ سرعة الحاسوب الجديد بالنسبة إلى الحاسوب القديم؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

58. **الفلك** يُقاس سطوع النجمة بالمقادير. كلما قل المقدار، زاد سطوع النجم. يصل سطوع نجم بالمقدار 9 إلى 2.51 ضعف سطوع نجم بالمقدار 10. يصل سطوع نجم بالمقدار 8 إلى 2.51×2.51 أو 2.51^2 ضعف سطوع نجم بالمقدار 10.

a. كم ضعفًا يبلغ سطوع نجم بالمقدار 3 بالمقارنة بنجم بالمقدار 10؟

b. اكتب تعبيرًا لمقارنة نجم بالمقدار m مع نجم بالمقدار 10.

c. يُعتبر القمر المكتمل بالمقدار -13 تقريبًا. هل يُعتبر تعبيرك منطقيًا مع هذا المقدار؟ اشرح.

59. **الاحتمالات** في تجربة القاء حجر نرد يكون احتمال الحصول على العدد 3 هو $\frac{1}{6}$. إذا تم القاء حجر النرد مرتين، فاحتمال الحصول على العدد 3 في كلتا المرتين هو $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$ أو $\left(\frac{1}{6}\right)^2$.

a. اكتب تعبيرًا لتمثيل احتمال إلقاء حجر النرد d من المرات والحصول على العدد 3 في كل مرة.

b. اكتب التعبير في صورة أس للعدد $\frac{1}{6}$.

60. **التمثيلات المتعددة** للتوصل إلى مساحة دائرة، استخدم $A = \pi r^2$. قانون مساحة المربع هو $A = s^2$.

a. **جبريًا** جـد نسبة مساحة الدائرة إلى مساحة المربع.

b. **جبريًا** إذا تضاعف نصف قطر الدائرة وطول كل ضلع في المربع، فجـد نسبة مساحة الدائرة إلى المربع.

c. **بالتمثيل الجدولي** انسخ الجدول وأكمله.

نصف القطر	مساحة الدائرة	مساحة المربع	النسبة
r			
$2r$			
$3r$			
$4r$			
$5r$			
$6r$			

d. **تحليليًا** ما النتيجة التي يمكن استخلاصها من هذا؟

مسائل مهارات التفكير العليا

61. **التبرير** هل $x^y \times x^z = x^{yz}$ صحيحة أحيانًا، أم دائمًا، أم لا تصح أبدًا؟ اشرح.

62. **المسألة غير محددة الإجابة** اذكر اسم أحاديتي الحد بناتج قسمة يبلغ $24a^2b^3$.

63. **التحدي** استخدم خاصية ناتج قسمة الأسس لشرح السبب في أن $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

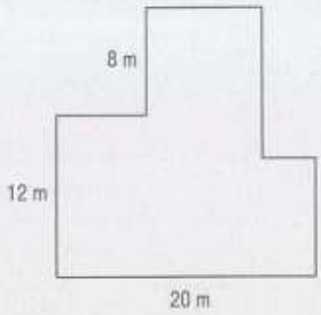
64. **الانتظام** اكتب فرضية مقنعة لإظهار السبب في أن $3^0 = 1$.

65. **الكتابة في الرياضيات** اشرح كيفية استخدام خاصية ناتج قسمة الأسس وخاصية رفع القوى لناتج قسمة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

66. ما محيط الشكل بالأمتار؟

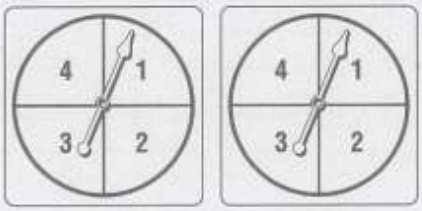


A 40m
B 80m
C 160m
D 400m

67. أثناء أبحاث وفاء في مشروعها العلمي، علمت أن الضوء يتحرك بسرعة ثابتة وأنه يستغرق 500 ثانية لكي يقطع 150 مليون كيلومتر من الشمس إلى كوكب الأرض. ويبعد كوكب المريخ بنحو 228 مليون كيلومتر عن الشمس. كم ثانية تقريبًا سيستغرقها الضوء لكي يقطع المسافة من الشمس إلى المريخ؟

F 235 ثانية
G 327 ثانية
H 642 ثانية
J 763 ثانية

68. الإجابة الموسعة تلعب هبام وهناء لعبة باستخدام المؤشرين الموجودين بالأسفل. يتساوى احتمال توقف كل مؤشر عند أي من الأعداد الأربعة. في اللعبة، يدير اللاعب كلا المؤشرين ويحسب ناتج ضرب العددين اللذين توقف عندهما المؤشرين.



a. ما ناتج الضرب الذي يحقق أعلى احتمال حدوث؟

b. ما احتمال حدوث ناتج الضرب ذلك؟

69. بسّط $(4^{-2} \times 5^{0} \times 64)^{3}$.

A $\frac{1}{64}$
B 64
C 320
D 1024

مراجعة شاملة

70. الهندسة يبلغ عرض منشور مستطيل $7x^3$ وحدة، ويبلغ الطول $4x^2$ وحدة، ويبلغ الارتفاع $3x$ وحدة. فما حجم المنشور؟ (الدرس 1-8)

حُـلّ كل من أنظمة المتباينات باستخدام التمثيل البياني.

71. $y \geq 1$
$x < -1$

72. $y \geq -3$
$y - x < 1$

73. $y < 3x + 2$
$y \geq -2x + 4$

74. $y - 2x < 2$
$y - 2x > 4$

حُـلّ المتباينة في كل مما يلي. وتحقق من صحة الحل.

75. $5(2h - 6) > 4h$

76. $22 \geq 4(b - 8) + 10$

77. $5(u - 8) \leq 3(u + 10)$

78. $8 + t \leq 3(t + 4) + 2$

79. $9n + 3(1 - 6n) \leq 21$

80. $-6(b + 5) > 3(b - 5)$

81. الدرجات في مادة العلوم في مدرسة ثانوية، تبلغ درجة الاختبار ثلاثة أمثال درجة الاختبار السريع. ما متوسط درجة الطالب؟

درجات العلوم

الاختبارات	الأسئلة السريعة
85	82
92	75
	95

مراجعة المهارات

جـد قيمة كل تعبير.

82. 9^2

83. 11^2

84. 10^6

85. 10^4

86. 3^5

87. 5^3

88. 12^3

89. 4^6

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

8-3 الأسس النسبية

السابق
- استخدمت قوانين الأسس للتوصل إلى نواتج ضرب وقسمة الدوال أحادية الحد.

الحالي
1. إيجاد قيمة التعابير التي تتضمن أسسًا نسبية وإعادة كتابتها.
2. إيجاد حل المعادلات التي تتضمن تعابير بأسس نسبية.

لماذا؟
- من المهم أن تحمي بشرتك بكريم واقٍ من الشمس لمنع تضررها. يوضح عامل الحماية من الشمس (SPF) في الكريم الواقي مدى جودة حمايته لك. يمتص الكريم الواقي بعامل الحماية f حوالي p في المائة من الأشعة فوق البنفسجية UV-B، حيث $p = 50f^{0.2}$.

المفردات الجديدة
- **الأس النسبي** rational exponent
- **الجذر التكعيبي** cube root
- **الجذر النوني** n^{th} root
- **المعادلة الأسية** exponential equation

ممارسات في الرياضيات
استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

1 الأسس النسبية

أنت تعلم أن الأس يمثل عدد مرات استخدام الأساس كعامل. لكن كيف تتوصل إلى قيمة تعبير بأس ليس عددًا صحيحًا مثل الموجود بالأعلى؟ هيا نستكشف **الأسس النسبية** بافتراض أنها تُعامل معاملة أسس الأعداد الصحيحة.

$\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = b^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{2}}$ اكتب على شكل تعبير ضربي.

$= b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$ ناتج ضرب الأسس

$= b^1 = b$ بسّط.

ولهذا، $b^{\frac{1}{2}}$ تربيع يساوي b. إذًا $b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b}$.

المفهوم الأساسي $b^{\frac{1}{2}}$

الشرح	لأي عدد حقيقي غير سالب، $b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b}$. بساوي b.
أمثلة	$38^{\frac{1}{2}} = \sqrt{38}$ $\quad$ $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16}$ أو 4

مثال 1 الصيغ الجذرية والأسية

اكتب كل تعبير في صيغة جذرية، أو اكتب كل جذر في صيغة أسية.

a. $25^{\frac{1}{2}}$

$25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25}$ تعريف $b^{\frac{1}{2}}$

$= 5$ بسّط.

b. $\sqrt{18}$

$\sqrt{18} = 18^{\frac{1}{2}}$ تعريف $b^{\frac{1}{2}}$

c. $5x^{\frac{1}{2}}$

$5x^{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{x}$ تعريف $b^{\frac{1}{2}}$

d. $\sqrt{8p}$

$\sqrt{8p} = (8p)^{\frac{1}{2}}$ تعريف $b^{\frac{1}{2}}$

تمرين موجّه

1A. $a^{\frac{1}{2}}$ **1B.** $\sqrt{22}$ **1C.** $(7w)^{\frac{1}{2}}$ **1D.** $2\sqrt{x}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تَعلم أنه للتوصل إلى الجذر التربيعي للعدد a عليك إيجاد عدد مربعه يساوي a. وبنفس الطريقة، يمكنك التوصل إلى الجذور الأخرى للأعداد. إذا كان $a^3 = b$، فإن a هي **الجذر التكعيبي** للعدد b. وإذا كانت $a^n = b$ للعدد الصحيح الموجب n، فإن a تمثل **الجذر النوني n** للعدد b.

المفهوم الأساسي الجذر النوني n

الشرح لأي عددين حقيقيين a و b ولأي عدد صحيح موجب n، إذا كانت $a^n = b$، فإن a هو الجذر النوني n لـ b.

الرموز إذا كان $a^n = b$، فإن $\sqrt[n]{b} = a$.

مثال بما أن $16 = 2^4$، فإن 2 الجذر الرابع للعدد 16، $\sqrt[4]{16} = 2$.

نصيحة دراسية

الأدوات يمكنك استخدام حاسبة بيانية لإيجاد الجذور النونية n. أدخل n، ثم اضغط على MATH واختر $\sqrt[n]{16}$.

بما أن $3^2 = 9$ و $(-3)^2 = 9$، فإن كلاً من 3 و -3 جذران مربعان للعدد 9. وبالمثل، بما أن $2^4 = 16$ و $(-2)^4 = 16$، فإن كلاً من 2 و -2 هما الجذران الرابعان للعدد 16. يُسمى الجذران الموجبان جذرين *أساسيين*. وضح رمز الجذر الجذور الأساسية. ولذلك $\sqrt[4]{16} = 2$.

مثال 2 الجذور النونية n

بسّط.

a. $\sqrt[3]{27}$

$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3 \times 3 \times 3}$

$= 3$

b. $\sqrt[5]{32}$

$\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}$

$= 2$

تمرين موجّه

2A. $\sqrt[3]{64}$

2B. $\sqrt[4]{10{,}000}$

مثل الجذور التربيعية، يمكن تمثيل الجذور النونية n بالأسس النسبية.

$\left(b^{\frac{1}{n}}\right)^n = \underbrace{b^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}} \times \ldots \times b^{\frac{1}{n}}}$ اكتب في صورة تعبير ضربي.

$= b^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}$ ناتج ضرب الأسس

$= b^1 = b$ بسّط.

ولهذا، $b^{\frac{1}{n}}$ حيث القوة النونية n تساوي b. ولذلك فإن $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$.

المفهوم الأساسي $b^{\frac{1}{n}}$

الشرح لأي عدد حقيقي موجب b ولأي عدد صحيح $n > 1$، $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$.

مثال $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2 \times 2 \times 2}$ أو 2

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 إيجاد قيمة التعابير $b^{\frac{1}{n}}$

بسّط.

a. $125^{\frac{1}{3}}$

$125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125}$ $\quad b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$

$= \sqrt[3]{5 \times 5 \times 5}$ $\quad 125 = 5^3$

$= 5$ $\quad$ بسّط.

b. $1296^{\frac{1}{4}}$

$1296^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{1296}$ $\quad b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$

$= \sqrt[4]{6 \times 6 \times 6 \times 6}$ $\quad 1296 = 6^4$

$= 6$ $\quad$ بسّط.

تمرين موجّه

3A. $27^{\frac{1}{3}}$

3B. $256^{\frac{1}{4}}$

نصيحة دراسية

الأسس النسبية على حاسبة

استخدم أقواسًا لإيجاد قيم التعابير التي تتضمن أسسًا نسبية على حاسبة تمثيل بياني. بالنسبة إلى مثال لإيجاد قيمة $125^{\frac{1}{3}}$، اضغط على

(1 ÷ 3) ^ 125 ENTER

نسمح لنا خاصية رفع القوى بتوسيع تعريف $b^{\frac{1}{n}}$ إلى $b^{\frac{m}{n}}$.

$b^{\frac{m}{n}} = \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^m$ $\quad$ رفع القوى

$= \left(\sqrt[n]{b}\right)^m = \sqrt[n]{b^m}$ $\quad b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$

المفهوم الأساسي $b^{\frac{m}{n}}$

الشرح لأي عدد حقيقي موجب b ولأي عددين صحيحين m و $n > 1$.

$$b^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{b}\right)^m = \sqrt[n]{b^m}$$

مثال $8^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2$ أو 4

مثال 4 إيجاد قيمة التعابير $b^{\frac{m}{n}}$

بسّط.

a. $64^{\frac{2}{3}}$

$64^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{64}\right)^2$ $\quad b^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{b}\right)^m$

$= \left(\sqrt[3]{4 \times 4 \times 4}\right)^2$ $\quad 64 = 4^3$

$= 4^2 = 16$ $\quad$ بسّط.

b. $36^{\frac{3}{2}}$

$36^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt[2]{36}\right)^3$ $\quad b^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{b}\right)^m$

$= 6^3$ $\quad \sqrt{36} = 6$

$= 216$ $\quad$ بسّط.

تمرين موجّه

4A. $27^{\frac{2}{3}}$

4B. $256^{\frac{5}{4}}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 إيجاد حل المعادلات الأسيّة

في **المعادلة الأسيّة**، تأتي المتغيرات على شكل أسس. يمكن استخدام خاصية المساواة في الأسس وخواص الأسس الأخرى في حل المعادلات الأسيّة.

المفهوم الأساسي خاصية المساواة في الأسس

الشرح لأي عدد حقيقي $b > 0$ و $b \neq 1$، $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

أمثلة إذا كانت $5^x = 5^3$، فإن $x = 3$. إذا كانت $n = \frac{1}{2}$، فإن $4^n = 4^{\frac{1}{2}}$.

مثال 5 حل المعادلات الأسيّة

حُـلّ كل من المعادلات الأسيّة الآتية.

a. $6^x = 216$

$6^x = 216$ المعادلة الأصلية

$6^x = 6^3$ أعد كتابة 216 في شكل 6^3.

$x = 3$ خاصية المساواة

تحقق $6^x = 216$

$6^3 \stackrel{?}{=} 216$

$216 = 216$ ✓

b. $25^{x-1} = 5$

$25^{x-1} = 5$ المعادلة الأصلية

$(5^2)^{x-1} = 5$ أعد كتابة 25 في شكل 5^2.

$5^{2x-2} = 5^1$ رفع القوى، خاصية التوزيع

$2x - 2 = 1$ خاصية المساواة

$2x = 3$ اجمع 2 على كل طرف.

$x = \frac{3}{2}$ اقسم كل طرف على 2.

تحقق $25^{x-1} = 5$

$25^{\frac{3}{2}-1} \stackrel{?}{=} 5$

$25^{\frac{1}{2}} = 5$ ✓

تمرين موجّه

5A. $5^x = 125$

5B. $12^{2x+3} = 144$

مثال 6 من الحياة اليومية حل المعادلات الأسيّة

كريم الوقاية من الشمس راجع بداية الدرس. جـد معامل الحماية من الشمس الذي يمتص 100% من الأشعة فوق البنفسجية UV-B.

$p = 50f^{0.2}$ المعادلة الأصلية

$100 = 50f^{0.2}$ $p = 100$

$2 = f^{0.2}$ اقسم كل طرف على 50.

$2 = f^{\frac{1}{5}}$ $0.2 = \frac{1}{5}$

$(2^5)^{\frac{1}{5}} = f^{\frac{1}{5}}$ $2 = 2^1 = (2^5)^{\frac{1}{5}}$

$2^5 = f$ خاصية المساواة في الأسس

$32 = f$ بسّط.

تمرين موجّه

6. الكيمياء نصف القطر r لنواة ذرة بالعدد الكتلي A هو $r = 1.2A^{\frac{1}{3}}$ فمتومتر. جـد قيمة A إذا كانت $r = 3.6$ فمتومتر.

الربط بالحياة اليومية

كن شديد الحرص عند وجودك بالقرب من الثلج والماء والرمل لأنها تعكس أشعة الشمس الضارة مما يمكن أن يرفع احتمال إصابتك بحرق شمسي.

المصدر: الأكاديمية الأمريكية لأمراض الجلد

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

مثال 1 **اكتب كل تعبير في صيغة جذرية، أو اكتب كل جذر في صيغة أسيّة.**

1. $12^{\frac{1}{2}}$
2. $3x^{\frac{1}{2}}$
3. $\sqrt{33}$
4. $\sqrt{8n}$

الأمثلة 2-4 **بسّط.**

5. $\sqrt[3]{512}$
6. $\sqrt[5]{243}$
7. $343^{\frac{1}{3}}$
8. $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}$
9. $343^{\frac{2}{3}}$
10. $81^{\frac{3}{4}}$
11. $216^{\frac{4}{3}}$
12. $\left(\frac{1}{49}\right)^{\frac{3}{2}}$

مثال 5 **حُلّ كلًا من المعادلات الأسيّة الآتية.**

13. $8^x = 4096$
14. $3^{3x+1} = 81$
15. $4^{x-3} = 32$

مثال 6

16. **الأدوات** يُستخدم السباج لقياس تدفق الماء في قناة. بالنسبة لسباج عريض مستطيل له غطاء علوي، يرتبط التدفق Q بالمتر المكعب في الثانية بطول السباج L بالأمتار والارتفاع H للماء بـ $Q = 1.6LH^{\frac{3}{2}}$. جد ارتفاع الماء على سباج يبلغ طوله 3 m وتدفقه 38.4 m^3/sec

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **اكتب كل تعبير في صيغة جذرية، أو اكتب كل جذر في صيغة أسيّة.**

17. $15^{\frac{1}{2}}$
18. $24^{\frac{1}{2}}$
19. $4k^{\frac{1}{2}}$
20. $(12y)^{\frac{1}{2}}$
21. $\sqrt{26}$
22. $\sqrt{44}$
23. $2\sqrt{ab}$
24. $\sqrt{3xyz}$

الأمثلة 2-4 **بسّط.**

25. $\sqrt[3]{8}$
26. $\sqrt[5]{1024}$
27. $\sqrt[3]{216}$
28. $\sqrt[4]{10{,}000}$
29. $\sqrt[3]{0.001}$
30. $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$
31. $1331^{\frac{1}{3}}$
32. $64^{\frac{1}{6}}$
33. $3375^{\frac{1}{3}}$
34. $512^{\frac{1}{9}}$
35. $\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$
36. $\left(\frac{3125}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$
37. $8^{\frac{2}{3}}$
38. $625^{\frac{3}{4}}$
39. $729^{\frac{5}{6}}$
40. $256^{\frac{3}{8}}$
41. $125^{\frac{4}{3}}$
42. $49^{\frac{5}{2}}$
43. $\left(\frac{9}{100}\right)^{\frac{3}{2}}$
44. $\left(\frac{8}{125}\right)^{\frac{4}{3}}$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

حُـلّ كل من المعادلات الأسيّة الآتية.

45. $3^x = 243$
46. $12^x = 144$
47. $16^x = 4$
48. $27^x = 3$
49. $9^x = 27$
50. $32^x = 4$
51. $2^{x-1} = 128$
52. $4^{2x+1} = 1024$
53. $6^{x-4} = 1296$
54. $9^{2x+3} = 2187$
55. $4^{3x} = 512$
56. $128^{3x} = 8$

مثال 6

57. **ترشيد الاستهلاك** يمكن استخدام الماء المتجمع في مجرى مطر لري النباتات والحد من استخدام ماء المدينة. الماء المتدفق من مجرى مطر مفتوح سرعته $v = 8h^{\frac{1}{2}}$، حيث v هي عدد الأمتار في الثانية و h هي ارتفاع الماء بالأمتار. جـد ارتفاع الماء إذا كان يتدفق بسرعة 8 m/sec

58. **الكهرباء** نصف القطر r بالمليمتر لسلك بلاتيني طوله L cm بمقاومة تبلغ 0.1 أوم هو $r = 0.059L^{\frac{1}{2}}$. كم يبلغ طول السلك بنصف القطر 0.236 mm ؟

اكتب كل تعبير في صيغة جذرية، أو اكتب كل جذر في صيغة أسيّة.

59. $17^{\frac{1}{3}}$
60. $q^{\frac{1}{4}}$
61. $7b^{\frac{1}{3}}$
62. $m^{\frac{2}{3}}$
63. $\sqrt[3]{29}$
64. $\sqrt[5]{h}$
65. $2\sqrt[3]{a}$
66. $\sqrt[3]{xy^2}$

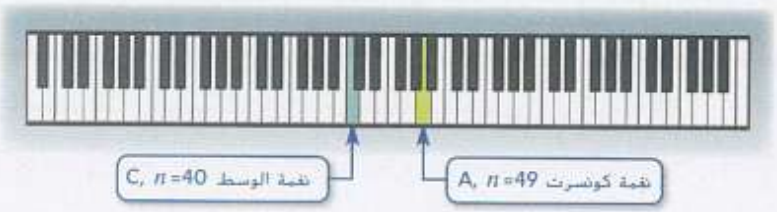
بـسّط.

67. $\sqrt[3]{0.027}$
68. $\sqrt[4]{\frac{n^4}{16}}$
69. $a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{2}{3}}$
70. $c^{\frac{1}{2}} \times c^{\frac{3}{2}}$
71. $(8^2)^{\frac{2}{3}}$
72. $\left(y^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}$
73. $9^{-\frac{1}{2}}$
74. $16^{-\frac{3}{2}}$
75. $(3^2)^{-\frac{3}{2}}$
76. $\left(81^{\frac{1}{4}}\right)^{-2}$
77. $k^{-\frac{1}{2}}$
78. $\left(d^{\frac{4}{3}}\right)^0$

حُـلّ كل من المعادلات الأسيّة الآتية.

79. $2^{5x} = 8^{2x-4}$
80. $81^{2x-3} = 9^{x+3}$
81. $2^{4x} = 32^{x+1}$
82. $16^x = \frac{1}{2}$
83. $25^x = \frac{1}{125}$
84. $6^{8-x} = \frac{1}{216}$

85. **استخدام النماذج** التردد f بالهرتز للمفتاح رقم n في بيانو هو $f = 440\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{n-49}$.



a. ما تردد النغمة كونسرت A؟

b. ما النغمة التي يبلغ ترددها 220 Hz؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

86. **مسارات عشوائية** افترض أنك ذهبت للتنزه حيث اخترت اتجاه كل خطوة بشكل عشوائي. مسار الجزيء في سائل أو غاز ومسار الحيوان المتجول وسعر السهم المتقلب كلهم يتم تمثيلهم كمسارات عشوائية. العدد المحتمل للمسارات العشوائية w المكونة من n خطوات حيث تختار واحدًا من d اتجاهات في كل خطوة هو $w = d^n$.

a. كم عدد الخطوات التي اتخذتها في مسار عشوائي من اتجاهين إذا كان هناك 4096 مسارًا محتملاً؟

b. كم عدد الخطوات التي اتخذتها في مسار عشوائي من 4 اتجاهات إذا كان هناك 65,536 مسارًا محتملاً؟

c. إذا كان هناك مسار من 7 خطوات له 2187 مسارًا محتملاً. فكم عدد الاتجاهات التي يمكن اتخاذها في كل خطوة؟

87 **كرة القدم** نصف القطر r لكرة تحمل V وحدة مكعبة من الهواء يمثلها $r = 0.62V^{\frac{1}{3}}$. ما الأحجام المحتملة لكل مقاس من كرة القدم؟

أبعاد كرة القدم	
المقاس	القطر (cm)
3	18.5–19.5
4	20.5–21
5	22–23

88. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستستكشف تمثيل الدالة الأسية بيانيًا.

a. **جدوليًا** انسخ الجدول التالي وأكمله.

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x) = 4^x$									

b. **بيانيًا** الرسم البياني $f(x)$ بوضع النقاط وتوصيلها بمنحنى أملس.

c. **لفظيًا** صف شكل الرسم البياني لـ $f(x)$. ما سماته الرئيسية؟ هل هو خطي؟

مسائل مهارات التفكير العليا

89. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب تعبيرين مختلفين بأسس نسبية يساويان $\sqrt{2}$.

90. **الفرضيات** حدد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة *دائمًا* أو *أحيانًا* أو *لا تصح أبدًا*. افترض أن x عدد حقيقي غير سالب. اشرح استنتاجك.

a. $x^2 = x^{\frac{1}{2}}$

b. $x^{-2} = x^{\frac{1}{2}}$

c. $x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{2}}$

d. $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

e. $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x$

f. $x^{\frac{1}{2}} \times x^2 = x$

91. **التحدي** لأي قيم x تكون $x = x^{\frac{1}{3}}$؟

92. **تحليل الخطأ** يحل جاسم وجمال المسألة $128^x = 4$. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

جاسم

$128^x = 4$

$(2^7)^x = 2^2$

$2^{7x} = 2^2$

$7x = 2$

$x = \frac{2}{7}$

جمال

$128^x = 4$

$(2^7)^x = 4$

$2^{7x} = 4^1$

$7x = 1$

$x = \frac{1}{7}$

93. **الكتابة في الرياضيات** اشرح السبب في أن 2 هي الجذر الأساسي الرابع للعدد 16.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

94. ما قيمة $16^{\frac{3}{4}} + 9^{\frac{3}{2}}$؟

A 5
B 11
C 25
D 35

95. في دار عرض أفلام، تظهر تكاليف عدة أنواع من الفشار والشطائر.

الشطائر	أكياس الفشار	التكلفة الإجمالية
1	1	AED 8.50
2	4	AED 21.60

فأي زوجين من المعادلات يمكن استخدامهما في إيجاد p وهو تكلفة علبة الفشار، وإيجاد h وهو تكلفة الشطيرة؟

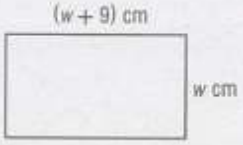
F $p + h = 8.5$
$p + 2h = 10.8$

G $p + h = 8.5$
$2h + 4p = 21.6$

H $p + h = 8.5$
$2p + 4h = 21.6$

J $p + h = 8.5$
$2p + 2h = 21.6$

96. إجابة قصيرة جد أبعاد المستطيل إذا كان محيطه يبلغ 52 cm.



97. إذا كانت $3^4 = 9^x$، فإن $x =$

A 1
B 2
C 4
D 5

مراجعة شاملة

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. افترض أنه لا يوجد مقام يساوي صفرًا. (الدرس 2-8)

98. $\frac{a^3b^5}{ab^3}$

99. $\frac{c^8d^{11}}{c^4d^5}$

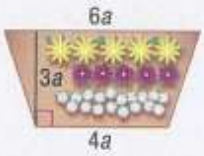
100. $\frac{4x^3y^3z^6}{xyz^5}$

101. $\frac{a^5b^3c}{a^5bc}$

102. $\left(\frac{3m^4}{4p^2}\right)^2$

103. $\left(\frac{3df^2}{9d^2f}\right)^0$

104. البستنة يزرع سالم حديقة زهور على شكل شبه منحرف كما يظهر على اليسار. استخدم الصيغة $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$ لإيجاد مساحة الحديقة. (الدرس 1-8)



اكتب كل معادلة بصيغة الميل والمقطع.

105. $y - 2 = 3(x - 1)$

106. $y - 5 = 6(x + 1)$

107. $y + 2 = -2(x + 5)$

108. $y + 3 = \frac{1}{2}(x + 4)$

109. $y - 1 = \frac{2}{3}(x + 9)$

110. $y + 3 = -\frac{1}{4}(x + 2)$

التحقق من المهارات

جد قيمة كل مما يلي:

111. 10^3

112. 10^5

113. 10^{-1}

114. 10^{-4}

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

8-4 الترميز العلمي

السابق	الحالي	لماذا؟
• استخدمت قوانين الأسس للتوصل إلى نواتج ضرب وقسمة الدوال أحادية الحد.	1 التعبير عن الأعداد بالترميز العلمي. 2 إيجاد نواتج الضرب والقسمة للأعداد التي تم التعبير عنها بالترميز العلمي.	• سياحة الفضاء صناعة تبلغ قيمتها عدة مليارات من الدولارات. مقابل 73 AED مليون، يستطيع الشخص المدني السفر على متن صاروخ أو مكوك وزيارة المحطة الفضائية الدولية (ISS) لمدة أسبوع.

المفردات الجديدة

الترميز العلمي
scientific notation

ممارسات في الرياضيات

بناء فرضيات عملية والتعليق على طريقة استنتاج الآخرين.
مراعاة الدقة.

1 الترميز العلمي يمكن أن تكون الأعداد الكبيرة جدًا والصغيرة جدًا مثل 73 مليون درهم مرهقة عند استخدامها في الحسابات. ولهذا السبب، غالبًا ما يتم التعبير عن الأعداد بالترميز العلمي. العدد المكتوب **بالترميز العلمي** يكون بالصيغة $a \times 10^n$، حيث $1 \le a < 10$ و n عدد صحيح.

المفهوم الأساسي الصيغة القياسية للترميز العلمي

الخطوة 1 انقل النقطة العشرية/ الفاصلة العشرية إلى أن تكون إلى يمين أول عدد صحيح غير الصفر. وليكن العدد الصحيح a.

الخطوة 2 لاحظ عدد المنازل n التي تحركتها واتجاه الحركة للنقطة/للفاصلة العشرية.

الخطوة 3 إذا تحركت النقطة/الفاصلة العشرية لليسار، فاكتب العدد بالصيغة $a \times 10^n$.
إذا تحركت النقطة/الفاصلة العشرية لليمين، فاكتب العدد بالصيغة $a \times 10^{-n}$.

الخطوة 4 أزل الأصفار غير الضرورية.

مثال 1 الصيغة القياسية للترميز العلمي

عبّر عن كل عدد بالترميز العلمي.

a. 201,000,000

الخطوة 1 201,000,000 ← 2.01000000 $a = 2.01000000$

الخطوة 2 تحركت النقطة/الفاصلة العشرية 8 منازل إلى اليسار. إذًا $n = 8$.

الخطوة 3 $201{,}000{,}000 = 2.01000000 \times 10^8$

الخطوة 4 2.01×10^8

b. 0.000051

الخطوة 1 0.000051 ← 00005.1 $a = 00005.1$

الخطوة 2 تحركت النقطة/الفاصلة العشرية 5 منازل إلى اليمين. إذًا $n = 5$.

الخطوة 3 $0.000051 = 00005.1 \times 10^{-5}$

الخطوة 4 5.1×10^{-5}

تمرين موجّه

1A. 68,700,000,000

1B. 0.0000725

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكنك أيضًا إعادة كتابة الأعداد بالترميز العلمي بصيغة قياسية.

المفهوم الرئيسي الترميز العلمي بالصيغة القياسية

الخطوة 1 في العدد $a \times 10^n$. لاحظ ما إذا كانت $n > 0$ أم $n < 0$.

الخطوة 2 إذا كانت $n > 0$، فانقل النقطة/الفاصلة العشرية n من المنازل إلى اليمين.
إذا كانت $n < 0$، فانقل النقطة/الفاصلة العشرية n من المنازل إلى اليسار.

الخطوة 3 أدخل الأصفار والنقطة/الفاصلة العشرية وفواصل التجميع حسب الحاجة للقيمة المكانية.

انتبه!

الإشارات السالبة انتبه إلى مكان الإشارات السالبة. تعني الإشارة السالبة في الأس أن العدد يتراوح بين 0 و 1. تعني الإشارة السالبة قبل العدد أنه أقل من الصفر.

مثال 2 الترميز العلمي بالصيغة القياسية

عبّر عن كل عدد بالصيغة القياسية.

a. 6.32×10^9

الخطوة 1 الأس هو 9. إذًا $n = 9$.

الخطوة 2 بما أن $n > 0$، فانقل النقطة/الفاصلة العشرية 9 منازل إلى اليمين.

$6.32 \times 10^9 \leftarrow 6320000000$

الخطوة 3 $6.32 \times 10^9 = 6{,}320{,}000{,}000$ أعد الكتابة: أدخل الفواصل.

b. 4×10^{-7}

الخطوة 1 الأس هو -7. ولذلك $n = -7$.

الخطوة 2 بما أن $n < 0$، فانقل النقطة/الفاصلة العشرية 7 منازل إلى اليسار.

$4 \times 10^{-7} \rightarrow 0000004$

الخطوة 3 $4 \times 10^{-7} = 0.0000004$ أعد الكتابة: أدخل 0 على يسار النقطة/الفاصلة العشرية.

تمرين موجّه

2A. 3.201×10^6 **2B.** 9.03×10^{-5}

2 ناتج الضرب والقسمة بالترميز العلمي

يمكنك استخدام الترميز العلمي لتبسيط ضرب وقسمة الأعداد الكبيرة جدًا والصغيرة جدًا.

مثال 3 ضرب الأعداد المكتوبة بالترميز العلمي

جد قيمة $(7 \times 10^5)(3.5 \times 10^{-3})$. عبّر عن النتيجة بكل من الترميز العلمي والصيغة القياسية.

$(3.5 \times 10^{-3})(7 \times 10^5)$ التعبير الأصلي

$= (3.5 \times 7)(10^{-3} \times 10^5)$ خاصيتا التبديل والتجميع

$= 24.5 \times 10^2$ ناتج ضرب الأسس

$= (2.45 \times 10^1) \times 10^2$ $24.5 = 2.45 \times 10$

$= 2.45 \times 10^3$ أو 2450 ناتج ضرب الأسس

نصيحة في حل المسائل

الأدوات يمكن أن يساعدك وضع تقدير للإجابة قبل حساب الحل في تحديد ما إذا كانت إجابتك منطقية.

تمرين موجّه

جد قيمة كل ناتج ضرب. عبّر عن النتائج بكل من الترميز العلمي والصيغة القياسية.

3A. $(6.5 \times 10^{12})(8.7 \times 10^{-15})$ **3B.** $(7.8 \times 10^{-4})^2$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 4 قسمة الأعداد المكتوبة بالترميز العلمي

جـد قيمة $\frac{3.066 \times 10^8}{7.3 \times 10^3}$. عبّر عن النتيجة بكل من الترميز العلمي والصيغة القياسية.

$$\frac{3.066 \times 10^8}{7.3 \times 10^3} = \left(\frac{3.066}{7.3}\right)\left(\frac{10^8}{10^3}\right) \quad \text{قاعدة ناتج الضرب للكسور}$$

$$= 0.42 \times 10^5 \quad \text{ناتج قسمة الأسس}$$

$$= 4.2 \times 10^{-1} \times 10^5 \quad 0.42 = 4.2 \times 10^{-1}$$

$$= 4.2 \times 10^4 \quad \text{ناتج ضرب الأسس}$$

$$= 42{,}000 \quad \text{الصيغة القياسية}$$

نصيحة دراسية

ناتج قسمة القوى الأسية تذكّر أن خاصية ناتج قسمة الأسس لا تنطبق إلا على الأسس التي لها الأساس نفسه. بما أن 10^8 و10^3 لهما الأساس نفسه، يمكن تطبيق الخاصية.

تمرين موجّه

جـد قيمة كل ناتج قسمة. عبّر عن النتائج بكل من الترميز العلمي والصيغة القياسية.

4A. $\frac{2.3958 \times 10^3}{1.98 \times 10^8}$

4B. $\frac{1.305 \times 10^3}{1.45 \times 10^{-4}}$

مثال 5 من الحياة اليومية استخدام الترميز العلمي

الموسيقى في الولايات المتحدة، **يحصل** القرص المضغوط **على التقييم** عند بيع **500** ألف نسخة. يصل القرص المضغوط إلى **التقييم البلاتيني** عند بيع مليون نسخة أو أكثر.

a. عبّر عن عدد نسخ الأقراص المضغوطة المطلوب بيعها للحصول على كل تقييم بالترميز المعياري.

التقييم الذهبي: 500 ألف = 500,000؛ التقييم البلاتيني: مليون = 1,000,000

b. اكتب كل عدد بالترميز العلمي.

التقييم الذهبي: $5 \times 10^5 = 500{,}000$؛ التقييم البلاتيني: $1 \times 10^6 = 1{,}000{,}000$

c. كم عدد نسخ القرص المضغوط التي بيعت إذا كان قد حصل على التقييم البلاتيني 13 مرة؟ اكتب إجابتك بالترميز العلمي والصيغة القياسية.

يحصل القرص المضغوط على التقييم البلاتيني بمجرد أن يبيع مليون نسخة. بما أن القرص المضغوط قد حصل على التقييم البلاتيني 13 مرة، فنحن بحاجة إلى الضرب في العدد 13.

$$(13)(1 \times 10^6) \quad \text{التعبير الأصلي}$$

$$= (13 \times 1)(10^6) \quad \text{خاصية التجميع}$$

$$= 13 \times 10^6 \quad 13 \times 1 = 13$$

$$= (1.3 \times 10^1) \times 10^6 \quad 13 = 1.3 \times 10$$

$$= 1.3 \times 10^7 \quad \text{ناتج ضرب الأسس}$$

$$= 13{,}000{,}000 \quad \text{الصيغة القياسية}$$

تمرين موجّه

5. **لاسلكي القمر الصناعي** افترض أن شركة لأجهزة اللاسلكي التي تعمل عبر الأقمار الصناعية حققت ربحًا يبلغ AED 125.4 مليون في عام واحد.

A. اكتب هذا العدد بالصيغة القياسية.

B. اكتب هذا العدد بالترميز العلمي.

C. إذا حققت الشركة في العام التالي 2.5 ضعف مبلغ ربح العام السابق، فحدد مبلغ الربح. اكتب إجابتك بالترميز العلمي والصيغة القياسية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

مثال 1 **عبّر عن كل عدد بالترميز العلمي.**

1. 185,000,000
2. 1,902,500,000
3. 0.000564
4. 0.00000804

المال عبّر عن كل عدد بالترميز العلمي.

5. ينفق المراهقون AED 13 مليارًا سنويًا على الملابس.
6. يؤثر المراهقون على عادات الإنفاق في أسرهم. يتحكمون في AED 1.5 مليار تقريبًا من الدخل التقديري.

مثال 2 **عبّر عن كل عدد بالصيغة القياسية.**

7. 1.98×10^{7}
8. 4.052×10^{6}
9. 3.405×10^{-8}
10. 6.8×10^{-5}

مثال 3 **جد قيمة كل ناتج ضرب. عبّر عن النتائج بكل من الترميز العلمي والصيغة القياسية.**

11. $(1.2 \times 10^{3})(1.45 \times 10^{12})$
12. $(7.08 \times 10^{14})(5 \times 10^{-9})$
13. $(5.18 \times 10^{2})(9.1 \times 10^{-5})$
14. $(2.18 \times 10^{-2})^{2}$

مثال 4 **جد قيمة كل ناتج قسمة. عبّر عن النتائج بكل من الترميز العلمي والصيغة القياسية.**

15. $\frac{1.035 \times 10^{8}}{2.3 \times 10^{4}}$
16. $\frac{2.542 \times 10^{5}}{4.1 \times 10^{-10}}$
17. $\frac{1.445 \times 10^{-7}}{1.7 \times 10^{5}}$
18. $\frac{2.05 \times 10^{-8}}{4 \times 10^{-2}}$

مثال 5

19. **الضبط** اشترى زايد جهاز تنقية هواء ليساعده على التعامل مع الحساسية التي يعاني منها. سيعمل المرشح في جهاز التنقية على وقف الجسيمات الصغيرة حتى واحد على مئة من الميكرون. ويبلغ حجم الميكرون واحد على مليون من المليمتر.
   a. اكتب الواحد على المائة وحجم الميكرون الواحد بالصيغة القياسية.
   b. اكتب الواحد على المائة وحجم الميكرون الواحد بالترميز العلمي.
   c. ما أصغر حجم لجسيم سيوقفه المرشح بالمتر؟ اكتب النتيجة بكل من الصيغة القياسية والترميز العلمي.

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **عبّر عن كل عدد بالترميز العلمي.**

20. 1,220,000
21. 58,600,000
22. 1,405,000,000,000
23. 0.0000013
24. 0.000056
25. 0.000000000709

البريد الإلكتروني عبّر عن كل عدد بالترميز العلمي.

26. توضع 100 مليون رسالة بريد إلكتروني تقريبًا يتم إرسالها إلى الرئيس في الأرشيفات الوطنية.
27. بحلول عام 2015 سيحقق سوق أمن البريد الإلكتروني AED 6.5 مليارات.

مثال 2 **عبّر عن كل عدد بالصيغة القياسية.**

28. 1×10^{12}
29. 9.4×10^{7}
30. 8.1×10^{-3}
31. 5×10^{-4}
32. 8.73×10^{11}
33. 6.22×10^{-6}

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 2 **الإنترنت عبّر عن كل عدد بالصيغة القياسية.**

34. حوالي 2.1×10^7 شخص تتراوح أعمارهم بين 12 و17 عامًا يستخدمون الإنترنت.

35. حوالي 1.1×10^7 مراهق يتصلون بالإنترنت يوميًا.

المثالان 3 و 4 **جـد قيمة كل ناتج ضرب أو قسمة. عبّر عن النتائج بكل من الترميز العلمي والصيغة القياسية.**

36. $(3.807 \times 10^3)(5 \times 10^2)$

37. $\frac{9.6 \times 10^3}{1.2 \times 10^{-4}}$

38. $\frac{2.88 \times 10^3}{1.2 \times 10^{-5}}$

39 $(6.5 \times 10^7)(7.2 \times 10^{-2})$

40. $(9.5 \times 10^{-18})(9 \times 10^9)$

41. $\frac{8.8 \times 10^3}{4 \times 10^{-4}}$

42. $\frac{9.15 \times 10^{-3}}{6.1 \times 10}$

43. $(1.4 \times 10^6)^2$

44. $(2.58 \times 10^2)(3.6 \times 10^6)$

45. $\frac{5.6498 \times 10^{10}}{8.2 \times 10^4}$

46. $\frac{1.363 \times 10^{16}}{2.9 \times 10^6}$

47. $(5 \times 10^3)(1.8 \times 10^{-7})$

48. $(2.3 \times 10^{-3})^2$

49. $\frac{6.25 \times 10^{-4}}{1.25 \times 10^2}$

50. $\frac{3.75 \times 10^{-9}}{1.5 \times 10^{-4}}$

51. $(7.2 \times 10^7)^2$

52. $\frac{8.6 \times 10^4}{2 \times 10^{-6}}$

53. $(6.3 \times 10^{-5})^2$

مثال 5 **54. الفلك** تختلف المسافة بين الكرة الأرضية والشمس على مدار العام. تصل الكرة الأرضية إلى أقرب نقطة من الشمس في شهر يناير عندما تبلغ المسافة **146** مليون كيلومتر. في شهر يوليو، تصل المسافة إلى أبعد نقطة حيث تبلغ **152** مليون كيلومتر.

a. اكتب 146 مليون بكل من الصيغة القياسية والترميز العلمي.

b. اكتب 152 مليون بكل من الصيغة القياسية والترميز العلمي.

c. ما النسبة المئوية للزيادة في المسافة من شهر يناير إلى شهر يوليو؟ قرّب إلى أقرب عشرة من مائة.

جـد قيمة كل ناتج ضرب أو قسمة. عبّر عن النتائج بكل من الترميز العلمي والصيغة القياسية.

55. $(4.65 \times 10^{-2})(5.91 \times 10^6)$

56. $\frac{2.548 \times 10^5}{2.8 \times 10^{-2}}$

57. $\frac{2.135 \times 10^5}{3.5 \times 10^{12}}$

58. $(3.16 \times 10^{-2})^2$

59. $(2.01 \times 10^{-4})(8.9 \times 10^{-3})$

60. $\frac{5.184 \times 10^{-5}}{7.2 \times 10^3}$

61. $(9.04 \times 10^6)(5.2 \times 10^{-4})$

62. $\frac{1.032 \times 10^{-4}}{8.6 \times 10^{-5}}$

الضوء تبلغ سرعة الضوء 3×10^8 m/s تقريبًا.

63. اكتب تعبيرًا لتمثيل سرعة الضوء بالكيلومتر في الثانية.

64. اكتب تعبيرًا لتمثيل سرعة الضوء بالكيلومتر في الساعة.

65. اصنع جدولاً يوضح عدد الكيلومترات التي يقطعها الضوء في اليوم والأسبوع وفي شهر طوله 30 يومًا وسنة طولها 365 يومًا. عبّر عن نتائجك بالترميز العلمي.

66. وضع النماذج أظهرت دراسة حديثة على الهواتف الخلوية أن هاتف الشركة A يعالج حتى 7.95×10^5 بت من البيانات كل ثانية. ويعالج هاتف الشركة B حتى 1.41×10^6 بت من البيانات كل ثانية. جـد قيمة $\frac{1.41 \times 10^6}{7.95 \times 10^5}$ وتفسير.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

67 **كرة الأرضية** يبلغ سكان الكرة الأرضية حوالي 6.623×10^9. تبلغ مساحة سطح الكرة الأرضية $1.483 \times 10^8\ km^2$. ما الكثافة السكانية لمساحة سطح الكرة الأرضية؟

68. **الأنهار** يُعرف حوض التصريف المنفصل عن الأحواض المجاورة بحافة أو هضبة أو جبل باسم مستجمع المياه. تبلغ مساحة مستجمع مياه نهر الأمازون $5{,}900{,}000\ km^2$. تبلغ مساحة مستجمع مياه نهر المسيسيبي $3{,}100{,}000\ km^2$.

a. اكتب كلاً من هذين العددين بالترميز العلمي.

b. كم ضعفًا تبلغ مساحة مستجمع مياه نهر الأمازون بالمقارنة بمستجمع مياه نهر المسيسيبي؟

69. **الزراعة** زرع الفلاحون في أحد الأعوام مؤخرًا حوالي 37.6 هكتار من الذرة. كما أنهم زرعوا 25.9 هكتار من فول الصويا و4.5 هكتار من القطن.

a. اكتب كلاً من هذه الأعداد بالترميز العلمي وبالصيغة القياسية.

b. كم ضعفًا تبلغ الكمية المزروعة من الذرة بالمقارنة بفول الصويا؟ اكتب نتائجك بكل من الصيغة القياسية والترميز العلمي. قرّب إجابتك إلى أربع منازل عشرية.

c. كم ضعفًا تبلغ الكمية المزروعة من الذرة بالمقارنة بالقطن؟ اكتب نتائجك بكل من الصيغة القياسية والترميز العلمي. قرّب إجابتك إلى أربع منازل عشرية.

مسائل مهارات التفكير العليا

70. **التبرير** أيهما أكبر، 100^{10} أم 10^{100}؟ اشرح استنتاجك.

71. **تحليل الخطأ** تعمل رنا وهدى على حل مسألة قسمة بالترميز العلمي. فهل أيّ منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

رنا

$$\frac{3.65 \times 10^{-12}}{5 \times 10^5} = 0.73 \times 10^{-17}$$
$$= 7.3 \times 10^{-16}$$

هدى

$$\frac{3.65 \times 10^{-12}}{5 \times 10^5} = 0.73 \times 10^{-17}$$
$$= 7.3 \times 10^{-18}$$

72. **التحدي** ضع ترتيب هذه الأعداد من الأقل إلى الأكبر بدون تحويلها إلى الصيغة القياسية.

$$5.46 \times 10^{-3},\ 6.54 \times 10^{3},\ 4.56 \times 10^{-4},\ -5.64 \times 10^{4},\ -4.65 \times 10^{5}$$

73. **الفرضيات** حدد ما إذا كانت العبارة صحيحة دائمًا أو أحيانًا أو لا تصح أبدًا. اذكر أمثلة أو مثالاً عكسيًا للتحقق من استنتاجك.

عند ضرب عددين مكتوبين بالترميز العلمي، لا يمكن أن يحتوي العدد الناتج على أكثر من خانتين إلى يسار النقطة/الفاصلة العشرية.

74. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب عددين بالترميز العلمي بناتج ضرب يبلغ 1.3×10^{-3}. ثم حدد عددين بالترميز العلمي بحاصل قسمة يبلغ 1.3×10^{-3}.

75. **الكتابة في الرياضيات** اكتب الخطوات التي ستتبعها لقسمة عددين مكتوبين بالترميز العلمي. ثم صف كيفية كتابة النتائج بالصيغة القياسية. اشرح عن طريق إيجاد قيمة $\frac{a}{b}$ عندما يكون $a = 2 \times 10^3$ و $b = 4 \times 10^5$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

76. ما العدد الذي يمثل 0.05604×10^8 مكتوبًا بالصيغة القياسية؟

A 0.0000000005604
B 560,400
C 5,604,000
D 50,604,000

77. غادرت عائشة المدرسة وقادت دراجتها نحو المنزل. يوضح التمثيل البياني العلاقة بين بُعدها عن المدرسة والزمن.

ما التفسير الذي يمكن أن يشرح جزء التمثيل البياني من $x = 30$ إلى $x = 40$؟

F قادت عائشة دراجتها على منحدر.
G ركضت عائشة طوال الطريق نحو المنزل.
H توقفت عائشة عند منزل صديقة في طريقها نحو المنزل.
J عادت عائشة إلى المدرسة لإحضار كتاب الرياضيات الخاص بها.

78. إجابة قصيرة في أول أربع سنوات للمدرب طارق في مجال تدريب كرة القدم، فاز فريقه في 5 مباريات في العام الأول و 10 مباريات في العام الثاني و 8 مباريات في العام الثالث و 7 مباريات في العام الرابع. كم عدد المباريات التي يحتاج الفريق إلى الفوز بها في العام الخامس ليحقق متوسطًا يبلغ 8 مباريات في العام؟

79. يوضح الجدول العلاقة بين السعرات الحرارية وجرامات الدهون في وجبة من الدجاج المقلي من عدة مطاعم.

السعرات الحرارية	305	410	320	500	510	440
الدهون (بالجرام)	28	34	28	41	42	38

بافتراض أن الطريقة الأمثل لوصف البيانات هي النموذج الخطي، فكم عدد جرامات الدهون تقريبًا التي تتوقع أن تكون في وجبة تحتوي على 275 سعرًا حراريًا من الدجاج المقلي؟

A 22
B 25
C 28
D 30

مراجعة شاملة

80. الصحة يمثل المؤشر الوزني p مقياسًا لجسم الشخص بناء على الطول h بالسنتيمتر والكتلة m بالكيلوجرام.

من بين هذه الصيغ $p = 100m^{\frac{1}{3}}h^{-1}$. إذا كان شخص يبلغ طوله 182 cm له مؤشر وزني يبلغ 2.2،

فكم يبلغ وزن الشخص بالكيلوجرام؟ (الدرس 3-8)

حوّل لأبسط صورة. افترض أنّ جميع المقامات لا تساوي الصفر. (الدرس 2-8)

81. $\frac{8^9}{8^6}$

82. $\frac{6^5}{6^3}$

83. $\frac{r^8t^{12}}{r^2t^7}$

84. $\left(\frac{3a^4b^4}{8c^2}\right)^4$

85. $\left(\frac{5d^3g^2}{3h^4}\right)^2$

86. $\left(\frac{4n^2p^4}{8p^3}\right)^3$

87. الكيمياء تبلغ حموضة عصير الليمون 10^2 أمثال حموضة عصير الطماطم. تبلغ حموضة عصير الطماطم 10^3 أمثال حموضة بياض البيض. فكم مثلاً تبلغ حموضة عصير الليمون بالنسبة إلى بياض البيض؟ (الدرس 2-8)

مراجعة المهارات

جد قيمة $a(b^x)$ لكل من القيم المذكورة.

88. $a = 1, b = 2, x = 4$

89. $a = 4, b = 1, x = 7$

90. $a = 5, b = 3, x = 0$

91. $a = 0, b = 6, x = 8$

92. $a = -2, b = 3, x = 1$

93. $a = -3, b = 5, x = 2$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

8 اختبار منتصف الوحدة

الدروس من 8-1 إلى 8-4

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. (الدرس 8-1)

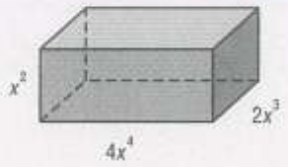
1. $(x^3)(4x^5)$

2. $(m^2p^5)^3$

3. $[(2xy^3)^2]^3$

4. $(6ab^3c^4)(-3a^2b^3c)$

5. **الاختيار من متعدد** عبّر عن حجم الجسم الصلب بدالة أحادية الحد. (الدرس 8-1)



A $6x^9$

B $8x^9$

C $8x^{24}$

D $7x^{24}$

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. افترض أنه لا يوجد مقام يساوي 0. (الدرس 8-2)

6. $\left(\frac{2a^4b^3}{c^6}\right)^3$

7. $\frac{2xy^0}{6x}$

8. $\frac{m^7n^4p}{m^3n^3p}$

9. $\frac{p^4t^{-2}}{r^{-5}}$

10. **الفلك** يقدّر الفلكيون أن عدد النجوم في الكون له رتبة مقدار تبلغ 10^{21}. يبلغ عدد النجوم في مجرة درب التبانة 100 مليار تقريبًا. باستخدام رتب المقدار، كم ضعفًا يبلغ عدد النجوم الموجودة في الكون بالمقارنة بمجرة درب التبانة؟ (الدرس 8-2)

اكتب كل تعبير في الصيغة الجذرية، أو في الصيغة الأسيّة. (الدرس 8-3)

11. $42^{\frac{1}{2}}$

12. $11x^{\frac{1}{2}}$

13. $(11g)^{\frac{1}{2}}$

14. $\sqrt{55}$

15. $\sqrt{5k}$

16. $4\sqrt{p}$

حوّل لأبسط صورة. (الدرس 8-3)

17. $\sqrt[3]{729}$

18. $\sqrt[4]{625}$

19. $1331^{\frac{1}{3}}$

20. $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$

21. $8^{\frac{2}{3}}$

22. $625^{\frac{3}{4}}$

23. $216^{\frac{5}{3}}$

24. $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$

حُلّ كلًا من المعادلات الآتية. (الدرس 8-3)

25. $4^x = 4096$

26. $5^{2x+1} = 125$

27. $4^{x-3} = 128$

عبّر عن كل عدد بالترميز العلمي. (الدرس 8-4)

28. 0.00000054

29. 0.0042

30. 234,000

31. 418,000,000

عبّر عن كل عدد بالصيغة القياسية. (الدرس 8-4)

32. 4.1×10^{-3}

33. 2.74×10^5

34. 3×10^9

35. 9.1×10^{-5}

جد قيمة ناتج الضرب أو ناتج القسمة في كل مما يلي. وعبّر عن النتائج بالترميز العلمي. (الدرس 8-4)

36. $(2.13 \times 10^2)(3 \times 10^5)$

37. $(7.5 \times 10^6)(2.5 \times 10^{-2})$

38. $\frac{7.5 \times 10^8}{2.5 \times 10^4}$

39. $\frac{6.6 \times 10^5}{2 \times 10^{-3}}$

40. **الثدييات** تم صيد حوت أزرق يبلغ وزنه 1.9×10^5 kg. أصغر الثدييات هو الخفاش الطنان الذي يبلغ وزنه 0.0019 kg تقريبًا. (الدرس 8-4)

a. اكتب وزن الحوت بالصيغة المعيارية.

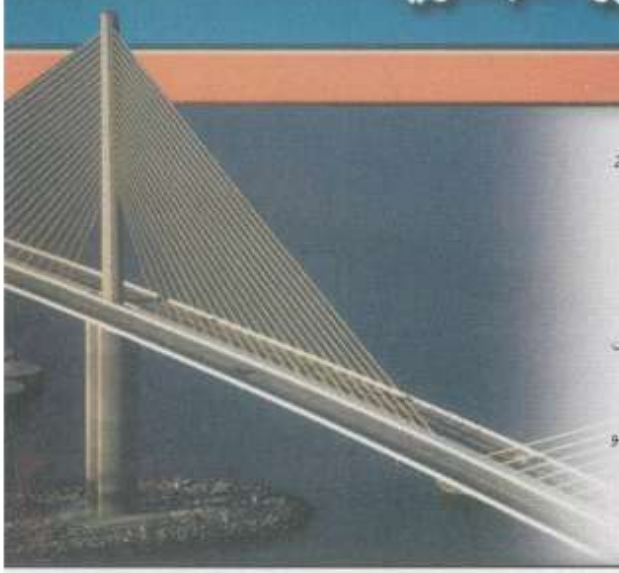
b. اكتب وزن الخفاش بالترميز العلمي.

c. كم عدد رتب مقدار حجم الخفاش الطنان بالمقارنة بالحوت الأزرق؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

ملاحظاتي

8-5 تبسيط التعابير الجذرية



السابق

- قمتُ بتبسيط الجذور.

الحالي

1 تبسيط التعابير الجذرية عن طريق استخدام خاصية ناتج ضرب الجذور التربيعية.

2 تبسيط التعابير الجذرية باستخدام خاصية ناتج قسمة الجذور التربيعية.

لماذا؟

- يمتد جسر "صن شاين سكاي واي" عبر خليج تامبا في ولاية فلوريدا، وهو مدعوم بكابلات من الصلب عددها 21 كابلاً، ويبلغ قطر الواحد منها 22.9 cm.

لتحديد ما إذا كان قطر الكابل الصلب ينبغي أن يدعم وزنًا محددًا، يمكنك استخدام المعادلة $d = \sqrt{\frac{w}{8}}$، حيث d هو قطر الكابل بالبوصة وw هو الوزن بالأطنان.

1 خاصية ناتج ضرب الجذور التربيعية

يشتمل **التعبير الجذري** على جذر، مثل الجذر التربيعي. تذكر أن التعبير الموجود تحت رمز الجذر يُطلق عليه المجذور. ويكون المجذور في أبسط صورة له إذا تم استيفاء الشروط الثلاثة التالية.

- عدم احتواء المجذور على عوامل مربع كامل غير 1.
- عدم احتواء المجذور على كسور.
- عدم ظهور المجذور في مقام الكسر.

يمكن استخدام الخاصية التالية لتبسيط الجذور التربيعية.

المفهوم الأساسي خاصية ناتج ضرب الجذور التربيعية

الشرح بالنسبة لأي عددين حقيقيين غير سالبين a وb، فإن الجذر التربيعي لـ ab يساوي الجذر التربيعي لـ a مضروبًا في الجذر التربيعي لـ b.

الرموز $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$، إذا كان $a \geq 0$ و$b \geq 0$

أمثلة $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36}$ أو 6 $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3$ أو 6 $\sqrt{4 \cdot 9} =$

مثال 1 تبسيط الجذور التربيعية

بسّط $\sqrt{80}$.

$\sqrt{80} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5}$ تحليل 80 إلى عوامل أولية

$= \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5}$ خاصية ناتج ضرب الجذور التربيعية

$= 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5}$ أو $4\sqrt{5}$ بسّط.

تمرين موجه

1A. $\sqrt{54}$

1B. $\sqrt{180}$

المفردات الجديدة

تعبير جذري radical expression

إنطاق المقام rationalizing the denominator

مرافق conjugate

ممارسات في الرياضيات

محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

البحث عن التوافق في الاستنتاجات المتكررة والتعبير عن ذلك.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 2 ضرب الجذور التربيعية

بسّط $\sqrt{2} \cdot \sqrt{14}$.

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{14} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{7}$ خاصية ناتج ضرب الجذور التربيعية

$= \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{7}$ أو $2\sqrt{7}$ خاصية ناتج ضرب الجذور التربيعية

تمرين موجّه

2A. $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$ **2B.** $\sqrt{6} \cdot \sqrt{8}$

فكّر في التعبير $\sqrt{x^2}$. قد يبدو أن $x = \sqrt{x^2}$. ولكن عند إيجاد الجذر التربيعي الأساسي لتعبير يشتمل على متغيرات، يجب عليك التأكد من ألا تكون الإجابة سالبة. فكّر في $x = -3$.

$\sqrt{x^2} \stackrel{?}{=} x$

$\sqrt{(-3)^2} \stackrel{?}{=} -3$ عوّض عن x بـ -3.

$\sqrt{9} \stackrel{?}{=} -3$ $(-3)^2 = 9$

$3 \neq -3$ $\sqrt{9} = 3$

لاحظ أنه، في هذه الحالة، إذا كان الطرف الأيمن من المعادلة $|x|$، فستكون المعادلة صحيحة. وبالنسبة للتعابير التي يكون فيها أس المتغير داخل الجذر زوجيًا ويكون الأس المبسط فرديًا، فإنه يجب عليك استخدام القيمة المطلقة.

$\sqrt{x^2} = |x|$ $\sqrt{x^3} = x\sqrt{x}$ $\sqrt{x^4} = x^2$ $\sqrt{x^6} = |x^3|$

مثال 3 تبسيط الجذر التربيعي ذي المتغيرات

بسّط $\sqrt{90x^3y^4z^5}$.

$\sqrt{90x^3y^4z^5} = \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot x^3 \cdot y^4 \cdot z^5}$ حلل إلى عوامل أولية

$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{y^4} \cdot \sqrt{z^4} \cdot \sqrt{z}$ خاصية ناتج الضرب

$= \sqrt{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{5} \cdot x \cdot \sqrt{x} \cdot y^2 \cdot z^2 \cdot \sqrt{z}$ بسّط.

$= 3y^2z^2x\sqrt{10xz}$ بسّط.

تمرين موجّه

3A. $\sqrt{32r^2k^4t^5}$ **3B.** $\sqrt{56xy^{10}z^5}$

2 خاصية ناتج قسمة الجذور التربيعية

لقسمة الجذور التربيعية وتبسيط التعابير الجذرية، يمكنك استخدام خاصية ناتج القسمة للجذور التربيعية.

المفهوم الأساسي خاصية ناتج قسمة الجذور التربيعية

الشرح بالنسبة لأي عددين حقيقيين a وb، حيث $a \geq 0$ و$b > 0$، فإن الجذر التربيعي لـ $\frac{a}{b}$ يساوي الجذر التربيعي لـ a مقسومًا على الجذر التربيعي لـ b.

الرموز $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

قراءة في الرياضيات

الكسور في المجذور

التعبير $\sqrt{\frac{a}{b}}$ يُقرأ الجذر التربيعي لـ a على b، أو الجذر التربيعي للكسر a على b.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

يمكنك استخدام خواص الجذور التربيعية من أجل **إنطاق مقام** كسر به جذر. ويتضمن هذا ضرب البسط والمقام في عامل يعمل على إزالة الجذور الموجودة في المقام.

مثال 4 على الاختبار المعياري إنطاق المقام

أي من التعابير التالية مكافئ لـ $\sqrt{\frac{35}{15}}$؟

A $\frac{5\sqrt{21}}{15}$ B $\frac{\sqrt{21}}{3}$ C $\frac{\sqrt{525}}{15}$ D $\frac{\sqrt{35}}{15}$

قراءة فقرة الاختبار يتعين تبسيط التعبير الجذري.

حَل فقرة الاختبار

$\sqrt{\frac{35}{15}} = \sqrt{\frac{7}{3}}$ اختصر $\frac{35}{15}$ إلى $\frac{7}{3}$.

$= \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ خاصية ناتج قسمة الجذور التربيعية

$= \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ اضرب في $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$= \frac{\sqrt{21}}{3}$ خاصية ناتج ضرب الجذور التربيعية

الاختيار الصحيح هو *B*.

نصيحة عند حل الاختبار

البنية انظر إلى المجذور لمعرفة ما إذا كان يمكن تبسيطه أولاً. فقد يُسهل هذا عليك حساباتك.

تمرين موجّه

4. بسّط $\frac{\sqrt{6y}}{\sqrt{12}}$.

F $\frac{\sqrt{y}}{2}$ G $\frac{\sqrt{y}}{4}$ H $\frac{\sqrt{2y}}{2}$ J $\frac{\sqrt{2y}}{4}$

يُطلق على ذوات الحدين التي تأخذ الشكل $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$، $a\sqrt{b} - c\sqrt{d}$ حيث a و b و c و d أعداد نسبية، اسم **مترافقات**. على سبيل المثال، يُعد $2 + \sqrt{7}$ و $2 - \sqrt{7}$ مترافقين. ويكون ناتج ضرب المترافقين عبارة عن عدد نسبي. والذي يمكن إيجاده باستخدام النمط المتعلق بالفرق بين مربعين.

مثال 5 استخدام المرافق لإنطاق المقام

بسّط $\frac{3}{5 + \sqrt{2}}$.

$\frac{3}{5 + \sqrt{2}} = \frac{3}{5 + \sqrt{2}} \cdot \frac{5 - \sqrt{2}}{5 - \sqrt{2}}$ مرافق $5 + \sqrt{2}$ هو $5 - \sqrt{2}$.

$= \frac{3(5 - \sqrt{2})}{5^2 - (\sqrt{2})^2}$ $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

$= \frac{15 - 3\sqrt{2}}{25 - 2}$ أو $\frac{15 - 3\sqrt{2}}{23}$ $(\sqrt{2})^2 = 2$

تمرين موجّه **بسّط كل تعبير مما يلي.**

5A. $\frac{3}{2 + \sqrt{2}}$ 5B. $\frac{7}{3 - \sqrt{7}}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التحقق من فهمك

الأمثلة 1-3 بسّط كلاً من التعابير الآتية.

1. $\sqrt{24}$
2. $3\sqrt{16}$
3. $2\sqrt{25}$
4. $\sqrt{10} \cdot \sqrt{14}$
5. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{18}$
6. $3\sqrt{10} \cdot 4\sqrt{10}$
7. $\sqrt{60x^4y^7}$
8. $\sqrt{88m^3p^2r^5}$
9. $\sqrt{99ab^5c^2}$

مثال 4 10. **الاختيار من متعدد** أي من التعابير الآتية يعد مكافئًا لـ $\sqrt{\frac{45}{10}}$؟

A $\frac{5\sqrt{2}}{10}$ B $\frac{\sqrt{45}}{10}$ C $\frac{\sqrt{50}}{10}$ D $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

مثال 5 بسّط كلاً من التعابير الآتية.

11. $\frac{3}{3+\sqrt{5}}$
12. $\frac{5}{2-\sqrt{6}}$
13. $\frac{2}{1-\sqrt{10}}$
14. $\frac{1}{4+\sqrt{12}}$
15. $\frac{4}{6-\sqrt{7}}$
16. $\frac{6}{5+\sqrt{11}}$

التمرين وحل المسائل

الأمثلة 1-3 بسّط كلاً من التعابير الآتية.

17. $\sqrt{52}$
18. $\sqrt{56}$
19. $\sqrt{72}$
20. $3\sqrt{18}$
21. $\sqrt{243}$
22. $\sqrt{245}$
23. $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}$
24. $\sqrt{10} \cdot \sqrt{20}$
25. $3\sqrt{8} \cdot 2\sqrt{7}$
26. $4\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{8}$
27. $3\sqrt{25t^2}$
28. $5\sqrt{81q^5}$
29. $\sqrt{28a^2b^3}$
30. $\sqrt{75qr^3}$
31. $7\sqrt{63m^3p}$
32. $4\sqrt{66g^2h^4}$
33. $\sqrt{2ab^2} \cdot \sqrt{10a^5b}$
34. $\sqrt{4c^3d^3} \cdot \sqrt{8c^3d}$

35. **قطار الملاهي** بدءًا من الوضع الثابت، يمكن تقريب السرعة v لقطار الملاهي بالأمتار في الثانية عند أسفل التل عن طريق المعادلة $v = \sqrt{64h}$. حيث h هو ارتفاع التل بالأمتار.

a. بسّط المعادلة.

b. حدد السرعة لقطار الملاهي عند قاع تل يبلغ ارتفاعه 134 m.

36. **الدقة** عند إخماد حريق، تُمثَّل السرعة v للماء الذي يتم ضخه في الهواء بالدالة $v = \sqrt{2hg}$. حيث h يمثل أقصى ارتفاع للماء وg يمثل تسارع الجاذبية الأرضية ($32\ ft/s^2$).

a. حل الدالة لإيجاد قيمة h.

b. تحتاج إدارة مكافحة الحرائق بعجمان إلى مضخة تدفع الماء إلى مسافة 80 ft في الهواء. فهل الإعلان عن وجود مضخة تقذف الماء بسرعة تبلغ 70 ft/s سيلبي احتياجاتها؟ اشرح.

c. يتعين على إدارة مكافحة الحرائق بالشارقة شراء مضخة تدفع الماء إلى مسافة 90 ft في الهواء. فهل الإعلان عن وجود مضخة تقذف الماء بسرعة تبلغ 77 ft/s سيلبي حاجة إدارة مكافحة الحرائق هذه؟ اشرح.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المثالان 5-4 بسّط كلاً من التعابير الآتية.

37. $\sqrt{\frac{32}{t^4}}$ 38. $\sqrt{\frac{27}{m^5}}$ 39. $\frac{\sqrt{68ac^3}}{\sqrt{27a^2}}$

40. $\frac{\sqrt{h^3}}{\sqrt{8}}$ 41. $\sqrt{\frac{3}{16}} \cdot \sqrt{\frac{9}{5}}$ 42. $\sqrt{\frac{7}{2}} \cdot \sqrt{\frac{5}{3}}$

43. $\frac{7}{5+\sqrt{3}}$ 44. $\frac{9}{6-\sqrt{8}}$ 45. $\frac{3\sqrt{3}}{-2+\sqrt{6}}$

46. $\frac{3}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$ 47. $\frac{5}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$ 48. $\frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{7}+3\sqrt{3}}$

49. **الكهرباء** كمية التيار بالأمبير I التي يستخدمها جهاز ما يمكن حسابها باستخدام الصيغة $I=\sqrt{\frac{P}{R}}$. حيث P هي القدرة بالوات وR هي المقاومة بالأوم.

a. بسّط الصيغة.

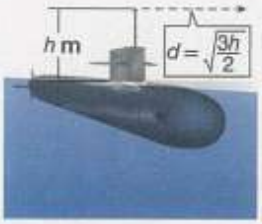
b. ما كمية التيار التي يستخدمها جهاز ما إذا كانت القدرة المستخدمة تساوي 75 وات والمقاومة 5 أوم؟

50. **الطاقة الحركية** يمكن تحديد سرعة v لكرة ما من خلال المعادلة $v=\sqrt{\frac{2k}{m}}$. حيث k هي الطاقة الحركية وm هي كتلة الكرة.

a. بسّط المعادلة إذا كانت كتلة الكرة تساوي 3 kg.

b. إذا كانت الكرة تقطع 7 m/sec. فما الطاقة الحركية للكرة بالجول؟

51. **الغواصات** تمثّل أكبر مسافة d km يمكن لنقطة المراقبة رؤيتها في وضح النهار بالصيغة المبينة. حدد مقدار الارتفاع الذي يجب على الغواصة أن ترفع منظار الأفق الخاص بها إليه لرؤية سفينة ما. وذلك إذا كانت الغواصة تبعد عن السفينة بمقدار المسافات المذكورة.



المسافة	3	6	9	12	15
الارتفاع					

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

52. **البنية** اشرح كيفية حل $\frac{\sqrt{3+2}}{x}=\frac{\sqrt{3-1}}{\sqrt{3}}$

53. **تحدٍّ** بسّط كل تعبير مما يلي.

a. $\sqrt[3]{27}$ b. $\sqrt[3]{40}$ c. $\sqrt[3]{750}$

54. **الاستنتاج** أخذت موزة عددًا طرحت منه 4. وضربته في 4. ثم قامت بحساب الجذر التربيعي ومن ثم المعكوس الضربي للحصول على $\frac{1}{2}$. فما العدد الذي بدأت به؟ اكتب صيغة تصف هذه العملية.

55. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب زوجًا من ذوات الحدين بالصيغة $a\sqrt{b}+c\sqrt{f}$ و$a\sqrt{b}-c\sqrt{f}$. ثم جد ناتج ضربهما.

56. **التحدي** استخدم خاصية ناتج قسمة الجذور التربيعية لاشتقاق القانون العام عن طريق حل المعادلة التربيعية $ax^2+bx+c=0$. (*إرشاد*: ابدأ بإكمال المربع.)

57. **الكتابة في الرياضيات** لخّص طريقة كتابة التعبير الجذري في أبسط صورة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

58. إذا كانت فاتورة الكهرباء الخاصة بخميس أقل بمقدار AED 23 من فاتورة المياه الخاصة به. وكان إجمالي الفاتورتين يساوي AED 109. فأي من المعادلات التالية يمكن استخدامها لإيجاد قيمة فاتورة المياه؟

A $g + g = 109$ C $g - 23 = 109$

B $23 + 2g = 109$ D $2g - 23 = 109$

59. حلّ $a^2 - 2a + 1 = 25$.

F $-4, -6$ H $-4, 6$

G $4, -6$ J $4, 6$

60. أي مما يلي يكافئ التعبير $\sqrt{160x^2y^5}$ ؟

A $16|x|y^2\sqrt{10y}$ C $4|x|y^2\sqrt{10y}$

B $|x|y^2\sqrt{160y}$ D $10|x|y^2\sqrt{4y}$

61. **إجابة شبكية** تجني ميساء AED 10 في الساعة و10% عمولة على المبيعات التي تحققها. فإذا عملت ميساء 38 ساعة وحققت مبيعات بإجمالي AED 1275 الأسبوع الماضي، فما قيمة المبلغ الذي جنته؟

مراجعة شاملة

جـد المجموع أو الفرق في كل مما يلي. (الدرس 1-7)

62. $(7g^3 + 2g^2 - 12) - (-2g^3 - 4g)$

63. $(-3h^2 + 3h - 6) + (5h^2 - 3h - 10)$

حل كل معادلة باستخدام القانون العام.

64. $2x^2 - 3x - 9 = 0$

65. $4x^2 + 2x - 1 = 0$

66. $3x^2 + 4x - 2 = 0$

67. $3x^2 - 5x - 10 = 0$

حلّل كل كثيرة حدود فيما يلي إلى العوامل، إذا كان ممكنًا. فإذا كان من غير الممكن تحليل كثيرة الحدود إلى العوامل باستخدام الأعداد الصحيحة، فاكتب *أولية*. (الدرس 1-7)

68. $6x^2 + 21x - 90$

69. $3x^2 - 11x - 42$

70. $6x^2 - 13x - 5$

71. $5y^2 - 3y + 11$

ابحث عن نمط في كل جدول قيم لتحديد أي نوع من النماذج يصف البيانات بأفضل طريقة. (الدرس 1-6)

72.

x	2	3	4	5	6
y	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{243}{32}$	$\frac{729}{64}$

73.

x	-2	-1	0	1	2
y	-13	-6.25	0	5.75	11

مثّل كل دالة بيانيًا. اذكر المجال والمدى.

74. $f(x) = |x + 5|$

75. $f(x) = 2[x]$

حُلّ كلًا من المعادلات الآتية.

76. $\left(\frac{1}{7}\right)^{y-3} = 343$

77. $10^{x-1} = 100^{2x-3}$

78. $36^{2p} = 216^{p-1}$

مراجعة المهارات

اكتب تحليل كل عدد إلى العوامل الأولية.

79. 24

80. 88

81. 180

82. 31

83. 60

84. 90

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

8-5 مختبر الجبر
الأعداد النسبية وغير النسبية

تكون المجموعة **مغلقة** ضمن عملية واحدة إذا كانت نتيجة هذه العملية لأي أعداد من هذه المجموعة موجودة أيضًا في المجموعة نفسها. وقد تكون المجموعة مغلقة ضمن عملية واحدة وغير مغلقة ضمن عملية أخرى.

ممارسات في الرياضيات
محاولة إيجاد البنية واستخدامها.

النشاط 1 إغلاق الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية

هل مجموعات الأعداد النسبية وغير النسبية تكون مغلقة ضمن عملية الضرب؟ وهل ينطبق ذلك ضمن عملية الجمع؟

الخطوة 1 لتحديد ما إذا كانت كل مجموعة مغلقة ضمن عملية الضرب، افحص عدة نواتج ضرب لاثنين من العوامل النسبية ثم اثنين من العوامل غير النسبية.

نسبية: $5 \times 2 = 10;\ -3 \times 4 = -12;\ 3.7 \times 0.5 = 1.85;\ \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$

غير نسبية: $\pi \times \sqrt{2} = \sqrt{2}\pi;\ \sqrt{3} \times \sqrt{7} = \sqrt{21};\ \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$

يكون ناتج ضرب كل زوج من الأعداد النسبية نسبيًا. ومع ذلك، تكون نواتج ضرب أزواج الأعداد غير النسبية غير نسبية ونسبية على حد سواء. لذا، يبدو أن مجموعة الأعداد النسبية تكون مغلقة ضمن عملية الضرب، ولكن مجموعة الأعداد غير النسبية ليست كذلك.

الخطوة 2 كرر هذه العملية مع الجمع.

نسبي: $3 + 8 = 11;\ -4 + 7 = 3;\ 3.7 + 5.82 = 9.52;\ \frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{13}{20}$

غير نسبي: $\sqrt{3} + \pi = \sqrt{3} + \pi;\ 3\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 9\sqrt{5};\ \sqrt{12} + \sqrt{50} = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{2}$

يكون مجموع كل زوج من الأعداد النسبية نسبيًا، ومجموع كل زوج من الأعداد غير النسبية يكون غير نسبي، والمجموعتان كلتاهما تكونان مغلقتين ضمن عملية الجمع.

النشاط 2 الأعداد النسبية وغير النسبية

ما نوع الأعداد التي تمثل ناتج ضرب ومجموع عدد نسبي وآخر غير نسبي؟

الخطوة 1 افحص نواتج ضرب عدة أزواج من الأعداد النسبية وغير النسبية.

$3 \times \sqrt{8} = 6\sqrt{2};\ \frac{3}{4} \times \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4};\ 1 \times \sqrt{7} = \sqrt{7};\ 0 \times \sqrt{5} = 0$

لا يكون ناتج الضرب نسبيًا إلا عندما يكون العامل النسبي هو 0. وناتج ضرب كل عدد نسبي غير صفري وعدد غير نسبي يكون غير نسبي.

الخطوة 2 جد مجاميع عدة أزواج من الأعداد النسبية وغير النسبية.

$5 + \sqrt{3} = 5 + \sqrt{3};\ \frac{2}{3} + \sqrt{5} = \frac{2 + 3\sqrt{5}}{3};\ -4 + \sqrt{6} = -1(4 - \sqrt{6})$

مجموع كل عدد نسبي وعدد غير نسبي يكون غير نسبي.

تحليل النتائج

1. ما أنواع الأعداد التي تمثل فرق عددين نسبيين فرديين وعددين غير نسبيين فرديين وعدد نسبي وعدد غير نسبي؟
2. هل ناتج قسمة كل عدد نسبي وآخر غير نسبي يكون دائمًا عددًا آخر نسبيًا أو غير نسبي؟ وإذا لم يكن كذلك، فقدّم مثالًا مضادًا.
3. **تحدَّ** تذكر أن الأعداد النسبية هي أعداد يمكن كتابتها في الصيغة $\frac{a}{b}$، حيث a وb عددان صحيحان و$b \neq 0$. ويوضح استخدام $\frac{a}{b}$ و$\frac{c}{d}$ أن مجموع أي عددين نسبيين وناتج ضربهما يجب دائمًا أن يكونا عددًا نسبيًا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 6-8 العمليات على التعابير الجذرية

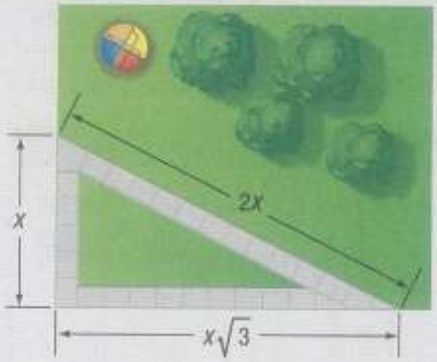
السابق
- قمت بتبسيط التعابير الجذرية.

الحالي
1. جمع التعابير الجذرية وطرحها.
2. ضرب التعابير الجذرية.

لماذا؟
- قرر سعيد الركض في الحي استعدادًا لموسم كرة القدم. وخطط لجري المسار الذي حدده ثلاث مرات يوميًا.

ما المسافة التي يجب على سعيد ركضها لإكمال المسار الذي حدده؟

ما المسافة التي يجب أن يركضها كل يوم؟



ممارسات في الرياضيات
التفكير بطريقة تجريدية وكمية

1 جمع أو طرح التعابير الجذرية

لجمع التعابير الجذرية أو طرحها، يجب أن تكون المجذورات متشابهة كما هو الحال مع الحدود أحادية الحد التي يجب أن تكون متشابهة لإجراء عملية الجمع أو الطرح عليها.

أحادية الحد	التعابير الجذرية
$4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = (4 + 2)\sqrt{5}$	$4a + 2a = (4 + 2)a$
$= 6\sqrt{5}$	$= 6a$
$9\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = (9 - 2)\sqrt{3}$	$9b - 2b = (9 - 2)b$
$= 7\sqrt{3}$	$= 7b$

لاحظ أنه عند جمع التعابير الجذرية وطرحها، لا يتغير المجذور. وهو الأمر ذاته الذي يحدث عند جمع أحاديات الحد أو طرحها.

مثال 1 جمع التعابير ذات المجذورات المتشابهة وطرحها

بسّط كل تعبير.

a. $5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 6\sqrt{2}$

$5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = (5 + 7 - 6)\sqrt{2}$ خاصية التوزيع

$= 6\sqrt{2}$ بسّط.

b. $10\sqrt{7} + 5\sqrt{11} + 4\sqrt{7} - 6\sqrt{11}$

$10\sqrt{7} + 5\sqrt{11} + 4\sqrt{7} - 6\sqrt{11} = (10 + 4)\sqrt{7} + (5 - 6)\sqrt{11}$ خاصية التوزيع

$= 14\sqrt{7} - \sqrt{11}$ بسّط.

تمرين موجّه

1A. $3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2}$

1B. $6\sqrt{11} + 2\sqrt{11} - 9\sqrt{11}$

1C. $15\sqrt{3} - 14\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 11\sqrt{3}$

1D. $4\sqrt{3} + 3\sqrt{7} - 6\sqrt{3} + 3\sqrt{7}$

لا تشتمل كل التعابير الجذرية على مجذورات متشابهة. وعن طريق تبسيط التعابير، فإنه يمكن جعلها تشتمل على مجذورات متشابهة بحيث يمكن جمعها أو طرحها.

حقوق الطبع والتأليف © مجموعة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 2 جمع التعابير ذات المجذورات غير المتشابهة وطرحها

بسّط $2\sqrt{18} + 2\sqrt{32} + \sqrt{72}$.

خاصية الضرب $2\sqrt{18} + 2\sqrt{32} + \sqrt{72} = 2(\sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2}) + 2(\sqrt{4^2} \cdot \sqrt{2}) + (\sqrt{6^2} \cdot \sqrt{2})$

بسّط. $= 2(3\sqrt{2}) + 2(4\sqrt{2}) + (6\sqrt{2})$

اضرب. $= 6\sqrt{2} + 8\sqrt{2} + 6\sqrt{2}$

بسّط. $= 20\sqrt{2}$

تمرين موجّه

2A. $4\sqrt{54} + 2\sqrt{24}$

2B. $4\sqrt{12} - 6\sqrt{48}$

2C. $3\sqrt{45} + \sqrt{20} - \sqrt{245}$

2D. $\sqrt{24} - \sqrt{54} + \sqrt{96}$

نصيحة دراسية

التبسيط أولاً بسّط كل حد جذري أولاً. ثم أجر العمليات المطلوبة.

2 ضرب التعابير الجذرية

ضرب التعابير الجذرية يشبه ضرب التعابير الجبرية أحادية الحد.

افترض أن $x \geq 0$.

التعابير الجذرية	أحادية الحد
$(2\sqrt{x})(3\sqrt{x}) = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$	$(2x)(3x) = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x$
$= 6x$	$= 6x^2$

يمكنك استخدام خاصية التوزيع أيضًا مع التعابير الجذرية.

مثال 3 ضرب التعابير الجذرية

بسّط كلاً من التعابير التالية.

a. $3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{6}$

خاصية التجميع $3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{6} = (3 \cdot 2)(\sqrt{2} \cdot \sqrt{6})$

اضرب. $= 6(\sqrt{12})$

بسّط. $= 6(2\sqrt{3})$

اضرب. $= 12\sqrt{3}$

b. $3\sqrt{5}(2\sqrt{5} + 5\sqrt{3})$

خاصية التوزيع $3\sqrt{5}(2\sqrt{5} + 5\sqrt{3}) = (3\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}) + (3\sqrt{5} \cdot 5\sqrt{3})$

خاصية التجميع $= [(3 \cdot 2)(\sqrt{5} \cdot \sqrt{5})] + [(3 \cdot 5)(\sqrt{5} \cdot \sqrt{3})]$

اضرب. $= [6(\sqrt{25})] + [15(\sqrt{15})]$

بسّط. $= [6(5)] + [15(\sqrt{15})]$

اضرب. $= 30 + 15\sqrt{15}$

تمرين موجّه

3A. $2\sqrt{6} \cdot 7\sqrt{3}$

3B. $9\sqrt{5} \cdot 11\sqrt{15}$

3C. $3\sqrt{2}(4\sqrt{3} + 6\sqrt{2})$

3D. $5\sqrt{3}(3\sqrt{2} - \sqrt{3})$

انتبه!

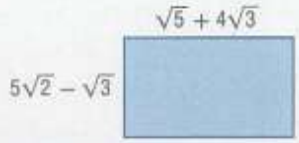
ضرب المجذورات تأكد من ضرب المجذورات عند ضرب التعابير الجذرية. ويتمثل أحد الأخطاء الشائعة في جمع المجذورات بدلاً من ضربها.

يمكنك أيضًا ضرب التعابير الجذرية التي بها أكثر من حد واحد في كل عامل. ويشبه ذلك ضرب زوج من ثنائيات الحد الجبرية ذات المتغيرات.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 4 من الحياة اليومية ضرب التعابير الجذرية

الهندسة جد مساحة المستطيل في أبسط صورة.



$A = \ell \cdot w$ $A = (5\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + 4\sqrt{3})$

الحدان الأولان — الحدان الخارجيان — الحدان الداخليان — الحدان الأخيران

$= (5\sqrt{2})(\sqrt{5}) + (5\sqrt{2})(4\sqrt{3}) + (-\sqrt{3})(\sqrt{5}) + (\sqrt{3})(4\sqrt{3})$

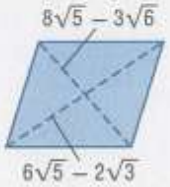
$= 5\sqrt{10} + 20\sqrt{6} - \sqrt{15} - 4\sqrt{9}$ اضرب.

$= 5\sqrt{10} + 20\sqrt{6} - \sqrt{15} - 12$ بسّط.

مراجعة المفردات

طريقة فويل اضرب اثنتين من ثنائيات الحدود عن طريق إيجاد مجموع نواتج ضرب الحدين الأولين والحدين الخارجيين والحدين الداخليين والحدين الأخيرين.

تمرين موجّه



4. **الهندسة** يمكن إيجاد المساحة A لمعين باستخدام المعادلة $A = \frac{1}{2}d_1d_2$، حيث d_1 و d_2 هما طولا القطرين. فما مساحة المعين على اليسار؟

ملخص المفهوم عمليات على التعابير الجذرية

العملية	الرموز	مثال
جمع. $b \geq 0$	$a\sqrt{b} + c\sqrt{b} = (a + c)\sqrt{b}$ مجذورات متشابهة	$4\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = (4 + 6)\sqrt{3}$ $= 10\sqrt{3}$
طرح. $b \geq 0$	$a\sqrt{b} + c\sqrt{b} = (a - c)\sqrt{b}$ مجذورات متشابهة	$12\sqrt{5} - 8\sqrt{5} = (12 - 8)\sqrt{5}$ $= 4\sqrt{5}$
ضرب. $b \geq 0, g \geq 0$	$a\sqrt{b}(f\sqrt{g}) = af\sqrt{bg}$ لا يجب أن تكون الجذور تحتوي على مجذورات متشابهة.	$3\sqrt{2}(5\sqrt{7}) = (3 \cdot 5)(\sqrt{2 \cdot 7})$ $= 15\sqrt{14}$

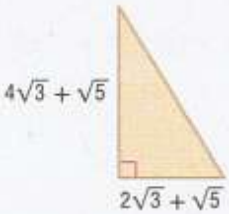
التحقق من فهمك

الأمثلة 1-3 بسّط كلاً من التعابير الآتية.

1. $3\sqrt{5} + 6\sqrt{5}$
2. $8\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$
3. $\sqrt{7} - 6\sqrt{7}$
4. $10\sqrt{2} - 6\sqrt{2}$
5. $4\sqrt{5} + 2\sqrt{20}$
6. $\sqrt{12} - \sqrt{3}$
7. $\sqrt{8} + \sqrt{12} + \sqrt{18}$
8. $\sqrt{27} + 2\sqrt{3} - \sqrt{12}$
9. $9\sqrt{2}(4\sqrt{6})$
10. $4\sqrt{3}(8\sqrt{3})$
11. $\sqrt{3}(\sqrt{7} + 3\sqrt{2})$
12. $\sqrt{5}(\sqrt{2} + 4\sqrt{2})$

مثال 4

13. **الهندسة** يمكن إيجاد المساحة A لمثلث عُمن طريق استخدام الصيغة $A = \frac{1}{2}bh$، حيث يمثل b القاعدة ويمثل h الارتفاع. فما مساحة المثلث على اليسار؟



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب وحل المسائل

الأمثلة 1-3 **بسّط كلاً من التعابير الآتية.**

14. $7\sqrt{5} + 4\sqrt{5}$
15. $2\sqrt{6} + 9\sqrt{6}$
16. $3\sqrt{5} - 2\sqrt{20}$
17. $3\sqrt{50} - 3\sqrt{32}$
18. $7\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$
19. $\sqrt{5}(\sqrt{2} + 4\sqrt{2})$
20. $\sqrt{6}(2\sqrt{10} + 3\sqrt{2})$
21. $4\sqrt{5}(3\sqrt{5} + 8\sqrt{2})$
22. $5\sqrt{3}(6\sqrt{10} - 6\sqrt{3})$
23. $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{15} + \sqrt{12})$
24. $(3\sqrt{11} + 3\sqrt{15})(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$
25. $(5\sqrt{2} + 3\sqrt{5})(2\sqrt{10} - 5)$

مثال 4 26. **الهندسة** جد محيط مستطيل ومساحته إذا كان عرضه $2\sqrt{7} - 2\sqrt{5}$ وطوله $3\sqrt{7} + 3\sqrt{5}$.

بسّط كلاً من التعابير الآتية.

27. $\sqrt{\frac{1}{5}} - \sqrt{5}$
28. $\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{6}$
29. $2\sqrt{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{2} - \sqrt{8}$
30. $8\sqrt{\frac{5}{4}} + 3\sqrt{20} - 10\sqrt{\frac{1}{5}}$
31. $(3 - \sqrt{5})^2$
32. $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$

33. **قطارات الملاهي** ترتبط السرعة v بالأقدام في الثانية لقطار ملاهٍ عند أسفل تل بالهبوط العمودي h بالأقدام. ويتم الحصول على السرعة v_0 لقطار الملاهي عند أعلى التل من خلال الصيغة $v_0 = \sqrt{v^2 - 64h}$.

a. ما السرعة التي يجب أن يصل إليها قطار ملاهٍ عند قمة تل طوله 225 ft لتحقيق سرعة تبلغ 120 ft/s عند أسفل التل؟

b. اشرح لماذا $v_0 = v - 8\sqrt{h}$ لا تساوي الصيغة المعطاة.

34. **المعرفة المالية** يستثمر طارق مبلغًا قدره 225 AED في حساب ادخار. وفي عامين، بلغ حسابه الادخاري 232 AED. ويمكنك استخدام الصيغة $r = \sqrt{\frac{v_2}{v_0}} - 1$ لإيجاد نسبة المرابحة السنوية r التي حققها الحساب. ويمثل الاستثمار الأولي في v_0، بينما يكون v_2 هو المبلغ في عامين. فما متوسط نسبة المرابحة السنوية التي حققها حساب طارق؟

35. **الكهرباء** يستطيع الكهربائيون حساب التيار الكهربائي بالأمبير A باستخدام الصيغة $A = \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{r}}$، حيث w هي القدرة بالوات و r هي المقاومة بالأوم. فما كمية التيار الكهربائي الذي يمر عبر فرن ميكروويف قدرته 850 وات ومقاومته 5 أوم؟ اكتب عدد الأمبيرات في أبسط صورة جذرية، ثم قدّر كمية التيار الكهربائي إلى أقرب جزء من عشرة.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

36. **تحدٍّ** حدد ما إذا كانت العبارة التالية صوابًا أم خطأً. قدم إثباتًا أو مثالًا مضادًا لدعم إجابتك.
$x + y > \sqrt{x^2 + y^2}$ عندما يكون $x > 0$ و $y > 0$

37. **الفرضيات** ضع تخمينًا حول مجموع عدد نسبي وعدد غير نسبي. هل المجموع يكون عددًا نسبيًا أم غير نسبي؟ وهل ناتج ضرب عدد نسبي غير صفري وعدد غير نسبي يكون عددًا نسبيًا أم غير نسبي؟ اشرح استنتاجك.

38. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب معادلة تبين مجموع جذرين لهما مجذوران مختلفان. اشرح كيف يمكنك جمع هذه الحدود.

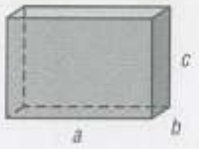
39. **الكتابة في الرياضيات** اشرح خطوة بخطوة طريقة ضرب تعبيرين جذريين يشتمل كل منهما على حدين. اكتب مثالًا لتوضيح شرحك.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تمرين على الاختبار المعياري

40. **إجابة قصيرة** يبلغ التعداد السكاني في إحدى البلدات 13,000 نسمة ويزداد بحوالي 250 نسمة في العام. ويمكن تمثيل هذا من خلال المعادلة $p = 13{,}000 + 250y$. حيث y هو عدد الأعوام من الآن و p يمثل التعداد السكاني. فكم عدد الأعوام المستغرقة إلى أن يصل التعداد السكاني لهذه البلدة إلى 14,500 نسمة؟

41. **الهندسة** أي تعبير مما يلي يمثل مجموع أطوال الـ 12 حافة في هذا المجسم المستطيل؟



A $2(a + b + c)$
B $3(a + b + c)$
C $4(a + b + c)$
D $12(a + b + c)$

42. جد قيمة $\sqrt{n - 9}$ و $\sqrt{n} - \sqrt{9}$ حيث $n = 25$.

F 4; 4
G 4; 2
H 2; 4
J 2; 2

43. يتم الحصول على مقدار التيار الكهربائي I في دائرة كهربائية بسيطة من خلال الصيغة $I = \frac{V}{R}$. حيث V هو الجهد الكهربائي و R هو مقاومة الدائرة الكهربائية. فإذا ظل الجهد ثابتًا، فما التأثير الذي ستحدثه مضاعفة مقاومة الدائرة على التيار الكهربائي؟

A سيظل التيار كما هو.
B سيصل التيار إلى مثلي قيمته السابقة.
C سيصل التيار إلى نصف قيمته السابقة.
D سيزداد التيار بوحدتين عن قيمته السابقة.

مراجعة شاملة

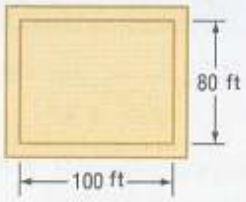
بسّط.

44. $\sqrt{18}$
45. $\sqrt{24}$
46. $\sqrt{60}$
47. $\sqrt{50a^3b^5}$
48. $\sqrt{169x^4y^7}$
49. $\sqrt{63c^3d^4f^5}$

50. **كرة الركل** رُكلت كرة في الهواء. وفقا للعلاقة $h = -16t^2 + 60t$ حيث h ارتفاع الكرة بالأمتار بعد عدد t من الثواني.

a. ما ارتفاع الكرة بعد ثانية واحدة؟
b. متى ستصل الكرة إلى أقصى ارتفاع لها؟
c. متى ستسقط الكرة على الأرض؟

51. **أرصفة المشاة** تقوم إحدى المدن بإصلاح أرصفة المشاة. فإذا كان الرصيف له نفس العرض حول المربع السكني، فاكتب تعبيرًا يمثل مساحة هذا المربع والرصيف.



مراجعة المهارات

حُلّ كل معادلة فيما يلي. وقرّب الحل إلى أقرب جزء من عشرة، إذا لزم الأمر.

52. $-4c - 1.2 = 0.8$
53. $-2.6q - 33.7 = 84.1$
54. $0.3m + 4 = 9.6$
55. $-10 - \frac{n}{5} = 6$
56. $\frac{-4h - (-5)}{-7} = 13$
57. $3.6t + 6 - 2.5t = 8$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

8-6 مختبر الجبر
تبسيط تعابير الجذور النونية

معكوس رفع عددٍ إلى القوة النونية هو إيجاد **الجذر النوني** لذلك العدد. ويشير **دليل** التعبير الجذري إلى نوع قيمة الجذر الذي يتم أخذه من أسفل المجذور. فيُشار إلى الجذر الرابع للعدد بالدليل 4. وعند تبسيط التعبير الجذري الذي به متغير له أس في المجذور، تتم قسمة الأس على الدليل.

$13 \div 5 = 2 \text{ R } 3 \longrightarrow \sqrt[5]{x^{13}} = x^2 \cdot \sqrt[5]{x^3}$

ناتج القسمة ← x^2 — دليل ← 5 — الباقي ← x^3

مثال 1 تبسيط التعابير

بسّط كل تعبير فيما يلي.

a. $\sqrt[3]{x^7}$

$\sqrt[3]{x^7} = x^2\sqrt[3]{x}$ $\quad 7 \div 3 = 2 \text{ R } 1$

b. $\sqrt[5]{32x^9}$

$\sqrt[5]{32x^9} = \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{x^9}$ خاصية الضرب

$= 2x\sqrt[5]{x^4}$ $\quad 9 \div 5 = 1 \text{ R } 4$

تُطبق خواص الجذور التربيعية (والجذور *النونية*) أيضًا عندما يشتمل المجذور على كسور. افصل البسط والمقام ثم بسّط كلاً منهما على حدة.

مثال 2 تبسيط التعابير ذات الكسور

بسّط $\sqrt[3]{\frac{27x^5}{8y^3}}$.

$\sqrt[3]{\frac{27x^5}{8y^3}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[3]{y^3}}$ خاصية ضرب الجذور

$= \frac{3}{2} \cdot \frac{x\sqrt[3]{x^2}}{y}$ بسّط.

$= \frac{3x\sqrt[3]{x^2}}{2y}$ خاصية ضرب الجذور

يجب أن تكون أدلة التعابير الجذرية *والمجذورات* متماثلة حتى يمكن جمع التعابير الجذرية أو طرحها.

مثال 3 جمع الحدود المتشابهة

بسّط $8\sqrt[4]{\frac{4}{3}} + \sqrt[4]{\frac{5}{4}} - 3\sqrt[4]{\frac{4}{3}} + \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$.

اجمع التعابير ذات الأدلة والمجذورات المتطابقة. ثم بسّط ما يلي.

$8\sqrt[4]{\frac{4}{3}} + \sqrt[4]{\frac{5}{4}} - 3\sqrt[4]{\frac{4}{3}} + \sqrt[3]{\frac{4}{3}} = (8-3)\sqrt[4]{\frac{4}{3}} + \sqrt[4]{\frac{5}{4}} + \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$ خاصية التجميع

$= 5\sqrt[4]{\frac{4}{3}} + \sqrt[4]{\frac{5}{4}} + \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$ بسّط.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

عند ضرب التعابير الجذرية، تأكد أن الأدلة متماثلة. ثم اضرب المجذورات وبسّطها إن أمكن ذلك.
وبمجرد عدم إمكانية جمع أو تبسيط الحدود المتبقية، يُعتبر التعبير مبسّطًا.

مثال 4 تبسيط التعابير ذات نواتج الضرب

بسّط $5\sqrt[4]{6} \cdot 2\sqrt[4]{12} \cdot \sqrt[3]{10}$.

اضرب المجذورات ذات الأدلة المتطابقة.

$$5\sqrt[4]{6} \cdot 2\sqrt[4]{12} \cdot \sqrt[3]{10} = (5 \cdot 2)(\sqrt[4]{6} \cdot \sqrt[4]{12}) \cdot \sqrt[3]{10}$$ خاصية التجميع

$$= 10 \cdot (\sqrt[4]{6} \cdot \sqrt[4]{12}) \cdot \sqrt[3]{10}$$ اضرب.

$$= 10\sqrt[4]{72}\sqrt[3]{10}$$ اضرب.

ستظل خواص التعابير الجذرية كما هي عندما تكون هناك متغيرات في المجذور.

مثال 5 تبسيط التعابير باستخدام عمليات متعددة

بسّط $6\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{x^3} + 3(\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x})$.

اتبع ترتيب العمليات وخواص التعابير الجذرية.

$$6\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{x^3} + 3(\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x}) = 6\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{x^3} + 3(3\sqrt[3]{x})$$ بجمع الحدود المتشابهة.

$$= 6\sqrt[4]{x \cdot x^3} + 3(3\sqrt[3]{x})$$ خاصية التجميع

$$= 6\sqrt[4]{x^4} + 9\sqrt[3]{x}$$ اضرب.

$$= 6x + 9\sqrt[3]{x}$$ بسّط.

تمارين

بسّط كل تعبير فيما يلي.

1. $\sqrt[3]{c^6}$
2. $\sqrt[4]{16d^9}$
3. $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{3}$
4. $\sqrt[3]{\frac{8a^4}{125b^7}}$
5. $\sqrt[5]{\frac{32x^4}{5y^6z^5}}$
6. $\sqrt[4]{\frac{3}{2}} + 5\sqrt[4]{\frac{3}{2}} - 2\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$
7. $3\sqrt[4]{6} \cdot 4\sqrt[4]{6} \cdot 5\sqrt[4]{8}$
8. $3\sqrt[4]{x^2} + 2\sqrt[4]{x} \cdot 4\sqrt[4]{x}$
9. $\sqrt[5]{a} \cdot 2\sqrt[5]{a^3} - 2(\sqrt[5]{a} + 4\sqrt[5]{a})$
10. $\sqrt[4]{\frac{x}{4}} + 5\sqrt[4]{\frac{x}{4}} - 2\sqrt[4]{\frac{2x}{3}}$
11. $\sqrt[4]{\frac{8a^2}{15b^3}} \cdot 3\sqrt[4]{\frac{2a^3}{27b}}$
12. $\sqrt[4]{\frac{16x^3}{81y^5}} + 3\sqrt[4]{\frac{x^3}{y}} + \sqrt[3]{\frac{16x}{y^8}}$

فكّر فيما يلي

13. قدّم مثالاً على تعبيرين جذريين يحتويان على مجذورين غير متشابهين يمكن جمعهما بخاصية الجمع.

14. قدّم مثالاً على تعبيرين جذريين يحتويان على دليلين متطابقين ومتغيرات متماثلة في المجذور لا يمكن جمعهما بخاصية الجمع.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

8 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

خاصية ضرب الأسس وخاصية قسمة الأسس (الدرسان 8-1 و 8-2)

لأي عددين حقيقيين غير الصفر a و b وأي أعداد حقيقية m و n و p، ينطبق ما يلي.

- ناتج ضرب الأسس: $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- رفع القوى: $(a^m)^n = a^{m \times n}$
- القوة لناتج ضرب: $(ab)^m = a^m b^m$
- ناتج قسمة الأسس: $\frac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$
- القوة لناتج قسمة: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
- الأس الصفري: $a^0 = 1$
- الأس السالب: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ و $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$

الأسس النسبية (الدرس 8-3)

لأي عدد حقيقي موجب b وأي عددين صحيحين m و $n > 1$، ينطبق ما يلي.

$$b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b} \qquad b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b} \qquad b^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{b}\right)^m \text{ or } \sqrt[n]{b^m}$$

الترميز العلمي (الدرس 8-4)

- يكون العدد مكتوبًا بالترميز العلمي إذا كان بالصيغة $a \times 10^n$، حيث $1 \le a < 10$.
- للكتابة بالصيغة المعيارية:
- إذا كانت $n > 0$، فانقل النقطة العشرية بمقدار n منازل إلى اليمين.
- إذا كانت $n < 0$، فانقل النقطة العشرية بمقدار n منازل إلى اليسار.

تبسيط التعابير الجذرية (الدرس 8-5)

- يكون التعبير الجذري في أبسط صورة عندما
  - لا يوجد مجذور به عوامل المربع الكامل غير 1.
  - لا يوجد مجذور مشتمل على كسور.
  - لا يظهر أي مجذور في مقام الكسر.

العمليات على التعابير والمعادلات الجذرية (الدرسان 8-6)

- التعابير الجذرية ذات المجذورات المتشابهة يمكن جمعها أو طرحها.
- استخدم طريقة فويل لضرب التعابير الجذرية.

مطويات منظّم الدراسة

تأكد من إدراج المفاهيم الأساسية في المطوية.

المفردات الأساسية

أحادية الحد monomial	نسبة مشتركة common ratio
الأس السالب negative exponent	المرابحة المركبة compound interest
الجذر النوني nth root n	ثابت constant
رتبة المقدار order of magnitude	الجذر التكعيبي cube root
الأس النسبي rational exponent	الاضمحلال الأسيّ exponential decay
صيغة تكرارية recursive formula	المعادلة الأسيّة exponential equation
الترميز العلمي scientific notation	الدالة الأسيّة exponential function
الأس الصفري zero exponent	النمو الأسيّ exponential growth
	متتالية هندسية geometric sequence

مراجعة المفردات

اختر أفضل كلمة أو مصطلح لإكمال كل جملة بالشكل الأمثل.

1. $7xy^4$ مثال على _____.
2. _____ من 95,234 هي 10^5.
3. 2 هي _____ لـ 8.
4. يمكن تمديد قواعد العمليات باستخدام الأسس لتنطبق على التعابير التي بها _____ مثل $7^{\frac{2}{3}}$.
5. العدد المكتوب بـ _____ يكون بالصيغة $a \times 10^n$، حيث $1 \le a < 10$ و n عدد صحيح.
6. $f(x) = 3^x$ مثال على _____.
7. $a_1 = 4$ و $a_n = 3a_{n-1} - 12$. إذا كانت $n \ge 2$، هي _____ للمتتابعة ... 4, −8, −20, −32,.
8. $2^{3x-1} = 16$ مثال على _____.
9. معادلة _____ هي $y = C(1 - r)^t$.
10. إذا كانت $a^n = b$ للعدد الصحيح الموجب n، فإن a هي _____ في b.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة درس بدرس

8-1 خواص ضرب الأسس

مثال 1

حوّل لأبسط صورة $(5x^2y^3)(2x^4y)$.

$(5x^2y^3)(2x^4y)$

$= (5 \times 2)(x^2 \times x^4)(y^3 \times y)$ خاصية التبديل

$= 10x^6y^4$ ناتج ضرب الأسس

مثال 2

بسّط $(3a^2b^4)^3$.

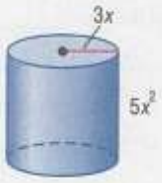
$(3a^2b^4)^3 = 3^3(a^2)^3(b^4)^3$ ناتج ضرب الأسس

$= 27a^6b^{12}$ بسّط.

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

11. $x \times x^3 \times x^5$
12. $(2xy)(-3x^2y^5)$
13. $(-4ab^4)(-5a^5b^2)$
14. $(6x^3y^2)^2$
15. $\left[(2r^3t)^3\right]^2$
16. $(-2u^3)(5u)$
17. $(2x^2)^3(x^3)^3$
18. $\frac{1}{2}(2x^3)^3$

19. **الهندسة** استخدم القانون $V = \pi r^2 h$ لإيجاد حجم الأسطوانة.



8-2 خواص قسمة الأسس

مثال 3

حوّل لأبسط صورة $\frac{2k^4m^3}{4k^2m}$. افترض أنه لا يوجد مقام يساوي الصفر.

$\frac{2k^4m^3}{4k^2m} = \left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{k^4}{k^2}\right)\left(\frac{m^3}{m}\right)$ تجميع المقادير الأسية ذات الأساس الواحد.

$= \left(\frac{1}{2}\right)k^{4-2}m^{3-1}$ ناتج قسمة الأسس

$= \frac{k^2m^2}{2}$ بسّط.

مثال 4

حوّل لأبسط صورة $\frac{t^4uv^{-2}}{t^{-3}u^7}$. افترض أنه لا يوجد مقام يساوي الصفر.

$\frac{t^4uv^{-2}}{t^{-3}u^7} = \left(\frac{t^4}{t^{-3}}\right)\left(\frac{u}{u^7}\right)(v^{-2})$ تجميع المقادير الأسية ذات الأساس الواحد.

$= (t^{4+3})(u^{1-7})(v^{-2})$ ناتج قسمة الأسس

$= t^7u^{-6}v^{-2}$ بسّط.

$= \frac{t^7}{u^6v^2}$ بسّط.

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. افترض أنه لا يوجد مقام يساوي صفرًا.

20. $\frac{(3x)^0}{2a}$
21. $\left(\frac{3xy^3}{2z}\right)^3$
22. $\frac{12y^{-4}}{3y^{-5}}$
23. $a^{-3}b^0c^6$
24. $\frac{-15x^7y^8z^4}{-45x^3y^5z^3}$
25. $\frac{(3x^{-1})^{-2}}{(3x^2)^{-2}}$
26. $\left(\frac{6xy^{11}z^9}{48x^6yz^{-7}}\right)^0$
27. $\left(\frac{12}{2}\right)\left(\frac{x}{y^5}\right)\left(\frac{y^4}{x^4}\right)$

28. **الهندسة** تبلغ مساحة أحد المستطيلات $25x^2y^4$ متر مربع. ويبلغ عرض المستطيل $5xy$ متر. فما طول المستطيل؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

8-3 الأسس النسبية

بسّط.

30. $\sqrt[6]{729}$

29. $\sqrt[3]{343}$

32. $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$

31. $625^{\frac{1}{4}}$

34. $32^{\frac{2}{5}}$

33. $256^{\frac{3}{4}}$

36. $\left(\frac{4}{49}\right)^{\frac{3}{2}}$

35. $343^{\frac{4}{3}}$

حُـلّ كل من المعادلات التالية.

38. $4^{4x-1} = 32$

37. $6^{x} = 7776$

مثال 5

بسّط $125^{\frac{2}{3}}$.

$b^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{b})^m$

$125^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{125})^2$

$64 = 4^3$

$= (\sqrt[3]{5 \times 5 \times 5})^2$

بسّط.

$= 5^2$ or 25

مثال 6

حُـلّ المعادلة $9^{x-1} = 729$.

$9^{x-1} = 729$	المعادلة الأصلية
$9^{x-1} = 9^3$	أعد كتابة 927 بالصيغة 9^3.
$x - 1 = 3$	خاصية المساواة في الأسس
$x = 4$	أضف 1 إلى كل طرف.

8-4 الترميز العلمي

عبّر عن كل عدد بالترميز العلمي.

40. 0.0000543

39. 2,300,000

41. **علم الفلك** يبلغ قطر الكرة الأرضية 12,700 km تقريبًا. يبلغ قطر كوكب المشتري 140,000 km تقريبًا. اكتب بالترميز العلمي نسبة قطر الكرة الأرضية إلى قطر كوكب المشتري.

مثال 7

عبّر عن العدد 300,000,000 بالترميز العلمي.

الخطوة 1 300,000,000 ← 3.00000000

الخطوة 2 تحركت النقطة العشرية 8 منازل إلى اليسار. إذًا $n = 8$.

الخطوة 3 $300,000,000 = 3 \times 10^8$

8-5 تبسيط التعابير الجذرية

بسّط.

43. $\sqrt{20ab^3}$

42. $\sqrt{36x^2y^7}$

45. $2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{12}$

44. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$

47. $(1 + \sqrt{2})^2$

46. $(4 - \sqrt{5})^2$

49. $\sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}$

48. $\sqrt{\frac{50}{a^2}}$

51. $\frac{5}{\sqrt{7} + 6}$

50. $\frac{3}{2 - \sqrt{5}}$

52. **الطقس** لتقدير كم من الوقت ستستمر عاصفة رعدية، استخدم المعادلة $t = \sqrt{\frac{d^3}{216}}$ ، حيث t هو الزمن بالساعات و d هو قطر العاصفة بالكيلومترات. وحيث إن قطر العاصفة يبلغ 10 km، فكم من الوقت ستستمر؟

مثال 8

بسّط $\frac{2}{4 + \sqrt{3}}$.

$\frac{2}{4 + \sqrt{3}}$	التعبير الأصلي
$= \frac{2}{4 + \sqrt{3}} \cdot \frac{4 - \sqrt{3}}{4 - \sqrt{3}}$	أنطق المقام.
$= \frac{2(4) - 2\sqrt{3}}{4^2 - (\sqrt{3})^2}$	$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
$= \frac{8 - 2\sqrt{3}}{16 - 3}$	$(\sqrt{3})^2 = 3$
$= \frac{8 - 2\sqrt{3}}{13}$	بسّط.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

8-6 العمليات على التعابير الجذرية

بسّط كل تعبير مما يلي.

53. $\sqrt{6} - \sqrt{54} + 3\sqrt{12} + 5\sqrt{3}$

54. $2\sqrt{6} - \sqrt{48}$

55. $4\sqrt{3x} - 3\sqrt{3x} + 3\sqrt{3x}$

56. $\sqrt{50} + \sqrt{75}$

57. $\sqrt{2}(5 + 3\sqrt{3})$

58. $(2\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{10} + 4\sqrt{6})$

59. $(6\sqrt{5} + 2)(4\sqrt{2} + \sqrt{3})$

60. **الحركة** يمكن إيجاد السرعة المتجهة لجسم ما يسقط عند اصطدامه بالأرض باستخدام $v = \sqrt{2gd}$. حيث v هي السرعة المتجهة بالأمتار في الثانية، و g هو التسارع بفعل الجاذبية، و d هي المسافة بالأمتار التي يسقطها الجسم. جد سرعة فلس عند اصطدامه بالأرض، بعد سقوطه من ارتفاع 984 m. استخدم $9.75\ m/sec^2$ لإيجاد قيمة g.

مثال 9

بسّط $2\sqrt{6} - \sqrt{24}$.

$2\sqrt{6} - \sqrt{24} = 2\sqrt{6} - \sqrt{4 \cdot 6}$ خاصية ناتج الضرب

$= 2\sqrt{6} - 2\sqrt{6}$ بسّط.

$= 0$ بسّط.

مثال 10

بسّط $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})$.

$(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})$

$= (\sqrt{3})(\sqrt{3}) + (\sqrt{3})(2\sqrt{2}) + (-\sqrt{2})(\sqrt{3}) + (\sqrt{2})(2\sqrt{2})$

$= 3 + 2\sqrt{6} - \sqrt{6} + 4$

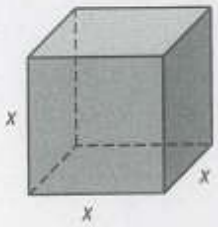
$= 7 + \sqrt{6}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

8 تدريب على الاختبار

حوّل كل تعبير لأبسط صورة.

1. $(x^{2})(7x^{8})$
2. $(5a^{7}bc^{2})(-6a^{2}bc^{5})$
3. **الاختيار من متعدد** عبّر عن حجم الجسم الصلب بدالة أحادية الحد.



A x^{3} C $6x^{3}$

B $6x$ D x^{6}

حوّل كل تعبير لأبسط صورة. افترض أنه لا يوجد مقام يساوي 0.

4. $\frac{x^{6}y^{8}}{x^{2}}$
5. $\left(\frac{2a^{4}b^{3}}{c^{6}}\right)^{0}$
6. $\frac{2xy^{-7}}{8x}$

بسّط.

7. $\sqrt[3]{1000}$
8. $\sqrt[5]{3125}$
9. $1728^{\frac{1}{3}}$
10. $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{2}}$
11. $27^{\frac{2}{3}}$
12. $10{,}000^{\frac{3}{4}}$
13. $27^{\frac{5}{3}}$
14. $\left(\frac{1}{121}\right)^{\frac{3}{2}}$

حُلّ كل من المعادلات التالية.

15. $12^{x} = 1728$
16. $7^{x-1} = 2401$
17. $9^{x-3} = 729$

عبّر عن كل عدد بالترميز العلمي.

18. 0.00021
19. 58,000

عبّر عن كل عدد بالصيغة المعيارية.

20. $2.9 \times 10^{5-}$
21. 9.1×10^{6}

جد قيمة كل ناتج ضرب أو ناتج قسمة. عبّر عن النتائج بالترميز العلمي.

22. $(2.5 \times 10^{3})(3 \times 10^{4})$
23. $\frac{8.8 \times 10^{2}}{4 \times 10^{-4}}$
24. **علم الفلك** يبلغ متوسط المسافة من كوكب عطارد إلى الشمس 57,910,000 km. عبّر عن هذه المسافة بالترميز العلمي.

حل كل معادلة مما يلي، وتحقق من حلّك.

25. $\sqrt{10x} = 20$
26. $\sqrt{4x-3} = 6 - x$
27. **التعبئة** حاوية إسطوانية بها مزيج من مشروب الشوكولاته يبلغ حجمها حوالي $162\ cm^{3}$. ويمكن إيجاد نصف قطر الحاوية باستخدام الصيغة $r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$. حيث r هو نصف القطر و h هو الارتفاع. فإذا كان الارتفاع 8.25 cm، فجد نصف قطر الحاوية.
28. **الاختيار من متعدد** أي من التعابير التالية يعد مكافئًا لـ $\sqrt{\frac{16}{32}}$؟

F $\frac{1}{2}$

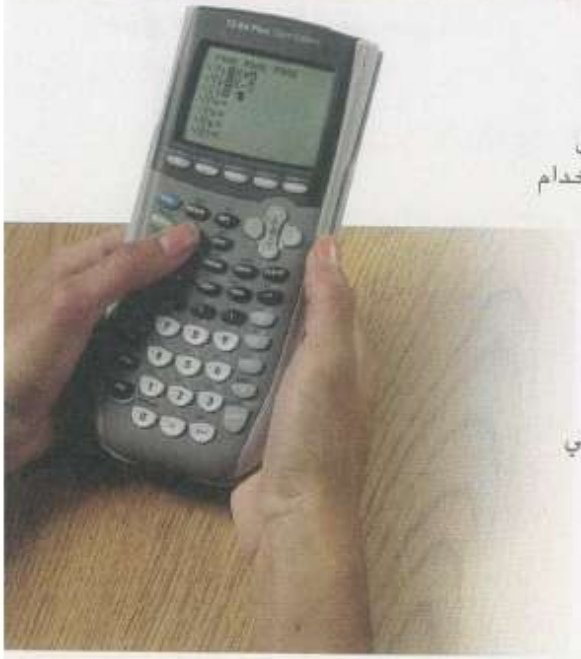
G $\frac{\sqrt{2}}{2}$

H 2

J 4

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

8 التحضير للاختبارات المعيارية



استخدام حاسبة علمية أو حاسبة تمثيل بياني

الحاسبات العلمية وحاسبات التمثيل البياني أدوات قوية لحل المسائل.
هناك أوقات يمكن استخدام حاسبة فيها لإجراء الحسابات بشكل أسرع وأسهل. مثل الحسابات التي تتضمن أرقامًا كبيرة للغاية. إلا أن هناك أوقات من اللازم فيها استخدام حاسبة. مثل تقدير الأعداد غير النسبية.

إستراتيجيات استخدام حاسبة علمية أو حاسبة تمثيل بياني

الخطوة 1

تعرف على الوظائف المتعددة التي تقوم بها الحاسبة العلمية وحاسبة التمثيل البياني إلى جانب المواقف التي ينبغي استخدامها فيها:

- **الأسس** الترميز العلمي. الحسابات ذات الأعداد الكبيرة أو الصغيرة
- **π (Pi)** حل مسائل الدائرة. مثل المحيط والمساحة
- **الجذور التربيعية** المسافة على مستوى إحداثي. نظرية فيثاغورس
- **التمثيلات البيانية** تحليل ثنائيات البيانات في مخطط انتشار. تمثيل الدوال بيانيًا. إيجاد جذور المعادلات

الخطوة 2

استخدام الحاسبة العلمية أو حاسبة التمثيل البياني في حل المسألة.

- تذكر أن تعمل بكفاءة قدر الإمكان. قد يتم إجراء بعض الخطوات ذهنيًا أو باليد. بينما ينبغي استكمال خطوات أخرى باستخدام حاسبتك.
- إذا سمح الوقت. فتحقق من إجابتك.

مثال على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها.

تبلغ المسافة من الشمس إلى كوكب المشتري 7.786×10^{11} m تقريبًا. إذا كانت سرعة الضوء تبلغ 3×10^{8} m/sec تقريبًا. فكم يستغرق الضوء للوصول من الشمس إلى كوكب المشتري؟ قرب إلى أقرب دقيقة.

A حوالي 43 دقيقة
B حوالي 51 دقيقة
C حوالي 1876 دقيقة
D حوالي 2595 دقيقة

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

اقرأ المسألة بعناية. حصلت على المسافة التقريبية بين الشمس وكوكب المشتري إلى جانب سرعة الضوء. كلا المقدارين مذكوران بترميز علمي. مطلوب منك أن تجد عدد الدقائق التي يستغرقها الضوء للوصول من الشمس إلى كوكب المشتري. استخدم مسافة العلاقة = السرعة × الزمن لإيجاد المقدار.

$$d = r \times t$$

$$\frac{d}{r} = t$$

لإيجاد مقدار الزمن، اقسم المسافة على السرعة. لاحظ أن وحدات الزمن ستكون الثواني.

$$\frac{7.786 \times 10^{11}\ \text{m}}{3 \times 10^{8}\ \text{m/s}} = t \text{ ثانية}$$

استخدم حاسبة علمية للتوصل بسرعة إلى ناتج القسمة. في معظم الحاسبات العلمية، يُستخدم مفتاح EE لإدخال الأرقام بالترميز العلمي.

خطوات العملية على الحاسبة: (7.786 2nd [EE] 11) ÷ (3 2nd [EE] 8) ENTER

النتيجة هي 2595.33333333 ثانية. لتحويل هذا العدد إلى دقائق، استخدم حاسبتك لقسمة النتيجة على 60. يعطي هذا إجابة تبلغ حوالي 43.2555 دقيقة. الإجابة هي A.

تمارين

اقرأ كل مسألة. حدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدم المعلومات الواردة في المسألة لحلها.

1. منذ إنشاء موقع إلكتروني شهير على الإنترنت قبل 5 سنوات، تم بيع حوالي 2.504×10^7 عنصر أو تداوله عليه. ما المتوسط اليومي لعدد العناصر التي يتم بيعها أو تداولها على مدار 5 سنوات؟

A حوالي 9640 عنصرًا في اليوم

B حوالي 13,720 عنصرًا في اليوم

C حوالي 1,025,000 عنصر في اليوم

D حوالي 5,008,000 عنصر في اليوم

2. جد قيمة $\sqrt{ab}$ إذا كانت $a = 121$ و $b = 23$.

F حوالي 5.26

G حوالي 9.90

H 12 حوالي

J حوالي 52.75

3. يبلغ تعداد سكان الولايات المتحدة 3.034×10^8 نسمة تقريبًا. تبلغ مساحة البلد $3.54\ \text{km}^2$ إلى $9.17\ \text{km}^2$ تقريبًا. ما متوسط *الكثافة السكانية* (عدد الأشخاص في الميل المربع) في الولايات المتحدة؟

A حوالي 136.3 شخص في الكيلومتر المربع

B حوالي 30.2 شخص في الكيلومتر المربع

C حوالي 94.3 شخص في الكيلومتر المربع

D حوالي 33.1 شخص في الكيلومتر المربع

4. تصنع غاية غطاء لطبلة الفرقة العسكرية. يبلغ قطر الطبلة 20 cm. ضع تقديرًا لمساحة سطح الطبلة الكبيرة.

F $31.41\ \text{cm}^2$

G $62.83\ \text{cm}^2$

H $78.54\ \text{cm}^2$

J $314.16\ \text{cm}^2$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

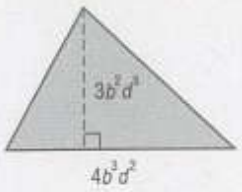
8 تدريب على الاختبار المعياري

تراكمي، الوحدات من 1 إلى 8

اختيار من متعدد

اقرأ كُل سؤال. ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي قدمها المعلم أو ورقة أخرى.

1. عبّر عن مساحة المثلث المرسوم بدالة أحادية حد.



A $12b^5d^7$

B $12b^6d^{10}$

C $6b^6d^{10}$

D $6b^5d^7$

2. حوّل التعبير التالي لأبسط صورة.

$$\left(\frac{2w^2z^5}{3y^4}\right)^3$$

F $\frac{2w^5z^8}{3y^7}$

G $\frac{8w^6z^{15}}{27y^{12}}$

H $\frac{8w^5z^8}{27y^7}$

J $\frac{2w^6z^{15}}{3y^{12}}$

3. ما معادلة المستقيم العمودي على

$y = \frac{3}{5}x - 3$?

A $y = -\frac{5}{3}x + 2$

B $y = -\frac{3}{5}x + 2$

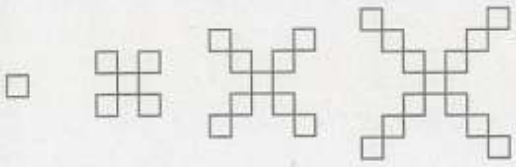
C $y = \frac{5}{3}x - 2$

D $y = \frac{3}{5}x - 2$

نصيحة عند حل الاختبار

السؤال 2 استخدم قوانين الأسس لتحويل التعبير لأبسط صورة. تذكّر أنه لإيجاد الأس لقوة أسيّة، اضرب الأسس.

4. اكتب صيغة تكرارية للمتتالية التي تمثل عدد المربعات في كل شكل.



F $a_1 = 1, a_n = 4a_{n-1} - 3, n \geq 1$

G $a_1 = 1, a_n = 4a_{n-1}, n \geq 2$

H $a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 4, n \geq 2$

J $a_1 = 1, a_n = 4a_{n-1} + 4, n \geq 2$

5. جد قيمة $(4.2 \times 10^6)(5.7 \times 10^8)$.

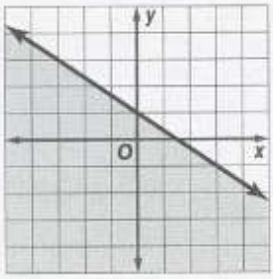
A 2.394×10^{15}

B 23.94×10^{14}

C 9.9×10^{14}

D 2.394×10^{48}

6. أي المتباينات تظهر في التمثيل البياني؟



F $y \leq -\frac{2}{3}x - 1$

G $y \leq -\frac{3}{4}x - 1$

H $y \leq -\frac{2}{3}x + 1$

J $y \leq -\frac{3}{4}x + 1$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الإجابة المختصرة/الإجابة الشبكية

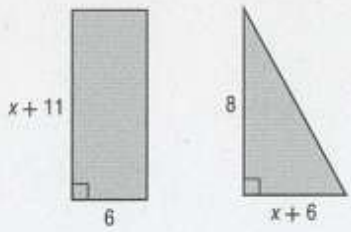
7. أنشأ سعيد موقع ويب لفريق الأولمبياد العلمي. يظهر العدد الإجمالي للزيارات التي تلقاها الموقع.

اليوم	إجمالي الزيارات	اليوم	إجمالي الزيارات
3	5	17	27
6	7	21	33
10	12	26	40
13	17	34	55

a. جـد معادلة خط الانحدار.

b. توقع عدد الزيارات الإجمالي الذي سيكون الموقع الإلكتروني قد تلقاه بحلول اليوم 46.

8. جـد قيمة x بحيث تكون الأشكال بمساحة واحدة.



9. ما حل نظام المعادلات التالي؟ اكتب الحل هنا.

$$\begin{cases} y = 6x - 1 \\ y = 6x + 4 \end{cases}$$

10. إجابة شبكية في مركز ألعاب عائلي. اشترت كل من عائلتي عامر وعبد الله رموز لعبة فيديو ورموز ملعب لضرب الكرة كما يظهر في الجدول.

الأسرة	عامر	عبد الله
عدد رموز لعبة الفيديو	25	30
عدد رموز ملعب ضرب الكرة	8	6
التكلفة الإجمالية	AED 26.50	AED 25.50

ما تكلفة رمز ملعب ضرب الكرة بالدرهم في مركز الألعاب العائلي؟

الإجابة الموسعة

اكتب إجاباتك على ورقة. اكتب الحل هنا.

11. يعرض الجدول أدناه المسافات من الشمس إلى كوكب عطارد والأرض والمريخ وزحل. استخدم البيانات للإجابة عن كل سؤال.

الكوكب	المسافة من الشمس (بالكيلومتر)
عطارد	5.79×10^7
الأرض	1.50×10^8
المريخ	2.28×10^8
زحل	1.43×10^9

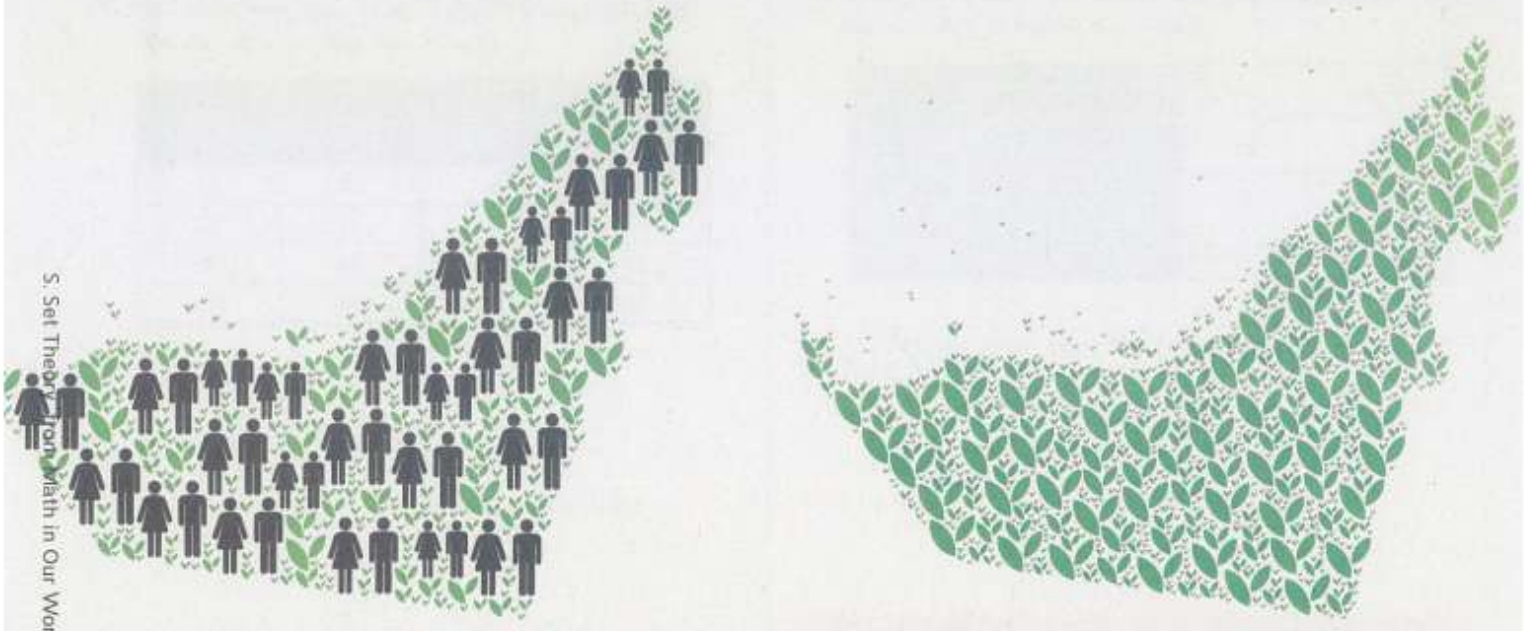
a. من بين الكواكب المدرجة، أيهم الأقرب إلى الشمس؟

b. كم ضعفًا يبلغ بُعد المريخ عن الشمس بالمقارنة بالأرض؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 9

نظرية المجموعات



لمحة عامة

1 مقدمة في نظرية المجموعات

2 المجموعات الجزئية والعمليات على المجموعات

3 استخدام مخططات فن Venn لدراسة العمليات على المجموعات

4 استخدام المجموعات لحل المسائل

الملخص

5 المجموعات غير المنتهية

S. Set Theory from Math in Our World Chapter 2 © 2019 McGraw-Hill Education

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 9-1 مقدمة في نظرية المجموعات

أهداف التعلم

1. تعريف المجموعة.
2. كتابة المجموعات بثلاث طرق مختلفة.
3. تعريف المجموعة الخالية.
4. إيجاد عدد العناصر الرئيسة في المجموعة.
5. تصنيف المجموعات إلى منتهية وغير منتهية.
6. تحديد ما إذا كانت المجموعتان متساويتين أم متكافئتين.

تحدد القوانين التي تقرر من يمكنه التصويت في انتخابات معينة مجموعة محددة جيدًا من الأشخاص. فإذا لم تكن المجموعة محددة جيدًا، فسيكون تطبيق القانون مستحيلًا تقريبًا.

هل فكرت من قبل في الدور الذي يقوم به تجميع الأشياء في حياتنا اليومية؟ فكّر في كافة المجموعات الجزئية التي بين الأشخاص الذين تعرفهم فقط. لديك مجموعة الأصدقاء المقربين، مجموعة أصدقاء التواصل الاجتماعي، مجموعة أفراد العائلة، مجموعة المعارف العابرين، مجموعة زملاء الدراسة، مجموعة الأساتذة، مجموعة زملاء العمل. . . كما أن لديك مجموعة المفاتيح، ومجموعة الملابس، والأجهزة الإلكترونية، والأطعمة، والبرامج التلفزيونية، وغيرها الكثير. فعالمنا بالكامل مقسم إلى مجموعات من الأشياء أو ما نسميه *المجموعات*. ومن ثم فإن دراسة المجموعات من منظور رياضي يُعد فرصة جيدة لدراسة كيفية استخدام الرياضيات في عالمنا. سيتم تنظيم دراستنا للمجموعات بالكامل بحسب الموضوعات التي في هذا القسم. تنظيم – هل فهمت ما أقصد؟ لن تجد هذا النوع من الدعابة الرديئة في معظم الكتب الدراسية.

المفاهيم الأساسية

لنبدأ بالتعريف الأساسي للمجموعات.

المجموعة عبارة عن تجميع للأشياء.

في دراستنا للمجموعات، سنرغب في تقييد انتباهنا بالمجموعات المحددة جيدًا. وتكون المجموعة **محددة جيدًا** إذا استطعنا –فيما يتعلق بأي عنصر محدد– تحديد ما إذا كان ضمن المجموعة أم لا بشكل موضوعي. على سبيل المثال، تُعد مجموعة "الحروف الأبجدية للغة العربية" محددة جيدًا لأنها تتكون من 28 حرفًا نستخدمها، دون غيرها من العناصر، لتكوين الحروف الأبجدية. أما مجموعة "الأشخاص الطوال القامة" في صفك، فليست محددة جيدًا لأن تحديد من ينتمي إلى هذه المجموعة تحديدًا دقيقًا موضع تأويل. وهكذا، لكي تكون المجموعة محددة جيدًا، يجب أن يستند تحديد ما تحتوي عليه وما لا تحتوي عليه إلى حقائق وليس إلى وجهات نظر.

1. تعريف المجموعة.

يسمى كل شيء في المجموعة **عنصرًا** أو عضوًا في المجموعة. يُطلق على إحدى طرق تصميم المجموعة **طريقة ذكر العناصر أو ذكر عناصرها**. وفيها تُدرج العناصر بين قوسين، مع الفصل بينها باستخدام الفواصل. ولا يُعد ترتيب العناصر مهمًا، فالمجموعتان {2, 5, 7} و{5, 2, 7} هما نفسهما. ونسمّي المجموعات غالبًا باستخدام حرف كبير من أحرف الانجليزية.

مثال 1 كتابة المجموعة باستخدام ذكر العناصر

اكتب مجموعة شهور السنة التي تبدأ بحرف M في اللغة الإنجليزية. هل هذه المجموعة محددة جيدًا؟ لمَ أو لمَ لا؟

الحل

الشهران اللذان يبدءان بالحرف M هما March وMay. ويمكن كتابة الإجابة باستخدام رمز المجموعة كما يلي

$$M = \{\text{March. May}\}$$

وهذه مجموعة محددة جيدًا لأن كلًا من اسماء الشهور إما أن يبدأ بحرف M أو لا، فلا تحتمل التأويل.

ملاحظة رياضية

توضّح الفواصل التي بين العناصر أن عناصر المجموعة هي الأسماء، وليست الحروف الفردية.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

جرّب هذا 1

اكتب مجموعة اسماء الشهور التي تنتهي بحرف *y* في اللغة الإنجليزية.

في الرياضيات، يجرى تحديد مجموعة *أعداد العد* أو **الأعداد الطبيعية** كما يلي $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. (عندما تصمم المجموعات، فإن النقاط الثلاث، أو *علامة القطع*، تعني أن قائمة العناصر تستمر بشكل لا نهائي بالنمط نفسه). المجموعة $E = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ هي مجموعة **الأعداد الطبيعية الزوجية** والمجموعة $O = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ هي مجموعة **الأعداد الطبيعية الفردية**.

مثال 2 كتابة المجموعات بذكر العناصر

استخدم طريقة ذكر العناصر للقيام بما يلي:

(a) كتابة مجموعة الأعداد الطبيعية التي تقل عن 6.
(b) كتابة مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية التي تزيد عن 4.
(c) هل يمكنك التفكير في طريقة أخرى لوصف كل مجموعة لفظيًا؟

الحل

(a) {1, 2, 3, 4, 5}
(b) {5, 7, 9, 11, . . .}
(c) يمكن وصف المجموعة الأولى بمجموعة الأعداد الطبيعية التي تقل عن أو تساوي 5، أو المحصورة بين 0 و6.
ويمكن وصف المجموعة الثانية بمجموعة الأعداد الفردية التي تزيد عن 3، أو التي تزيد عن أو تساوي 5.

ملاحظة رياضية

يمكنك إدراج عنصر المجموعة أكثر من مرة إذا كان يعني الكثير بالنسبة إليك، لكن لا يوجد سبب جيد تحديدًا لذكر التكرار. على سبيل المثال، مجموعة حروف كلمة *تكرار* تُكتب هكذا {ت، ك، ر، ا}.

جرّب هذا 2

اكتب كل مجموعة، باستخدام طريقة ذكر العناصر، ثم اكتب وصفًا بديلًا واحدًا على الأقل لكل مجموعة.

(a) مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية من 80 إلى 90.
(b) مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية التي تزيد عن 10.

تنبيه

يتساءل الطلاب غالبًا عن عدد عناصر المجموعة التي يكتبونها قبل الإنهاء بعلامة القطع. الإجابة الصحيحة هي "سبعة". مجرد مزاح — لا توجد قاعدة محددة. نأكد فقط من تضمين أعداد كافية توضح النمط. فبالنسبة إلى (b)2 على سبيل المثال، سيترك الاكتفاء بكتابة {5, 7, . . .} أي عدد من التفسيرات المحتملة: {5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, . . .}. أما {5, 7, 10, 14, . . .} فهما الزوجان اللذان سيتبادران إلى الذهن.

ملاحظة رياضية

يستخدم البعض الرمز ∋ عند القراءة من اليمين إلى اليسار.

يُستخدم الرمز ∈ – **ينتمي**– لتوضيح أن شيئًا ما عنصرًا في المجموعة. على سبيل المثال، إذا كانت *A* هي مجموعة الأعداد الأولية، فيمكننا كتابة $7 \in A$. وتُقرأ " 7 أحد عناصر المجموعة *A* أو7 ينتمي الى *A* ." وبالمثل، يمكننا كتابة $11 \in A$.

وعندما لا يكون الشيء عنصرًا في المجموعة، فإننا نستخدم الرمز ∉ – **لا ينتمي**–. حيث إن "9" ليس عددا أوليًا، يمكننا كتابة $9 \notin A$. وتُقرأ " 9 ليس عنصرًا في المجموعة *A* أو 9 لا ينتمي الى *A* ."

مثال 3 فهم رمز المجموعات

حدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يلي صائبة أم خاطئة.

(a) الجزائر تنتمي إلى *A*، حيث *A* هي مجموعة الدول الواقعة غرب نهر النيل.
(b) $27 \in \{1, 5, 9, 13, 17, \ldots\}$
(c) $z \notin \{v, w, x, y, z\}$

الحل

(a) تقع الجزائر غرب النيل، لذا فإن الجزائر عنصر في المجموعة *A*، العبارة صائبة.
(b) يوضح النمط أن كل عنصر يزيد بمقدار 4 عن العنصر السابق. ومن ثم تكون العناصر الثلاثة التالية 21 و25 و29؛ ثم تجاوز 27، ومن ثم فإن 27 لا ينتمي إلى المجموعة. العبارة خاطئة.
(c) الحرف z ينتمي إلى المجموعة، ومن ثم تكون هذه العبارة خاطئة.

ملاحظة رياضية

يمكن أن يكون رمز المجموعة مربكًا إلى حد ما، ويجب أن تكون حريصًا على كتابة ما تقصد. على سبيل المثال، من الخطأ كتابة $\{2,4,6\} \in \{6\}$، حيث يمثل الرمز {6} مجموعة تحتوي على 6، وهي ليست عنصرًا في {2,4,6}. ولكن يبقى كتابة $6 \in \{2,4,6\}$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

جرّب هذا 3

حدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يلي صائبة أم خاطئة.

(a) يوليو ينتمي إلى A، حيث A هي مجموعة اسماء الشهور بين يوم الأم واليوم العالمي للتحصيل.

(b) $21 \in \{2, 5, 8, 11, \ldots\}$

(c) صفر لا ينتمي إلى {ص، ف، ر}

ثمة ثلاث طرق شائعة لتصميم المجموعات:

1. طريقة *القائمة* أو *ذكر العناصر*.
2. *الطريقة الوصفية*.
3. *رمز بناء المجموعة*.

إننا نعرف بالفعل الكثير عن استخدام طريقة القائمة أو ذكر العناصر؛ حيث تُدرج عناصر المجموعة بين قوسين ويتم الفصل بينها بالفاصلة، كما في الأمثلة 1 إلى 3.

تستخدم **الطريقة الوصفية** عبارة لفظية قصيرة لوصف المجموعة.

مثال 4 وصف المجموعة باستخدام الطريقة الوصفية

استخدم الطريقة الوصفية لوصف المجموعة B التي تتضمن الأعداد 2 و4 و6 و8 و10 و12 بطريقتين مختلفتين.

الحل

إن كل العناصر التي في المجموعة أعداد طبيعية زوجية، وجميعها أقل من 14. ومن ثم تكون B هي مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية التي تقل عن 14. توجد طرق أخرى كثيرة يمكن وصف المجموعة بها. ومن بين الطرق الأخرى "مجموعة الأعداد الطبيعية التي تقع بين 1 و15 وتقبل القسمة على 2".

جرّب هذا 4

استخدم الطريقة الوصفية لوصف المجموعة A التي تتضمن العناصر $3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$ بطريقتين مختلفتين.

أما الطريقة الثالثة (والأرقى) لتصميم المجموعة، فهي **رمز بناء المجموعة**. وتستخدم هذه الطريقة *المتغيرات*.

المتغير عبارة عن رمز (يكون حرفًا عادة) يمكن أن يمثل عناصر مختلفة في مجموعة ما.

يستخدم رمز بناء المجموعة المتغير والأقواس والعمود الرأسي | الذي يُقرأ "بحيث". على سبيل المثال، يمكن كتابة المجموعة {1, 2, 3, 4, 5, 6} باستخدام رمز بناء المجموعة كما يلي

$$\{x | x \in N \text{ و } x < 7\}$$

ويقرأ ذلك كما يلي "مجموعة العناصر x بحيث x عدد طبيعي و x أقل من 7." يمكننا استخدام أي حرف أو رمز للمتغير، لكن يشيع استخدام x. (إذا كنت ترغب في مراجعة رموز المتباينة، فراجع موارد مراجعة الجبر عبر الإنترنت).

ملاحظة رياضية

عندما تسمع *متغيرًا*، قد تفكر تلقائيًا في حرف، مثل x أو y. لكن ينبغي لك التفكير فيما تعنيه كلمة *المتغير* بالفعل: شيء ما يمكن أن يتغير أو يتنوع. والمتغير هو مجرد رمز يمثل عددًا أو شيئًا ما يمكن أن يتغير.

مثال 5 كتابة مجموعة باستخدام رمز بناء المجموعة

استخدم رمز بناء المجموعة لتصميم كل مجموعة، ثم اكتب كيف ستُقرأ إجابتك بصوت عالٍ.

(a) تحتوي المجموعة R على العناصر 2 و4 و6.

(b) تحتوي المجموعة W على العناصر أحمر وأصفر وأزرق.

الحل

(a) $R = \{x | x \in E \text{ و } x < 7\}$. المجموعة x بحيث x عددٌ طبيعيٌّ زوجيٌّ و x أقل من 7.

(b) $W = \{x | x$ لون أساسي$\}$. مجموعة x بحيث x لون أساسي.

ملاحظة رياضية

لعلك لاحظت أن أحد الأمور الرائعة حول رمز المجموعة هو وجود أكثر من طريقة غالبًا لكتابة المجموعة في المثال 5، كان يمكننا كتابة $W = \{x | x$ أحد ألوان علم كولومبيا$\}$.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

جرّب هذا 5

استخدم رمز بناء المجموعة لتصميم كل مجموعة. ثم اكتب كيف ستُقرأ إجابتك بصوت عالٍ.

(a) تحتوي المجموعة K على العناصر 10, 12, 14, 16, 18.
(b) تحتوي المجموعة W على العناصر دانماركي وروماني.

مثال 6 استخدام رموز المجموعات المختلفة

حدد المجموعة S التي تضم العناصر . . . 32, 33, 34, 35, باستخدام

(a) طريقة ذكر العناصر.
(b) الطريقة الوصفية.
(c) رمز بناء المجموعة.

الحل

(a) {32, 33, 34, 35, . . .}

(b) المجموعة S هي مجموعة الأعداد الطبيعية الأكبر من 31.

(c) $\{x | x \in N, x > 31\}$

جرّب هذا 6

صمّم المجموعة التي تضم العناصر . . . 11, 13, 15, 17, باستخدام

(a) طريقة ذكر العناصر.
(b) الطريقة الوصفية.
(c) رمز بناء المجموعة.

إذا تضمنت المجموعة عناصر متعددة، فيمكننا إعادة استخدام علامة القطع لتمثيل العناصر المفقودة طالما كنا نستخدم نمطًا واضحًا. على سبيل المثال، تتضمن المجموعة {1, 2, 3, . . ., 99, 100} كل الأعداد الطبيعية من 1 إلى 100. وبالمثل، والمجموعة {a, b, c, . . ., x, y, z} تتضمن كل الحروف الهجائية الإنجليزية.

مثال 7 كتابة مجموعة باستخدام علامة القطع

باستخدام ذكر العناصر، اكتب المجموعة التي تتضمن كل الأعداد الطبيعية الزوجية التي بين 99 و201.

الحل

{100, 102, 104, . . . , 198, 200}

جرّب هذا 7

باستخدام ذكر العناصر، اكتب مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية التي بين 50 و500.

2. كتابة المجموعات بثلاث طرق مختلفة.

توجد بعض الحالات التي يكون من الضروري فيها تحديد المجموعة من دون عناصر. على سبيل المثال، لن تتضمن مجموعة الرئيسات السيدات للولايات المتحدة أشخاصًا. ومن ثم تكون بلا عناصر (على الأقل حتى كتابة هذه السطور).

تُسمى المجموعة التي لا تتضمن أي عناصر **المجموعة الخالية**. والرمزان المستخدمان لتمثيل المجموعة الخالية هما { } أو $\emptyset$.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

ملاحظة رياضية

في ديسمبر 2011، أعلنت مجموعة من العلماء من اليابان وروسيا أنها تأمل في استنساخ ماموثًا من الحمض النووي المتجمد لفترة طويلة والموجود في سيبيريا خلال 5 سنوات. أعتقد أنا قد نتفق جميعًا على أنه سيكون رائعًا جدًا. لذا فأنا أحتفظ بالحق في تغيير إجابتي عن المثال 8(b).

مثال 8 تحديد المجموعات الخالية

أي من المجموعات التالية خالية؟

(a) مجموعة أحافير الماموث في المتاحف
(b) $\{x|x$ ماموث صوفي حي$\}$
(c) $\{\emptyset\}$
(d) $\{x|x$ عدد طبيعي محصور بين 1 و2$\}$

الحل

(a) توجد بشكل مؤكد أحفورة ماموث على الأقل في أحد المتاحف في مكان ما. ومن ثم فإن المجموعة غير خالية.
(b) لقد انقرضت حيوانات الماموث منذ 8,000 سنة تقريبًا. ومن ثم تكون هذه المجموعة خالية بالتأكيد.
(c) هذه المجموعة مخادعة. فكل من $\{\ \}$ و$\emptyset$ يمثل المجموعة الخالية. لكن $\{\emptyset\}$ هي مجموعة تتضمن المجموعة الخالية، والتي تحتوي على عنصر واحد. انتبه، إنها تتضمن عنصرًا واحدًا.
(d) هذه المجموعة خالية حيث لا توجد أعداد طبيعية بين 1 و2.

جرّب هذا 8

أي من المجموعات التالية خالية؟

(a) $\{x|x$ عدد طبيعي يقبل القسمة على 7$\}$
(b) $\{x|x$ إنسان يعيش على كوكب المريخ$\}$
(c) $\{\{\ \}\}$
(d) تتألف المجموعة Z من الأشخاص الذين يعيشون على الأرض وتزيد أعمارهم عن 120 سنة.

تنبيه

تأكد من أنك لا تكتب المجموعة الخالية على الصورة $\{\emptyset\}$؛ حيث تشير الأقواس إلى مجموعة تحتوي على ما بداخلها، بحيث يمثل الرمز مجموعة تحتوي على عنصر واحد: المجموعة الخالية.

3. تعريف المجموعة الخالية.

العدد الرئيس للمجموعة

يُسمى عدد العناصر في المجموعة *العدد الرئيس* للمجموعة. على سبيل المثال، تحتوي المجموعة $R = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ على عدد رئيس يساوي 5 لأنها تحتوي على 5 عناصر. كما يمكن التعبير عن ذلك أيضًا بقولنا **عدد العناصر الرئيسة** للمجموعة R هو 5. ويُعرَّف رسميًا كما يلي.

العدد الرئيس لمجموعة هو عدد العناصر فيها. بالنسبة إلى المجموعة A يرمز لعدد العناصر الرئيسة فيها $n(A)$، والذي يُقرأ "n لـ A".

مثال 9 إيجاد عدد العناصر الرئيسة لمجموعة

أوجد العدد الرئيس لكل مجموعة.

(a) $A = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$
(b) $B = \{x|x \in N, x < 16\}$
(c) $C = \{16\}$
(d) $\emptyset$

الحل

(a) $n(A) = 6$ لأن المجموعة A تحتوي على 6 عناصر
(b) B هي المجموعة $\{1, 2, 3, 4, \ldots, 14, 15\}$، التي تحتوي على 15 عنصرًا. ومن ثم تكون $n(B) = 15$.
(c) $n(C) = 1$ لأن المجموعة C تحتوي على عنصر واحد
(d) $n(\emptyset) = 0$ حيث لا توجد عناصر في المجموعة الخالية

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

جرّب هذا 9

أوجد العدد الرئيس لكل مجموعة.

(a) $A = \{z, y, x, w, v\}$
(b) $B = \{x \mid x \in E$ و $15 < x < 31\}$
(c) $C = \{$شيفروليه$\}$

4. إيجاد عدد العناصر الرئيسة في المجموعة.

المجموعات المنتهية وغير المنتهية

يمكن تصنيف المجموعات إلى منتهية أو غير منتهية.

تسمى المجموعة **منتهية** إذا تضمنت عددًا مُحددًا من العناصر، أو كان عدد عناصرها عددًا طبيعيًا. وتُسمى المجموعة التي ليست منتهية **مجموعة غير منتهية** إذا تضمنت عدد غير مُحدد من العناصر

فالمجموعة {p, q, r, s} منتهية لأنها تحتوي على أربعة عناصر: p وq وr وs. أما المجموعة {10, 20, 30, . . .}، غير منتهية لأنها تحتوي على عدد غير مُحدد من العناصر، فهي كل الأعداد الطبيعية التي تمثل مضاعفات العدد 10.

ملاحظة رياضية

إذا كنت تتساءل عن كيفية وصف عدد العناصر الرئيسة للمجموعة غير المنتهية، فستجب القسم 5.

مثال 10 تصنيف المجموعات إلى منتهية وغير منتهية

صنّف كل مجموعة إلى منتهية أو غير منتهية.

(a) $\{x \mid x \in N$ و $x < 100\}$
(b) المجموعة R هي مجموعة الحروف المستخدمة لكتابة الأعداد الرومانية.
(c) {100, 102, 104, 106, . . .}
(d) المجموعة M هي مجموعة أفراد أسرتك الحالية.
(e) المجموعة S هي مجموعة الأناشيد التي يمكن كتابتها.

الحل

(a) المجموعة منتهية حيث يوجد 99 عددًا طبيعيًا أقل من 100.
(b) المجموعة منتهية حيث إن الحروف المستخدمة هي C وD وا وL وM وV وX.
(c) المجموعة غير منتهية حيث إنها تتكون من عدد غير مُحدد من العناصر.
(d) المجموعة منتهية حيث يوجد عدد مُحدد من الأشخاص في أسرتك الحالية.
(e) المجموعة غير منتهية حيث يمكن كتابة عدد غير مُحدد من الأناشيد.

جرّب هذا 10

صنّف كل مجموعة إلى منتهية أو غير منتهية.

(a) المجموعة P هي مجموعة الأعداد التي تتضمن مضاعفات العدد 6.
(b) $\{x \mid x$ هو عدد المجلس الوطني الاتحادي$\}$
(c) {3, 6, 9, . . . , 24}
(d) مجموعة كلمات مرور أجهزة الكمبيوتر المحتملة

5. تصنيف المجموعات إلى منتهية أو غير منتهية.

المجموعات المتساوية والمتكافئة

عند دراسة نظرية المجموعات، سنحتاج إلى فهم الفرق بين مفهومين أساسيّين: *المجموعات المتساوية* و*المجموعات المتكافئة*.

تكون المجموعتان A وB **متساويتين** (تُكتبان على الصورة $A = B$) إذا كان بهما العناصر نفسها. وتُعتبر المجموعتان المنتهيتان A وB **متكافئتين** (تُكتبان على الصورة $A \cong B$) إذا كان بهما عدد العناصر نفسه، أي أن $n(A) = n(B)$.

فمثلًا تتساوى المجموعتان {a, b, c} و{c, b, a} حيث إنهما تحتويان على العناصر نفسها a وb وc. كما أن المجموعة {4, 5, 6} تساوي المجموعة {4, 4, 5, 6} حيث لا يلزم كتابة 4 مرتين في المجموعة الثانية. أما المجموعة التي تضم كافة أسماء الطلاب في صفك ومجموعة بطاقات تعريفهم فمتكافئتان لأنهما تحتويان على عدد العناصر نفسه لكن العناصر مختلفة ومن ثم تكونان غير متساويتين.

ملاحظة رياضية

كل المجموعات المتساوية متكافئة لأن كلتا المجموعتين ستحتوي على عدد العناصر نفسه، ولكن ليست كل المجموعات المتكافئة متساوية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

ملاحظة رياضية

هل تفكر في مجموعتين متساويتين لكنهما غير متكافئتين؟ ماذا عن العكس؟ ما الذي يمكنك استنتاجه؟

مثال 11 تحديد ما إذا كانت المجموعات متساوية أم متكافئة

حدد ما إذا كان كل زوج من المجموعات متساويًا أم متكافئًا أم غير ذلك.

(a) {p, q, r, s}; {a, b, c, d}
(b) {8, 10, 12}; {12, 8, 10}
(c) {213}; {2, 1, 3}
(d) {1, 2, 10, 20}; {2, 1, 20, 11}
(e) {الأعداد الطبيعية الزوجية التي تقل عن 10}؛ {2, 4, 6, 8}

الحل

(a) متكافئتان
(b) متساويتان ومتكافئتان
(c) لا شيء منهما
(d) متكافئتان
(e) متساويتان ومتكافئتان

جرّب هذا 11

حدد ما إذا كان كل زوج من المجموعات متساويًا أم متكافئًا أم غير ذلك.

(a) {ك، ل، ب}؛ {ق، ط، ه}
(b) {مطر}؛ {م، ط، ر}
(c) {ق، ل، ب}؛ {ب، ق، ل}
(d) {10, 20, 30}; {1, 3, 5}

عندما تحتوي مجموعتان على عدد من العناصر صغير نسبيًا، تتمثل الطريقة الأسهل لتحديد ما إذا كانت المجموعتان متكافئتين أم لا في عدّ عدد العناصر. لكن عندما تكون المجموعتان كبيرتين، أو غير منتهيتين، فهناك طريقة ذكية لمعرفة المجموعتين المتكافئتين: تُسمى وضعهما في تناظر واحد لواحد. سيكون هذا مفيدًا حقًا عند دراسة المجموعات غير المنتهية في القسم 5.

يكون بين المجموعتين **تناظر واحد لواحد** للعناصر إذا كان كل عنصر في المجموعة الأولى يمكن إقترانه بعنصر واحد فقط من المجموعة الثانية وكل عنصر في المجموعة الثانية يمكن إقترانه بعنصر واحد فقط في المجموعة الأولى.

مثال 12 وضع المجموعات في تناظر واحد لواحد

أثبت أن (a) المجموعتين {8, 16, 24, 32} و{s, t, u, v} بينهما تناظر واحد لواحد و(b) المجموعتين {x, y, z} و{5, 10} ليس بينهما تناظر واحد لواحد. ثم استنتج خلاصة حول ما يجب أن يفعله التناظر واحد لواحد بالنسبة إلى تكافؤ المجموعات.

فريقا كرة سلة على أرضية الميدان بينهما تناظر واحد لواحد (على فرض أن كل فريق يتضمن خمسة لاعبين).

الحل

(a) إننا نحتاج إلى إثبات أن كل عنصر في إحدى المجموعتين يمكن إقترانه بعنصر واحد فقط في المجموعة الثانية. فيما يلي توضيح طريقة ممكنة لإثبات تناظر واحد لواحد:

$$\begin{matrix}\{8, & 16, & 24, & 32\}\\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow\\ \{s, & t, & u, & v\}\end{matrix}$$

(b) لا يمكن وضع عناصر المجموعتين {x, y, z} و{5, 10} في تناظر واحد لواحد. وبغض النظر عن كيفية المحاولة، سيكون هناك عنصر في المجموعة الأولى لا يناظر أي عنصر في المجموعة الثانية.

ما الذي يمكننا استنتاجه؟ إن المجموعتين اللتين يمكن وضعهما في تناظر واحد لواحد بهما عدد العناصر نفسه أما المجموعتان اللتان لا يمكن وضعهما في تناظر واحد لواحد بهما عدد مختلف من العناصر. الاستنتاج؟ تكون المجموعتان متكافئتين تحديدًا إذا أمكن وضعهما في تناظر واحد لواحد.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

جرّب هذا 12

أثبت أن المجموعتين {شمال، جنوب، شرق غرب} و{شمس، مطر، ثلج، برد} بينهما تناظر واحد لواحد.

المجموعات المتناظرة والمتكافئة

6. تحديد ما إذا كانت المجموعتان تكون المجموعتان متساويتين أم متكافئتين.
- متكافئتان إذا كان يمكن وضع عناصرهما في تناظر واحد لواحد.
- غير متكافئتين إذا لم تتمكن من وضع عناصرهما في تناظر واحد لواحد.

إجابات جرّب هذا

1 {January, February, May, July}

2 (a) {80, 82, 84, 86, 88, 90}
(b) {11, 13, 15, 17, . . .}

3 (a) صائبة (b) خاطئة (c) صائبة

4 مجموعة الأعداد الصحيحة من 3− إلى 3

5 (a) $K = \{x | x \in E$ و $x > 9$ و $x < 19\}$. مجموعة x بحيث x هو عددٌ طبيعيٌّ زوجيٌّ وx أكبر من 9 وx أقل من 19.
(b) $W = \{x | x$ جنسية أوروبية$\}$. مجموعة x بحيث x هي جنسية أوروبية.

6 (a) {11, 13, 15, 17, . . .}
(b) مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية التي تزيد عن 10
(c) $\{x \mid x > 10$ و x عدد فردي. $x \in N\}$

7 {51, 53, 55, . . . , 497, 499}

8 (b) و(d)

9 (a) 5 (b) 8 (c) 1

10 (a) غير منتهية (b) منتهية (c) منتهية (d) غير منتهية

11 (a) متكافئتان (c) متساويتان ومتكافئتان
(b) لا شيء منهما (d) متكافئتان

12 شمال جنوب شرق غرب
↕ ↕ ↕ ↕
شمس مطر ثلج برد

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9-1 مجموعة التمارين

دليل الدراسة

التمارين الكتابية

1. اشرح ما المقصود بالمجموعة.
2. ما معنى أن تكون المجموعة محدودة؟
3. اكتب مثالًا لمجموعة محدودة، وأخرى غير محددة. (لا تقتبس أمثلة من الكتاب!)
4. اذكر ثلاث طرق لكتابة المجموعات وصفها.
5. ما الفرق بين المجموعتين المتساويتين والمتكافئتين؟
6. اشرح الفرق بين المجموعة المنتهية وغير المنتهية.
7. ما المقصود بـ "تناظر واحد لواحد بين مجموعتين"؟
8. عرّف المجموعة الخالية واذكر مثالين لمجموعة خالية.

التمارين الحسابية

بالنسبة إلى التمارين 9-22، اكتب كل مجموعة باستخدام طريقة ذكر العناصر. انتبه للعناصر المتكررة، وفكر في سبب عدم احتياجك إلى إدراج العنصر نفسه أكثر من مرة واحدة. قد ترغب في القيام ببحث بسيط عبر الإنترنت بالنسبة إلى بعض المسائل.

9. T هي مجموعة الحروف في كلمة تفكير.
10. A هي مجموعة ألوان علم دولة الامارات العربية المتحدة.
11. P هي مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة بين 50 و60.
12. R هي مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية المحصورة بين 10 و40.
13. $C = \{x/x \in N \text{ و } x < 9\}$
14. $F = \{x/x \in N \text{ و } x > 100\}$
15. $G = \{x/x \in N \text{ و } x > 10\}$
16. B هي مجموعة الأعداد الطبيعية الأكبر من 100.
17. Y هي مجموعة الأعداد الطبيعية بين 2,000 و3,000.
18. $Z = \{x/x \in N \text{ و } 500 < x < 6{,}000\}$
19. C هي مجموعة الألوان في أعلام البلدان التي تبدأ بحرف O في اللغة الإنجليزية.
20. S هي مجموعة لاعبي اتحاد الإمارات العربية المتحدة لكرة السلة.
21. L هي مجموعة الأربطة التي في ركبة الإنسان.
22. A هي مجموعة عواصم الإمارات السبعة في الإمارات العربية المتحدة.

بالنسبة إلى التمارين 23-28، حدد ما إذا كانت العبارة صائبة أم خاطئة.

23. $5 \in \{1, 3, 5, 7\}$
24. $8 \notin \{2, 4, 6, \ldots\}$
25. $\frac{1}{2} \notin N$
26. $0.6 \in N$
27. $\{x/x$ ديناصور سنيجوسورس حي$\}$ مجموعة خالية.
28. أبو ظبي تنتمي إلى $\{x/x$ إحدى الإمارات العربية$\}$

بالنسبة إلى التمارين 29-36، اكتب كل مجموعة باستخدام الطريقة الوصفية.

29. $\{5, 10, 15, 20, \ldots\}$
30. $\{4, 8, 12, 16\}$
31. $\{13, 26, 39, 52\}$
32. $\{7, 14, 21, 28, \ldots\}$
33. $\{s, t, e, v, n\}$
34. $\{a, u, g, s, t\}$
35. $\{100, 101, 102, \ldots, 199\}$
36. $\{21, 22, 23, \ldots, 29, 30\}$

بالنسبة إلى التمارين 37-42، اكتب كل مجموعة باستخدام رمز بناء المجموعة، ثم اكتب وصفًا بديلًا لكل مجموعة.

37. $\{10, 20, 30, 40, \ldots\}$
38. $\{3, 6, 9, 12, \ldots\}$
39. X هي مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية الأقل من 16.
40. Z هي مجموعة الأعداد الطبيعية المحصورة بين 70 و76.
41. {أحمر، أبيض، أزرق}
42. {أسود، أبيض، أحمر، أخضر}

بالنسبة إلى التمارين 43-48، اذكر العناصر في كل مجموعة.

43. H هي مجموعة الأعداد الطبيعية الأقل من 0.
44. $\{x/x \in N \text{ و } 70 < x < 80\}$
45. $\{x/x$ أحد فصول السنة$\}$
46. R هي مجموعة الحروف التي يمكن أن تكون ساكنة أو متحركة في اللغة الإنجليزية.
47. $\{x/x$ عدد طبيعي زوجي بين 100 و120$\}$
48. $\{x/x$ عدد طبيعي فردي بين 90 و100$\}$

بالنسبة إلى التمارين 49-54، حدد ما إذا كانت كل مجموعة محدودة أم ليست محددة.

49. L هي مجموعة المتسابقين الذين ربحوا في *برنامج المسابقات*.
50. $A/A\}$ مجموعة الطلاب الذين حصلوا على شهادات تقدير في الشارقة$\}$
51. {لاعبو كرة السلة في اتحاد الإمارات العربية المتحدة الذين أحرزوا غمسات رائعة الأسبوع الماضي}
52. N هي مجموعة المرضى المستحقين لزراعة القلب.
53. $B = \{x/x$ عدد كبير$\}$
54. $C = \{x/x$ عدد أكبر من عدد السكان في الإمارات العربية المتحدة$\}$

بالنسبة إلى التمارين 55-60، حدّد ما إذا كانت العبارة صائبة أم خاطئة.

افترض أن A = مجموعة المحيطات
$B = \{10, 20, 30, 40, \ldots\}$
C = مجموعة لاعبي كرة القدم المشهورين

55. $35 \in B$
56. ليبرون جيمس ينتمي إلى C
57. البحر الأبيض المتوسط لا ينتمي إلى A
58. $350 \in B$
59. المحيط الهادئ ينتمي إلى A
60. ديفيد بيكهام ينتمي إلى C

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

بالنسبة إلى التمارين 61-68، حدد ما إذا كانت كل مجموعة غير منتهية أم منتهية.

61. $\{x|x$ ينتمي إلى N وx عدد زوجي$\}$
62. $\{1, 2, 3, \ldots, 999, 1{,}000\}$
63. K هي مجموعة الحروف الأبجدية العربية.
64. $\{x|x$ ينتمي إلى أعداد المدارس الثانوية في إمارة دبي$\}$
65. $\{x|x$ ينتمي إلى N وx عدد يكون آحاده صفرًا$\}$
66. $\emptyset$
67. $\{x|x$ برنامج تلفزيوني حالي$\}$
68. $\{x|x$ كسر$\}$

بالنسبة إلى التمارين 69-74، حدد ما إذا كان كل زوج من المجموعات متساويًا أم متكافئًا أم لا هذا ولا ذاك.

69. $\{s, t, u, v, w\}$ و$\{t, v, w, s, u\}$
70. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ و$\{10, 20, 30, 40, 50\}$
71. $\{2, 4, 6, 8\}$ و$\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$
72. {واحد} و{و، ا، ح، د}
73. $\{3\}$ و$\{\emptyset\}$
74. $\{x|x$ ينتمي إلى أسماء الشهور التي تتكون من 30 يومًا بالتحديد$\}$ و{أبريل، يونيه، سبتمبر، نوفمبر}

بالنسبة إلى التمارين 75-78، أثبت أن كل زوج من المجموعات متكافئ باستخدام تناظر واحد لواحد.

75. $\{10, 20, 30, 40\}$ و$\{40, 10, 20, 30\}$
76. $\{w, x, y, z\}$ و$\{1, 2, 3, 4\}$
77. $\{x|x \in N\}$ و$\{x|x$ من مضاعفات العدد 4$\}$
78. $\{x|x$ عدد طبيعي فردي أقل من 11$\}$ و$\{x|x$ عدد طبيعي زوجي أقل من 12$\}$

بالنسبة إلى التمارين 79-86، جد العدد الرئيس لكل مجموعة.

79. $A = \{63, 72, 51, 44\}$
80. $B = \{10, 11, 12, \ldots, 20\}$
81. $C = \{x|x$ يوم في الأسبوع$\}$
82. $D = \{x|x$ شهر في السنة$\}$
83. $E =$ {ثلاثة}
84. $F =$ {ث، ل، ا، ة}
85. $G = \{x|x$ ينتمي إلى N وx عدد سالب$\}$
86. $H = \emptyset$

بالنسبة إلى التمارين 87-92، حدد ما إذا كانت كل عبارة صائبة أم خاطئة.

87. كل المجموعات المتساوية متكافئة.
88. لا توجد مجموعات متكافئة متساوية.
89. $n(\{\emptyset\}) = 0$
90. $E = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ مجموعة منتهية
91. $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ مكافئة لـ $\{10, 20, 30, 40, \ldots\}$
92. $n(\{\ \}) = 0$

التطبيقات في عالمنا

93. يوضح الجدول أعلى 10 ولايات من حيث عدد المهاجرين المنوحين إقامة دائمة في 2015.

الولاية	عدد المهاجرين	% من إجمالي المهاجرين إلى الولايات المتحدة
كاليفورنيا	209,568	19.9%
نيويورك	130,010	12.4%
فلوريدا	118,873	11.3%
تكساس	99,727	9.5%
نيو جيرسي	49,801	4.7%
إلينوي	40,482	3.9%
ماساشوستس	28,535	2.7%
فيرجينيا	27,622	2.6%
جورجيا	25,919	2.5%
بنسلفانيا	24,969	2.4%

المصدر: وزارة الأمن الداخلي في الولايات المتحدة.

(a) اذكر مجموعة الولايات التي يزيد عدد مهاجريها على 100,000.
(b) اذكر عناصر مجموعة الولايات المذكورة ضمن أعلى 10 ولايات ويقل عدد مهاجريها عن 50,000.
(c) اسرد عناصر $\{x|x$ الولاية التي تتضمن 4% على الأقل من إجمالي المهاجرين$\}$.
(d) اذكر عناصر $\{x|x$ الولاية التي تتضمن ما يتراوح بين 3% و10% من إجمالي المهاجرين$\}$.

94. يسرد الجدول عدد درجات البكالوريوس التي تم منحها في الإمارات العربية المتحدة في أفضل 10 تخصصات لعام 2009 في الجدول، إلى جانب بيانات عامي 1999 و2014 أيضًا.

(a) اسرد مجموعة التخصصات التي زادت شعبيتها في كل عام مذكور.
(b) اسرد مجموعة التخصصات التي لم تزد شعبيتها من 2009 حتى 2014.
(c) اسرد مجموعة التخصصات التي تضم ما يتراوح بين 90,000 و120,000 درجة تم منحها عام 2014.
(d) جد المجموعة $\{x|x$ زيادة الشعبية بين 2004 و2009$\}$.
(e) لإيجاد نسبة الزيادة P بين الكمية الأصلية O والكمية الجديدة N، استخدم الصيغة التالية: $P = (N - O)/O$. احسب نسبة زيادة أي تخصص شهد زيادة في عدد الدرجات التي تم منحها بين عامي 2009 و2014. اسرد بعض التخصصات التي زادت على الأقل بنسبة 30%.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9-1 مجموعة التمارين يُتبع

التخصص	2004	2009	2014
قطاع الأعمال	307,149	348,056	358,079
المهن الصحية والبرامج ذات الصلة	73,934	120,420	198,770
العلوم الاجتماعية والتاريخ	150,357	168,517	173,096
علم النفس	82,098	94,273	117,298
العلوم البيولوجية والطبية	62,624	82,828	104,633
التربية	106,278	101,716	98,854
الفنون البرئية والاستعراضية	77,181	89,143	97,246
الهندسة	63,410	68,911	92,162
التواصل والصحافة والبرامج ذات الصلة	70,968	77,984	87,604
الأمن الداخلي وإنفاذ القانون ومكافحة الجرائم	28,175	41,788	62,409

المصدر: شبكة الحارس المستهلك

95. تُعد سرقة الهوية الآن إحدى أكثر الجرائم المكلفة في الولايات المتحدة، وتؤثر غالبًا في البالغين الأصغر سنًا. فمن بين 251,000 شكوى بسرقة الهوية قُدمت إلى لجنة التجارة الاتحادية (FTC) عام 2015، كان أكثر من 30% من أعمار الضحايا أقل من 30 سنة. يوضح المخطط التالي أنواع حالات سرقة الهوية التي تم الإبلاغ عنها في عام 2015 ونسبة الضحايا حسب العمر.

(a) اذكر عناصر مجموعة تضم نوعي سرقة الهوية الأقل نسبة من بين الجرائم المبلَّغ عنها.

(b) اذكر عناصر مجموعة الفئات العمرية التي تزيد نسبتها عن 18%.

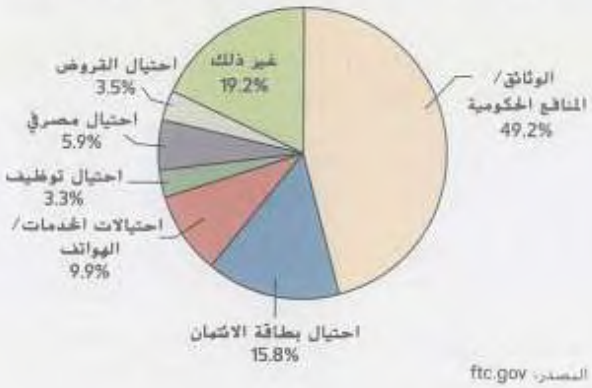
(c) اذكر عناصر مجموعة أنواع سرقة الهوية التي شكّلت أكثر من نسبة 15% من بين الجرائم المبلَّغ عنها.

(d) اذكر عناصر المجموعة $\{x | x$ نسبة الذين أعمارهم 40 سنة فأكثر من بين ضحايا سرقة الهوية$\}$.

(e) اذكر عناصر المجموعة $\{x | x$ نوع الحالة التي وقعت بنسبة تتراوح بين 10% و20% من الجرائم المبلَّغ عنها$\}$.

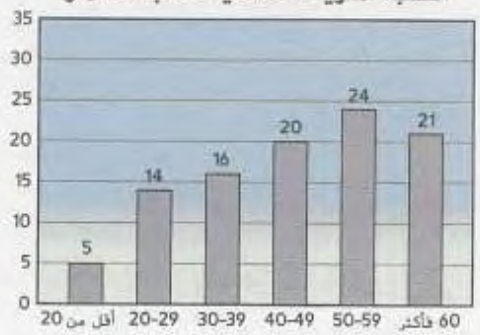
(f) أضف النسب المئوية التي في المخطط الدائري. ماذا تلاحظ؟ هل يمكنك التفكير في التفسيرات المحتملة؟

أنواع احتيالات سرقة الهوية المبلَّغ عنها في عام



المصدر: ftc.gov

النسبة المئوية للضحايا حسب الأعمار



96. تزامن ازدهار التوزيع الرقمي للموسيقى مع انهيار القرص المدمج، على الأقل فيما يتعلق بالمبيعات. يوضح المخطط عدد الأقراص المدمجة والألبومات المنزّلة التي تم بيعها (بالملايين) لبعض السنوات الأخيرة، بالإضافة إلى قيمة تلك المبيعات (أيضًا بالملايين).

(a) اذكر عناصر مجموعة السنوات التي تجاوزت خلالها مبيعات القرص المدمج قيمة تنزيلات الألبومات.

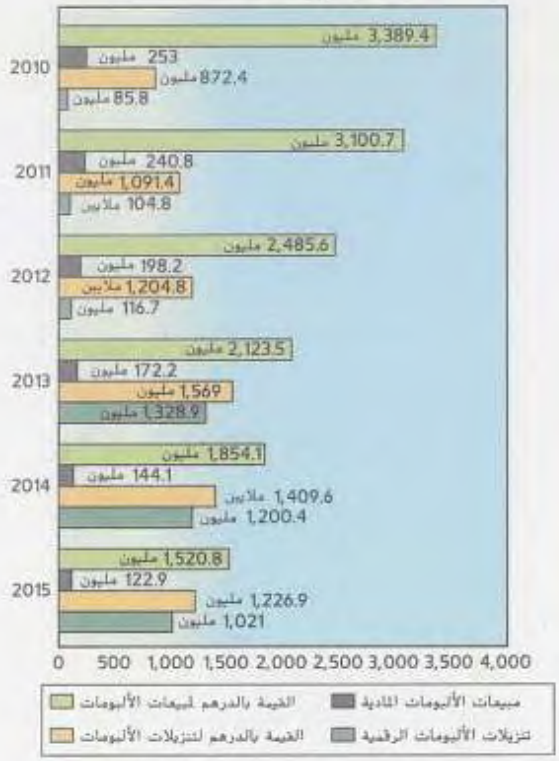
(b) اذكر عناصر مجموعة السنوات التي قلّت فيها قيمة تنزيلات الألبومات عن السنة السابقة.

(c) اذكر عناصر $\{x | x$ السنة التي انخفض فيها عدد مبيعات الألبومات بما يزيد على 25 مليون وحدة$\}$.

(d) اذكر عناصر المجموعة $\{x | x$ القيمة الدرهمية لتنزيلات الألبومات التي شكّلت زيادة تزيد عن 100 مليون AED من العام السابق$\}$.

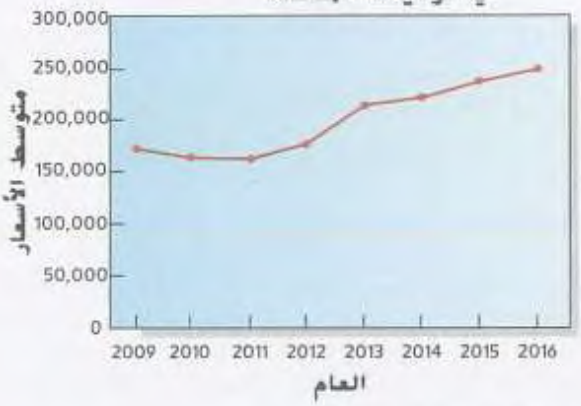
McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مبيعات الأقراص المدمجة مقابل تنزيلات الألبومات في الولايات المتحدة



97. لقد استغرق الأمر بعض الوقت، لكن في عام 2015، وصلت أسعار المساكن أخيرًا إلى قيم مماثلة للأسعار قبل انهيار الإسكان في عام 2006. يعرض التمثيل البياني الخطي أدناه متوسط أسعار المساكن الحالية في الإمارات العربية المتحدة للأعوام من 2009 إلى 2016.

متوسط أسعار المساكن الحالية في الولايات المتحدة



المصدر: الرابطة الوطنية للوسطاء العقاريين

(a) اذكر عناصر مجموعة السنوات التي كان فيها متوسط الأسعار فوق $200,000.

(b) اذكر عناصر مجموعة السنوات التي كان فيها متوسط الأسعار يتراوح بين $170,000 و$200,000.

(c) جد $\{x|x$ السنة التي زاد فيها متوسط الأسعار عن السنة السابقة$\}$.

(d) جد $\{x/x$ السنة التي انخفض فيها متوسط الأسعار عن السنة السابقة$\}$.

التفكير الناقد

98. إذا كانت $A \cong B$ و$A \cong C$، فهل $B \cong C$؟ اشرح إجابتك.

99. هل $\{0\}$ مكافئة لـ $\emptyset$؟ اشرح إجابتك.

100. اكتب مجموعتين متكافئتين ولكن غير متساويتين.
لماذا لا يمكن كتابة مجموعتين متساويتين ولكن غير متكافئتين؟

101. إننا نعرف أن المجموعتين تكونان متكافئتين إذا استطعنا الربط بين عناصرهما بتناظر واحد لواحد.
(a) ما المجموعة التي تضم عناصر أكثر:
$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$
أو $B = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$؟
(b) اكتب المقابلة بين المجموعتين A وB حيث يتقابل كل عنصر في A مع مثليه في B. هل يغير هذا تفكيرك بشأن إجابتك عن الجزء (a)؟ (إذا وجدت هذه المسألة ممتعة، فستحب القسم 5 كثيرًا).

102. (a) اذكر كل المجموعات المختلفة التي يمكنك تكوينها باستخدام العناصر التي في المجموعة $\{2, 4, 6\}$ فقط.
(b) توجد ثماني مجموعات يمكن تكوينها في الجزء (a). هل وجدت سبقًا منها؟ إذا كنت قد وجدتها، فهل يمكنك توضيح سبب ترك واحدة؟

103. اشرح لماذا تُعد كل من المجموعات التالية غير محدودة.
(a) مجموعة جميع الأوروبيين.
(b) مجموعة السيارات الفاخرة من طراز 2011
(c) مجموعة جميع الكليات التي لها فرصة مشروعة للفوز ببطولة كرة السلة (ثمة سببان على الأقل!)
(d) مجموعة جميع الوظائف التي يتقاضى أصحابها ما يزيد على AED 50,000 سنويًا
(e) مجموعة الأمهات

104. أحيانًا عندما تكون المجموعة غير محدودة، يمكنك تقديم وصف أفضل يجعلها محدودة. على سبيل المثال، مجموعة الأفلام الرائعة حقًا من سنة 2016 ليست محدودة. ولكن إذا غيرنا الوصف إلى مجموعة الأفلام التي صدرت عام 2016 وحصلت على 90/100 على الأقل من تقدير النقاد، فسنكون قد حددنا ما نقصد بقولنا "رائعة حقًا". والآن أصبحت المجموعة محدودة. بالنسبة إلى كل من المجموعات في التمرين 105، اكتب وصفًا يجعل المجموعة محدودة؟

حقوق الطبع والتأليف © لمجموعة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

ملاحظاتي

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدرس 9-2 المجموعات الجزئية والعمليات على المجموعات

أهداف التعلم

1. تعريف متممة المجموعة.
2. إيجاد كافة المجموعات الجزئية للمجموعة.
3. استخدام رمز المجموعة الجزئية.
4. إيجاد عدد المجموعات الجزئية للمجموعة.
5. إيجاد التقاطعات والاتحادات والفروق بين المجموعات.

لقد رأينا أن نظرية المجموعات تتعلق بتحديد العلاقات بين الأشياء التي يتم تجميعها معًا لسبب ما. وبتناول هذه الفكرة بتوسع أكبر، فإن المجموعات ترتبط غالبًا مع المجموعات الأخرى بعلاقات. وهذا عندما تصبح الأشياء معقدة نوعًا ما. في هذه الحالة، سيكون النظام الخاص بعرض هذه العلاقات ودراستها مفيدًا، وهو في النهاية نوع من النقاط الأساسية لدراسة نظرية المجموعات. لكننا لم نتطرق إلى الآن إلا إلى ظاهر الموضوع. على سبيل المثال، هب أنك أحد أعضاء كلتا مجموعتي طلاب المدرسة الثانوية والطلاب الذين يخوضون دورة تدريبية في رياضيات المرحلة الثانوية. فمن الممكن أن تكون ضمن مجموعة طلاب الصف العاشر أو مجموعة طلاب الصف الحادي عشر، لكن ليس في كليهما. وربما تكون ضمن مجموعة الطلاب الذين يعيشون بعيدًا عن حرم المدرسة ومجموعة الطلاب الذين يذهبون إلى المدرسة مشيًا. وربما تكون ضمن مجموعة الطلاب الذين يتناولون الغداء في كافتيريا المدرسة ومجموعة الطلاب الذين يعتقدون أن البطاطس المقلية رطبة جدًا. لكن ليس في مجموعة الأشخاص الذين يضعون صلصة الطماطم ويأكلون الأشياء الرديئة بأي شكل. لنرَ ما الذي يمكننا القيام به حول تنظيم هذه الروابط المعقدة بين المجموعات. في هذا الدرس، سندرس العلاقات بين المجموعات.

لكي نبدأ، سنحتاج إلى التفكير في مفهوم جديد يُسمى *المجموعة الشاملة*.

والمجموعة الشاملة الخاصة بحالة مقدَّمة، ورمزها U، هي مجموعة جميع الأشياء التي يكون من المنطقي مراعاتها في هذه الحالة.

على سبيل المثال، تحتوي كل المجموعات المذكورة في الفقرة الافتتاحية على أشخاص، ومن ثم يمكننا نظريًا استخدام مجموعة جميع البشر بوصفها U. لكن من الأكثر منطقية أن نقوم بتخصيص U = {طلاب المرحلة الثانوية}.

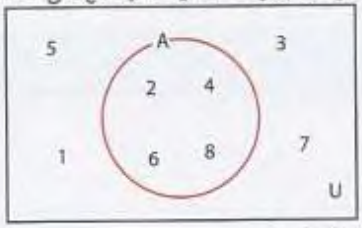
وبمجرد تحديد المجموعة الشاملة في حالة معينة، فإننا نقتصر على التفكير في عناصر هذه المجموعة فقط. إذا كانت $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$، فإن العناصر التي يمكننا استخدامها فقط لتحديد المجموعات الأخرى في هذه الحالة هي مجموعة الأعداد الصحيحة من 1 إلى 8.

سنستخدم في بقية هذه الوحدة طريقة ذكية لتصور المجموعات وعلاقاتها تُسمى **مخطط فن *Venn*** (وقد سُمي بذلك نسبة إلى الرجل الذي قام بتطويره، جون فن، في القرن التاسع عشر). يعرض الشكل 2-1 مثالًا.

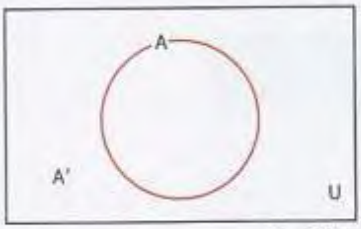
يمكنك الحصول على مزيد من المعلومات من هذه المخطط البسيط. يتم تحديد مجموعة تسمى A. والمجموعة الشاملة التي يمكن من خلالها اختيار عناصر المجموعة A هي $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. المجموعة A هي $\{2, 4, 6, 8\}$، والعناصر التي ليست ضمن المجموعة A هي $\{1, 3, 5, 7\}$. سنُسمي عناصر المجموعة U والتي ليست ضمن المجموعة A متممة المجموعة A، ونشير إليها بالرمز A'.

ومتممة المجموعة A، ورمزها A'، هي مجموعة العناصر التي في المجموعة الشاملة *وليست* في A. باستخدام بناء رمز المجموعة، تكون متممة A هي $A' = \{x | x \in U \text{ و } x \notin A\}$.

في مخطط فن *Venn*، تكون متممة المجموعة A هي كافة العناصر التي بداخل المستطيل وليست داخل الدائرة التي تمثل المجموعة A. وهذا يتضح في الشكل 1.



الشكل 1



الشكل 2

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 1 إيجاد متممة المجموعة

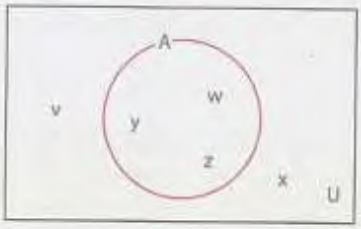
(a) لتكن $U = \{v, w, x, y, z\}$ و $A = \{w, y, z\}$. جِد A' وارسم مخطط فن *Venn* الذي يوضح هذه المجموعات.

(b) ما متممة المجموعة الشاملة لحالة معينة؟

الحل

(a) باستخدام قائمة العناصر التي في U، يلزمنا فقط شطب العناصر التي في A كذلك. وستكون العناصر المتبقية في المجموعة A'.

$$U = \{v, w, x, y, z\} \qquad A' = \{v, x\}$$



الشكل 3

يظهر مخطط فن *Venn* في الشكل 3.

(b) لا توجد عناصر في مجموعة شاملة ليست ضمن المجموعة الشاملة. ومن ثم، ووفقًا لتعريف المتممة، لا توجد عناصر في متممة مجموعة شاملة. أي إن المتممة هي المجموعة الخالية.

جرّب هذا 1

(a) افترض أن $U = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$ و $A = \{10, 30, 50\}$. جِد A' وارسم مخطط فن *Venn* الذي يوضح هذه المجموعات.

(b) ما متممة المجموعة الخالية؟

1. تحديد متممة المجموعة.

المجموعات الجزئية

كنا قد أشرنا في بداية هذا الدرس إلى أنك تنتمي إلى كلتا مجموعتي طلاب المدرسة الثانوية والطلاب الذين يخوضون دورة تدريبية في رياضيات المرحلة الثانوية. لاحظ أن كل من في المجموعة الثانية هو بالفعل في المجموعة الأولى. (فلا شك أنك إذا كنت تخوض دورة تدريبية في رياضيات المرحلة الثانوية، فلابد أن تكون طالبًا في المدرسة الثانوية). ويمكن أن نقول إن مجموعة الطلاب الذين يخوضون الدورة التدريبية في رياضيات المرحلة الثانوية مشمولون ضمن مجموعة جميع طلاب المدرسة الثانوية. وإذا كانت مجموعة ما مشمولة في مجموعة أخرى، فإننا نُسمي المجموعة الأصغر مجموعة جزئية للمجموعة الأكبر.

المفهوم الأساسي المجموعات الجزئية

إذا كان كل عنصر في المجموعة A عنصرًا في المجموعة B، فإن A تُسمى **مجموعة جزئية** للمجموعة B. يُستخدم الرمز $\subseteq$ لتحديد المجموعة الجزئية؛ في هذه الحالة، نكتب $A \subseteq B$ ونقرأ A **محتواة في** B.

يوجد العديد من المجموعات الجزئية لهذه المجموعة من الطلاب المستمتعين بعطلة الربيع: المجموعة الجزئية للطالبات الإناث، المجموعة الجزئية للطلاب الذكور، وهكذا.

وثمة تعريف آخر يتمثل في أن A مجموعة جزئية من B إذا لم توجد أي عناصر في A ليست أيضًا في B. فيما يلي ملحوظتان تتعلقان بالمجموعات الجزئية.

- كل مجموعة هي مجموعة جزئية من نفسها. يكون كل عنصر في المجموعة A عنصرًا في المجموعة A. ومن ثم فإن $A \subseteq A$.
- المجموعة الخالية عبارة عن مجموعة جزئية من كل مجموعة. فالمجموعة الخالية لا تتضمن أي عناصر، ومن ثم، فبالنسبة إلى أي مجموعة A، لا يمكنك تحديد أي عنصر $\emptyset$ غير موجود كذلك في A.

إذا بدأنا بالمجموعة $\{x, y, z\}$، فلنر عدد المجموعات الجزئية التي يمكننا تكوينها.

عدد العناصر في المجموعة الجزئية	المجموعات الجزئية المترتبة على هذا العدد من العناصر	
3	$\{x, y, z\}$	(مجموعة جزئية واحدة)
2	$\{x, y\}$, $\{x, z\}$, $\{y, z\}$	(ثلاث مجموعات جزئية)
1	$\{x\}$, $\{y\}$, $\{z\}$	(ثلاث مجموعات جزئية)
0	$\emptyset$	(مجموعة جزئية واحدة)

لذا، بالنسبة إلى مجموعة مكونة من ثلاثة عناصر، يمكننا تكوين ثماني مجموعات جزئية.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مثال 2 إيجاد كافة المجموعات الجزئية للمجموعة

أوجد كافة المجموعات الجزئية للمجموعة A = {برد، أنطلوانزا}.

الحل

المجموعات الجزئية هي

{برد، أنطلوانزا}
{برد}
{أنطلوانزا}
$\emptyset$

لاحظ أن المجموعة المكونة من عنصرين لها أربع مجموعات جزئية.

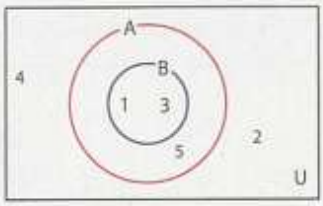
جرّب هذا 2

أوجد كافة المجموعات الجزئية للمجموعة B = {الهواتف، الحواسب، الأجهزة اللوحية}.

للإشارة إلى أن مجموعة ما ليست مجموعة جزئية من مجموعة أخرى، يُستخدم الرمز $\not\subseteq$. على سبيل المثال، $\{1, 3\} \not\subseteq \{0, 3, 5, 7\}$ حيث إن $1 \notin \{0, 3, 5, 7\}$.

من بين المجموعات الجزئية الأربعة في المثال 2، توجد مجموعة واحدة فقط تساوي المجموعة الأصلية. سنسمي المجموعات الثلاث المتبقية *مجموعات جزئية فعلية* للمجموعة A. يظهر مخطط فن *Venn* لمجموعة جزئية فعلية في الشكل 4. في هذه الحالة، $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و$A = \{1, 3, 5\}$ و$B = \{1, 3\}$.

إذا كانت المجموعة A مجموعة جزئية للمجموعة B وليست مساوية للمجموعة B، فإننا نسمي A **مجموعة جزئية فعلية** للمجموعة B. ونكتب $A \subset B$، أي إن $A \subseteq B$ و$A \neq B$.



الشكل 4 $B \subset A$

مثال 3 إيجاد المجموعات الجزئية الفعلية للمجموعة

جـد كافة المجموعات الجزئية الفعلية للمجموعة {التسويق، اللغة الإنجليزية، علم النفس}

الحل

{التسويق، اللغة الإنجليزية} {التسويق، علم النفس} {اللغة الإنجليزية، علم النفس}
{التسويق} {اللغة الإنجليزية} {علم النفس}
$\emptyset$

جرّب هذا 3

جـد كافة المجموعات الجزئية الفعلية من المجموعة {ربيع، صيف، خريف، شتاء}

2. إيجاد كافة المجموعات الجزئية للمجموعة

يُستخدم الرمز $\not\subset$ للإشارة إلى أن المجموعة ليست مجموعة جزئية فعلية. على سبيل المثال، $\{1, 3\} \subset \{1, 3, 5\}$، لكن $\{1, 3, 5\} \not\subset \{1, 3, 5\}$.

مثال 4 فهم رمز المجموعات الجزئية

حدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يلي صائبة أم خاطئة.

(a) $\{5, 3, 1\} \subseteq \{7, 5, 3, 1\}$
(b) $\{a, b\} \subset \{a, b\}$
(c) $\{x | x \in E$ و$x > 10\} \subset N$
(d) $\{r, s, t\} \not\subset \{t, s, r\}$
(e) {جبل حفيت، جبل جيس} لا تنتمي إلى مجموعة جبال الإمارات العربية المتحدة
(f) $\emptyset \subset \{5, 10, 15\}$
(g) $\{u, v, w, x\} \subseteq \{x, w, u\}$
(h) $\{0\} \subseteq \emptyset$

ملاحظة

رياضية

يستخدم البعض الرمز $\supseteq$ عند القراءة من اليمين إلى اليسار.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

ملاحظة رياضية

من المهم عدم الخلط بين مفهوم المجموعات الجزئية ومفهوم العناصر. على سبيل المثال، تُعد العبارة $6 \in \{2, 4, 6\}$ صائبة لأن 6 أحد عناصر المجموعة $\{2, 4, 6\}$. لكن العبارة $\{6\} \in \{2, 4, 6\}$ خاطئة لأنها تفيد بأن المجموعة التي تحتوي على العنصر 6 هي أحد عناصر المجموعة التي تحتوي على العناصر 2 و4 و6. لكن من الصواب أن نقول إن $\{6\} \subset \{2, 4, 6\}$ أو إن $\{6\} \subseteq \{2, 4, 6\}$

الحل

(a) كل من 1 و3 و5 في المجموعة الثانية، ومن ثم تكون $\{1, 3, 5\}$ مجموعة جزئية للمجموعة $\{1, 3, 5, 7\}$. العبارة صائبة.

(b) حتى بالرغم من أن $\{a, b\}$ مجموعة جزئية من $\{a, b\}$، فإنها ليست مجموعة جزئية فعلية، ومن ثم تكون العبارة خاطئة.

(c) كل عنصر في المجموعة الأولى عدد طبيعي، لكن ليست كل الأعداد الطبيعية مشمولة في المجموعة. ومن ثم تكون هذه المجموعة مجموعة جزئية فعلية من مجموعة الأعداد الطبيعية. العبارة صائبة.

(d) المجموعتان متطابقتان، ومن ثم فإن $\{r, s, t\}$ ليست مجموعة جزئية فعلية من $\{t, s, r\}$. العبارة صائبة.

(e) إن كلًا من جبل حفيت وجبل جيس من جبال الإمارات، ومن ثم تكون المجموعة {جبل حفيت، جبل جيس} مجموعة جزئية من جبال الإمارات. العبارة خاطئة.

(f) صائبة. المجموعة الخالية هي مجموعة جزئية فعلية من كل مجموعة باستثناء نفسها.

(g) خاطئة. v هو أحد عناصر المجموعة $\{u, v, w, x\}$ لكنه ليس ضمن $\{x, w, u\}$.

(h) المجموعة التي في اليسار تحتوي على عنصر واحد، 0. المجموعة الخالية لا تتضمن أي عناصر، ومن ثم، تكون العبارة خاطئة.

جرّب هذا 4

حدّد ما إذا كانت كل عبارة مما يلي صائبة أم خاطئة.

(a) $\{8\}$ محتواة في $\{x | x$ عدد طبيعي زوجي$\}$

(b) $\{6\} \subseteq \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

(c) $\{2, 3\} \subseteq \{x | x \in N\}$

(d) $\{a, b, c\}$ مجموعة جزئية فعلية من {الحروف الأبجدية للغة الإنجليزية}

(e) $\emptyset \in \{x, y, z\}$

(f) $\emptyset$ محتواة في {أحمر، أصفر، أزرق}

(g) $\{100, 200, 300, 400\} \subset \{200, 300, 400\}$

(h) $\{\emptyset\} \subseteq \emptyset$

3. استخدام رمز المجموعة الجزئية.

المجموعة التي تحتوي على عنصر واحد لها مجموعتان جزئيتان – هي نفسها والمجموعة الخالية. لقد رأينا أنه إذا كانت المجموعة تتضمن عنصرين، فستوجد أربع مجموعات جزئية. وإذا كانت المجموعة تتضمن ثلاثة عناصر، فستوجد ثماني مجموعات جزئية.

عدد العناصر	0	1	2	3
عدد المجموعات الجزئية	1	2	4	8

ملاحظة رياضية

في التمرين 110، رأينا نهجًا جديدًا لتطوير صيغة عدد المجموعات الجزئية. فهو يستخدم التبرير الاستنتاجي وليس التبرير الاستقرائي.

ليس من الصعب أن نلاحظ أن عدد المجموعات الجزئية يتضاعف كل مرة تضيف فيها عنصرًا واحدًا إلى المجموعة الأصلية. ولا يستغرق الأمر سوى قليل من التفكير لملاحظة أن في كل حالة، حتى الآن على الأقل، عدد المجموعات الجزئية يساوي 2 مرفوعة إلى أس بقيمة عدد العناصر. ولذا، فقد نستخدم التبرير الاستقرائي لتخمين أن عدد المجموعات الجزئية لأي مجموعة يتبع هذا النمط نفسه. وإذا قمنا بذلك، فسنكون على صواب. كما أن عدد المجموعات الجزئية الفعلية يكون أقل بواحد دائمًا، ومن ثم سنحصل على الصيغة التالية:

عدد المجموعات الجزئية للمجموعة المنتهية

إذا كانت المجموعة المنتهية تحتوي على عدد n من العناصر، فإنها تضم 2^n من المجموعات الجزئية و $2^n - 1$ من المجموعات الجزئية الفعلية.

مثال 5 إيجاد عدد المجموعات الجزئية للمجموعة

(a) جد عدد المجموعات الجزئية والمجموعات الجزئية الفعلية للمجموعة {أبيض، أزرق، أصفر، أحمر، أخضر، أسود}

(b) اشرح لماذا يقل عدد المجموعات الجزئية الفعلية لمجموعة ما دائمًا بواحد عن إجمالي عدد المجموعات الجزئية.

الحل

(a) تحتوي المجموعة على $n = 6$ عناصر. لذا يوجد 2^n، أو $2^6 = 64$، مجموعة جزئية، من بينها، توجد $2^n - 1$، أو 63، مجموعة جزئية فعلية. (تذكر أن 2^6 تعني $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$، وهو ما يساوي 64.)

(b) عند إيجاد المجموعات الجزيئية الفعلية، يجرى استثناء مجموعة جزئية واحدة فقط من فائمة كافة المجموعات الجزئية: المجموعة الأصلية نفسها. ولذا توجد دائمًا مجموعة جزئية فعلية واحدة أقل من إجمالي عدد المجموعات الجزئية.

جرّب هذا 5

أوجد عدد المجموعات الجزئية والمجموعات الجزئية الفعلية للمجموعة {الحديد، النحاس، الكروم، الكوبالت، الألومونيوم، الماغنسيوم، الذهب، الزئبق}.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

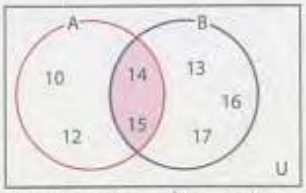
4. إيجاد عدد المجموعات الجزئية للمجموعة

تقاطع المجموعات واتحادها

كنا قد أشرنا في بداية هذا الدرس أنك قد تنتمي إلى كلتا مجموعتي الطلاب الذين يعيشون قريبًا من حرم المدرسة والطلاب الذين يذهبون إلى المدرسة مشيًا. سنحدد الأشياء المشتركة بين مجموعتين أو أكثر باستخدام مصطلح *التقاطع*.

و**تقاطع** المجموعتين A وB، ورمزه $A \cap B$، هو مجموعة العناصر الموجودة في كل من المجموعتين. وبالرموز، $A \cap B = \{x | x \in A \text{ و } x \in B\}$.

على سبيل المثال، إذا كانت $A = \{10, 12, 14, 15\}$ و$B = \{13, 14, 15, 16, 17\}$، فإن تقاطع $A \cap B = \{14, 15\}$، لأن 14 و15 هما العنصران الوحيدان المشتركان بين المجموعتين. يظهر مخطط فن *Venn* تقاطع $A \cap B$ في الشكل 5. لاحظ أن عناصر المجموعة A توجد داخل الدائرة الخاصة بالمجموعة A وأن عناصر المجموعة B توجد داخل الدائرة الخاصة بالمجموعة B. أما عنصرا التقاطع فيوجدان في الجزء الذي تتداخل فيه الدائرتان، $A \cap B$ هو الجزء المظلل.



الشكل 5 $A \cap B = \{14, 15\}$

يُعد التقاطع مثالًا لإحدى **العمليات على المجموعات**—قاعدة لدمج مجموعتين أو أكثر لتكوين مجموعة جديدة. يتكون تقاطع ثلاث مجموعات أو أكثر من مجموعة العناصر التي توجد في كل مجموعة لوحدها. لاحظ أن حرف العطف **و** يُستخدم أحيانًا للتعبير عن التقاطع؛ $A \cap B$ هو مجموعة العناصر التي في A وB.

مثال 6 إيجاد التقاطعات

يجري تقييم ثلاثة أدوية تجريبية من حيث السلامة. ولكل منها آثار جانبية رصدها 1% على الأقل من الأشخاص الذين جربوا الدواء. وهذه تجربة عمياء، ولذا سيُرمز إلى الأدوية باستخدام الرموز A وB وC. فيما يلي سرد للآثار الجانبية لكل منها.

A = {غثيان، تعرق ليلي، عصبية، جفاف الفم، تورم القدمين}
B = {زيادة الوزن، غثيان، عصبية، رؤية مشوشة، حمى، صعوبة في النوم}
C = {جفاف الفم، غثيان، رؤية مشوشة، حمى، فقدان الوزن، إكزيما}

جد كل من المجموعات المطلوبة الآتية:

(a) $A \cap B$ (b) $B \cap C$ (c) $A \cap B \cap C$

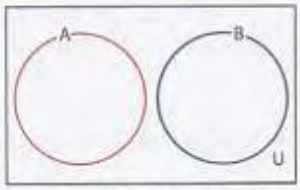
الحل

(a) ثمة أثران جانبيّان مذكوران لكل من A وB: الغثيان والعصبية. إذن $A \cap B$ = {غثيان، عصبية}.
(b) توجد ثلاثة آثار جانبية مشتركة بين العقارين B وC: الغثيان والرؤية المشوشة والحمى. إذن $B \cap C$ = {غثيان، رؤية مشوشة، حمى}.
(c) يشير هذا المثال إلى أن إيجاد تقاطع أكثر من مجموعتين يبدو منطقيًا تمامًا؛ لقد أوجدت للتو العناصر في كل مجموعة. في هذه الحالة، يكون ثمة أثر جانبي واحد مذكور لكافة العقاقير الثلاثة: الغثيان. إذن $A \cap B \cap C$ = {غثيان}.

جرّب هذا 6

إذا كانت A = {الشارقة، عجمان، دبي، أم القيوين، خورفكان} وB = {دبا الحصن، رأس الخيمة، دبي، خورفكان} وC = {الفجيرة رأس الخيمة أبو ظبي}، فأوجد $A \cap B$ و$B \cap C$ و$A \cap B \cap C$.

عندما يكون تقاطع مجموعتين عبارة عن المجموعة الخالية، تُسمى المجموعات **منفصلة**. على سبيل المثال، نجد أن مجموعة طلاب الصف العاشر ومجموعة طلاب الحادي عشر منفصلتان، حيث لا يمكن أن يكون الطالب مشترك بين المجموعتين. ويظهر مخطط فن *Venn* الخاص بالمجموعتين المنفصلتين A وB في الشكل 6. إذا لم تتضمن المجموعتان أي عناصر مشتركة، فلن تتقاطع الدائرتان اللتان تمثلهما على الإطلاق.



الشكل 6 $A \cap B = \emptyset$

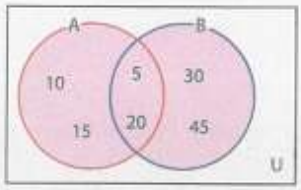
ثمة طريقة أخرى لدمج مجموعتين لتكوين مجموعة جديدة تُسمى *الاتحاد*.

و**اتحاد** المجموعتين A وB، ورمزه $A \cup B$، هو مجموعة العناصر الموجودة في المجموعة A **أو** في المجموعة B (أو كلتيهما). وبالرموز:

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ أو } x \in B\}$$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © جميع الحقوق

على سبيل المثال، إذا كانت $A = \{5, 10, 15, 20\}$ و$B = \{5, 20, 30, 45\}$، فإن اتحاد $A \cup B = \{5, 10, 15, 20, 30, 45\}$. وحتى بالرغم من وجود 5 و20 في كلتا المجموعتين، فإننا نذكرهما مرة واحدة فقط في الاتحاد. يظهر مخطط فن *Venn* لاتحاد $A \cup B$ في الشكل 7. والمجموعة $A \cup B$ هي المنطقة المظللة والتي تتكون من كافة العناصر في كلتا المجموعتين.



الشكل 7 $A \cup B$

مثال 7 إيجاد الاتحادات

بالنسبة إلى المجموعتين اللتين في المثال 6، أوجد كلًا مما يلي، ثم صف ما تمثله كل مجموعة لفظيًا.

(a) $A \cup B$
(b) $A \cup C$
(c) $A \cup B \cup C$

الحل

لإيجاد الاتحاد، ما عليك سوى تكوين قائمة بكافة العناصر من كلتا المجموعتين دون كتابة التكرارات.

(a) $A \cup B$ = {غثيان، تعرق ليلي، عصبية، جفاف الفم، تورم القدمين، زيادة الوزن، رؤية مشوشة، حمى، صعوبة في النوم}. هذه مجموعة الآثار الجانبية التي رصدها أكثر من 1% من الأشخاص الذين جربوا الدواء A أو B.

(b) $A \cup C$ = {غثيان، تعرق ليلي، عصبية، جفاف الفم، تورم القدمين، رؤية مشوشة، حمى، فقدان الوزن، إكزيما}. هذه مجموعة الآثار الجانبية التي رصدها أكثر من 1% من الأشخاص الذين جربوا الدواء A أو C.

(c) $A \cup B \cup C$ = {غثيان، تعرق ليلي، عصبية، جفاف الفم، تورم القدمين، زيادة الوزن، رؤية مشوشة، حمى، صعوبة في النوم، فقدان الوزن، إكزيما}. هذه مجموعة الآثار الجانبية التي رصدها أكثر من 1% من الأشخاص الذين جربوا أيًا من الأدوية الثلاثة.

جرّب هذا 7

بالنسبة إلى المجموعات التي في جرّب هذا 6، جد $A \cup B$ و $B \cup C$ و $A \cup B \cup C$.

ماذا عن العمليات التي تتضمن أكثر من مجموعتين وأكثر من عملية واحدة؟ وكما هو الحال بالنسبة إلى العمليات التي تتضمن الأعداد، فإننا نستخدم الأقواس للإشارة إلى ترتيب العمليات. ويتضح ذلك في المثال 8.

مثال 8 إجراء العمليات على المجموعات

استخدم المجموعات في المثال 6 مرة أخرى. وجد كل مجموعة مطلوبة واكتب الوصف اللفظي لما تمثله كل مجموعة.

(a) $(A \cup B) \cap C$
(b) $A \cap (B \cup C)$
(c) $(A \cap B) \cup C$

الحل

يتمثل المفتاح في إجراء العملية التي بين القوسين أولًا.

(a) أولًا، نجد $A \cup B$. هذه هي المجموعة التي وجدناها في الجزء (a) من المثال 7. الآن، نجد العناصر المشتركة بين هذه المجموعة والمجموعة C، $(A \cup B) \cap C$ = {جفاف الفم، غثيان، رؤية مشوشة، حمى}. هذه هي مجموعة الآثار الجانبية المشتركة بين العلاج C وأي من A أو B (أو كليهما).

(b) $A \cap (B \cup C)$ = {غثيان، جفاف الفم، عصبية}. هذه هي مجموعة الآثار الجانبية المشتركة بين العلاج A وأي من B أو C (أو كليهما).

(c) $(A \cap B) \cup C$ = {غثيان، عصبية، جفاف الفم، رؤية مشوشة، حمى، فقدان الوزن، إكزيما}. هذه هي مجموعة الآثار الجانبية المشتركة التي رصدها مستخدمو العلاج C أو كل من مستخدمي A ومستخدمي B.

جرّب هذا 8

بالنسبة إلى المجموعات التي في جرّب هذا 6، جد $A \cup (B \cap C)$ و $(A \cap B) \cup C$ و $A \cap (B \cup C)$.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

تنبيه

عند جمع الاتحاد والتقاطع مع المتممات كما سنفعل في المثال 9 ، يجب أن نكون حذرين للغاية. انتبه بشكل خاص إلى الأقواس وما إذا كان رمز المتممة داخل الأقواس أم خارجها.

ملاحظة رياضية

لا تنس أهمية المجموعة الشاملة عند إيجاد المتممات. متممة المجموعة A هي جميع العناصر الموجودة في *المجموعة الشاملة* وليست في المجموعة A. وليست كل العناصر الموجودة في المجموعة الشاملة وفي المجموعة A.

مثال 9 إجراء العمليات على المجموعات

بالرجوع إلى مجموعات الآثار الجانبية. تذكّر أنها رُصدت من قبل 1% على الأقل من المستخدمين. فيما يلي المجموعة الشاملة لكافة الآثار الجانبية التي رصدها أي من مستخدمي الأدوية الثلاثة. استخدمها لإيجاد المجموعات التالية.

U = {غثيان، تعرق ليلي، عصبية، جفاف الفم، تورم القدمين، زيادة الوزن، رؤية مشوشة، حمى، صعوبة في النوم، فقدان الوزن، إكزيما، ارتعاش الفم، تدفق الدموع، سقوط مع فقدان السيطرة}

(a) $A' \cap C'$ (b) $(A \cap B)' \cap C$ (c) $B' \cup (A \cap C')$

الحل

(a) نوجد أولًا A'، والتي تضم كافة العناصر التي في المجموعة الشاملة وليست في المجموعة A:

A' = {زيادة الوزن، رؤية مشوشة، حمى، صعوبة في النوم، فقدان الوزن، إكزيما، ارتعاش الفم، تدفق الدموع، سقوط مع فقدان السيطرة}.

ثم نوجد C'، C' = {تعرق ليلي، عصبية، تورم القدمين، زيادة الوزن، حمى، صعوبة في النوم، ارتعاش الفم، تدفق الدموع، سقوط مع فقدان السيطرة}.

الآن يكون $A' \cap C'$ هي العناصر المشتركة بين A' وC'، $A' \cap C'$ = {زيادة الوزن، صعوبة في النوم، ارتعاش الفم، تدفق الدموع، سقوط مع فقدان السيطرة}.

(b) يشير الفوسان إلى أننا يلزمنا إيجاد $A \cap B$ أولًا: $A \cap B$ = {غثيان، عصبية}. ثم نوجد المتممة: $(A \cap B)'$ = {تعرق ليلي، جفاف الفم، تورم القدمين، زيادة الوزن، رؤية مشوشة، حمى، صعوبة في النوم، فقدان الوزن، إكزيما، ارتعاش الفم، تدفق الدموع، سقوط مع فقدان السيطرة}. وعناصر هذه المجموعة والموجودة كذلك في المجموعة C هي ما نبحث عنه. أي أن $(A \cap B)' \cap C$ = {جفاف الفم، رؤية مشوشة، حمى، فقدان الوزن، إكزيما}.

(c) نجد أولًا $A \cap C'$، $A \cap C'$ = {تعرق ليلي، عصبية، تورم القدمين، زيادة الوزن، حمى، صعوبة في النوم، ارتعاش الفم، تدفق الدموع، سقوط مع فقدان السيطرة}. ومن ثم، فإن $A \cap C'$ = {تعرق ليلي، عصبية، تورم القدمين}.

ثم نلاحظ أن B' = {تعرق ليلي، جفاف الفم، تورم القدمين، فقدان الوزن، إكزيما، ارتعاش الفم، تدفق الدموع، سقوط مع فقدان السيطرة}.

إن الاتحاد الذي نبحث عنه هو كافة العناصر التي في B' إلى جانب العناصر التي في $A \cap C'$ والتي لم تدرج بالفعل في B'،

$B' \cup (A \cap C')$ = {تعرق ليلي، جفاف الفم، تورم القدمين، فقدان الوزن، إكزيما، ارتعاش الفم، تدفق الدموع، سقوط مع فقدان السيطرة، عصبية}.

جرّب هذا 9

إن المجموعة الشاملة للمجموعات التي في جرّب هذا 6 هي U = {الشارقة، عجمان، دبي، أم القيوين، خورفكان، دبا الحصن، رأس الخيمة، الفجيرة، أبو ظبي، جبل علي، حتا}. جـــد كل مجموعة.

(a) C' (b) $(A \cup B)'$ (c) $A' \cap C'$ (d) $(A \cup B) \cap C'$

يشيع استخدام اتحاد المجموعات وتقاطعها في الحياة اليومية – لكن ربما لم تفكر فقط في هذا الأمر بهذه الطريقة. فمثلًا، يشكل تقاطع مجموعة مواطني الولايات المتحدة الذين تزيد أعمارهم عن 17 ومجموعة مواطني الولايات المتحدة غير المدانين إجراميًا مجموعة المواطنين المؤهلين للتصويت في الانتخابات القومية. يكوّن اتحاد مجموعة والديّ أمك ومجموعة والديّ أبيك مجموعة أجدادك.

طرح المجموعات

تُسمى العملية الثالثة التي سندرُسها على المجموعات *الفرق* بين المجموعات، وسنسميها كذلك *طرح المجموعات* كما سنستخدم علامة الطرح لتمثيلها.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إن **الفرق** بين المجموعة A والمجموعة B هي مجموعة العناصر الموجودة في المجموعة A *وليست* موجودة في المجموعة B، وبالرموز: $A - B = \{x | x \in A \text{ و } x \notin B\}$.

مثال 10 إيجاد الفرق بين مجموعتين

سنستخدم مرة أخرى المجموعات في المثال 6. يبقى لك أن تكون على معرفة جيدة بها الآن.
جـد كل مجموعة.

(a) $A - B$ (b) $B - C$ (c) $(A - B) - C$

الحل

(a) نبدأ بعناصر المجموعة A، ثم نحذف كل عنصر في B موجود كذلك في A. العنصران المشتركان هما الفئران والعصبية، ومن ثم تكون $A - B =$ {تعرق ليلي، جفاف الفم، تورم القدمين}.
(b) في هذه المرة، سنبدأ بالمجموعة B، ثم تحذف الأشياء التي في C وموجودة كذلك في B. العناصر المشتركة هي الفئران والرؤية المشوشة والحمى، ومن ثم تكون $B - C =$ {زيادة الوزن، عصبية، صعوبة في النوم}.
(c) إننا نعرف بالفعل أن $A - B =$ {تعرق ليلي، جفاف الفم، تورم القدمين}. والآن سنحتاج إلى إيجاد أي عناصر موجودة كذلك في المجموعة C ثم نحذفها. لا يوجد سوى جفاف الفم في المجموعة C، إذن $(A - B) - C =$ {تعرق ليلي، تورم القدمين}.

ملاحظة رياضية

يمكن كتابة بعض العمليات بدلالة عمليات أخرى. على سبيل المثال، $5 - 3$ تكون كذلك $(-5) + 3$. هل يمكنك التفكير في طريقة لكتابة $A - B$ باستخدام التقاطع والمتممة؟ قد يكون رسم مخطط فن *Venn* مفيدًا.

جرّب هذا 10

بالنسبة إلى المجموعات التي في جرّب هذا 6، جـد كل مجموعة.

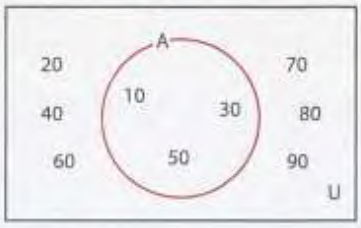
(a) $A - B$ (b) $B - C$ (c) $(B - C) - A$

5. إيجاد التقاطعات والاتحادات والفروق بين المجموعات.

لقد استخدمنا إلى الآن مخططات فن *Venn* كطريقة لتصوير مجموعات معينة. في الدرسين التاليين سندرس كيف يمكن استخدام هذه المخططات لدراسة المجموعات بتعمق أكبر في مجموعة متنوعة من الحالات المنطبقة.

إجابات جرّب هذا

1 (a) $A' = \{90, 80, 70, 60, 40, 20\}$



(b) المجموعة المتممة للمجموعة الخالية هي المجموعة الشاملة.

2 {الهواتف، الحواسب، الأجهزة اللوحية}، {الهواتف، الحواسب}، {الهواتف، الأجهزة اللوحية}، {الحواسب، الأجهزة اللوحية}، {الهواتف}، {الحواسب}، {الأجهزة اللوحية}، $\varnothing$

3 {الربيع، الصيف، الخريف}، {الربيع، الصيف، الشتاء}، {الربيع، الخريف، الشتاء}، {الصيف، الخريف، الشتاء}، {الربيع، الصيف}، {الربيع، الخريف}، {الربيع، الشتاء}، {الصيف، الخريف}، {الصيف، الشتاء}، {الخريف، الشتاء}، {الربيع}، {الصيف}، {الخريف}، {الشتاء}، $\varnothing$

4 (a) صائبة (c) صائبة (e) خاطئة (g) خاطئة
(b) خاطئة (d) صائبة (f) صائبة (h) خاطئة

5 المجموعات الجزئية، $256 = 2^8$؛ المجموعات الجزئية الفعلية، 255

6 (a) $A \cap B =$ {دبي، خورفكان}؛
(b) $B \cap C =$ {رأس الخيمة}؛ $A \cap B \cap C = \varnothing$

7 (a) $A \cup B =$ {الشارقة، عجمان، دبي، أم القيوين، خورفكان، دبا الحصن، رأس الخيمة}
(b) $A \cup C =$ {الشارقة، عجمان، دبي، أم القيوين، خورفكان، الفجيرة، أبو ظبي}
(c) $A \cup B \cup C =$ {الشارقة، عجمان، دبي، أم القيوين، خورفكان، دبا الحصن، رأس الخيمة، الفجيرة، أبو ظبي}

8 (a) $A \cup (B \cap C) =$ {الشارقة، عجمان، دبي، أم القيوين، خورفكان، رأس الخيمة}
(b) $(A \cap B) \cup C =$ {دبي، خورفكان، الفجيرة، رأس الخيمة، أبو ظبي}
(c) $A \cap (B \cup C) =$ {دبي، خورفكان}

9 (a) $C' =$ {الشارقة، عجمان، دبي، أم القيوين، خورفكان، دبا الحصن، جبل علي، حتا}
(b) $(A \cup B)' =$ {الفجيرة، أبو ظبي، جبل علي، حتا}
(c) $A' \cap C' =$ {دبا الحصن، جبل علي، حتا}
(d) $(A \cup B) \cap C' =$ {الشارقة، عجمان، دبي، أم القيوين، خورفكان، دبا الحصن}

10 (a) $A - B =$ {الشارقة، عجمان، أم القيوين}
(b) $B - C =$ {دبا الحصن، دبي، خورفكان}
(c) $(B - C) - A =$ {دبا الحصن}

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

9-2 مجموعة التمارين

تمارين كتابية

1. ما المقصود بالمجموعة الجزئية؟
2. اشرح الفرق بين المجموعة الجزئية والمجموعة الجزئية الفعلية.
3. اشرح الفرق بين المجموعة الجزئية وعنصر المجموعة.
4. اشرح لماذا تمثل المجموعة الخالية مجموعة جزئية لنفسها، لكنها ليست مجموعة جزئية فعلية.
5. اشرح الفرق بين اتحاد مجموعتين وتقاطعهما.
6. متى يقال إن المجموعتين منفصلتان؟
7. ما المقصود بالمجموعة الشاملة؟
8. ما المقصود بتتمة مجموعة؟
9. اكتب مثالًا من الحياة اليومية يُمثل اتحاد المجموعات واشرح لماذا يمثل اتحادًا. ثم قم بالشيء نفسه مع التقاطع.
10. اكتب مثالًا من الحياة اليومية يُمثل الفرق بين المجموعات واشرح لماذا يمثل فرقًا.

تمارين حسابية

بالنسبة إلى التمارين 11-14. لتكن $U = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$، و $A = \{5, 7, 11, 13\}$ و $B = \{2\}$ و $C = \{13, 17, 19\}$، و $D = \{2, 3, 5\}$. *جد كل مجموعة.*

11. A'
12. B'
13. C'
14. D'

15. إذا كانت U = مجموعة الأعداد الطبيعية و$\{. . . , 12, 10, 8, 6, 4\} = A$. فجد A'.
16. إذا كانت U = مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية و$B = \{13, 15, 17, 19, 21, 23, . . .\}$. فجد B'.

بالنسبة إلى التمارين 17-24. جد جميع المجموعات الجزئية وجميع المجموعات الجزئية الفعلية لكل مجموعة.

17. {كرة السلة، كرة القدم، والكرة اللينة}
18. {الإلقاء، الصحافة، الخطابة}
19. {الراديو، التلفاز}
20. {إلكتروني، ورقي}
21. $\emptyset$
22. $\{\ \}$
23. {الحمى، الارتجاف، الغثيان، الصداع}
24. {نوبات مرضية، تنمل، شلل، ألم}

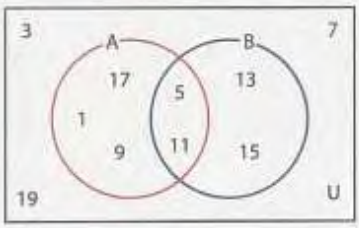
بالنسبة إلى التمارين 25-34. حدد ما إذا كانت كل عبارة صائبة أم خاطئة.

25. $\{3\} \subseteq \{5, 3, 1\}$
26. $\{a, b, c\} \subset \{c, b, a\}$
27. $\{1, 2, 3\} \subseteq \{123\}$
28. $\emptyset \subset \emptyset$
29. $\emptyset \in \{\ \}$
30. $\{x | x \in E, x > 100\} \subset \{x | x \in N, x > 52\}$
31. $\{3\} \in \{1, 3, 5, 7, . . .\}$
32. $\{x | x \in N, x > 10\} \subseteq \{x | x \in N, x \geq 10\}$
33. $\emptyset \subset \{a, b, c\}$
34. $\{7, 11, 13, 17\} \subseteq \{17, 13, 11\}$

بالنسبة إلى التمارين 35-40. جد عدد المجموعات الجزئية والمجموعات الجزئية الفعلية التي تتضمنها كل مجموعة. لا تسرد المجموعات الجزئية.

35. $\{25, 75, 50\}$
36. $\{a, b, c, d, . . . , z\}$
37. $\emptyset$
38. $\{0\}$
39. $\{x, y\}$
40. $\{10, 8, 6, 4, 2, . . . , 30\}$

بالنسبة إلى التمارين 41-50. استخدم مخطط فن Venn لإيجاد العناصر في كل مجموعة.



41. U
42. A
43. B
44. $A \cap B$
45. $A \cup B$
46. A'
47. B'
48. $(A \cup B)'$
49. $(A \cap B)'$
50. $A \cap B'$

بالنسبة إلى التمارين 51-60. لتكن

$U = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$
$A = \{14, 15, 16, 17\}$
$B = \{11, 13, 15, 17, 19\}$
$C = \{12, 14, 15, 19, 20\}$

جد كل مجموعة.

51. $A \cup C$
52. $A \cap B$
53. A'
54. $(A \cap B) \cup C$
55. $A' \cap (B \cup C)$
56. $(A \cap B) \cap C$
57. $(A \cup B)' \cap C$
58. $A \cap B'$
59. $(B \cup C) \cap A'$
60. $(A' \cup B)' \cup C'$

بالنسبة إلى التمارين 61-70. لتكن

$U = \{x | x \in N, x < 25\}$
$W = \{x | x \in N, 5 < x < 15\}$
$X = \{x | x \in$ الأعداد الطبيعية الزوجية التي تقل عن 10$\}$
$Y = \{x | x \in N, 20 < x < 25\}$
$Z = \{x | x \in$ مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية التي تقل عن 13$\}$

جد كل مجموعة.

61. $W \cap Y$
62. $X \cup Z$
63. $W \cup X$
64. $(X \cap Y) \cap Z$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9-2 مجموعة التمارين يتبع

65. $W \cap X$
66. $(Y \cup Z)'$
67. $(X \cup Y) \cap Z$
68. $(Z \cap Y) \cup W$
69. $W' \cap X'$
70. $(Z \cup X)' \cap Y$

بالنسبة إلى التمارين 71-74، لتكن

$U = \{1, 2, 3, \ldots\}$
$A = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$
$B = \{9, 18, 27, 36, \ldots\}$
$C = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

جد كل مجموعة.

71. $A \cap B$
72. $A' \cap C$
73. $A \cap (B \cup C')$
74. $A \cup B$

بالنسبة إلى التمارين 75-80، لتكن

$U = \{p, q, r, s, t, u, v, w\}$
$A = \{p, q, r, s, t\}$
$B = \{r, s, t, u, v\}$
$C = \{p, r, t, v\}$

جد كل مجموعة.

75. $C - B$
76. $A - C$
77. $B - C$
78. $B - A$
79. $B \cap C'$
80. $C \cap A'$

بالنسبة إلى التمارين 81-84، بفرض أن

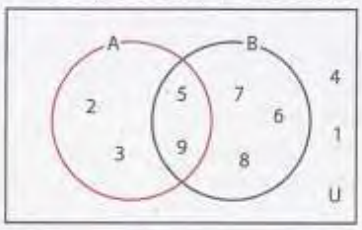
$D = \{11, 12, 13, 14, 15, \ldots\}$
$M = \{x | x \in E \text{ و } x > 10\}$
$T = \{x | x \in N \text{ و } x < 100\} \cup \{x | x \in O \text{ و } x > 100\}$

جد كل مجموعة.

81. $D - M$
82. $T - D$
83. $(D - M) - T$
84. $(T - D) - M$

بالنسبة إلى التمارين 85-88، استخدم مخطط فن Venn لكتابة كل مجموعة بدلالة A و/أو B وا أو U.

85. {1, 2, 3, 4}
86. {2, 3, 5, 6, 7, 8, 9}
87. {2, 3, 6, 7, 8}
88. {1, 4}



التطبيقات في عالمنا

89. يمكن للطالب الحصول على جهاز لوحي وهاتف ذكي وكمبيوتر محمول أثناء قضاء بعض الوقت في الحرم الجامعي بين الصفوف. اسرد جميع مجموعات خيارات تمثيل المعلومات المختلفة التي يمكن للطالب اختيارها، مع وضع جميع هذه التقنيات أو بعضها أو لا شيء منها في الاعتبار.
90. إذا تم توزيع خمس بطاقات لعب على شخص، ولديه فرصة تجاهل أيّ عدد يتضمن 0. فكم عدد الخيارات المتاحة لهذا الشخص؟
91. تستطيع إحدى طالبات الفرقة الأولى في الكلية اختيار أحد الصفوف التالية أو بعضها أو جميعها لنصف السنة الأول: صف اللغة العربية وصف الرياضيات وصف اللغة الأجنبية وصف العلوم وصف الفلسفة وصف التربية البدنية وصف التاريخ. كم عدد الاحتمالات المختلفة المتوفرة لديها لجدولها الجديد؟
92. منذ إعادة تشكيل اتحاد الطلاب، كان ثمة خيارات محدودة من الأطعمة والمشروبات التي يمكن للطالب شراؤها كوجبة خفيفة بين الصفوف الدراسية. فيمكن للطلاب عدم اختيار أي من هذه العناصر أو اختيار بعضها أو جميعها: البيتزا والبطاطس المقلية والمخبوزات الناعمة الكبيرة والمياه الغازية والكولا عديمة السكر والعصائر. كم عدد الاختيارات المختلفة التي يمكن إجراؤها؟
93. تشتري رنا كمبيوتر محمولًا جديدًا للمدرسة ويمكنها عدم اختيار أي شيء من خيارات الأجهزة الطرفية التالية أو اختيار بعضها أو جميعها: ماوس ليزر أو ناسخ الأقراص الرقمية أو كاميرا ويب أو ذاكرة متنقلة. كم عدد اختيارات الأجهزة الطرفية المختلفة الممكنة للكمبيوتر المحمول الخاص بها؟
94. لدمج تمارين الأيروبيك في برنامج التمرين الخاص بها، يمكن لشيماء اختيار إحدى هذه الآلات أو بعضها أو جميعها: جهاز السير والدراجة وجهاز ستير ستيبر. اسرد جميع الاحتمالات لاختيارات تمارين الأيروبيك.
95. إعلان الوظائف الشاغرة التالي يبحث عن شخص يقع ضمن تقاطع ثلاث مجموعات. اذكر تلك المجموعات الثلاث؟

اكتب وصفًا لفظيًا لكل مجموعة.

96. (a) $B \cup C$ (b) $C \cup D$ (c) $D \cup E$
97. (a) A' (b) C' (c) E'
98. (a) $B \cap C$ (b) $A \cap B$ (c) $C \cap B'$
99. (a) $(A \cup B)'$ (b) $(B \cup D)'$ (c) $A - (B \cap C)$

التفكير الناقد

*إن **الضرب الديكارتي** هو عملية تتم في المجموعة لم ندرسها بعد. عند اقتران عناصر من مجموعتين معًا في مجموعة داخل قوسين، مثل (الأنطونزا، الارتجاف). نسمي ذلك **زوجًا مرتبًا**. الضرب الديكارتي للمجموعتين A وB، والذي يُرمز له بالرمز $A \times B$، هو مجموعة جميع الأزواج المرتبة بحيث يكون الإدخال الأول عنصرًا من المجموعة A والإدخال الثاني من المجموعة B، وتستخدم هذه العملية لربط الأشياء المتوافقة مع بعضها بشكل طبيعي، مثل الأمراض والأعراض. على سبيل المثال، إذا كانت A = {برد، أنفلونزا} وB = {حمى، ارتجاف}، فإن $A \times B$ = {(برد، حمى)، (برد، ارتجاف)، (أنفلونزا، حمى)، (أنفلونزا، ارتجاف)}. بالنسبة إلى كل زوج من المجموعات في التمرينين 101 و102، جد ناتج الضرب المتجهي واكتب وصفًا لفظيًا عن أهميته.*

100. A = {قميص، معطف}،
B = {أخضر، أصفر، أحمر}

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

101. A = {ناجح، راسب}، B = {ناجح في جميع المواد، ناجح في المواد العملية، ناجح في المواد النظرية}

102. إذا كانت $n(A) = n$ و $n(B) = m$، فما هي $n(A \times B)$؟ اشرح كيف توصلت إلى إجابتك.

103. ما العلاقة بين الضرب الديكارتي والضرب العادي؟

104. هل يمكنك إيجاد مجموعتين اتحادهما وتقاطعهما واحد؟

105. اختر ثلاثة أدوية وابحث عن مورد عبر الإنترنت يذكر الآثار الجانبية المحتملة لكل منها. جد تقاطع المجموعات.

106. (a) كوّن مجموعتين A وB تتضمن كل منهما بين 4 و8 عناصر بحيث يكون $A \cap B$ غير خالية. جد كلًا من $n(A)$ و$n(B)$ و$n(A \cup B)$ و$n(A \cap B)$.

(b) كرر الجزء (a) بمجموعتين مختلفتين تمامًا A وB.

(c) استخدم نتائج الجزأين (a) و(b) لتكوين تخمين حول صيغة لإيجاد عدد العناصر الرئيسة لاتحاد المجموعتين.

107. (a) اكتب المجموعتين A وB بحيث تكون عندهما $n(A \cup B) > n(A \cap B)$.

(b) اكتب المجموعتين A وB بحيث تكون عندهما $n(A \cup B) = n(A \cap B)$.

(c) هل يمكنك كتابة المجموعتين A وB بحيث تكون عندهما $n(A \cup B) < n(A \cap B)$؟ استخدم مخطط فن *Venn* لتوضيح السبب وراء إمكانية ذلك أو عدم إمكانيته.

108. فكّر في المجموعتين A وB. ماذا يجب أن يحدث ليكون $A \cap B = A$؟ ماذا عن $A \cap B = B$؟

109. بالنسبة إلى أي مجموعتين A وB، ماذا يجب أن يحدث بالنسبة إلى الأمرين الواردين في التمرين 109؟

110. إليك طريقة بديلة لتكوين صيغة لعدد المجموعات الجزئية لمجموعة تتضمن n من العناصر. إذا كانت المجموعة تضم عنصرين، فعند تكوين مجموعة جزئية، سيوجد خياران لكل عنصر: إما أن يكون ضمن المجموعة الجزئية أو لا. إذا ضربنا خيارين للعنصر الأول في خيارين للعنصر الثاني، نحصل على أربعة خيارات للمجموعة الجزئية. (هذا يوضح فكرة مهمة تُسمى مبدأ العد الأساسي). قم بتعميم هذه الفكرة لاستنباط الصيغة لإيجاد عدد المجموعات الجزئية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.

الدرس 9-3 استخدام مخططات فِن Venn لدراسة العمليات على المجموعات

أهداف التعلم..

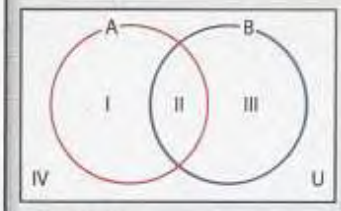
1. توضيح عبارات مجموعة تضم مجموعتين باستخدام مخططات فِن *Venn*.
2. توضيح عبارات مجموعة تضم ثلاث مجموعات باستخدام مخططات فِن *Venn*.
3. استخدام قوانين دي مورجان.
4. استخدام مخططات فِن *Venn* لتحديد ما إذا كانت المجموعتان متساويتين أم لا.
5. استخدام الصيغة لإيجاد عدد العناصر الرئيسة لاتحاد المجموعتين.

هل سبق لك أن أردت نشر شيء ما على مواقع التواصل الاجتماعي، ثم قررت ألا تنشره لأنه ربما لم يكن ضمن الأشياء التي تريد أن يراها الجميع؟ إن بعض الناس ليسوا أصدقاءً على وسائل التواصل الاجتماعي إلا مع أقرب أصدقائهم؛ معظم الأشخاص يكونون أصدقاءً لمئات من الأشخاص، بداية من أمهاتهم وحتى مجموعة المعارف العابرين. لدي أنا وصديقي المقرب مجموعة خاصة سرية على أحد مواقع التواصل الاجتماعي لهذا السبب بالتحديد؛ فمجموعة الأشياء التي أشعر بالارتياح للإفصاح عنها لزملاء الدراسة لا تساوي -أو حتى تكافئ- بالتأكيد مجموعة الأشياء التي أشعر بالارتياح للإفصاح عنها لأمي أو صديقي المقرب. ومعظمنا لديه العديد من الدوائر المتميزة للأصدقاء وجهات الاتصال، وعندما تصطدم تلك العوالم، قد تأتي النتائج غير متوقعة، وربما تكون مضحكة عن غير قصد.

وثمة طريقة جيدة للتعامل مع التداخل بين المجموعات المتنوعة تتمثل في استخدام المخططات. وهل يمكنك تخمين نوع المخطط الذي سنختاره لتحقيق ذلك؟ إذا لم تقل "مخطط فِن *Venn*"، فارجع رجاءً وأعِد قراءة الدرس السابق.

في هذا الدرس، سنطور طريقة لرسم مخططات فِن *Venn* التي ستساعدنا على توضيح العمليات على المجموعات. وسنبدأ بالمخططات التي تتضمن التفاعلات بين مجموعتين، كما في الشكل 8. لاحظ أنه توجد أربع مناطق منفصلة في مخطط فِن *Venn* الذي يوضح المجموعتين A وB. سنريد ترقيم المناطق للمرجعية؛ كما سنستخدم الأرقام الرومانية بحيث لا تتداخل أرقام المناطق مع العناصر التي في المجموعة أو عناصرها الرئيسة.

كما أن الإجراء الذي سنستخدمه لتوضيح عناصر المجموعتين، الموجودتين في المربع أدناه، تم عرضه في المثالَين 1 و2. أما الآن، فسنشرع في العمل باستخدام مجموعات مجردة تمامًا، لكنها معلقة هناك. وستساعدنا المهارات التي تعلمناها على حل مسائل حقيقية فيما بعد.



الشكل 8

توضيح عبارة مجموعة باستخدام مخطط فِن *Venn*

الخطوة 1 ارسم مخططًا للمجموعات، بالأرقام الرومانية في كل منطقة.

الخطوة 2 باستخدام تلك الأرقام الرومانية، قم بذكر المناطق التي تصفها كل مجموعة.

الخطوة 3 جـد مجموعة الأعداد التي توافق المجموعة المعطاة في عبارة المجموعة.

الخطوة 4 ظلل المنطقة المطابقة لمجموعة الأعداد الموجودة في الخطوة 3.

المنطقة I تمثل العناصر الموجودة في المجموعة A وغير موجودة في المجموعة B.
المنطقة II تمثل العناصر الموجودة في كلتا المجموعتين A وB.
المنطقة III تمثل العناصر الموجودة في المجموعة B وغير موجودة في المجموعة A.
المنطقة IV تمثل العناصر في المجموعة الشاملة التي لا توجد في كلتا المجموعتين A وB.

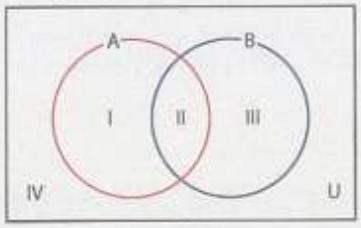
McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

مثال 1 رسم مخطط فن *Venn*

ارسم مخطط فن *Venn* لتوضيح المجموعة $(A \cup B)'$.

الحل

الخطوة 1 ارسم المخطط وقم بتسمية كل منطقة بالأرقام الرومانية.



الخطوة 2 من المخطط، قم بذكر المناطق التي تتكون منها كل مجموعة.

$U = \{I, II, III, IV\}$

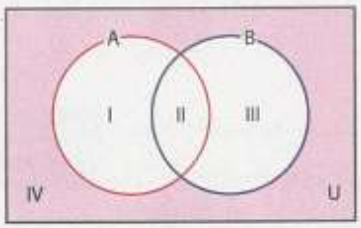
$A = \{I, II\}$

$B = \{II, III\}$

الخطوة 3 باستخدام المجموعات الواردة في الخطوة 2، جـد $(A \cup B)'$.

أولًا، تقع I وII وIII إما في المجموعة A أو B. لذا $A \cup B = \{I, II, III\}$. المجموعة الوحيدة غير الموجودة في $A \cup B$ هي IV. لذا المجموعة المتممة هي $(A \cup B)' = \{IV\}$.

الخطوة 4 ظلل المنطقة IV لتوضيح $(A \cup B)'$.



جرّب هذا 1

ارسم مخطط فن *Venn* لتوضيح المجموعة $A' \cap B$.

مثال 2 رسم مخطط فن *Venn*

ارسم مخطط فن *Venn* لتوضيح المجموعة $A \cap B'$.

الحل

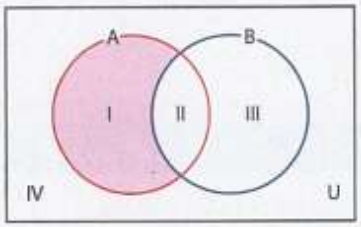
الخطوة 1 ارسم المخطط وقم بتسمية كل منطقة. سيكون هذا هو المخطط نفسه الموجود في الخطوة 1 من المثال 1.

الخطوة 2 من المخطط، قم بذكر المناطق التي تتكون منها كل مجموعة.

$U = \{I, II, III, IV\}$

$A = \{I, II\}$

$B = \{II, III\}$



الخطوة 3 باستخدام المجموعات الواردة في الخطوة 2.

جـد $A \cap B'$.

أولًا، توجد المنطقتان I وIV خارج المجموعة B.

لذا $B' = \{I, IV\}$ من بين هاتين المنطقتين.

تقع I كذلك في المجموعة A. لذا $A \cap B' = \{I\}$.

الخطوة 4 ظلل المنطقة I لتوضيح $A \cap B'$.

ملاحظة رياضية

في أي مسألة يطلب منا توضيح عبارة مجموعة تضم مجموعتين، ستكون الخطوتان 1 و2 نفسهما تمامًا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

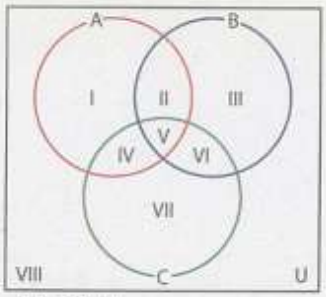
جرّب هذا 2

ارسم مخطط فن *Venn* لتوضيح المجموعة $A' \cup B$.

1. توضيح عبارات مجموعة تضم مجموعتين باستخدام مخططات فن *Venn*.

تُعد مخططات فن *Venn* رائعة في فرز المعلومات. وسنرغب في بعض التجارب مع مخططات فن *Venn* التي تتضمن ثلاث مجموعات قبل أن ننتقل إلى حل هذه المسائل.

ولحسن الحظ، يمكن استخدام الإجراء الذي استخدمناه مع مجموعتين مع ثلاث مجموعات أيضًا، ستحصل فقط على مخطط أكثر تعقيدًا (انظر الشكل 9).



الشكل 9

المنطقة I تمثل العناصر الموجودة في المجموعة A وغير موجودة في المجموعة B أو المجموعة C.
المنطقة II تمثل العناصر الموجودة في المجموعة A والمجموعة B وغير موجودة في المجموعة C.
المنطقة III تمثل العناصر الموجودة في المجموعة B وغير موجودة في المجموعة A أو المجموعة C.
المنطقة IV تمثل العناصر الموجودة في المجموعتين A وC وغير موجودة في المجموعة B.
المنطقة V تمثل العناصر الموجودة في المجموعات A وB وC.
المنطقة VI تمثل العناصر الموجودة في المجموعتين B وC وغير موجودة في المجموعة A.
المنطقة VII تمثل العناصر الموجودة في المجموعة C وغير موجودة في المجموعة A أو المجموعة B.
المنطقة VIII تمثل العناصر الموجودة في المجموعة الشاملة U، وغير موجودة في المجموعة A أو B أو C.

مثال 3 رسم مخطط فن *Venn* بثلاث مجموعات

ارسم مخطط فن *Venn* لتوضيح المجموعة $A \cap (B \cap C)'$.

الحل

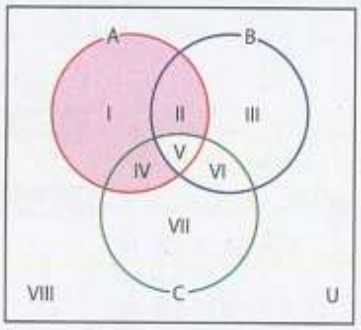
الخطوة 1 ارسم المخطط وقم بتسميته كما هو موضح في الشكل 9-2.

الخطوة 2 من المخطط، قم بذكر المناطق التي تتكون منها كل مجموعة.

$U = \{I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII\}$
$A = \{I, II, IV, V\}$
$B = \{II, III, V, VI\}$
$C = \{IV, V, VI, VII\}$

الخطوة 3 باستخدام المجموعات الواردة في الخطوة 2، جد $A \cap (B \cap C)'$.
أولًا، جد $B \cap C$: $B \cap C = \{V, VI\}$. المجموعة المتممة هي $(B \cap C)' = \{I, II, III, IV, VII, VIII\}$. المناطق I وII وIV هي كذلك أجزاء من المجموعة A. لذا $A \cap (B \cap C)' = \{I, II, IV\}$.

الخطوة 4 ظلل المناطق I وII وIV لتوضيح $A \cap (B \cap C)'$.



ملاحظة رياضية

عند توضيح مجموعات معقدة مثل $A \cap (B \cap C)'$، لا تنس إيجاد المجموعة الموجودة بين القوسين أولًا. هذا هو سبب وجود الأقواس!

جرّب هذا 3

ارسم مخطط فن *Venn* لتوضيح المجموعة $C \cup (A \cap B')$.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

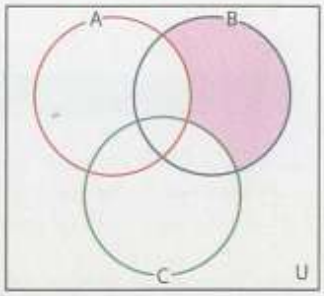
للتعامل مع مخططات فن *Venn* بصورة أفضل، سيكون من المفيد تحويل العملية، مع البدء بمخطط مظلل ومعرفة المجموعة التي يمثلها، كما في المثال 4.

مثال 4 إيجاد المجموعة المناظرة لمخطط فن *Venn*

اكتب المجموعة الموضحة باستخدام مخطط فن *Venn* في الشكل 10.

الحل

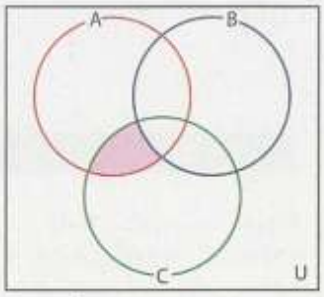
الجزء المظلل موجود بالكامل داخل الدائرة للمجموعة B، لذا فهو بالتأكيد مجموعة جزئية من B، لكنه لا يتضمن أيّ شيء من المجموعة A أو C. لذا يمكننا كتابته إما $B - (A \cup C)$ أو $B \cap (A \cup C)'$.



الشكل 10

جرّب هذا 4

اكتب المجموعة الموضحة باستخدام مخطط فن *Venn* في الشكل 11.



الشكل 11

قوانين دي مورجان

ثمة صيغتان معروفتان جيدًا تفيدان في تبسيط بعض العمليات على المجموعات. وقد سُميا بذلك تكريمًا لعالم رياضيات من القرن التاسع عشر يُدعى أوجستن دي مورجان.

سنبدأ أولًا بكتابة الصيغتين وسنوضح كلًا منهما بمثال. وبعد ذلك، سنرى كيف يمكن استخدام مخططات فن *Venn* لإثبات الصيغتين.

قوانين دي مورجان

بالنسبة إلى أي مجموعتين A وB.

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

ينص القانون الأول على أن متممة اتحاد مجموعتين تساوي دائمًا تقاطع متممتي المجموعتين.

2. توضيح عبارات مجموعة تضم ثلاث مجموعات باستخدام مخططات فن *Venn*.

مثال 5 استخدام قوانين دي مورجان

إذا كانت U = {حطين، عين جالوت، اليرموك، ذات الصواري، نهاوند، القادسية، مؤتة} و A = {حطين، عين جالوت، اليرموك، ذات الصواري} و B = {اليرموك، ذات الصواري، نهاوند، القادسية}، فجد $(A \cup B)'$ و $A' \cap B'$. ماذا يمكننا ملاحظته بشأن هاتين المجموعتين؟

الحل

$A \cup B$ = {حطين، عين جالوت، اليرموك، ذات الصواري، نهاوند، القادسية} و $(A \cup B)'$ = {مؤتة}

A' = {نهاوند، القادسية، مؤتة}
B' = {حطين، عين جالوت، مؤتة}
$A' \cap B'$ = {مؤتة}

هاتان المجموعتان متماثلتان، الأمر الذي يتوافق مع أول قوانين دي مورجان.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

جرّب هذا 5

إذا كانت U = {الحديد، النحاس، الكروم، الكوبالت، الألومونيوم، الماغنسيوم، الذهب، الزئبق} وA = {النحاس، الكوبالت، الألومونيوم، الماغنسيوم} وB = {الحديد، النحاس، الكروم، الكوبالت}، فجد $(A \cup B)'$ و$A' \cap B'$.

معلومات إضافية الحاضر وفن Venn

تُنسب مخططات فن *Venn* بوجه عام إلى عالم الرياضيات البريطاني جون فن، الذي قدمها عام 1880 على النحو الذي تستخدم عليه اليوم. هذا يجعل الأمر يبدو مفهومًا قديمًا إلى حدٍ ما، لكن يمكن أن ترجع جذور الفكرة العامة إلى أبعد من ذلك بكثير. فقد استخدم عالم الرياضيات الكبير ليونهارد أويلر مخططات مشابهة في القرن الثامن عشر ويمكن أن ترجع جذور أشكال أخرى مماثلة إلى القرن الثالث عشر!

بينما كان من الحقيقي بلا ريب أن جون فن كان أكاديميًا كلاسيكيًا—فقد كان يكتب أو يحاضر في كل من الأخلاق والرياضيات والمنطق ونظرية الاحتمال والفلسفة والميتافيزيقيا والتاريخ في الوقت نفسه—إلا أنه كان يمارس هواية مدهشة إلى حد ما، إنشاء الآلات. وعلى وجه الخصوص، كان معروفًا أكثر ببناء آلة لقذف كرات الكريكيت (وهو ما يشبه القذف في لعبة البيسبول تقريبًا). كانت آلته جيدة جدًا لدرجة أنها حققت في عام 1909 "رمية نظيفة" أمام أحد أفضل لاعبي الكريكيت في ذلك الوقت في أربع مناسبات.

ينص القانون الثاني من قوانين دي مورجان على أن متممة تقاطع مجموعتين تساوي اتحاد متممتي المجموعتين.

مثال 6 استخدام قوانين دي مورجان

إذا كانت U = {حطين، عين جالوت، اليرموك، ذات الصواري، نهاوند، القادسية، مؤتة} وA = {حطين، عين جالوت، اليرموك، ذات الصواري} وB = {اليرموك، ذات الصواري، نهاوند، القادسية}، فجد $(A \cap B)'$ و$A' \cup B'$. ماذا يمكننا ملاحظته بشأن هاتين المجموعتين؟

الحل

$A \cap B$ = {اليرموك، ذات الصواري} و$(A \cap B)'$ = {حطين، عين جالوت، نهاوند، القادسية، مؤتة}

A' = {نهاوند، القادسية، مؤتة}
B' = {حطين، عين جالوت، مؤتة}
$A' \cup B'$ = {نهاوند، القادسية، مؤتة، حطين، عين جالوت}

على الرغم من ذكرهما بترتيبات مختلفة (الأمر الذي نعلم أنه غير مهم)، فإن هاتين المجموعتين متماثلتان. الأمر الذي يتوافق مع ثاني قوانين دي مورجان.

ملاحظة رياضية

في المثالين 5 و6، نبحث في أمثلة محددة، لذلك نستخدم التبرير الاستقرائي لاستنتاج أن قوانين دي مورجان صحيحة على الأرجح. في المثال 7، سنستخدم التبرير الاستنتاجي *لإثباتها*.

3. استخدام قوانين دي مورجان.

جرّب هذا 6

إذا كانت U = {الحديد، النحاس، الكروم، الكوبالت، الألومونيوم، الماغنسيوم، الذهب، الزئبق} وA = {النحاس، الكوبالت، الألومونيوم، الماغنسيوم} وB = {الحديد، النحاس، الكروم، الكوبالت}، فجد $(A \cap B)'$ و$A' \cup B'$.

الآن وبعد أن عرفنا كيفية عرض المجموعات باستخدام مخططات فن *Venn*، يمكننا استخدامها لإثبات أن المجموعتين اللتين تبدوان مختلفتين متماثلتان في الواقع. سنوضح في المثال 7 الإجراء عن طريق إثبات قانون دي مورجان الأول، وسنترك القانون الثاني لك لتحاول إثباته.

McGraw-Hill Education © محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف

مثال 7 استخدام مخططات فن Venn لتوضيح تساوي المجموعات

استخدم مخططات فن Venn لتوضيح أن $(A \cup B)' = A' \cap B'$. يثبت أول قوانين دي مورجان.

الحل

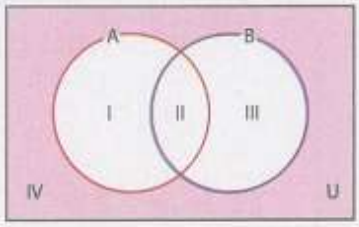
ابدأ برسم مخطط فن Venn لـ $(A \cup B)'$.

الخطوة 1 ارسم الشكل (كما هو موضح في الخطوة 4).

الخطوة 2 المجموعة U تتضمن المناطق I وII وIII وIV. المجموعة A تتضمن المنطقتين I وII. والمجموعة B تتضمن المنطقتين II وIII.

الخطوة 3 $A \cup B = \{I, II, III\}$. لذا $(A \cup B)' = \{IV\}$.

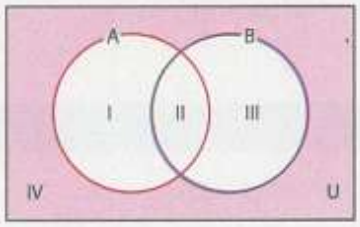
الخطوة 4 ظلل المنطقة IV لتوضيح $(A \cup B)'$.



ثم ارسم مخطط فن Venn لـ $A' \cap B'$. الخطوتان 1 و2 مثل الخطوتين أعلاه.

الخطوة 3 $A' = \{III, IV\}$ و$B' = \{I, IV\}$. لذا $A' \cap B' = \{IV\}$.

الخطوة 4 ظلل المنطقة IV لتوضيح $A' \cap B'$.



حيث إن مخططات كل طرف من المعادلة متطابقة، فإننا نستخدم التبرير الاستنتاجي لتبرير أن $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

جرّب هذا 7

استخدم مخططات فن Venn لتوضيح أن $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

فيما يلي ثمة مثال لاستخدام ثلاث مجموعات.

مثال 8 استخدام مخططات فن Venn لتحديد مساواة مجموعتين

حدد ما إذا كانت هاتان المجموعتان متساويتين باستخدام مخططات فن Venn، $(A \cup B) \cap C$ و$(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

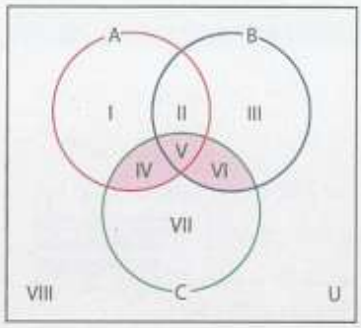
الحل

المجموعة $A \cup B$ تتكون من المناطق I إلى VI. ومن بين هذه المناطق، توجد المناطق IV وV وVI في المجموعة C كذلك. لذا $(A \cup B) \cap C$ تتكون من المناطق IV وV وVI.

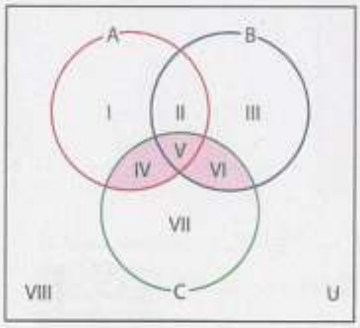
ملاحظة رياضية

كلما شعرت بالراحة في العمل باستخدام مخططات فن Venn، ستتمكن على الأرجح من تظليل المناطق الموضحة من خلال مجموعة دون المرور بشكل رسمي عبر عملية من أربع خطوات، كما نفعل في المثال 8.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education



تتكون المجموعة $A \cap C$ من المنطقتين IV و V وتتكون المجموعة $B \cap C$ من المنطقتين V و VI. وينتج عن اتحادها المناطق IV و V و VI.



وحيث إن المناطق المظللة هي نفسها، فإن المجموعتين متساويتان.

جرّب هذا 8

حدد ما إذا كانت المجموعتان متساويتين باستخدام مخططات فن *Venn*. $B \cup (A \cap C)$ و $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

4. استخدام مخططات فن *Venn* لتحديد ما إذا كانت المجموعتان متساويتين أم لا.

عدد العناصر الرئيسة للاتحاد

إذا كان 10 من أصدقائك ينتمون إلى مجموعة الطلاب الذين يخوضون الدورة التدريبية في الرياضيات، و14 ينتمون إلى مجموعة الطلاب الذين يخوضون دورة تدريبية في اللغة الإنجليزية، فما عدد الأصدقاء الذين في اتحاد هاتين المجموعتين؟ إذا كان انطباعك الأول 24، فلست وحدك – فهذا نوع من التخمين القياسي. وقد يكون صائبًا بالفعل، ولكن فقط إذا لم يكن أحد من أصدقائك يخوض كلتا دورتي الرياضيات واللغة الإنجليزية. فإذا كان أي منهم في كلتا الدورتين، فستكون قد حسبته مرتين عن طريق جمع عدد الأصدقاء في كل مجموعة. يمكن استخدام مخطط فن *Venn* لتحليل هذه الحالة.

مثال 9 إيجاد عدد العناصر الرئيسة للاتحاد

ارسم مخطط فن *Venn* يوضح المجموعات التالية، ثم استخدم المخطط لإيجاد عدد العناصر الرئيسة لـ A، B، $A \cap B$، $A \cup B$.

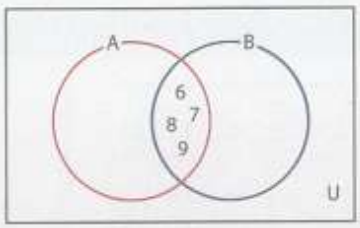
$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \quad B = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

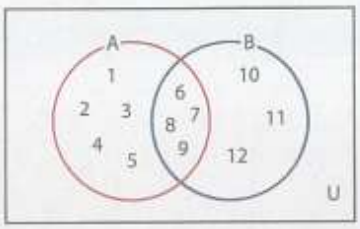
استخدم النتيجة لتكوين صيغة لعدد العناصر الرئيسة للاتحاد.

الحل

أولًا، لاحظ وجود 6 و7 و8 و9 في كلتا المجموعتين، لذا سنبدأ مخطط فن *Venn* بوضع تلك العناصر في جزء التقاطع من المخطط. ثم نضع العناصر المتبقية في A داخل الدائرة المخصصة للمجموعة A لكن خارج التقاطع، ونفعل الشيء نفسه مع العناصر المتبقية في B.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education





والآن يمكننا فقط العدّ لإيجاد عدد العناصر الرئيسة المشار إليها.

$$n(A) = 9 \quad n(B) = 7 \quad n(A \cap B) = 4 \quad n(A \cup B) = 12$$

من المخطط، يمكننا رؤية أنه إذا قمت بجمع عدد العناصر في المجموعتين A وB، فستقوم بجمع العناصر الموجودة في التقاطع مرتين. لذا لتقديم تفسير لذلك يمكننا طرح عدد العناصر الموجودة في التقاطع، الأمر الذي يمنحنا الصيغة

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

جرّب هذا 9

ارسم مخطط فن *Venn* الذي يوضح الصيغة الخاصة بنا لإيجاد عدد العناصر الرئيسة لاتحاد باستخدام المجموعات التالية.

$A = \{a, c, f, g, l, k, m, n, p\}$ $B = \{g, l, m, o, q, r, t, z\}$

ملاحظة رياضية

تنص الصيغة الواردة على اليسار أنه لإيجاد عدد العناصر في اتحاد المجموعتين A وB، نقوم بجمع عدد العناصر في A وB ثم نطرح عدد العناصر الموجودة في تقاطع A وB.

عدد العناصر الرئيسة للاتحاد

إذا كان $n(A)$ يمثل العدد الرئيس للمجموعة A، فإنه بالنسبة إلى أي مجموعتين منتهيتين A وB،
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

ثم سنرى كيف يمكن استخدام هذه الصيغة في حالة منطبقة.

مثال 10 استخدام صيغة لعدد العناصر الرئيسة للاتحاد

في مسح شمل 100 طالب من الفرق الأولى تم اختيارهم عشوائيًا أثناء سيرهم في الحرم الجامعي، تبين أن 42 منهم يدرسون الرياضيات بينما يدرس 51 منهم اللغة الإنجليزية ويدرس 12 منهم كلتا المادتين. كم عدد الطلاب الذين يدرسون الرياضيات أو اللغة الإنجليزية؟

الحل

إذا أطلقنا على مجموعة الطلاب الذين يدرسون الرياضيات A ومجموعة الطلاب الذين يدرسون اللغة الإنجليزية B. فالمطلوب منا إيجاد $n(A \cup B)$. قيل لنا إن $n(A) = 42$, $n(B) = 51$ و$n(A \cap B) = 12$. لذا،

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 42 + 51 - 12 = 81$$

جرّب هذا 10

أظهر مسحٌ شمل 200 طبيب عبر إحدى البلدان أن 112 منهم كانت تتم مساعدتهم في مكاتبهم بواسطة ممرضات مسجلات. بينما 83 منهم كانت تتم مساعدتهم بواسطة ممرضات ممارسات حاصلات على رخصة و21 منهم كانت تتم مساعدتهم بواسطة كلتيهما. كم عدد الذين كانت تتم مساعدتهم بواسطة نوع واحد على الأقل من الممرضات؟

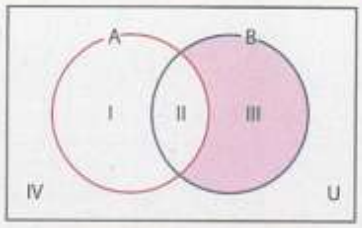
5. استخدام الصيغة لإيجاد عدد العناصر الرئيسة لاتحاد المجموعتين.

في هذا الدرس، رأينا كيف يمكن استخدام مخططات فن *Venn* لعرض المجموعات وإثبات تساوي مجموعتين وحل المسائل. سنستكشف الجانب الخاص بحل المسائل لمخططات فن *Venn* لاحقًا في الدرس 4 ونعرف كيفية حل المسائل التي تشبه الموجودة في مقدمة الوحدة.

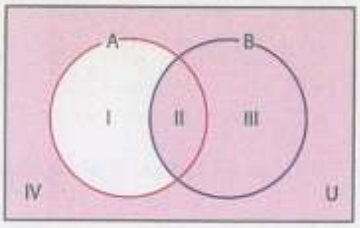
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إجابات جرّب هذا

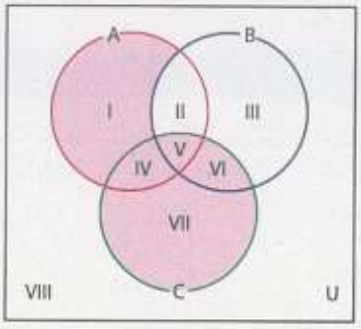
1



2



3

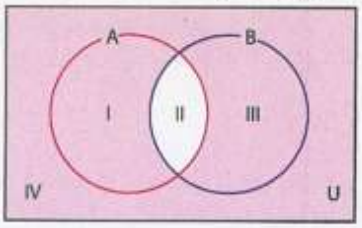


4 $(A \cap C) - B$ أو $(A \cap C) \cap B'$

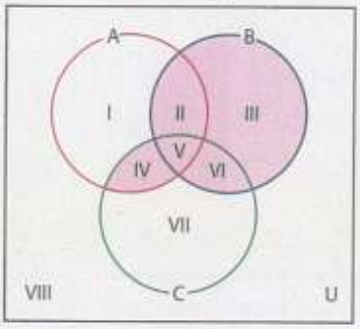
5 كلاهما {الذهب، الزئبق}.

6 كلاهما {الحديد، الكروم، الألومونيوم، الماغنسيوم، الذهب، الزئبق}.

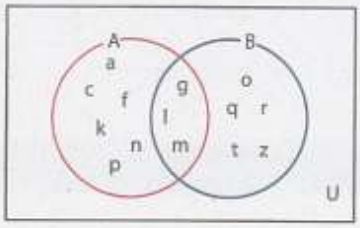
7 كلا المخططين



8 كلا المخططين



9



10 174

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

9-3 مجموعة التمارين

تمارين كتابية

1. يتصفح أحد رفاقك كتابك المدرسي ويرى بعض مخططات فن *Venn*. فتساءل، "ما فائدة هذه الصور؟" كيف ستجيب عن ذلك؟
2. اشرح بكلمات من عندك كيف ترسم مخطط فن *Venn* يمثل المجموعة $A \cup B$.
3. اشرح بكلمات من عندك كيف ترسم مخطط فن *Venn* يمثل المجموعة $A \cap B$.
4. كيف يمكننا استخدام مخططات فن *Venn* لتحديد ما إذا كانت مجموعتان تبدوان مختلفتين متساويتين بالفعل؟
5. صف بكلمات من عندك نص قوانين دي مورجان.
6. صف بكلمات من عندك كيف تجد العدد الرئيس لاتحاد مجموعتين.

تمارين حسابية

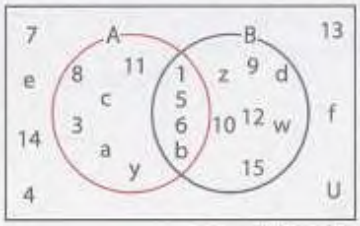
بالنسبة إلى التمارين 30–7. ارسم مخطط فن Venn وظلل الأقسام التي تمثل كل مجموعة.

7. $A \cup B'$
8. $(A \cup B)'$
9. $A' \cup B'$
10. $A' \cup B$
11. $A' \cap B'$
12. $A \cap B'$
13. $A \cup (B \cap C)$
14. $A \cap (B \cup C)$
15. $(A \cup B) \cup (A \cap C)$
16. $(A \cup B) \cap C$
17. $(A \cup B) \cap (A \cup C)$
18. $(A \cap B) \cup C$
19. $(A \cap B)' \cup C$
20. $(A \cup B) \cup C'$
21. $A \cap (B \cup C)'$
22. $A' \cap (B' \cup C')$
23. $(A' \cup B') \cap C$
24. $A \cap (B \cap C)'$
25. $(A \cup B)' \cap (A \cup C)$
26. $(B \cup C) \cup C'$
27. $A' \cap (B' \cap C')$
28. $(A \cup B)' \cap C'$
29. $A' \cap (B \cup C)'$
30. $(A \cup B) \cap (A \cap C)$

بالنسبة إلى التمارين 38–31. استخدم مخططات فن Venn لتحديد ما إذا كانت المجموعتان متساويتين أم لا.

31. $(A \cap B)'$ و $A' \cup B'$
32. $(A \cup B)'$ و $A' \cup B'$
33. $(A \cup B) \cup C$ و $A \cup (B \cup C)$
34. $A \cap (B \cup C)$ و $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
35. $A' \cup (B \cap C')$ و $(A' \cup B) \cap C'$
36. $(A \cap B) \cup C'$ و $(A \cap B) \cup (B \cap C')$
37. $(A \cap B)' \cup C$ و $(A' \cup B') \cap C$
38. $(A' \cup B') \cup C$ و $(A \cap B)' \cap C'$

بالنسبة إلى التمارين 50–39. استخدم مخطط فن Venn التالي لإيجاد عدد العناصر الرئيسة لكل مجموعة.



39. $n(A)$
40. $n(B)$
41. $n(A \cap B)$
42. $n(A \cup B)$
43. $n(A')$
44. $n(B')$
45. $n(A' \cap B')$
46. $n(A' \cup B')$
47. $n(A - B)$
48. $n(B - A)$
49. $n(A \cap (B - A))$
50. $n(B' \cup (B - A))$

بالنسبة إلى التمارين 60–51. استخدم المعلومات التالية:

$U = \{x \mid x$ عدد طبيعي أقل من 20$\}$
$A = \{x \mid x$ عدد طبيعي فردي أقل من 16$\}$
$B = \{x \mid x$ عدد أولي أكبر من 5$\}$

(ملاحظة: الأعداد الأولية الأقل من 20 هي 2 و3 و5 و7 و11 و13 و17 و19.) جد عدد العناصر الرئيسة لكل مجموعة.

51. $n(A)$
52. $n(B)$
53. $n(A \cap B)$
54. $n(A \cup B)$
55. $n(A \cap B')$
56. $n(A' \cup B)$
57. $n(A')$
58. $n(B')$
59. $n(A - B)$
60. $n(B' - A)$

التطبيقات في عالمنا

في التمارين 61–64. $A = \{$الأشخاص الذين يقودون سيارة رياضية متعددة الأغراض$\}$ و $B = \{$الأشخاص الذين يقودون سيارة هجين$\}$. ارسم مخطط فن Venn لما يلي، واكتب جملة تصف ما تمثله المجموعة.

61. $A \cup B$
62. $A \cap B$
63. A'
64. $(A \cap B)'$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9-3 مجموعة التمارين يتبع

في التمارين 65–68، O = {الطلاب في دورات تدريبية عبر الإنترنت} وB = {الطلاب في دورات تدريبية متنوعة} وT = {الطلاب في دورات تدريبية تقليدية}. ارسم مخطط فن Venn لما يلي، واكتب جملة تصف ما تمثله المجموعة.

65. $O \cap (T \cup B)$
66. $B \cup (O \cap T)$
67. $B \cap O \cap T$
68. $(B \cup O) \cap (T \cup O)$

في التمارين 69–72، D = {الطلاب من جدة} وR = {الطلاب من الرياض} وI = {الطلاب لا من هذه ولا تلك}. ارسم مخطط فن Venn لما يلي، واكتب جملة تصف ما تمثله المجموعة.

69. $D' \cup R$
70. $D' \cap I'$
71. $(D \cup R) \cap I$
72. $I - (D \cup R)$

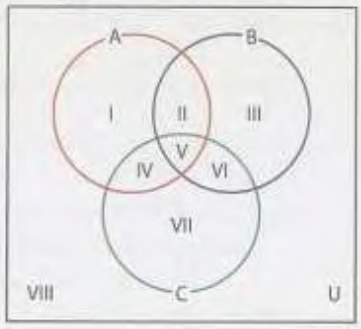
في التمارين 73–76، G = {الأشخاص الذين يستخدمون Google بانتظام} وY = {الأشخاص الذين يستخدمون Yahoo! بانتظام} وB = {الأشخاص الذين يستخدمون Bing بانتظام}. ارسم مخطط فن Venn لما يلي، واكتب جملة تصف ما تمثله المجموعة.

73. $G - Y$
74. $G - (Y \cap B)$
75. $G' \cap Y' \cap B'$
76. $(Y \cap B) \cup (Y \cap G)$

يستخدم الجدول ومخطط فن Venn التالي في التمرينات 77–82. يعرض الجدول الفرق الست المشاركة في دورة الترقي بدوري الدرجة الثانية لكرة القدم من عام 2013 إلى 2015. بالنسبة إلى كل تمرين، اكتب المنطقة (المناطق) ضمن مخطط فن Venn التي ستتضمن الفريق المدرج.

2013		2014		2015
النصر		الرائد		النصر
الرائد		النصر		الرائد
الهلال		الأبطال		الهلال
التضامن		الاتحاد		الاتحاد
الأصدقاء		الهلال		الأصدقاء
الأبطال		النسور		الفرسان

ملاحظة: تمثل المجموعة A الفرق المشاركة في دورة الترقي عام 2013 بينما تمثل المجموعة B الفرق المشاركة في دورة الترقي عام 2014 وتمثل المجموعة C الفرق المشاركة في دورة الترقي عام 2015.



77. الاتحاد
78. الأصدقاء
79. الفرسان
80. النسور
81. الأبطال
82. الشباب

التفكير الناقد

83. بالنسبة إلى المجموعتين المنتهيتين A وB، هل $n(A - B)$ تساوي $n(A) - n(B)$؟ وإذا كانت الإجابة لا، فهل يمكنك إيجاد صيغة لـ $n(A - B)$؟
84. هل يمكنك إيجاد صيغة لـ $n(A \cap B)$ بدلالة $n(A)$ و$n(B)$ فقط؟ لم أو لم لا؟ اكتشف ما إذا كان يمكنك إيجاد صيغة لـ $n(A \cap B)$ باستخدام أي المجموعات التي تفضلها.
85. خمن شكلًا آخر للمجموعة $(A \cup B \cup C)'$ استنادًا إلى أول قوانين دي مورجان. تحقق من تخمينك باستخدام مخطط فن Venn.
86. خمن شكلًا آخر للمجموعة $(A \cap B \cap C)'$ استنادًا إلى ثاني قوانين دي مورجان. تحقق من تخمينك باستخدام مخطط فن Venn.

في التمارين 87–92، (a) استخدم مخطط فن Venn لتوضيح أن المجموعتين غير متساويتين بشكل عام؛ (b) حاول إيجاد مجموعتين محددتين A وB (C إذا لزم الأمر) تكون المجموعتان متساويتين فيهما، و(c) حاول إيجاد شرط عام تكون بموجبه المجموعتان متساويتين دومًا. تذكر أن U تمثل المجموعة الشاملة.

87. $A \cap B$ وB
88. $A - B$ وA
89. $(A \cap B)'$ وU
90. $(A \cap B)'$ وA'
91. $(A - C) \cap B$ و$B \cap A$
92. $(A - C) \cup (B - A)$ و$B - C$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

9-4 استخدام المجموعات لحل المسائل

أهداف التعلم

1 حل المسائل باستخدام مخططات فن *Venn*.

لقد أصبح التواصل في عالمنا أقل تكلفة وأيسر وأكثر فاعلية طوال الوقت. ففي عصر الهواتف الذكية وفاعلية الإنترنت على مدار الساعة، وجدت الشركات أن التواصل مع الأشخاص لاستطلاع آرائهم أصبح أسهل من ذي قبل. وبات الأشخاص يكتشفون أن الشركات ترغب في الدفع مقابل سماع ما يريدون الإفصاح عنه. كما أصبح العالم اليوم يضم مئات الشركات حرفيًا تتمثل وظيفتها الرئيسة في جمع الآراء حول أي شيء، بداية من المرشحين السياسيين وحتى شرائح البطاطس. وبالفعل، يتم إنفاق المليارات على أبحاث السوق كل عام. ربما ستفكر مرتين في المرة التالية التي سيسألك فيها شخص ما عن رأيك مجانًا.

مع وضع الأموال على المحك، ليس من المستغرب أن يكون تنظيم كافة البيانات التي يتم جمعها ذا أهمية. ومن المؤكد أن هذا يشبه إلى حد كبير ما نستخدم نظرية المجموعات لأجله! لقد عرفنا الكثير عن العمل باستخدام مخططات فن *Venn* حتى الآن. وأرى أن هذه المعرفة تُعد طريقة رائعة لتنظيم البيانات التي يتم جمعها من عمليات المسح وغيرها من المصادر. (حقًا، ودون أي رسوم– يمكنك معرفة هذا الرأي دون مقابل).

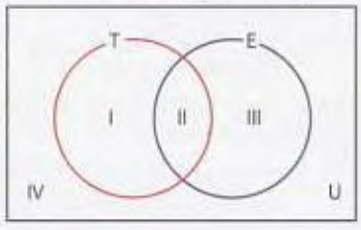
عند تصنيف الأشياء إلى مجموعتين منفصلتين، يمكننا استخدام مخطط فن *Venn* مجموعتين لتفسير المعلومات. ويتضح ذلك في المثال 1.

مثال 1 حل مسألة باستخدام مخططات فن *Venn*

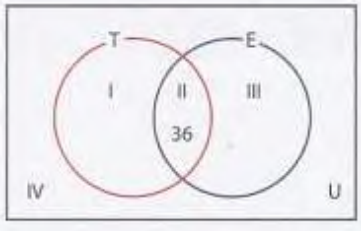
تتبع دولة تضم 50 مدينة أحد أساليب تحصيل رسوم الطريق. 44 مدينة ممن شملها المسح استخدمت المواقف التقليدية لتحصيل رسوم الطرق بينما استخدمت 36 مدينة مواقف تحصيل رسوم الطرق وتحصيل الرسوم الإلكتروني (ETC). ارسم مخطط فن *Venn* لتمثيل نتائج المسح وجد عدد المدن التي تتبع نظام تحصيل الرسوم التقليدي فقط وعدد المدن التي تتبع نظام تحصيل الرسوم الإلكتروني فقط وعدد المدن التي لا تتبع أيًا منهما.

الحل

الخطوة 1 ارسم مخطط فن *Venn* بدوائر تمثل المواقف التقليدية لتحصيل رسوم الطرق (T) ونظام تحصيل الرسوم الإلكتروني (E)، مع تسمية المناطق بأرقام رومانية كالمعتاد.



الخطوة 2 نستخدم ست وثلاثون مدينة كلا النظامين، لذلك ضع 36 في تقاطع T وE، وهو ما تمثله المنطقة II.



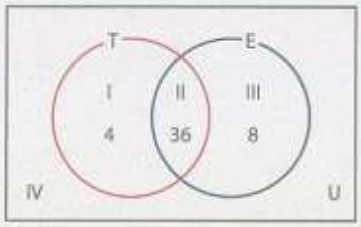
ملاحظة رياضية

أول معلومة حصلنا عليها هي أن هناك 36 مدينة تتبع المواقف التقليدية لتحصيل رسوم الطرق. لذا فمن المحفز البدء بوضع 36 في المنطقة I.

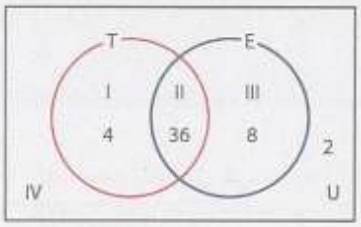
لكن هذا ليس صحيحًا– فالمنطقة I تمثل المدن التي تستخدم نظام المواقف التقليدية لتحصيل الرسوم وليس نظام تحصيل الرسوم الإلكتروني ولا نعرف ذلك الرقم بعد. وإذا كنا نعلم العدد الموجود في التقاطع، فهذا هو الموضع الذي سنبدأ منه دومًا.

حقوق الطبع والنشر © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الخطوة 3 وحيث إن 40 مدينة تستخدم المواقف التقليدية لتحصيل رسوم الطرق وتتبع 36 مدينة كلا النظامين، فيجب وجود 4 مدن تستخدم المواقف التقليدية لتحصيل رسوم الطرق فقط. ضع 4 في المنطقة I. حيث إن 44 مدينة تستخدم نظام التحصيل الإلكتروني وتتبع 36 مدينة كلا النظامين، فيجب وجود 8 مدن تتبع نظام التحصيل الإلكتروني فقط. ضع 8 في المنطقة III.



الخطوة 4 الآن تم تمثيل 48 مدينة. لذلك يجب أن تتبقى مدينتان لوضعهما في المنطقة IV.



الآن يمكننا الإجابة عن الأسئلة بسهولة. توجد 4 مدن تستخدم المواقف التقليدية لتحصيل رسوم الطرق وليس نظام تحصيل الرسوم الإلكتروني (المنطقة I) وتتبع 8 مدن نظام تحصيل الرسوم الإلكتروني وليس المواقف التقليدية لتحصيل رسوم الطرق (المنطقة III) ولا تتبع مدينتان فقط أيًا من النظامين (المنطقة IV).

جرّب هذا 1

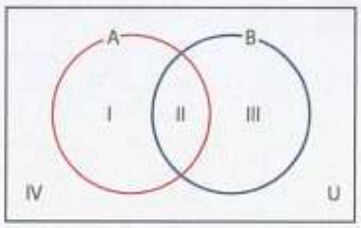
في سنة عادية، تشهد المدينة A هطول بعض الأمطار خلال 163 يومًا وبعض الثلوج خلال 63 يومًا وكلاهما خلال 24 يومًا. ارسم مخطط فن *Venn* لتمثيل هذه القيم المتوسطة. وجد عدد الأيام التي تشهد هطول أمطار فقط وثلوجًا فقط والتي لا تشهد أيًا منهما.

يمكننا استخدام نتائج المثال 1 لكتابة إجراء عام لاستخدام مخطط فن *Venn* لتفسير المعلومات التي يمكن تقسيمها إلى مجموعتين.

استخدام مخططات فن *Venn* بمجموعتين

الخطوة 1 جد عدد العناصر المشتركة بين كلتا المجموعتين واكتب ذلك العدد في المنطقة II.

الخطوة 2 جد عدد العناصر الموجودة في المجموعة *A* وغير موجودة في المجموعة *B* بطرح العدد الموجود في المنطقة II من إجمالي عدد العناصر في *A*. ثم اكتب ذلك العدد في المنطقة I. كرر ذلك مع العناصر الموجودة في *B* لكن غير موجودة في المنطقة II. واكتبه في المنطقة III.



الخطوة 3 جد عدد العناصر الموجودة في *U* وغير الموجودة في *A* أو *B*. واكتبه في المنطقة IV.

الخطوة 4 استخدم الرسم التخطيطي للإجابة عن أسئلة محددة متعلقة بهذه الحالة.

تصويت سريع

هل وضعك المالي حاليًا أسوأ مما كان في السنوات الأخيرة؟

- نعم
- لا
- الوضع نفسه تقريبًا

أي رأي التالي

تتضمن العديد من المواقع الإخبارية الإلكترونية عمليات مسح يومية، مثل هذا المسح من موقع cnn.com

من بين التطبيقات الأكثر إفادة لمخططات فن *Venn* هو استخدامها لدراسة نتائج عمليات المسح. فسواء أكانت الأبحاث متعلقة بالأعمال أم لمجرد إرضاء الفضول، فإن عمليات المسح تبدو منتشرة في كل مكان هذه الأيام، لاسيما عبر الإنترنت. يحلل المثال 2 نتائج مسح حول اقتناء نوع السيارة.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مثال 2 حل مسألة مسح باستخدام مخطط فن *Venn*

في مسح ما، سُئل 500 شخص عبر الاتصال الهاتفي العشوائي ما إذا كان لديهم سيارة صالون أو سيارة رياضية متعددة الأغراض (SUV). أفاد 79 من بين هؤلاء بامتلاك سيارة صالون فقط وأفاد 31 منهم بامتلاك سيارة رياضية متعددة الأغراض فقط وأفاد 151 منهم بامتلاك واحدة على الأقل من الاثنين. ارسم مخطط فن *Venn* لتمثيل هذه النتائج واستخدم رسمك التخطيطي لإيجاد النسبة المئوية من المستجيبين الذين يمتلكون سيارة صالون والذين يمتلكون سيارة رياضية متعددة الأغراض والذين يمتلكون كلتيهما والذين لا يمتلكون أيًا منهما.

الحل

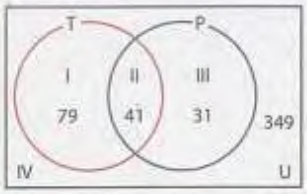
في هذا المثال، سيتعين علينا تعديل الإجراء من المثال 1 لأننا لا نعرف عدد من يمتلك كلتا السيارتين. ويتمثل مفتاح الحل في البدء بتعبئة المعلومات المعطاة التي تتوافق تمامًا مع إحدى المناطق في مخطط فن *Venn*.

الخطوة 1 أخبرنا بأن 79 شخصًا يمتلكون سيارة صالون فقط. ما يعني أنه يمكننا وضع 79 في المنطقة I. وأخبرنا كذلك بأن 31 شخصًا يمتلكون سيارة رياضية متعددة الأغراض فقط، لذلك يتم وضع ذلك في المنطقة III.

الخطوة 2 يملك 151 سيارة صالون أو سيارة رياضية متعددة الأغراض أو كلتيهما. وهذا يمثل اتحاد المجموعتين T وP، والذي يشكل المناطق I وII وIII. ونعلم بالفعل أن هناك 110 أشخاص في المنطقتين I وIII مجتمعين (31 + 79). لذا يجب أن يوجد 41 = 110 − 151 شخصًا في المنطقة II.

الخطوة 3 تم تمثيل 151 من أصل 500 حتى الآن. لذلك يجب أن تحتوي المنطقة IV على 500 − 151 = 349 شخصًا.

الخطوة 4 ثمة إجمالي 120 شخصًا في المناطق التي تكون المجموعة T. لذلك يملك 120 شخصًا سيارة صالون: 120/500 = 0.24. إذًا يمتلك 24% سيارة صالون. ويملك اثنان وسبعون سيارة رياضية متعدد الأغراض (14.4%)، بينما يملك 41 كلتا السيارتين (8.2%)، ولا يملك 349 أيًا منهما (69.8%).



جرّب هذا 2

وفق مسح عبر الإنترنت على أحد المواقع، أبدى 12,595 شخصًا آراءهم بشأن مشروب الكوكا مقابل البيبسي. من بين هؤلاء، يتناول 5,786 شخصًا الكوكا فقط بينما يتناول 3,763 البيبسي فقط ويتناول 11,405 أشخاص أحدهما على الأقل. ارسم مخطط فن *Venn* لتمثيل هذه النتائج واستخدم رسمك التخطيطي لإيجاد النسبة المئوية من المشاركين الذين يتناولون الكوكا والذين يتناولون البيبسي والذين يتناولون كلا المشروبين والذين لا يتناولون أيًا منهما.

معلومات إضافية الجانب المضيء من استطلاعات الرأي

لقد أصبح معظمنا معتادًا إلى حد ما على عمليات مسح الرأي العام التي تتناول قضايا مهمة—السياسة وتغير المناخ والاقتصاد— لكن ليس كل مسح بذلك المستوى من الجدية تمامًا. لنلق نظرة على بعض الحقائق الغريبة التي نتجت من عمليات المسح الأخيرة.

- تم العثور على حوالي 50% من أجهزة التحكم عن بعد المفقودة داخل وسائد الأثاث. وانتهى المطاف بحوالي 4% منها في الثلاجة أو المجمد وحوالي 2% وجد خارج المنزل أو في السيارة.
- يعتقد 29% من الأشخاص أن "الحوسبة السحابية" تنطوي على سحب فعلية في السماء.
- اعترف أكثر من 60% ممن أعلنوا أنهم نباتيون بتناول اللحوم في الـ 24 ساعة الماضية.
- لا يضع 47% من الأشخاص فلسًا واحدًا من راتبهم في مدخرات طويلة الأجل.
- 52% من الأشخاص يفتون أثناء الاستحمام. تُنسب مخططات فن *Venn* بوجه عام إلى عالم الرياضيات البريطاني جون فن، الذي قدمها عام 1880 على النحو الذي تستخدم عليه اليوم. هذا يجعل الأمر يبدو مفهومًا قديمًا إلى حدٍ ما، لكن يمكن أن ترجع جذور الفكرة العامة إلى أبعد من ذلك بكثير. فقد استخدم عالم الرياضيات الكبير ليونهارد أويلر مخططات مشابهة في القرن الثامن عشر ويمكن أن ترجع جذور أشكال أخرى مماثلة إلى القرن الثالث عشر!

بينما كان من الحقيقي بلا ريب أن جون فن كان أكاديميًا كلاسيكيًا—فقد كان يكتب أو يحاضر في كل من الأخلاق والرياضيات والمنطق ونظرية الاحتمالية والفلسفة والميتافيزيقيا والتاريخ في الوقت نفسه—إلا أنه كان يمارس هواية مدهشة إلى حد ما: إنشاء الآلات. وعلى وجه الخصوص، كان مغرمًا أكثر ببناء آلة لقذف كرات الكريكيت (وهو ما يشبه القذف في لعبة البيسبول تقريبًا). كانت آلته جيدة جدًا لدرجة أنها حققت في عام 1909 "رمية نظيفة" أمام أحد أفضل لاعبي الكريكيت في ذلك الوقت في أربع مناسبات.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

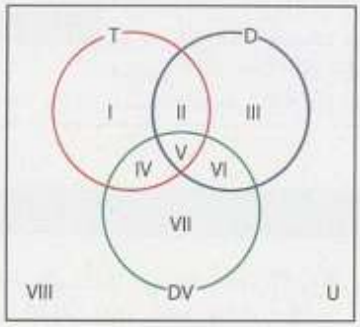
عندما تتكون مسألة التصنيف أو المسح من ثلاث مجموعات، يُتبع إجراء مشابه، مع استخدام مخطط فن *Venn* لثلاث مجموعات. فلدينا فقط المزيد من العمل للقيام به حيث يوجد الآن ثماني مناطق بدلًا من أربع.

مثال 3 حل مسألة باستخدام مخطط فن *Venn* من ثلاث مجموعات

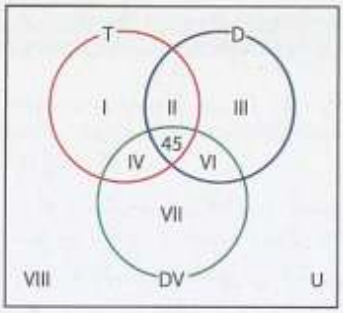
يدرس طالب معدل تكرار أنواع محددة من البريد المستلم في مدينة مجاورة. يدرس البريد المستلم لعدد 300 مقيم في المدينة. ويسأل تحديدًا عن طلبات التبرع لجمعيات خيرية محلية والإعلانات وفواتير المرافق. ووجد أن 194 قد تلقوا فواتير بينما تلقى 210 طلبات تبرع و170 إعلانات. بالإضافة إلى ذلك، تلقى 142 بريدًا بشأن فواتير المرافق وطلبات التبرع و111 بشأن طلبات التبرع والإعلانات و91 بشأن الإعلانات وفواتير المرافق وتلقى 45 الأنواع الثلاثة. ارسم مخطط فن *Venn* لتمثيل هذه النتائج. وجد عدد المقيمين الذين تلقوا بريدًا بشأن

(a) طلبات التبرع فقط.
(b) الإعلانات وفواتير المرافق وليس طلبات التبرع.
(c) فواتير المرافق وطلبات الجمعيات الخيرية.
(d) لا شيء من ذلك.

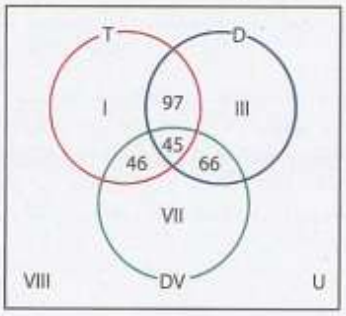
الحل



الخطوة 1 المنطقة الوحيدة التي نعرفها على وجه اليقين من المعلومات المعطاة هي المنطقة V—عدد المقيمين الذين تلقوا أنواع البريد الثلاثة هذه. لذلك نبدأ بوضع 45 في المنطقة V.

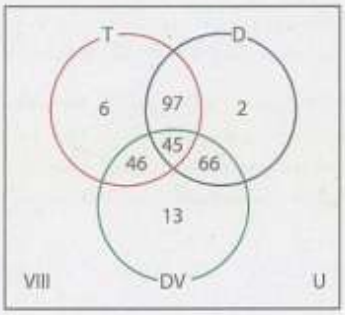


الخطوة 2 ثمة 142 مقيمًا تلقوا بريدًا بشأن فواتير المرافق وطلبات التبرع الخيرية معًا، لكن يتعين علينا طرح عدد المقيمين الذين تلقوا أنواع البريد الثلاثة لإيجاد العدد في المنطقة II، 97 = 45 − 142. وبالطريقة نفسها، نحصل على 46 = 45 − 91 في المنطقة IV (فواتير المرافق والإعلانات معًا) و66 = 45 − 111 في المنطقة VI (طلبات التبرع والإعلانات معًا).

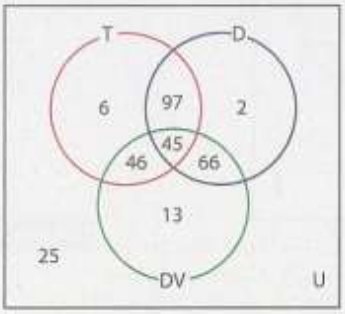


McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الخطوة 3 الآن يمكننا إيجاد عدد العناصر في المناطق I وIII وVII. كان هناك 194قد تلقوا بريدًا بشأن فواتير المرافق. لكن 97 + 45 + 46 = 188 تم تمثيلهم بالفعل في الرسم التخطيطي. لذا يتبقى 6 في المنطقة I. من بين 210 مقيمًا ممن تلقوا بريدًا بشأن طلبات التبرع، 97 + 45 + 66 = 208 تم تمثيلهم بالفعل، مع ترك 2 فقط في المنطقة III. كان هناك 170 مقيمًا تلقوا بريدًا بشأن الإعلانات. مع 46 + 45 + 66 = 157 تم تمثيلهم بالفعل. يتبقى 13 فقط في المنطقة VII.



الخطوة 4 بجمع جميع الأعداد في المخطط حتى الآن، نحصل على 275. ويتبقى 25 فقط في المنطقة VIII.



الخطوة 5 والآن بعد اكتمال المخطط، نوجه اهتمامنا نحو الأسئلة.

(a) يوجد المقيمون الذين تلقوا بريدًا بشأن طلبات التبرع فقط في المنطقة III، يوجد 2 فقط.
(b) توجد فواتير المرافق والإعلانات دون طلبات التبرع في المنطقة IV. لذلك يوجد 46 مقيمًا.
(c) يوجد المقيمون الذين تلقوا طلبات التبرع أو فواتير المرافق في جميع المناطق باستثناء VII وVIII. لذلك لا يوجد إلا 38 = 25 + 13 لم يتلقوا نوعًا واحدًا على الأقل من تلك الأنواع. و262 = 38 − 300 تلقوا نوعًا واحدًا على الأقل منها.
(d) 25 مقيمًا فقط (خارج جميع الدوائر) لم يتلقوا أيًا من رسائل البريد تلك.

ملاحظة رياضية

لاحظ أنه عند ملء مخطط فن *Venn* في المثال 3، بدأنا بعدد العناصر في المنطقة الداخلية وتدرجنا إلى الخارج.

جرّب هذا 3

أجرت مكتبة إلكترونية عبر الإنترنت مسحًا شمل 500 قارئ ووجدت أن 270 شخصًا يقرؤون قصص المغامرات و320 شخصًا يقرؤون القصص البوليسية و160 شخصًا يقرؤون قصص الفكاهة. بالإضافة إلى ذلك، هناك 140 شخصًا يقرؤون القصص البوليسية وقصص المغامرات معًا و120 شخصًا يقرؤون القصص البوليسية وقصص الفكاهة و80 شخصًا يقرؤون قصص المغامرات وقصص الفكاهة. وأخيرًا، 50 شخصًا يقرؤون الأنواع الثلاثة. ارسم مخطط فن *Venn* يمثل نتائج المسح ثم جد عدد القراء الذين

(a) يقرؤون قصص المغامرات فقط.
(b) يقرؤون القصص البوليسية وقصص الفكاهة ولكن لا يقرؤون قصص المغامرات.
(c) لا يقرؤون أيًا من أنواع القصص الثلاثة.
(d) لا يقرؤون قصص الفكاهة.

1. حل المسائل باستخدام مخططات فن *Venn*.

بدلًا من كتابة إجراء عام لحل المسائل باستخدام مخطط فن *Venn* لثلاث دوائر، سنحل مثالًا إضافيًا. وتُعد المعلومات المقدَّمة في هذه المرة مختلفة نوعًا ما. ويتمثل المفتاح، وهو بالفعل مفتاح لحل كل هذه المسائل، في إيجاد المعلومات التي تنطبق تحديدًا على بعض المناطق في المخطط. ومن ثم استخدام الطرح لإيجاد المناطق الأخرى واحدة تلو الأخرى.

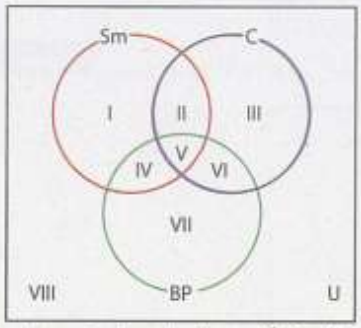
حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 4 حل مسألة باستخدام مخطط فن *Venn* من ثلاث مجموعات

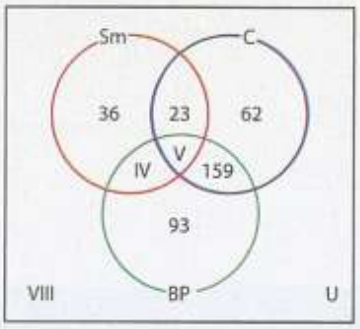
يمثل ارتفاع ضغط الدم وارتفاع الكوليسترول والتدخين ثلاثة من أخطر عوامل الخطر للإصابة بالأزمة القلبية. في مسح أجري على 690 شخصًا من الناجين من الأزمة القلبية، كان يعاني 62 شخصًا فقط من ارتفاع الكوليسترول من بين عوامل الخطر الثلاثة تلك؛ ويعاني 36 شخصًا فقط من التدخين؛ ويعاني 93 شخصًا فقط من ارتفاع ضغط الدم. وثمة إجمالي 370 شخصًا يعانون من ارتفاع الكوليسترول و159 شخصًا يعانون من ارتفاع ضغط الدم والكوليسترول وغير مدخنين و23 مدخنون ويعانون من ارتفاع الكوليسترول ولا يعانون من ارتفاع ضغط الدم. أخيرًا، يعاني 585 شخصًا من عمل خطر واحد على الأقل. ارسم مخطط فن *Venn* يمثل هذه المعلومات واستخدمه للإجابة عن الأسئلة التالية.

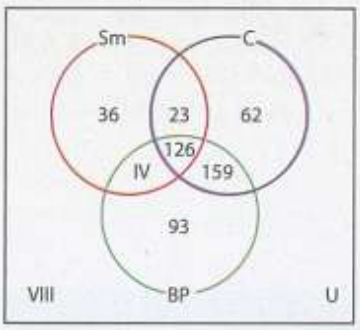
(a) كم عدد الناجين الذين يعانون من عوامل الخطر الثلاثة؟
(b) كم عدد الذين يعانون من عاملين تحديدًا من عوامل الخطر الثلاثة؟
(c) كم عدد الذين لا يعانون من أي من هذه العوامل؟
(d) كم بلغت النسبة المئوية للمدخنين؟

الحل



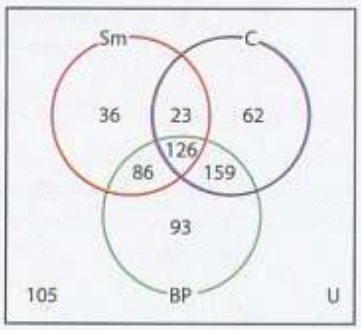
الخطوة 1 تختلف هذه المسألة قليلًا عن السابقة لأنه ليس لدينا عدد الأشخاص الموجودين في منطقة تقاطع المجموعات الثلاث. إلا أنه توجد أخبار جيدة تتمثل في أننا حصلنا بالفعل على العدد الدقيق في خمس مناطق مختلفة: 62 شخصًا يعانون من ارتفاع الكوليسترول فقط (المنطقة III) و36 شخصًا مدخنًا فقط (المنطقة I) و93 شخصًا يعانون من ارتفاع ضغط الدم فقط (المنطقة VII) و159 شخصًا يعانون من ارتفاع ضغط الدم والكوليسترول ولكنهم غير مدخنين (المنطقة VI) و23 شخصًا يعانون من ارتفاع الكوليسترول والتدخين ولكنهم لا يعانون من ارتفاع ضغط الدم (المنطقة II).





الخطوة 2 ثمة إجمالي 370 شخصًا يعانون من ارتفاع الكوليسترول. ولدينا $23 + 62 + 159 = 244$ تم تمثيلهم حتى الآن. لذلك يجب أن تحتوي المنطقة V على ناجيًا $370 - 244 = 126$.

الخطوة 3 المعلومة الأخيرة التي لدينا هي أنه يوجد 585 شخصًا يعانون من عامل خطر واحد على الأقل. سيتيح لنا ذلك إيجاد المنطقتين المتبقيتين. تُضاف جميع الأعداد الموجودة حاليًا في الرسم التخطيطي إلى 499. لذلك يجب أن تحتوي المنطقة IV على ناجيًا $585 - 499 = 86$. وكذلك إذا كان 585 مريضًا يعانون من عامل خطر واحد على الأقل. فيتبقى وفق ذلك $690 - 585 = 105$ في المنطقة VIII.



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الخطوة 4 يمكننا الآن الإجابة عن مجموعة كبيرة من الأسئلة حول الدراسة.

(a) يحتوي التقاطع بين عوامل الخطر الثلاثة على 126 ناجيًا.
(b) تمثل المناطق II وIV وVI المرضى الذين يعانون من عاملين تحديدًا من عوامل الخطر؛ ما يساوي ناجيًا $268 = 159 + 23 + 86$.
(c) ونلاحظ من المنطقة VIII أن 105 مرضى لا يعانون من أي من عوامل الخطر.
(d) يبلغ إجمالي العدد الموجود داخل دائرة المدخنين $271 = 86 + 126 + 23 + 36$، ويمثل ذلك 271/690. أو 39.3% من الناجين.

جرّب هذا 4

ثمة ثلاثة عوامل خطر أخرى وهي السمنة وتاريخ عائلي لأمراض القلب والضغط. ضمن مجموعة المرضى المصابين بأزمة قلبية في المثال 4، امتلك 213 تاريخًا عائليًا لأمراض القلب، عانى 47 منهم كذلك من الإجهاد ولم يعانوا من السمنة وعانى 60 من السمنة ولم يعانوا من مشاكل الضغط و12 لم يعانوا من الضغط ولا السمنة. كان الضغط عاملًا لإجمالي 170 شخصًا، لم يمتلك 8 منهم تاريخًا عائليًا ولم يعانوا من السمنة. ثمة 396 مريضًا لا يعانون من أي من عوامل الخطر الثلاثة هذه.

(a) كم عدد المرضى الذين عانوا من السمنة؟
(b) ما النسبة المئوية التي مثلتها عوامل الخطر الثلاثة هذه؟
(c) كم عدد المرضى الذين لم يعانوا من السمنة وليس لديهم تاريخ عائلي للإصابة بأمراض القلب؟

لقد قطعنا شوطًا طويلًا جدًا من مجرد تحديد المجموعات والعناصر فقط! في هذا الدرس، رأينا أنه يمكن استخدام مخططات فن *Venn* بفعالية لفرز بعض الحالات المعقدة جدًا في عالمنا. وكلما ازدادت براعتك في تفسير المعلومات، زادت جودة استعدادك للبقاء والازدهار في عصر المعلومات.

إجابات جرّب هذا

1 أمطار فقط: 139، ثلوج فقط: 39، لا هذا ولا ذاك: 163 (بفرض أنها ليست سنة كبيسة!)

2 كوكا: 60.7%، بيبسي: 44.6%
كلاهما: 14.7%. لا هذا ولا ذاك: 9.4%

3 (a)100 (b)70 (c)40 (d)340

4 (a)227 (b)13.6% (c)404

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الدرس 9-4 مجموعة التمارين

التطبيقات في عالمنا

1. في مسح شمل 85 طالبًا جامعيًا، يستخدم 72 طالبًا البريد الإلكتروني للتواصل ويستخدم 31 طالبًا المراسلة الفورية (IM) ويستخدم 21 طالبًا كليهما.
   (a) كم عدد مستخدمي المراسلة الفورية (IM) فقط؟
   (b) كم عدد مستخدمي البريد الإلكتروني فقط؟
   (c) كم عدد الذين لا يستخدمون هذا ولا ذاك؟
2. في صف دراسي يضم 25 طالبًا، كان هناك 18 طالبًا متخصصًا في الرياضيات و12 طالبًا متخصصًا في علوم الحاسوب و7 طلاب مزدوجي التخصص في الرياضيات وعلوم الحاسوب.
   (a) كم عدد الطلاب المتخصصين في الرياضيات فقط؟
   (b) كم عدد الطلاب غير المتخصصين في علوم الحاسوب؟
   (c) كم عدد الطلاب غير المتخصصين في الرياضيات أو علوم الحاسوب؟
3. يوضّح بحث في سجلات الجامعة شمل 250 من طلاب الفرقة الأولى في جامعة الولاية أن 26 طالبًا قد حصلوا على شهادة من الكلية بإتمام دورات تدريبية في العلوم دون دورات تدريبية في الرياضيات وأن 12 طالبًا قد حصلوا على شهادة من الكلية بإتمام دورات تدريبية في الرياضيات دون دورات تدريبية في العلوم. وثمة 202 طالب لم يحصلوا على شهادات لأي منهما.
   (a) كم عدد الطلاب الذين حصلوا على شهادة من الكلية في الرياضيات؟
   (b) كم عدد الطلاب الذين حصلوا على شهادة من الكلية بإتمام دورات تدريبية في العلوم؟
4. استُخدم خمسة وعشرون فأرًا في تجربة خاصة بعلم الأحياء متضمنة التعرض للمواد الكيميائية الموجودة في دخان السجائر. أصيب خمسة عشر بورم واحد على الأقل وعانى تسعة من فشل في الجهاز التنفسي وأصيب أربعة بأورام وفشل في الجهاز التنفسي.
   (a) كم عدد الفئران المصابة بأورام؟
   (b) كم عدد الفئران غير المصابة بورم؟
   (c) كم عدد الفئران الذين عانوا من أثر واحد على الأقل من هذه الآثار؟
5. من بين 20 طالبًا خضعوا لاختبار نصف العام في علم النفس، أجاب 15 طالبًا عن السؤال الأول من السؤالين الإضافيين وأجاب 13 طالبًا عن السؤال الإضافي الثاني ولم يحاول 2 مجرد الإجابة عن أي منهما.
   (a) ما النسبة المئوية للطلاب الذين اجتهدوا في الإجابة عن السؤالين؟
   (b) ما النسبة المئوية للطلاب الذين اجتهدوا في الإجابة عن سؤال واحد على الأقل؟
6. في دراسة أجريت على 400 من المقبلات المقدّمة في 75 من مطاعم الحرم الجامعي، تضمن 70 منها أقل من 10 جرامات من الدهون ولكن ليس أقل من 350 سعرة حرارية؛ تضمن 48 منها أقل من 350 سعرة حرارية ولكن ليس أقل من 10 جرامات من الدهون؛ تضمن 140 منها أكثر من 350 سعرة حرارية وأكثر من 10 جرامات من الدهون.
   (a) ما النسبة المئوية للدهون التي تضمنت أقل من 10 جرامات من الدهون؟
   (b) ما النسبة المئوية للمقبلات التي تضمنت أقل من 350 سعرة حرارية؟
7. أجرى قسم المساعدات المالية في الجامعة مسحًا شمل 70 طالبًا. وسألهم ما إذا كانوا يحصلون على أي نوع من المساعدات المالية. لُخّصت نتائج المسح في الجدول التالي.

عدد الطلاب	المساعدة المالية
16	المنح الدراسية
24	قروض الطلاب
20	المنح الخاصة
9	المنح الدراسية والقروض
11	القروض والمنح الخاصة
7	المنح الدراسية والمنح الخاصة
2	المنح الدراسية والقروض والمنح الخاصة

   (a) كم عدد الطلاب الحاصلين على منح دراسية فقط؟
   (b) كم عدد الطلاب الحاصلين على قروض ومنح خاصة وغير حاصلين على منح دراسية؟
   (c) كم عدد الطلاب غير الحاصلين على أي من أنواع المساعدات المالية هذه؟
8. تضع مديرة صالة الألعاب الرياضية بالحرم الجامعي جدول دروس اللياقة البدنية للعام الدراسي الجديد. وستقرر عدد مرات انعقاد دروس معينة استنادًا إلى اهتمامات الطلاب. حيث أجرت مسحًا شمل 47 طالبًا في أوقات مختلفة من اليوم، حيث سألتهم عن نوع الدروس التي سيهتمون بحضورها. لُخّصت النتائج في الجدول التالي.

الطلاب المهتمون	نوع الدرس
17	اليوجا
13	تمارين البيلاتس
12	الدراجة الثابتة
9	اليوجا وتمارين البيلاتس
3	تمارين البيلاتس والدراجة الثابتة
5	اليوجا والدراجة الثابتة
2	الثلاثة جميعًا

   (a) كم عدد الطلاب المهتمين باليوجا أو الدراجة الثابتة ولكن غير مهتمين بتمارين البيلاتس؟
   (b) كم عدد الطلاب المهتمين بالفعل بدرسين من الدروس الثلاثة؟
   (c) كم عدد الطلاب المهتمين باليوجا وغير مهتمين بتمارين البيلاتس؟
9. خلال فصل دراسي واحد في الكيمياء، رسب 14 طالبًا بسبب قلّة الحضور ورسب 23 طالبًا بسبب عدم المذاكرة ورسب 15 طالبًا بسبب عدم تسليم الواجبات ورسب 9 طلاب بسبب قلّة الحضور وعدم المذاكرة ورسب 8 طلاب بسبب عدم المذاكرة وعدم تسليم الواجبات ورسب 5 طلاب بسبب قلّة الحضور وعدم تسليم الواجبات ورسب 2 من الطلاب بسبب هذه الأسباب الثلاثة جميعًا.
   (a) كم عدد الطلاب الذين رسبوا نظرًا لسببين تحديدًا من الأسباب الثلاثة؟
   (b) كم عدد الذين رسبوا بسبب قلّة الحضور وعدم المذاكرة وليس بسبب عدم تسليم الواجبات؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

(c) كم عدد الذين رسبوا نظرًا لسبب واحد تحديدًا من الأسباب الثلاثة؟

(d) كم عدد الذين رسبوا بسبب قلّة الحضور وعدم تسليم الواجبات وليس بسبب عدم المذاكرة؟

10. وفق مسح أجرته مؤسسة ناشونال بيتزا والذي قمت بترتيبه الآن، من بين 109 من العملاء الذين شملهم المسح، يفضّل 32 عميلًا البيتزا بلحم البيروني البقري فقط ويفضلها 40 عميلًا بنقانق الديك الرومي فقط ويفضلها 18 عميلًا بالبصل فقط. يفضل ثلاثة عشر من محبي اللحوم بشكل كبير لحم البيروني البقري ونقانق الديك الرومي ويفضل 10 عملاء نقانق الديك الرومي والبصل ويفضل 9 عملاء لحم البيروني البقري والبصل، في كل حالة. يمكن إضافة الصنف الثالث أيضًا. يخرج سبعة أشخاص جميعًا، ويطلبون الأنواع الثلاثة.

(a) كم عدد العملاء الذين يفضلون لحم البيروني البقري أو نقانق الديك الرومي أو لحم البيروني البقري ونقانق الديك الرومي من دون بصل؟

(b) ماذا عن نقانق الديك الرومي أو البصل أو نقانق الديك الرومي والبصل من دون لحم البيروني البقري؟

(c) كم عدد الذين سيتبعون النهج الممل—وجبات خالية من أي من تلك الإضافات؟

11. سجل مئتا مريض يعانون من الاكتئاب في تجربة سريرية لاختبار آثار مضادات الاكتئاب المختلفة. أعطي العقار A لـ 27% من المرضى وأعطي العقار B لـ 30% وأعطي العقار C لـ 27%. تمت معالجة ثلاثة عشر بالمئة باستخدام العقارين A وB على الأقل وأعطي 11.5% العقارين B وC على الأقل وأعطي 7% العقارين A وC على الأقل وتمت معالجة 4% بالعقاقير الثلاثة جميعًا.

(a) كم عدد المرضى في التجربة الذين أُعطوا عقارين على الأكثر من العقاقير الثلاثة؟

(b) كم عدد المرضى الذين تمت معالجتهم بالعقارين A وC دون استخدام العقار B؟

(c) كم عدد المرضى الذين أعطوا دواءً وهميًا لا يتضمن أيًا من العقاقير الثلاثة؟

12. وضّح مسح شمل 96 طالبًا في الحرم الجامعي أن 29 طالبًا قرؤوا جريدة الطلبة المسماة *منبر الحرم الجامعي* في ذلك الصباح. وقرأ 24 طالبًا الأخبار عبر الإنترنت في ذلك الصباح وقرأ 20 طالبًا جريدة المدينة المحلية في ذلك الصباح. قرأ ثمانية طلاب جريدة *منبر الحرم الجامعي* والأخبار عبر الإنترنت في ذلك الصباح بينما قرأ أربعة طلاب الأخبار عبر الإنترنت والجريدة المحلية وقرأ سبعة طلاب جريدة *منبر الحرم الجامعي* وجريدة المدينة المحلية وقرأ شخص واحد جريدة *منبر الحرم الجامعي* والأخبار عبر الإنترنت والجريدة المحلية.

(a) كم عدد من قرأ الأخبار عبر الإنترنت أو الجريدة المحلية وليس كلتيهما؟

(b) كم عدد من قرأ الأخبار عبر الإنترنت والجريدة المحلية ولم يقرؤوا جريدة *منبر الحرم الجامعي*؟

(c) كم عدد من قرأ الأخبار عبر الإنترنت أو جريدة *منبر الحرم الجامعي* أو كلتيهما؟

13. من بين أكبر 50 مدينة في الولايات المتحدة، 11 مدينة لكل منها فريقٌ في الرابطة الوطنية لكرة السلة ولكن ليس لديها فريقٌ في دوري البيسبول الرئيس؛ و9 مدن لدى كل منها فريقٌ في دوري البيسبول الرئيس ولكن ليس لديها فريقٌ في الرابطة الوطنية لكرة السلة؛ و12 مدينة لا تملك هذا ولا ذاك.

(a) كم عدد المدن التي لدى كل منها فريقٌ في دوري البيسبول الرئيس وفريقٌ في الرابطة الوطنية لكرة السلة؟

(b) تمتلك كل مدينة من شيكاغو ونيويورك ولوس أنجلوس فريقين للبيسبول، ولكن لوس أنجلوس هي المدينة الوحيدة التي لها فريقان لكرة السلة. كل مدينة من تلك المدن لها فريق في كلا الدوريين. كم عدد الفرق الموجودة في كل دوري؟

14. يصدر مئة كتاب جديد على المستوى الوطني على مدار 3 أيام من النشاط المتواصل في ديسمبر. ثمة ثمانية كتب لها نسخة إلكترونية متاحة على موقع Amazon فقط و5 كتب متاحة على موقع كتب Google فقط و18 كتابًا متاحًا على موقع iTunes فقط. وكان هناك إجمالي 26 كتابًا متاحًا على Google و7 كتب يمكن العثور عليها على Amazon وGoogle معًا ولكنها غير موجودة على iTunes و4 كتب يمكن العثور عليها على iTunes وGoogle معًا ولكنها غير موجودة على Amazon. ارسم مخطط فن *Venn* يمثل هذه المعلومات واستخدمه للإجابة عن الأسئلة التالية.

(a) كم عدد الكتب المتاحة على المواقع الثلاثة جميعًا؟

(b) اشرح لماذا لا يمكنك إيجاد عدد الكتب التي لم تكن متاحة على أي من الخدمات الثلاث.

(c) إذ كان كل كتاب تم إصداره متاحًا في صورة كتاب إلكتروني على موقع واحد من Amazon أوGoogle أو iTunes على الأقل، فكم عدد الكتب التي كانت متاحة على Amazon وiTunes وليست متاحة على Google؟

(d) في تلك الحالة، كم عدد الكتب التي كانت متاحة على موقعين تحديدًا من المواقع الثلاثة هذه؟

15. توظف شركة تسويق موظفين لإجراء أبحاث حول عادات الاستماع لدى السائقين في منطقة حضرية كبيرة. في اليوم الأول، أجري مسح شمل 121 سائقًا: يستمع 26 سائقًا إلى راديو FM أثناء القيادة، 4 منهم يستمعون إلى FM فقط. ويستمع ثمانية آخرون إلى راديو FM وAM فقط، بينما يستمع 4 إلى FM والراديو الفضائي فقط. وثمة 6 سائقين يستمعون إلى راديو AM فقط ويستمع 22 سائقًا إلى الراديو الفضائي ويستمع 69 إلى نوع واحد فقط على الأقل من الثلاثة.

(a) هل عدد من يستمع إلى الراديو الفضائي أكثر أم عدد من لا يستمع إلى أي نوع من الأنواع الثلاثة الواردة في المسح أكثر؟

(b) كم يزيد عدد الأشخاص الذين يستمعون إلى راديو AM عن أولئك الذين يستمعون إلى FM؟

(c) كم عدد المستمعين إلى بعض أنواع الراديو، لكن ليس راديو AM؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9-4 مجموعة التمارين يتبع

16. صُنفت مجتمعات الفنون في 230 مدينة في جميع أنحاء البلاد وفق ما إذا كان بها متحفٌ فنيٌ وأوركسترا سيمفونية وفرقة باليه. كان ثمة 119 مدينة بها متحفٌ فنيٌ، 20 منها بها فرقة باليه كذلك لكن لا توجد بها أوركسترا و41 مدينة بها أوركسترا لكن لا توجد بها فرقة الباليه و30 مدينة لا يوجد فيها أي من ذلك. من بين 75 مدينة بها فرقة باليه، 10 منها بها أوركسترا كذلك، لكن لا يوجد بها متحفٌ فنيٌ. اثنان وعشرون مدينة يوجد بها أوركسترا فقط.

(a) ما النسبة المئوية للمدن التي توجد بها أوركسترا؟
(b) كم يزيد عدد المدن التي لا يوجد بها أي من هذه الأشياء الثلاثة عن التي يوجد بها جميعها؟
(c) إذا اخترت مدينة عشوائيًا من هذه القائمة للسفر إليها وتريد حقًا الذهاب إما إلى متحف فني أو حفلة أوركسترا، فما النسبة المئوية لاحتمال إصابتك بخيبة أمل في نهاية الأمر؟

التفكير الناقد

17. تم توظيف باحث لدراسة عادات الشرب لدى مستهلكي مشروب الشاي. اشرح لماذا تم فصله عندما نشر النتائج التالية.
من مسح شمل 40 من هؤلاء المستهلكين:
قال 23 إنهم يشربون الشاي الأسود.
قال 18 إنهم يشربون الشاي الأخضر.
قال 19 إنهم يشربون الشاي العشبي.
قال 12 إنهم يشربون الشاي الأسود والشاي الأخضر.
قال 6 إنهم يشربون الشاي الأخضر والشاي العشبي.
قال 7 إنهم يشربون الشاي الأسود والشاي العشبي.
قال 2 إنهم يشربون الأنواع الثلاثة جميعًا.
قال 2 إنهم لا يشربون أيًا من الأنواع الثلاثة.

18. قامت شركة OUWant12 للأبحاث التسويقية بتصميم ثلاثة إعلانات عشوائية وإرسالها إلى 40 حساب بريد إلكتروني. كان الإعلان الأول عن كريم إزالة الشعر والثاني إعلان عن علاجات للصداع النصفي والثالث إعلان عن نظام غذائي جديد من فاصولياء ليما. اشرح لماذا توقفت الجهات الراعية عن تقديم خدماتها عند ظهور النتائج التالية.
حذف 23 مستلمًا إعلان كريم إزالة الشعر دون النظر إليه.
حذف 18 مستلمًا إعلان علاجات الصداع النصفي.
حذف 19 مستلمًا إعلان النظام الغذائي من فاصولياء ليما.
حذف 12 مستلمًا إعلاني كريم إزالة الشعر وعلاجات الصداع النصفي.
حذف 6 مستلمين إعلاني علاجات الصداع النصفي والنظام الغذائي من فاصولياء ليما.
حذف 7 مستلمين إعلاني كريم إزالة الشعر والنظام الغذائي من فاصولياء ليما.
حذف 2 من المستلمين الإعلانات الثلاثة جميعًا.

19. تقوم شبكة تلفزيونية تفكر في إبرام عقود جديدة لبث قنوات رياضية بتوظيف مستشار تسويق لإجراء مسح يشمل مشاهدي تلفاز تم اختيارهم عشوائيًا لسؤالهم عن الرياضة التي يسعون جاهدين لمشاهدتها عبر التلفاز من بين كرة القدم والتنس وكرة السلة. ومن بين من شملهم المسح، يشاهد 35 التنس و235 كرة السلة و295 كرة القدم ويشاهد 90 كرة السلة وكرة القدم و560 لا يشاهدون أيًا من الثلاثة.
(a) اشرح لماذا لا تُعد هذه المعلومات كافية لإيجاد إجمالي عدد الأشخاص الذين شملهم المسح.
(b) عند النظر إلى النتائج بعناية أكثر، يكتشف أحد أعضاء الفريق الاستشاري أن كل شخص يشاهد التنس يشاهد كرة السلة كذلك، ولا يشاهد أيٌ من هؤلاء الأشخاص كرة القدم. هل يمكنك الآن إيجاد عدد الأشخاص الذين شملهم المسح؟
(c) كم شخصًا يشاهد كرة القدم فقط؟ كم شخصًا يشاهد كرة السلة فقط؟

20. (a) ما عدد المناطق المختلفة الموجودة في مخطط فن *Venn* مكوّن من دائرتين؟ ماذا عن المخطط المكوّن من ثلاث دوائر؟ استخدم هذا لتكوين تخمين بشأن عدد المناطق اللازمة لمخطط فن *Venn* من أربع دوائر.
(b) قم ببعض المحاولات لرسم مخطط فن *Venn* بأربع دوائر، ثم اشرح لماذا يتعذر ذلك.
(c) استخدم الإنترنت لإيجاد مخطط فن *Venn* لأربع مجموعات، واستخدمه للتحقق من تخمينك من الجزء (a).

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الدرس 9-5

المجموعات غير المنتهية

أهداف التعلم

1. تعريف المجموعات غير المنتهية.
2. توضيح أن مجموعة ما غير منتهية.
3. إيجاد حد عام لمجموعة غير منتهية.
4. تعريف المجموعات القابلة للعد وغير القابلة للعد.

قد تبدو السماء ليلًا غير منتهية. ولكن هل فكرت مطلقًا في معنى ذلك حقًا؟

يُعد مفهوم اللانهاية بالغ الصعوبة بالنسبة إلينا كبشر لتدركه عقولنا. ولأن أفكارنا تتشكل من خلال التجارب في عالم مادي محدود الأبعاد، فإن الأشياء الكبيرة بصورة غير منتهية تبدو دائمًا بعيدة عن متناولنا. يشعر بعض الفلاسفة أن البشر عاجزون بشكل أساسي عن فهم مفهوم الشيء الكبير بصورة غير منتهية على الإطلاق!

إن دراسة اللانهاية والمجموعات غير المنتهية من منظور الرياضيات تُعد حديثة نسبيًا إذا ما قورنت بتاريخ الرياضيات بشكل عام. فمنذ مدة لا تقل عن ألفي سنة، كانت طبيعة اللانهاية مربكة بدرجة كبيرة لأعظم العقول البشرية الذين اختاروا عدم التطرق لها على الإطلاق. ومع ذلك، ففي العمل في مجموعة تكون ببساطة الأرقام الطبيعية، فإننا نتعامل مع مجموعات غير منتهية في الرياضيات طوال الوقت. إنها مفارقة مثيرة للاهتمام.

تعريف المجموعات غير المنتهية

تذكر من الدرس 1 أن المجموعة تُعد منتهية إذا كان عدد العناصر إما صفرًا أو عددًا طبيعيًا. وإلا، فستُعد مجموعة غير منتهية. على سبيل المثال، تُعد المجموعة {10, 20, 30, 40} منتهية لأن عدد العناصر (أربعة) عدد طبيعي. لكن المجموعة {10, 20, 30, 40, . . .} غير منتهية لأن عدد العناصر غير محدد، ومن ثم لا يكون عددًا طبيعيًا.

قد نتعرف على المجموعة غير المنتهية عندما نرى إحداها. لكن ليس من السهل بالضرورة أن نقدم تعريفًا دقيقًا لما يعنيه كون المجموعة غير منتهية (غير التعريف الواضح، "غير منتهية"). يشتهر عالم الرياضيات الألماني جورج كانتور، الذي يُعد على نطاق واسع أبًا لنظرية المجموعات، بدراسة المجموعات غير المنتهية التي أجراها في القرن التاسع عشر. وقد أتى تعريف كانتور البسيط والأنيق للمجموعة غير المنتهية كما يلي:

تكون المجموعة **غير منتهية** إذا أمكن وضعها في تناظر واحد لواحد مع المجموعة الجزئية الفعلية الخاصة بها.

1. تعريف المجموعات غير المنتهية رسميًا.

أولًا، لاحظ أن المجموعة المنتهية لا تفي بالتأكيد بالشرط الوارد في هذا التعريف: إذا كانت المجموعة تحتوي على عدد محدد من العناصر، وليكن 10، فإن أي مجموعة جزئية فعلية تحتوي على 9 عناصر على الأكثر ومحاولة وضع تناظر واحد لواحد ستخلّف دائمًا عضوًا واحدًا على الأقل.

والشيء الأصعب هو استيعاب كيف يمكن للمجموعة غير المنتهية أن تحقق هذا التعريف. سنوضّح ذلك باستخدام مجموعة غير منتهية نعرفها جيدًا. مجموعة الأعداد الطبيعية {1, 2, 3, 4, . . .}. مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية {2, 4, 6, 8, . . .} هي مجموعة جزئية فعلية، كل عدد زوجي هو عدد طبيعي كذلك، لكن توجد أعداد طبيعية ليست أعدادًا زوجية. الآن، سنوضح طريقة ماهرة لوضع هاتين المجموعتين في تناظر واحد لواحد: توصيل كل عدد طبيعي بمثليه.

$$1 \leftrightarrow 2, \qquad 2 \leftrightarrow 4, \qquad 3 \leftrightarrow 6, \qquad 4 \leftrightarrow 8, \ldots$$

بشكل عام، يمكننا تحديد مقابلتنا بتوصيل أي n من مجموعة الأعداد الطبيعية بعدد زوجي مقابل $2n$. ويُعد ذلك تناظر واحد لواحد لأن كل عدد طبيعي له مقابل (مثلاه)، وكل عدد زوجي له مقابل (نصفه).

ملاحظة رياضية

فكر فيما يلي لمدة ثانية: أي المجموعتين أكبر، {1, 2, 3, 4, 5, . . .} أم {2, 4, 6, 8, 10, . . .}؟ مثاليًا أي شخص عاقل سيقول إن الأولى هي الأكبر. أليس كذلك؟ لكن المناقشة الموجودة على اليسار توضّح أنهما متساويتان في الحجم بالفعل.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

ومن ثم نكون قد وضعنا الأعداد الطبيعية في تناظر واحد لواحد مع مجموعة جزئية فعلية. ما يثبت أنها مجموعة غير منتهية.

لنجرب مثالًا آخر.

معلومات إضافية الفندق غير المنتهي

يفرض أن هناك فندقًا هائلًا جدًا في إحدى المجرات البعيدة يتضمن بالفعل عددًا لا نهائيًا من الغرف، مرقّمة على النحو 1, 2, 3, 4, ... هناك اجتماع كبير بين مخلوقات غريبة ومروعة في المدينة، لذلك جميع الغرف مشغولة. يدخل مسافر منهك إلى الردهة ويطلب غرفة. وعندما يعلم أن الفندق ممتلئ، يحتج بأن الفندق يمكن أن يستوعبه بالتأكيد. هل تتفق معه؟ هل يمكنهم العثور على غرفة له دون طرد شخص ما؟

يميل الأشخاص إلى الانقسام بشأن هذا السؤال إلى نصفين: يعتقد نصفهم أنه لا يمكنهم استيعابه لأن جميع الغرف ممتلئة. ويعتقد النصف الآخر أنه يمكنهم ذلك لأن هناك العديد من الغرف غير المنتهية. في الحقيقة، المسافر مُحقّ—فالأمر لا يتطلب سوى إزعاج جميع النزلاء الآخرين! إذا طلب المدير من كل نزيل الانتقال إلى الغرفة التي يزيد رقمها بمقدار 1 عن رقم غرفته الحالية، فإن كل شخص كان في الأصل في غرفة لا يزال يمتلك غرفة. ويستطيع مسافرنا إراحة جسده المرهق في الغرفة 1.

هذا التمرين العقلاني الذكي الصغير هو نتيجة للحقيقة التي تفيد أن الأعداد الطبيعية تشكل مجموعة غير منتهية—يمكن وضعها في تناظر واحد لواحد مع مجموعة جزئية فعلية من نفسها عن طريق مقابلة أي n بـ $n + 1$.

وضّح أن المجموعة {5, 10, 15, 20, 25, . . .} هي مجموعة غير منتهية.

مثال 1 توضيح أن مجموعة ما غير منتهية

الحل

ثمة طريقة بسيطة لوضع هذه المجموعة في مقابلة مع مجموعة جزئية فعلية من نفسها وهي مطابقة كل عنصر n مع مِثليه $2n$.

$$\begin{array}{ccccccc} \{5, & 10, & 15, & 20, & 25, & \ldots\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \{10, & 20, & 30, & 40, & 50, & \ldots\} \end{array}$$

المجموعة الثانية، {10, 20, 30, 40, 50, . . .} هي مجموعة جزئية فعلية من المجموعة الأولى، والمجموعتان في تناظر واحد لواحد، لذا {5, 10, 15, 20, 25, . . .} هي مجموعة غير منتهية.

جرّب هذا 1

وضّح أن المجموعة {−1, −2, −3, −4, −5, . . .} هي مجموعة غير منتهية.

الحد العام للمجموعة غير المنتهية

2. توضيح أن مجموعة ما غير منتهية.

تتمثل إحدى نتائج الطريقة التي أظهرنا بها أن مجموعة الأعداد الطبيعية غير منتهية في أننا يمكننا إيجاد صيغة عامة لمجموعة الأعداد الزوجية: $2n$، حيث n هي المجموعة {1, 2, 3, 4, . . .}. سنسمي $2n$ في هذه الحالة **حدًا عامًا** لمجموعة الأعداد الزوجية. لاحظ أننا قلنا "حد عام" وليس "الحد العام". فثمة حدود عامة أخرى يمكننا كتابتها لهذه المجموعة، $6 - 2n$، حيث n هي المجموعة {4, 5, 6, 7, . . .}. يُعد احتمالًا آخر. لكن في معظم الحالات يكون الحد العام الأبسط هو الحد الذي يتم الحصول على العدد الأول المذكور فيه بالتعويض بـ 1 عن n. وهذا هو الحد الذي سنجده عادةً.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

ملاحظة رياضية

لا يعد إيجاد حد عام لمجموعة أمرًا سهلًا دومًا. في بعض الحالات، قد يكون أمرًا بالغ الصعوبة أو مستحيلًا. فقد تحتاج إلى إجراء بعض المحاولات وارتكاب الأخطاء قبل إيجاد صيغة صحيحة.

مثال 2 إيجاد الحد العام لمجموعة غير منتهية

جِد حدًا عامًا للمجموعة {4, 7, 10, 13, 16, . . .}.

الحل

يجب أن تبدأ دومًا بمحاولة التعرف على نمط متبع في أعداد المجموعة. في هذه الحالة، النمط هو زيادة الأعداد بمعدل 3. عندما تكون الحالة كذلك، فإن $3n$ يمثل خيارًا جيدًا. لأنه عندما تزداد n بمعدل 1، تزداد $3n$ بمعدل 3. ولكن مجرد استخدام $3n$ سيمنحنا المجموعة {3, 6, 9, 12, . . .}، التي لا تمثل ما نريده بالتحديد. نعالج ذلك بإضافة 1 إلى الحد العام الخاص بنا، للحصول على $3n + 1$ (تحقق من ذلك الإجابة بالتعويض بالقيم 1, 2, 3, . . . عن n لتلاحظ أن النتيجة هي المجموعة {4, 7, 10, 13, 16, . . .}.)

جرّب هذا 2

جِد حدًا عامًا للمجموعة {2, 8, 14, 20, 26, . . .}.

أنواع اللانهاية المختلفة؟

3. إيجاد حد عام لمجموعة غير منتهية.

سريعًا، ما المجموعة الأكبر، مجموعة الأعداد الطبيعية أم مجموعة الأعداد الحقيقية؟ من المحتمل أن تكون قد أجبت بمجموعة الأعداد الحقيقية. لكن كلتا المجموعتين كبيرة بصورة غير منتهية. أليستا متساويتين في الحجم إذن؟ لقد واجه كانتور هذه المسألة في أواخر القرن التاسع عشر، وحدد أن المجموعة تكون **قابلة للعد** إذا كانت منتهية أو يمكن وضعها في تناظر واحد لواحد مع الأعداد الطبيعية، وأن المجموعة غير المنتهية تكون **غير قابلة للعد** إذا تعذر ذلك. واستخدم الرمز $\aleph_0$، ويُنطق ألف-صفر، لتمثيل عدد العناصر الرئيسة للمجموعة القابلة للعد.

مثال 3 توضيح أن مجموعة ما قابلة للعد

وضّح أن مجموعة الأعداد الصحيحة قابلة للعد.

الحل

إذا كانت مجموعة هي مجموعة منتهية، فإنها قابلة للعد تلقائيًا. لذلك فإن ذلك يستحق التفكير على الأقل. ولكن الأعداد الصحيحة ليست مجموعة منتهية، لذلك نحتاج إلى إيجاد طريقة لوضعها في تناظر واحد لواحد مع أعداد طبيعية. يمكننا مطابقة 0 مع 1، و1 مع 2، و2 مع 3 وهكذا. ولكن ذلك سيهمل الأعداد السالبة. لذلك فلنتخيل الأمر بصورة أشمل:

الأعداد الطبيعية	1	2	3	4	5	6	7	8	9	. . .
الأعداد الصحيحة	0	1	−1	2	−2	3	−3	4	−4	. . .

يُعد هذا صحيحًا لأننا يمكننا ملاحظة أن كل عدد صحيح سيقابله عدد طبيعي في النهاية. لذلك يحدد ذلك تناظر واحد لواحد. بالرغم من ذلك، سيكون الإثبات أقوى إذا تمكنا من تحديد صيغة للتناظر. لكل عدد طبيعي n،

$$n \rightarrow \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{إذا كان } n \text{ عددًا زوجيًا} \\ -\frac{n-1}{2} & \text{إذا كان } n \text{ عددًا فرديًا} \end{cases}$$

يحدد تناظر واحد لواحد.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

معلومات إضافية القصة الحزينة للرجل الذي كان ذا بصيرة

الشخص الذي صاغ عبارة "العبقرية الحقيقية لا تُدرك مطلقًا في الوقت المناسب" كان سيحب جورج كانتور. إن مجرد أن تشتهر بكونك مؤسسًا لما يمثل الآن فرعًا رئيسًا في الرياضيات (نظرية المجموعات) يُعد إنجازًا عظيمًا. ولكن الأمر كان يتعلق بقدرة كانتور الفريدة على إضفاء الطابع الرسمي على دراسة اللانهاية التي كانت أعظم إنجازاته. وفي النهاية مثلت اللعنة الأكبر له.

لقرون عديدة، تجاهلت دراسة الرياضيات بشكل أساسي حقيقة أن أعمدتها الأساسية—الأعداد الطبيعية والحقيقية—كانت مجموعات غير منتهية؛ ببساطة لم تتم دراسة اللانهاية. بالنسبة إلى الجزء الأكبر، كان هذا يعزى إلى المعتقدات الدينية—وكان يعتقد أن اللانهاية هو عالم يخص الله وحده. واعتبرت محاولات دراستها علميًا أمرًا غير لائق من قبل البعض وبدعة صريحة من قبل آخرين. وعلى أقل تقدير، لم يتم الاحتفاء بعمل كانتور وقت صدوره. كان اثنان من أكبر منتقدي كانتور كذلك من بين أشهر علماء الرياضيات في أواخر القرن التاسع عشر، هنري بوانكاريه وليوبلد كرونكر. أشار بوانكاريه إلى عمل كانتور على أنه "مرض خطير يصيب الرياضيات". ومن الواضح أن كرونكر فضّل الهجمات الشخصية، واصفًا كانتور بأنه "دجال علمي" و"مرتد" و"مفسد الشباب". وكان هذا من جانب علماء الرياضيات—شعر الفلاسفة الدينيون أنه يجب سجنه أو أسوأ من ذلك.

أثقل ذلك النقد كاهل جورج المسكين بشدة، حيث دخل المستشفى لأول مرة بسبب الاكتئاب الحاد في عام 1884 بعد 10 سنوات من العمل التأسيسي في نظرية المجموعات. على الرغم من أنه ظل ناشطًا كعالم رياضيات حتى عام 1913، إلا أنه كان ينضم إلى المؤسسات ويرحل منها بسرعة. وقضى آخر 5 سنوات من حياته في مصحة حتى مات في عام 1918.

لكن صدّق أو لا تصدق، كان يمكن أن يكون الوضع أسوأ من ذلك. يمكن أن ترجع جذور الأفكار التي نقبلها الآن عن اللانهاية إلى الفيلسوف الإيطالي وعالم الرياضيات وعالم الفلك جوردانو برونو الذي تمت مكافأته على فهمه الرائد للطبيعة اللانهائية للكون بحرقه على الوتد في 17 فبراير 1600.

جرّب هذا 3

وضّح أن مجموعة الأعداد النسبية الموجبة ذات المقامات 2 أو 3 هي مجموعة قابلة للعد. (الأعداد النسبية هي كسور ذات أعداد صحيحة في البسط والمقام.)

4. تعريف المجموعات القابلة للعد وغير القابلة للعد.

الآن يكون السؤال الذي يطرح نفسه هو: ما أنواع المجموعات غير القابلة للعد؟ وكيف يمكنك إثباتها؟ هذا، يا أصدقائي، ليس سؤالًا سهلًا على الإطلاق. لقد كان أحد أهم إنجازات كانتور، في الحقيقة، هو إثبات أن مجموعة الأعداد الحقيقية ليست قابلة للعد. فإذا كنت قد خمّنت إذن أن الأعداد الحقيقية أكبر من الأعداد الطبيعية، فأنت محق. لكن دراسة المجموعات غير المنتهية غريبة وشيقة في آن واحد، حيث النتائج غير المتوقعة في كل محاولة تقريبًا. فمثلًا، يمكن إثبات أن عدد العناصر الرئيسة لمجموعة من الأعداد التي بين 0 و1 فقط هو نفسه عدد العناصر الرئيسة لمجموعة الأعداد الحقيقية بالكامل! إذا وجدت هذه الأفكار مشوقة، فستحصل على المزيد منها في المشروعين 3 و4 في نهاية هذه الوحدة.

إجابات جرّب هذا

1 يمكن حلها بطرقٍ عديدة: أحد الخيارات هو تناظر $1-$ بـ $2-$ و$2-$ بـ $4-$. وبوجه عام $n-$ بـ $2n-$.

2 $6n-4$

3 احتمال واحد:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \dots \end{array}$$

$$n \to \begin{cases} \dfrac{(n+1)}{4} & \text{إذا كان } n \text{ عددًا فرديًا} \\ \dfrac{n}{6} & \text{إذا كان } n \text{ عددًا زوجيًا} \end{cases} \quad \text{أو} \quad n \to \begin{cases} \dfrac{(n+1)/2}{2} & \text{إذا كان } n \text{ عددًا فرديًا} \\ \dfrac{n/2}{3} & \text{إذا كان } n \text{ عددًا زوجيًا} \end{cases}$$

McGraw Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

9-5 مجموعة التمارين

تمارين كتابية

1. عرّف المجموعة المنتهية. بكلمات من عندك وباستخدام تعريف كانتور كذلك.
2. ما المقصود بالحد العام لمجموعة غير منتهية؟
3. ماذا يعني أن تكون مجموعة ما قابلة للعد؟
4. اشرح كيف يمكنك معرفة أن مجموعة الأعداد الطبيعية ومجموعة الأعداد الزوجية تتضمنان عدد العناصر الرئيسة نفسه.

تمارين حسابية

بالنسبة إلى التمارين 20-5. جد حدًا عامًا للمجموعة.

5. {7, 14, 21, 28, 35, . . .}
6. {1, 8, 27, 64, 125, . . .}
7. {4, 16, 64, 256, 1,024, . . .}
8. {1, 4, 9, 16, 25, . . .}
9. {−3, −6, −9, −12, −15, . . .}
10. {22, 44, 66, 88, 110, . . .}
11. $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \ldots\}$
12. $\{\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1, \ldots\}$
13. {2, 6, 10, 14, 18, . . .}
14. {1, 4, 7, 10, 13, . . .}
15. $\{\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots\}$
16. $\{1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{64}, \frac{1}{125}, \ldots\}$
17. {100, 200, 300, 400, 500, . . .}
18. {50, 100, 150, 200, 250, . . .}
19. {−4, −7, −10, −13, −16, . . .}
20. {−3, −5, −7, −9, −11, . . .}

بالنسبة إلى التمارين 30-21. وضّح أن كل مجموعة هي مجموعة غير منتهية.

21. {3, 6, 9, 12, 15, . . .}
22. {10, 15, 20, 25, 30, . . .}
23. {9, 18, 27, 36, 45, . . .}
24. {4, 10, 16, 22, 28, . . .}
25. {2, 5, 8, 11, 14, . . .}
26. {20, 24, 28, 32, 36, . . .}
27. {10, 100, 1,000, 10,000, . . .}
28. {100, 200, 300, 400, 500, . . .}
29. $\{\frac{5}{1}, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, \frac{5}{5}, \ldots\}$
30. $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\}$

بالنسبة إلى التمارين 34-31. وضّح أن المجموعة المعطاة قابلة للعد. (انظر المثال 3 للاسترشاد.)

31. {5, 10, 15, 20, 25, . . .}
32. {−3, −6, −9, −12, −15, −18, . . .}
33. مجموعة الأعداد التي جذرها التربيعي عددٌ كليّ
34. مجموعة الأعداد النسبية السالبة ذات المقامين 5 و7

التفكير الناقد

35. مجموعة الأعداد النسبية هي مجموعة تتضمن جميع الكسور المحتملة التي تكون قيم البسط والمقام لها أعدادًا صحيحة. بديهيًا، هل تعتقد أنه توجد أعداد نسبية أكثر من الأعداد الطبيعية؟ لماذا؟ هل تعتقد أن مجموعة الأعداد النسبية قابلة للعد؟
36. هل يمكنك التفكير في أي مجموعة من الأشياء الملموسة التي تعد مجموعة غير منتهية؟ لمَ أو لمَ لا؟
37. ادرس المثال 3 بعناية. ثم قارنه بالمثال 2. ما الذي أثبتناه بالفعل في المثال 2 من دون حتى إدراك ذلك؟
38. صواب أم خطأ:
    (a) المجموعة الجزئية من مجموعة غير منتهية تكون غير منتهية.
    (b) إذا كانت المجموعة A تتضمن مجموعة جزئية غير منتهية، فإن A يجب أن تكون غير منتهية كذلك.

يستخدم التمرينان 39 و40 الحقيقة التي تفيد أن عدد العناصر الرئيسة لمجموعة الأعداد الطبيعية {1, 2, 3, 4, . . .} هو $\aleph_0$.

39. (a) حدد التناظر واحد لواحد بين مجموعة الأعداد الطبيعية والمجموعة {0, 1, 2, 3, 4, . . .}.
    (b) اكتب مسألة حسابية تتضمن $\aleph_0$ الموضح بواسطة الجزء (a). *(إرشاد:* كم عدد العناصر الزائدة عن الأعداد الطبيعية التي تتضمنها المجموعة {0, 1, 2, 3, 4, . . .}؟
40. (a) حدد التناظر واحد لواحد بين مجموعة الأعداد الطبيعية ومجموعة جميع الأعداد الصحيحة باستثناء الصفر.
    (b) اكتب مسألة حسابية تتضمن $\aleph_0$ الموضح بواسطة الجزء (a).

في التمارين 46-41، جد المجموعة الرئيسة للمجموعة المعطاة. ربما تجد الأفكار الواردة في التمرينين 39 و40 مفيدة.

41. {10, 11, 12, 13, 14, . . .}
42. {−1, −2, −3, −4, −5, . . .}
43. {1, 3, 5, 7, 9, . . . , 29}
44. {2, 4, 6, 8, 10, . . . , 24}
45. مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية.
46. مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

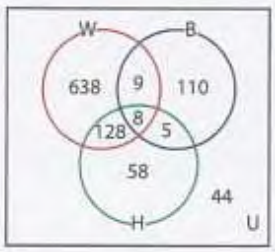
9-5 الملخص

الدرس	مصطلحات مهمة	أفكار مهمة
1	المجموعة طريقة ذكر العناصر العنصر محددة جيدًا الأعداد الطبيعية الطريقة الوصفية رمز بناء المجموعة المتغير مجموعة منتهية مجموعة غير منتهية عدد رئيس مجموعة خالية مجموعات متساوية مجموعات متكافئة التناظر واحد لواحد	**المجموعة** هي مجموعة من العناصر، وتكون المجموعة محدودة إذا كان يمكن الجزم بموضوعية أن أي عنصر ينتمي إلى المجموعة أو لا ينتمي إليها. يسمى كل شيء عنصرًا أو عضوًا في المجموعة. نستخدم ثلاث طرق لتحديد المجموعات: طريقة ذكر العناصر والطريقة الوصفية ورمز بناء المجموعة. تتضمن المجموعة المنتهية عدد محدود من العناصر، بينما تتضمن المجموعة غير المنتهية عدد غير محدود من العناصر. إذا كانت المجموعة لا تتضمن أي عناصر، فتسمى مجموعة خالية أو مجموعة فارغة. تكون المجموعتان متساويتين إذا كانتا تتضمنان العناصر نفسها. وتكون المجموعتان المنتهيتان متكافئتين إذا كانتا تتضمنان عدد العناصر نفسه. تسمى المجموعتان في حالة تناظر واحد لواحد إذا كان من الممكن إقتران العناصر بحيث يكون لكل عنصر في المجموعة الأولى عنصر مناظر تمامًا في المجموعة الثانية، والعكس.
2	المجموعة الشاملة متممة المجموعة الجزئية المجموعة الجزئية الفعلية التقاطع الاتحاد الطرح الضرب الديكارتي	**المجموعة الشاملة** هي مجموعة تضم كافة العناصر المستخدمة لمسألة أو حالة محددة. المجموعة المتممة لمجموعة محددة هي مجموعة تتألف من جميع العناصر الموجودة في المجموعة الشاملة وليست في المجموعة المحددة. تسمى المجموعة A مجموعة جزئية من المجموعة B إذا كان كل عنصر في A موجودًا كذلك في B. تُسمى A مجموعة جزئية فعلية للمجموعة B إذا وجد عنصر واحد على الأقل في B غير موجود في A. اتحاد مجموعتين هو المجموعة التي تضم جميع العناصر الموجودة في مجموعة واحدة على الأقل من المجموعتين. التقاطع هو المجموعة التي تضم جميع العناصر المشتركة بين المجموعتين. الفرق بين المجموعة A والمجموعة B، يرمز إليه بـ $A - B$، هو مجموعة العناصر الموجودة في المجموعة A لكنها غير موجودة في المجموعة B. الضرب الديكارتي للمجموعتين A وB هو $A \times B = \{y \in B, (x, y) \mid x \in A\}$.
3	مخطط فن *Venn*	اخترع **عالم رياضيات** اسمه **جون فن** طريقة لتمثيل المجموعات بشكل تصويري، يستخدم أسلوبه الدوائر المتداخلة لتمثيل المجموعات. توضع العناصر الموجودة ضمن تقاطع المجموعات في موضع تداخل الدوائر. قوانين دي مورجان لمجموعتين A وB هي $(A \cap B)' = A' \cup B'$، $(A \cup B)' = A' \cap B'$. لأي مجموعتين منتهيتين A وB، $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.
4		يمكن استخدام **مخططات فن *Venn*** لحل مسائل في عالمنا تتضمن عمليات المسح والتصنيفات.
5	مجموعة غير منتهية الحد العام مجموعة قابلة للعد مجموعة غير قابلة للعد	**يمكن وضع مجموعة غير منتهية** في تناظر واحد لواحد مع مجموعة جزئية فعلية من نفسها. تسمى المجموعة قابلة للعد إذا كانت منتهية أو يوجد تناظر واحد لواحد بين المجموعة ومجموعة الأعداد الطبيعية. تسمى المجموعة غير قابلة للعد إذا كان يتعذر عدها. وتعد الأعداد الطبيعية مثالًا على مجموعة غير منتهية قابلة للعد. بينما تعد الأعداد الحقيقية مجموعة غير قابلة للعد.

مراجعة الرياضيات في التنوع

اعتمد مخطط فن *Venn* الموضّح على اليسار إلى التقديرات السكانية المقدمة:

1. البيض فقط: 638، السود فقط: 110، الأصل الإسباني فقط: 58
2. الأصل الإسباني والسود، دون البيض: 5
3. الأصل الإسباني أو السود: 318
4. غير البيض أو السود أو المنحدرين من أصل إسباني: 44
5. هذا يُعد بسيطًا إذا فكرت فيه: النسبة المئوية للبيض أقل من 50. ومن ثم سيكون غير البيض أكثر.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9 تمارين المراجعة

مراجعة درس بدرس

9-1 مقدمة في نظرية المجموعات

بالنسبة إلى التمارين 1–8، اكتب كل مجموعة برمز السرد.

1. المجموعة D هي مجموعة الأعداد الزوجية بين 50 و60.
2. المجموعة F هي مجموعة الأعداد الفردية بين 3 و40.
3. المجموعة L هي مجموعة الحروف التي تتضمنها الكلمة خطابات.
4. المجموعة A هي مجموعة الحروف التي تتضمنها الكلمة أركنساس.
5. المجموعة B هي $\{x | x \in N, x > 500\}$.
6. المجموعة C هي مجموعة الأعداد الطبيعية بين 5 و12.
7. M هي مجموعة الرجال الذين ساروا على سطح القمر.
8. W هي مجموعة النساء اللاتي سرن على سطح القمر.

بالنسبة إلى التمارين 9–12، اكتب كل مجموعة باستخدام رمز بناء المجموعة.

9. {18, 20, 22, 24}
10. {5, 10, 15, 20}
11. {101, 103, 105, 107, . . .}
12. {8, 16, 24, . . . 72}

بالنسبة إلى التمارين 13–20، حدد ما إذا كانت المجموعة منتهية أم غير منتهية.

13. $\{x | x \in N, x \geq 9\}$
14. {4, 8, 12, 16, . . .}
15. {إعلانات تجارية مزعجة}
16. {3, 7, 9, 12}
17. $\emptyset$
18. {الأشخاص أصحاب الشعر الأحمر}
19. {أعداد من 10 أرقام}
20. أي من المجموعات الواردة في التمارين 19–13 ليست محددة جيدًا؟

9-2 المجموعات الجزئية والمجموعات على المجموعات

بالنسبة إلى التمارين 21–24، حدد ما إذا كانت العبارة صوابًا أم خطأً.

21. $\{80, 100, 120, \ldots\} \subseteq \{40, 80, 120, \ldots\}$
22. $\{6\} \subset \{6, 12, 18\}$
23. $\{5, 6, 7\} \subseteq \{5, 7\}$
24. $\{a, b, c\} \subset \{a, b, c\}$
25. جد جميع المجموعات الجزئية للمجموعة $\{r, s, t\}$.
26. كم عدد المجموعات الجزئية والمجموعات الجزئية الفعلية التي تتضمنها المجموعة $\{a, e, i, o, u, y\}$؟

وقع اختبار موقع ويب للاختبار التلقائي 11 سيارة لإجراء ثلاثة أنواع من اختبارات السلامة: اختبار انتفاخ الوسادة الهوائية وقوة الهيكل عند الانقلاب واختبار تصادم بسرعة 20 ميل في الساعة. تم إدراج السيارات التي حصلت على تصنيف استثنائي في انتفاخ الوسادة الهوائية في المجموعة A. وتضمنت المجموعة B السيارات التي حصلت على تصنيف استثنائي في قوة الهيكل عند الانقلاب وتضمنت المجموعة C السيارات التي حصلت على تصنيف استثنائي في اختبار التصادم. استخدم هذه المجموعات للتمارين 38–27.

U = {شيفروليه، فورد، بي إم دبليو، مرسيدس، تويوتا، هوندا، لكزس، أكيورا، هيونداي، نسلا، دودج}

A = {شيفروليه، بي إم دبليو، تويوتا، هوندا، لكزس}

B = {تويوتا، هوندا، لكزس، هيونداي، نسلا}

C = {مرسيدس، أكيورا، دودج}

جد كل مجموعة.

27. $A \cap B$
28. $B \cup C$
29. $(A \cap B) \cap C$
30. B'
31. $A - B$
32. $B - A$
33. $(A \cup B)' \cap C$
34. $B' \cap C'$
35. $(B \cup C) \cap A'$
36. $(A \cup B) \cap C'$
37. $(B' \cap C') \cup A'$
38. $(A' \cap B) \cup C$
39. إذا كان $K = \{x | x \in N, x > 25\}$ و$L = \{x | x \in E, x > 10\}$، فجد $K \cap L$ و$K \cup L$ و$L - K$.
40. بالنسبة إلى كل رقم تمرين وارد أدناه، اكتب وصفًا لفظيًا لما تمثله المجموعة التي يتضمنها ذلك التمرين.

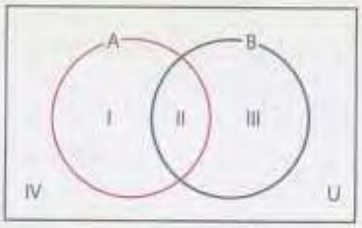
(a) 27 (b) 28 (c) 29 (d) 30 (e) 31 (f) 32 (g) 34 (h) 35

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

9 تمارين المراجعة

9-3 استخدام مخططات فن Venn لدراسة العمليات على المجموعات

بالنسبة إلى التمارين 41–46، استخدم مخطط فن Venn التالي. صف المنطقة أو المناطق المقدمة في كل مسألة. باستخدام عمليات المجموعات على A وB. ربما توجد أكثر من إجابة صحيحة.



41. المنطقة I
42. المنطقة II
43. المنطقة III
44. المنطقة IV
45. المنطقتان I وIII
46. المنطقتان I وIV

بالنسبة إلى التمارين 47–50، ارسم مخطط فن Venn وظلل المنطقة المناسبة لكل تمرين.

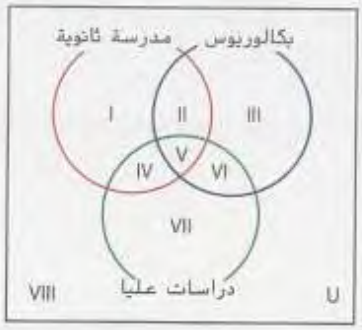
47. $A' \cap B$
48. $(A \cup B)'$
49. $(A' \cap B') \cup C$
50. $A \cap (B \cup C)'$

51. إذا كان $n(A) = 15$، $n(B) = 9$، $n(A \cap B) = 4$. فجد $n(A \cup B)$.
52. إذا كان $n(A) = 24$، $n(B) = 20$، $n(A \cap B) = 14$. فجد $n(A \cup B)$.

يستخدم الجدول ومخطط فن Venn التالي في التمرينات 53–56. يوضح الجدول أقل خمس ولايات في 2014 من حيث نسبة السكان الذين بلغوا مستوى محددًا من التعليم على الأقل. بالنسبة إلى كل سؤال، اكتب المنطقة في مخطط فن Venn التي تتضمن الولاية المذكورة.

شهادة الدراسات العليا	شهادة البكالوريوس	متخرج من مدرسة ثانوية
أركنساس	وست فرجينيا	تكساس
وست فرجينيا	أركنساس	ميسيسيبي
داكوتا الشمالية	ميسيسيبي	كاليفورنيا
لويزيانا	كنتاكي	كنتاكي
ميسيسيبي	لويزيانا	ألاباما

المصدر: ويكيبيديا



53. كنتاكي
54. ميسيسيبي
55. لويزيانا
56. أوهايو

9-4 استخدام المجموعات لحل المسائل

57. قبيل إحدى الانتخابات، شارك 250 ناخبًا في الاقتراع، صوت 155 لصالح المرشح A و140 لصالح المرشح B وصوت 120 لصالح كلا المرشحين.
   (a) كم عدد الذين لم يصوتوا لكلا المرشحين من ضمن من شملهم الاقتراع؟
   (b) كم عدد من صوتوا لصالح المرشح B؟

58. أجرى متخصص في السمع دراسة على فقدان السمع عند ترددات محددة بين مجموعة مرضى في إحدى دور الرعاية بالمسنين. من بين 94 مقيمًا خضعوا للاختبار، عانى 10 من فقدان السمع بدرجة كبيرة عند الترددات المنخفضة وليست المرتفعة وعانى 40 من فقدان السمع بدرجة كبيرة عند الترددات المرتفعة وليست المنخفضة، بينما 26 لم يظهروا أي فقدان في السمع بدرجة كبيرة على الإطلاق.
   (a) كم عدد المقيمين الذين عانوا من فقدان السمع عند الترددات المنخفضة والمرتفعة على حدٍ سواء؟
   (b) ما نسبة الذين يعانون من فقدان في السمع عند ترددات مرتفعة؟

59. شمل ثلاثة وخمسون متصلًا بمحطة راديو الجامعة عن الذي يستمعون إليه عادةً عند الذهاب إلى الكلية بالسيارة. من بين من طرح عليهم السؤال، 22 استمعوا إلى محطة راديو محلية و18 استمعوا إلى محطة راديو فضائية و33 استمعوا إلى موسيقى عبر الإنترنت و8 استمعوا إلى محطة راديو محلية ومحطة راديو فضائية و13 استمعوا إلى محطة راديو فضائية وموسيقى عبر الإنترنت و11 استمعوا إلى محطة راديو محلية وموسيقى عبر الإنترنت و6 استمعوا إلى الثلاثة جميعًا.
   (a) كم عدد من استمعوا إلى محطة راديو فضائية فقط؟
   (b) كم عدد من استمعوا إلى محطات راديو محلية وموسيقى عبر الإنترنت لكن لم يستمعوا إلى محطة راديو فضائية؟
   (c) كم عدد من لم يستمعوا إلى أي من تلك الأشياء؟

60. وجد مدير مكتبة الجامعة أنه قبل أربع ساعات من الإغلاق، اشترى 41 طالبًا كتابين دراسيين أو أكثر. من بين هؤلاء، دفع 4 فقط نقدًا واستخدم 5 قسيمة المساعدة المالية فقط واستخدم 5 بطاقة السحب الفوري فقط. استخدم سبعة بطاقة السحب الفوري وقسيمة المساعدة المالية من دون نقد؛ واستخدم ثلاثة النقد وبطاقة السحب الفوري من دون قسيمة المساعدة المالية. استخدم ستة عشر طالبًا إجمالًا بطاقة السحب الفوري في جزء من عملية الشراء على الأقل، بينما لم يستخدم 9 أيًا من أشكال الدفع هذه.
   (a) كم عدد الطلاب الذين استخدموا أشكال الدفع النقدي وبطاقة السحب الفوري وقسيمة المساعدة المالية جميعًا؟
   (b) هل استخدم عدد طلاب أكثر النقد أم قسائم المساعدة المالية؟
   (c) كم تبلغ النسبة المئوية للطلاب الذين لم يستخدموا قسيمة المساعدة المالية؟

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مراجعة التمارين يتبع

9-5 المجموعات غير المنتهية

61. جد حدًا عامًا للمجموعة {. . . ,−13, −11, −9, −7, −5}
62. وضّح أن المجموعة {. . . ,12, 24, 36, 48, 60} هي مجموعة غير منتهية.
63. وضح أن المجموعة في التمرين 62 قابلة للعد.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

9 اختبار على الوحدة

بالنسبة إلى التمارين 4-1. اكتب كل مجموعة بذكر العناصر.

1. المجموعة P هي مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية بين 90 و100.
2. المجموعة K هي مجموعة الحروف التي تتضمنها الكلمة *سلسبيل*.
3. $X = \{x | x \in N \text{ و } x < 80\}$
4. المجموعة J هي مجموعة اسماء الأشهر التي تبدأ بالحرف "ي".

بالنسبة إلى التمرينين 5 و6. اكتب كل مجموعة باستخدام رمز بناء المجموعة.

5. {12, 14, 16, 18}
6. {4, 8, 16, . . . 128}

بالنسبة إلى التمارين 11-7. حدد ما إذا كانت المجموعة منتهية أم غير منتهية.

7. $\{6x | x \in N \text{ و } x \text{ مضاعف } 6\}$
8. {a, b, c, . . ., s, t}
9. المجموعة V هي مجموعة أشخاص بشعر رائع.
10. اشرح لماذا المجموعة الواردة في التمرين 9 ليست محددة جيدًا. يجب كتابة إجابتك بحيث يفهمها الشخص الذي ليست لديه أدنى فكرة عن معنى "محددة جيدًا".
11. جد جميع المجموعات الجزئية وجميع المجموعات الجزئية الفعلية لمجموعة الولايات المتاخمة لكاليفورنيا. كيف تعرف عدد المجموعات الجزئية التي تبحث عنها؟

بالنسبة إلى التمارين 16-12. بفرض أن $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$ و $A = \{a, b, d, e, f\}$ و $B = \{a, g, i, j, k\}$ و $C = \{e, h, f\}$. *جد كل مما يلي.*

12. $(A \cap B) \cup C$
13. $(A \cup B)'$
14. $A - B$
15. $(A - B) - C$
16. ارسم مخطط فن *Venn* مستقلًا وظلله لكل مجموعة: $B - A$, $B' \cup A$, $A \cup B \cup C$
17. جد كلا ناتجي الضرب الديكارتيين اللذين يمكن تكوينهما باستخدام المجموعة الواردة في التمرين 11 والمجموعة C في التمارين 16-12.

بالنسبة إلى التمارين 20-18. ارسم مخطط فن Venn *لكل مجموعة.*

18. $A' \cap B$
19. $(A \cap B)'$
20. $(A' \cup B') \cap C$
21. إذا كان $n(A) = 1{,}500$ و $n(B) = 1{,}150$ و $n(A \cap B) = 350$. فجد $n(A \cup B)$.
22. طالب يذاكر للحصول على درجة الماجستير في إدارة الألعاب الرياضية يعمل على فرضية عن انتشار الألعاب الرياضية للنساء في الكليات منذ أن أمر القانون التاسع بمنح فرص مكافئة للنساء. قام بتجميع بيانات عن 119 كلية تمتلك فرق كرة قدم تنافس في دوري الجامعات لكرة القدم (الذي لا يزال الكثير من المشجعين يطلقون عليه القسم الأول) ووجد أن 69 منها لديها فريق جولف نسائي و63 منها لديها فريق هوكي الحقل و83 لديها فريق سباحة نسائي. ثمة 28 كلية لديها فرق حقل في جميع الألعاب الرياضية الثلاث. ستة وأربعون منها لديها فرق نسائية للجولف والسباحة و40 لديها فرق نسائية للسباحة وهوكي الحقل و47 منها لديها فرق نسائية للجولف وهوكي الحقل.
   (a) كم عدد الكليات التي لديها فريق جولف نسائي، لكن ليس لديها فريق سباحة أو هوكي الحقل نسائي؟
   (b) ما النسبة المئوية للفرق التي لديها رياضتان على الأقل من الألعاب الرياضية الثلاث؟
   (c) إذا اخترت إحدى المدارس الواردة في الدراسة عشوائيًا، ما النسبة المئوية لاحتمال ألا يكون لديها أي من الألعاب الرياضية الثلاث؟
23. جد حدًا عامًا للمجموعة {15, 30, 45, 60, 75, . . .}.
24. وضّح أن المجموعة {. . . , −4, −3, −2, −1} ∪ {1, 2, 3, 4, . . .} مجموعة غير منتهية عدية. (*إرشاد:* ثمة سؤالان منفصلان بالفعل بحاجة إلى إجابة!)

بالنسبة إلى التمارين 30-25. حدد ما إذا كانت كل عبارة صوابًا أم خطأ.

25. {s, e, s, a, m, e} تكافئ {s, a, m, e}
26. {4, 8, 12, 16, . . .} ⊆ {2, 4, 6, 8, . . .}
27. {15} ⊂ {3, 6, 9, 12, . . .}
28. 9 ∉ {2, 4, 5, 6, 10}
29. {a, e, i, o, u, y} ⊆ {a, e, i, o, u}
30. {12} ∈ {12, 24, 36, . . .}

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

الوحدة 9 المشاريع

1. اطلب من الطلاب في الصف الدراسي ملء هذا الاستبيان:

A. الذهاب إلى المدرسة بالسيارة: نعم _____ لا _____
B. العمر: أقل من 15 _____ 15 أو أكبر _____
C. يساعد أسرته في العمل: نعم _____ لا _____

ارسم مخطط فن *Venn*. ومن المعلومات أجب عن هذه الأسئلة:

(a) كم عدد الطلاب الذين لا يذهبون بالسيارة إلى المدرسة؟
(b) كم عدد الطلاب الذي يقل عمرهم عن 15 عامًا؟
(c) كم عدد الطلاب الذين يساعدون أسرهم في العمل؟
(d) كم عدد الطلاب الذي يقل عمرهم عن 15 عامًا ويساعدون أسرهم في العمل؟
(e) كم عدد الطلاب الذين يذهبون بالسيارة إلى المدرسة ولا يساعدون أسرهم في العمل؟
(b) كم عدد الطلاب الذين أعمارهم 15 عامًا أو أكبر ويساعدون أسرهم في العمل؟
(g) كم عدد الطلاب الذين لا يذهبون بالسيارة إلى المدرسة ويساعدون أسرهم في العمل وأقل من 15 عامًا؟

2. إذا تكونت لديك فكرة عن هذه الوحدة ككل، فستعرف أن عمليات المسح تلعب دورًا كبيرًا في طريقة استخدام مخططات فن *Venn* لتنظيم المعلومات. والآن حان الوقت لتصميم مسح خاص بك وحدك. يجب عليك جعل موضوع المسح شيئًا تجده مثيرًا للاهتمام وتصميم المسح بحيث يمكن تلخيص النتائج ودراستها باستخدام مخطط فن *Venn* بثلاث مجموعات. يمكنك إنجاز هذه المهمة بطرح ثلاثة أسئلة منفصلة أو بتصميم اقتراع من سؤال واحد حيث يمكن للمستجيبين اختيار أي من الإجابات أو جميعها أو لا شيء منها.

وبمجرد تصميم المسح الخاص بك وكتابته وإجرائه، قم بتنظيم النتائج باستخدام مخطط فن *Venn* ثم اكتب تقريرًا عن النتائج التي توصلت إليها. لا تقم بتضمين أعداد أولية فحسب—غالبًا ما يكمن الجزء الأهم من المسح في تلخيص معنى نتائج المسح وتفسيرها. ربما تريد وضع هذا الأمر الضروري في الحسبان عند تصميم المسح—من الصعب جدًا كتابة تفسير ذكي إذا كانت الأسئلة غير مترابطة تمامًا.

3. ربما تساءلت لماذا ذكرنا في الدرس 5 أن مجموعة الأعداد الحقيقية غير قابلة للعد. لكننا لم نقدم ما يدعم ذلك. الإجابة المختصرة هي أن إثبات تلك النتيجة عملية معقدة إلى حد ما. إنها ليست بتلك الصعوبة، لكنها عملية بارعة للغاية وتنطوي على نوع من حدة الذهن. الأخبار الجيدة هو أنه يمكنك العثور على الإثبات على عشرة آلاف صفحة ويب مختلفة تقريبًا بالبحث عن "حجة كانتور القطرية". ابحث عن الصفحة التي تصف حجة كانتور القطرية بالطريقة التي يمكنك فهمها ثم كون عرضًا توضيحيًا للزملاء لمساعدتهم على فهم لماذا تكون الأعداد الحقيقية غير قابلة للعد. تصديق *إضافي*: قم بتضمين مناقشة للحقيقة التي تفيد أن مجموعة الأعداد الحقيقية لها المجموعة الرئيسة نفسها التي تتضمنها الأعداد الحقيقية بين الصفر والواحد.

4. إذا كنت مهتمًا بأفكار عد المجموعات غير المنتهية بالفعل، فستجد إثارة أكثر مع هذا المشروع. تعرف إحدى أغرب المجموعات التي تم تقديمها وأكثرها جاذبية على الإطلاق باسم مجموعة كانتور. تبدأ بمجموعة تضم جميع الأعداد الحقيقية بين الصفر والواحد وتزيل تسلسل الأجزاء. قم بإجراء بحث عبر الإنترنت أو في المكتبة عن مجموعة كانتور وأجب عن الأسئلة التالية عنها:

(a) كيف يمكنك التأكد من وجود شيء ما على الأقل في مجموعة كانتور؟ (ستكتشف عند الوهلة الأولى أن المجموعة قد تبدو خالية.)
(b) كيف تعرف أن مجموعة كانتور ليست غير خالية فقط، لكنها غير منتهية كذلك؟
(c) هل مجموعة كانتور قابلة للعد أم غير قابلة للعد؟ كيف تعرف ذلك؟
(d) ما إجمالي طول جميع الفواصل التي يتم تجاهلها عند تعريف مجموعة كانتور؟ لماذا تلك النتيجة الصادمة؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الوحدة 10

المنطق والبرهان الرياضي

السابق

- استخدمت علاقات القطعة المستقيمة والزاوية.

الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:
  - اقتراح تخمينات وتجد أمثلة مضادة للعبارات.
  - استخدام التبرير الاستنتاجي لتصل إلى استنتاجات صحيحة.
  - كتابة إثباتات تتضمن نظريات بشأن القطعة المستقيمة والزاوية.

لماذا؟ ▲

- **العلم والطبيعة** يستخدم علماء الأحياء والعلماء الآخرون التبرير الاستقرائي والاستنتاجي لاتخاذ قرارات واستنتاج خلاصات منطقية عن الجماعات الأحيائية للحيوان.

Chapter opener from Geometry Chapter 02 © 2014 حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الاستعداد للوحدة

تحديد مدى الاستعداد | لديك خياران للتحقق من المهارات المطلوبة.

1 خيار الكتاب المدرسي

أجب عن أسئلة التدريب السريع التالية. وعد إلى المراجعة السريعة للمساعدة.

مراجعة سريعة

جد قيمة كل تعبير لقيمة x المعطاة.

1. $4x + 7; x = 6$
2. $(x - 2)180; x = 8$
3. $5x^2 - 3x; x = 2$
4. $\frac{x(x-3)}{2}; x = 5$
5. $x + (x + 1) + (x + 2); x = 3$

اكتب كل تعبير لفظي في صورة تعبير جبري.

6. ثمانية مطروحة من خمسة أمثال عددٍ ما
7. ثلاثة زائد مربع عدد

حُل كل معادلة فيما يلي.

8. $8x - 10 = 6x$
9. $18 + 7x = 10x + 39$
10. $3(11x - 7) = 13x + 25$
11. $3x + 8 = \frac{1}{2}x + 35$
12. $\frac{2}{3}x + 1 = 5 - 2x$
13. **ملابس** اشترت نبيلة 4 قمصان من مركز التسوق بسعر AED 52. اكتب معادلة لإيجاد متوسط سعر القميص الواحد وحلها.

راجع الشكل في المثال 3.

14. حدد زوجًا من الزوايا المتقابلة بالرأس التي تبدو منفرجة.
15. حدد زوجًا من الزوايا المتقابلة التي تبدو متممة.
16. حدّد زوجًا خطيًا.
17. إذا كان $m\angle DXB = 116$ و $m\angle EXA = 3x + 2$. فجد x.
18. إذا كان $m\angle BXC = 90$ و $m\angle CXD = 6x - 13$ و $m\angle DXE = 10x + 7$. فجد x.

تدريب سريع

مثال 1

جد قيمة $x^2 - 2x + 11$ حيث $x = 6$.

$x^2 - 2x + 11$	التعبير الأصلي
$= (6)^2 - 2(6) + 11$	عوّض بـ 6 عن x
$= 36 - 2(6) + 11$	جد قيمة الأس
$= 36 - 12 + 11$	اضرب
$= 35$	بسّط

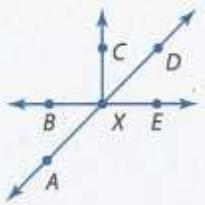
مثال 2

حل المعادلة $36x - 14 = 16x + 58$.

$36x - 14 = 16x + 58$	المعادلة الأصلية
$36x - 14 - 16x = 16x + 58 - 16x$	اطرح $16x$ من كل طرف
$20x - 14 = 58$	بسّط
$20x - 14 + 14 = 58 + 14$	أضف 14 إلى كل طرف
$20x = 72$	بسّط
$\frac{20x}{20} = \frac{72}{20}$	اقسم كل طرف على 20
$x = 3.6$	بسّط

مثال 3

إذا كان $m\angle BXA = 3x + 5$ و $m\angle DXE = 56$. فجد x.



$m\angle BXA = m\angle DXE$	متقابلتان بالرأس $\measuredangle$ تكونان $\cong$
$3x + 5 = 56$	التعويض
$3x = 51$	طرح 5 من كل طرف
$x = 17$	قسمة كل طرف على 3

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

البدء في هذه الوحدة

ستتعلم عدة مفاهيم ومهارات ومفردات جديدة أثناء دراستك لهذه الوحدة. ولكي تستعد، حدّد المفردات المهمّة ونظّم مواردك. يمكنك الرجوع إلى وحدات سابقة لمراجعة المهارات المطلوبة.

مطويات منظّم الدراسة

الاستنتاج والإثبات قم بإنشاء هذه المطوية لمساعدتك على تنظيم ملاحظات الوحدة عن المنطق والاستنتاج والإثبات. ابدأ بورقة واحدة من دفتر الملاحظات.

1 **اطو** الورقة بالطول وصولًا إلى الفتحات.

2 **قُص** خمس بطاقات في الورقة العلوية.

3 **قم** بتسمية البطاقات كما هو موضّح.

المفردات الجديدة

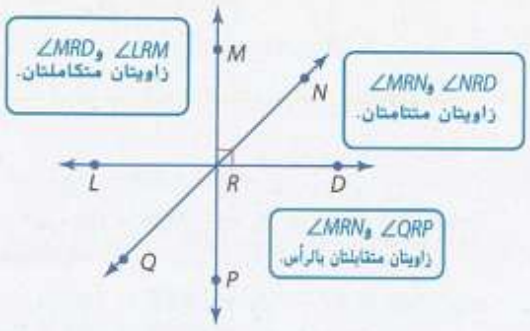
inductive reasoning	التبرير الاستقرائي
conjecture	التخمين
counterexample	المثال المضاد
negation	النفي
if-then statement	عبارة إذا كان – فإن
hypothesis	الفرضية
conclusion	الاستنتاج
converse	العكس
inverse	المعكوس
postulate	المسلّمة
proof	الإثبات
theorem	النظرية

مراجعة المفردات

الزاويتان المتتامتان زاويتان مجموع قياسهما يساوي 90

الزاويتان المتكاملتان زاويتان مجموع قياسهما يساوي 180

الزاويتان المتقابلتان بالرأس زاويتان غير متجاورتين برأس مشترك ناتجتان عن مستقيمين متقاطعين



McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

1–10 التبرير الاستقرائي والتخمين

السابق

- لقد استخدمت البيانات للبحث عن أنماط وبناء توقعات.

الحالي

1 صياغة تخمينات مبنية على تبرير استقرائي

2 ايجاد أمثلة مضادة.

لماذا؟

- يُجري أحد المحللين بحثًا تسويقيًا للإجابة عن أسئلة محددة حول المنتجات. فمثلًا، قد تستعين الشركة التي تصنّع ألعاب الفيديو بمجموعة بؤرية من المُختبرين لممارسة لعبة فيديو لم يتم إطلاقها. ويتم تضمين التبرير الاستقرائي في عملية استخدام الأنماط لتحليل فعالية المنتج.

المفردات الجديدة

التبرير الاستقرائي inductive reasoning
التخمين conjecture
المثال المضاد counterexample

1 التخمين

التبرير الاستقرائي هو التبرير الذي يستخدم عددًا من أمثلة محددة للخلوص إلى استنتاج. فعندما تفترض استمرار نمط ملحوظ. فإنك تستخدم التبرير الاستقرائي. وتُسمى عبارة الاستنتاج التي يتم التوصل إليها باستخدام التبرير الاستقرائي **التخمين**.

مثال 1 الأنماط والتخمين

اكتب تخمينًا يصف النمط في كل متتالية. ثم استخدم التخمين الذي وضعته لإيجاد العنصر التالي في المتتالية.

a. مواعيد عرض الأفلام: . . . ,12:15 P.M., 11:00 A.M., 9:45 A.M., 8:30 A.M.

الخطوة 1 البحث عن نمط.

. . . 12:15 P.M., 11:00 A.M., 9:45 A.M., 8:30 A.M.

+1 hr 15 min +1 hr 15 min +1 hr 15 min

الخطوة 2 التخمين.

يزيد وقت العرض عن وقت العرض السابق بمعدل ساعة وخمس عشرة دقيقة. سيكون موعد العرض التالي 1:30 P.M وأ 1:15 + 12.15 P.M.

b.

... 40 28 18 10 4

الخطوة 1 40, 28, 18, 10, 4

+12 +10 +8 +6

ستزيد الأعداد بمعدل 6 و8 و10و12.

الخطوة 2 سيزيد الشكل التالي بمعدل 2 + 12 أو 14 قطعة مستقيمة. ومن ثم سيكون بالشكل التالي 14 + 40 أو 54 قطعة مستقيمة.

تحقق ارسم الشكل التالي للتحقق من تخمينك ✓

54

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

نصيحة دراسية

الأنماط الشكلية تُسمى الأنماط التي تشمل سلسلة من الأشكال. كالموجودة في المثال 1b والتمرين الموجه 1C. *الأنماط الشكلية*.

تمرين موجّه

اكتب تخمينًا يصف النمط في كل متتالية. ثم استخدم التخمين الذي وضعته لإيجاد الحد التالي في المتتالية.

1A. زيارات المتتالية: ديسمبر، مايو، أكتوبر، مارس، . . .

1B. 10, 4, −2, −8, . . .

1C.

لوضع بعض التخمينات الجبرية والهندسية، ستحتاج إلى تقديم أمثلة.

مثال 2 التخمينات الجبرية والهندسية

ضع تخمينًا حول كل قيمة أو علاقة هندسية. اذكر بعض الأمثلة التي تدعم تخمينك أو ارسمها.

a. مجموع عددَين فرديَّين

الخطوة 1 اذكر أمثلة.

$1 + 3 = 4$ $\quad 1 + 5 = 6$ $\quad 3 + 5 = 8$ $\quad 7 + 9 = 16$

الخطوة 2 البحث عن نمط.

لاحظ أن النواتج 4 و6 و8 و16 كلها أعداد زوجية.

الخطوة 3 التخمين.

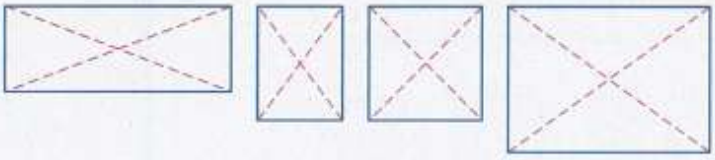
مجموع عددَين فرديَّين يكون عددًا زوجيًا.

نصيحة دراسية

الحجج إن الأمثلة التي تدعم التخمين غير كافية لإثبات أن التخمين صائب. لإثبات أن التخمين الجبري أو الهندسي صائب، يلزمك تقديم حجة منطقية تسمى الإثبات. ستتعرف على المزيد عن الإثباتات في الدرس 4-5.

b. القطعتان المستقيمتان اللتان تربطان بين الرؤوس المتقابلة للمستطيل

الخطوة 1



الخطوة 2 لاحظ أن القطعتَين المستقيمتَين اللتَين تربطان بين الرؤوس المتقابلة للمستطيل تبدو بالقياس نفسه. استخدم مسطرة أو بوصلة للتأكد من ذلك.

الخطوة 3 التخمين: القطعتان المستقيمتان اللتان تربطان بين الرؤوس المتقابلة للمستطيل متطابقتان.

تمرين موجّه

2A. مجموع عددَين زوجيَّين

2B. العلاقة بين AB وEF، إذا كانت $AB = CD$ و$CD = EF$

2C. مجموع مربعَي عددَين طبيعيَّين متتاليين

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

يتم وضع التخمينات من الحياة اليومية غالبًا استنادًا إلى البيانات التي يتم جمعها حول موضوع محدد محل اهتمام.

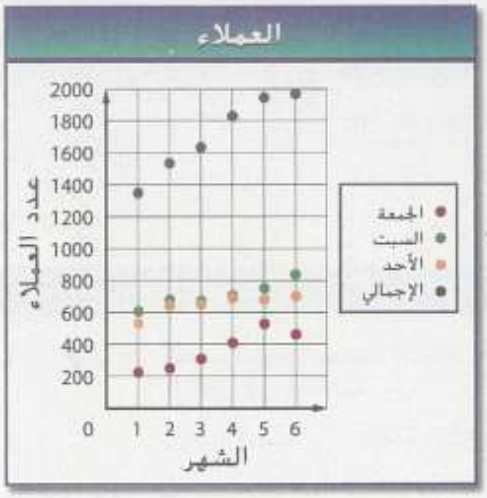
مثال 3 من الحياة اليومية التخمين من خلال البيانات

الأعمال **قام صاحب أحد المقاهي بجمع بيانات حول عدد زبائن المقهى أيام الجمعة والسبت والأحد لمدة 6 أشهر ليحدد ما إذا كان يحتاج إلى زيادة عدد العاملين لديه في هذه الأيام أم لا. فيما يلي عرض للبيانات التي قام بجمعها.**

عدد العملاء						
اليوم	الشهر 1	الشهر 2	الشهر 3	الشهر 4	الشهر 5	الشهر 6
الجمعة	225	255	321	406	540	450
السبت	603	658	652	712	746	832
الأحد	552	635	642	692	685	705
الإجمالي	1380	1548	1615	1810	1971	1987

a. أنشئ تمثيلًا بيانيًّا إحصائيًّا يوضح البيانات بأفضل شكل.

نظرًا لأنك تريد البحث عن نمط يستمر مع مرور الوقت، فاستخدم مخطط انتشار لتوضيح البيانات. سمّ المحور الأفقي الأشهر والمحور الرأسي عدد العملاء. ارسم كل مجموعة من البيانات باستخدام لون مختلف. وأضِف تعليقًا تفسيريًّا.



b. ضع تخمينًا استنادًا إلى البيانات، واشرح كيف يدعم تمثيلك البياني هذا التخمين.

ابحث عن أنماط في البيانات. يزيد عدد العملاء كل يوم عادة بمعدل شهري، ويزيد إجمالي عدد العملاء كل شهر.

تدعم بيانات المسح التخميني الذي يشير إلى زيادة كمية العمل في أيام الجمعة والسبت والأحد. لذلك يجب على صاحب المقهى تعيين المزيد من العاملين للعمل في هذه الأيام.

تمرين موجّه

3. **الطوابع البريدية** يعرض الجدول الموجود على اليسار سعر الطوابع البريدية للأعوام من 1982 إلى 2009.

السنة	السعر (بالفلس)
1982	20
1987	22
1992	29
1997	32
2002	37
2007	41
2009	44

A. أنشئ تمثيلًا بيانيًّا إحصائيًّا يوضح البيانات بأفضل شكل.

B. توقع سعر الطوابع البريدية في عام 2015 وفقًا للتمثيل البياني.

C. هل من المنطقي أن يستمر نمط البيانات مع مرور الوقت؟ إذا لم يكن كذلك، فكيف سيتغير؟ اشرح تبريرك.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

2 إيجاد الأمثلة المضادة لإثبات أن التخمين صائب في كل الحالات، يلزمك إثباته. لكن لا يحتاج إثبات أن التخمين ليس صائبًا إلى إيجاد مثال واحد خاطئ. ويسمى هذا المثال الخاطئ **المثال المضاد**. ويمكن أن يكون عددًا أو رسمًا أو عبارة ما.

ربط المفردات

المثال المضاد

الاستخدام اليومي تعني *الصفة مضاد العكس*.

الاستخدام في الرياضيات المثال المضاد هو عكس المثال.

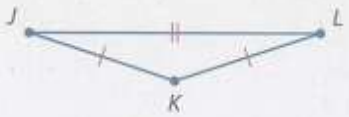
مثال 4 إيجاد الأمثلة المضادة

جد مثالًا مضادًا لإثبات أن كل تخمين خاطئ.

a. إذا كان n عددًا حقيقيًّا، فإن $n^2 > n$

عندما n تساوي 1، يكون التخمين خاطئًا، حيث إن $1^2 \not> 1$.

b. إذا كان $JK = KL$، فإن K تمثل نقطة المنتصف لـ $\overline{JL}$.



عندما تكون النقاط J وK وL ليست على استقامة واحدة، يكون التخمين خاطئًا. في الشكل $JK = KL$، لكن K لا تمثل نقطة المنتصف للقطعة $\overline{JL}$.

تمرين موجّه

4A. إذا كان n عددًا حقيقيًا، فإن $-n$ يكون عددًا سالبًا.

4B. إذا كانت $\angle DBE \cong \angle ABC$، فإن الزاويتين $\angle ABC$ و$\angle DBE$ متقابلتان بالرأس.

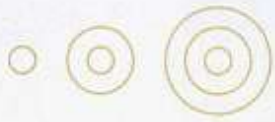
تحقق من فهمك

مثال 1 **اكتب تخمينًا يصف النمط في كل متتالية. ثم استخدم التخمين الذي وضعته لإيجاد الحد التالي في متتالية.**

1. التكاليف: AED 4.50, AED 6.75, AED 9.00, . . .

2. أوقات المواعيد: 10:15 A.M., 11:00 A.M., 11:45 A.M., . . .

3.

4. 

5. 3, 3, 6, 9, 15, . . .

6. 2, 6, 14, 30, 62, . . .

مثال 2 **ضع تخمينًا حول كل قيمة أو علاقة هندسية.**

7. حاصل ضرب عددين زوجيين

8. العلاقة بين a وb إذا كان $a + b = 0$

9. العلاقة بين مجموعة من النقاط في مستوى ما تقع على مسافة واحدة من النقطة A

10. العلاقة بين $\overline{AP}$ و$\overline{PB}$ إذا كانت M نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة $\overline{AB}$ وP نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة $\overline{AM}$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

مثال 3

11. الهواتف الخلوية راجع جدول عدد الاشتراكات اللاسلكية في الولايات المتحدة وفقًا للسنة.

a. أنشئ تمثيلًا بيانيًا يعرض الاستخدام اللاسلكي في الولايات المتحدة بداية من 2002 إلى 2007.

b. ضع تخمينًا حول الاستخدام اللاسلكي في الولايات المتحدة في عام 2012.

الاشتراك اللاسلكي في الولايات المتحدة	
السنة	المشتركون (بالملايين)
2002	140.8
2003	158.7
2004	182.1
2005	207.9
2006	233.0
2007	255.4

مثال 4

النقد جد مثالًا مضادًا لإثبات أن كل تخمين خاطئ.

12. إذا كانت الزاويتان $\angle A$ و$\angle B$ متتامتين، فإنّ بينهما ضلعًا مشتركًا.

13. إذا قطع شعاع ما قطعة مستقيمة في نقطة المنتصف، فإن الشعاع يكون عموديًا على القطعة المستقيمة.

التمرين وحل المسائل

مثال 1

اكتب تخمينًا يصف النمط في كل متتالية. ثم استخدم التخمين الذي وضعته لإيجاد العنصر التالي في المتتالية.

14. 0, 2, 4, 6, 8

15. 3, 6, 9, 12, 15

16. 4, 8, 12, 16, 20

17. 2, 22, 222, 2222

18. 1, 4, 9, 16

19. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$

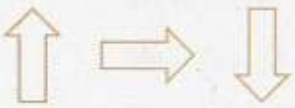
20. مواعيد الوصول: 10:00 A.M.، 12:30 P.M.، 3:00 P.M.، . . .

21. النسبة المئوية للرطوبة: 100%، 93%، 86%، . . .

22. أيام التمارين: الأحد، الثلاثاء، الخميس، . . .

23. اجتماعات النادي: يناير، مارس، مايو، . . .

24.



25.

26.

27.

28. اللياقة بدأ عمر التدريب مع فريق الركض قبل خمسة أسابيع. وفي الأسبوع الأول، كان يقطع مسافة 0.5 km في كل تدريب. وفي الأسابيع الثلاثة التالية، كان يقطع المسافات 0.75 km و1 km و1.25 km في كل تدريب. فإذا استمر في هذا النمط، فما عدد الكيلومترات التي سيقطعها في كل تدريب خلال الأسبوع السابع؟

29. الحفظ عندما يكون ثمة نقص في المياه، تحدد بعض البلديات كمية المياه المسموح لكل أسرة باستهلاكها. وتقع معظم المدن التي تشهد فرض القيود على استخدام المياه في الأجزاء الغربية والجنوبية من الولايات المتحدة. ضع تخمينًا حول سبب فرض القيود على استخدام المياه في هذه المناطق.

30. التطوع بدأت هند بجمع الأطعمة المعلبة لملجأ للمشردين في منطقتها كل يوم لمدة أسبوع واحد. فجمعت في اليوم الأول 7 معلبات من الأطعمة. وفي اليوم الثاني، جمعت 8 معلبات. وفي اليوم الثالث، جمعت 10 معلبات. وفي اليوم الرابع، جمعت 13 معلبة. فإذا أرادت هند منح الملجأ 100 معلبة طعام على الأقل واستمرت بهذا النمط لجمع المعلبات فهل ستكون قد حققت هدفها؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 2 **ضع تخمينًا حول كل قيمة أو علاقة هندسية.**

31 حاصل ضرب عددين فرديَّين

32. حاصل ضرب اثنين في عدد ما، زائد واحد

33. العلاقة بين a وc إذا كانت $ab = bc$، $b \neq 0$

34. العلاقة بين a وb إذا كانت $ab = 1$

35. العلاقة بين $\overline{AB}$ ومجموعة النقاط التي تقع على مسافة واحدة من A وB

36. العلاقة بين زوايا مثلث جميع أضلاعه متطابقة

37. العلاقة بين مساحتي مربع طول ضلعه x ومستطيل طول ضلعيه x و$2x$

38. العلاقة بين حجم منشور وهرم لهما القاعدة نفسها وارتفاعاهما متساويان

مثال 3 **39. ألعاب رياضية** راجع جدول الأمريكيين الذين تزيد أعمارهم عن 7 سنوات ويلعبون الهوكي

السنة	عدد المشاركين (بالملايين)
2000	1.9
2002	2.1
2004	2.4
2006	2.6

a. أنشئ تمثيلًا بيانيًا إحصائيًا يوضح البيانات بأفضل شكل.

b. ضع تخمينًا استنادًا إلى البيانات. واشرح كيف يدعم تمثيلك البياني هذا التخمين.

مثال 4 **النقد حدّد ما إذا كان كل تخمين مما يلي *صائبًا* أم *خاطئًا*. اذكر مثالًا مضادًا لأيّ تخمين خاطئ.**

40. إذا كان n عددًا أوليًا، فإن $n + 1$ ليس عددًا أوليًا.

41. إذا كان x عددًا صحيحًا، فإن $-x$ عدد موجب.

42. إذا كانت الزاويتان $\angle 2$ و$\angle 3$ متتامتين، فإن $\angle 2$ و$\angle 3$ تشكلان زوجًا خطيًا.

43. إذا كان لديك ثلاث نقاط A وB وC، فإن A وB وC ليست على استقامة واحدة.

44. في $\triangle ABC$، إذا كان $(AC)^2 + (BC)^2 = (AB)^2$، فإن $\triangle ABC$ قائم الزاوية.

45. إذا كانت مساحة مستطيل ما $20\ m^2$، فإن الطول يساوي 10 m والعرض 2 m.

الأعداد الشكلية تُسمى الأعداد التي يمكن تمثيلها بنقاط متساوية البعد ومُرتَّبة لتكوين شكل هندسي. الأعداد الشكلية بالنسبة إلى كل نمط شكلي أدناه.

a. اكتب الأعداد الأربعة الأولى الممثَّلة.

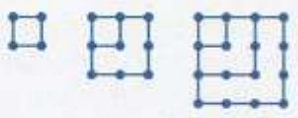
b. اكتب تخمينًا يصف النمط في المتتالية.

c. اشرح كيف يظهر هذا النمط العددي في متتالية الأشكال.

d. جِد العددين التاليين، وارسم الشكلين التاليين.

46.

47.



48.

49.

50. يمكن تمثيل متتالية الأعداد الفردية، . . . ,7 ,5 ,3 ,1 متتالية للأعداد الشكلية كذلك. استخدم نمطًا شكليًا لتمثيل هذا المتتالية.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

51. **تخمين جولدباخ** ينص تخمين جولدباخ على أنه يمكن كتابة كل عدد زوجي أكبر من 2 في صورة مجموع عددين أوليين. على سبيل المثال، $4 = 2 + 2$ و$6 = 3 + 3$ و$8 = 3 + 5$

a. أثبت أن التخمين صائب بالنسبة إلى الأعداد الزوجية من 10 إلى 20.

b. بالنسبة إلى التخمين *يمكن كتابة جميع الأعداد الفردية الأكبر من 2 كمجموع عددين أوليين*، هل التخمين *صائب أم خاطئ*؟ اذكر مثالًا مضادًا إذا كان التخمين خاطئًا.

52. **القطع المستقيمة** تشكل النقطتان اللتان على استقامة واحدة قطعة مستقيمة كما هو موضح بالنسبة إلى $\overline{AB}$. إذا أُضيفت نقطة على استقامة واحدة إلى $\overline{AB}$، فستشكل النقاط الثلاث التي على استقامة واحدة ثلاث قطع مستقيمة.

a. كم عدد القطع المستقيمة المختلفة التي تتكوّن من أربع نقاط على استقامة واحدة؟ ومن خمس نقاط على استقامة واحدة؟

b. ضع تخمينًا حول عدد القطع المستقيمة المختلفة التي تكونت من n من نقاط على استقامة واحدة.

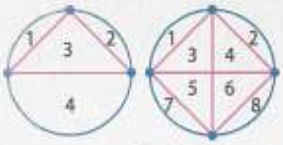
c. اختبر تخمينك من خلال إيجاد عدد القطع المستقيمة المختلفة التي تتكوّن من ست نقاط.

53. **الأدوات** باستخدام برنامج الهندسة الديناميكية، قامت نورا بحساب المحيط P والمساحة A لشكل سداسي منتظم طول ضلعه وحدتان. يسرد الجدول التغيّر الذي طرأ على المحيط والمساحة بعد إجراء ثلاث مضاعفات لطول الضلع هذا. حلل الأنماط الموجودة في الجدول. ثم ضع تخمينًا للتأثيرات في محيط شكل سداسي منتظم ومساحته عند مضاعفة طول ضلعه. اشرح.

الضلع (وحدة)	P (وحدة)	A (وحدة مربعة)
2	12	$6\sqrt{3}$
4	24	$24\sqrt{3}$
8	48	$96\sqrt{3}$
16	96	$384\sqrt{3}$

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

54. **تحفيز** إذا قمت برسم نقاط على دائرة وتوصيل كل زوج من النقاط، فستنقسم الدائرة إلى مناطق. على سبيل المثال، تشكل النقطتان منطقتين، والثلاث نقاط أربع مناطق، والأربع نقاط ثماني مناطق.



a. ضع تخمينًا حول العلاقة بين عدد النقاط الموجودة على الدائرة وعدد المناطق التي تتشكل داخلها.

b. هل يظل تخمينك صائبًا عند رسم ست نقاط؟ ادعم إجابتك برسم تخطيطي.

55. **تحليل الخطأ** يتناقش طارق وقاسم حول الأعداد الأولية. فيقول طارق إن جميع الأعداد الأولية فردية. ولا يتفق قاسم مع التخمين ويقول إن الأعداد الأولية ليست كلها فردية. فهل أحدهما على صواب؟ اشرح.

56. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب تسلسل أعداد يمكن إنشاؤه بنمطين مختلفين. اشرح نمطَيك.

57. **التبرير** فكر في التخمين *إذا وقعت نقطتان على مسافة واحدة من نقطة ثالثة، فإن النقاط الثلاث تكون معًا على استقامة واحدة*. هل التخمين *صائب أم خاطئ*؟ وإذا كان خاطئًا، فاذكر مثالًا مضادًا.

58. **الكتابة في الرياضيات** افترض أنك تجري مسحًا ما. اختر موضوعًا واكتب ثلاثة أسئلة يمكنك تضمينها في المسح. كيف تستخدم التبرير الاستقرائي من خلال الإجابات؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

59. انظر إلى النمط أدناه.

إذا استمر النمط، ماذا سيكون الشكل التالي؟

A

C

B

D

60. إجابة شبكية ما قيمة التعبير أدناه إذا كان $a = 10$ و $b = 1$؟

$$2b + ab \div (a + b)$$

61. الجبر قام أحد طلاب الكيمياء بخلط محلول كبريتات النحاس بتركيز 30% مع محلول كبريتات النحاس بتركيز 40% للحصول على 100 mL من محلول كبريتات النحاس بتركيز 32%. فما مقدار محلول كبريتات النحاس بتركيز 30% الذي استخدمه الطالب في الخليط؟

F 90 mL

G 80 mL

H 60 mL

J 20 mL

62. اختبار الكفاءة الدراسية/اختبار القبول للكليات الأمريكية أي مما يلي يساوي $2x$؟

A 50°

B 78°

C 155°

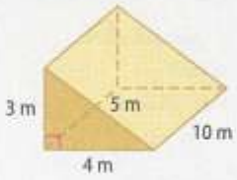
D 310°

E 360°

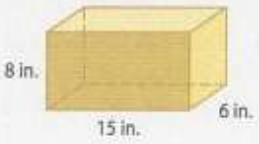
مراجعة شاملة

جد مساحة سطح كل مجسم وحجمه.

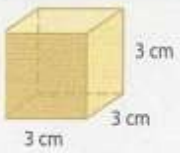
63.



64.



65.



جد محيط $\triangle ABC$ مع التقريب إلى أقرب جزء من مئة، دلالة إحداثيات رؤوسه.

66. $A(1, 6), B(1, 2), C(3, 2)$

67. $A(-3, 2), B(2, -9), C(0, -10)$

68. الجبر قياسا زاويتين متتامتين هما $16z - 9$ و $4z + 3$. جد قياسَي الزاويتين.

69. الأعلام يظهر علم ولاية وايومنغ على اليسار. سمّ المصطلح الهندسي الذي يمثله هذا العلم: نقطة أم مستقيم أم مستوى.

70. الجبر جد قيمة $5|x + y| - 3|2 - z|$ إذا كان $x = 3$ و $y = -4$ و $z = -5$

مراجعة المهارات

الجبر حدد قيَم مجموعة التعويض التي تجعل كل متباينة صائبة.

71. $x - 3 > 12$
$\{6, 10, 14, 18\}$

72. $6 + x > 9$
$\{8, 6, 4, 2\}$

73. $2x - 4 > 10$
$\{5, 6, 7, 8\}$

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

10-2 المنطق

السابق
- قمت بإيجاد أمثلة مضادة للتخمينات الخاطئة.

الحالي
1. تحديد قيم الصواب للنفي ولأدوات الربط «و» والفصل «أو».
2. تمثيل أدوات الربط «و» والفصل «أو» بأشكال *Venn*.

لماذا؟
- تعمل العديد من الدارات الكهربائية من خلال تقييم سلسلة من الاختبارات التي قد تكون صائبة أو خاطئة. على سبيل المثال، يمكن التحكم في مصباح منفرد باستخدام مفتاحين مختلفين متصلين بدائرة. يحدد اتجاها كلا المفتاحين، إما إلى أعلى أو إلى أسفل، ما إذا كان المصباح قيد التشغيل أم متوقفًا.

المفردات الجديدة
- العبارة statement
- قيمة الصواب truth value
- النفي negation
- عبارة مركبة compound statement
- الربط «و» conjunction
- الفصل disjunction
- جدول الصواب

1 تحديد قيم الصواب

العبارة عبارة عن جملة قد تكون صائبة أو خاطئة. قد تكون **قيمة الصواب** للعبارة إما صائبة (T) أو خاطئة (F). يتم تمثيل العبارات غالبًا باستخدام حرف مثل p أو q.

p: **المستطيل عبارة عن شكل رباعي.** قيمة الصواب: T

يتضمن **نفي** العبارة المعنى المضاد وقيمة صواب عكسية. على سبيل المثال، نفي العبارة السابقة هو نفي p أو $\sim p$.

$\sim p$: **المستطيل** ليس **شكلًا رباعيًا.** قيمة الصواب: F

تكوّن عبارتان أو أكثر يربط بينهما و أو *أو* **عبارةً مركبةً**. يُطلق على العبارة المركبة باستخدام **و** **عبارة ربط**. تكون عبارة الربط صائبة فقط إذا كان كل من العبارتين المكونتين لها صائبًا.

p: **المستطيل شكل رباعي.** قيمة الصواب: T

q: **المستطيل مضلعًا محدبًا.** قيمة الصواب: T

p وq: **المستطيل شكل رباعي،** وهو **مضلع محدب.**

بما أن كلًا من p و q صائبة، فإن عبارة الربط p وq. ونكتب كذلك بالصيغة $p \wedge q$. صائبة.

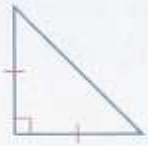
مثال 1 قيم الصواب لعبارات الربط ∧

استخدم العبارات التالية لكتابة عبارة مركبة. ثم جد قيمة الصواب الخاصة بها. اشرح تبريرك.

p: الشكل مثلثٌ.

q: الشكل به ضلعان متطابقان.

r: الشكل به ثلاث زوايا حادة.



a. $p \wedge r$

$p \wedge r$: الشكل مثلث، وبه ثلاث زوايا حادة.

مع أن العبارة p صحيحة، فإن العبارة r خاطئة. ومن ثم تكون العبارة p والعبارة r خاطئتين.

b. $q \wedge \sim r$

$q \wedge \sim r$: الشكل به ضلعان متطابقان، وليس به ثلاث زوايا حادة.

كلتا العبارتين q و$\sim r$ صائبتان. ومن ثم تكون $q \wedge \sim r$ صائبة.

تمرين موجّه

1A. $p \wedge q$

1B. ليس p وليس r

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education.

تُسمى العبارة المركبة التي تستخدم *أو* **عبارة فصل**.

p: **يدرس مالك الهندسة.**

q: **يدرس مالك الكيمياء.**

p أو *q*: **يدرس مالك الهندسة.** أو **يدرس مالك الكيمياء.**

يكون الفصل صائبًا إذا كانت إحدى العبارتين على الأقل صائبة. إذا كان مالك يدرس الهندسة أو الكيمياء أو كلتا المادتين، فإن عبارة الفصل p أو q. وتُكتب أيضًا بالصيغة $p \vee q$، صائبة. إذا لم يدرس مالك الهندسة ولا الكيمياء، فإن العبارة p أو q خاطئة.

مثال 2 قيم الصواب لعبارات الفصل ∨

استخدم العبارات التالية لكتابة عبارة مركبة لكل عبارة فصل. ثم جد قيمة الصواب الخاصة بها. اشرح تبريرك.

p: **يناير شهر في فصل الخريف.**

q: **يناير 30 يومًا فقط.**

r: **1 يناير هو اليوم الأول من العام الجديد.**

a. $r \vee q$

q أو *r*، يناير 30 يومًا فقط، أو 1 يناير هو اليوم الأول من العام الجديد.

q أو *r* صائبة لأن *r* صائبة. لا يهم أن العبارة *q* خاطئة.

b. $p \vee q$

q ∨ *p*، يناير شهر في فصل الخريف، أو يناير 30 يومًا فقط.

بما أن كلًا من *p* و *q* خاطئة، فإن *q* ∨ *p* خاطئة.

c. $\sim p \vee r$

$r \vee \sim p$، يناير *ليس* شهر في فصل الخريف، أو 1 يناير هو اليوم الأول من العام الجديد.

نفي *p* أو *r* صائبة، لأن نفي *p* صائبة و*r* صائبة.

انتبه!

النفي وكما أنّ عكس العدد الصحيح ليس سالبًا دائمًا، فإن نفي العبارة ليس خاطئًا دائمًا. يأخذ نفي العبارة قيمة الصواب المضادة للعبارة الأصلية.

تمرين موجّه

2A. *r* أو *p*

2B. $q \vee \sim r$

2C. $p \vee \sim q$

ملخص المفاهيم النفي والربط والفصل

العبارة	التعبير اللفظي	الرموز
النفي	عبارة تتضمن المعنى المضاد وقيمة الصواب للعبارة الأصلية	$\sim p$، تُقرأ نفي *p* أو ليس *p*
الربط	عبارة مركبة تتكون بإقران عبارتين أو أكثر باستخدام أداة العطف و	$p \wedge q$، تُقرأ *p* و*q*
الفصل	عبارة مركبة تكونت عن طريق الجمع بين عبارتين أو أكثر باستخدام *أو*	$p \vee q$، تُقرأ *p* أو *q*

ملاحظة: اذا كتبت العبارة المركبة باستخدام الأحرف العربية (و ، أو) فإنها تقرأ من اليمين. واذا كتبت العبارة المركبة باستخدام الرموز الرياضية (∧، ∨) فإنها تقرأ من اليسار.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

تتمثل إحدى الطرق المناسبة لتنظيم قيم الصواب للعبارات في استخدام **جداول الصواب**. ويمكن استخدام جداول الصواب لتحديد قيم الصواب لعبارات النفي والعبارات المركبة.

ملاحظة: تقرأ جداول الصواب من اليسار إلى اليمين

النفي	
p	$\sim p$
T	F
F	T

الربط		
p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

الفصل		
p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

نصيحة دراسية

جداول الصواب من السهل تذكر جداول الصواب الخاصة بعبارة الربط والفصل إذا تذكرت ما يلي.

- تكون عبارة الربط صائبة فقط عندما تكون كلتا العبارتين صائبتين.
- تكون عبارة الفصل صائبة فقط عندما تكون كلتا العبارتين خاطئتين.

يمكنك استخدام قيم الصواب لعبارة النفي وعبارة الربط وعبارة الفصل لإنشاء جداول صواب للعبارات المركبة الأكثر تعقيدًا.

مثال 3 إنشاء جداول الصواب

أنشئ جدول صواب للعبارة $\sim p \vee q$.

❶ أنشئ أعمدة بها عناوين تتضمن كل عبارة أصلية وأي عبارات نفي لهذه العبارات والعبارة المركبة نفسها.

❹ استخدم قيم الصواب لكل جزء من العبارة المركبة لتحديد قيمة الصواب للعبارة.

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

❷ اذكر التوافيق المحتملة لقيم الصواب.

❸ استخدم قيم الصواب لـ p لتحديد قيم الصواب لنفيها.

تمرين موجّه

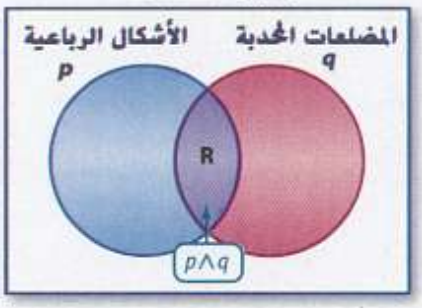
3. أنشئ جدول الصواب للعبارة $\sim p \wedge \sim q$.

2 مخططات فِن Venn

يمكن توضيح عبارات الربط باستخدام مخططات فِن *Venn*. فكر في عبارة الربط المقدمة في بداية الدرس.

p و q: المستطيل شكل رباعي، و هو محدب.

يوضح مخطط فِن *Venn* أن المستطيل (R) يقع داخل تقاطع مجموعة الأشكال الرباعية ومجموعة المضلعات المحدبة. بمعنى آخر، يجب أن تكون المستطيلات داخل المجموعة التي تتضمن الأشكال الرباعية وداخل المجموعة التي تتضمن المضلعات المحدبة.



الربط بالمفردات

التقاطع

الاستخدام اليومي النقطة التي يتداخل عندها جسمان أو أكثر

الاستخدام في الرياضيات يمثل تقاطع مجموعتين مجموعة العناصر المشتركة بينهما.

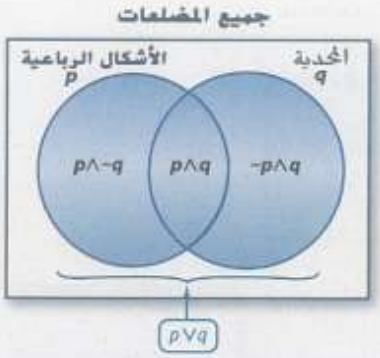
حقوق الطبع والنشر © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكن أيضًا توضيح الفصل باستخدام مخطط فن *Venn*. فكر في العبارات التالية.

p: الشكل الرباعي.

q: الشكل محدب.

p أو q: الشكل الرباعي أو محدب.



الفصل بالمفردات

الاتحاد

الاستخدام اليومي ضم جسمين أو أكثر بعضهما إلى بعض

الاستخدام في الرياضيات اتحاد مجموعتين هو عبارة عن مجموعة العناصر التي تظهر في كليهما.

في مخطط فن *Venn*، يتم تمثيل الفصل من خلال اتحاد المجموعتين. يشمل الاتحاد كل المضلعات التي تتضمن الأشكال الرباعية أو المحدبة *أو* كليهما.

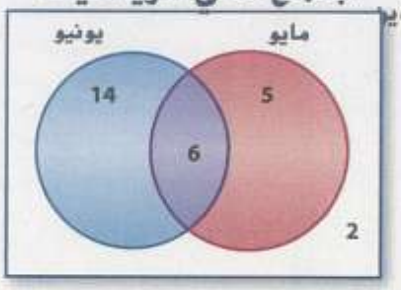
يشمل الفصل هذه المناطق الثلاث:

$p \wedge \sim q$ الأشكال الرباعية غير محدبة

$\sim p \wedge q$ المضلعات المحدبة غير رباعية

$p \wedge q$ المضلعات رباعية ومحدبة

مثال 4 من الحياة اليومية استخدام مخططات فن *Venn*



جدولة يوضح مخطط فن *Venn* عدد الأشخاص الذين يمكنهم حضور اجتماعات نادي الرياضيات أو لا يمكنهم الحضور في شهرَي مايو أو يونيو .

a. كم عدد الأشخاص الذين يمكنهم حضور اجتماع مايو أو يونيو؟

تم تمثيل الذين يمكنهم حضور اجتماع أي من شهرَي مايو أو يونيو عن طريق اتحاد المجموعتين.
ثمة 5 + 6 + 14 أو 25 شخصًا يمكنهم حضور أي من الاجتماعَين.

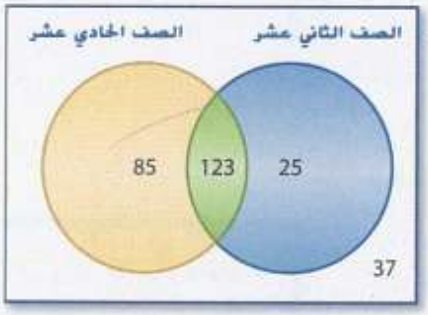
b. كم عدد الأشخاص الذين يمكنهم حضور كلا اجتماعَي مايو ويونيو؟

تم تمثيل من يمكنهم حضور كلا اجتماعي مايو ويونيو بتقاطع المجموعتين. ثمة 6 أشخاص يمكنهم حضور كلا الاجتماعين.

c. صف الاجتماعات التي يمكن أن يحضرها الـ 14 شخصًا الموجودون في الجزء غير المتقاطع من منطقة شهر يونيو.

هؤلاء الـ 14 شخصًا يمكنهم حضور اجتماع يونيو وليس اجتماع مايو.

تمرين موجّه



4. مباراة التخرج يوضح مخطط فن *Venn* عدد خريجي العام الماضي الذين حضروا أو لم يحضروا مباراة التخرج للصف الحادي عشر أو الثاني عشر.

A. كم عدد الخريجين الذين حضروا مباراة التخرج في الصف الثاني عشر ولم يحضروا مباراة الصف الحادي عشر؟

B. كم عدد الخريجين الذين حضروا مباراة التخرج في الصفين الحادي عشر و الثاني عشر؟

C. كم عدد الخريجين الذين لم يحضروا أيًا من مباراتي التخرج؟

D. كم عدد الطلاب الذين تخرجوا في العام الماضي؟ اشرح تبريرك.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تحقق من فهمك

المثالان 1–2 **استخدم العبارات التالية لكتابة عبارة مركبة لكل ربط أو فصل. ثم جد قيمة الصواب الخاصة بها. اشرح تبريرك.**

p: الأسبوع فيه سبعة أيام.

q: في اليوم 20 ساعة.

r: في الساعة 60 دقيقة.

1. r و p
2. $p \wedge q$
3. $q \vee r$
4. q أو $\sim p$
5. $p \vee r$
6. $\sim p \wedge \sim r$

مثال 3 7. انسخ جدول الصواب الموجود على اليسار وأكمله.

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$
T	T	F	
T	F		
F	T		
F	F		

أنشئ جدول صواب لكل عبارة مركبة.

8. $p \wedge q$
9. $\sim p \vee \sim q$

مثال 4 10. **الصفوف الدراسية** راجع مخطط فن *Venn* الذي يمثل الصفوف الدراسية للغات الأجنبية التي اختارها الطلاب في المدرسة الثانوية.

الصفوف الدراسية المختارة للغات الأجنبية

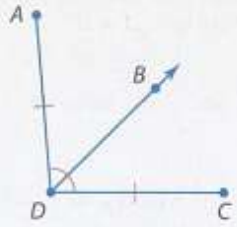
a. كم عدد الطلاب الذين اختاروا صفوف اللغة الإسبانية فقط؟

b. كم عدد الطلاب الذين اختاروا صفوف اللغتين الإسبانية والفرنسية؟

c. صف الصف الدراسي (الفصول الدراسية) الذي اختاره الأشخاص الثلاثة في الجزء غير المتقاطع من منطقة اللغة الفرنسية.

التمرين وحل المسائل

المثالان 1–2 **استخدم العبارات التالية والشكل لكتابة عبارة مركبة لكل ربط أو فصل. ثم جد قيمة الصواب الخاصة بها. اشرح تبريرك.**



p: $\overrightarrow{DB}$ هي منصف الزاوية $\angle ADC$.

q: النقاط C وD وB على استقامة واحدة.

r: $\overline{AD} \cong \overline{DC}$

11. r و p
12. q أو p
13. r أو $\sim p$
14. q و r
15. $\sim p$ أو $\sim r$
16. $\sim p$ و $\sim r$

الاستنتاج **استخدم العبارات التالية لكتابة عبارة مركبة لكل ربط أو فصل. ثم جد قيمة الصواب الخاصة بها. اشرح تبريرك.**

p: سبرينجفيلد هي عاصمة ولاية إلينوي.

q: يحد إلينوي المحيط الأطلسي.

r: وتشارك ولاية إلينوي حدوداً مع ولاية كنتاكي.

s: تقع ولاية إلينوي غرب ولاية ميسوري.

17. $p \wedge r$
18. $p \wedge q$
19. $\sim r \vee s$
20. $r \vee q$
21. $\sim p \wedge \sim r$
22. $\sim s \vee \sim p$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 انسخ جدول الصواب وأكمله.

24.

p	q	$-p$	$\sim q$	$-p \vee q$
T			F	
T			T	
F			F	
F			T	

23.

p	q	$\sim p$	$\sim p \wedge q$
T		F	
T		F	
F		T	
F		T	

أنشئ جدول صواب لكل عبارة مركبة.

25. $p \wedge r$ 26. $r \wedge q$ 27. $p \vee r$

28. $q \vee r$ 29. $\sim p \wedge r$ 30. $\sim q \vee \sim r$

مثال 4 31) **الرياضات المائية** راجع مخطط فن *Venn* الذي يمثل عدد الطلاب الذين يمارسون السباحة والغوص في المدرسة الثانوية.

a. كم عدد الطلاب الذين يمارسون الغوص؟

b. كم عدد الطلاب المشاركين في السباحة أو الغوص أو كليهما؟

c. كم عدد الطلاب الذين يمارسون كلًا من السباحة والغوص؟

32. **التبرير** لدى سلمى مفتاحان في الطابق العلوي والطابق السفلي للتحكم في إضاءة بئر السلم. ولاحظت أنه عندما يكون اتجاه المفتاح الذي في الطابق العلوي إلى أعلى والمفتاح الذي في الطابق السفلي إلى أسفل، يكون المصباح قيد التشغيل.

المصباح قيد التشغيل	اتجاه المفتاح	
	الطابق السفلي	الطابق العلوي
		إلى أعلى
T	إلى أسفل	إلى أعلى

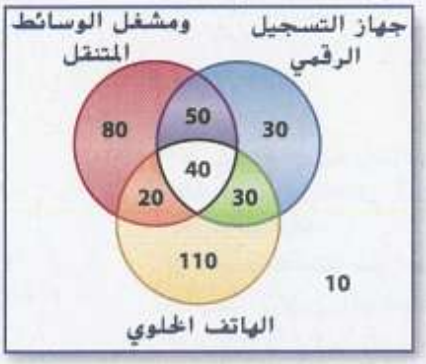
a. انسخ جدول الصواب وأكمله.

b. إذا كان اتجاه كلا المفتاحين في الطابق العلوي والسفلي إلى أعلى، فهل سيكون المصباح قيد التشغيل؟ اشرح تبريرك.

b. إذا كان اتجاه المفتاح الذي في الطابق العلوي إلى أسفل والمفتاح الذي في الطابق العلوي إلى أسفل، فهل سيكون المصباح قيد التشغيل؟

d. بشكل عام، كيف ينبغي توجيه المفتاحين حتى يكون المصباح قيد التشغيل؟

33. **الإلكترونيات** أجري مسح على مجموعة مكوّنة من 330 شابًا حول نوع الأجهزة الإلكترونية التي يستخدمونها. فاختاروا الهاتف الخلوي ومشغل الوسائط المتنقل وجهاز التسجيل الرقمي. ويوضح مخطط فن *Venn* النتائج.



a. كم عدد الشباب الذين استخدموا مشغل الوسائط المتنقل وجهاز التسجيل الرقمي فقط؟

b. كم عدد الذين ذكروا أنهم استخدموا كافة أنواع الأجهزة الإلكترونية الثلاثة؟

c. كم عدد الذين ذكروا أنهم استخدموا الهاتف الخلوي فقط؟

d. كم عدد المراهقين الذين ذكروا أنهم استخدموا مشغل الوسائط المتنقل والهاتف الخلوي فقط؟

e. صف الأجهزة الإلكترونية التي يستخدمها الـ 10 شباب خارج المناطق.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

أنشئ جدول الصواب لكل عبارة مركبة. حدّد قيمة الصواب لكل عبارة مركبة إذا كانت العبارات المقدمة صائبة.

34. $p \wedge (q \wedge r);\ p,\ q$

35. $p \wedge (\sim q \vee r);\ p,\ r$

36. $(\sim p \vee q) \wedge r;\ q,\ r$

37. $p \vee (\sim q \wedge \sim r);\ p,\ q,\ r$

38. $\sim p \wedge (\sim q \wedge \sim r);\ p,\ q,\ r$

39. $(\sim p \vee q) \vee \sim r;\ p,\ q$

40. **التبرير** أجرت وكالة سفريات مسحًا على 70 من عملائها ممن سبقت لهم زيارة أوروبا حول تجربة السفر الدولي. وكان من بين الـ 70 عميلًا الذين سبقت لهم زيارة أوروبا. 60 عميلًا سافروا إلى إنجلترا أو فرنسا أو إلى كليهما. ومن بين هؤلاء العملاء الـ 60، زار 45 إنجلترا وزار 50 فرنسا.

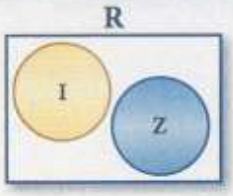
a. ارسم مخطط فن *Venn* لتوضيح نتائج المسح.

b. إذا كانت p تمثل العملاء الذين زاروا إنجلترا وتمثل q العملاء الذين زاروا فرنسا، فاكتب عبارة مركبة لتمثيل كل منطقة من مخطط فن *Venn*. قم بتضمين العبارات المركبة في مخطط فن *Venn* الخاص بك.

c. ما احتمال أن يكون أحد المشاركين تم اختياره عشوائيًا في المسح قد زار كلًا من إنجلترا وفرنسا؟ اشرح تبريرك.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

41. **التبرير** تنتمي كلا الأعداد غير النسبية والأعداد الصحيحة إلى مجموعة الأعداد الحقيقية (R). وفقًا لمخطط فن *Venn*، هل تُعد الأعداد الصحيحة (Z) *أحيانًا* أم *دائمًا* أم *لا تُعد إطلاقًا* أعدادًا غير نسبية (I)؟ اشرح تبريرك.



تحفيز لنفي عبارة تحتوي على الكلمتين *كل* أو *لكل*، يمكنك استخدام عبارة *واحد على الأقل* أو يوجد. لنفي العبارة التي تحتوي على كلمة يوجد، استخدم عبارة *للكل* أو *لكل*.

p: جميع المضلعات أشكال محدبة. $\sim p$: *ثمة مضلع واحد على الأقل ليس* محدبًا.

q: توجد مسألة ليس لها حل. $\sim q$: *لكل* مسألة حل.

وقد تكون هذه العبارات ضمنية في بعض الأحيان. على سبيل المثال، تتضمن العبارة *مربع العدد الحقيقي غير سلبي* العبارة الشرطية التالية ونفيها.

p: في *كل* عدد حقيقي x، يكون $x^2 \geq 0$

$\sim p$: يوجد عدد حقيقي x بحيث يكون $x^2 < 0$

استخدم المعلومات السابقة لكتابة نفي كل عبارة.

42. لكل طالب في المدرسة الثانوية خزانة.

43. كل المربعات مستطيلات.

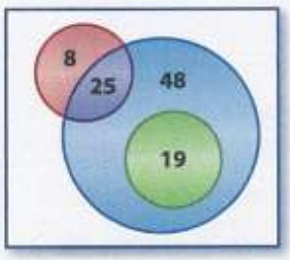
44. يوجد عدد حقيقي x بحيث يكون $x^2 = x$

45. يوجد طالب لديه صف واحد على الأقل في الجناح C.

46. كل عدد حقيقي له جذر تربيعي حقيقي.

47. توجد قطعة مستقيمة ليس لها نقطة منتصف.

48. **الكتابة في الرياضيات** صف موقفًا يمكن تصويره باستخدام مخطط فن *Venn* الموضح.

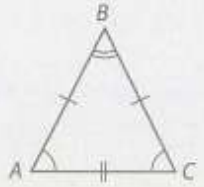


49. **مسألة غير محددة الإجابة** اكتب عبارة مركبة صائبة ناتجة عن ربط.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

50. أيّ عبارة حول $\triangle ABC$ لها قيمة الصواب نفسها الخاصة بـ $AB = BC$؟



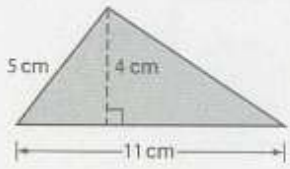
A $m\angle A = m\angle C$

B $m\angle A = m\angle B$

C $AC = BC$

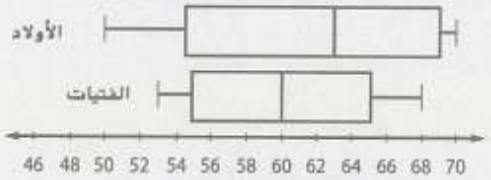
D $AB = AC$

51. **إجابة موسعة** ما مساحة المثلث الموضح أدناه؟ اشرح كيف توصلت إلى إجابتك.



52. **الإحصاء** يمثل مخطط الصندوق التالي أطوال طلاب الصف التاسع في المدرسة الثانوية. ما مقدار الزيادة في متوسط طول الأولاد عن متوسط طول الفتيات؟

أطوال طلاب الصف التاسع (بوصات)



F 3 in

G 4 in

H 5 in

J 6 in

53. **اختبار الكفاءة الدراسية/اختبار القبول للكليات الأمريكية** ذهبت سارة وهاجر ومريم إلى السوق لشراء ملابس جديدة. فأنفقت سارة مثلي ما أنفقته هاجر. وأنفقت مريم ثلاثة أمثال ما أنفقته سارة. فإذا كان إجمالي ما أنفقن AED 300. فما المبلغ الذي أنفقته هاجر؟

A AED 33.33

B AED 50.00

C AED 66.33

D AED 100.00

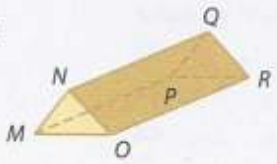
E AED 104.33

مراجعة شاملة

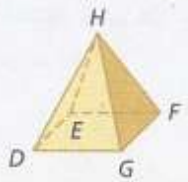
54. **الغداء** على مدى أيام الثلاثاء الأربعة الماضية، كانت مدرسة طارق تقدم شطائر الدجاج كوجبة غداء. ويفترض طارق أن شطائر الدجاج ستقدم للغداء يوم الثلاثاء القادم. فما نوع الاستنتاج الذي استخدمه؟ اشرح.

حدّد كل مجسم. عيّن القواعد والأوجه والأحرف والرؤوس.

55.



56.



57.

الجبر حُـلّ كل معادلة من المعادلات الآتية.

58. $\frac{y}{2} - 7 = 5$

59. $3x + 9 = 6$

60. $4(m - 5) = 12$

61. $6(w + 7) = 0$

62. $2x - 7 = 11$

63. $\frac{y}{5} + 4 = 9$

مراجعة المهارات

الجبر جـد قيمة كل تعبير للقيم المعطاة.

64. $2y + 3x$ إذا كانت $y = 3$ و $x = -1$

65. $4d - c$ إذا كانت $d = 4$ و $c = 2$

66. $m^2 + 7n$ إذا كانت $m = 4$ و $n = -2$

67. $ab - 2a$ إذا كانت $a = -2$ و $b = -3$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10-3 العبارات الشرطية

السابق
- لقد استخدمت المخطط المنطقي أو مخطط فن *Venn* لتحديد قيم الصواب لأدوات النفي والربط والفصل.

الحالي
1. تحليل العبارات التي بصيغة إذا كان-فإن.
2. كتابة عكس العبارات المكتوبة بصيغة إذا كان-فإن ومعكوسها والمعاكس الإيجابي لها.

لماذا؟
- توجّه خدمة العملاء المكالمات إلى الأقسام المناسبة باستخدام قوائم تسمح للمتصلين بالاختيار من بين عدد من الاختيارات. وتُطرح التوجيهات المسجلة بشكل متكرر بصيغة عبارات شرطية.

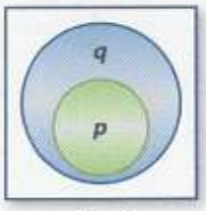
المفردات الجديدة
العبارة الشرطية conditional statement
عبارة إذا كان-فإن if-then statement
الفرضية hypothesis
الاستنتاج conclusion
العبارات الشرطية المرتبطة
العكس converse
المعكوس inverse
المعكوس الإيجابي contrapositive
التكافؤ المنطقي logically equivalent

1 عبارات إذا كان-فإن

العبارة الشرطية هي عبارة يمكن كتابتها بصيغة إذا كان-فإن. يُعد التوجيه الوارد أدناه مثالًا على العبارة الشرطية.

إذا كنت ترغب في التحدث إلى أحد الممثلين. **فاضغط** الآن على 0.

المفهوم الأساسي العبارة الشرطية

التعبير اللفظي	الرموز	نموذج
تكون **عبارات إذا كان-فإن** بصيغة *إذا كان p، فإن q.*	$p \rightarrow q$ تُقرأ *إذا كان p فإن q*، أو *p* تقتضي *q*	 $p \rightarrow q$
و**فرضية** العبارة الشرطية هي التعبير الذي يلي *إذا كان* مباشرة.	p	
أما **استنتاج** العبارة الشرطية فهو التعبير الذي يلي *فإن* مباشرة.	q	

عندما تكون العبارة الشرطية مكتوبة بصيغة إذا كان-فإن، فإنه يمكنك تحديد فرضيتها واستنتاجها بسرعة.

مثال 1 تحديد الفرضية والاستنتاج

حدّد الفرضية والاستنتاج لكل عبارة شرطية.

a. إذا كانت التوقعات تشير إلى هطول المطر، فسآخذ الشمسية.

الفرضية: التوقعات تشير إلى هطول المطر.

الاستنتاج: سآخذ الشمسية.

b. العدد يقبل القسمة على 10 إذا كان آحاده 0.

الفرضية: الآحاد في العدد صفر.

الاستنتاج: العدد يقبل القسمة على 10.

تمرين موجّه

1A. إذا كان للمضلّع ستة أضلاع، فإنه سداسي الأضلاع.

1B. سيُدرج عرض آخر بالجدول إذا بيع الأول.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تُكتب العديد من العبارات الشرطية من دون استخدام *إذا كان– فإن*. لكتابة هذه العبارات بصيغة إذا كان–فإن، حدّد الفرضية والاستنتاج.

ستُخصم نقاط من أي **ورقة يتم تسليمها بعد الموعد النهائي يوم الأربعاء.**

الاستنتاج — الفرضية

إذا **تم تسليم الورقة بعد الموعد النهائي يوم الأربعاء**، فإن **النقاط ستُخصم**.

تذكّر، يتوقف الاستنتاج على الفرضية.

قراءة في الرياضيات

"إذا كان" و"فإن" لا تُعد *إذا كان* جزءًا من الفرضية، ولا تُعد *فإن* جزءًا من الاستنتاج.

مثال 2 اكتب عبارة شرطية بصيغة إذا كان–فإن

حدّد الفرضية والاستنتاج لكل عبارة شرطية. ثم اكتب العبارة بصيغة إذا كان–فإن.

a. الحيوان الثديي هو حيوان ذو دم حار.

الفرضية: حيوان من الثدييات.

الاستنتاج: يكون ذا دم حار.

إذا كان الحيوان من الثدييات، فإنه ذو دم حار.

b. المنشور الذي قواعده عبارة عن مضلعات منتظمة هو منشور منتظم.

الفرضية: المنشور الذي قواعده عبارة عن مضلعات منتظمة.

الاستنتاج: يكون منشورًا منتظمًا.

إذا كانت قواعد المنشور عبارة عن مضلعات منتظمة، فإنه منشور منتظم.

تمرين موجّه

2A. يمكن استبدال أربع قطع من فئة الربع درهم بقطعة من فئة 1 AED.

2B. مجموع قياس الزاويتين المتكاملتين يساوي 180 درجة.

يمكن أن يتضمن كل من فرضية العبارة الشرطية واستنتاجها قيمة الصواب من صواب أو خطأ، كما يمكن أن تتضمن ذلك العبارة الشرطية ذاتها. فكر في العبارة الشرطية التالية.

إذا **أنهى علي واجبه**، فإنه **سينظف غرفته**.

الفرضية	الاستنتاج	العبارة الشرطية	
أنهى علي واجبه.	ينظف علي غرفته.	إذا أنهى علي واجبه، فإنه سينظف غرفته.	
T	T	إذا أنهى علي واجبه ونظف غرفته، فإن العبارة الشرطية صائبة.	T
T	F	إذا لم ينظف علي غرفته بعدما أنهى واجبه، فإنه لم يحقق وعده وتكون العبارة الشرطية خاطئة.	F
F	T	لا تشير العبارة الشرطية إلا لما سيحدث فقط إذا أنهى علي واجبه. فيمكنه أن ينظف غرفته أو لا ينظفها إذا لم ينهِ واجبه.	؟
F	F		؟

قراءة في الرياضيات

ليست خاطئة إذا كانت العبارة *ليست خاطئة*، فلابد أن تكون *صائبة وفقًا للمنطق*.

إذا لم تتحقق فرضية العبارة الشرطية، فلا يمكن تحديد صوابها. وإن كان لا يمكن تحديد صواب العبارة الشرطية، فإنها تعد صائبة بشكل افتراضي.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

يمكن استخدام النتائج من الصفحة السابقة لإعداد جدول صواب للعبارات الشرطية.

العبارة الشرطية		
p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

لاحظ أن العبارة الشرطية تكون خاطئة فقط عندما تكون فرضيتها صوابًا واستنتاجها خطأً.

لاحظ أيضًا أنه عندما تكون الفرضية خطأً فإن العبارة الشرطية ستكون صائبة دائمًا، بغض النظر عما إذا كان الاستنتاج صوابًا أم خطأً.

انتبه!

تحليل العبارات الشرطية

عند تحليل عبارة شرطية، لا تحاول تحديد ما إذا كانت الحجة تبدو منطقية أم لا. ولكن حلّل صيغة الحجة لتحديد ما إذا كان الاستنتاج ينبثق من الفرضية بصورة منطقية أم لا.

لإثبات أن العبارة الشرطية صائبة، يلزمك أن تثبت أن كل حالة تكون فيها الفرضية صوابًا، يكون الاستنتاج صوابًا كذلك. ولإثبات أنّ العبارة الشرطية خاطئة، فلا يلزمك سوى إيجاد مثال واحد مضاد فقط.

مثال 3 قيم الصواب للعبارات الشرطية

حدّد قيمة الصواب لكل عبارة شرطية. إذا كانت *صائبة*، فاشرح استنتاجك. إذا كانت *خاطئة*، فأعطِ مثالًا مضادًا.

a. إذا قسمت عددًا صحيحًا على عدد آخر صحيح، فإن الناتج يكون أيضًا عددًا صحيحًا.

مثال مضاد: عندما تقسم 1 على 2، فإن الناتج يكون 0.5.

بما أنّ 0.5 عدد غير صحيح، فإن الاستنتاج يكون خطأً.

وحيث يمكنك إيجاد مثال مضاد، فإن العبارة الشرطية خاطئة.

b. إذا كان الشهر التالي هو أغسطس، فإن هذا الشهر هو يوليو.

عندما تكون الفرضية صوابًا، فإن الاستنتاج يكون صوابًا كذلك، لأنّ أغسطس هو الشهر الذي يلي يوليو. ومن ثم تكون العبارة الشرطية صائبة.

c. إذا كان للمثلث أربعة أضلاع، فإنه يكون متعرّجًا.

الفرضية خطأ، حيث لا يمكن أبدًا أن يكون للمثلث أربعة أضلاع. العبارة الشرطية ذات الفرضية الخطأ تكون صائبة دائمًا.

تمرين موجّه

3A. إذا كانت $\angle A$ حادة، فإن $m\angle A$ يساوي 35.

3B. إذا كان $\sqrt{x} = -1$، فإن $(-1)^2 = -1$

2 العبارات الشرطية المرتبطة

توجد عبارات أخرى تعتمد على عبارة شرطية مقدمة، وتُعرف بـ **العبارات الشرطية المرتبطة**.

المفهوم الأساسي العبارات الشرطية المرتبطة

التعبير اللفظي	الرموز	أمثلة
العبارة الشرطية هي عبارة يمكن أن تُكتب بصيغة *إذا كان p، فإن q*.	$p \rightarrow q$	إذا كان $m\angle A$ يساوي 35، فإن $\angle A$ زاوية حادة.
ينتج **العكس** عن التبديل بين الفرضية والاستنتاج في العبارة الشرطية.	$q \rightarrow p$	إذا كانت $\angle A$ حادة، فإن $m\angle A$ يساوي 35.
ينتج **المعكوس** عن نفي كل من الفرضية والاستنتاج في العبارة الشرطية.	$\sim p \rightarrow \sim q$	إذا كان $m\angle A$ *ليس* 35، فإن $\angle A$ *ليست* زاوية حادة.
ينتج **المعكوس الإيجابي** عن نفي كل من الفرضية والاستنتاج في عكس العبارة الشرطية.	$\sim q \rightarrow \sim p$	إذا كانت $\angle A$ *ليست* زاوية حادة، فإن $m\angle A$ *ليس* 35.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إن العبارة الشرطية ومعكوسها الإيجابي إما أن يكون كلاهما صائبًا أو يكون كلاهما خاطئًا. وبالمثل، فإن العكس والمعكوس في العبارة الشرطية إما أن يكون كلاهما صائبًا أو يكون كلاهما خاطئًا. توصف العبارات التي لها قيم الصواب نفسها بأنها **متكافئة منطقيًا**.

المفهوم الأساسي العبارات المتكافئة منطقيًا

- العبارة الشرطية ومعكوسها الإيجابي متكافئان منطقيًا.
- عكس العبارة الشرطية ومعكوسها متكافئان منطقيًا.

إذا كانت العبارة الشرطية صائبة، فمن الممكن أن يكون العكس صائبًا أو لا.

يمكنك استخدام التكافؤ المنطقي للتحقق من قيم الصواب للعبارات. لاحظ، في المثال 4، أنّ كلًا من العبارة الشرطية ومعكوسها الإيجابي صائب. كما أن كلًا من العكس والمعكوس خاطئ.

مثال 4 من الحياة اليومية العبارات الشرطية المرتبطة

الطبيعة **اكتب عكس العبارة الصائبة التالية ومعكوسها والمعكوس الإيجابي لها. ثم استخدم المعلومات التي في اليمين لتحديد ما إذا كانت كل عبارة شرطية مرتبطة *صائبة* أم *خاطئة*. فإذا كانت العبارة خاطئة، فجد مثالًا مضادًا.**

الأسود عبارة عن قطط يمكنها الزئير.

العبارة الشرطية: أولًا، أعد كتابة العبارة الشرطية بصيغة إذا كان–فإن.

إذا كان الحيوان أسدًا، فإنه قط يمكنه الزئير.

بناءً على المعلومات التي في اليمين، فإن هذه العبارة صائبة.

العكس إذا كان الحيوان عبارة عن قط يمكنه الزئير، فإنه أسد.

المثال المضاد: النمر عبارة عن قط يمكنه الزئير، لكنه ليس أسدًا.

من ثم يكون العكس خاطئًا.

المعكوس: إذا كان الحيوان ليس أسدًا، فإنه ليس قطًا يمكنه الزئير.

المثال المضاد: النمر ليس أسدًا، لكنه قط يمكنه الزئير.

من ثم يكون المعكوس خاطئًا.

المعكوس الإيجابي: إذا كان الحيوان ليس قطًا يمكنه الزئير، فهو ليس أسدًا.

بناءً على المعلومات التي في اليمين، فإن هذه العبارة صائبة.

التحقق تحقق لمعرفة أن العبارات المتكافئة منطقيًا لها قيمة الصواب نفسها.

كل من العبارة الشرطية والمعكوس الإيجابي صائب. ✓

كل من العكس والمعكوس خاطئ. ✓

الربط بالحياة اليومية

تشمل القطط التي من جنس *النمور* الفهد والنمر المرقط والأسد والنمر. وهذه هي القطط الوحيدة التي يمكنها الزئير، ولكنها لا تستطيع الخرخرة.

المصدر: *Encyclopaedia Britannica*

تمرين موجّه

اكتب العكس والمعكوس والمعكوس الإيجابي لكل عبارة شرطية صائبة. حدد ما إذا كانت كل عبارة شرطية مرتبطة *صائبة* أم *خاطئة*. فإذا كانت العبارة خاطئة، فجد مثالًا مضادًا.

4A. الزاويتان المتساويتان في القباس متطابقتان.

4B. الفأر من القوارض.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تحقق من فهمك

مثال 1 **حدد الفرضية والاستنتاج لكل عبارة شرطية.**

1. إذا كان اليوم هو الأحد، فإن غدًا هو الإثنين.

2. إذا كانت $2x + 5 > 7$، فإن $x > 1$.

3. إذا كانت الزاويتان متكاملتين، فإن مجموع قياسيهما يساوي 180.

4. إذا كان المستقيمان يشكلان زوايا قائمة، فإنهما متعامدان.

مثال 2 **اكتب كل عبارة بصيغة إذا كان –فإن.**

5. إن البالغ من العمر ست عشرة سنة ذو أهلية للقيادة.

6. يحتوي الجبن على الكالسيوم.

7. يكون قياس الزاوية الحادة بين 0 و90.

8. المثلثات المتساوية الأضلاع متساوية الزوايا.

9. **الطقس** تتكون أشكال الهطول المتنوعة تحت ظروف مختلفة. اكتب العبارات الشرطية الثلاث أدناه بصيغة إذا كان–فإن.

   a. تتكثف الرطوبة في الهواء وتتساقط لتكون المطر.

   b. تكوّن الرطوبة فائقة البرودة في سحب المزن الركامية البرد.

   c. عندما تصل درجة الحرارة إلى درجة التجمد في الغلاف الجوي كله أو معظمه، يحدث الهطول على هيئة ثلج.

مثال 3 **حدد قيمة الصواب لكل عبارة شرطية. إذا كانت *صائبة*، فاشرح تبريرك. إذا كانت *خاطئة*، فأعطِ مثالًا مضادًا.**

10. إذا كان $x^2 = 16$، فإن $x = 4$.

11. إذا كنت تعيش في مدينة العين، فأنت تعيش في إمارة أبو ظبي.

12. إذا كان الغد يوم الجمعة، فاليوم هو الخميس.

13. إذا كان الحيوان منقطًا، فإنه دلماسي.

14. إذا كان قياس الزاوية القائمة 95، فإن النحل عبارة عن سحالٍ.

15. إذا استطاعت القطط التحليق، فإن $7 = 5 + 2$.

مثال 4 **الفرضيات** **اكتب العكس والمعكوس والمعكوس الإيجابي لكل عبارة شرطية صواب. حدد ما إذا كانت كل عبارة شرطية مرتبطة *صائبة* أم *خاطئة*. فإذا كانت العبارة خاطئة، فجد مثالًا مضادًا.**

16. إذا كان العدد قابلًا للقسمة على 4، فإنه يقبل القسمة على 2.

17. كل الأعداد الكلية أعداد صحيحة.

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **حدد الفرضية والاستنتاج لكل عبارة شرطية.**

18. إذا كانت الزاويتان متجاورتين، فإن بينهما ضلعًا مشتركًا.

19. إذا توليت القيادة، فسأتبعك.

20. إذا كان $3x - 4 = 11$، فإن $x = 5$.

21. إذا كانت الزاويتان متقابلتين بالرأس، فإنهما متطابقتان.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

حدّد الفرضية والاستنتاج لكل عبارة شرطية.

22. إذا كان قياس زاوية ما بالدرجة يتراوح بين 90 و180، فإنها زاوية منفرجة.

23. "إذا لم يكن الكفاح، فلن يكون التقدم". (فريدريك دوجلاس)

24. إذا كان للشكل الرباعي أربعة أضلاع متطابقة، فإنه مربع.

25. إذا كان للمضلع المحدب خمسة أضلاع، فإنه خماسي أضلاع منتظم.

مثال 2 **اكتب كل عبارة بصيغة إذا كان –فإن.**

26. احصل على زجاجة مياه مجانية من خلال العضوية لمدة عام.

27. كل من بالحفل حصل على هدية.

28. ينتج عن تقاطع مستويين مستقيم.

29. مساحة الدائرة πr^2.

30. تقع النقاط الواقعة على استقامة واحدة على المستقيم نفسه.

31. قياس الزاوية القائمة 90 درجة.

32. **موسيقى** تنتج آلات العزف المختلفة أنواعًا مختلفة من الموسيقى. اكتب كل عبارة بصيغة إذا كان–فإن.

- تتضمن موسيقى الجاز البوق أو الساكسفون.
- تتمثل موسيقى الروك في الجيتار والطبول.
- وتتضمن موسيقى الهيب هوب صوت الباص.

33. **الفن** اكتب العبارة التالية بصيغة إذا كان–فإن. في متحف آندي وارهول في بيتسبيرج، بنسلفانيا، تمثل أعمال آندي وارهول معظم مجموعة الأعمال الفنية به.

34. **العلوم** يتغير الماء على الأرض باستمرار من خلال عملية تسمى *دورة الماء*. اكتب العبارات الشرطية الثلاث أدناه بصيغة إذا كان–فإن.

a. تتدفق المياه إلى المسطحات المائية في صورة جريان سطحي.

b. تعيد النباتات المياه إلى الهواء من خلال عملية النتح.

c. تعيد المسطحات المائية المياه إلى الهواء من خلال التبخر.

مثال 3 **الفرضيات حدد قيمة الصواب لكل عبارة شرطية. إذا كانت *صائبة*، فاشرح استنتاجك. إذا كانت *خاطئة*، فأعطِ مثالًا مضادًا.**

35. إذا كان العدد فرديًا، فإنه يقبل القسمة على 5.

36. إذا كان الكلب برمائيًا، فإن الفصل الحالي هو الصيف.

37. إذا كانت الزاوية حادة، فإن قياسها 45.

38. إذا كان للمضلع المحدب ستة أضلاع، فإنه مضلع منتظم.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

حدّد قيمة الصواب لكل عبارة شرطية. إذا كانت *صائبة*، فاشرح استنتاجك. إذا كانت *خاطئة*، فأعطِ مثالًا مضادًا.

39. إذا كان قياس زاوية ما هو 25، فإن قياس الزاوية المتممة لها هو 65.

40. إذا كانت ولاية كارولاينا الشمالية تقع جنوب فلوريدا، فإن عاصمة أوهايو هي كولومبس.

41. إذا امتزج الدهان الأحمر مع الدهان الأزرق مكونين دهانًا أبيض، فإن $3 - 2 = 0$.

42. إذا كانت الزاويتان متطابقتين، فإنهما متقابلتان بالرأس.

43. إذا كان الحيوان طائرًا، فهو نسر.

44. إذا كانت الزاويتان حادتين، فإنهما متكاملتان.

45. إذا تقاطع مستقيمان، فإنهما يُكوّنان زوايا قائمة.

46. إذا كانت الموزة زرقاء، فإن التفاحة من الخضروات.

مثال 4 **اكتب العكس والمعكوس والمعكوس الإيجابي لكل عبارة شرطية صائبة. حدد ما إذا كانت كل عبارة شرطية مرتبطة *صائبة* أم *خاطئة*. إذا كانت العبارة خاطئة، فجـد مثالًا مضادًا.**

47. إذا كنت تعيش في دبي، فأنت تعيش في أبو ظبي.

48. إذا كان الطائر عبارة عن نعامة، فإنه لا يستطيع التحليق.

49. إذا تساوى قياس الزاويتين، فإنهما متطابقتان.

50. كل المربعات عبارة عن مستطيلات.

51. كل القطع المستقيمة المتطابقة لها الطول نفسه.

52. المثلث القائم به زاوية قياسها 90.

الفرضيات اكتب العبارة الموضحة وحدد قيمة الصواب لكل عبارة. إذا كانت العبارة خاطئة، فاذكر مثالًا مضادًا.

الحيوانات المخططة عبارة عن حمير وحشية.

53. العبارة الشرطية **54.** العكس **55** المعكوس **56.** المعكوس الإيجابي

57. العلوم تُصنّف المركبات الكيميائية وتوصَف وفقًا للعناصر التي تحتوي عليها. تحتوي الأحماض على الهيدروجين (H). تحتوي القواعد على الهيدروكسيد (OH). تحتوي الهيدروكربونات فقط على هيدروجين (H) وكربون (C).

المركّب	المثال	الصيغة الكيميائية
الحمض	حمض الهيدروكلوريك	HCl
القاعدة	هيدروكسيد الصوديوم	NaOH
الهيدروكربون	الميثان	CH_4

a. اكتب ثلاث عبارات شرطية بصيغة إذا كان–فإن لتصنيف المركبات الكيميائية.

b. اكتب عكس العبارات الشرطية الصائبة الثلاث. حدد ما إذا كانت كل عبارة *صائبة* أم *خاطئة*. فإذا كانت العبارة خاطئة، فجـد مثالًا مضادًا.

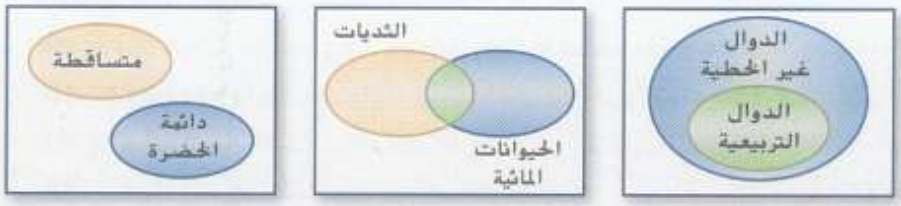
58. الرياضة في مباراة كرة قدم، يساوي الوصول إلى نهاية منطقة الخصم 6 نقاط وتساوي تحويلات النقاط الإضافية نقطتين وتساوي نقاط السلامة نقطتين.

a. اكتب ثلاث عبارات شرطية بصيغة إذا كان–فإن لتصنيف النقاط في كرة القدم.

b. اكتب عكس العبارات الشرطية الصائبة الثلاث. حدد ما إذا كانت كل عبارة *صائبة* أم *خاطئة*. فإذا كانت العبارة خاطئة، فجـد مثالًا مضادًا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

استخدم مخططات فن *Venn* الواردة أدناه لتحديد قيمة الصواب لكل عبارة شرطية. اشرح تبريرك.



59. إذا كانت الدالة غير خطية، فإنها دالة تربيعية.

60. إذا كان الحيوان من الثدييات، فلا يمكن أن يكون مائيًا.

61. إذا كانت الشجرة متساقطة، فإنها ليست دائمة الخضرة.

62. **التمثيلات المتعددة** في هذه المسألة، ستتحقق من قانون المنطق باستخدام العبارات الشرطية.

a. **منطقي** اكتب ثلاث عبارات شرطية صائبة باستخدام كل استنتاج منتالٍ كفرضية للعبارة التي تليه.

b. **بياني** ارسم مخطط فن *Venn* لنمذجة سلسلة العبارات الخاصة بك.

c. **منطقي** اكتب عبارة شرطية باستخدام فرضية العبارة الشرطية الأولى الخاصة بك مع استنتاج العبارة الشرطية الثالثة. هل تكون العبارة الشرطية صائبة عندما تكون الفرضية صوابًا؟

d. **لفظي** بدلالة العبارتين الشرطيتين *إذا كان a، فإن b* وإذا كان *b، فإن c*، ضع تخمينًا حول قيمة الصواب لـ *c* إذا كانت *a* صوابًا. اشرح تبريرك.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

63. **نقد** تقوم سلمى وياسمين بتقييم العبارة الشرطية *إذا كان 15 عددًا أوليًا، فإن 20 تقبل القسمة على 4*. واعتقدت كل منهما أن العبارة الشرطية صائبة، لكن استنتاجهما كان مختلفًا. هل إحداهما على صواب؟ اشرح.

سلمى	ياسمين
الاستنتاج صواب، لأن 20 قابلة للقسمة على 4، ومن ثم تكون العبارة الشرطية صائبة.	الفرضية خطأ؛ لأن 15 ليست عددًا أوليًا، ومن ثم تكون العبارة الشرطية صائبة.

64. **تحفيز** لقد تعلمت أن العبارات ذات قيمة الصواب نفسها متكافئة منطقيًا. استخدم التكافؤ المنطقي لإنشاء جدول صواب يلخص العبارة الشرطية والعكس والمعكوس والمعكوس الإيجابي للعبارتين *p* و*q*.

65. **الاستنتاج** تقوم بتقييم عبارة شرطية فرضيتها صواب، لكن استنتاجها خطأ. هل يكون معكوس العبارة صائبًا أم خاطئًا؟ اشرح تبريرك.

66. **نهاية مفتوحة** اكتب عبارة شرطية يكون فيها كل من العكس والمعكوس والمعكوس الإيجابي صائبًا. اشرح تبريرك.

67. **تحفيز** فيما يلي معكوس العبارة الشرطية *A*. اكتب الدالة الشرطية *A* ومعكوسها ومعكوسها الإيجابي. اشرح تبريرك.

إذا تلقيتُ أمر احتجاز، فلم أكن قد وصلت إلى المدرسة في الوقت المناسب.

68. **الكتابة في الرياضيات** صف العلاقة بين العبارة الشرطية وعكسها ومعكوسها ومعكوسها الإيجابي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

69. *إذا كان مجموع قياسي زاويتين يساوي 90، فإن الزاويتين متتامتان.*

أي مما يلي يُعد عكس العبارة الشرطية السابقة؟

A إذا كانت الزاويتان متتامتين، فإن مجموع قياسيهما يساوي 90.

B إذا كانت الزاويتان غير متتامتين، فإن مجموع قياسيهما يساوي 90.

C إذا كانت الزاويتان متتامتين، فإن مجموع قياسيهما لا يساوي 90.

C إذا كانت الزاويتان غير متتامتين، فإن مجموع قياسيهما لا يساوي 90.

70. الجبر كيف تبسط $\frac{10a^2 - 15ab}{4a^2 - 9b^2}$ إلى أقل عدد من الحدود؟

F $\frac{5a}{2a - 2b}$ H $\frac{a}{2a + 3b}$

G $\frac{5a}{2a + 3b}$ J $\frac{a}{2a - 3b}$

71. إجابة مختصرة ما الترميز العلمي للتعبير التالي؟

4.62×10^{-3}

72. اختبار الكفاءة الدراسية/اختبار القبول للكليات الأمريكية ما العامل المشترك الأكبر الأوّلي لكل من 18 و33؟

A 1 D 5

B 2 E 11

C 3

مراجعة شاملة

أنشئ جدول الصواب لكل عبارة مركّبة. (الدرس 2-10)

73. q و p **74.** p أو $\sim q$ **75.** $\sim p \wedge q$ **76.** $\sim p \wedge \sim q$

ضع تخمينًا بناءً على المعلومات المقدمة. ارسم شكلًا لتوضيح استنتاجك. (الدرس 1-10)

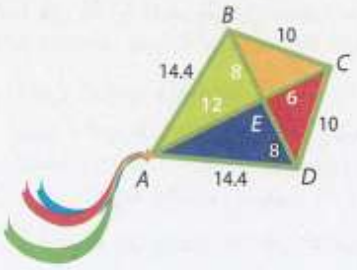
77. كل من النقاط H وJ وK تقع على أضلاع المثلث المختلفة.

78. النقاط X وY وZ تقع على استقامة واحدة؛ حيث تقع Z بين X وY.

79. $R(3, -4)$ و$S(-2, -4)$ و$T(0, -4)$

80. $A(-1, -7)$ و$B(4, -7)$ و$C(4, -3)$ و$D(-1, -3)$

81. الطائرات الورقية أصبح صنع طائرة ورقية أحد أشكال الفن *Venn*. تُعرف الطائرة الورقية المعروضة بالطائرة الماسية. القياسات بالسنتيمترات حدّد كافة القطع المستقيمة المتطابقة في الشكل.



ارجع إلى جداول التحويل في نهاية الكتاب.

82. الركض يشارك طارق في سباق خيري لمسافة 5 km نهاية الأسبوع المقبل. ما عدد الأميال التي يقطعها في السباق؟

83. الطبيعة فيل إفريقي يزن حوالي 9 Ton. فكم يساوي ذلك بالكيلوجرامات؟

84. الرياضة يبلغ طول ملعب كرة القدم 120 yd من إحدى منطقتي النهاية إلى الأخرى. فكم يبلغ طول الملعب بالقدم؟

مراجعة المهارات

الجبر حدد العملية المستخدمة لتغيير المعادلة (1) إلى المعادلة (2).

85. (1) $8(y - 11) = 32$
(2) $y - 11 = 4$

86. (1) $x + 9 = 4 - 3x$
(2) $4x + 9 = 4$

87. (1) $\frac{1}{3}m = 2$
(2) $m = 6$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10-3 عبارات ثنائية الشرط

مختبر الهندسة

بلال هو رامي اللعبة الأولى ضمن فريق كرة البيسبول بمدرسته الثانوية. إذا وقع اختيار مدربي المنطقة عليه، فسيقوم بتشكيل فريق كل النجوم. إذا قام بتشكيل فريق كل النجوم، فهذا يعني أن اختيار مدربي المنطقة وقع عليه.

p: وقع اختيار مدربي المنطقة على بلال

q: يشكل بلال فريق كل النجوم

$q \rightarrow p$: إذا وقع اختيار مدربي المنطقة على بلال، فسيشكل فريق كل النجوم.

$p \rightarrow q$: إذا شكل بلال فريق كل النجوم، فقد وقع اختيار مدربي المنطقة عليه.

في تلك الحالة، كلتا العبارة الشرطية وعكسها صواب، يسمى الربط بين العبارتين **ثنائية الشرط**.

المفهوم الأساسي العبارة ثنائية الشرط

التعبير اللفظي	العبارة ثنائية الشرط هي ربط عبارة شرطية وعكسها.
الرموز	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$، تقرأ: p إذا وفقط إذا q

إذا وفقط إذا يمكن اختصارها على هيئة إذا وفقط أحيانًا.

فتكون العبارة ثنائية الشرط على النحو التالي.

$q \leftrightarrow p$: يشكل بلال فريق كل النجوم إذا وفقط إذا وقع اختيار مدربي المنطقة عليه.

أمثلة

اكتب كل ثنائية الشرط في صورة عبارة شرطية وعكسها. ثم حدّد ما إذا كانت ثنائية الشرط صوابًا أم خطأً. إذا كانت خطأً، فاذكر مثالًا مضادًا.

a. تكون الزاوية قائمة إذا وفقط إذا كان قياسها 90.

العبارة الشرطية: إذا كان قياس زاوية 90، فإنها زاوية قائمة.
العكس: إذا كانت الزاوية قائمة، فإن قياسها هو 90.
عبارة الشرط والعكس صواب، إذًا ثنائية الشرط صواب.

b. $x > -2$ إذا وفقط إذا كان x موجبًا.

العبارة الشرطية: إذا كان x موجب، فإن $x > -2$.
العكس: إذا كان $x > -2$، فإن x موجب.
بفرض أن $x = -1$. إذًا $-1 > -2$. لكن -1 ليس موجبًا، إذًا، ثنائية الشرط خاطئة.

التمارين

اكتب كل ثنائية الشرط في صورة عبارة شرطية وعكسها. ثم حدّد ما إذا كانت ثنائية الشرط صوابًا أم خطأً. إذا كانت خطأً، فاذكر مثالًا مضادًا.

1. تكون الزاويتان متتامتين إذا وفقط إذا كان مجموع قياسهما يساوي 90.
2. لا تفتح المدرسة إذا وفقط إذا كان اليوم الجمعة.
3. يتقاطع المستقيمان إذا وفقط إذا لم يكونا أفقيين.
4. $|2x| = 4$ إذا وفقط إذا $x = 2$.
5. استخدم مكافئ منطقي لإنشاء جدول صواب يلخّص العبارة الشرطية والعكس وثنائية الشرط للعبارتين p و q.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

4-10 التبرير الاستنتاجي

السابق	الحالي	لماذا؟
• استخدمتَ التبرير الاستقرائي لتحليل الأنماط ووضع تخمينات.	1 استخدام قانون الفصل. 2 استخدام قانون القياس المنطقي.	• عندما يحاول المحققون حل إحدى القضايا، فإنهم يستخدمون تقنيات مثل أخذ بصمات الأصابع لتحليل الأدلة. ثم يستخدمون هذه الأدلة لاستبعاد المشتبه بهم والتعرف على الشخص المسؤول عن الجريمة في النهاية.

المفردات الجديدة
التبرير الاستنتاجي
deductive reasoning
صحيح valid
قانون الفصل
Law of Detachment
قانون القياس المنطقي
Law of Syllogism

1 قانون الفصل تُسمى العملية التي يستخدمها المحققون لتحديد المسؤول الأكثر احتمالًا عن الجريمة التبرير الاستنتاجي. وعلى عكس التبرير الاستقرائي الذي يستخدم نمطًا من الأمثلة أو الملاحظات لوضع تخمين، فإن **التبرير الاستنتاجي** يستخدم الحقائق أو القواعد أو التعريفات أو الخصائص للوصول إلى استنتاجات منطقية من العبارات المقدمة.

مثال 1 من الحياة اليومية التبرير الاستقرائي والاستنتاجي

حدّد ما إذا كان كل استنتاج يستند إلى تبرير *استقرائي* أم *استنتاجي*.

a. في كل مرة يرتدي فيها خالد حذاءه المفضل لتصويب الكرة، يحرز هدفًا واحدًا على الأقل. والليلة، سيرتدي خالد حذاءه المفضل للتصويب، ومن ثم يستنتج أنه سيحرز هدفًا واحدًا على الأقل.

ويبني خالد استنتاجه على نمط الملاحظات. ومن ثم فإنه يستخدم التبرير الاستقرائي.

b. إذا تأخر علي في سداد تأمين سيارته، فسيتحمل غرامة تأخير قدرها AED 50. وقد تأخر علي في السداد هذا الشهر. ولذا فإنه يستنتج أنه سيتحمل غرامة تأخير قدرها AED 50.

ويستند علي في استنتاجه إلى الحقائق المقدمة إليه من شركة التأمين. ومن ثم فإنه يستخدم التبرير الاستنتاجي.

تمرين موجّه

1A. تم تمييز كافة العناصر المميزة في قائمة المطعم المعروضة برمز خاص. يطلب أحمد عنصرًا مميزًا بالقائمة ويجواره هذا الرمز. ومن ثم يستنتج أن هذا العنصر الذي طلبه من العناصر المميزة.

1B. في كل مرة يذهب فيها طارق إلى المطعم يوم الخميس، يكون الجبن السويسري هو الطبق المميز. يذهب طارق إلى المطعم يوم الخميس. ومن ثم يستنتج أنّ الجبن السويسري سيكون الطبق المميز.

مع أن مثالًا مضادًا واحدًا يكفي لرفض تخمين تم التوصل إليه باستخدام التبرير الاستقرائي، فإنه ليس طريقة صائبة منطقيًا، أو **صحيحة**. لإثبات التخمين. فإثبات التخمين يتطلب التبرير الاستنتاجي. يمثل أحد أشكال التبرير الاستنتاجي الصحيحة في **قانون الفصل**.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

المفهوم الأساسي قانون الفصل

التعبير اللفظي إذا كانت $q \rightarrow p$ صائبة وكانت p صائبة، فإن q تكون صائبة.

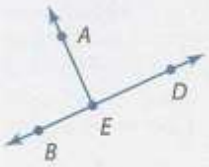
المثال *المعطيات:* إذا نفد الوقود من السيارة، فإنها لن تعمل.
نفد الوقود من سيارة سارة.

الاستنتاج الصحيح: لن تعمل سيارة سارة.

طالما كانت الحقائق المقدمة صائبة، فإن الاستنتاج الذي تم الخلوص إليه باستخدام التبرير الاستنتاجي سيكون صائبًا كذلك.

مثال 2 قانون الفصل

حدّد ما إذا كان كل استنتاج يُعد استنتاجًا صحيحًا وفق المعلومات المقدمة. إذا لم يكن صحيحًا، فاكتب غير صحيح. اشرح تبريرك.



a. المعطيات: إذا كونت زاويتان زوجًا خطيًّا، فإن ضلعيهما غير المشتركين يكونان شعاعَين متقابلَين.
تكوّن الزاويتان ∠AED و∠AEB زوجًا خطيًّا.

الاستنتاج: يُمثل كل من $\overrightarrow{ED}$ و$\overrightarrow{EB}$ شعاعَين متقابلَين.

الخطوة 1 حدّد الفرضية p والاستنتاج q للعبارة الشرطية الصائبة.

p: تكوّن زاويتان زوجًا خطيًّا.

q: ضلعاهما غير المشتركين شعاعان متقابلان.

الخطوة 2 حلّل الاستنتاج.

تُحقق العبارة المقدمة **يكوّن كل من ∠AED و∠AEB زوجًا خطيًّا** الفرضية، ومن ثم تُعد p صوابًا. ووفقًا لقانون الفصل، فإن **يُمثل كل من $\overrightarrow{ED}$ و$\overrightarrow{EB}$ شعاعَين متقابلين**، وهو ما يتوافق مع q. تُعد استنتاجًا صوابًا أو صحيحًا.

b. المعطيات: إذا ذهب أحمد إلى الشاطئ، فسيستخدم مستحضرات الوقاية من الشمس.
يستخدم أحمد مستحضرات الوقاية من الشمس.

الاستنتاج: يذهب أحمد إلى الشاطئ.

الخطوة 1 **p: يذهب أحمد إلى الشاطئ.**

q: يستخدم أحمد مستحضرات الوقاية من الشمس.

الخطوة 2 تحقق العبارة المقدمة بوضع *أحمد واقي الشمس*. الاستنتاج q للعبارة الشرطية الصائبة. ولكن لا تقتضي معرفة أنّ العبارة الشرطية واستنتاجها صائبان أن تكون الفرضية صوابًا. فقد يضع أحمد واقي الشمس لأنه سيذهب إلى حمام السباحة. الاستنتاج غير صحيح.

نصيحة دراسية
المعلومات المقدمة من الآن فصاعدًا في هذا الكتاب، يمكن افتراض أنّ جميع المعلومات المقدمة صائبة.

تمرين موجّه

2A. المعطيات: إذا وُجدت ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة، فإنها تحدّد مستوًى.
تقع النقاط A وB وC في المستوى G.

الاستنتاج: النقاط A وB وC ليست على استقامة واحدة.

2B. المعطيات: إذا قدّم الطالب إذنًا بالذهاب، فسيتمكن من الذهاب إلى الرحلة الميدانية.
قدّم خالد إذن الذهاب الخاص به.

الاستنتاج: يستطيع خالد الذهاب إلى الرحلة الميدانية.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

يمكنك أيضًا استخدام مخطط فن *Venn* لاختبار صحة الاستنتاج.

مثال 3 تقييم الاستنتاجات باستخدام مخططات فن *Venn*

الطبيعة **حدّد ما إذا كان كل استنتاج صحيحًا بدلالة المعلومات المقدمة. إذا لم يكن صحيحًا، فاكتب غير صحيح. اشرح تبريرك باستخدام مخطط فن *Venn*.**

المعطيات: **إذا كان الحيوان الرئيس قردًا، فلا ذيل له.**

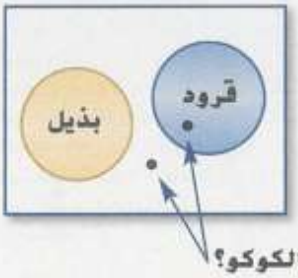
والكوكو حيوان رئيس بلا ذيل.

الاستنتاج: **الكوكو قرد.**

أفهم ارسم مخطط فن. وفقًا للعبارة الشرطية فليس للقرد ذيل. ومن ثم ارسم دائرة للقرود لا تتقاطع مع دائرة الرئيسات ذات الذيل.

أخطّط حيث تشير المعطيات إلى أن الكوكو بلا ذيل. فيمكننا فقط استنتاج أن الكوكو تنتمي إلى دائرة أخرى غير دائرة الرئيسات التي لها ذيل.

أحُل وهذا يمكن أن يضعها بمنطقة داخل دائرة القرود أو خارجها، ومن ثم يكون الاستنتاج غير صحيح.



أتحقّق نعرف من خلال المعلومات المقدمة أن القرود من الرئيسات التي بلا ذيل. كما أننا نعرف كذلك أنّ الكوكو من الرئيسات التي بلا ذيل. فمن المحتمل أن تبقى الكوكو من الرئيسات التي بلا ذيل دون أن تكون من القرود. ومن ثم يكون الاستنتاج غير صحيح. ✓

تمرين موجّه

3. **المعطيات:** إذا كان الشكل مربعًا، فإنه مضلع.
الشكل *A* مربع.

الاستنتاج: الشكل *A* مضلع.

الربط بالحياة اليومية

تُعد الطريقة الأسهل لتمييز السعادين عن الرئيسات الأخرى هي البحث عن ذيل. تمتلك معظم أنواع السعادين ذيولًا، على عكس القرود.

المصدر: *Encyclopaedia Britannica*

نصيحة دراسية

الحجج تتكون *الحجة* من أسباب وبرهان أو دليل لدعم الموقف. و*الحجة المنطقية* كالحجة الموضّحة، هي التي تدعمها قواعد المنطق. وتختلف هذه الحجة عن *الحجة الإحصائية* المدعومة بالأمثلة أو البيانات.

2 قانون القياس المنطقي

قانون القياس المنطقي هو صورة أخرى صحيحة للتبرير الاستنتاجي. يتيح لك هذا القانون الخلوص إلى استنتاجات من العبارات الشرطية الصائبة عندما يكون استنتاج إحدى العبارات بمثل فرضية العبارة الأخرى.

المفهوم الأساسي قانون القياس المنطقي

التعبير اللفظي إذا كان $p \rightarrow q$ و $q \rightarrow r$ عبارتين صائبتين، فإن $p \rightarrow r$ عبارة صائبة.

المثال *المعطيات:* إذا **حصلت على وظيفة**، فإنك **ستجني المال**.
إذا **جنيت المال**، فإنك **ستشتري سيارة**.

الاستنتاج الصحيح: إذا **حصلت على وظيفة**، فإنك **ستشتري سيارة**.

من المهم أن تتذكر أنه إذا كان استنتاج العبارة الأولى لا يمثل فرضية العبارة الثانية، فلا يمكن الخلوص إلى استنتاج صحيح.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال على الاختبار المعياري 4 قانون القياس المنطقي

حدد العبارة التي تنبثق منطقيًّا من العبارات المقدمة.

(1)إذا كنت تحب المسرحيات الموسيقية، فستستمتع بعروض المسرح.

(2)إذا كنت ممثلًا، فستستمتع بعروض المسرح.

A إذا كنت ممثلًا، فأنت تحب المسرحيات الموسيقية.

B إذا كنت تحب المسرحيات الموسيقية، فأنت ممثل.

C إذا كنت لا تستمتع بالمسرحيات الموسيقية، فأنت لست ممثلًا.

D لا يوجد استنتاج صحيح.

قراءة فقرة الاختبار

افترض أن p وq وr تمثل أجزاء العبارات الشرطية المقدمة.

p: أنت تحب المسرحيات الموسيقية.
q: أنت تستمتع بعروض المسرح.
r: أنت مُمثِّل.

حل فقرة الاختبار

حلّل منطق العبارة الشرطية المقدمة باستخدام الرموز.

العبارة (1): $p \rightarrow q$ العبارة (2): $r \rightarrow q$

يُعد كل من العبارتين صائبًا. ولكن لا ينطبق قانون القياس المنطقي لأن q. استنتاج العبارة (1)، ليس فرضية العبارة الثانية. وفي حين أنّ الخيارات A وB وC يمكن أن تكون صوابًا، يكون المنطق المستخدم للخلوص إلى هذه الاستنتاجات غير صحيح. ومن ثم يكون D هو الخيار الصحيح.

نصيحة عند حل الاختبار

الاستنتاجات الصواب مقابل الاستنتاجات الصحيحة الاستنتاج الصواب ليس هو الاستنتاج الصحيح. فالاستنتاجات الصائبة التي يتم الوصول إليها باستخدام التبرير الاستنتاجي غير الصحيح تبقى غير صحيحة.

تمرين موجّه

4. حدد العبارة التي تنبثق منطقيًّا من العبارات المقدمة.

(1) إذا لم تحصل على قسط كافٍ من النوم، فستشعر بالتعب.

(2) إذا شعرت بالتعب، فلن تؤدي جيدًا في الاختبار.

F إذا شعرت بالتعب، فلن تحصل على قسط كافٍ من النوم.

G إذا لم تحصل على قسط كافٍ من النوم، فلن تؤدي جيدًا في الاختبار.

H إذا لم تؤدّ جيدًا في الاختبار، فإنك لم تحصل على قسط كافٍ من النوم.

J لا يوجد استنتاج صحيح.

مثال 5 طبّق قوانين التبرير الاستنتاجي

اخلص إلى استنتاج صحيح من العبارات المقدمة، إن أمكن. ثم اذكر ما إذا كنت قد خلصت إلى استنتاجك باستخدام قانون الفصل أم قانون القياس المنطقي. إذا لم تتمكن من الخلوص إلى استنتاج صحيح، فاكتب *لا يوجد استنتاج صحيح* واشرح تبريرك.

المعطيات: إذا كان عمرك 16 عامًا، فيمكنك التقدم بطلب للحصول على رخصة قيادة. يبلغ حسن من العمر 16 عامًا.

p، أنت تبلغ من العمر 16 عامًا.

q، يمكنك التقدم بطلب للحصول على رخصة قيادة.

حيث تُحقق حسن *يبلغ من العمر 16 عامًا* الفرضية، فإن p صائبة. وفق قانون الفصل، سيكون الاستنتاج الصحيح *يمكن لحسن التقدم بطلب للحصول على رخصة قيادة*.

تمرين موجّه

5. **المعطيات:** تقسم نقطة المنتصف القطعة المستقيمة إلى قطعتين مستقيمتين متطابقتين. إذا كانت القطعتان المستقيمتان متطابقتين، فقياس طوليهما متساوٍ. M هي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة $\overline{AB}$.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة

تحقق من فهمك

مثال 1 **حدّد ما إذا كان كل استنتاج يستند إلى تبرير *استقرائي* أم *استنتاجي*.**

1) يجب أن يحصل الطلاب في مدرسة أماني الثانوية على متوسط تقدير جيد جدًا للمشاركة في الألعاب الرياضية. وقد حصلت أماني على متوسط تقدير جيد جدًا، لذلك تستنتج أنها تستطيع المشاركة في الألعاب الرياضية بالمدرسة.

2. تلاحظ حورية أن كل يوم سبت يقوم جارها بجز العشب الخاص به. اليوم هو السبت.
تستنتج حورية أن جارها سيقوم بجز العشب الخاص به.

مثال 2 **حدّد ما إذا كان الاستنتاج المذكور صحيحًا وفق المعلومات المقدمة. إذا لم يكن صحيحًا، فاكتب غير صحيح. اشرح تبريرك.**

3. **المعطيات:** إذا كان العدد يقبل القسمة على 4، فإنه يقبل القسمة على 2. العدد 12 يقبل القسمة على 4.

الاستنتاج: العدد 12 يقبل القسمة على 2.

4. **المعطيات:** إذا ظل بلال ساهرًا حتى وقت متأخر، فسوف يكون مُتعبًا اليوم التالي. بلال مُتعب.

الاستنتاج: ظل بلال ساهرًا حتى وقت متأخر.

مثال 3 **حدّد ما إذا كان الاستنتاج المذكور صحيحًا وفق المعلومات المقدمة. إذا لم يكن صحيحًا، فاكتب غير صحيح. اشرح تبريرك باستخدام مخطط فِن Venn.**

5. **المعطيات:** إذا كان الشاطئ عامًا، فلن يكون به حارس إنقاذ.
لا يوجد حارس إنقاذ بشاطئ بابفيو.

الاستنتاج: بابفيو شاطئ عام.

6. **المعطيات:** إذا اجتاز الطلاب امتحان القبول، فسيتم قبولهم في الكلية. اجتازت لمياء امتحان القبول.

الاستنتاج: سيتم قبول لمياء في الكلية.

مثال 4 7. **الاختيار من متعدد** حدّد العبارة تنبثق منطقيًا من العبارات المقدمة.

(1) إذا كان المثلث قائمًا، فإنه يحتوي على زاوية قياسها 90.

(2) إذا كان المثلث يحتوي على زاوية قياسها 90، فإن الزاويتين الحادتين به متتامتان.

A إذا كان المثلث ليس قائمًا، فإنه يحتوي على زاوية قياسها 90.

B إذا كان قياس إحدى زوايا المثلث 90، فإن الزاويتين الحادتين به غير متتامتين.

C إذا كان المثلث قائم الزاوية، فإن الزاويتين الحادتين به متتامتان.

D إذا كان قياس إحدى زوايا المثلث 90، فهو ليس بمثلث قائم الزاوية.

مثال 5 **الحجج اخلص إلى استنتاج صحيح من العبارات المقدمة، إن أمكن. ثم اذكر ما إذا كنت قد خلصت إلى استنتاجك باستخدام قانون الفصل أم قانون القياس المنطقي.**
إذا لم تتمكن من الخلوص إلى استنتاج صحيح، فاكتب لا يوجد *استنتاج* صحيح واشرح تبريرك.

8. **المعطيات:** إذا أنهت لمياء أعمالها المنزلية، فستحصل على مصروفها.

إذا حصلت على مصروفها، فستشتري قرصًا مضغوطًا.

9. **المعطيات:** الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة.

$\angle 1 \cong \angle 2$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

التمرين وحل المسائل

مثال 1 **حدد ما إذا كان كل استنتاج يستند إلى تبرير *استقرائي* أم *استنتاجي*.**

10. في مدرسة علي، إذا وصلت متأخرًا خمس مرات، فستتلقى أمر احتجاز. وصل علي إلى المدرسة متأخرًا خمس مرات؛ ومن ثم فإنه سيتلقى أمر احتجاز.

11. لاحظت مساعدة طبيب الأسنان أن ثمة مريض لم يلتزم بموعده قط. فاستنتجت أن هذا المريض سيأتي متأخرًا في موعده القادم.

12. يجب أن يكون لدى الشخص عضوية لممارسة التمارين الرياضية في صالة الألعاب الرياضية. يتدرب أدهم في صالة الألعاب الرياضية. لدى أدهم عضوية في صالة الألعاب الرياضية.

13. إذا قرر عمر الذهاب إلى حفل موسيقي الليلة، فسيفوته تدريب كرة القدم. ذهب عمر إلى الحفل الموسيقي الليلة. فاته تدريب كرة القدم.

14. تتلقى ليلى اتصالًا من والدتها كل أربعاء. اليوم الأربعاء. لذا تستنتج ليلى أن والدتها ستتصل بها.

15. كلما حضرت هالة جلسة التعليم الخاص، لاحظت أن درجاتها قد تحسنت. تحضر هالة جلسة التعليم الخاص وتستنتج أن درجاتها ستتحسن.

مثال 2 **النقد** **حدد ما إذا كان الاستنتاج المذكور صحيحًا وفقًا للمعلومات المقدمة. إذا لم يكن صحيحًا، فاكتب غير صحيح. اشرح تبريرك.**

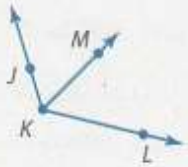
16. **المعطيات:** الزوايا القائمة متطابقة. $\angle 1$ و$\angle 2$ زاويتان قائمتان.

الاستنتاج: $\angle 2 \cong \angle 1$

17. **المعطيات:** إذا كان الشكل مربعًا، فإنه به أربع زوايا قائمة. يحتوي الشكل *ABCD* على أربع زوايا قائمة.

الاستنتاج: الشكل *ABCD* مربع.

18. **المعطيات:** منصف الزاوية يقسمها إلى زاويتين متطابقتين. $\overrightarrow{KM}$ هو منصف الزاوية $\angle JKL$.



الاستنتاج: $\angle JKM \cong \angle MKL$

19. **المعطيات:** إذا تركت المصابيح مضاءة أثناء عدم تشغيل السيارة، فسينفد شحن بطاريتك. ينفد شحن بطاريتك.

الاستنتاج: تركت المصابيح مضاءة أثناء عدم تشغيل السيارة.

20. **المعطيات:** إذا حصل ماجد على وظيفة بدوام جزئي، فيمكنه دفع ثمن السيارة. يستطيع ماجد دفع ثمن السيارة.

الاستنتاج: حصل ماجد على وظيفة بدوام جزئي.

21. **المعطيات:** إذا تم بيع 75% من تذاكر السباق، فسيقام السباق في نادي الدولة. تم بيع 75% من تذاكر السباق.

الاستنتاج: سيقام السباق في نادي الدولة.

22. **ألعاب الكمبيوتر** راجع تصنيفات اللعبة الموجودة في اليسار. حدد ما إذا كان الاستنتاج المذكور صحيحًا وفقًا للمعلومات المقدمة. إذا لم يكن صحيحًا، فاكتب غير صحيح. اشرح تبريرك.

المعطيات: إذا تم تصنيف العنوان بـ E، فسيتضمن محتوى قد يكون مناسبًا للأعمار من 6 سنوات فأكثر. اشترى عامر لعبة كمبيوتر يعتقد أنها مناسبة لأخته الصغيرة التي عمرها 7 سنوات.

الاستنتاج: تصنيف اللعبة التي اشتراها عامر هو E.

تصنيفات اللعبة

التصنيف	العمر
EC	3 سنوات فأكثر
E	6 سنوات فأكثر
E10+	10 سنوات فأكثر
T	13 سنة فأكثر
M	17 سنة فأكثر

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 **حدّد ما إذا كان الاستنتاج المذكور صحيحًا وفق المعلومات المقدمة. إذا لم يكن صحيحًا، فاكتب غير صحيح. اشرح تبريرك باستخدام مخطط فِن Venn.**

23. **المعطيات:** إذا انخفضت درجة الحرارة إلى أقل من 32°F، فقد يتساقط الثلج. لم تنخفض درجة الحرارة إلى أقل من 32°F يوم الاثنين.

الاستنتاج: لم يتساقط الثلج يوم الاثنين.

24. **المعطيات:** إذا كان الشخص يعيش في مدينة العين، فإنه لا يعيش جوار الشاطئ. لا يعيش زيد جوار الشاطئ.

الاستنتاج: زيد من سكان مدينة العين.

25. **المعطيات:** ترتدي بعض الممرضات الزي الأزرق. ليلى ممرضة.

الاستنتاج: ترتدي ليلى زيًا أزرق.

26. **المعطيات:** لا يأكل كل النباتيين اللحم. عمرو نباتي.

الاستنتاج: عمرو لا يأكل اللحم.

27 **وسائل النقل** توجد أنواع عديدة من المركبات ويتم تصنيفها باستخدام مجموعات مختلفة من المعايير. حدد ما إذا كان الاستنتاج المذكور صحيحًا وفقًا للمعلومات المقدمة. إذا لم يكن صحيحًا، فاكتب غير صحيح. اشرح تبريرك باستخدام مخطط فِن Venn.

المعطيات: إذا كانت المركبة سيارة رياضية، فهي سيارة دفع رباعي مصممة على هيكل شاحنة. اشترت السيدة نسرين سيارة دفع رباعي.

الاستنتاج: اشترت السيدة نسرين سيارة رياضية.

المثالان 4-5 28. **الجولف** فاز زاك جونسون ببطولة الماسترز عام 2007. استخدم قانون القياس المنطقي للخلوص إلى استنتاج صحيح من كل مجموعة من العبارات، إن أمكن. إذا لم تتمكن من الخلوص إلى استنتاج صحيح، فاكتب *لا يوجد استنتاج* صحيح واشرح تبريرك.

(1) إذا كانت ضربات زاك جونسون أقل ارتفاعًا من ضربات لاعبي الجولف الآخرين في نهاية البطولة، فإنه يفوز بالبطولة.

(2) إذا فاز لاعب الجولف ببطولة الماسترز، فسيحصل على سترة خضراء.

فرضيات استخدم قانون القياس المنطقي للخلوص إلى استنتاج صحيح من كل مجموعة من العبارات، إن أمكن. إذا لم تتمكن من الخلوص إلى استنتاج صحيح، فاكتب *لا يوجد استنتاج* صحيح واشرح تبريرك.

29. إذا كنت ستجري مقابلة للحصول على وظيفة، فسترتدي بدلة.

إذا كنت ستجري مقابلة للحصول على وظيفة، فستحدّث سيرتك الذاتية.

30. إذا حصلت فاطمة على متوسط نقاط 3.0 أو أكثر، فستُدرج في قائمة الشرف.

وإذا كانت مدرجة في قائمة الشرف، فسيُذكر اسمها في صحيفة المدرسة.

31. إذا تعامد مستقيمان، فإنهما سيتقاطعان ليكوّنا زوايا قائمة.

يكوّن المستقيمان r وs زوايا قائمة.

32. إذا كان قياس الزاوية يتراوح بين 90 و180 درجة، فإنها منفرجة.

إذا كانت الزاوية منفرجة، فإنها ليست حادة.

33. إذا كان المستقيمان في المستوى غير متوازيين، فإنهما سيتقاطعان.

إذا تقاطع مستقيمان، فإنهما يتقاطعان في نقطة.

34. إذا كان العدد ينتهي بالرقم 0، فإنه يقبل القسمة على 2.

إذا كان العدد ينتهي بالرقم 4، فإنه يقبل القسمة على 2.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

اخلص إلى استنتاج صحيح من العبارات المقدمة، إن أمكن. ثم اذكر ما إذا كنت قد خلصت إلى استنتاجك باستخدام قانون الفصل أم قانون القياس المنطقي. إذا لم تتمكن من الخلوص إلى استنتاج صحيح، فاكتب *لا يوجد استنتاج صحيح* واشرح تبريرك.

35. **المعطيات:** إذا كان الشكل مربعًا، فإن جميع الأضلاع متطابقة.

الشكل *ABCD* مربع.

36. **المعطيات:** إذا كانت الزاويتان متتامتين، فإن مجموع قياسيهما 90 درجة.

الزاويتان $\angle 1$ و$\angle 2$ متتامتان.

37. **المعطيات:** يحب الموسيقيون الموسيقى الكلاسيكية.

إذا كنت تحب الموسيقى الكلاسيكية، فستستمتع بالأوبرا.

38. **المعطيات:** إذا كنت رياضيًا، فستستمتع بممارسة الرياضة.

إذا كنت متنافسًا، فستستمتع بالرياضة.

39. **المعطيات:** إذا كان المضلع منتظمًا، فإنّ جميع أضلاعه متطابقة.

جميع أضلاع المضلع *WXYZ* متطابقة.

40. **المعطيات:** إذا أتم حسن الدورة التدريبية بتقدير جيد، فلن يحصل على الائتمان.

إذا لم يحصل حسن على الائتمان، فسيلزمه خوض الدورة التدريبية مرة أخرى.

41. **تحليل البيانات** يوضح الجدول عدد لتسديدات لبعض أعضاء إصابات المضرب وافريق فلوريدا مارلينز في الموسم الحالي.

إصابات المضرب	التسديدات
13	6
576	195
240	79
502	139
157	36
64	11

المصدر: ESPN

a. أنشئ مخطط انتشار لتمثيل البيانات.

b. توقع عدد التسديدات التي سيحصل عليها اللاعب الذي أحرز 300 إصابة للمضرب. حدّد تبريرك واشرحه.

c. هل سيحقق اللاعب الذي أحرز 157 إصابة للمضرب تسديدات أكثر أم اللاعب الذي أحرز 240 إصابة للمضرب؟ ما نوع التبرير الذي استخدمته؟ اشرح.

مسائل مهارات التفكير العليا استخدام مهارات التفكير العليا

42. **الكتابة في الرياضيات** اشرح لماذا لا يمكن استخدام قانون القياس المنطقي للخلوص إلى استنتاج من هذه العبارات الشرطية.

إذا ارتديت قفازات شتوية، فستصبح يدك دافئة.

إذا لم تصبح يدك دافئة، فإن قفازاتك رقيقة للغاية.

43. **تحفيز** استخدم الرموز الخاصة بـ *الربط* و*الفصل* من الدرس 2-4، والرمز الذي يشير إلى "يقتضي" من الدرس 3-4 لتمثيل قانون الفصل وقانون القياس المنطقي رمزيًا. افترض أن p تمثل الفرضية، وq تمثل الاستنتاج.

44. **نهاية مفتوحة** اكتب زوجًا من العبارات التي يمكن خلالها استخدام قانون القياس المنطقي للخلوص إلى استنتاج صحيح. حدد الاستنتاج الذي يمكن الخلوص إليه.

45. **التبرير** ينقسم الطلاب في صف المعلم أيمن إلى مجموعتين لإجراء أحد الأنشطة. فيلزم طلاب المجموعة A قول الحقيقة دائمًا، ويلزم طلاب المجموعة B الكذب دائمًا. وكان أسامة وبلال في صف المعلم أيمن. وعندما سُئل أسامة عما إذا كان هو وبلال في المجموعة A أم B، قال: "كلانا في المجموعة B." فإلى أي مجموعة ينتمي كل طالب؟ اشرح تبريرك.

46. **الكتابة في الرياضيات** قارن وقابل بين التبرير الاستقرائي والتبرير الاستنتاجي عند الخلوص إلى استنتاجات وإثبات التخمينات.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

تدريب على الاختبار المعياري

47. حدد العبارة التي تنطق منطقيًا من العبارات المقدمة.

إذا طلبت شطيرتي بوريتو، فستحصل كذلك على طبق ناتشوز.

طلب أسامة شطيرتي بوريتو.

A طلب أسامة شطيرة بوريتو واحدة.

B سيطلب أسامة شطيرتي بوريتو.

C طلب أسامة طبق ناتشوز.

D يحصل أسامة على طبق ناتشوز.

48. الجبر حل لإيجاد x.

$$4(x + 2) = x - 1$$

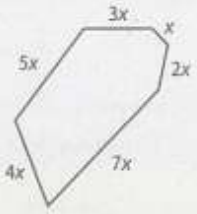
F -3

G -5

H -6

J -8

49. إجابة مختصرة إذا كان محيط الشكل الموضح 52 وحدة، فجد قيمة x؟



50. اختبار الكفاءة الدراسية/اختبار القبول للكليات الأمريكية إذا كانت نسبة 30% من x تساوي 50، فإن نسبة 60% من x تساوي

A 300

B 250

C 175

D 150

E 100

مراجعة شاملة

51. الوقت تراعي كافة الولايات في الولايات المتحدة التوقيت الصيفي باستثناء ولايتي أريزونا وهاواي. (الدرس 3–4) انظر الهامش.

a. اكتب عبارة شرطية صائبة بصيغة إذا كان–فإن للتوقيت الصيفي.

b. اكتب عكس العبارة الشرطية الصائبة. حدد ما إذا كانت العبارة *صائبة* أم *خاطئة*. إذا كانت خاطئة، فاذكر مثالًا مضادًا.

أنشئ جدول الصواب لكل عبارة مركّبة. (الدرس 2–4)

52. a و b

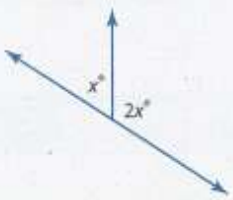
53. p أو $\sim q$

54. k و $\sim m$

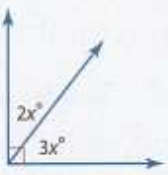
55. y أو $\sim z$

الجبر جد x.

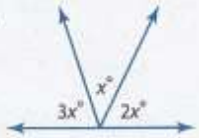
56.



57.

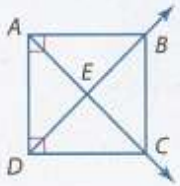


58.



مراجعة المهارات

حدد ما إذا كان يمكن افتراض كل عبارة من الشكل. اشرح.



59. $\angle DAB$ زاوية قائمة.

60. $\angle AEB \cong \angle DEC$

61. $\angle ADB$ و $\angle BDC$ متتامتان.

62. $\angle DAE \cong \angle ADE$

63. $\overline{AB} \perp \overline{BC}$

64. $\angle AEB$ و $\angle BEC$ متكاملتان.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10 دليل الدراسة والمراجعة

دليل الدراسة

المفاهيم الأساسية

التبرير الاستقرائي والمنطق (الدرسان 1-10 و2-10)

- التبرير الاستقرائي: تخمين يتم التوصل إليه بناءً على ملاحظات نمط سابق
- المثال المضاد: مثال يثبت خطأ التخمين
- نفي الجملة p : $\sim p$
- العطف: جملة مركبة تتكون باستخدام الحرف **و**
- العطف التخييري: جملة مركبة تتكون باستخدام الحرف **أو**

الجمل الشرطية (الدرس 3-10)

- تُكتب جملة إذا كان- فإن بالصيغة إذا كان p، فإن q والتي يمثل فيها p الفرضية وq يمثل الاستنتاج.

الجملة	$p \rightarrow q$
العكس	$q \rightarrow p$
المعكوس	$\sim p \rightarrow \sim q$
المكافئ العكسي	$\sim q \rightarrow \sim p$

العبارات الاستنتاجي (الدرس 4-10)

- قانون الفصل: إذا كان $p \rightarrow q$ صائبة وp صائبة، فإن q صائبة كذلك.
- قانون القياس المنطقي: إذا كان $p \rightarrow q$ و$q \rightarrow r$ صائبة، فإن $p \rightarrow r$ صائبة كذلك.

مطويات منظّم الدراسة

تأكد من تدوين المفاهيم الأساسية في مطويتك.

المفردات الأساسية

إثبات جبري	عبارة إذا كان- فإن
مسلّمة	الاستنتاج الاستقرائي
جملة مركبة	إثبات غير شكلي
الاستنتاج	المعكوس
عبارة شرطية	متكافئ منطقي-
التخمين	النفي
العطف	فقرة إثبات
المكافئ العكسي	المسلّمة
العكس	الإثبات
المثال المضاد	الجمل الشرطية ذات الصلة
فرضية استنتاجية	الجملة
التبرير الاستنتاجي	النظرية
العطف التخييري	جدول الصواب
إثبات شكلي	قيمة الصواب
الفرضية	إثبات من عمودين

مراجعة المفردات

اذكر ما إذا كانت كل جملة مما يلي صوابًا أم خطأ. إذا كانت خطأ، فاستبدل المصطلح الموجود تحته خط بحيث تصبح الجملة صحيحة.

1. المسلمة هي عبارة تتطلب إثباتًا.
2. الجزء الأول من جملة إذا-فإن هو التخمين.
3. يستخدم التبرير الاستنتاجي قوانين الرياضيات للوصول إلى استنتاجات منطقية من العبارات المعطاة.
4. يتكون المكافئ العكسي بواسطة نفي الفرضية والاستنتاج في عبارة شرطية.
5. يتكون الاستنتاج بواسطة ربط عبارتين أو أكثر بالحرف و.
6. النظرية هي عبارة مسلم بصحتها من دون إثبات.
7. ينشأ العكس بواسطة مبادلة الفرضية واستنتاج عبارة شرطية.
8. لإثبات خطأ التخمين، يجب عليك تقديم عطف نخسي.
9. معكوس عبارة p يجب كتابته بالصيغة ليس p.
10. في إثبات من عمودين، تسمى الخصائص التي تبرر كل خطوة الأسباب.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مراجعة درس بدرس

10–1 التبرير الاستقرائي والتخمين

حدّد ما إذا كان كل تخمين صوابًا أم خطأ. إذا كان خطأ، فاذكر مثالًا مضادًا.

11. إذا كان ∠1 و∠2 زاويتين متكاملتين، فإن ∠1 و∠2 يكونان زاوية مستقيمة.

12. إذا كان $W(-3, 2)$ و$X(-3, 7)$ و$Y(6, 7)$ و$Z(6, 2)$، فإن الشكل الرباعي $WXYZ$ هو مستطيل. صواب

13. **الحدائق** يستمتع حسن بالتنزه مع كلبه في الغابة في حديقته المحلية. عندما كان يقضي عطلة في حديقة صقر بارك في رأس الخيمة، كان محبطًا لأنه لا يسمح باصطحاب الكلاب إلى معظم مسارات السير. اطرح تخمينًا عن سبب اختلاف القواعد بين حديقته المحلية والحديقة الوطنية بشأن الحيوانات الأليفة.

مثال 1

حدّد ما إذا كان كل تخمين صوابًا أم خطأ. إذا كان خطأ، فاذكر مثالًا مضادًا.

a. **يعد $c = d, d = c$ مثالًا على خاصية الأعداد الحقيقية.**

يعد $c = d, d = c$ مثالًا على خاصية تناظر الأعداد الحقيقية. لذلك يعد التخمين صوابًا.

b. **إذا كان $AB + CD = AD$، فإن B وC يقعا بين A وD.**

هذا التخمين خطأ. في الشكل أدناه، $AB + CD = AD$، لكن B وC ليسا بين A وD.

10–2 المنطق

استخدم العبارات التالية لكتابة عبارة مركبة لكل عطف أو عطف تخييري. ثم جد قيمة الصواب لها. اشرح.

p: يحتوي المستوى على ثلاث نقاط على الأقل ليست على استقامة واحدة.

q: تعادل اليادرة المربعة ثلاثة أقدام مربعة.

r: مجموع قياس زاويتين متتامتين يساوي 180.

14. $\sim q \vee r$ 15. $p \wedge \sim r$ 16. $\sim p \vee q$

17. **الحيوانات الأليفة** يوضح رسم فن Venn التخطيطي نتائج مسح محل الحيوانات الأليفة لتحديد الحيوانات الأليفة التي يمتلكها الزبائن.

a. كم عدد الزبائن الذين لديهم أسماك فقط؟

b. كم عدد الذين لديهم قطط وطيور؟

c. كم عدد الذين لديهم طيور وأسماك؟

مثال 2

استخدم العبارات التالية لكتابة عبارة مركبة لكل ربط أو فصل. ثم جد قيمة الصواب لها. اشرح.

***p*: x^2 هو عدد لا سلبي.**

***q*: تقع الزاويتان المتجاورتان على المستوى نفسه.**

***r*: العدد السالب ليس عددًا حقيقيًا.**

a. $\sim q \wedge r$

$\sim q \wedge r$: لا تقع الزاويتان المتجاورتان على المستوى نفسه، والعدد السالب ليس عددًا حقيقيًا.

بما أن $\sim q$ وr خطأ، فإن $\sim q \wedge r$ خطأ.

b. p أو r

p أو r: x^2 هو عدد غير سالب، أو العدد السالب ليس بعدد حقيقي.

p أو r صواب لأن p صواب. ولا يهم أن r خطأ.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10 دليل الدراسة والمراجعة يتبع

10–3 العبارات الشرطية

حدّد قيم الصواب لكل عبارة شرطية. إذا كانت صوابًا، فاشرح استنتاجك. إذا كانت خطأ، فاذكر مثالًا مضادًا.

18. إذا قمت بتربيع عدد صحيح، فتكون النتيجة عددًا صحيحًا موجبًا.

19. إذا تضمن شكل سداسي ثمانية أضلاع، فإن جميع زواياه ستكون منفرجة.

20. اكتب العكس والمعكوس والمكافئ العكسي للعبارة الشرطية الصحيحة التالية. ثم حدّد ما إذا كانت عبارة جملة شرطية ذات صلة صوابًا أم خطأ. إذا كانت العبارة خطأ، فاذكر مثالًا مضادًا.

إذا تطابقت زاويتان، فإن لهما قياس الدرجات نفسه.

مثال 3

اكتب العكس والمعكوس والمكافئ العكسي للعبارة الشرطية الصحيحة التالية.

إذا كان الشكل مربعًا، فإنه متوازي أضلاع.

العكس: إذا كان الشكل متوازي أضلاع، فإنه يكون مربعًا.

المعكوس: إذا لم يكن الشكل مربعًا، فإنه لا يكون متوازي أضلاع.

المكافئ العكسي: إذا لم يكن الشكل متوازي أضلاع، فإنه ليس مربعًا.

10–4 التبرير الاستنتاجي

استنتج خلاصة صالحة من العبارات المعطاة، إن أمكن. ثم اذكر ما إذا كنت قد استخدمت في استنتاج الخلاصة قانون الفصل أم قانون القياس المنطقي. إذا لم يمكن استنتاج خلاصة صالحة، فاكتب لا توجد خلاصة صالحة واشرح استنتاجك.

21. المعطيات: إذا تضمن شكل رباعي قطرين ينصفان بعضهما، فإن هذا الشكل متوازي أضلاع.

قطرا الشكل الرباعي PQRS ينصفان بعضهما.

22. المعطيات: إذا كانت أسماء تعاني في حصة العلوم، فستتلقى درسًا خصوصيًا.

إذا كانت أسماء تبقى بعد المدرسة يوم الخميس، فستتلقى درسًا خصوصيًا.

23. **الزلازل** حدّد ما إذا كان الاستنتاج المذكور صالحًا استنادًا إلى المعلومات المعطاة أم لا. إذا لم يكن كذلك، فاكتب غير صالح. اشرح.

المعطيات: إذا بلغ قياس زلزال 7.0 أو أعلى على مقياس ريختر، فإنه يعد زلزالًا كبيرًا يمكن أن تنتج عنه أضرار بالغة. بلغ قياس زلزال سان فرانسيسكو عام 1906 8.0 على مقياس ريختر.

الاستنتاج: كان زلزال سان فرانسيسكو عام 1906 كبيرًا نتجت عنه أضرار بالغة.

مثال 4

استخدم قانون القياس المنطقي لتحديد ما إذا كان يمكن التوصل إلى استنتاج صالح من العبارات التالية.

(1) إذا كان قياس زاوية أكبر من 90، فتكون زاوية منفرجة.

(2) إذا كانت الزاوية منفرجة، فلا تكون زاوية قائمة.

p: قياس الزاوية أكبر من 90

q: الزاوية هي زاوية منفرجة

r: الزاوية ليست زاوية قائمة

العبارة (1): $p \rightarrow q$

العبارة (2): $q \rightarrow r$

حيث إن العبارة المعطاة صحيحة، فاستخدم قانون القياس المنطقي لاستنتاج أن $p \rightarrow r$، بمعنى، إذا كان قياس زاوية أكبر من 90، فلا تكون زاوية قائمة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10 تدريب على الاختبار

اكتب تخمينًا يصف النمط في كل سلسلة. ثم استخدم تخمينك لإيجاد العنصر التالي في السلسلة.

1. 15, 30, 45, 60

2.

استخدم العبارات التالية لكتابة عبارة مركبة لكل ربط أو فصل تخييري. ثم جـد قيمة الصواب لها.

p: $5 < -3$

q: جميع الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة.

r: إذا كان $4x = 36$، فإن $x = 9$.

3. q و p

4. $(p \vee q) \wedge r$

5. **إثبات** اكتب فقرة إثبات.

المعطيات: $\overline{JK} \cong \overline{CB}$, $\overline{KL} \cong \overline{AB}$

برهن أن: $\overline{JL} \cong \overline{AC}$

6. **الألعاب الرياضية** راجع رسم فن Venn التخطيطي الذي يمثّل طلاب الألعاب الرياضية الذين اختاروا اللعب في مدرسة الجنوب الثانوية العام الماضي.

a. صف الألعاب الرياضية التي اختارها الطلاب في النسبة غير المتقاطعة من منطقة التنس.

b. كم عدد الطلاب الذين لعبوا كرة القدم والتنس؟

7. حدّد ما إذا كان الاستنتاج المذكور صالحًا استنادًا إلى المعلومات المعطاة أم لا. إذا لم يكن كذلك، فاكتب غير صالح. اشرح استنتاجك.

المعطيات: إذا اجتاز المحامي اختبار نقابة المحامين، فيمكنه ممارسة مهنة المحاماة. اجتاز علي اختبار نقابة المحامين.

الاستنتاج: يمكن لعلي ممارسة مهنة المحاماة.

8. **إثبات** انسخ الإثبات التالي وأكمله.

المعطيات: $3(x - 4) = 2x + 7$

برهن أن: $x = 19$

الإثبات:

العبارات	الأسباب
a. $3(x - 4) = 2x + 7$	a. المعطيات
b. $3x - 12 = 2x + 7$	b. ؟
c. ؟	c. خاصية الطرح
d. $x = 19$	d. ؟

حدّد ما إذا كانت كل عبارة صحيحة دائمًا أم أحيانًا أم غير صحيحة على الإطلاق.

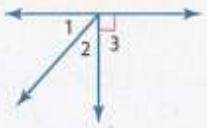
9. الزاويتان المتكاملتان تكونان زاوية مستقيمة.

10. إذا كان B بين A وC، فإن $AC + AB = BC$.

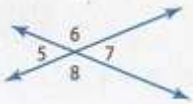
11. إذا تقاطع خطان لتكوين زاويتين متطابقتين متجاورتين، فإن الخطين متعامدان.

جـد قياس كل زاوية مرقّمة وحدد النظريات التي تبرر عملك.

12. $m\angle 1 = x$, $m\angle 2 = x - 6$



13. $m\angle 7 = 2x + 15$, $m\angle 8 = 3x$



اكتب كل عبارة بصيغة إذا-فإن.

14. قياس الزاوية الحادة أقل من 90.

15. خطان متعامدان يتقاطعان لتكوين زوايا قائمة.

16. **الاختيار من متعدد** إذا كان مثلث يتضمن زاوية منفرجة واحدة، فيكون مثلث منفرجًا.

أي العبارات التالية هي المكافئ العكسي للعبارة الشرطية أعلاه؟

A إذا لم يكن المثلث منفرجًا، فإنه يتضمن زاوية منفرجة واحدة.

B إذا لم يتضمن المثلث زاوية منفرجة واحدة، فإنه ليس مثلثًا منفرجًا.

C إذا لم يكن المثلث منفرجًا، فإنه لا يتضمن زاوية منفرجة واحدة.

D إذا كان المثلث منفرجًا، فإنه يتضمن زاوية منفرجة واحدة.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10 التحضير للاختبارات المعيارية

التفكير المنطقي

كثيرًا ما يتطلب حل المسائل الهندسية استخدام التفكير المنطقي. يمكنك استخدام أساسيات التفكير المنطقي لمساعدتك على حل المسائل في الاختبارات المعيارية.

إستراتيجيات استخدام التفكير المنطقي

الخطوة 1

اقرأ المسألة لتحديد المعطيات وما تحتاج إلى إيجاده للإجابة عن السؤال.

الخطوة 2

حدّد ما إذا كان بإمكانك تطبيق أحد مبادئ التفكير المنطقي على المسألة.

- المثال المضاد: ينافي المثال المضاد عبارة كان من المعروف أنها صحيحة.

  حدّد أي خيارات إجابة تنافي نص المسألة واستبعدها.

- المسلّمات: المسلّمة هي عبارة تصف علاقة أساسية في الهندسة.

  حدّد ما إذا كان بإمكانك تطبيق مسلّمة لاستنتاج خلاصة منطقية.

الخطوة 3

إذا لم تتمكن من الوصول إلى خلاصة باستخدام المبادئ الواردة في الخطوة 2 فقط، فحدد ما إذا كانت إحدى
الأدوات أدناه مفيدة.

- **الأنماط**: ابحث عن نمط للتخمين.
- **جداول الصواب**: استخدم جدول الصواب لتنظيم قيم الصواب للعبارة الواردة في المسألة.
- **رسم مخطط فِن *Venn***: استخدم رسم مخطط فِن *Venn* لتمثيل العلاقات بين عناصر المجموعات بوضوح.
- **الإثباتات**: استخدم التبرير الاستنتاجي والاستقرائي للوصول إلى خلاصة في صيغة إثبات.

الخطوة 4

إذا كان لا يزال يتعذر عليك الوصول إلى خلاصة باستخدام الأدوات الواردة في الخطوة 3، فأعد **تخمينًا**. أو تخمينًا مدروسًا. بشأن خيار الإجابة الأكثر منطقية. ثم حدد
المسألة بحيث يمكنك الرجوع إليها إذا توفر لديك وقت إضافي في نهاية الامتحان.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال للتدريب على الاختبار المعياري

اقرأ المسألة. وحدد ما تحتاج إلى معرفته. ثم استخدام المعلومات الواردة في المسألة لحلها.

في مدرسة تضم 292 طالبًا. يشارك 94 طالبًا في الألعاب الرياضية و122 في النوادي الأكاديمية و31 في كليهما. كم عدد طلاب المدرسة الذين لا يشاركون في الألعاب الرياضية أو النوادي الأكاديمية؟

A 95

B 107

C 122

D 138

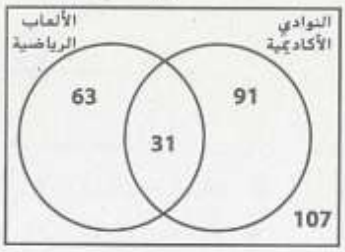
اقرأ المسألة بعناية. لا توجد أمثلة مضادة واضحة. ولا يمكن استخدام مسلّمة لاستنتاج خلاصة منطقية. ومن ثم، فكّر في الأدوات التي يمكنك استخدامها لتنظيم المعلومات.

يمكن استخدام رسم فن *Venn* التخطيطي لتوضيح تقاطع مجموعتين. أعد رسم فن Venn التخطيطي باستخدام المعلومات الواردة في نص المسألة.

حدّد عدد الطلاب المشاركين في الألعاب الرياضية فقط أو النوادي الأكاديمية فقط.

الألعاب الرياضية فقط: $94 - 31 = 63$

النوادي الأكاديمية فقط: $122 - 31 = 91$



استخدم المعلومات لحساب عدد الطلاب الذين لا يشاركون في الألعاب الرياضية أو النوادي الأكاديمية.

$292 - 63 - 91 - 31 = 107$

يوجد 107 طلاب لا يشاركون في الألعاب الرياضية أو النوادي الأكاديمية. الإجابة الصحيحة هي B.

التمارين

اقرأ كل سؤال. ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي يقدمها إليك معلمك أو في أي ورقة أخرى.

1. حدّد صحة العبارة التالية. إذا كانت العبارة خاطئة. فاذكر مثالًا مضادًا.

يكون ناتج ضرب عددين زوجيين عددًا زوجيًا.

A خطأ: $8 \times 4 = 32$

B خطأ: $7 \times 6 = 42$

C خطأ: $3 \times 10 = 30$

D صواب

2. جد العنصر التالي في النمط.

F

H

G

J

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10 تدريب على الاختبار المعياري

تراكمي

الاختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال. ثم اكتب الإجابة الصحيحة في ورقة الإجابة التي يقدمها إليك معلمك أو في أي ورقة أخرى.

1. ما العطف الصحيح بالنسبة إلى العبارتين p و q أدناه؟

p: توجد أربعة أحرف في كلمة MATH.

q: يوجد حرفان متحركان في كلمة MATH.

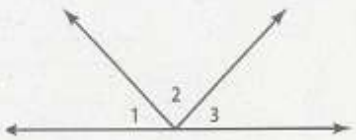
A $\sim p \wedge \sim q$

B $p \wedge q$

C $p \wedge \sim q$

D $\sim p \wedge q$

2. في الرسم التخطيطي أدناه، $\angle 1 \cong \angle 3$.



أي من الاستنتاجات التالية لا يُعد صحيحًا؟

F $m\angle 1 - m\angle 2 + m\angle 3 = 90$

G $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180$

H $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 2 + m\angle 3$

J $m\angle 2 - m\angle 1 = m\angle 2 - m\angle 3$

3. تكوّن الزاويتان المتكاملتان زوجًا خطيًا دائمًا.

أي مما يلي يصف المثال المضاد للتأكيد أعلاه على النحو الأفضل؟

A زاويتان حادتان

B زاويتان غير متجاورتين

C زاويتان منفرجتان

D زاويتان قائمتان

4. حدّد العبارة المنطقية من العبارات المعطاة.

إذا أمطرت اليوم، فستُلغى المباراة.
وتُجرى المباريات الملغاة في أيام السبت.

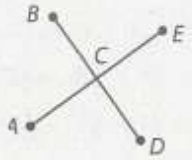
F إذا أُلغيت مباراة، فكان ذلك بسبب المطر.

G إذا أمطرت اليوم، فستُجرى المباراة يوم السبت.

H لا تُجرى بعض المباريات الملغاة في أيام السبت.

J إذا لم تُمطر اليوم، فلن تُجرى المباراة يوم السبت.

5. في الرسم التخطيطي، يتقاطع $\overline{BD}$ مع $\overline{AE}$ عند C.
أي من الاستنتاجات التالية لا يُعد صحيحًا؟



A $\angle ACB \cong \angle ECD$

B تكوّن $\angle ACB$ و$\angle ACD$ زوجًا خطيًا.

C تُعد $\angle BCE$ و$\angle ACD$ زاويتين متقابلتين بالرأس.

D تُعد $\angle BCE$ و$\angle ECD$ زاويتين متتامتين.

6. يحتاج مزارع إلى إنشاء حظيرة مسيجة مستطيلة مساحتها $1000\ m^2$ لأبقاره. ويريد توفير المال عن طريق شراء أقل قدر ممكن من السياج لإحاطة المساحة. ما العدد الكلي للأبعاد التي ستتطلب أقل قدر من السياج؟

F 8 m في 125 m

G 10 m في 100 m

H 20 m في 50 m

J 25 m في 40 m

نصيحة عند حل الاختبار

السؤال 3 يُعد المثال المضاد مثالًا مستخدمًا لتوضيح أن العبارة المعطاة ليست صحيحة دائمًا.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

إجابة مختصرة/إجابة شبكية

دوّن إجابتك في ورقة الإجابات التي زوّدك بها المعلّم أو أي ورقة عادية.

7. تقع النقاط A وB وC وD على استقامة واحدة، مع وقوع النقطة B بين النقطتين A وC والنقطة C بين النقطتين B وD. أكمل العبارة.

$$AB + \underline{\quad ؟ \quad} = AD$$

8. **إجابة شبكية** بفرض أن المستقيم m يتضمن النقاط D وE وF. إذا كان $DE = 12$ ملليمترًا و$EF = 15$ ملليمترًا وتقع النقطة D بين النقطتين E وF. فجد طول $\overline{DF}$؟ عبّر عن إجابتك بالملليمترات.

9. استخدم الإثبات للإجابة عن السؤال.

المعطيات: الزاوية $\angle A$ هي المتممة للزاوية $\angle B$.
$m\angle B = 46$

برهن أن: $m\angle A = 44$

الإثبات:

العبارات	المبررات
1. تُعد الزاوية A متممة للزاوية $\angle B$، $m\angle B = 46$.	1. المعطيات
2. $m\angle A + m\angle B = 90$	2. تعريف الزاويتين المتتامتين
3. $m\angle A + 46 = 90$	3. خاصية التعويض
4. $m\angle A + 46 - 46 = 90 - 46$	4. ؟
5. $m\angle A = 44$	5. خاصية التعويض

ما السبب الذي يمكن تقديمه لتبرير العبارة 4؟

10. اكتب المكافئ العكسي للعبارة.
إذا بلغ قياس زاوية أكبر من $90°$. فإنها زاوية متفرجة.

11. **إجابة شبكية** تمثل النقطة E نقطة المنتصف لـ $\overline{DF}$. إذا كان $DE = 8x - 3$ و$EF = 3x + 7$. فما قيمة x؟

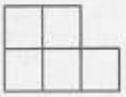
إجابة موسعة

سجّل إجاباتك على أي ورقة. اكتب الحل هنا.

12. فكر في النمط.

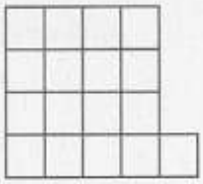
الشكل 1

الشكل 2



الشكل 3

الشكل 4



a. خمّن عدد المربعات في كل شكل.

b. اكتب تعبيرًا جبريًا يمكن استخدامه لإيجاد عدد المربعات في الشكل رقم n في النمط.

c. ما عدد المربعات اللازمة لإنشاء الشكل رقم 6 من النمط؟

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

كتيب الطالب

الرموز والصيغ والمفاهيم الأساسية

الرموز EM-1

القياسات EM-2

العمليات والعلاقات الحسابية EM-3

الصيغ والمفاهيم الجبرية EM-3

الصيغ والمفاهيم الهندسية EM-5

الدوال والمتطابقات المثلثية EM-6

الدوال الأصلية والعمليات الحسابية على الدوال EM-7

النهايات والتفاضل والتكامل EM-7

الصيغ والمفاهيم الاحصائية EM-8

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الرموز

الجبر

$\neq$	لا يساوي
$\approx$	تقريبًا يساوي
$\sim$	يشابه
$>, \geq$	أكبر من، أكبر من أو يساوي
$<, \leq$	أصغر من، أصغر من أو يساوي
$-a$	معكوس a أو المعكوس الجمعي لـ a
$\lvert a \rvert$	القيمة المطلقة لـ a
$\sqrt{a}$	الجذر التربيعي الأساسي لـ a
$a : b$	نسبة a إلى b
(x, y)	زوج مرتّب
(x, y, z)	مجموعة مرتبة ثلاثية العناصر (ثلاثي مُرتّب)
i	الوحدة التخيلية
$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$	الجذر النوني لـ b
$\mathbb{Q}$	الأعداد النسبية
$\mathbb{I}$	الأعداد غير النسبية
$\mathbb{Z}$	الأعداد الصحيحة
$\mathbb{W}$	الأعداد الكاملة
$\mathbb{N}$	الأعداد الطبيعية
∞	ما لا نهاية
$-\infty$	سالب ما لا نهاية
$[\,]$	تتضمن الأطراف
$(\,)$	لا تتضمن الأطراف
$\log_b x$	لوغاريتم x للأساس b
$\log x$	اللوغاريتم العادي لـ x
$\ln x$	اللوغاريتم الطبيعي لـ x
ω	أوميجا، السرعة الزاوية
α	ألفا، قياس الزاوية
β	بيتا، قياس الزاوية
γ	جاما، قياس الزاوية
θ	ثيتا، قياس الزاوية
λ	لامدا، طول الموجة
ϕ	فاي، قياس الزاوية
$\mathbf{a}$	متجه a
$\lvert \mathbf{a} \rvert$	طول المتجه a

المجموعات والمنطق

$\in$	ينتمي إلى
$\subset$	مجموعة جزئية من
$\cap$	تقاطع
$\cup$	اتحاد
$\varnothing$	المجموعة الخالية
$\sim p$	نفي p، ليس p
$p \wedge q$	ربط p و q
$p \vee q$	فصل p أو q
$p \rightarrow q$	العبارة الشرطية، إذا كان p فإن q
$p \leftrightarrow q$	العبارة ثنائية الشرط، p إذا وفقط إذا q

الهندسة

$\angle$	زاوية
$\triangle$	مثلث
$^\circ$	درجة
π	باي pi
$\measuredangle$	درجات
$m\angle A$	قياس $\angle A$
$\overleftrightarrow{AB}$	مستقيم يحتوي على النقطتين A و B
$\overline{AB}$	مستقيم نقطتاه الطرفيتان A و B
$\overrightarrow{AB}$	الشعاع من النقطة A الى النقطة B
AB	قياس $\overline{AB}$، المسافة بين A و B
$\parallel$	يوازي
$\nparallel$	لا يوازي
$\perp$	متعامد على
$\triangle$	مثلث
$\square$	متوازي أضلاع
n-gon	مضلع عدد أضلاعه n
$\vec{a}$	متجه a
$\overrightarrow{AB}$	المتجه من A إلى B
$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$	مقدار متجه من A إلى B
A'	صورة الصورة الأصلية A
$\rightarrow$	موضوع على
$\odot A$	دائرة مركزها A
$\overset{\frown}{AB}$	قوس أصغر نقطتاه الطرفيتان A و B
$\overset{\frown}{ABC}$	قوس أكبر نقطتاه الطرفيتان A و C
$m\overset{\frown}{AB}$	قياس درجة القوس AB

حساب المثلثات

$\sin x$	جيب الزاوية x
$\cos x$	جيب تمام الزاوية x
$\tan x$	ظل الزاوية x
$\sin^{-1} x$	Arcsin x
$\cos^{-1} x$	Arccos x
$\tan^{-1} x$	Arctan x

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الرموز

الدوال

$f(x)$	f لـ x، قيمة f لـ x
$f(x) = \begin{cases} \end{cases}$	دالة متعددة التعريف
$f(x) = \lvert x \rvert$	دالة القيمة المطلقة
$f(x) = [x]$	دالة أكبر عدد صحيح ليس أكبر من x
$f(x, y)$	f لـ x و y، دالة متغيراها x وy
$[f \circ g](x)$	f لـ g لـ x، تركيب الدالتين f وg
$f^{-1}(x)$	معكوس $f(x)$

النهايات والتفاضل والتكامل

$\lim_{x \to c}$	النهاية عندما تقترب x من c
m_{sec}	ميل القاطع
$f'(x)$	مشتقة الدالة $f(x)$
Δ	دلتا، أو مقدار التغيير
$\int$	تكامل غير محدود
$\int_a^b$	تكامل محدود
$F(x)$	مشتقة عكسية للدالة $f(x)$

الاحصاء والاحتمالات

$P(a)$	احتمال a
$P(n, r)$ أو nP_r	تباديل n من العناصر مأخوذ منها r عنصر في كل مرة
$C(n, r)$ أو nC_r	توافيق n من العناصر مأخوذ منها r عنصر في كل مرة
$P(A)$	احتمال A
$P(A\|B)$	احتمال A إذا علمت أن B حدث بالفعل
$n!$	مضروب العدد n (حيث n عدد طبيعي)
$\sum$	سيجما، رمز المجموع
μ	متوسط مجتمع إحصائي
σ	الانحراف المعياري لمجتمع إحصائي
σ^2	تباين المجتمع الإحصائي
s	الانحراف المعياري لعينة
s^2	تباين العينة
$\sum_{n=1}^{k}$	مجموع من n = 1 إلى k
$\overline{x}$	متوسط x ، متوسط العينة
H_0	فرضية العدم
H_a	الفرضية البديلة

القياسات

متري	عُرفي
الطول	
1 كيلومتر (km) = 1000 متر (m)	1 ميل (mi) = 1760 يادة (yd)
1 متر = 100 سنتيمتر (cm)	1 ميل = 5280 قدمًا (ft)
1 سنتيمتر = 10 ملليمتر (mm)	1 يادة = 3 أقدام
	1 قدم = 12 بوصة (in)
	1 يادة = 36 بوصة
الحجم والسعة	
1 لتر (L) = 1000 ملليلتر (mL)	1 جالون (gal) = 4 أرباع (qt)
1 كيلولتر (kL) = 1000 لتر	1 جالون = 128 أونصة سائلة (fl oz)
	1 كوارت = 2 بايت (pt)
	1 بايت = 2 كوب (c)
	1 كوب = 8 أونصات سائلة
الوزن والكتلة	
1 كيلوجرام (kg) = 1000 جرام (g)	1 طن (T) = 2000 رطل (lb)
1 جرام = 1000 ملليجرام (mg)	1 رطل = 16 أونصة (oz)
1 طن متري (t) = 1000 كيلوجرام	

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الخواص والعلاقات الحسابية

المحايد	لأي عدد a، يكون $a + 0 = 0 + a = a$ و $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
التعويض (=)	إذا كان $a = b$، يمكن التعويض عن a باستخدام b.
الانعكاس (=)	$a = a$
التماثل (=)	إذا كان $a = b$، فإن $b = a$.
التعدي (=)	إذا كان $a = b$ و $b = c$، فإن $a = c$.
التبديل	لأي عددين a و b، $a + b = b + a$ و $a \cdot b = b \cdot a$.
التجميع	لأي أعداد a و b و c، $(a + b) + c = a + (b + c)$ و $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
التوزيع	لأي أعداد a و b و c، $a(b + c) = ab + ac$ و $a(b - c) = ab - ac$.
المعكوس الجمعي	لأي عدد a، يوجد عدد واحد فقط $-a$ بحيث $a + (-a) = 0$.
المعكوس الضربي	لأي عدد $\frac{a}{b}$، حيث $a \neq 0$ و $b \neq 0$، يوجد عدد واحد فقط $\frac{b}{a}$ بحيث $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.
الضرب (0)	لأي عدد a، يكون $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.
الجمع (=)	لأي أعداد a و b و c، إذا كان $a = b$، فإن $a + c = b + c$.
الطرح (=)	لأي أعداد a و b و c، إذا كان $a = b$، فإن $a - c = b - c$.
الضرب والقسمة (=)	لأي أعداد a و b و c، حيث $c \neq 0$، إذا كان $a = b$، فإن $ac = bc$ و $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$.
الجمع (>)*	لأي أعداد a و b و c، إذا كان $a > b$، فإن $a + c > b + c$.
الطرح (>)*	لأي أعداد a و b و c، إذا كان $a > b$، فإن $a - c > b - c$.
الضرب والقسمة (>)*	لأي أعداد a و b و c. 1. إذا كان $a > b$ و $c > 0$، فإن $ac > bc$ و $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. 2. إذا كان $a > b$ و $c < 0$، فإن $ac < bc$ و $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
ناتج الضرب الصفري	لأي عددين حقيقيين a و b، إذا كان $ab = 0$، فإن $a = 0$ أو $b = 0$ أو a و b كلاهما 0.

* تنطبق هذه الخواص كذلك على $<$ و $\geq$ و $\leq$.

الصيغ والمفاهيم الجبرية

المصفوفات

الجمع	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$	**الضرب في كمية عددية**	$k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$
الطرح	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$	**الضرب**	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$

كثيرات الحدود

القانون العام	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a \neq 0$	**مربع فرق**	$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$ $= a^2 - 2ab + b^2$
مربع مجموع	$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$ $= a^2 + 2ab + b^2$	**ناتج ضرب مجموع وفرق**	$(a+b)(a-b) = (a-b)(a+b)$ $= a^2 - b^2$

اللوغاريتمات

خاصية الضرب	$\log_x ab = \log_x a + \log_x b$	**خاصية الأس الثابت**	$\log_b m^p = p \log_b m$
خاصية القسمة	$\log_x \frac{a}{b} = \log_x a - \log_x b, b \neq 0$	**تغيير الأساس**	$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدوال الأسية واللوغاريتمية

المرابحة المركبة	$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$	النمو أو الاضمحلال الأسي	$N = N_0(1 + r)^t$
النمو المركب المستمر	$A = Pe^{rt}$	النمو أو الاضمحلال الأسي المستمر	$N = N_0e^{kt}$
خاصية الضرب	$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$	خاصية القوة	$\log_b x^p = p \log_b x$
خاصية القسمة	$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$	خاصية تغيير الاساس	$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

المتتاليات والمتسلسلات

الحد النوني لمتتالية حسابية	$a_n = a_1 + (n - 1)d$	الحد النوني لمتتالية هندسية	$a_n = a_1r^{n-1}$
مجموع متسلسلة حسابية	$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)$ أو $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$	مجموع متسلسلة هندسية	$S_n = \frac{a_1 - a_1r^n}{1 - r}$ أو $S_n = \frac{a_1 - a_nr}{1 - r}, r \neq 1$
مجموع متسلسلة هندسية لانهائية	$S = \frac{a_1}{1 - r}, \lvert r \rvert < 1$	صيغة أويلر	$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$
متسلسلة القوة	$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$	المتسلسلة الأسية	$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

نظرية ذات الحدين

$$(a + b)^n = {}_nC_0\, a^nb^0 + {}_nC_1\, a^{n-1}b^1 + {}_nC_2\, a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_r\, a^{n-r}b^r + \cdots + {}_nC_n\, a^0b^n$$

متسلسلة القوة للجيب وجيب وجيب التمام

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

المتجهات

الجمع في المستوى	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$	الجمع في الفضاء	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$
الطرح في المستوى	$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$	الطرح في الفضاء	$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$
الضرب القياسي في المستوى	$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$	الضرب القياسي في الفضاء	$k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$
الضرب النقطي في المستوى	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$	الضرب النقطي في الفضاء	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
الزاوية بين متجهين	$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert}$	مسقط u على v	$\text{proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\lvert\mathbf{v}\rvert^2}\right)\mathbf{v}$
طول المتجه	$\lvert\mathbf{v}\rvert = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	الضرب القياسي لثلاثة متجهات	$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

معادلة المستقيم في المستوى الإحداثي

صيغة الميل والمقطع	$y = mx + b$
صيغة النقطة والميل	$y - y_1 = m(x - x_1)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الصيغ والمفاهيم الجبرية

القطوع المخروطية

قطع مكافئ	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$ أو $(y-k)^2 = 4p(x-h)$	دائرة	$x^2 + y^2 = r^2$ أو $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$
قطع ناقص	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$	قطع زائد	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ أو $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
الدوران المحوري للقطوع المخروطية	$y' = y\cos\theta - x\sin\theta$ و $x' = x\cos\theta + y\sin\theta$		

المعادلات الوسيطية

الموقع العمودي	$y = tv_0 \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 + h_0$	المسافة الأفقية	$x = tv_0 \cos\theta$

الاعداد المُركبة

صيغة الضرب	$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$	صيغة القسمة	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$
صيغة الجذور المختلفة	$r^{\frac{1}{p}}\left(\cos\frac{\theta + 2n\pi}{p} + i\sin\frac{\theta + 2n\pi}{p}\right)$	نظرية ديموافر	$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n$ أو $r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

الصيغ والمفاهيم الهندسية

الهندسة الإحداثية

الميل	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_2 \neq x_1$	المسافة على خط الأعداد	$d = \lvert a - b \rvert$
المسافة بين نقطتين في المستوى	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	طول القوس	$\ell = \frac{x}{360} \cdot 2\pi r$
نقطة المنتصف في المستوى الاحداثي	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$	نقطة المنتصف على خط الأعداد	$M = \frac{a+b}{2}$
نقطة المنتصف في الفضاء	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$	نظرية فيثاغورس	$a^2 + b^2 = c^2$

المحيط

مربع	$P = 4s$	مستطيل	$P = 2\ell + 2w$	دائرة	$C = 2\pi r$ أو $C = \pi d$

مساحة السطح الجانبية

منشور	$L = Ph$	هرم	$L = \frac{1}{2}P\ell$
إسطوانة	$L = 2\pi rh$	مخروط	$L = \pi r\ell$

مساحة السطح الكلية

منشور	$S = Ph + 2B$	مخروط	$S = \pi r\ell + \pi r^2$	إسطوانة	$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$
هرم	$S = \frac{1}{2}P\ell + B$	كرة	$S = 4\pi r^2$	مكعب	$S = 6s^2$

الحجم

منشور	$V = Bh$	مخروط	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h^2$	إسطوانة	$V = \pi r^2 h$
هرم	$V = \frac{1}{3}Bh$	كرة	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	مكعب	$V = s^3$
متوازي مستطيلات	$V = \ell wh$				

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الدوال والمتطابقات المثلثية

الدوال المثلثية

النسب المثلثية	$\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$	$\cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$	$\tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
	$\sec\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}} = \frac{1}{\cos\theta}$	$\csc\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}} = \frac{1}{\sin\theta}$	$\cot\theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
قانون جيوب التمام	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$
قانون الجيوب	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$	صيغة هيرون	$\text{Area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
السرعة الخطية	$v = \frac{s}{t}$	السرعة الزاوية	$\omega = \frac{\theta}{t}$

المتطابقات المثلثية

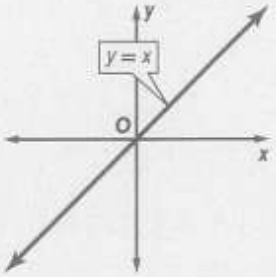
متطابقات المقلوب	$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}$	$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$	$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$
	$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$	$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$
متطابقات فيثاغورس	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$	$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$
متطابقات المتممات	$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\tan\theta = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\sec\theta = \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
	$\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\cot\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\csc\theta = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
متطابقات الفردي والزوجي	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$
	$\csc(-\theta) = -\csc\theta$	$\sec(-\theta) = \sec\theta$	$\cot(-\theta) = -\cot\theta$
متطابقات المجموع والفرق	$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$		$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
	$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$		$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
	$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$		$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$
متطابقات ضعف الزاوية	$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$	$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$	$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$
	$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$	$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$	
متطابقات تخفيض الأس	$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$	$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$	$\tan^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$
متطابقات نصف الزاوية	$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}}$	$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}}$	
	$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}}$	$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}$	$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}$
متطابقات تحويل الضرب إلى مجموع أو فرق	$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$		$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$
	$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$		$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$
متطابقات تحويل المجموع أو الفرق إلى ضرب	$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$		$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$
	$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$		$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة حقوق الطبع والتأليف ©

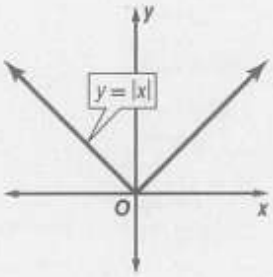
الدوال الأصلية والعمليات الحسابية على الدوال

الدوال الأصلية

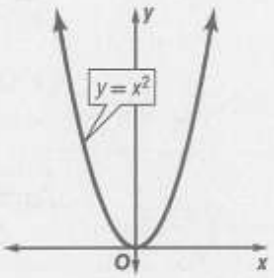
الدوال الخطية



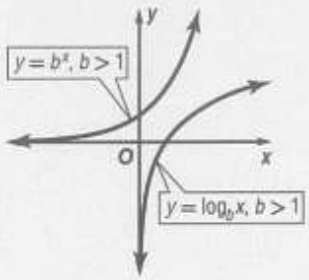
دوال القيمة المطلقة



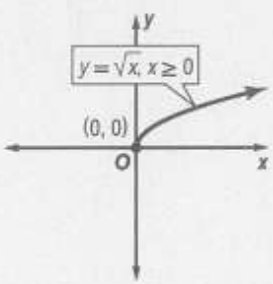
الدوال التربيعية



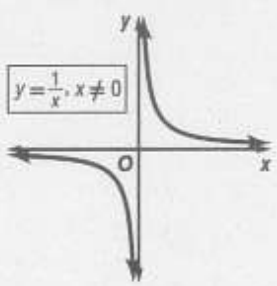
الدوال الأسية واللوغاريتمية



دوال الجذر التربيعي



الدوال العكسية والنسبية



العمليات الحسابية على الدوال

الجمع	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	**الضرب**	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
الطرح	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	**القسمة**	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

النهايات والتفاضل والتكامل

النهايات

نهاية مجموع دالتين	$\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$	**نهاية طرح دالتين**	$\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$
نهاية قسمة دالتين	$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$ ، إذا كان $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$	**نهاية دالة مرفوعة لأس**	$\lim_{x\to c}[f(x)^n] = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^n$
السرعة	اللحظية: $v(t) = \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ ؛ المتوسطة: $v_{avg} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$	**نهاية الجذر النوني لدالة**	$\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$ ، إذا كان $\lim_{x\to c} f(x) > 0$ ؛ و n عدد زوجي

التفاضل

قاعدة القوة	إذا كان $f(x) = x^n$ فإن $f'(x) = nx^{n-1}$	**المجموع أو الفرق**	إذا كان $f(x) = g(x) \pm h(x)$ فإن $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$
قاعدة الضرب	$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	**قاعدة القسمة**	$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

التكامل

التكامل غير المحدود	$\int f(x)\,dx = F(x) + C$	**النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل**	$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

الصيغ والمفاهيم الاحصائية

قيمة z لمتوسط العينة	$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$	قيمة z	$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$
الحد الأقصى لقيمة التوقع	$E = z \cdot \sigma_{\bar{x}}$ or $z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	خاصية ذات الحدين	$P(X) = {}_nC_x\, p^x q^{n-x} = \frac{n!}{(n-x)!\,x!}\, p^x q^{n-x}$
فترة الثقة في توزيع t	$CI = \bar{x} \pm t \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$	فترة الثقة، في توزيع طبيعي	$CI = \bar{x} \pm E$ or $\bar{x} \pm z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
معامل الارتباط لاختبار t	$t = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$. درجات الحرية: $n - 2$	معامل الارتباط	$r = \frac{1}{n-1}\sum\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x}\right)\left(\frac{y_i - \bar{y}}{s_y}\right)$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

شکر و تقدیر

نسخة الطلاب

P. ix Hi Brow Arabia/Alamy Stock Photo; **P. viii** ©Photographer›s Choice/Getty Images; **P. x** Flame/Alamy; **P. xi** IM_photo/Shutterstock.com; **P. xii** Ruzanna/Shutterstock.com; **P. xiii** Frankris/Shutterstock.com; **P. xiv** Charles Knowles/Alamy, Charles Knowles/Alamy; **P. xix** Ingram Publishing; **P. xv** Jean-Pierre Pieuchot/Photodisc/Getty Images, Glow Images; **P. xvi** Aha-Soft/Shutterstock.com, LatinStock Collection/Alamy; **P. xvii** Jeremy-Richards/Shutterstock.com; **P. xviii** JeremyRichards/Shutterstock.com; **P. xx** ImageSource/Age Fotostock; **P. 362** Charles Knowles/Alamy; **P. 367** Ollyy/Shutterstock.com; **P. 369** Digital Vision/Alamy; **P. 374** Serghei Starus/Shutterstock.com; **P. 375** Glow Images; **P. 382** David Acosta Allely/Zoonar GmbH/Alamy; **P. 384** Artush/Shutterstock.com; **P. 388** fStop/SuperStock; **P. 396** Inti St Clair/Blend Images/Getty Images; **P. 405** CORBIS InsideOutPix/Photolibrary/Index Stock; **P. 408** GLG3/Photodisc/Getty Images; **P. 412** Amit Basu/Alamy; **P. 413** LWA/Dann Tardif/Blend Images/Getty Images; **P. 418** Kostenko Maxim/Shutterstock.com; **P. 424** Don Farrall/Digital Vision/Getty Images; **P. 438** Palladium/Age Fotostock; **P. 442** Glow Images; **P. 445** Tetra Images/Alamy Stock Photo; **P. 447** Library of Congress Prints and Photographs Division [LC-USZ62-60242]; **P. 452** Kris Wiktor/Shutterstock.com; **P. 453** Prometheus72/Shutterstock.com; **P. 455** Visionsi/Shutterstock.com; **P. 456** Photo by Scott Bauer/U.S. Department of Agriculture; **P. 460** MITO images/Alamy Images; **P. 463** Pixtal/age fotostock; **P. 464** ©Design Pics/The Irish Image Collection/Getty Images; **P. 465** EQRoy/Shutterstock.com; **P. 468** Purestock/SuperStock; **P. 477** Eyecon Images/Alamy; **P. 496** Mazer Creative Services/McGraw-Hill Education; **P. 500** (b)Aha-Soft/Shutterstock.com; **P. 502** Duda Vasilii/Shutterstock.com; **P. 508** Mitrofanov Alexander/Shutterstock RF; **P. 522** ©Momentum Creative Group/Alamy; **P. 537** ptnphoto@123RF.com;
P. 539 3alexd/iStock/Getty Images; **P. 547** John Carleton/Flickr/Getty Images; **P. 548** Naufal MQ/Getty Images RF; **P. 558** Jeremy-Richards/Shutterstock.com; **561** Andia/Alamy; **565** Oleksiy Maksymenko/age fotostock; **P. 577** michaeljung/Shutterstock.com; **P. 580** Pixtal/age fotostock; **P. 585** Studio_G/Shutterstock.com; **P. 586** Amy Myers/Shutterstock.com; **P. 587** Dorling Kindersley/Getty Images; **P. 589** Inu/Shutterstock.com; **P. 600** Lauren Nicole/Photographer's Choice RF/Getty Images.

ملاحظات الطالب