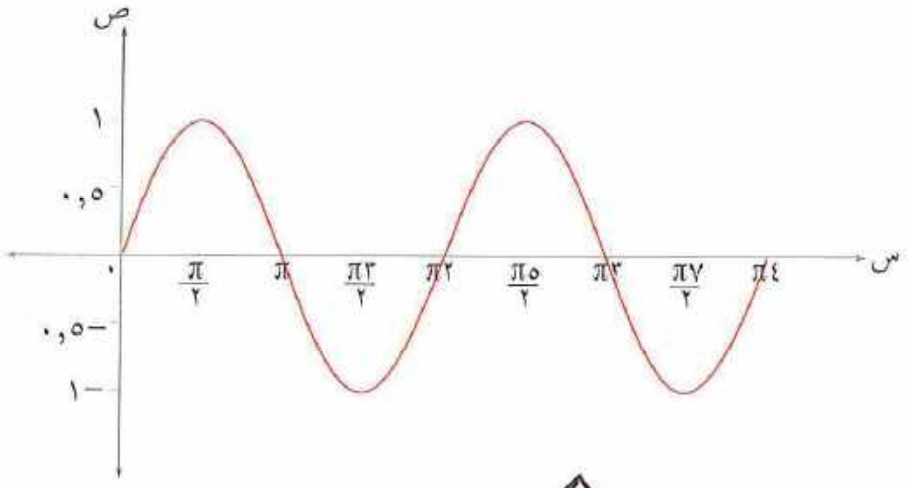
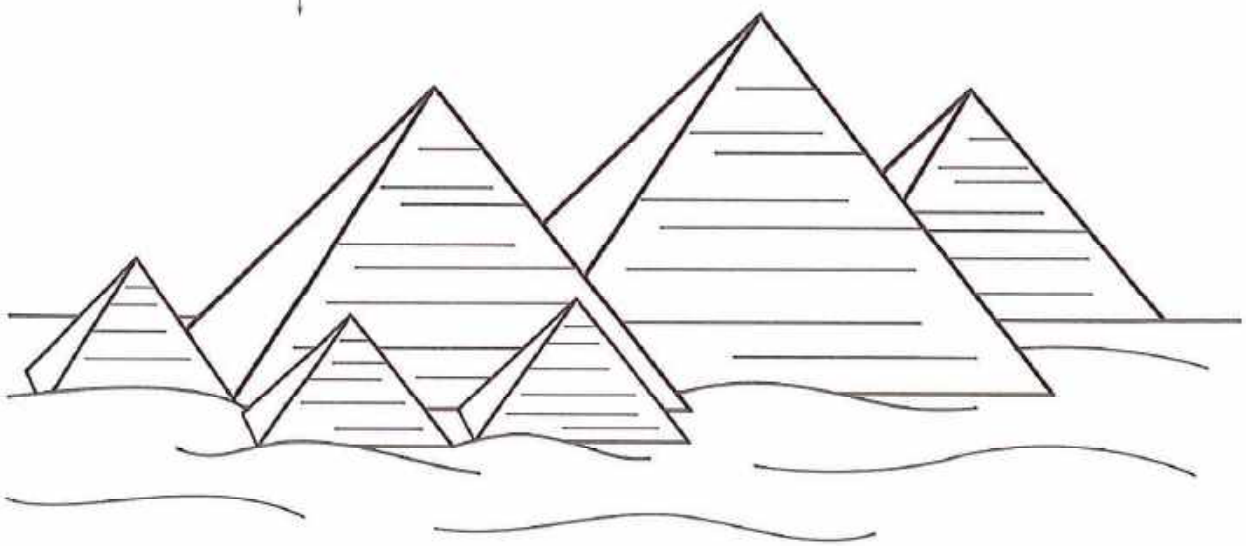
الفصل الدراسي الثاني

منذ البدء اهتم العلماء بحساب المثلثات و كان أكثر اهتمامهم بالزوايا و الأضلاع. وللمثلثات أهمية في المجالات كافةً مثل الهندسة، الفلك، الملاحة، والمساحة ومع تطور علم الفيزياء، وظهور علم التكامل و التفاضل تطور علم المثلثات وزادت أهميته، و كان أول من اهتم بحساب المثلثات الفراعنة القدماء و استخدموا هذا العلم في بناء الأهرامات، ثم أصبح علماً مستقلاً بذاته، وأشهر العلماء المسلمين المهتمين به : (الزرقلي، ونصير الدين الطوسي، وأبو عبد الله البتّاني).





Trigonometric Functions

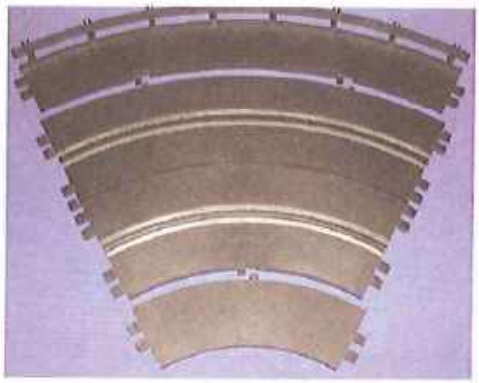
يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادرا على:

- التمييز بين التقدير الدائري، و القياس الستيني، وحلّ مسائل عليهما.
- استقصاء خصائص الاقترانات المثلثية (الجيب ، جيب التمام ، والظل).
- رسم منحنيات الاقترانات المثلثية يدويًا وباستخدام التكنولوجيا.
- إيجاد الدورة والسعة والمجال والمدى للاقترانات المثلثية (جاهـ ، جتاهـ ، ظاهـ) (إن أمكن ذلك).
- وصف سلوك منحنى الاقتران تحت تأثير التحويلات (الانسحاب الرأسي و الأفقي).
- تحليل متطابقات مثلثية جبريًا (تشمل مجموع زاويتين والفرق بينهما، نصف الزاوية، وضعف الزاوية).
- برهنة المتطابقات المثلثية.
- حلّ معادلات مثلثية (الحلُّ الأوّلي والحلُّ العام) جبريًا.
- حلّ مشكلات تتعلق بالاقترانات المثلثية وتبرير الحل.

التقدير الدائري والقياس الستيني
Degree and Radian Measure

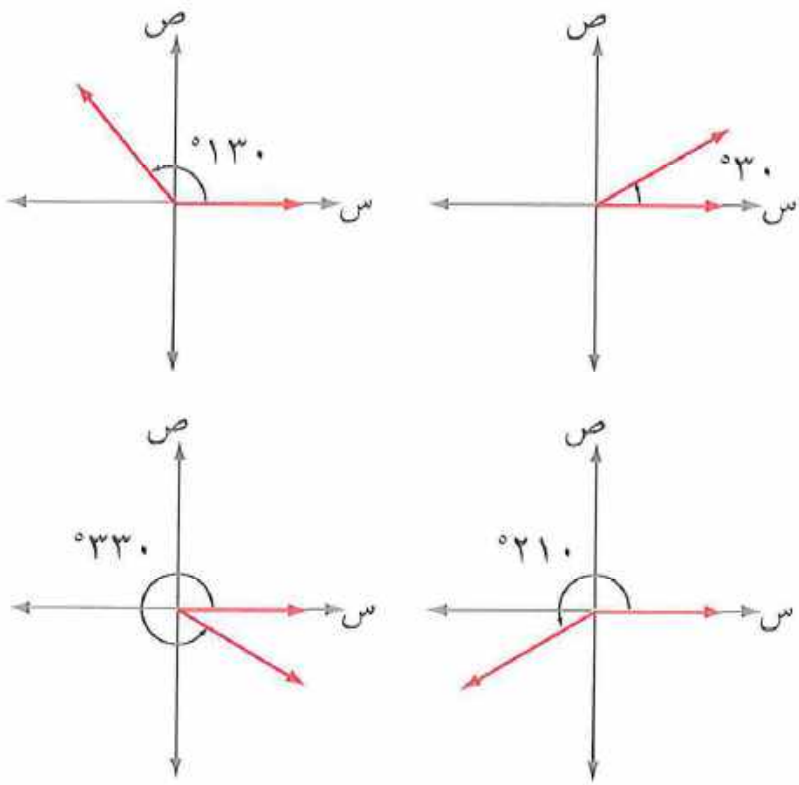
النتاجات

- تميز بين التقدير الدائري والقياس الستيني وتحول بينهما.
- تستخدم التقدير الدائري لإيجاد طول قوس في دائرة.



في لعبة للأطفال يمكن تركيب مضمار دائري لسباق سيارتين يتكون من (١٠) قطع متطابقة، كل واحدة منها تأخذ شكل قوس دائري بحيث يكون طول القوس الداخلي أقصر من طول القوس الخارجي بمقدار (٣,١٤) سم، ما عرض القطعة؟

تعلمت في الصفوف السابقة أن الزاوية عبارة عن شعاعين منطلقين من النقطة نفسها، يسمى أحدهما ضلع الابتداء والضلع الآخر يسمى ضلع الانتهاء، فإذا كان ضلع ابتداء الزاوية منطبقًا على محور السينات الموجب ورأسها في نقطة الأصل، فإن هذه الزاوية تكون في الوضع القياسي لها، و الشكل (٤-١) يوضح بعض الأمثلة على هذه الزوايا.



الشكل (٤-١).

إذا كان اتجاه الدوران الذي تقاس به الزاوية عكس عقارب الساعة يكون قياس الزاوية موجب، أما إذا كان اتجاه الدوران مع عقارب الساعة يكون قياس الزاوية سالبًا، انظر الشكل (٤-٢).

الشكل (٤-٢).

وقد تشترك أكثر من زاوية في ضلع الانتهاء وذلك نتيجة لدوران ضلع الانتهاء أكثر من دورة حول نقطة الأصل.

ويعبر عن ذلك على الصورة (هـ + ٣٦٠° × ن) حيث ن عدد صحيح، ٠ < هـ < ٣٦٠°.

مثال (١)

حدد الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء (أو المحور الذي ينطبق عليه ضلع الانتهاء) لكل زاوية مما يأتي:

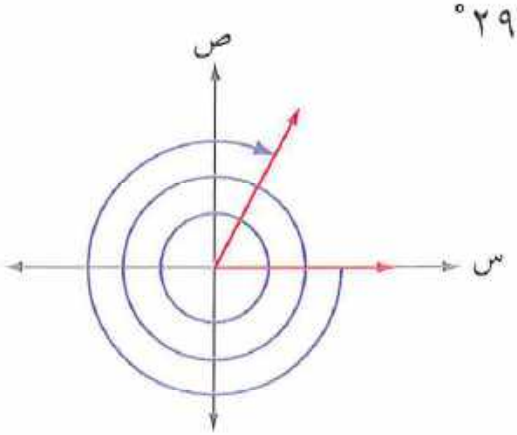
١) ٥٤٠°　　٢) -١٠١٨°　　٣) ١٥٣٠°

الحل

١) ٥٤٠° - ٣٦٠° = ١٨٠° إذن ضلع الانتهاء ينطبق على محور السينات السالب.

٢) -١٠١٨° + ٣٦٠° = -٦٥٨° + ٣٦٠° = -٢٩٨°

ضلع الانتهاء لهذه الزاوية يقع في الربع الأوّل، وللتأكد من ذلك فإنّ الزاوية الموجبة المقابلة لها هي: -٢٩٨° + ٣٦٠° = ٦٢°. (لاحظ أنّ الزاوية أكملت دورتين وزيادة عليها ٢٩٨° بالاتجاه السالب انظر الشكل (٤-٣)).



الشكل (٤-٣).

٣) ١٥٣٠° - ٤ × ٣٦٠° = ١٥٣٠° - ١٤٤٠° = ٩٠°

ينطبق ضلع الانتهاء لهذه الزاوية على محور الصادات الموجب.

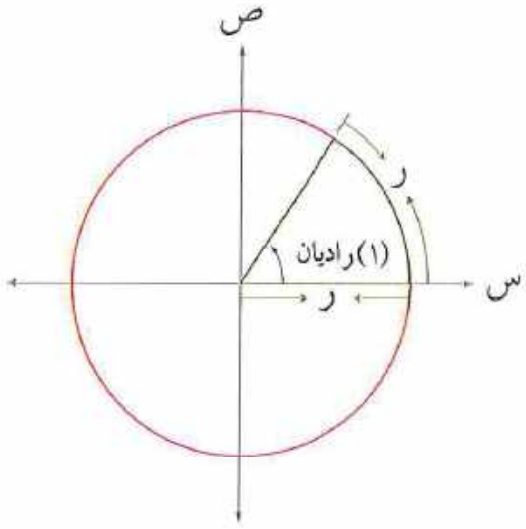
تدريب (١)

حدد الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء (أو المحور الذي ينطبق عليه ضلع الانتهاء) لكل زاوية في ما يأتي:

١) -٣١٠° ٢) ٩٠٠° ٣) -٩٥٠°

لقياس وحدات الطول يوجد نظامان عالميان هما النظام المتري ووحدات قياسه المتر وأجزاؤه ومضاعفاته، والنظام الانجليزي ووحداته القدم وأجزاؤه ومضاعفاته.

كذلك الزوايا يوجد لها نظامان للقياس، الأول القياس الستيني ووحداته الدرجة (°) الدقيقة (′) والثانية (″).



الشكل (٤-٤).

والآخر **التقدير الدائري** ووحدة قياسه الراديان (Radian) (راد) بحيث يكون: ١ راد قياس زاوية مركزية مرسومة في دائرة الوحدة في الوضع القياسي تقابل قوساً طوله يساوي طول نصف قطر هذه الدائرة. ويرمز لقياسها بالرمز ١ راد.

ولكن كيف يتم التحويل من التقدير الدائري إلى القياس الستيني وبالعكس؟

يعتمد هذا التحويل بشكل أساسي على التناسب، حيث: ١٨٠° زاوية مركزية تقابل قوسًا طوله π في دائرة الوحدة (علمًا بإن π هي النسبة التقريبية $\approx ٣,١٤$).

مثال (٢)

حول الزوايا الآتية من القياس الستيني إلى التقدير الدائري:

١) ١٢٠° ٢) ٧٠٠ ٣) ٣٠٠°

الحل

١) ١٨٠° ⟵ π

١٢٠° ⟵ س

$$س = \frac{١٢٠° \times π}{١٨٠°} = \frac{٢π}{٣}$$

أي أنّ طول القوس المقابل للزاوية المركزية ١٢٠° في دائرة الوحدة هو $\frac{٢π}{٣}$

٢) ١٨٠° ⟵ π

٧٠٠° ⟵ س (تناسب)

$$س = \frac{٧٠٠° \times π}{١٨٠°} = \frac{٣٥π}{٣}$$ (اختصار)

ملاحظة: يُمكن التحويل من القياس الستيني إلى التقدير الدائري بضرب الزاوية بالقياس الستيني بالمقدار $\frac{π}{١٨٠°}$ (لماذا؟)

٣) $٣٠٠° \times \frac{π}{١٨٠°} = \frac{٥π}{٣}$ (باستخدام الملاحظة السابقة)

مثال (٣)

حول الزوايا الآتية من التقدير الدائري إلى القياس الستيني:

١) $\frac{٣π}{٢}$ راد ٢) ٥π راد ٣) ٧ راد

الحل

١) π راد ⟵ ١٨٠° (تناسب)

$\frac{\pi ٣}{٢}$ ⟵ س

$س = \frac{١٨٠° \times \pi ٣}{\pi \times ٢} = ٢٧٠°$

٢) π ⟵ ١٨٠° (تناسب)

$\pi ٥$ ⟵ س

$س = \frac{١٨٠° \times \pi ٥}{\pi} = ٩٠٠°$ (اختصار)

ملاحظة: يمكن التحويل من التقدير الدائري إلى القياس الستيني من خلال ضرب الزاوية بالقياس الدائري بِالمقدار $\frac{١٨٠°}{\pi}$. (لماذا؟)

٣) $٧ \text{ راد} \times \frac{١٨٠°}{\pi} = ٧ \times ١٨٠° \times \frac{٧}{٢٢} = ٤٠٠° ٥٤'$ (باستخدام الملاحظة السابقة)

تدريب (٢)

١) حول الزوايا الآتية من القياس الستيني إلى التقدير الدائري:

أ) ٢٢٥° ب) ٧٢٠° جـ) ٣٣٠°

٢) حول الزوايا الآتية من التقدير الدائري إلى القياس الستيني:

أ) $\frac{\pi ٧ \text{ راد}}{٦}$ ب) $\frac{\pi ٣ \text{ راد}}{٤}$ جـ) $\pi ٧ \text{ راد}$

من تعريف الراديان يمكن استنتاج أن:

طول القوس المقابل للزاوية المركزية = نصف القطر × قياس الزاوية بالتقدير الدائري

ل = نق × هـ (بالتقدير الدائري)

فكّر وناقش

استخدم فكرة طول القوس لاستنتاج محيط دائرة نصف قطرها نق.

مثال (٤)

دائرة نصف قطرها يساوي ١٢ سم، احسب طول القوس المقابل للزاوية $\frac{٣\pi}{٢}$ راد .

الحل

ل = نق × هـ (بما أن هـ بالقياس الدائري نعوض في القانون مباشرة)

$= ١٢ \times \frac{٣\pi}{٢} = ١٨\pi \approx ١٨ \times ٣,١٤ \approx ٥٦,٥٢$ سم.

مثال (٥)

دائرة طول القوس المقابل للزاوية $\frac{٢\pi}{٣}$ راد يساوي ١٤ سم، ما طول نصف قطرها؟

الحل

ل = نق × هـ

$١٤ = \text{نق} \times \frac{٢\pi}{٣}$ (تطبيق على القانون)

$\text{نق} = \frac{٣}{٢\pi} \times ١٤$ (ضرب بمقلوب $\frac{٢\pi}{٣}$)

ومنه نق $= \frac{٧}{٢٢} \times ٢١ \approx ٦,٦٨$ سم.

تدريب (٣)

دائرة نصف قطرها ٦ سم، احسب طول القوس المقابل للزاوية ١٢٠°

تمارين و مسائل

١) حول كلاً مما يأتي من التقدير الدائري إلى القياس الستيني:

أ) -٢ راد ب) $\frac{\pi ٢٥}{٢}$ راد جـ) $-\frac{\pi ٣}{٢}$ راد

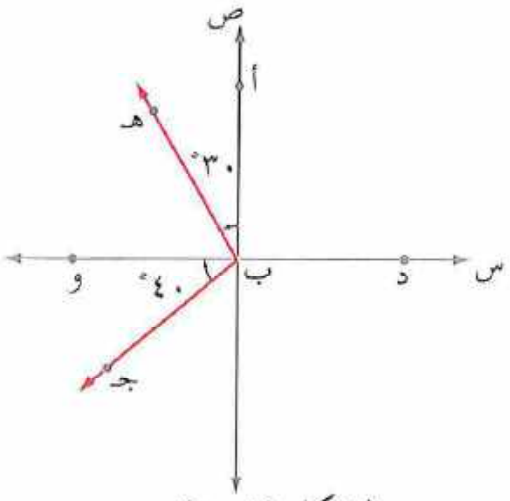
٢) حول كلاً مما يأتي من القياس الستيني إلى التقدير الدائري :

أ) $-٨٠°$ ب) $٦١٠°$ جـ) $٣٢٥°$

٣) بالاعتماد على الرسم المجاور أجب عن كلٍّ مما يأتي:

أ) استخدم الزاوية أ ب هـ لإعطاء مثال على زاوية في الوضع القياسي مع ذكر قياسها.

ب) استخدم الزاوية جـ ب و لإعطاء مثال على زاوية في الاتجاه السالب مع ذكر قياسها.



الشكل (٤–٥).

٤) في إحدى الكليات ملعب دائري الشكل تقام عليه مسابقات الجري، مقسم إلى حارات عرض كل منها ١م، نصف القطر الداخلي للحارة الأولى ٣٣م، ونصف القطر الداخلي للحارة الثانية ٣٤ م، ما الفرق بين طول الحارتين الأولى والثانية عند إنهاء نصف لفة؟

٥) حُلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

٦) احسب مساحة القطاع الدائري لدائرة نصف قطرها ٥سم قياس زاويته المركزية يساوي $\frac{\pi}{٥}$ راد (علماً بأنّ مساحة القطاع الدائري $= \frac{١}{٢}$ نق^{٢} هـ حيث هـ مقدرة بالتقدير الدائري).

٧) قوس في دائرة طوله ٧سم يقابل زاوية مركزية قياسها ١٠٠°، ما طول قطرها؟

٨) طول قوس في قطاع دائري يساوي أربعة أمثال طول نصف القطر، هل من الممكن معرفة الزاوية المركزية؟

٩) إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا مثلث كنسبة ٢: ٣ : ٥، فما قياس كل من هذه الزوايا بالتقدير الدائري والقياس الستيني ؟

النتاجات

- تتعرف الاقترانات المثلثية وتجدها لزاوية معطاة.
- تحسب قيم الاقترانات المثلثية باستخدام زاوية المرجع.

عمق الماء عند نقطة معينة في أحد الموانئ (د) متر يرتبط بالزمن (ن) ساعة حسب العلاقة الآتية:

د = ٨ − ٣جتا (٠,٥ ن) (ن> صفر)

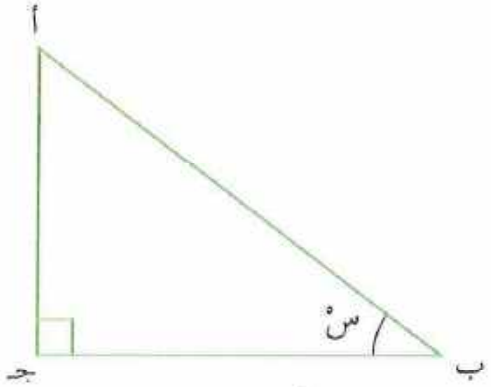
احسب عمق الماء في الميناء في الحالات الآتية:

١) عند المد ٢) عند الجزر

تعرفت فيما سبق على النسب المثلثية الستة وهي:

الجيب (جاهـ)، جيب تمام (جتا هـ)، الظل (ظا هـ)، ظل تمام (ظتاهـ)، القاطع (قاهـ)، قاطع تمام (قتاهـ).

انظر الشكل (٤−٦) و تذكر أنّ:



الشكل (٤−٦).

$$\text{جا س} = \frac{\text{أجـ}}{\text{أب}} \text{ ، جتا س} = \frac{\text{جـ ب}}{\text{أب}} \text{ ، ظا س} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ ب}} \quad (\text{جتاس} \neq \text{صفر})$$

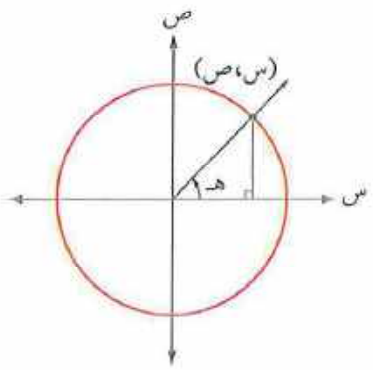
يكون ظل الزاوية غير معرّف إذا كان قياسها يساوي ٩٠° + ١٨٠° × (ن)
حيث ن عدد صحيح، لماذا؟

وتعلمت أن قاس = $\frac{١}{\text{جتاس}}$ ، قتاس = $\frac{١}{\text{جاس}}$ ، ظتاس = $\frac{١}{\text{ظاس}}$.

ملاحظة: في كل الاقترانات الدائرية المعرفة بدلالة اقتران آخر في المقام – تُستثنى الزوايا التي تجعل المقام يساوي صفر أينما وردت.

في دائرة الوحدة (الدائرة التي نصف قطرها وحدة واحدة) إذا رسمت زاوية قياسها هـ في وضعها القياسي، فإن ضلع الانتهاء لها سيقطع الدائرة في نقطة وحيدة (س، ص).

وطول الضلع المقابل للزاوية هـ في المثلث هو الإحداثي الصادي للنقطة، كما أن طول الضلع المجاور للزاوية هـ هو الإحداثي السيني للنقطة.



الشكل (٤–٧).

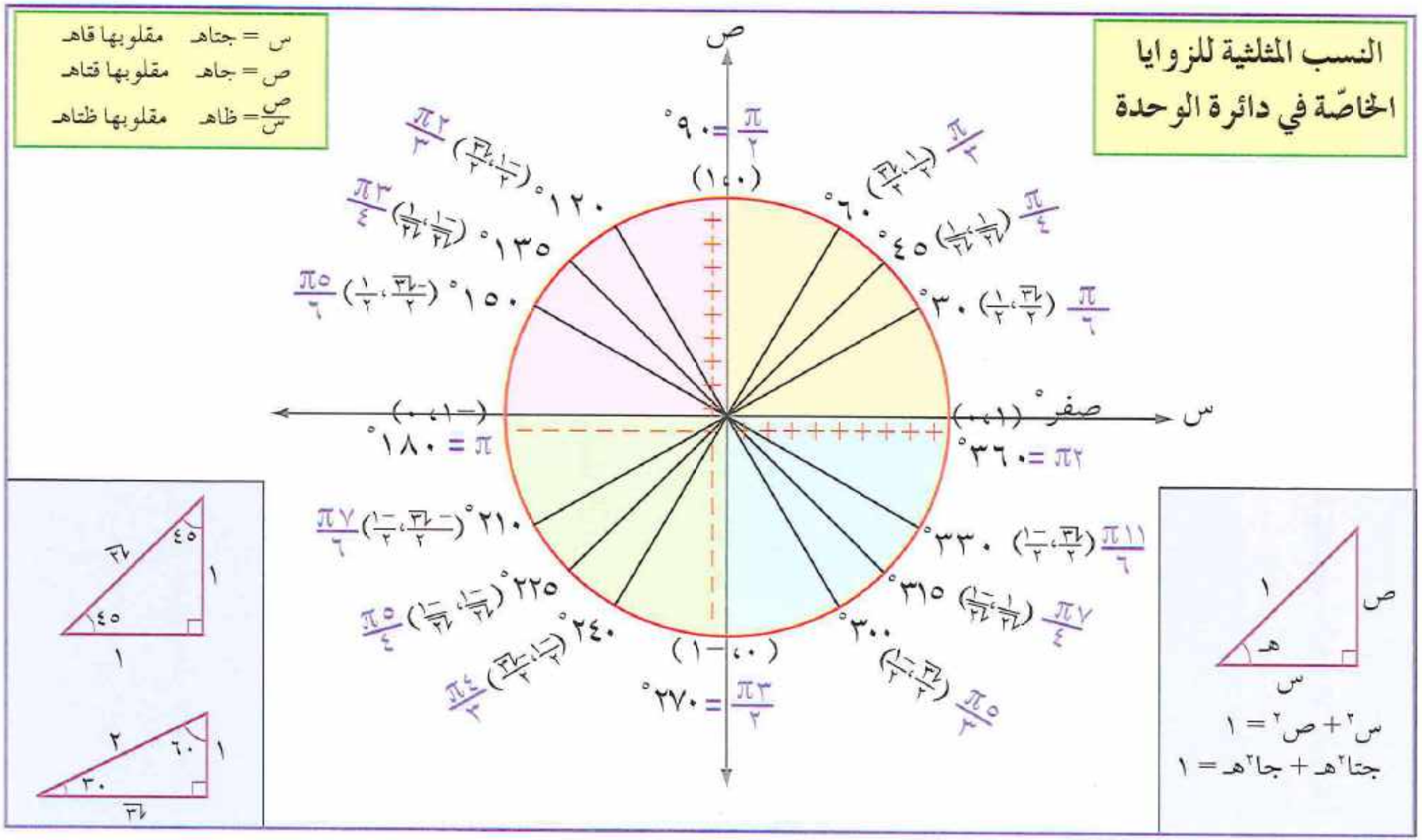
ينتج مما سبق أن جاهـ = ص ، جتا هـ = س (علمًا بأنّ نق = ١ وحدة).

إذا اختلف طول نصف القطر عن وحدة واحدة هل تبقى هذه العلاقة صحيحة؟

مما تقدم بإمكاننا الوصول إلى التعريف الآتي:

تعريف

يسمى الاقتران الذي يربط العدد الحقيقي هـ بالإحداثي السيني لنقطة تقاطع ضلع انتهاء زاوية قياسها هـ مع دائرة الوحدة اقتران جيب التمام، و يرمز له ق(هـ) = جتاهـ، ويسمى الاقتران الذي يربط العدد الحقيقي هـ بالإحداثي الصادي لهذه النقطة اقتران الجيب، ويرمز له بالرمز ق(هـ) = جاهـ.


النسب المثلثية للزوايا
الخاصّة في دائرة الوحدة
س = جتاهـ مقلوبها قاهـ
ص = جاهـ مقلوبها فتاهـ
ص/س = ظاهـ مقلوبها ظتاهـ
ص
س
صفر°
(١، ٠)
٩٠° = π/٢
(١٥٠)
١٢٠° π٢/٣ (-١/٢، √٣/٢)
١٣٥° π٣/٤ (-√٢/٢، √٢/٢)
١٥٠° π٥/٦ (-√٣/٢، ١/٢)
(-١، ٠)
١٨٠° = π
٢١٠° π٧/٦ (-√٣/٢، -١/٢)
٢٢٥° π٥/٤ (-√٢/٢، -√٢/٢)
٢٤٠° π٤/٣ (-١/٢، -√٣/٢)
(٠، -١)
٢٧٠° = π٣/٢
٣٠٠° π٥/٣ (١/٢، -√٣/٢)
٣١٥° π٧/٤ (√٢/٢، -√٢/٢)
٣٣٠° π١١/٦ (√٣/٢، -١/٢)
(١، ٠)
٣٦٠° = π٢
٦٠° π/٣ (١/٢، √٣/٢)
٤٥° π/٤ (√٢/٢، √٢/٢)
٣٠° π/٦ (√٣/٢، ١/٢)
٤٥
√٢
١
١
٦٠
٢
١
٣٠
√٣
ص
١
هـ
س
س٢ + ص٢ = ١
جتا٢هـ + جا٢هـ = ١

الشكل (٤-٨).

من الشكل (٤-٨) يتضح أن أعلى قيمة للجيب هي ١، وهي عند الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{٢}$ راد ، وأدنى قيمة للجيب هي - ١، عند الزاوية $\frac{\pi ٣}{٢}$ راد .

وأعلى قيمة لجيب التمام هي ١، عند الزاوية صفر، وأدنى قيمة لجيب التمام هي -١ وهي عند الزاوية π راد.

و بذلك يمكن التعبير عن اقتراني الجيب و جيب التمام بالصورة:

ق: ح ⟵ [-١ ، ١] : ق(س) = جاس .

ق: ح ⟵ [-١ ، ١] : ق(س) = جتاس.

فكّر وناقش

هل بإمكانك إثبات أنّ جا^{٢}هـ + جتا^{٢}هـ = ١؟ استعن بالشكل (٤-٨).

مثال (١)

إذا كان ضلع انتهاء الزاوية هـ يقع في الربع الأول وكان جاهـ = $\frac{١}{٤}$ ، فجد جتا هـ، ظا هـ، قاهـ، قتاهـ.

الحل

جا^{٢}هـ +جتا^{٢}هـ = ١ (متطابقة)

$(\frac{١}{٤})^{٢}$ + جتا^{٢}هـ = ١ (بالتعويض عن قيمة جاهـ)

$\frac{١}{١٦}$ + جتا^{٢}هـ = ١ (تبسيط)

جتا^{٢}هـ = ١ - $\frac{١}{١٦}$ = $\frac{١٥}{١٦}$ (طرح $\frac{١}{١٦}$ من الطرفين)

جتاهـ = $\mp\sqrt{\frac{١٥}{١٦}}$ = $\frac{\sqrt{١٥}}{٤}$ (تُهمل الإجابة السالبة لأن ضلع الانتهاء للزاوية هـ يقع في الربع الأول) (تبسيط)

ظاهـ $= \frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}}$ (تعريف الظل)

$= \frac{\frac{١}{٤}}{\frac{\sqrt{١٥}}{٤}}$ (التعويض عن قيم جاهـ، جتاهـ)

$= \frac{١}{\sqrt{١٥}}$ (تبسيط)

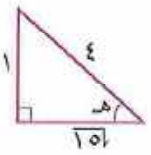
قتاهـ $= \frac{١}{\text{جاهـ}} = ٤$

قاهـ $= \frac{١}{\text{جتاهـ}} = \frac{٤}{\sqrt{١٥}}$

طريقة ثانية للحل:

يمكن حل مثال (١) باستخدام فكرة المثلث القائم الزاوية، وذلك بتكوين المثلث المجاور، ومنه

جاهـ $= \frac{١}{٤} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$



(الوتر)^{٢} = (الضلع$_{١}$)^{٢} + (الضلع$_{٢}$)^{٢} (نظرية فيثاغورس)

١٦ = (١)^{٢} + (الضلع$_{٢}$)^{٢} (تعويض)

(الضلع$_{٢}$)^{٢} = ١٥ (تبسيط)

الضلع$_{٢}$ $= \pm\sqrt{١٥}$

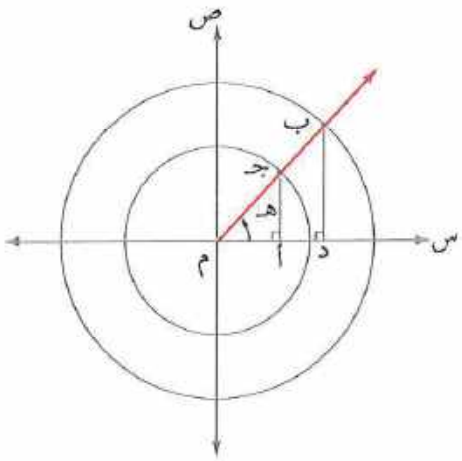
الضلع$_{٢}$ $= \sqrt{١٥}$ (إهمال الإشارة السالبة (لماذا))؟

وإذا عُلمت أطوال أضلاع المثلث بالإمكان استخراج باقي النسب المثلثية.

تدريب (١)

إذا كان قتاهـ = ٥ ، فجد قيمة كلٍّ من: قاهـ ، جاهـ ، جتاهـ، ظاهـ .

يمكن حساب النسب المثلثية باستعمال أي دائرة أخرى غير دائرة الوحدة بالاعتماد على تشابه المثلثات، انظر الشكل الآتي (لماذا يتشابه المثلثان د ب م ، أ جـ م؟)



الشكل (٤-٩).

ينتج من تشابه المثلثين أن النسب بين أطوال الأضلاع المتناظرة متساوية.

أي أن:

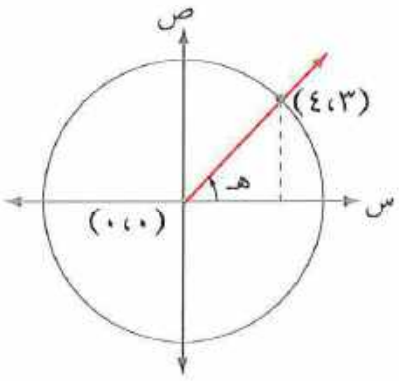
$$\frac{\text{جـ أ}}{\text{جـ م}} = \frac{\text{ب د}}{\text{ب م}} = \text{جاهـ} \ ، \ \frac{\text{م أ}}{\text{م جـ}} = \frac{\text{م د}}{\text{م ب}} = \text{جتاهـ}$$

وبالإمكان حساب باقي النسب المثلثية بالاعتماد على قيم جاهـ و جتا هـ.

مثال (٢)

إذا كان ضلع الانتهاء لزاوية قياسها هـ يمر بالنقطة (٣ ، ٤)

احسب قيمة كلٍّ من: جاهـ، جتاهـ، ظاهـ، ظتاهـ، قاهـ، قتاهـ.



الشكل (٤-١٠).

الحل

$$\text{ظا هـ} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{٤}{٣} \qquad \text{ظتا هـ} = \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٣}{٤}$$

لكن لحساب باقي النسب المثلثية يلزم معرفة نصف قطر الدائرة، الدائرة التي مركزها (٠،٠) يُحسب طول نصف القطر باستخدام معادلة الدائرة

$$\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = \text{ر}^{٢}$$

(س= ٣ ، ص= ٤ من إحداثيي النقطة)

$(٣)^{٢} + (٤)^{٢} = ٢٥$ (تعويض قيم س=٣ و ص=٤)

ر $= \pm ٥$ (ر=−٥ مرفوضة لماذا؟)

ر $= ٥$

جا هـ $= \frac{٤}{٥}$ ، قتا هـ $= \frac{٥}{٤}$ ، جتا هـ $= \frac{٣}{٥}$ ، قا هـ $= \frac{٥}{٣}$ (تعويض قيم س، ص، ر)

(لماذا أُهملت جميع القيم السالبة؟)

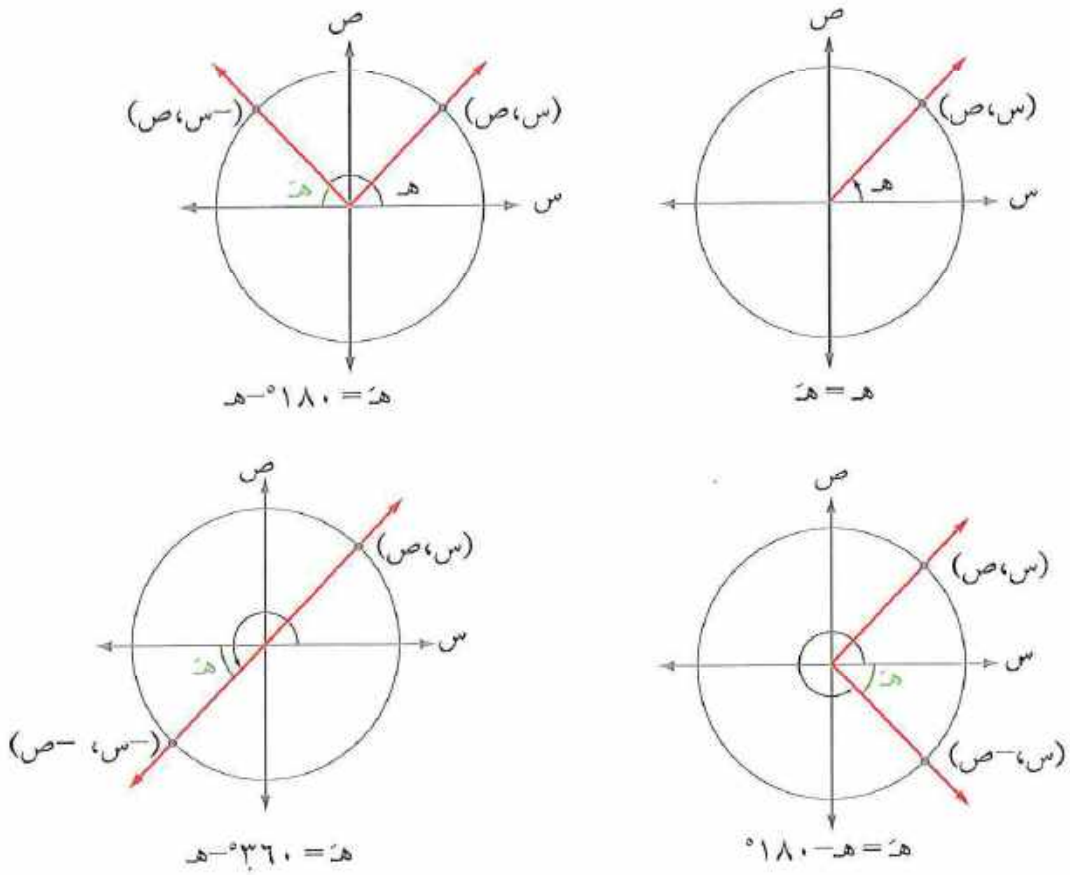
تدريب (٢)

إذا كان ضلع الانتهاء لزاوية قياسها هـ يمر بالنقطة (٥ ، ١٢) ، احسب قيمة كلٍ من : جاهـ، جتاهـ، ظاهـ، ظتاهـ، قاهـ، قتاهـ.

تعلمت إيجاد النسب المثلثية إذا وقع ضلع الانتهاء للزاوية في وضعها القياسي في الربع الأول وبالإمكان حساب النسب المثلثية للزوايا التي يقع ضلع الانتهاء لها في الوضع القياسي في الأرباع الأخرى بالاعتماد على ما يعرف **بزاوية المرجع**، والشكل (٤−١١) يوضح زاوية المرجع للزاوية هـ في الأرباع جميعها.

تعريف

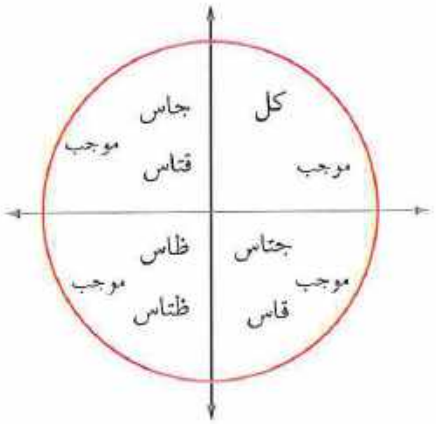
تسمّى الزاوية الحادّة المحصورة بين ضلع انتهاء الزاوية هـ ومحور السينات زاويةَ المرجع للزاوية هـ ويرمز لقياسها بالرمز هـَ.



الشكل (٤−١١).

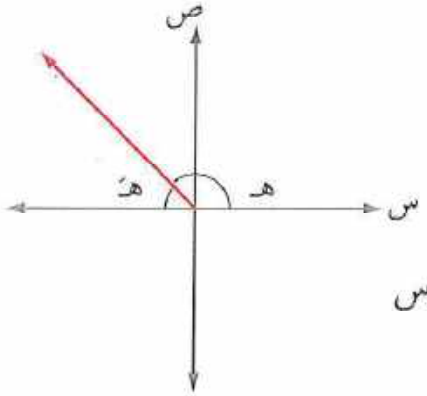
انظر الشكل (٤−١٢) ولاحظ العلاقة التي تحدد إشارة النسب المثلثية بالنسبة للربع الذي يوجد فيه ضلع انتهاء زاوية في وضعها القياسي، حيث يمكن استنتاج أنّ:

جا (− س) = − جاس جتا (− س) = جتا س ظا (− س) = − ظا س



الشكل (٤−١٢).

٢) إذا كـــان ضلع الانتهـــاء للزاويـــة هـ في الوضع القياسي يقع في الربع الثاني، وكان جتاهـ = $\frac{-١}{٣}$ ، جِدْ جاهـ، ظاهـ.



قام هاشم بحل المسألة بالطريقة الآتية:

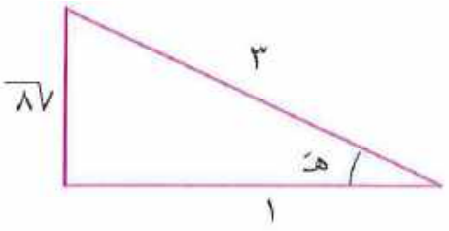
فرض أن هَ هي زاوية المرجع للزاوية هـ

إذن جتا هَ = − جتاهـ = $\frac{١}{٣}$

رسم المثلث القائم المجاور، وباستخدام نظرية فيثاغورس حسب طول الضلع المجاور للزاوية هَ هو $\sqrt{٨}$ ،

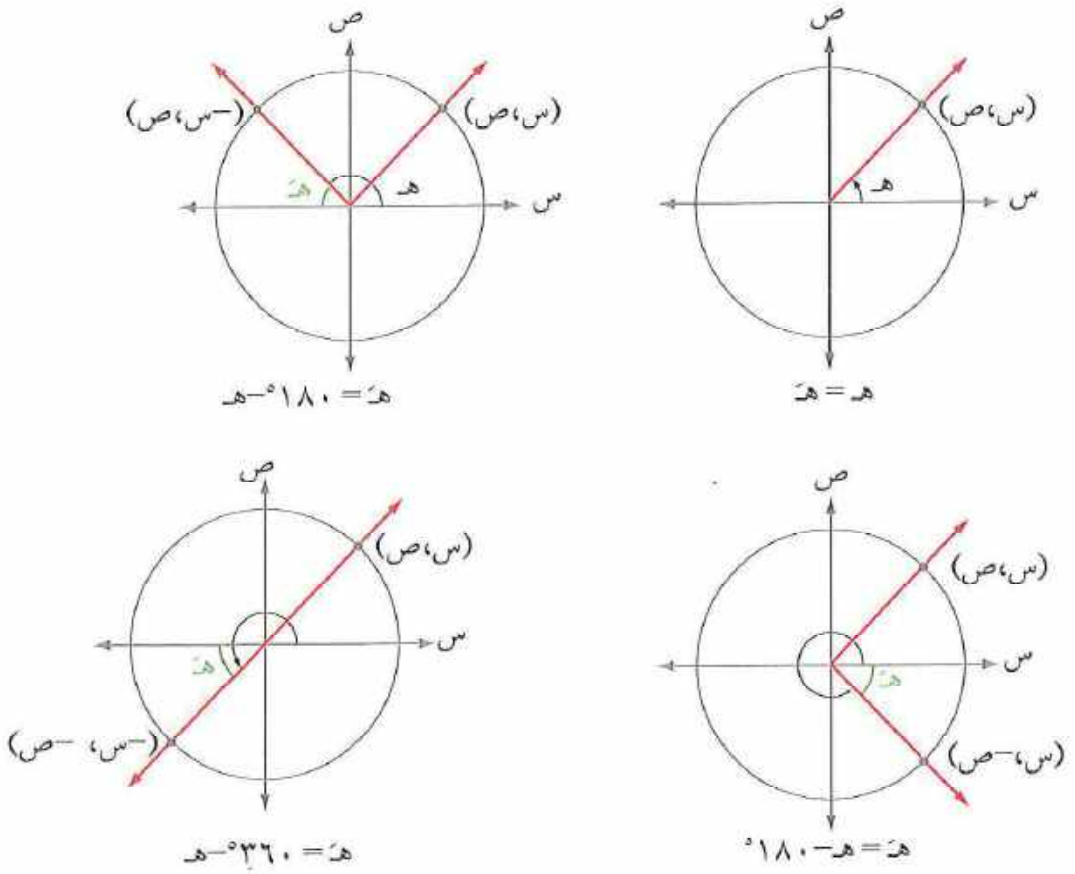
وقال: بما أن هـ زاوية في الربع الثاني إذن:

جا هـ = جا هَ = $\frac{\sqrt{٨}}{٣}$ ،



ظا هـ = − ظا هَ = $\frac{-\sqrt{٨}}{١}$.

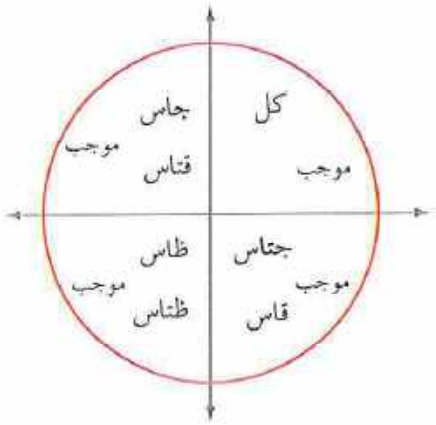
ما رأيك في طريقة هاشم في حل هذه المسألة؟



الشكل (٤−١١).

انظر الشكل (٤−١٢) ولاحظ العلاقة التي تحدد إشارة النسب المثلثية بالنسبة للربع الذي يوجد فيه ضلع انتهاء زاوية في وضعها القياسي، حيث يمكن استنتاج أنّ:

جا (− س) = − جاس جتا (− س) = جتا س ظا (− س) = − ظا س



الشكل (٤−١٢).

مثال (٣)

دون استخدام الآلة الحاسبة، جد قيمة كل مما يأتي:

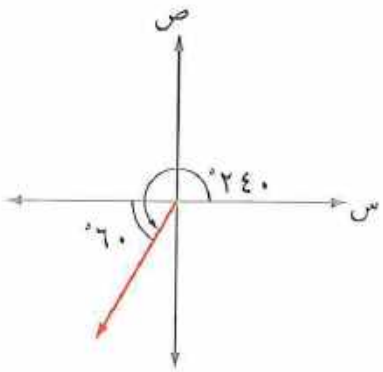
١) جتا ٢٤٠° ٢) جا ٣٣٠° ٣) ظا ١٣٥° ٤) جا ٨٧٠°

الحل

١) جتا ٢٤٠° = − جتا (٢٤٠° − ١٨٠°)

= − جتا (٦٠°) = − ٠,٥

انظر الشكل (٤−١٣/أ)

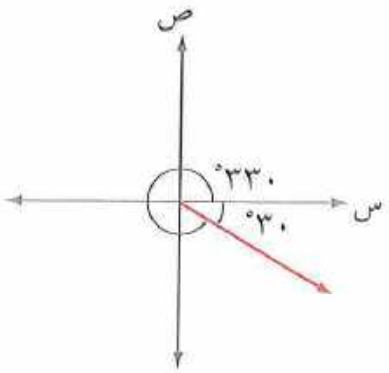


الشكل (٤−١٣/أ).

٢) جا ٣٣٠° = − جا (٣٦٠° − ٣٣٠°)

= − جا (٣٠°) = − ٠,٥

انظر الشكل (٤−١٣/ب)

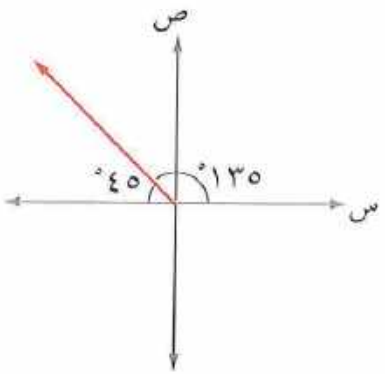


الشكل (٤−١٣/ب).

٣) ظا ١٣٥° = − ظا (١٨٠° − ١٣٥°)

= − ظا (٤٥°) = − ١

انظر الشكل (٤−١٣/جـ)



الشكل (٤−١٣/جـ).

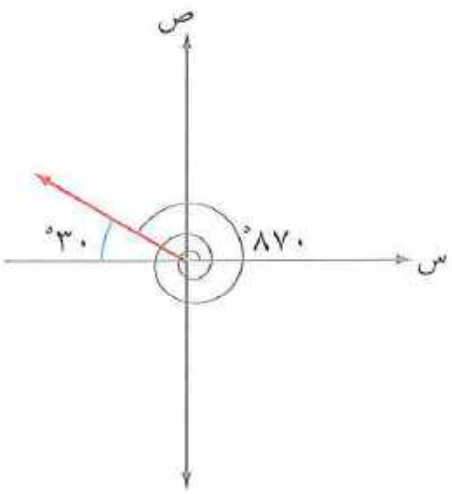
٤) جا ٨٧٠° = جا (٨٧٠° − ٧٢٠°)

= جا ١٥٠°

= جا (١٨٠° − ١٥٠°)

= جا (٣٠°) = ٠,٥

انظر الشكل (٤−١٣/ د)



الشكل (٤−١٣/ د).

تدريب (٣)

دون استخدام الآلة الحاسبة ، جد قيمة ما يأتي:

١) قا $\frac{\pi ١١}{٣}$ ٢) جتا $\frac{\pi ٣}{٦}$ ٣) ظتا ٣٠٠°

فكّر وناقش

١) قامت طالبتان بتبسيط المقدار $\frac{(\text{جا}^٢\text{هـ})}{(\text{جتا}^٢\text{هـ} + \text{جا}^٢\text{هـ})}$ كلٌّ على طريقتها:

كتبت الأولى: $\frac{\text{جا}^٢\text{هـ}}{\text{جتا}^٢\text{هـ}} + \frac{\text{جا}^٢\text{هـ}}{\text{جا}^٢\text{هـ}} = \text{ظا}^٢\text{هـ} + ١ = \text{قا}^٢\text{هـ}$

كتبت الثانية: $\frac{(\text{جا}^٢\text{هـ})}{(\text{جتا}^٢\text{هـ} + \text{جا}^٢\text{هـ})} = \frac{\text{جا}^٢\text{هـ}}{١} = \text{جا}^٢\text{هـ}$

أي الحلّين صحيح؟ برّر إجابتك .

أضف لمعلوماتك

تسمى العلاقات

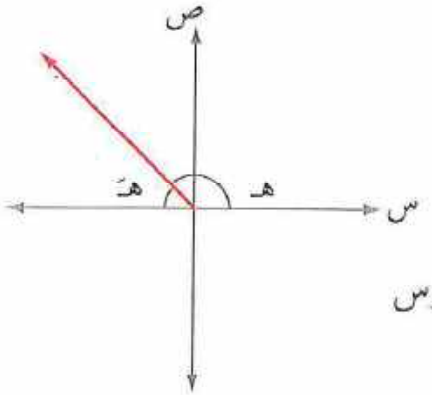
جا^٢ هـ + جتا^{٢}هـ = ١

ظا^٢ هـ + ١ = قا^٢ هـ

ظتا^٢ هـ + ١ = قتا^٢ هـ

متطابقات فيثاغورس (لماذا؟)

٢) إذا كـان ضلع الانتهـاء للزاويـة هـ في الوضع القياسي يقع في الربع الثاني، وكان جتاهـ = $\frac{-١}{٣}$ ، جِدْ جاهـ، ظاهـ.



قام هاشم بحل المسألة بالطريقة الآتية:

فرض أن هَ هي زاوية المرجع للزاوية هـ

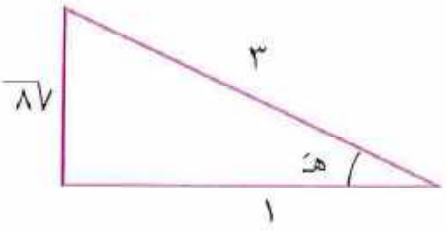
إذن جتا هَ = − جتاهـ = $\frac{١}{٣}$

رسم المثلث القائم المجاور، وباستخدام نظرية فيثاغورس

حسب طول الضلع المجاور للزاوية هَ هو $\sqrt{٨}$ ،

وقال: بما أن هـ زاوية في الربع الثاني إذن:

جا هـ = جا هَ = $\frac{\sqrt{٨}}{٣}$ ،



ظا هـ = − ظا هَ = $\frac{-\sqrt{٨}}{١}$.

ما رأيك في طريقة هاشم في حل هذه المسألة؟

تمارين و مسائل

١) احسب قيمة كلٍّ مما يأتي:

أ) جاهـ إذا علمت أن جتاهـ $= \frac{١}{٣}$ ؛ $٢٧٠^\circ < هـ < ٣٦٠^\circ$

ب) قاهـ إذا علمت أن جاهـ $= \frac{-٢}{٧}$ ؛ $١٨٠^\circ < هـ < ٢٧٠^\circ$

جـ) ظاهـ إذا علمت أن ظتاهـ $= ٢$ ؛ $١٨٠^\circ < هـ < ٢٧٠^\circ$

د) جاهـ ، جتاهـ إذا علمت أن ظاهـ $= \frac{٤}{٣}$ ؛ $٠ < هـ < ٩٠^\circ$

٢) أثبت ما يأتي:

أ) ظا^{٢}هـ $+ ١ =$ قا^{٢}هـ

ب) ظتا^{٢}هـ $+ ١ =$ قتا^{٢}هـ

٣) دون استخدام الآلة الحاسبة، جد قيمة كُلٍّ مما يأتي:

أ) جا ٣٠٠° ب) جتا ٢٢٥°

جـ) ظا $\frac{١٥\pi}{٤}$ د) قا $\frac{-٨\pi}{٣}$

٤) عبر عن المقادير الآتية باستخدام نسب مثلثية أخرى:

أ) جا$(\frac{\pi}{٢} - هـ)$

ب) جتا $(\frac{\pi}{٢} - هـ)$

جـ) ظا $(\frac{\pi}{٢} - هـ)$

د) قتا $(١٨٠^\circ + هـ)$

هـ) ظتا (٣٦٠° − هـ)

و) جتا (π − هـ)

٥) حُلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

٦) بسّط كلًّا من المقادير الآتية :

أ) $\frac{\text{قتا هـ جا هـ}}{\text{ظتا هـ}}$

ب) $\frac{\text{قا هـ}}{\text{جا هـ}} \times (١ - \text{جتا}^{٢}\text{هـ})$

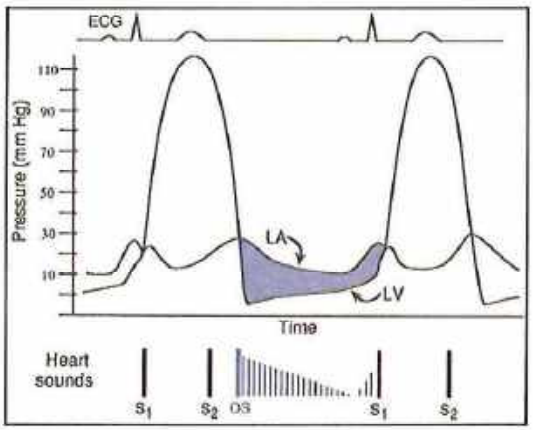
جـ) $\frac{\text{جتا}\frac{\pi}{٢} - ١}{\text{جا}(-\text{هـ}) + ١}$

٧) يعبر عن مبيعات أحد المصانع المنتجة للعصير بالعلاقة ص= ١٣+٥,٥ جتا $\frac{\pi \text{ ن}}{٦}$ ، حيث: ص عدد العلب بالمئات، ن الزمن بالأسابيع، احسب عدد العلب بعد مرور ٦ أسابيع.

٨) قام أحد مصانع الملابس بإنتاج بدلة جديدة وعند عرضها في السوق وجد أن المبيعات من هذه البدلة تتبع المعادلة الآتية: س= ٧٢,٤ + ٦١,٧ جا $\frac{\pi \text{ن}}{٦}$، حيث: ن ترتيب الشهر (كانون ثاني=١، شباط=٢ وهكذا)، و س تمثل عدد القطع بالآلاف.
احسب المبيعات في الأشهر (نيسان، حزيران ،تشرين أول، كانون أول) وأي الأشهر تكون فيها المبيعات نفسُها (برر إجابتك).

النتاجات

- ترسم منحنى اقتران كل من الجيب، جيب التمام ، والظل يدويًا وباستخدام الحاسوب.
- تجد المجال والمدى والدورة والسعة لاقتران مثلثي (إن أمكن).
- تصف سلوك منحنى الاقترانات المثلثية تحت تأثير التحويلات (الانسحاب الرأسي والأفقي).



الشكل المجاور يبين التخطيط الناتج عن جهاز لقياس نبضات القلب، والرسم الموجود يشبه إلى حد كبير رسومات الاقترانات المثلثية. وبذلك يتضح ارتباطها بالحياة العملية.

تعتبر الاقترانات المثلثية مثالًا على نوع من الاقترانات التي تُعرف **بالاقترانات الدورية** (اقترانات تكرر نفسها كل دورة معينة).

مثال (١)

ارسم منحنى الاقتران ق(س) = جاس حيث س ∈ [٠ ، ٢π]

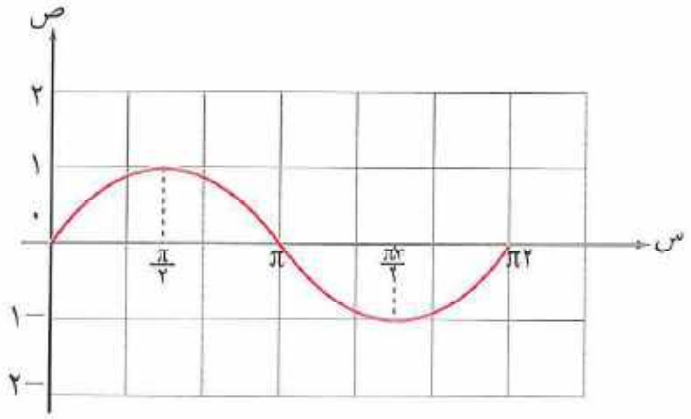
الحل

لرسم منحنى الاقتران ق(س) = جاس على الفترة [٠ ، ٢π]، نكون جدولًا يحوي قيمًا للمتغير س ثم نجد قيم ق(س) المقابلة بتعويض قيم س في الاقتران ق(س):

الجدول (٤-١).

س	٠	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٢}$	$\frac{\pi٣}{٤}$	π	$\frac{\pi٥}{٤}$	$\frac{\pi٣}{٢}$	$\frac{\pi٧}{٤}$	٢π
جاس	٠	٠,٧	١	٠,٧	٠	-٠,٧	-١	-٠,٧	٠

بعد ذلك نعين النقط (س ، جاس) الناتجة في المستوى البياني ونصلها بخطٍّ منحنٍ أملس فنحصل على الشكل الآتي:



الشكل (٤-١٤).

تدريب (١)

ارسم منحنى الاقتران ق(س) = جتاس على الفترة [-π٢ ، π٢].

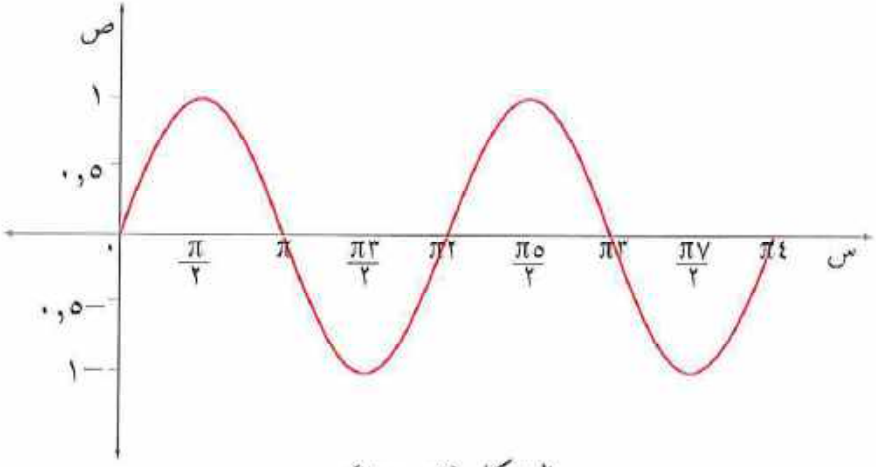
مثال (٢)

ارسم منحنى الاقتران ق(س) = جاس على الفترة [٠ ، π٤].

الحل

نطبق الخطوات السابقة فينتج الشكل الآتي:

لاحظ أن الاقتران يكرر نفسه كل ٣٦٠° لذلك سُمي **اقترانًا دوريًا**.



الشكل (٤-١٥).

لاحظ أن الزوايا (س+ ٢ن× π)، حيث ن عدد صحيح، لها ضلع الانتهاء نفسُه وبذلك يكون لها نفس النسب المثلثية للزاوية س .

تعريف

إذا كان ق(س + أ) = ق(س) لكل س في مجال ق حيث أ عدد ثابت، فإن ق يُسمى اقترانًا دوريًّا، وتُسمى أصغر قيمة حقيقية موجبة للعدد أ التي تحقق المعادلة السابقة **دورةَ الاقتران ق**.

لاحظ أن الاقتران جاس يمكن كتابته على الصورة ق(س)= جا(س+٢π) فهو يكرر نفسه كل ٢π و دورته ٢π.

تعريف

إذا كان ق(س) اقترانًا دوريًّا محدودًا فإن الفرق بين أعلى قيمة للاقتران وأصغر قيمة للاقتران مقسومة على ٢، يسمى سعة الاقتران، أي أنّ:

$$\text{السعة} = \frac{\text{أكبر قيمة للاقترن ق} - \text{أدنى قيمة للاقتران ق}}{٢}$$

ويفضل قبل رسم أي منحنى لاقتران دوري إيجاد الدورة و السعة لتساعد في رسم الاقتران.

مثال (٣)

جد سعة الاقتران ق(س)= ٢ جاس.

الحل

بما أنّ أكبر قيمة للاقتران (جاس) هي ١ فإنّ أكبر قيمة للاقتران ق(س) =٢ جاس هي:

٢ × ١ = ٢

وأصغر قيمة للاقتران (جاس) هي −١ فإنّ أصغر قيمة للاقتران ق(س) = ٢ جاس هي:

٢× −١ = −٢

وبذلك تصبح السعة = $\frac{٢-(-٢)}{٢} = \frac{٤}{٢} = ٢$

مثال (٤)

احسب دورة الاقتران ص = ٣ جتا $\frac{س}{٢}$.

الحل

بما أن جتا $\frac{س}{٢}$ = جتا ($\frac{س}{٢}$ + ٢نπ). فإنّ:

ص = ٣ جتا $\frac{س + ٤\pi ن}{٢}$ = ٣ جتا $\frac{س}{٢}$ (توحيد مقامات الزاوية)

إذن تتكرر كل قيمة من قيم ص = ٣ جتا $\frac{س}{٢}$ كل ٤π.

إذن، دورة الاقتران ٤π.

يمكن حساب دورة الاقتران السابق بطريقة مختلفة كما يأتي:

$٠ < \frac{س}{٢} < ٢\pi$ (ضرب المتباينة بالعدد ٢)

٠ < س < ٤π ، فتكون دورة الاقتران = ٤π − ٠ = ٤π.

بشكل عام يمكن تحديد دورة الاقتران والسعة كما يأتي:

إذا كان ق(س) = أ × جا(ب س + جـ) ،أو ق(س) = أ × جتا(ب س + جـ) حيث أ ≠ صفرًا، ب ≠ صفرًا فإنّ الدورة = $\frac{٢\pi}{|ب|}$ ، السعة = | أ |.

مثال (٥)

جد الدورة والسعة للاقتران ق(س) = ٢ جتا (س + $\frac{\pi}{٢}$).

الحل

السعة = |٢| = ٢ ، الدورة = $\frac{٢\pi}{|ب|} = \frac{٢\pi}{|١|} = ٢\pi$.

تدريب (٢)

جد دورة وسعة الاقتران ق(س) = ٥ جا ($\frac{س}{٢} + \frac{\pi}{٢}$) .

مثال (٦)

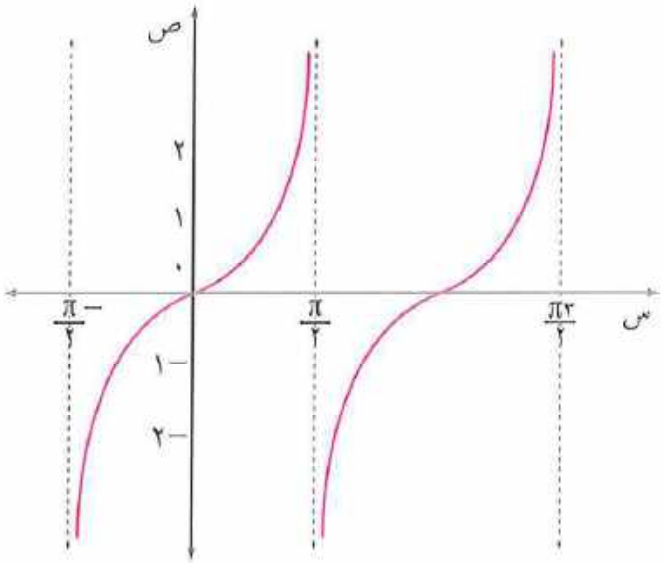
ارسم منحنى الاقتران ق(س) = ظاس، على الفترة $\left(-\frac{\pi}{٢}، \frac{\pi ٣}{٢}\right)$

الحل

لرسم منحنى اقتران الظل نكون الجدول الآتي، حيث نأخذ قيمًا للمتغير س ثم نجد قيم ق(س) المقابلة لها بتعويض قيم س في الاقتران ق(س).

س	$-\frac{\pi}{٢}$	$-\frac{\pi}{٣}$	$-\frac{\pi}{٤}$	٠	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	$\frac{\pi ٣}{٤}$	π	$\frac{\pi ٥}{٤}$	$\frac{\pi ٤}{٢}$	$\frac{\pi ٣}{٢}$
ق(س)	غير معرّف	١,٧-	١-	٠	١	١,٧	غير معرّف	١-	٠	١	١,٧	غير معرّف

نرسم ما يعرف بالمحاذي العمودي للرسم عند كل من $\frac{\pi ٣}{٢}$ و $\frac{\pi}{٢}$ ومضاعفاتها، ثم نعين النقاط في المستوى البياني ثم نصل بخطٍّ منحنٍ أملس فيتنج الشكل الآتي:



الشكل (٤-١٦).

لمعرفة سلوك منحنى اقتران الظل عندما تقترب الزاوية من $\frac{\pi}{٢}$ انظر الجدول الآتي:

س	°٨٩	°٨٩,٣	°٨٩,٦	°٨٩,٨	°٨٩,٩	°٨٩,٩٩	$\frac{\pi}{٢}$
ظاس	٥٧,٢٩	٨١,٨٥	١٤٣,٢٤	٢٨٦,٤٨	٥٧٢,٩٦	٥٧٠٢٩,٥٨	غير معرّف

نشاط

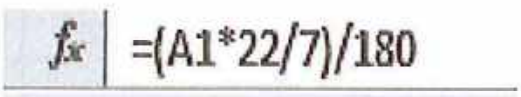
باستخدام برمجية إكسل ارسم منحنى الاقتران ق(س)= جاس ، ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠°.

١) نضع المؤشر في الخلية A1 ونقوم بإدخال البيانات التي تمثل الزوايا الأساسية وما يقابلها في الأرباع الأربعة في العمود الأول(A).
فتظهر القيم في العمود (A) كما هو موضح في الشكل (٤-١٧).

	A
1	0
2	30
3	45
4	60
5	90
6	120
7	135
8	150
9	180
10	210
11	225
12	240
13	270
14	300
15	315
16	330
17	360

الشكل (٤-١٧).

٢) ضع المؤشر في الخلية B1. واكتب قاعدة التحويل من القياس الستيني إلى التقدير الدائري على الصورة =(A1*22/7)/180
كما في الشكل (٤-١٨). ثم اضغط Enter



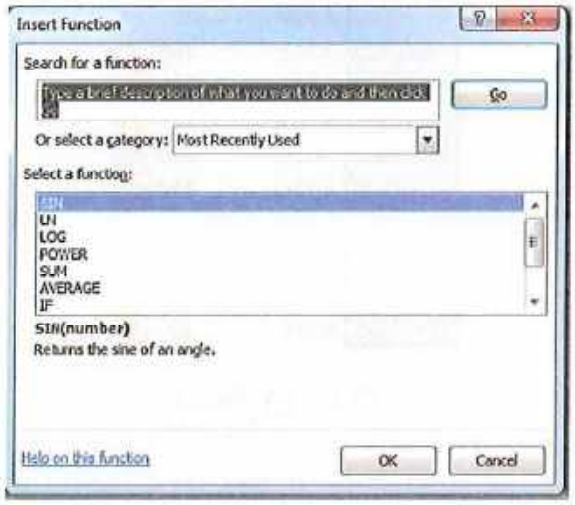
الشكل (٤-١٨).

٣) اسحب المؤشر على جميع الخلايا التي كتبتها ليظهر لك مجموعة القيم في العمود B. كما في الشكل (٤-١٩).

B	A
0	0
0.524	30
0.786	45
1.048	60
1.571	90
2.095	120
2.357	135
2.619	150
3.143	180
3.667	210
3.929	225
4.19	240
4.714	270
5.238	300
5.5	315
5.762	330
6.286	360

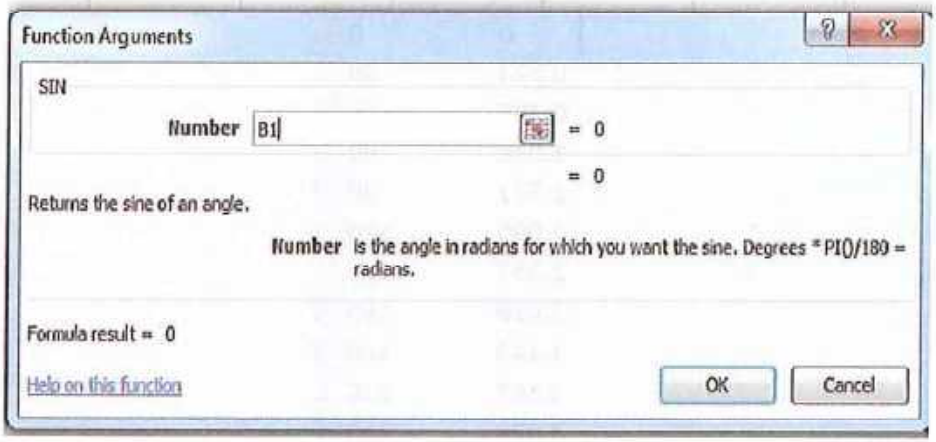
الشكل (٤-١٩).

٤) ضع المؤشر في الخلية C1 ، ومن تبويبة الصيغ (Formulas)، اختر (إدراج) دالة، فيظهر لك صندوق حوار إدراج كما في الشكل(٤-٢٠).



الشكل (٤-٢٠).

٥) اختر الدالة (SIN) وانقر على موافق، يظهر لك صندوق حوار الدالة كما في الشكل(٤-٢٠)، اكتب B1 في مستطيل (Number)، كما في الشكل (٤-٢١).



الشكل (٤-٢١).

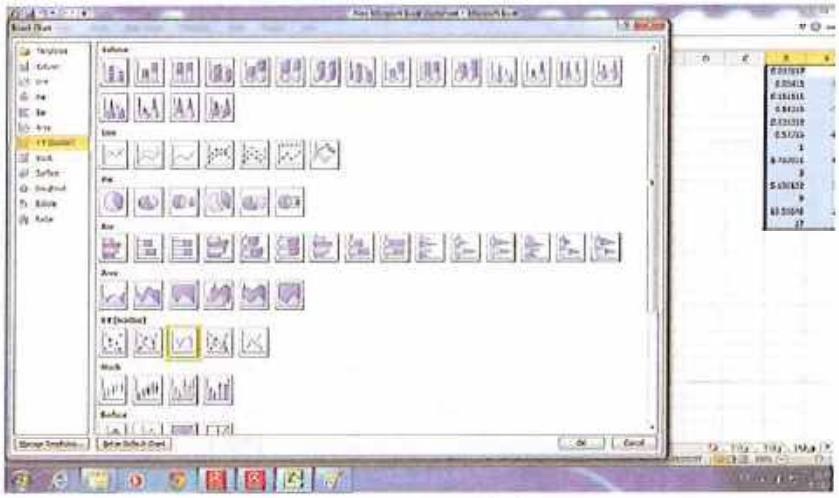
٦) اسحب المؤشر على جميع الخلايا التي كتبتها ليظهر لك مجموعة القيم في العمود C. كما في الشكل(٤-٢٢)

C	B	A	
0	0	0	1
0.500183	0.524	30	2
0.70733	0.786	45	3
0.866236	1.048	60	4
1	1.571	90	5
0.865604	2.095	120	6
0.706436	2.357	135	7
0.499087	2.619	150	8
-0.00126	3.143	180	9
-0.50128	3.667	210	10
-0.70822	3.929	225	11
-0.86687	4.19	240	12
-1	4.714	270	13
-0.86497	5.238	300	14
-0.70554	5.5	315	15
-0.49799	5.762	330	16
0.002529	6.286	360	17

الشكل (٤-٢٢).

٧) ظلل العمودين C ،A ثم اختر من تبويبة إدراج مجموعة مخططات نوع المخطط، (LINE) ثم اختر من الأشكال الشكل س، ص مبعثر(xy-Scatter) ثم اختر نوع

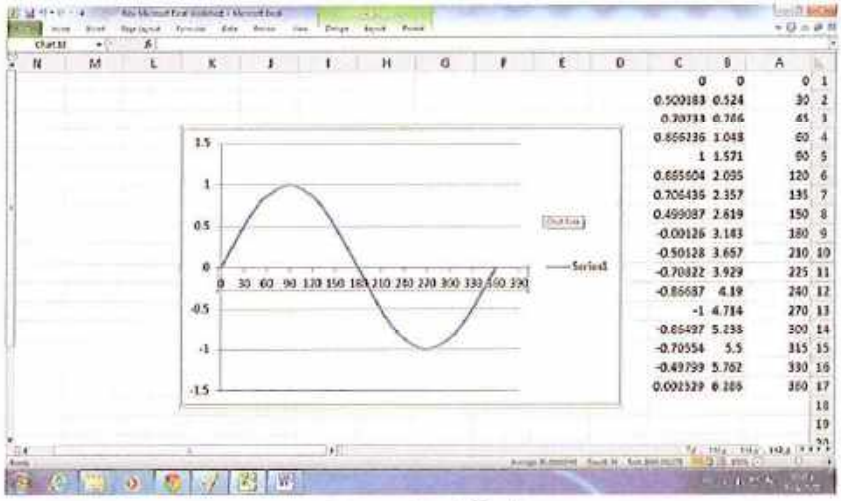
المنحنى كما في الشكل (٤-٢٣).



الشكل (٤-٢٣).

٨) اختر موافق ليظهر لك رسم منحنى الاقتران:

ق(س)= جا س حيث ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠° كما في الشكل(٤- ٢٤).



الشكل (٤-٢٤).

تدريب (٣)

استخدم برمجية إكسل لرسم منحنى كلٍّ من الاقترانات الآتية:

١) ق(س) = جتا س على الفترة [٠ ، ٢π]

٢) هـ(س) = ٢ جتا س ، س ∈ [٠ ، ٢π]

٣) هـ(س) = $\frac{١}{٢}$ جتا س ، س ∈ [٠ ، ٢π]

فكّر وناقش

ماذا تلاحظ من خلال حلك لتدريب (٣)؟ ناقش مع زملائك ما توصلت إليه.

مثال (٧)

ارسم منحنى ق(س) = جا (٢س + π) وجد الدورة والسعة له، س ∈ $\left[\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi-}{٢} \right]$

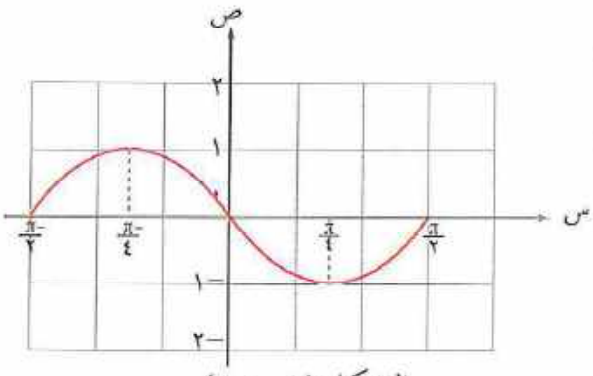
الحل

السعة = | أ | = ١ ، الدورة = $\frac{\pi ٢}{|ب|} = \frac{\pi ٢}{٢} = \pi$.

١) كوّن جدولاً بقيم س ، ق(س)

س	$\frac{\pi-}{٢}$	$\frac{\pi-}{٤}$	صفر	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٢}$
ق(س)	٠	١	٠	١-	٠

٢) عين النقاط التي حصلت عليها في المستوى البياني، ثم صِلْ بينها بخطٍّ منحنٍ أملس كما في الشكل الآتي:



الشكل (٤-٢٥).

فكّر وناقش

كيف تتوقع أن يكون شكل منحنى ل(س) = ٢ جا(٢س + π)، س ∈ $\left[\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi-}{٢} \right]$

تدريب (٤)

ارسم منحنى كلٍّ من الاقترانات الآتية وجد الدورة والسعة لكلٍّ منها:

١) ق(س) = ٣ جتا ٢س ، س ∈ [٠ ، π]

٢) ل(س) = جتا $\frac{س}{٢}$ ، س ∈ [٠ ، ٤π]

٣) هـ(س) = ٢ جتا (س + $\frac{\pi}{٢}$) ، س ∈ $\left[\frac{\pi-}{٢} ، \frac{\pi ٣}{٢} \right]$

تمارين و مسائل

١) جد الدورة و السعة لكلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ) ل(س) = ٥− ٣ جا (س − $\frac{\pi ٣}{٢}$)

ب) هـ(س) = ١+ ٤ جا (٣س + π)

جـ) ك(س) = ٢ جتا ٣ س

٢) ارسم منحنى الاقترانات الآتية ثم قارن منحنى كلٍّ منها بمنحنى الاقتران جاس أو جتاس:

أ) ق(س) = ٢+ جا ٣ س ، س ∈ $[٠ ، \frac{\pi ٢}{٣}]$

ب) ل(س) = جتا (س+π) ، س ∈ $[-\pi ، \pi]$

جـ) و(س) = ٢ جاس ، س ∈ $[٠ ، \pi ٢]$

د) هـ(س) = ٤ جا٢س ، س ∈ $[٠ ، \pi ٢]$

هـ) ك(س) = جا (٢س+π٢) ، س ∈ $[-\pi ، ٠]$

و) ع(س) = $\frac{٥}{٢}$ جا ($\frac{\pi}{٢} - \frac{س}{٢}$) ، س ∈ $[\pi ، \pi ٥]$

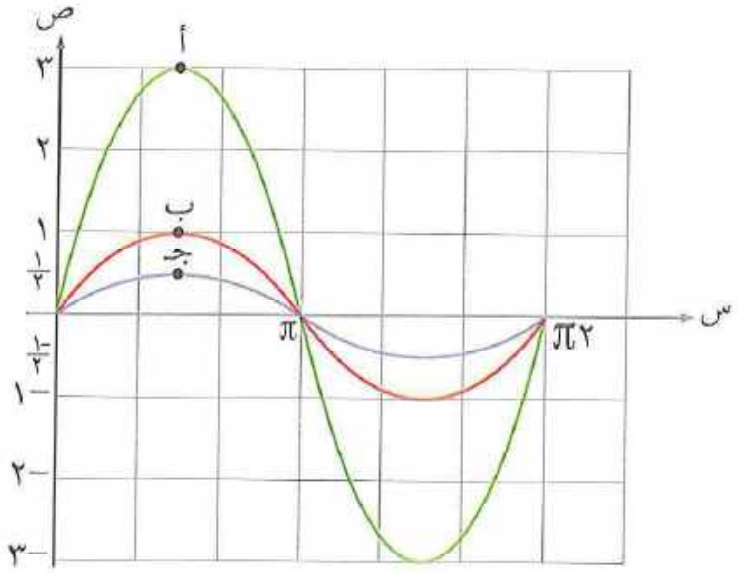
٣) ارسم منحنى كل من الاقترانين ق (س)= − جتاس ، ل(س) = − جتا (س− π) على المستوى البياني نفسه واكتب استنتاجاتك مع التبرير.

٤) الجدول الآتي يوضح معدل ما دفعته أسرة أردنية ثمنًا لفواتير الكهرباء في إحدى السنوات مقربًا لأقرب دينار أردنيّ:

الشهر	كانون ثاني	شباط	آذار	نيسان	أيار	حزيران	تموز	آب	أيلول	تشرين أول	تشرين ثاني	كانون أول
فاتورة الكهرباء	٣٠	٣٢	٢٩	٢٤	٢٠	١٥	١٤	١٥	١٧	٢١	٢٥	٢٨

مثل نقاط الجدول (الشهر، فاتورة الكهرباء) في المستوى البياني وصل بينها بخطٍّ منحنٍ أملس، ثم اقترح اقترانًا يعتمد على اقتران الجيب بحيث يكون رسمه البياني يشبه الرسم الناتج.

٥) معتمدًا على الشكل (٤-٢٦) اكتب رمز المنحنى الذي يُمثّل كل اقتران في الفترة $[0 ، 2\pi]$ في ما يأتي:



الشكل (٤-٢٦).

أ) ق (س) = $\frac{1}{2}$ جا س ، رمز المنحنى هو .....

ب) ب (س) = ٣جا س ، رمز المنحنى هو .....

جـ) هـ (س) = جاس ، رمز المنحنى هو .....

النتاجات

- تحلل متطابقات مثلثية تشمل مجموع زاويتين والفرق بينهما، وتبرهنها.
- تحلل وتبرهن متطابقات مثلثية جبريًا (تشمل ضعف الزاوية ونصفها).
- تحل معادلة مثلثية من الدرجة الأولى والثانية.

أولاً: المتطابقات المثلثية (١) Trigonometric Identities (1)

يمر تيار كهربائي متردد في إحدى الدوائر الكهربائية، وتعطى شدة التيار ت بالعلاقة ت = ٧ جا ٧٥°ن، حيث: ن الزمن بالثواني، وقياس الزاوية بالدرجات.
هل تستطيع كتابة العلاقة السابقة بطريقة أخرى؟

تستخدم في مثل هذه الحالة متطابقات مجموع زاويتين (الفرق بينهما) لإيجاد قيم النسب المثلثية عند بعض الزوايا التي يمكن كتابتها على شكل حاصل جمع زاويتين أو الفرق بينهما، إذا عُلمت النسب المثلثية لكلٍّ منها.

إذا كان أ ، ب قياسين لزاويتين فإنّ:

١) جتا (أ − ب) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب

٢) جتا (أ + ب) = جتا أ جتا ب − جا أ جا ب

٣) جا(أ + ب) = جا أ جتا ب + جا ب جتا أ

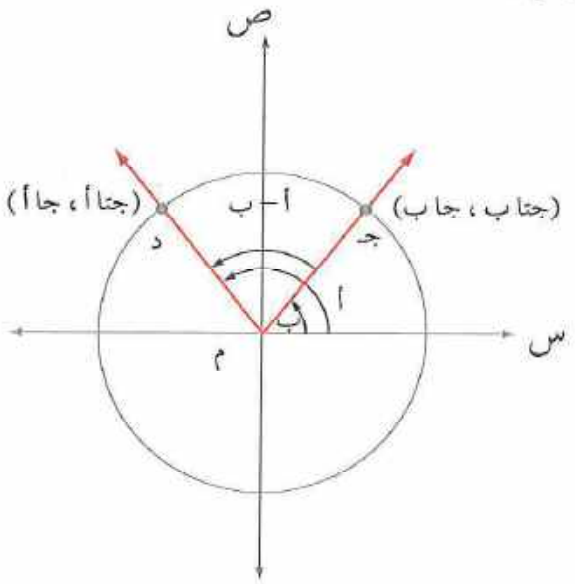
٤) جا (أ − ب) = جا أ جتا ب − جا ب جتا أ

٥) $\text{ظا}(أ - ب) = \frac{\text{ظا أ} - \text{ظا ب}}{١ + \text{ظا أ ظا ب}}$

٦) $\text{ظا}(أ + ب) = \frac{\text{ظا أ} + \text{ظا ب}}{١ - \text{ظا أ ظا ب}}$

برهان الفرع (١)

افترض أنّ زاويتين قياسهما أ و ب في دائرة الوحدة كما في الشكل (٤-٢٤) فإنّ:



الشكل (٤-٢٤).

$(\text{جـ د})^2 = (\text{جتا ب} - \text{جتا أ})^2 + (\text{جاب} - \text{جا أ})^2$ (قانون المسافة بين نقطتين)

$= \text{جتا}^2\text{ب} - 2\ \text{جتا ب جتا أ} + \text{جتا}^2\text{أ} + \text{جا}^2\text{ب} - 2\ \text{جا أجاب} + \text{جا}^2\text{أ}$ (فك الأقواس)

$= (\text{جتا}^2\text{أ} + \text{جا}^2\text{أ}) + (\text{جا}^2\text{ب} + \text{جتا}^2\text{ب}) - 2\ \text{جتاب جتا أ} - 2\ \text{جا أجاب}$ (تجميع حدود)

$= 2 - 2\ \text{جتاب جتا أ} - 2\ \text{جا أجاب}$ .....(١) ($\text{جا}^2\text{هـ} + \text{جتا}^2\text{هـ} = 1$)

$(\text{جـ د})^2 = (\text{م جـ})^2 + (\text{م د})^2 - 2\ (\text{م جـ}) \times (\text{م د}) \times \text{جتا}(\text{أ} - \text{ب})$ (استخدام قانون جيب التمام)

$= 1 + 1 - (2 \times 1 \times 1 \times \text{جتا}(\text{أ} - \text{ب}))$ (م جـ = م د = ١ أنصاف أقطار)

$= 2 - 2\ \text{جتا}(\text{أ} - \text{ب})$ .....(٢)

من المعادلتين (١) و (٢) ينتج :

$2 - 2\ \text{جتا}(\text{أ} - \text{ب}) = 2 - 2\ \text{جتاب جتا أ} - 2\ \text{جا أجاب}$ (طرح ٢ من الطرفين)

$-2\ \text{جتا}(\text{أ} - \text{ب}) = -2\ \text{جتا ب جتا أ} - 2\ \text{جاأ جاب}$ (القسمة على -٢)

ومن ذلك ينتج أن : $\text{جتا}(\text{أ} - \text{ب}) = \text{جتا أجتاب} + \text{جا أ جا ب}$

مثال (١)

أثبت أنّ جتا (أ+ب)= جتا أ جتاب – جاب جا أ

الحل

لإثبات المتطابقات نبدأ من الطرف الأيمن لنصل إلى الطرف الأيسر (أو بالعكس).

الطرف الأيمن: جتا (أ + ب) =جتا (أ– (– ب)) (كتابة أ+ب على صورة أ – ب)

= جتا أجتا (– ب) + جا أ جا (– ب) (متطابقة (١))

= جتا أ جتاب + جا أ ×(– جاب) (جتا (– س)= جتا س، جا (– س)=– جا س)

= جتا أجتا ب – جا أ جا ب

وبذلك نكون حصلنا على الطرف الأيسر.

مثال (٢)

أثبت أنّ جا (أ+ ب) = جا أ جتاب + جا ب جتا أ

الحل

الطرف الأيمن = جا(أ+ ب)

جتا ($\frac{\pi}{٢}$ – (أ+ب)) = جتا (($\frac{\pi}{٢}$ –أ) – ب) (جيب الزاوية = جيب تمام متممتها)

= جتا ($\frac{\pi}{٢}$– أ) جتا ب + جا($\frac{\pi}{٢}$ – أ) جاب (المتطابقة (١))

= جا أجتا ب +جاب جتا أ (جيب الزاوية = جيب تمام متممتها)

= الطرف الأيسر

تدريب (١)

أثبت أنّ ١) جا (π + س) = – جا س

٢) جا ($\frac{\pi ٣}{٢}$ – س) = – جتا س

٣) جتا (π– س) = – جتاس

مثال (٣)

دون استخدام الآلة الحاسبة احسب قيمة كلٍّ مما يأتي، إذا علمت أنّ:

جا ٣٠° = جتا ٦٠° = ٠,٥ ، جتا ٣٠° = جا ٦٠° = ٠,٨٧ ، جا ٤٥° = جتا ٤٥° = ٠,٧

١) جتا ١٠٥° ٢) جا ٧٥°

٣) ظا ١٥° ٤) جتا ٢٤° جتا ٣٦° − جا ٢٤° جا ٣٦°

الحل

١) جتا (١٠٥°) = جتا (٦٠° + ٤٥°) = جتا ٦٠° جتا ٤٥° − جا ٦٠° جا ٤٥° (المتطابقة (٢))

= ٠,٥ × ٠,٧ − ٠,٨٧ × ٠,٧ = ٠,٣٥ − ٠,٦٠٩ = − ٠,٢٥٩

(تعويض القيم)

٢) جا (٧٥°) = جا (٤٥° + ٣٠°) (٧٥° = ٤٥° + ٣٠°)

= جا ٤٥° جتا ٣٠° + جا ٣٠° جتا ٤٥° (المتطابقة (٣))

= ٠,٧ × ٠,٨٧ + ٠,٥ × ٠,٧ = ٠,٦٠٩ + ٠,٣٥ = ٠,٩٥٩

(تعويض القيم)

٣) ظا ١٥° = ظا (٦٠° − ٤٥°) (١٥° = ٦٠° − ٤٥°)

$= \frac{\text{ظا } ٦٠° - \text{ظا } ٤٥°}{١ + \text{ظا } ٦٠° \times \text{ظا } ٤٥°}$ (المتطابقة (٥))

$= \frac{١ - ١,٧٤}{١ \times ١,٧٤ + ١} = \frac{٠,٧٤}{٢,٧٤}$ (تعويض القيم)

= ٠,٢٧ (تبسيط)

٤) جتا ٢٤° جتا ٣٦° − جا ٢٤° جا ٣٦° = جتا (٣٦° + ٢٤°) (المتطابقة (٢))

= جتا ٦٠° (تبسيط)

= ٠,٥ (تعويض)

تدريب (٢)

احسب قيمة كلٍّ مما يأتي دون استخدام الآلة الحاسبة:

١) جتا ٧٠° جتا ٢٥° + جا ٧٠° جا ٢٥°

٢) جتا ٧٥°

٣) ظا ١٠٥°

مثال (٤)

إذا كان جا أ = ٠,٤، جتا ب = −٠,٣ حيث: ٠° < أ < ٩٠° ، ٩٠° < ب < ١٨٠°

احسب قيمة كل مما يأتي:

١) جا (أ + ب)

٢) جتا (أ − ب)

الحل

نجد جتا أ باستخدام المتطابقة جا^{٢} أ + جتا^{٢} أ = ١

(٠,٤)^{٢} + جتا^{٢} أ = ١ (تعويض جا أ = ٠,٤)

جتا^{٢} أ = ١ − ٠,١٦ (طرح ٠,١٦ من الطرفين)

= ٠,٨٤ (نأخذ الجذر للطرفين)

جتا أ = ٠,٩١ (لأنَّ أ في الربع الأول)

نجد جا ب باستخدام المتطابقة جا^{٢} ب + جتا^{٢} ب = ١

جا^{٢} ب + (−٠,٣)^{٢} = ١ (تعويض جتا ب = −٠,٣)

جا^{٢} ب = ١ − ٠,٠٩ (طرح ٠,٠٩ من الطرفين)

جا^{٢} ب = ٠,٩١ (نأخذ الجذر للطرفين)

جا ب = ٠,٩٥ (ب في الربع الثاني)

يمكن الآن حساب المطلوب بتعويض القيم المعطاة والمحسوبة:

١) جا (أ + ب) = جا أ جتا ب + جا ب جتا أ (المتطابقة (٣))

= ٠,٤ − × ٠,٣ − + ٠,٩٥ × ٠,٩١ (تعويض القيم)

= (٠,١٢ − + ٠,٨٦) (تبسيط)

= ٠,٧٤

٢) جتا (أ − ب) = جتا أ جتا ب + جا أ جا ب (المتطابقة (١))

= ٠,٩١ − × ٠,٣ − + ٠,٩٥ × ٠,٤ (تعويض القيم)

= ٠,٢٧ − + ٠,٣٨ (تبسيط)

= ٠,١١

تدريب (٣)

إذا كان جاس = $-\frac{٣}{٥}$ ، ١٨٠° < س < ٢٧٠°

جتا ص = $-\frac{١٢}{١٣}$ ، ١٨٠° < ص < ٢٧٠°

فاحسب قيمة كلٍّ مما يأتي:

١) جا (س − ص)

٢) جتا (س + ص)

٣) ظا (س − ص)

نحتاج أحياناً أن نكتب الجيب وجيب التمام لزاويتين كحاصل ضرب وهذه المتطابقات تجعل العمليات الحسابية سهلة، والنظرية الآتية تستخدم حاصل ضرب الجيب وجيب التمام لحاصل جمع جيبين أو جيبي تمام:

١) جاس + جا ص = ٢ جا $\frac{س + ص}{٢}$ جتا $\frac{س - ص}{٢}$

٢) جاس − جا ص = ٢ جتا $\frac{س + ص}{٢}$ جا $\frac{س - ص}{٢}$

٣) جتاس + جتا ص = ٢ جتا $\frac{س + ص}{٢}$ جتا $\frac{س - ص}{٢}$

٤) جتاس − جتاص = −٢ جا $\frac{س + ص}{٢}$ جا $\frac{س - ص}{٢}$

لبرهنة المتطابقة الأولى جاس + جا ص = ٢ جا $\frac{س+ص}{٢}$ جتا $\frac{س-ص}{٢}$

نفرض أن : س = أ + ب ⟵ أ = $\frac{س+ص}{٢}$

ص = أ − ب ⟵ ب = $\frac{س-ص}{٢}$ (لماذا؟)

جا (أ+ ب) = جا أ جتا ب + جاب جتا أ.....(١) (المتطابقة (٣))

جا (أ− ب) = جا أجتا ب − جتا أ جا ب .....(٢) (المتطابقة (٤))

= ٢ جا أ جتاب (جمع المعادلة (١) +(٢) وتبسيط)

جا س + جا ص = ٢ جا $\frac{س+ص}{٢}$ جتا $\frac{س-ص}{٢}$ (تعويض قيم أ ، ب المحسوبة)

وهو المطلوب

تدريب (٤)

أثبت باقي أجزاء المتطابقات في صفحة ١٩٢.

تدريب (٥)

أثبت أنّ:

١) $\frac{جا(س+ص)}{جتاس\ جتاص}$ = ظا س + ظا ص

٢) $\frac{جا(س-ص)}{جتا(س+ص)} = \frac{ظاس - ظاص}{١ - ظاس\ ظاص}$

مثال (٥)

بيّن أنّ: $\frac{\text{ظا}٧٨^\circ - \text{ظا}٤٨^\circ}{١ + \text{ظا}٧٨^\circ \text{ ظا}٤٨^\circ} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

الحل

نبدأ من الطرف الأيمن $\frac{\text{ظا}٧٨^\circ - \text{ظا}٤٨^\circ}{١ + \text{ظا}٧٨^\circ \text{ ظا}٤٨^\circ} = \text{ظا}(٧٨^\circ - ٤٨^\circ)$ (المتطابقة (٥))

$= \text{ظا}(٣٠^\circ)$ (تبسيط)

$= \frac{١}{\sqrt{٣}}$ الطرف الأيسر (تعويض)

تدريب (٦)

أثبت أنّ $\frac{\text{جا}٧٥^\circ + \text{جا}١٥^\circ}{\text{جتا}١٥^\circ - \text{جتا}٧٥^\circ} = \sqrt{٣}$

مثال (٦)

أثبت صحة المتطابقة : $\text{ظا}(٤٥^\circ - \text{جـ}) \times \text{ظا}(٤٥^\circ + \text{جـ}) = ١$ $(\text{جـ} \neq ٤٥^\circ، ٢٢٥^\circ)$

حيث $٠^\circ \leq \text{جـ} \leq ٣٦٠^\circ$

الحل

نبدأ بالطرف الأيمن: $\text{ظا}(٤٥^\circ - \text{جـ}) \times \text{ظا}(٤٥^\circ + \text{جـ})$

$= \frac{\text{ظا}٤٥^\circ - \text{ظا جـ}}{١ + \text{ظا}٤٥^\circ \text{ ظا جـ}} \times \frac{\text{ظا}٤٥^\circ + \text{ظا جـ}}{١ - \text{ظا}٤٥^\circ \text{ ظا جـ}}$ (المتطابقات(٥ ، ٦))

$= \frac{(١ - \text{ظا جـ})}{١ + \text{ظا جـ}} \times \frac{(١ + \text{ظا جـ})}{١ - \text{ظا جـ}}$ (تعويض ظا $٤٥^\circ = ١$)

$= ١$ (تبسيط)

(الطرف الأيسر)

تمارين و مسائل

١) دون استخدام الآلة الحاسبة جد قيمة كلٍّ مما يأتي:

أ) جتا٥٠° جتا١٠° − جا٥٠° جا١٠°

ب) جا٣٥° جتا٢٥° + جا٢٥° جتا٣٥°

جـ) −جا٧٥° جا١٥° + جتا٧٥° جتا١٥°

د) جا$\frac{\pi}{٣}$ جتا$\frac{\pi}{٧}$ − جا$\frac{\pi}{٧}$ جتا$\frac{\pi}{٣}$

٢) بسّط المقادير الآتية:

أ) جتا٢س جا٣ص − جتا٣ص جا٢س

ب) جاس جتا٢ص + جا٢ص جتاس

جـ) جتاس جتا٣س + جاس جا٣س

د) جا٣س جتاس − جتا٣س جاس

هـ) جتا٧ص جتا٣ص − جا٧ص جا٣ص

و) $\frac{\text{ظا(س−ص)} + \text{ظاص}}{١ - \text{ظا(س−ص) ظاص}}$ ، (ملاحظة: تستثنى الزوايا التي تجعل المقام صفرًا أو غير معرّف).

٣) برهن صحة كلٍّ مما يأتي:

أ) جتا٣س = جتا^{٣}س − ٣ جا^{٢} س جتاس

ب) جا٤س + جا٢س = ٢ جا٣س جتاس

جـ) (جتاس + جاس)^{٢} − (جتاس − جاس)^{٢} = ٤ جاس جتاس

د) (١ − جاس)(١ + $\frac{١}{\text{جاس}}$) = $\frac{\text{جتا}^{٢}\text{س}}{\text{جاس}}$

هـ) $\frac{\text{جتاس}}{١-\text{جاس}} - \frac{\text{جتاس}}{١+\text{جاس}} = ٢\,\text{ظاس}$

و) $\frac{\text{ظا}^2\text{س} - \text{ظا}^2\text{ص}}{1 - \text{ظا}^2\text{س ظا}^2\text{ص}} = \text{ظا (س + ص) ظا (س − ص)}$ ، (س ≠ ٤٥°، ص ≠ ٤٥°

أو مضاعفات ٤٥°، أو ما يجعل المقام صفرًا)

ز) $\frac{\text{جا(س+ص)}}{\text{جا(س−ص)}} = \frac{\text{ظاس+ظاص}}{\text{ظاس− ظاص}}$ (س ≠ص)

٤) أب جـ مثلث فيه جا أ = $\frac{٤}{٥}$ ، جا ب = $\frac{٥}{١٣}$ ،برهن أنّ :

جا جـ = $\frac{٦٣}{٦٥}$ أو $\frac{٣٣}{٦٥}$

٥) إذا كان قياس أ + ب = $\frac{\pi}{٤}$ ، ظا أ = $\frac{١}{١١}$ فجد ظا ب.

٦) إذا كانت أ، ب ، جـ زوايا مثلث فأثبت أنّ:

ظا أ + ظا ب + ظا جـ = ظا أ ظاب ظا جـ

٧) جد مفكوك كلٍّ مما يأتي:

أ) جا (أ + ب + جـ)

ب) جتا (أ + ب +جـ)

جـ) ظا (أ + ب + جـ)

٨) حُلّ المسألة الواردة في بداية الدرس إذا علمت أنّ الزمن ١ ثانية .

ثانيًا: المتطابقات المثلثية (٢) Trigonometric Identities (2)

تستعمل النوافير مضخات تضخ الماء بزوايا محددة فتصنع أقواسًا، ويعتمد مسار الماء على سرعة الضخ وزاويته؛ فعندما يتم ضخ الماء في الهواء بسرعة ع وزاوية مقدارها هـ مع خط الأفق فإن المعادلتين الآتيتين تحددان أقصى ارتفاع يصل إليه الماء ل، والمسافة الأفقية د:

$$ل = \frac{ع^{٢} جا^{٢} س}{جـ} \qquad د = \frac{جا ٢س \, ع^{٢}}{جـ}$$

جـ ثابت الجاذبية الأرضية، اكتب النسبة بين ل و د في أبسط صورة.

اعتمادًا على المتطابقات في الدرس السابق يمكن التعبير عن جا٢س بصورة أخرى:

جا (٢س) = جا (س+س) (٢س = س + س)

= جاس جتاس +جتاس جاس (باستخدام متطابقة جيب مجموع زاويتين)

= ٢ جاس جتاس (تجميع حدود متشابهة)

وهذا يمثل برهان الفرع (٢) من المتطابقات الآتية:

متطابقات ضعف الزاوية:

١) جتا٢س = $\begin{cases} جتا^{٢} س - جا^{٢} س \\ ١ - ٢ جا^{٢} س \\ ٢ جتا^{٢} س - ١ \end{cases}$

٢) جا ٢س = ٢ جاس جتا س

٣) $ظا ٢س = \frac{٢ ظاس}{١ - ظا^{٢} س}$

استخدم الأسلوب نفسه لبرهنة فرعي (١)، (٣).

مثال (١)

إذا علمت أن جاس = $\frac{٢}{٣}$: $٠^\circ < س < ٩٠^\circ$، فجد قيمة كُلٍّ مما يأتي:

١) جتا٢س ٢) جا٢س ٣) ظا٢س

الحل

١) جتا٢س = ١ − ٢ جا^٢ س (متطابقة ضعف الزاوية (١))

= ١ − ٢ × $\left(\frac{٢}{٣}\right)^٢$ (تعويض قيمة جاس)

= ١ − ٢ × $\frac{٤}{٩}$ = ١ − $\frac{٨}{٩}$ = $\frac{١}{٩}$ (تبسيط)

٢) و لحساب جا٢س يلزم إيجاد جتا س:

جا^٢ س + جتا^٢ س = ١ (متطابقة)

$\left(\frac{٢}{٣}\right)^٢$ + جتا^٢ س = ١ (تعويض قيمة جاس)

$\frac{٤}{٩}$ + جتا^٢ س = ١ (تبسيط)

جتا^٢ س = $\frac{٥}{٩}$ (طرح $\frac{٤}{٩}$ من الطرفين)

جتاس = ∓ $\frac{\sqrt{٥}}{٣}$ (نأخذ الجذر للطرفين)

جتاس = $\frac{\sqrt{٥}}{٣}$ (السالب يُهمل لأن الزاوية في الربع الأول)

جا ٢س = ٢ جاس جتاس (متطابقة جيب ضعف الزاوية)

جا ٢س = ٢ × $\frac{٢}{٣}$ × $\frac{\sqrt{٥}}{٣}$

= $\frac{٤\sqrt{٥}}{٩}$ (تبسيط)

٣) لحساب ظا ٢س = $\frac{\text{جا٢س}}{\text{جتا٢س}}$ (متطابقة ظاس)

= $\frac{٤\sqrt{٥}}{٩}$ ÷ $\frac{١}{٩}$ = ٤$\sqrt{٥}$ (تعويض ثُمّ تبسيط)

تدريب (١)

إذا علمت أن جتا س = $\frac{-١}{٣}$ ، ٩٠° < س < ٢٧٠°، فجد قيمة كُلٍّ من:

١) جا٢س ٢) جتا ٢س

مثال (٢)

دون استخدام الآلة الحاسبة جد قيمة: جا ٢٢,٥° جتا ٢٢,٥°

الحل

جا٢س = ٢ جاس جتاس (متطابقة جيب ضعف الزاوية)

جا ٢٢,٥° جتا ٢٢,٥° = $\frac{١}{٢}$ جا ٤٥° (٤٥° = ٢ × ٢٢,٥°)

$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢ \times ٢}$ (تعويض ثُمَّ تبسيط)

تدريب (٢)

دون استخدام الآلة الحاسبة جد قيمة: (جتا^{٢} ١٥°).

متطابقات نصف الزاوية

١) جا $\frac{س}{٢}$ = $\pm \sqrt{\frac{١ - \text{جتاس}}{٢}}$ ومنها ١ − جتاس = ٢ جا^{٢} $\frac{س}{٢}$

٢) جتا $\frac{س}{٢}$ = $\pm \sqrt{\frac{١ + \text{جتاس}}{٢}}$ ومنها ١ + جتاس = ٢ جتا^{٢} $\frac{س}{٢}$

٣) ظا $\frac{س}{٢}$ = $\pm \sqrt{\frac{١ - \text{جتاس}}{١ + \text{جتاس}}}$

إثبات فرع (٢) من متطابقات نصف الزاوية:

البرهان

جتا٢س = ٢ جتا^{٢}س − ١ (متطابقة ضعف الزاوية لجيب التمام)

جتاس = ٢ جتا$^{٢}\frac{س}{٢}$ − ١ (تعويض س بدل ٢س في المتطابقة)

جتا$^{٢}\frac{س}{٢} = \frac{١+جتاس}{٢}$ (تبسيط)

جتا$\frac{س}{٢}$ = ± $\sqrt{\frac{١+جتاس}{٢}}$ وهو المطلوب (جذر الطرفين)

تدريب (٣)

أثبت أنّ جا$\frac{س}{٢}$ = ± $\sqrt{\frac{١-جتاس}{٢}}$

مثال (٣)

إذا علمت أنّ ظاهـ = $\frac{٤}{٣}$ ، ١٨٠° < هـ < ٢٧٠° ، فجد جتا$\frac{هـ}{٢}$

الحل

بما أن هـ تقع في الربع الثالث فإنّ $\frac{هـ}{٢}$ تقع في الربع الثاني. (لماذا؟)

ظاهـ = $\frac{٤}{٣} = \frac{ص}{س}$ ← ص = − ٤ ، س = − ٣ (تكافؤ الكسور، الزاوية هـ في الربع الثالث)

ر^{٢} = س^{٢} + ص^{٢} (معادلة الدائرة)

= (− ٣)^{٢} + (− ٤)^{٢} (تعويض قيم س، ص)

ر = ٥ (جذر الطرفين)

جتاهـ = $\frac{س}{ر} = -\frac{٣}{٥}$

جتا$\frac{هـ}{٢}$ = − $\sqrt{\frac{١+جتاس}{٢}}$ (القيمة سالبة لأنّ الزاوية $\frac{هـ}{٢}$ في الربع الثاني)

= − $\sqrt{\frac{١-\frac{٣}{٥}}{٢}}$ = − $\sqrt{\frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٥}}$ = − $\sqrt{\frac{١}{٥}}$ (تبسيط)

تدريب (٤)

إذا علمت أنّ جاس $= \frac{٣}{٥}$ ، $١٨٠^\circ > س > ٩٠^\circ$ ، فجد قيمة جا $\frac{س}{٢}$.

مثال (٤)

أثبت أنّ ظا $\frac{س}{٢} = \pm \frac{\text{جاس}}{١ + \text{جتاس}}$

الحل

الطرف الأيمن: ظا $\frac{س}{٢} = \frac{\text{جا} \frac{س}{٢}}{\text{جتا} \frac{س}{٢}}$ (متطابقة الظل)

$= \pm \sqrt{\frac{١ - \text{جتاس}}{١ + \text{جتاس}}}$ (تعويض متطابقات نصف الزاوية)

$= \pm \sqrt{\frac{١ - \text{جتاس}}{١ + \text{جتاس}} \times \frac{١ + \text{جتاس}}{١ + \text{جتاس}}}$ (الضرب بالمرافق)

$= \pm \sqrt{\frac{١ - \text{جتا}^٢س}{(١ + \text{جتاس})^٢}} = \pm \sqrt{\frac{\text{جا}^٢س}{(١ + \text{جتاس})^٢}} = \pm \frac{\text{جاس}}{١ + \text{جتاس}}$

= (الطرف الأيسر)

تدريب (٥)

اثبت أنّ ظا $\frac{س}{٢} = \pm \frac{١ - \text{جتاس}}{\text{جاس}}$

تمارين و مسائل

١) دون استخدام الآلة الحاسبة جد قيمة كلٍّ مما يأتي:

أ) جتا ٥٠° جا ٨٠° − جا ٥٠° جا ١٠°

ب) جتا ٧٠° جتا ٢٥° + جا ٧٠° جتا ٦٥°

جـ) ٢ جتا^{٢} $\frac{\pi}{٢}$ − ١

د) جا $\frac{\pi}{٨}$

هـ) ظا $\frac{\pi ٥}{١٢}$

٢) حُلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

٣) أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

أ) $\frac{\text{جتا}٢\text{س}}{١+\text{جا}٢\text{س}} = \frac{\text{ظتاس}-١}{\text{ظتاس}+١}$

ب) ظا س $= \frac{١-\text{جتا}٢\text{س}}{\text{جا}٢\text{س}}$

جـ) ظا ٢س $= \frac{٢}{\text{قتاس}-\text{ظاس}}$

د) ٤ جتا^{٢} س − جا^{٢} ٢س $=$ ٤ جتا^{٤} س

هـ) $\frac{\text{جاس}}{\text{قاس}} = \frac{١}{\text{ظاس}+\text{ظتاس}}$

و) $\frac{١-\text{جتاهـ}}{١+\text{جتاهـ}} = (\text{قتاهـ} - \text{ظتاهـ})^{٢}$

ز) ظتا $\frac{\text{س}}{٢} = \pm \frac{١+\text{جتاس}}{\text{جاس}}$

ح) $\frac{\text{جا}٢\text{جـ}}{١+\text{جتا}٢\text{جـ}} \times \frac{\text{جتاجـ}}{١+\text{جتاجـ}} = \text{ظا} \frac{\text{جـ}}{٢}$

٤) إذا كان ظا ٢جـ $= \frac{٧}{٣٥}$ ، فجد قيم ظا جـ .

٥) إذا كان جتاهـ $= \frac{٤}{٥}$ ، ٢٧٠° < هـ < ٣٦٠° ، فجد قيمة كل مما يأتي:

أ) جتا ٢هـ

ب) جا ٢هـ

جـ) ظا ٢هـ

د) جا $\frac{\text{هـ}}{٢}$

هـ) جتا $\frac{\text{هـ}}{٢}$

و) ظا $\frac{\text{هـ}}{٢}$

٦) إذا كان جتا أ $= \frac{٣}{٥}$ ، جتا ب $= \frac{٤}{٥}$ ، أ وَ ب زاويتان حادتان فَجِدْ قيمة جتا $\left(\frac{\text{أ}-\text{ب}}{٢}\right)$

(دون استخدام الآلة الحاسبة)

ناعورة ماء دوارة قطرها ٢٠ م تدور بمعدل ٢,٥ دورة في الدقيقة، تم رصد دلو ماء مركب عليها، فإذا كان ارتفاع الدلو عن سطح الأرض يعطى بالمعادلة ل = ٢١ − ٢٠ جتا ٣π ن، حيث ل الارتفاع، ن الزمن بالدقيقة. بعد كم دقيقة يكون ارتفاع الدلو ١١م ؟

تُعرّف **المعادلة المثلثية** على أنها المعادلة التي تحوي اقترانًا مثلثيًا أو أكثر، وحلّ المعادلة المثلثية يعني إيجاد قيم المتغير فيها، إما هندسيًا أو جبريًا.

مثال (١)

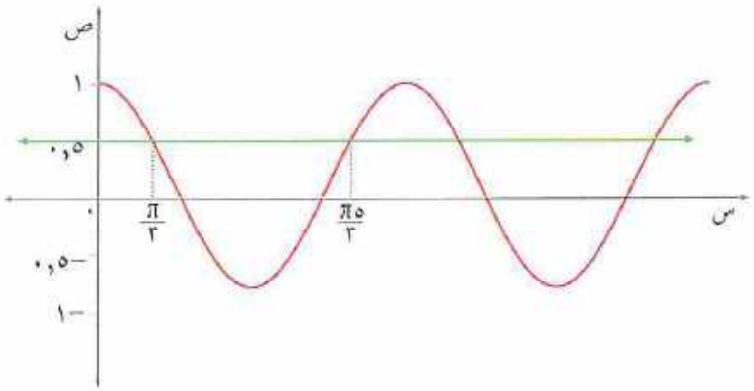
حل المعادلة جتاس = $\frac{١}{٢}$.

الحل

نقوم برسم الاقتران

ق(س) = جتاس، ورسم خطٍّ أفقيٍّ

يمثل المستقيم ص = $\frac{١}{٢}$.



الشكل (٤−٢٥).

يتضح من الرسم أن منحنى الاقتران ق(س)= جتاس و المستقيم ص= $\frac{١}{٢}$ يتقاطعان في النقاط التي إحداثياتها السينية هي: $\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{\pi ٥}{٣}$ ، فتكون مجموعة الحل في الفترة [٠، ٢π] هي{ $\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{\pi ٥}{٣}$ }، و الحل في الفترة[٠، ٢π] يُسمى **الحل الأولي** للمعادلة .

ويمكن تعميم الحل على مجموعة الأعداد الحقيقية، ليصبح الحل:

{س:س= $\frac{\pi}{٣}$ + ٢πن ، $\frac{\pi ٥}{٣}$ + ٢πن: ن ∈ ص} حيث ٢π هي دورة الاقتران ق(س)=جتاس، وهذا ما يعرف **بالحل العام**.

تدريب (١)

حُلَّ المعادلة الآتية:

جا٢س = ٠,٥ هندسيًا.

مثال (٢)

حُلَّ المعادلة جا ٤س = ١ جبريًّا.

الحل

بالبحث عن الزاوية التي جيبها = ١

نجد أن ٤س = $\frac{\pi}{٢}$ (قسمة الطرفين على ٤)

س = $\frac{\pi}{٨}$ وهذا هو الحل الأولي.

دورة الاقتران ق(س)=جا ٤س هي $\frac{\pi ٢}{٤} = \frac{\pi}{٢}$.

فالحل العام : { س:س= $\frac{\pi}{٨}$ + $\frac{\pi}{٢}$ ن، ن ∋ ص}

تدريب (٢)

حُلَّ المعادلة جتا ٢س = ٠,٥ ، س ∋ [٠ ، π]

مثال (٣)

حُلَّ كلاًّ من المعادلات الآتية حلًّا عامًّا:

١) جا^{٢}س – جاس = ٢

٢) جا^{٢}س +جاس = صفرًا

الحل

١) جا^{٢}س– جاس =٢ (طرح ٢ من الطرفين)

جا^{٢}س – جاس –٢ =صفرًا تحلل كأيِّ معادلة تربيعية فينتج :

(جاس −٢) (جاس +١) =صفرًا (تحليل الطرف الأيمن)

إما (جاس − ٢) =صفرًا (خاصية الضرب بصفر)

ومنه جاس =٢ تُهمل (لماذا)؟

أو جاس +١ = صفرًا

جاس = −١

س= $\frac{\pi ٣}{٢}$ الحل الأولي

الحل العام: { س:س= $\frac{\pi ٣}{٢}$ + ٢نπ، ن ∋ ص}

٢) جا^{٢}س + جاس = صفرًا

جاس (جاس +١) = صفرًا (إخراج جاس عاملاً مشتركًا)

إما جاس = صفرًا (خاصية الضرب بصفر)

س = صفرًا أو π

أو جاس = −١

س= $\frac{\pi ٣}{٢}$

وبذلك تصبح مجموعة الحل الأولي هي : { صفر ، π ، $\frac{\pi ٣}{٢}$ }

أما **الحل العام** فهو: {صفر+٢ن π ، π +٢ن π، $\frac{\pi ٣}{٢}$ + ٢نπ ، ن ∋ ص}

تدريب (٣)

حُلَّ المعادلة الآتية : جاس − جا $\frac{س}{٢}$ = صفر حيث صفر< س< ٣٦٠°

مثال (٤)

حُلَّ المعادلة:

٢ جتا٢س +٢ جا^{٢}س = جتاس ، حلًّا أوليًّا.

الحل

نكتب المعادلة بدلالة اقتران مثلثي واحد فتصبح المعادلة:

٢(٢ جتا^{٢}س−١) + ٢ (١− جتا^{٢}س) − جتاس = صفرًا (جتا٢س = ٢ جتا^{٢}س−١)
(جا^{٢}س = ١ − جتا^{٢}س)

٤ جتا^{٢}س −٢ جتا^{٢}س −جتاس = صفرًا (فك الأقواس)

٢ جتا^{٢}س − جتاس = صفرًا (اختصار)

جتاس (٢ جتاس − ١) =صفرًا (إخراج جتاس عاملًا مشتركًا)

إما جتاس = صفرًا

ومنه س = $\frac{\pi}{٢}$ أو س= $\frac{\pi ٣}{٢}$

أو (٢ جتا س −١) =صفرًا

جتاس = $\frac{١}{٢}$

س= $\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{\pi ٥}{٣}$ وبذلك يكون الحل الأولي{ $\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{\pi ٥}{٣}$ ، $\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{\pi ٣}{٢}$ }

مثال (٥)

حُلَّ المعادلة جاس − $\sqrt{٣}$ جتاس = صفر ، ٠ ≤ س ≤ ٢π

الحل

نحوِّل صورة المعادلة السابقة إلى ظاس بقسمة المعادلة على جتاس حيث جتاس≠ صفرًا، فتصبح المعادلة على النحو الآتي:

$\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} - \sqrt{٣} \frac{\text{جتاس}}{\text{جتاس}} = \frac{\text{صفرًا}}{\text{جتاس}}$ (قسمة الطرفين على جتاس)

ظاس − $\sqrt{٣}$ = صفرًا (تبسيط)

ظاس = $\sqrt{٣}$ ، ٠ ≤ س ≤ ٢π

س = $\frac{\pi}{٣}$، $\frac{\pi ٤}{٣}$

مجموعة الحل الأولي هي: { $\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{\pi ٤}{٣}$ }

تمارين و مسائل

١) جد الحل العام لكلٍّ من المعادلات الآتية:

أ) جاس جتاس $-\frac{١}{٢}$ جتاس = صفرًا

ب) جا^{٢} ٢س + جتا^{٢} س = صفرًا

جـ) جتا٢س + جتاس + ١ = صفرًا

د) ٢جا^{٢} س − ١ = صفرًا

هـ) جتاس − ٢ جتاس جاس = صفرًا

و) جاس + جا $\frac{س}{٢}$ = ٠

ز) $\frac{١+\text{جاس}}{\text{جتاس}} + \frac{\text{جتاس}}{١+\text{جاس}} = ٤$

ح) جتا٢س − جا^{٢}س + ٢ = صفرًا

٢) اكتب كل معادلة من المعادلات المثلثية الآتية بدلالة اقتران مثلثي واحد:

أ) ٢ جتا^{٢}س = جاس + ١ ب) جاس = جتاس

جـ) ٥ ظا^{٢}س = ٦ قاس − ٥ د) ١ + ظتا^{٢}س = ٣ قتاس

٣) باستخدام الرسم، حل كلًّا من المعادلات الآتية:

أ) جاس = − جتاس ب) جاس = جا٢س

٤) دون اللجوء إلى الحل، اذكر عدد الحلول الممكنة لكلٍّ معادلة إذا علمت أن ٠ < س < ٢π، مبرراً إجابتك :

أ) ٣جاس = ٤ ب) ظاس = ١

جـ) ظاس + ظتاس = صفر

٥) إذا علمت أن: ب جا هـ = $\sqrt{٣٧}$ ، ب جتاهـ = ١، فاحسب:

أ) قيم هـ التي تحقق العلاقتين معًا. ب) قيم ب الممكنة.

٦) حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

أسئلة الوحدة

١) حول الزوايا الآتية من القياس الستيني إلى التقدير الدائري:

أ) ٧٥° ب) ٢٢,٥°

٢) حول الزوايا الآتية من التقدير الدائري إلى القياس الستيني:

أ) $\frac{\pi}{١٠}$ ب) $\frac{\pi ٧}{٦}$

٣) بسِّط العبارات الآتية:

أ) قتا^{٢}هـ − ظتا^{٢}هـ ب) $\frac{\text{جتاهـ} \times \text{قتاهـ}}{\text{ظاهـ}}$

جـ) قاهـ ظا^{٢}هـ + قا هـ د) (١ − جاهـ) (١ + جاهـ)

هـ) ٢ − ٢ جا^{٢} هـ و) $\frac{\text{جتا}(-\text{هـ})}{\text{جا}(-\text{هـ})}$

٤) عبر عن المقادير الآتية باستخدام جاهـ فقط:

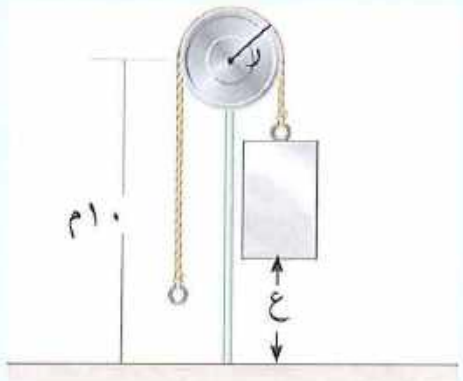
أ) ظا هـ جتا^{٢}هـ ب) جاهـ (١ − جتا^{٢}هـ)

جـ) جتا($\frac{\pi}{٢}$ − هـ) قتاهـ د) ظتا^{٢}هـ − ظا^{٢}هـ

٥) تُرفع بعض الأثقال عن سطح الأرض باستخدام بكرة نصف قطرها ر، وَ ارتفاعها عن سطح الأرض ١٠ م إذا علمت أن البكرة تدور هـْ، فاحسب ارتفاع الثقل في الحالات الآتية:

أ) هـ = ٧٢٠° ر = ٤سم

ب) هـ = ١٨٠° ر = ٢ م



الشكل (٤ − ٢٦).

٦) يقوم لاعب بركل كرة بزاوية قياسها ٢٢,٥° مع سطح الأرض بسرعة ابتدائية متجهة مقدارها ١٠ م/ث إذا كانت المسافة التي تقطعها الكرة تعطى بالصيغة

$د = \frac{٢ ع \text{ جاس جتاس}}{جـ}$ حيث جـ ثابت الجاذبية الأرضية = ١٠ م/ث^{٢}، ع سرعة الكرة

فأجب عن كلٍّ مما يأتي:

أ) بسِّط المقدار السابق

ب) استخدم التبسيط في حساب المسافة.

٧) أثبت كلًّا مما يأتي:

أ) $\frac{١+\text{جاس}}{\text{جتاس}} = \frac{\text{جاس}-\text{جتاس}+١}{\text{جاس}+\text{جتاس}-١}$

ب) $\text{ظاس} + \text{قاس} = \frac{\text{ظاس}+\text{قاس}-١}{\text{قتاس}-\text{قاس}+١}$

جـ) $\text{قا}^{٢}\text{ س} + \text{قتا}^{٢}\text{ س} = \text{قا}^{٢}\text{س} \times \text{قتا}^{٢}\text{ س}$

د) $(\text{جاس}+\text{جتاس})^{٢} + (\text{جاس} - \text{جتاس})^{٢} = ٢$

هـ) $\frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{١-\text{جتاس}} = ١ + \text{جتاس}$

و) $(٢ \text{ ب جاس جتاس})^{٢} + \text{ب}^{٢}(\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س})^{٢} = \text{ب}^{٢}$

ز) $\text{جا}٨\text{س} = ٨ \text{ جاس جتاس جتا}٢\text{س جتا}٤\text{س}$

ح) $(\text{جاس} + ٢\text{ جتاس})^{٢} + (٢ \text{ جاس} - \text{جتاس})^{٢} = ٥$

٨) حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية :

أ) $٢\text{ جتا}^{٢}\text{س} + \text{جاس} - ١ = \text{صفرًا}$

ب) $٢ - \text{جاس} = ٢\text{ جتا}^{٢}\text{س}$

جـ) $\text{جاس} + \text{جتا}^{٢}\text{س} = ١$

د) قا^{٢}س – ظا^{٤}س = – ١

هـ) ٤ جاس = ٤ قاس

و) جا٢س – جتاس = صفرًا

ز) جاس + جتا٢س – جا ٣س = صفرًا

٩) أثبت أنّ:

أ) قتا^{٢}س – ظتا^{٢}س = ظتاس ظاس

ب) ظتا^{٢}س – جتا^{٢}س = ظتا^{٢}س جتا^{٢}س

جـ) جتاس × جتا(– س) – جاس × جا(– س) = ١

د) قاس × قتاس = ظاس + ظتاس

هـ) قتاس – جاس = جتاس ظتاس

و) جاس قتاس + ظتا^{٢}س = قتا^{٢}س

١٠) إذا كانت أ + ب = ٢٢٥° ، أثبت أنّ $\frac{\text{ظتا أ}}{\text{١+ظتا أ}} \times \frac{\text{ظتا ب}}{\text{١+ ظتاب}} = ٠,٥$.

١١) سيارة سرعتها ٦ كم /ساعة تسير على طريق دائري طول نصف قطره ٧ كم ، ما قياس الزاوية المركزية التي تقابل مسار السيارة بعد مرور ٢٢ دقيقة ؟

١٢) يمثل الشكل المجاور جزءًا من منحنى الاقتران ق (س) = جا (س + م)

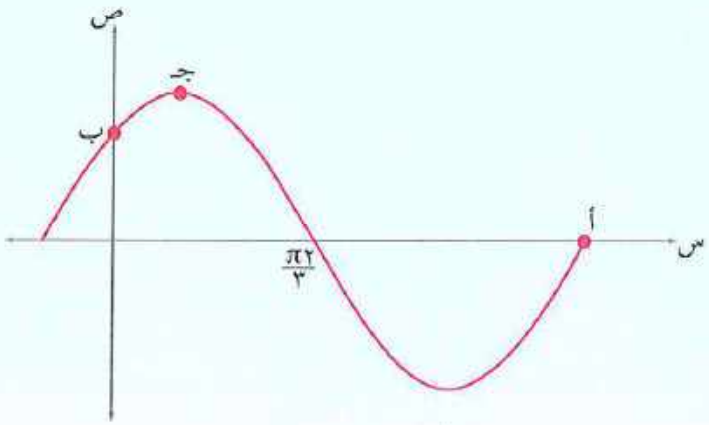
جد كلًّا ممَّا يأتي:

أ) قيمة أ

ب) إحداثيا النقطة جـ.

جـ) أصغر قيمة لِـ م.

د) إحداثيا النقطة ب.



الشكل (٤ – ٢٧).

١٣) يتكون هذا السؤال من أربع فقرات من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة أربعة بدائل، واحد فقط منها صحيح، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) قيمة جا $\frac{-\pi}{٦}$ =

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٢) سعة الاقتران ق (س) = ٢ جا ٥س:

أ) ٥ ب) ٢ جـ) $\frac{\pi ٢}{٥}$ د) π

(٣) طول قوس الدائرة التي نصف قطرها ٣٠سم و الذي يقابل زاوية مركزية قياسها $= ٣٠^\circ$

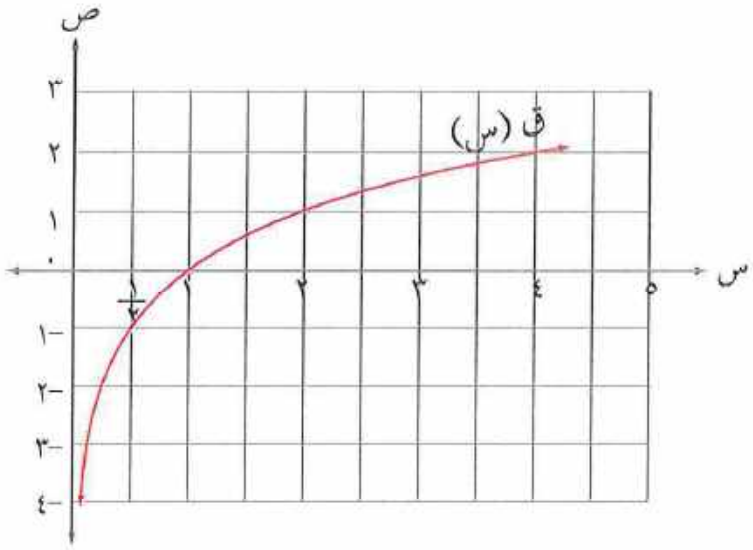
أ) $\frac{٥}{\pi}$ ب) $\frac{\pi}{٣}$ جـ) $\pi ٥$ د) ٥

(٤) زاوية المرجع للزاوية (-٧٠٠°) هي:

أ) ٧٠٠° ب) -٢٠° جـ) ٢٠° د) ٣٠٠°

الاقترانات الأسية واللوغاريتمية

نواجه في حياتنا مسائل تتضمن مقادير حسابية يصعب التعامل معها بالطرائق التقليدية، وعليه لابد من البحث عن طرائق وقوانين جديدة لتسهيل الحسابات، سنتعرف في هذه الوحدة الاقترانات الأسية واللوغاريتمية التي نستفيد منها في تبسيط المقادير الحسابية من خلال قوانين الأسس واللوغاريتمات وتطبيقاتها الفيزيائية والبيولوجية ومعادلات النمو والاضمحلال وغيرها من التطبيقات.



Exponential and Logarithmic Functions

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادرا على:

- تحويل الاقترانات من الصيغة الأسية إلى الصيغة اللوغاريتمية وبالعكس.
- توضيح العلاقة بين قوانين الأسس وقوانين اللوغاريتمات.
- حلُّ معادلات أسية ولوغاريتمية.
- تمثيل الاقترانات الأسية واللوغاريتمية بيانيًّا.
- تحويل الاقترانات الأسية واللوغاريتمية (التي أساسها ب> ٠) إلى اقترانات أسية ولوغاريتمية أساسها (هـ).
- برهنة متطابقات أسية ولوغاريتمية.
- استخدام الاقترانات الأسية واللوغاريتمية في حل مسائل حياتية.
- توظيف التكنولوجيا في حساب لوغاريتمات الأعداد.

النتاجات

- تتعرف الاقتران الأسي.
- تمثل الاقتران الأسي وتستقصي خصائصه.
- تتعرف المعادلة الأسية.
- تحل معادلات أسية.
- تتعرف المتطابقة الأسية.
- تثبت صحة متطابقات أسية.

أولاً: الاقترانات الأسية Exponential Functions

يتزايد ثمن قطعة أرض بمعدل ٥٪ سنويًا، إذا كان سعرها حاليًا ٨٠٠٠٠ دينار، فما ثمن القطعة بعد ٨ سنوات؟

يمكن حل هذه المسألة بتكوين الجدول الآتي:

السنة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
القيمة								

ويمكن استخدام الآلة الحاسبة في الحل.

إن لعبة الشطرنج هي لعبة الأذكياء، واكتشاف الشطرنج يدل على عبقرية مخترع هذه اللعبة، حيث إنَّه طلب مكافأة من الملك على الشكل التالي: أن يحصل على حبة قمح واحدة عن المربع الأول، وحبتين من القمح عن المربع الثاني، وأربع حبات من القمح عن المربع الثالث، وثمانِ حبات عن المربع الرابع وهكذا.

هل باستطاعتك معرفة عدد حبات القمح في المربع رقم ٢٠؟ رقم ٦٠؟

هل باستطاعتك تعريف اقتران يعبر عن عدد حبات القمح الموجودة في كل مربع من مربعات رقعة الشطرنج؟

لا بد أنك لاحظت أن عدد حبات القمح في المربع رقم ١ هو $٢^{٠}=١$

وأن عدد حبات القمح في المربع رقم ٢ هو: $٢^{١}=٢$

وأن عدد حبات القمح في المربع رقم ٣ هو: $٢^{٢}=٤$

وأن عدد حبات القمح في المربع رقم ٤ هو: $٢^{٣}=٨$ وهكذا....

لهذا يمكن القول بأن عدد حبات القمح في المربع رقم س هو $٢^{س-١}$

إذن يمكن تعريف الاقتران الدال على عدد حبات القمح التي حصل عليها مخترع لعبة الشطرنج عن كل مربع من مربعات رقعة الشطرنج بالقاعدة:

$ق(س) = ٢^{س-١}$

وبناءً على ذلك فإن عدد حبات القمح في المربع رقم ٢٠ هي $٢^{١٩}$ وعدد حبات القمح في المربع رقم ٦٠ هي $٢^{٥٩}$

لاحظ أن مثل هذا الاقتران أُسه متغير لذلك يسمى مثل هذا الاقتران **الاقتران الأسي**.

تعريف

يسمى الاقتران المعرّف بالقاعدة $ق(س) = أ \times ب^{ل(س)}$ **اقترانًا أسيًّا**، حيث ل(س) اقتران حقيقي أ، ب ∈ ح، أ ≠ ٠، ب > ٠، ب ≠ ١، وهو اقتران يكون فيه ل(س) أساً ويسمى العدد الثابت ب أساس الاقتران ق.

ومن الأمثلة على الاقترانات الأسية ما يأتي:

١) $ق(س) = ٤(٣)^{س}$

٢) $م(س) = ٢^{س} + ١$

٣) $هـ(س) = \left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$

٤) $و(س) = \left(\frac{٢}{٥}\right)^{س}$

٥) $هـ(س) = ٣ \times (٥)^{س-٢}$

٦) $ل(س) = \left(\frac{١}{٥}\right)^{-س} + ٢$

مثال (١)

أيٌّ من الاقترانات الآتية يعد اقترانا أسيًّا:

١) $ق(س) = ١٥^{س-١}$

٢) $م(س) = ٢^{س} + ٥$

٣) $هـ(س) = \sqrt{٧^{س}}$

٤) $ك(س) = ٣ \times ٥^{(س)} + ٧$

٥) $ل(س) = \left(\frac{٣}{٢}\right)^{-س+٢}$

الحل

جميع الاقترانات السابقة أسية باستثناء الاقتران هـ (لماذا؟)

تدريب (١)

أيٌّ من الاقترانات الآتية يعد اقترانا أسيًّا:

١) ق(س) = س^{٥} − ٧

٢) م(س) = ٢س$^{-٥}$

٣) هـ(س) = ٧ + $\sqrt{٧^{س}}$

٤) ك(س) = ٥ × ٣س$^{+٦}$

٥) ل(س) = $\left(\frac{٢}{٥}\right)^{س}$ − ١٢

فكّر وناقش

ما قيمة الثابت م التي تجعل الاقتران ق(س) = (٣^{س} + م^{٢} س) اقترانًا أسيًّا؟

للتعرف على التمثيل البياني للاقتران الأسي ندرس المثال الآتي:

مثال (٢)

ارسم منحنى الاقتران ق(س) = ٣^{س}

الحل

١) نختار قيمًا للمتغير س لتكن حول العدد صفر، مثل {−٢، −١، ٠، ١، ٢}

٢) نجد قيمًا ق(س) المناظرة لقيم س المختارة بالتعويض في قاعدة الاقتران ق .

ق(−٢) = ٣$^{-٢}$ = $\frac{١}{٩}$ ، ق(−١) = ٣$^{-١}$ = $\frac{١}{٣}$ ، ق(٠) = ٣^{٠} = ١

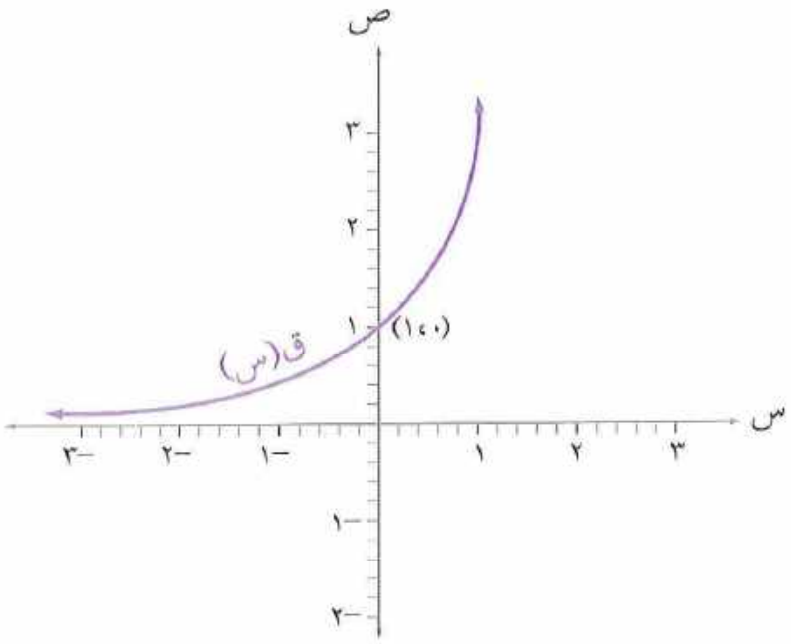
ق(١) = ٣^{١} = ٣، ق(٢) = ٣^{٢} = ٩

٣) نكون الجدول الآتي:

س	−٢	−١	صفر	١	٢
٣^{س}	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩

٤) نرسم المستوى الإحداثي ونعين عليه النقاط الواردة في الجدول السابق.

٥) نصل بين هذه النقاط بخطٍّ منحن أملس كما في الشكل (٥-١) الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) = ٣^س .



الشكل (٥-١).

اعتمادًا على الشكل (٥-١) أجب عن الأسئلة الآتية:

١) ما المقطع الصادي للاقتران ق؟

٢) هل يقطع الاقتران ق محور السينات؟

٣) هل الاقتران ق متزايد أم متناقص؟ ولماذا؟

٤) هل الاقتران ق واحد لواحد ؟ ولماذا؟

٥) ما مجال الاقتران ق؟

٦) ما مدى الاقتران ق؟

ماذا تلاحظ؟

تدريب (٢)

ارسم منحنى الاقتران ق(س) = ٢^س .

مثال (٣)

ارسم منحنى الاقتران ق(س)$= \left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$.

الحل

نختار قيم المتغير س حول العدد صفر ولتكن: −٢ ، −١ ، ٠ ، ١ ، ٢

ق(−٢) $= \left(\frac{١}{٢}\right)^{-٢} = (٢^{-١})^{-٢} = ٤$

ق(−١) $= \left(\frac{١}{٢}\right)^{-١} = (٢^{-١})^{-١} = ٢^{(١)} = ٢$ (قوانين الأسس)

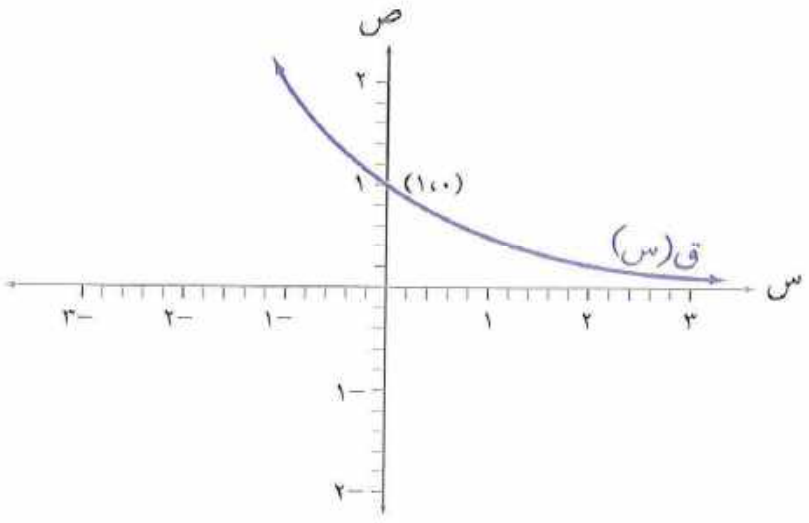
ق(٠) $= \left(\frac{١}{٢}\right)^{٠} = ١$ ($س^{٠} = ١$)

ق(١) $= \left(\frac{١}{٢}\right)^{١} = \frac{١}{٢}$ (قوانين الأسس)

ق(٢) $= \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} = \frac{١}{٤}$

س	−٢	−١	صفر	١	٢
ق(س)	٤	٢	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$

نعين مجموعة النقاط في الجدول على المستوى الاحداثي ونصل بينها بخطٍّ منحنٍ أملس ينتج الشكل (٥−٢) الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) $= \left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$



الشكل (٥−٢).

بالاعتماد على الشكل (٥-٢)، أجب عن الأسئلة الآتية مع التبرير:

١) هل يقطع الاقتران ق محور السينات؟

٢) ما مدى الاقتران ق؟

٣) ما المقطع الصادي للاقترانِ ق؟

٤) ما مجال الاقتران ق؟

٥) هل الاقتران ق واحد لواحد؟

٦) هل الاقتران ق متزايد أم متناقص؟

ماذا تلاحظ؟

تدريب (٣)

ارسم منحنى الاقتران ق(س) = $\left(\frac{١}{٣}\right)^{س}$

تدريب (٤)

ارسم منحنى كلٍّ من الاقترانات الآتية:

١) ق(س) = $٥^{س}$ ٢) ل(س) = $-(٢)^{س}$

٣) ع(س) = $٣(٢)^{س}$ ٤) هـ(س) = $٦^{-س}$

٥) م(س) = $\left(\frac{١}{٤}\right)^{-س}$

وبشكل عام لاحظ أنه لأيّ اقتران أسي ق(س) = أ × ب^{س} ، أ > ٠ ، ب > ٠ ، ب ≠ ١ ،
فإن:

١) مجاله ح.

٢) مداه = ح$^{+}$

٣) مقطعه الصادي أ ، بمعنى أنه يمر بالنقطة (٠ ، أ).

٤) الاقتران ق يكون متزايدًا، إذا كانت ب > ١، ويكون متناقصًا إذا كان ٠ < ب < ١

٥) منحناه لا يقطع محور السينات.

٦) الاقتران واحد لواحد.

مثال (٤)

اكتب قاعدة الاقتران الأسي الذي على صورة ق(س)= أ×ب$^{(س+١)}$ الذي مقطعه الصادي ٦ ويمر بالنقطة (١، ٢٤).

الحل

بما أنّ المقطع الصادي للاقتران هو ٦ فإنّ الاقتران يمر بالنقطة (٠ ، ٦) وعليه فإنّ ق(٠) = ٦

وهذا يعني أن: ق(٠) = أ × ب$^{(٠+١)}$

٦ = أ × ب

$\therefore$ أ = $\frac{٦}{ب}$

بما أنّ الاقتران ق يمر بالنقطة (١، ٢٤) فإنّ ق(١)=٢٤

$\therefore$ أ × ب^{٢} = ٢٤ (بالتعويض)

$\frac{٦}{ب}$ × ب^{٢} = ٢٤ (التعويض بقيمة أ)

$\therefore$ ٦ ب = ٢٤

ومنها ب = ٤

لكنّ أ × ب^{٢} = ٢٤

لذلك فإنّ:

$أ \times (٤)^{٢} = ٢٤$

$١٦أ = ٢٤$

$\therefore أ = \frac{٣}{٢}$ (الاختصار)

$\therefore ق(س) = \frac{٣}{٢} \times ٤^{(س+١)}$

تدريب (٥)

جد قاعدة الاقتران الأسي ل(س) = جـ × (د)^{س} الذي يمر بنقطة تقاطع المستقيمين س+ص=٢، ٢س− ص=١، ومقطعه الصادي ٢

مثال (٥)

إذا كان ق(س) =٢٥− ٥^{س}، فجد المجال والمدى والمقطع السيني والمقطع الصادي دون استخدام الرسم.

الحل

المجال ح. لماذا؟

المدى = (−∞ ، ٢٥). لماذا؟

يقطع الاقتران محور السينات عندما س=٢ لماذا؟

يقطع الاقتران محور الصادات عندما تكون س=٠

ق(٠) = ٢٥− ٥^{٠}

= ٢٥−١

= ٢٤ (لأنّ ٥^{٠} =١)

∴ المقطع الصادي ٢٤ (يقطع الاقتران ق محور الصادات في النقطة (٠، ٢٤)

تدريب (٦)

جد المجال والمدى والمقطع السيني والصادي من خلال القاعدة دون استخدام الرسم لكل من الاقترانين الآتيين:

١) هـ(س) = $٢^{-س+٣}$ + ١

٢) ل(س) = $٢^{س-٢}$ − ٤

فكّر وناقش

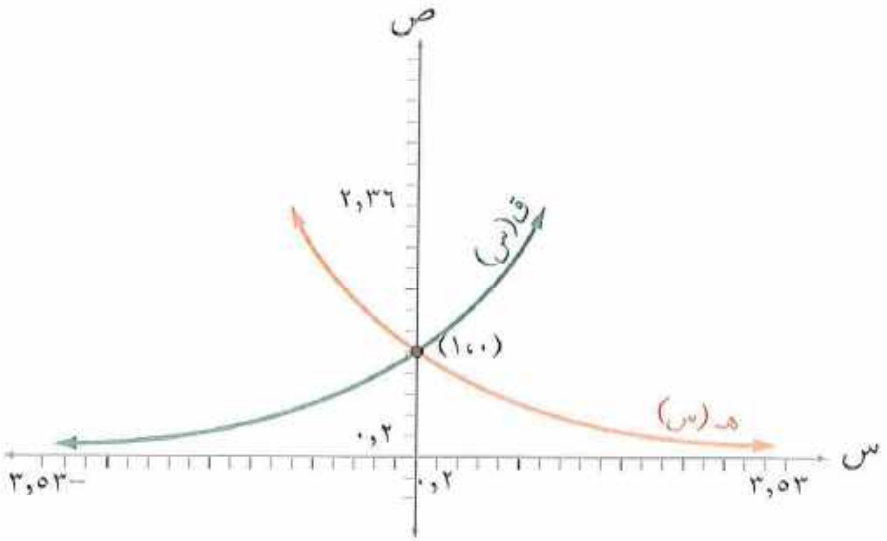
هل الاقتران الأسي الذي على الصورة ق(س) = أ × $ب^{س}$ الذي يمر بالنقطتين (١، ١) ، (−١، ٣) متزايد أم متناقص؟

مثال (٦)

ارسم منحنى كل من الاقترانين ق(س) = $٢^{س}$ ، هـ(س) = $٢^{-س}$ في المستوى الاحداثي نفسه.

الحل

يمثل الشكل (٥ − ٣) منحنى كل من الاقترانين ق ، هـ



الشكل (٥−٣).

نلاحظ من الشكل (٥−٣) أنّ المنحنيين انعكاس لبعضهما في محور الصادات بمعنى أنّ:

ق(س) = هـ (− س) لكل س ∈ ح.

ويمكن تعميم ذلك على الاقترانات الأسية كافّةً وبشكل عام:

إذا كان ق(س) = أ^س ، ل (س) = أ^-س ، أ > ٠ ، أ ≠ ١

فإنّ منحنى الاقتران ل هو انعكاس لمنحنى الاقتران ق في محور الصادات والعكس صحيح.

تدريب (٧)

ارسم منحنى كل من الاقترانين ق(س) = ٣^س ، هـ(س) = ٣^-س في مستوى بياني واحد.

تتطلب بعض التطبيقات الحياتية اقترانات خاصة مثل **الاقتران الأسي الطبيعي**، وقاعدته ق(س) = هـ^س، وهو اقتران أساسه هـ، حيث هـ العدد النيبيري وهو عدد غير نسبي ويساوي تقريبًا (٢,٧). ويمكن استخدام الاقتران الأسي الطبيعي في العديد من التطبيقات العملية في جميع المجالات ومنها **معادلة النمو والاضمحلال** السكاني حيث إنّ عدد السكان في سنة معينة يمكن تقديره وفق العلاقة:

ع = ع. (هـ)^أ×ن حيث ع. : عدد السكان الحالي

ع : عدد السكان المتوقع في سنة ما

أ : نسبة الزيادة أو النقصان

ن : فرق السنوات بين السنة الحالية والمتوقعة.

مثال (٧)

إذا كان عدد سكان مدينة (٤٠٠٠٠) نسمة، ويتزايد عدد السكان بنسبة ٥٪ سنويًّا ، جد عدد السكان المتوقع بعد (٢٠) سنة .

الحل

ع = ع. هـ^أ×ن = ٤٠٠٠٠ هـ^٠,٠٥×٢٠

= ٤٠٠٠٠هـ^١ = ٤٠٠٠٠ × هـ

= ١٠٨٠٠٠ نسمة تقريبًا.

تدريب (٨)

إذا كان ق(س) = ٢ × هـ$^{س+١}$ ، فجد المقطع الصادي والمجال والمدى لهذا الاقتران دون استخدام الرسم.

يمكن استخدام الحاسوب في رسم الاقتران الأسي. والمثال الآتي يوضح طريقة رسم الاقتران الأسي باستخدام برمجية إكسل(Excel).

مثال (٨)

ارسم منحنى الاقتران ق(س) = (٣)^{س} بالفترة [−٣، ٣] باستخدام برمجية اكسل.

الحل

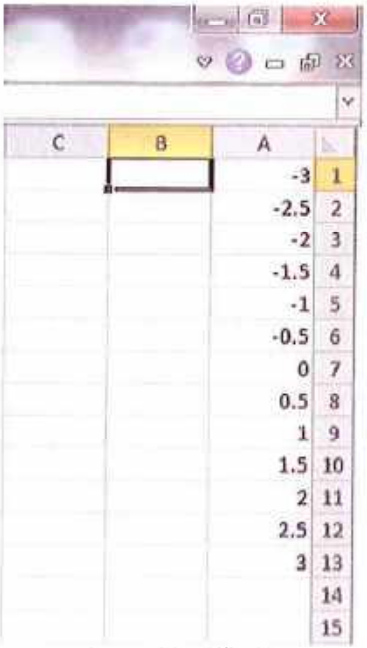
١) شغّل برمجية اكسل (Excel)، فتظهر لك نافذة اكسل كما في الشكل(٥−٤).

الشكل (٥−٤).

٢) اختر عمودًا وليكن A ، وضع المؤشر في الخلية A1 واكتب القيمة الأولى للمتغير س وهي (−٣)، ثم ضع المؤشر في الخلية A2 واكتب القيمة الثانية للمتغير س وهي (−٢,٥).

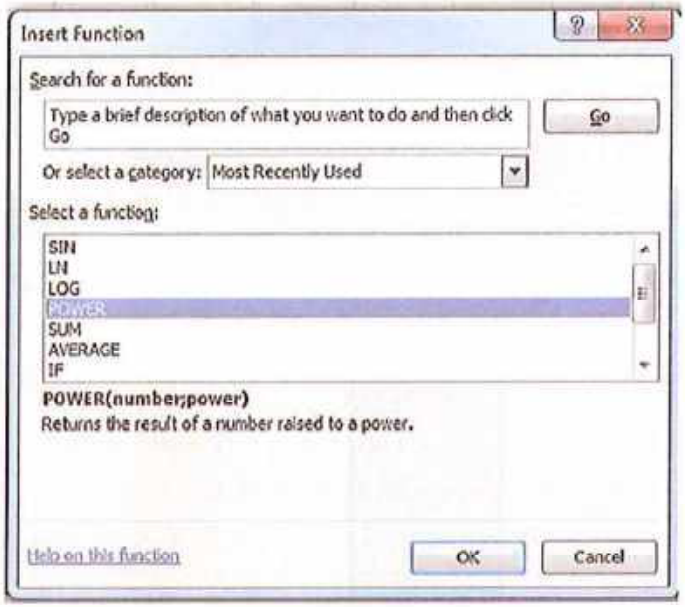
٣) ظلل الخليتين ثم اسحب المؤشر للأسفل حتى تظهر آخر قيمة للمتغير س وهي (٣). كما في الشكل (٥−٥).

٤) ضع المؤشر في الخلية (B1).



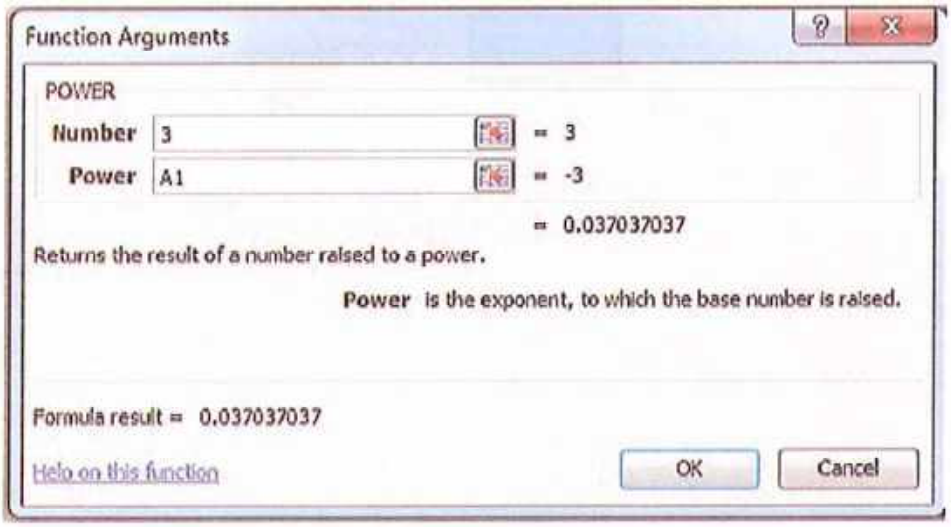
الشكل (٥−٥).

٥) من تبويبة الصيغ (Formulas)، اختر أداة إدراج دالة، فيظهر لك صندوق حوار إدراج كما في الشكل (٥-٦).



الشكل (٥-٦).

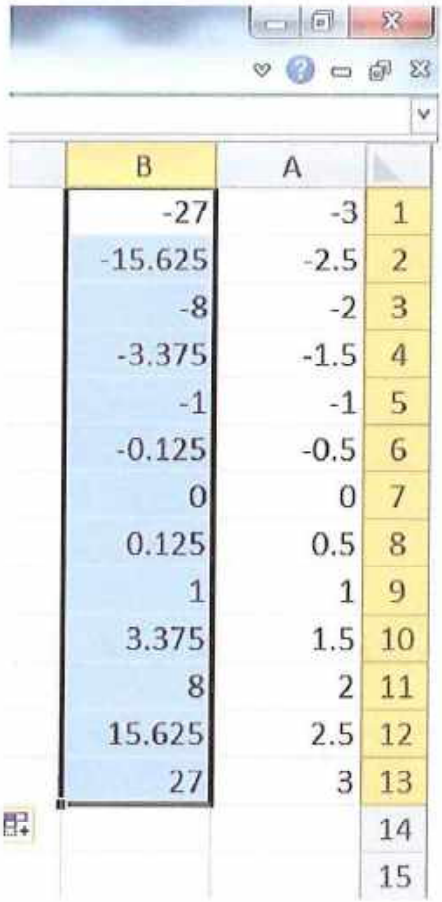
٦) اختر الدالة (POWER) وانقر على موافق، يظهر لك صندوق حوار الدالة كما في الشكل (٥- ٧).



الشكل (٥-٧).

٧) اكتب أساس الاقتران ق في مستطيل (Number)، واكتب A1 في مستطيل (Power)، ثم انقر موافق، فيظهر لك صورة القيمة A1 في الخلية B1.

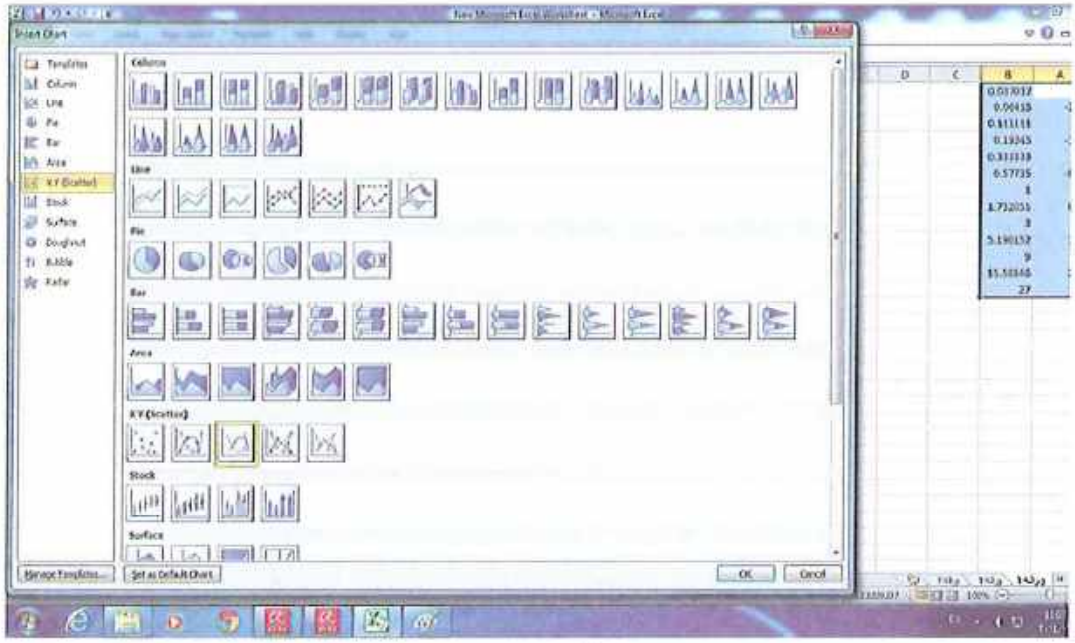
٨) اسحب المؤشر على جميع الخلايا التي كتبتها ليظهر لك مجموعة صور قيم المتغير س كما في العمود B. كما في الشكل (٥-٨).



	A	B
1	-3	-27
2	-2.5	-15.625
3	-2	-8
4	-1.5	-3.375
5	-1	-1
6	-0.5	-0.125
7	0	0
8	0.5	0.125
9	1	1
10	1.5	3.375
11	2	8
12	2.5	15.625
13	3	27
14		
15		

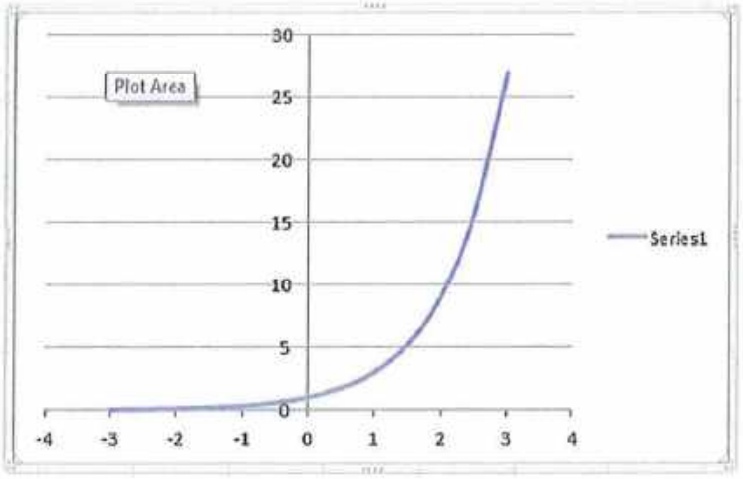
الشكل (٥-٨).

٩) ظلل العمودين A،B ثم اختر من تبويبة إدراج مجموعة مخططات نوع المخطط (Line) ثم اختر من الأشكال الشكل س، ص مبعثر (XY–Scatter) ثم اختر نوع المنحنى كما في الشكل (٥– ٩).



الشكل (٥–٩).

١٠) اختر موافق ليظهر لك رسم الاقتران ق(س) = (٣)^{س} كما في الشكل (٥– ١٠)



الشكل (٥–١٠).

تدريب (٩)

ارسم منحنى الاقتران ق(س)= (٦)$^{-س}$، باستخدام برمجية إكسل.

تمارين و مسائل

١) ارسم منحنى كلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ) $ق(س) = \left(\frac{٣}{٢}\right)^{س}$ ب) $هـ(س) = ٢^{س+١}$

جـ) $ل(س) = ٣س^{-١}$ د) $ع(س) = ٣^{-س} + ٢$

هـ) $ك(س) = ٣^{-س} - ٢$

٢) يتزايد عدد سكان مدينة ما وفق المعادلة التالية $ع_٢ = ع_١(١+ز)^{ن}$، حيث $ع_١$: عدد سكان المدينة الحالي ، ز : نسبة الزيادة السنوية في عدد السكان ، ن: عدد السنوات، $ع_٢$: عدد سكان المدينة المتوقع، جد عدد سكان المدينة بعد (٥)سنوات، إذا علمت أن عدد السكان الحالي (٤٠٠٠٠)نسمة، ونسبة الزيادة ٥٪ سنويًا.

٣) إذا كان $ق(س) = \frac{أ^{-س} + أ^{س}}{٢}$ ، فأثبت أن:

$$ق(س) \times ق(ص) = \frac{ق(س+ص) + ق(س-ص)}{٢}$$

٤) ارسم منحنى الاقتران ق في الفترة [−٣،٣] حيث :

$$ق(س) = \begin{cases} ٢^{-س} & ، \ -٣ \leq س \leq ٠ \\ ٢^{س} & ، \ ٠ < س \leq ٣ \end{cases}$$

٥) ناقش خاصية الانعكاس في السؤال السابق.

٦) ارسم منحنى الاقتران $ق(س) = هـ^{س}$

٧) ارسم منحنى الاقترانين $ق(س) = هـ^{س}$ ، $ل(س) = هـ^{-س}$ في مستوى بياني واحد.

٨) ينفق أحمد أسبوعيا بمعدل ثابت مقداره ١٠٪ حسب العلاقة $م_٢ = م_١(١ + ر)^{ن}$ ، حيث $م_٢$: المبلغ بعد ن أسبوع، $م_١$: المبلغ الأصلي، ر: المعدل الثابت للإنفاق. فإذا علمت أنّ لدى أحمد (٣٠٠٠) دينار، كم يصبح المبلغ المتبقي مع أحمد بعد ثلاثة أسابيع؟

٩) حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

١٠) ارسم منحنى الاقتران $ق(س) = ٣ \times (٢)^{س}$ باستخدام برمجية إكسل.

إذا كانت العلاقة بين شدة التيار ت بالأمبير، والزمن ن بالثواني هي: ت = ٢ $^{-ن}$ فبعد كم ثانية تصبح شدة التيار تساوي (٠,٢٢٥) أمبير؟

تعرفت سابقا مفهوم المعادلة، حيث إنّ المعادلة جملة مفتوحة تتضمن متغيرًا أو أكثر، وهي مكونة من طرفين متساويين، والمعادلة أنواع منها المعادلة الخطية مثل: ٤س +٧ = ٥ ،

والمعادلة التربيعية مثل: س(١ − س) = −٦ ،

والمعادلة المثلثية مثل: جاس −٠,٢٥ = ٠

وسنتعرف في هذا الدرس نوعًا جديدًا من المعادلات مثل:

$٢^{س} = ٦٤$

$\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س} = \frac{١٦}{٨١}$

لاحظ أن المتغير يظهر على شكل أس لذا يسمى هذا النوع من المعادلات **المعادلات الأسية**

تعريف

المعادلة الأسية هي المعادلة التي يظهر فيها المتغير على شكل أس.

ومن الأمثلة أيضًا على المعادلة الأسية:

١) $٣^{٢س} = ٨١$

٢) $٥^{١-س} = ١٢٥$

٣) $-٤^{س٢+س} = -٦٤$

يعتمد حل المعادلة الأسية على فكرة الحصول على مقدارين أسيين متساويين لهما الأساس نفسه من الصورة: $أ^{ق(س)} = أ^{ل(س)}$

تعميم

١) اذا كان $أ^{ق(س)} = أ^{ل(س)}$ ، فإن ق(س)= ل(س) حيث أ ≠ ١

٢) اذا كان $أ^{ق(س)} = ١$ ، فإن ق(س) = صفر حيث أ ≠ ١

والأمثلة الآتية توضح كيفية حلّ بعض المعادلات الأسية:

مثال (١)

حُلّ المعادلة الأسية $٣^{٤س} = ٨١$

الحل

$٣^{٤س} = ٣^{٤}$ (تحويل العدد ٨١ الى الصيغة الأسية)

ومنه $٤س = ٤$ أي $س = ١$

∴ مجموعة الحل هي $\{ ١ \}$

مثال (٢)

حُلّ المعادلة $\left(\frac{١}{٣}\right)^{١-٢س} = ٢٧^{س-١}$

الحل

الطرف الأيمن من المعادلة:

$\left(\frac{١}{٣}\right)^{١-٢س} = (٣^{-١})^{١-٢س} = ٣^{٢س-١}$ (قوانين الأسس)

الطرف الأيسر من المعادلة:

$(٢٧)^{س-١} = ((٣)^{٣})^{(س-١)} = ٣^{٣س-٣}$ ($٢٧ = ٣^{٣}$)

ومنه $٣^{٢س-١} = ٣^{٣س-٣}$ (مساواة الطرفين)

إذن $٢س - ١ = ٣س - ٣$ (مساواة الأسس)

ومنه $٣س - ٢س = ٣ - ١$

$س = ٢$

∴ مجموعة الحل هي: $\{ ٢ \}$

تدريب (١)

حل المعادلة الآتية:

$$\left(\frac{٤}{٩}\right)^{س} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٦-س}$$

مثال (٣)

حُلّ المعادلة: $٤^{س^٢ + ٢س^٢ - ٣س} = ١$

الحل

$س^٢ + ٢س^٢ - ٣س = ٠$ (لأن $٤^{٠} = ١$)

$س(س^٢ + ٢س - ٣) = ٠$ (التحليل بإخراج العامل المشترك س)

إما: $س = ٠$ (خواص الأعداد الحقيقية)

أو: $س^٢ + ٢س - ٣ = ٠$

$(س+٣)(س-١) = ٠$ (تحليل العبارة التربيعية)

$س = -٣$ أو $س = ١$

∴ مجموعة الحل $= \{-٣، ٠، ١\}$

مثال (٤)

حُلّ المعادلة الأسية $٤^{٢س+٦} = ٢٥٦$

الحل

$٤^{٢س+٦} = (٢)^{٢(٢س+٦)} = (٢)^{(٤س+١٢)}$ (قوانين الأسس)

$٢٥٦ = ٢^{٨}$ (تحويل العدد ٢٥٦ إلى الصيغة الأسية)

$٢^{٤س+١٢} = ٢^{٨}$

$٤س + ١٢ = ٨$ (قوانين الأسس)

$٤س = -٤$

$س = -١$

∴ مجموعة الحل $= \{-١\}$

فكّر وناقش

هل يمكن حل مثال (٤) بطريقة أخرى؟

مثال (٥)

حُلّ المعادلة الأسية: $٥^{-س-١} = \frac{١}{٦٢٥}$

الحل

$٥^{-س-١} = \frac{١}{٥^{٤}} = ٥^{-٤}$ $(٦٢٥ = ٥^{٤})$

إذن

$-س - ١ = -٤$

ومنه $س = ٣$

تدريب (٢)

حُلّ كلاً من المعادلات الآتية:

١) $-٢^{٣س+١} + ١٦ =$ صفرًا.

٢) $٥ + ٥^{-٢س} = ٦٣٠$

٣) $٣^{-س-١} = \frac{١}{٨١}$

مثال (٦)

حُلّ المعادلة الأسية $٩^{س} - ٢٨ \times ٣^{س} + ٢٧ = ٠$

الحل

$(٣^{٢})^{س} - ٢٨ (٣)^{س} + ٢٧ = ٠$ $(٩ = ٣^{(٢)})$

$((٣)^{س})^{٢} - ٢٨ (٣)^{س} + ٢٧ = ٠$ (قوانين الأسس)

نفرض أن: $ص = ٣^{س}$

فالمعادلة $٩^{س} - ٢٨(٣)^{س} + ٢٧ = ٠$ تصبح على الصورة:

$ص^{٢} - ٢٨ ص + ٢٧ = ٠$

$(ص - ٢٧)(ص - ١) = ٠$ (بالتحليل)

$ص = ٢٧$ أو $ص = ١$

$٣^{س} = ٣^{٣}$ $٣^{س} = ١$ (تعويض بدل ص و ٢٧)

$س = ٣$ $س = ٠$

∴ مجموعة الحل هي: $\{٠، ٣\}$

تدريب (٣)

حلّ المعادلات الأسية الآتية :

١) $٤^{س} - ١٠(٢)^{س} + ١٦ = ٠$

٢) $٥^{س} + ٥^{س-٢} = ٢٦$

٣) $٢^{ص-١} - ٢^{ص-٢} = ٨$

وبعد أن تعرفت المعادلة الأسية وطريقة حلها، ستتعرف الآن **المتطابقة الأسية**.

المتطابقة الأسّية:

هي عبارة رياضية صحيحة لجميع قيم المتغير فيها.

مثال (٧)

أثبت صحة المتطابقة

$\sqrt{١ + ٢(٣)^{ن} + (٩)^{ن}} = ١ + ٣^{ن}$

الحل

لإثبات صحة المتطابقة نبدأ بالطرف الأيمن

الطرف الأيمن $= \sqrt{١ + ٢(٣)^{ن} + (٣)^{٢ن}}$

نفرض أن $ص = ٣^{ن}$

∴ $ص^{٢} = (٣^{ن})^{٢}$

$= ٣^{٢ن}$

$= (٣^{٢})^{ن}$

$= ٩^{ن}$

الطرف الأيمن $= \sqrt{ص^{٢} + ٢ص + ١}$

$= \sqrt{(ص+١)(ص+١)}$

$= \sqrt{(ص+١)^{٢}}$ $(\sqrt{س^{٢}} = |س|)$

$= |ص+ ١|$

$= ٣^{ن} + ١$ (لأن ص دائماً موجبة)

= الطرف الأيسر

مثال (٨)

أثبت صحة المتطابقة الأسية:

$$\frac{٢^{ن+٣} - ٢^{ن+٥}}{٣(٢^{ن+٣} - ٢^{ن+٤})} = ١$$

الحل

الطرف الأيمن $= \frac{٢^{ن+٣} - ٢^{ن+٥}}{٣(٢^{ن+٣} - ٢^{ن+٤})}$

$= \frac{٢^{ن}(٢^{٣} - ٢^{٥})}{٣(٢^{ن}(٢^{٣} - ٢^{٤}))}$

$= \frac{٣٢ - ٨}{٣(١٦ - ٨)}$

$= \frac{-٢٤}{٣(-٨)}$

$= \frac{-٢٤}{-٢٤}$

$= ١$

= الطرف الأيسر

تدريب (٤)

أثبت أن: $\frac{٣^{س+٢} \times ٢^{س+٣}}{٣^{٢-س} \times ٢^{٣-س}} = ٦^{٢س}$

تمارين و مسائل

١) حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية :

أ) $٢^{٤س} - ١٢(٢)^{٢س} + ٣٢ = ٠$

ب) $٣س^{٣} + س^{٢} + ٥س^{-٧} = ١$

جـ) $\left(\frac{٢}{٥}\right)^{١-٢س} = \left(\frac{٢٥}{٤}\right)^{٣س-٢}$

د) $٣(٢)^{-٩-٣س} = ٤٨$

هـ) $٥^{٢س+٢} - ٣٠(٥)^{س+١} + ١٢٥ = ٠$

و) $٢^{ص-١} - ٢^{ص-٢} = ٦٤$

ز) $٣^{س} = ٣^{-س}$

٢) أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

أ) $\frac{\sqrt[ن]{٣^{٢ن}}}{\sqrt[ن]{١٥}} \times \sqrt[ن]{٥} = \frac{١}{\sqrt[ن]{٣^{٢ن}}}$

ب) $\frac{٢ \times ١٢^{س-١} - ٢ \times ٩^{س+١}}{٢^{س+٢} + ٢^{س+٣}} = -١$

النتاجات

- تتعرف الاقتران اللوغاريتمي.
- تحول من الصيغة الأسية إلى اللوغاريتمية.
- تمثل منحنى الاقتران اللوغاريتمي بيانيًا.
- تستقصي قوانين اللوغاريتمات.
- تتعرف المعادلة والمتطابقة اللوغاريتمية.
- تحل معادلات لوغاريتمية.
- تثبت صحة متطابقة لوغاريتمية.

أولاً: الاقترانات اللوغاريتمية Logarithmic Functions

نشاط

معتمدًا الشكل (٥–١١) الذي يمثل منحنى اقتران يسمى لوغاريتم س للأساس ٢ ويرمز له بالرمز $\text{لـو}_{٢}$ س، أجب عن الأسئلة الآتية:

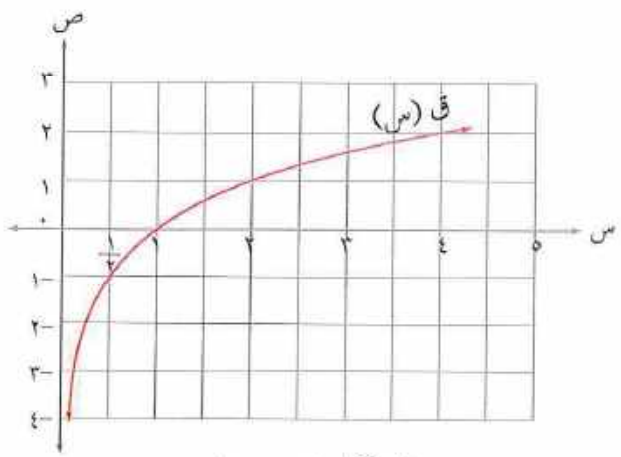
١) من خلال الرسم جد ناتج كُلٍّ مما يأتي:

أ) $\text{لـو}_{٢}$ ٤

ب) $\text{لـو}_{٢}$ ٢

جـ) $\text{لـو}_{٢}$ ١

د) $\text{لـو}_{٢}\frac{١}{٢}$



الشكل (٥–١١).

٢) جد القيمة العددية لكل مما يأتي:

أ) $٢^{٢}$ ب) $٢^{١}$ جـ) $٢^{٠}$ د) $٢^{-١}$

ماذا تلاحظ؟

لا بد أنك لاحظت أن هناك علاقة بين الأسئلة المتناظرة في السؤالين السابقين، ويمكن القول أن $\text{لـو}_{٢}$ س = أ إذا وفقط إذا كان س = $٢^{أ}$

تعريف

إذا كانت س> ٠، أ > ٠ ، أ≠١، فإن: ص = لـــو س إذا وفقط إذا كان س= أ^ص ، ويسمى الاقتران المعرف بالقاعدة ق(س)= لـــو س بالاقتران اللوغاريتمي. حيث أ: أساس اللوغاريتم.

ويمكن استخدام هذا التعريف للتحويل من الصيغة الأسية إلى الصيغة اللوغاريتمية وحساب قيم المقادير اللوغاريتمية.

مثال (١)

جد قيمة كل مما يأتي:

١) لـــو ٨١ ٢) لـــو ١٢٥ ٣) لـــو ٠,٥ ٤) لـــو ١

الحل

١) لـــو ٨١ = س

٣^س = ٨١ (التحويل إلى صيغة أسية)

٣^س = ٣^٤

س = ٤

٢) لـــو ١٢٥ = س

٥^س = ١٢٥ (التحويل إلى صيغة أسية)

٥^س = ٥^٣ (٥^٣ = ١٢٥)

س = ٣

٣) لـــو ٠,٥ = س

٢^س = ٠,٥ (التحويل إلى صيغة أسية)

٢^س = ٢^-١ (٢^-١ = $\frac{١}{٢}$ = ٠,٥)

س = -١

٤) لـــو ١ = صفر (لماذا؟)

تدريب (١)

جد قيمة كلٍّ مما يأتي:

١) $\text{لـــو}_{٣}\ ٧٢٩$ ٢) $\text{لـــو}_{٤}\ ٢٥٦$ ٣) $\text{لـــو}_{٥}\ ٦٢٥$

٤) $\text{لـــو}_{٢}\ ٤$ ٥) $\text{لـــو}_{٧}\ ٧$ ٦) $\text{لـــو}_{\frac{١}{٧}}\ ٤$

مثال (٢)

اكتب الصيغ اللوغاريتمية المقابلة للصيغ الأسية الآتية:

١) $(٧)^{٣} = ٣٤٣$ ٢) $(٣)^{-٥} = \frac{١}{٢٤٣}$ ٣) $ب^{و} = ع$

الحل

١) $\text{لـــو}_{٧}\ ٣٤٣ = ٣$ (تعريف اللوغاريتم)

٢) $\text{لـــو}_{٣}\ \frac{١}{٢٤٣} = -٥$ (تعريف اللوغاريتم)

٣) $\text{لـــو}_{ب}\ ع = و$ (تعريف اللوغاريتم)

تدريب (٢)

اكتب الصيغ اللوغاريتمية المقابلة للصيغ الأسية الآتية:

١) $(٣)^{٤} = ٨١$

٢) $(٢)^{-٤} = \frac{١}{١٦}$

٣) $(\frac{٣}{٤})^{٣} = \frac{٢٧}{٦٤}$

٤) $(\frac{٤}{٥})^{٤} = \frac{٢٥٦}{٦٢٥}$

٥) $أ^{ص} = س^{٢}$

مثال (٣)

اكتب الصيغ الأسية المقابلة للصيغ اللوغاريتمية الآتية:

١) $\text{لـــو}_{٣}\ ٢٧ = ٣$

٢) $\text{لـــو}_{٢}\ ٠,٢٥ = -٢$

٣) $\text{لـــو}_{٣}\ \frac{١}{٨١} = -٤$

٤) $\text{لـــو}_{ع}\ س = ص.$

الحل

١) $٣^{٣} = ٢٧$ (تعريف اللُّوغاريتم)

٢) $٢^{-٢} = ٠,٢٥$

٣) $٣^{(-٤)} = \frac{١}{٨١}$

٤) $ع^{ص} = س$

تدريب (٣)

اكتب الصيغ الأسية المقابلة للصيغ اللوغاريتمية الآتية:

١) $\text{لـــو}_{٥}\ ١٢٥ = ٣$ ٢) $\text{لـــو}_{٩}\ ٣ = \frac{١}{٢}$ ٣) $\text{لـــو}_{١١}\ ١٢١ = ٢$

تعريف

يسمى الاقتران ق(س) = $\text{لـــو}_{أ}$ ل(س) اقتراناً لوغاريتمًّا إذا وفقط إذا كان

ل(س) = (أ)$^{ق(س)}$ ، حيث أ > ٠ أ ≠ ١، ل(س) > صفر.

لاحظ أن: ل(س) > صفر. لماذا؟

تعلَّم

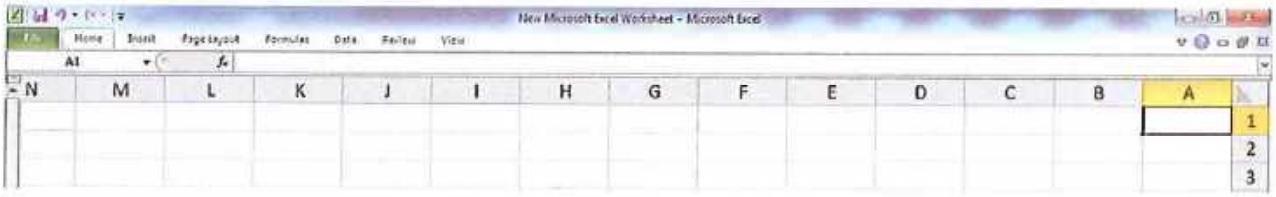
مجال ق(س) = $\text{لـــو}_{أ}$ ل(س) هو مجموعة حل المتباينة ل(س)> ٠

مثال (٤)

ارسم منحنى الاقتران ق: ق(س)= $\frac{1}{3}$ لـــوس، س ∈ [١، ٩] باستخدام برمجية إكسل.

الحل

١) شغل برمجية إكسل(Excel)، فتظهر لك نافذة إكسل كما في الشكل (٥-١٢).



الشكل (٥-١٢).

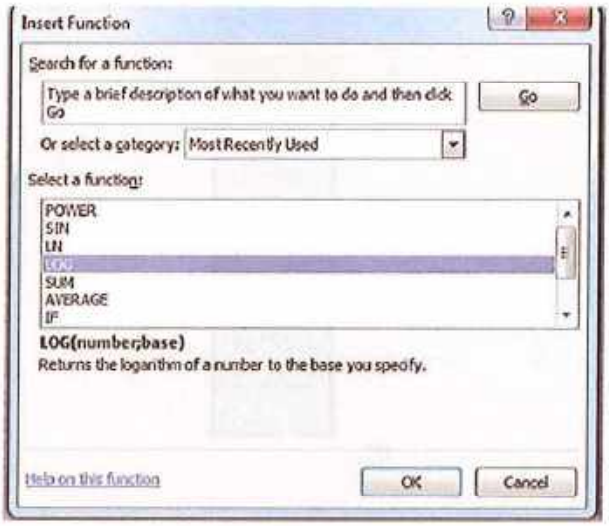
٢) اختر عمودًا وليكن A، وضع المؤشر في الخلية A1 اكتب القيمة الأولى للمتغير س وهي (١)، ثم نضع المؤشر في الخلية A2 واكتب القيمة الثانية للمتغير س وهي (٢).

٣) ظلل الخليتين ثم اسحب المؤشر للأسفل حتى تظهر آخر قيمة للمتغير كما في الشكل (٥-١٢).

الشكل (٥-١٣).

٤) ضع المؤشر في الخلية (B1).

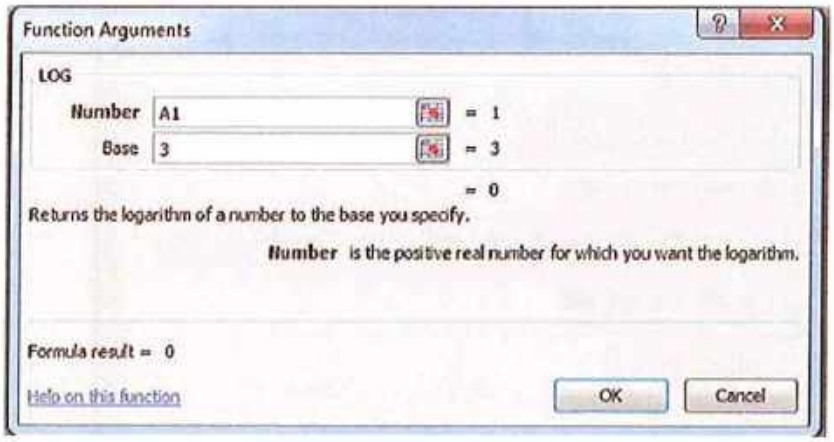
٥) من تبويبة الصيغ (Formulas)، اختر أداة إدراج دالة فيظهر لك صندوق حوار إدراج، كما في الشكل (٥-١٤)، واختر الدالة (LOG) .



الشكل (٥-١٤).

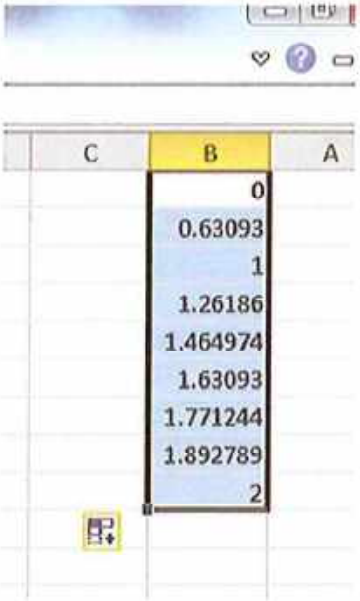
انقر على موافق، يظهر لك صندوق حوار الدالة كما في الشكل (٥- ١٥).

٦) ثم اكتب أساس الاقتران ق في مستطيل (Base) واكتب A1 في مستطيل (Number) فيظهر لك صورة القيمة في A1 في الخلية B1.



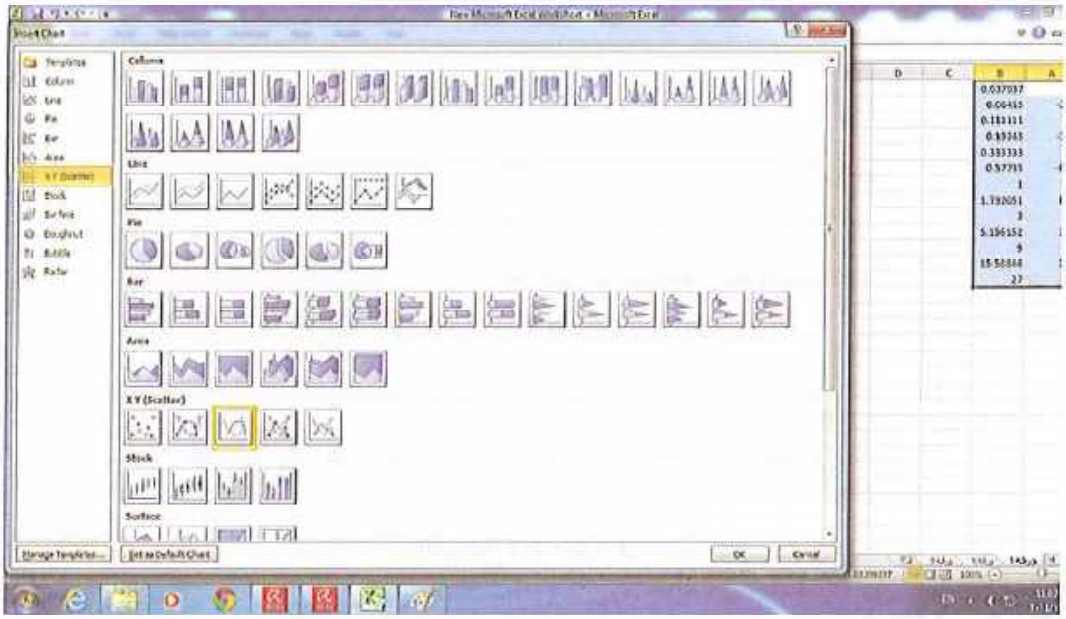
الشكل (٥-١٥).

٧) اسحب المؤشر على جميع الخلايا التي كتبتها ليظهر لك مجموعة صور قيم المتغير س كما في العمود B. كما في الشكل (٥– ١٦).



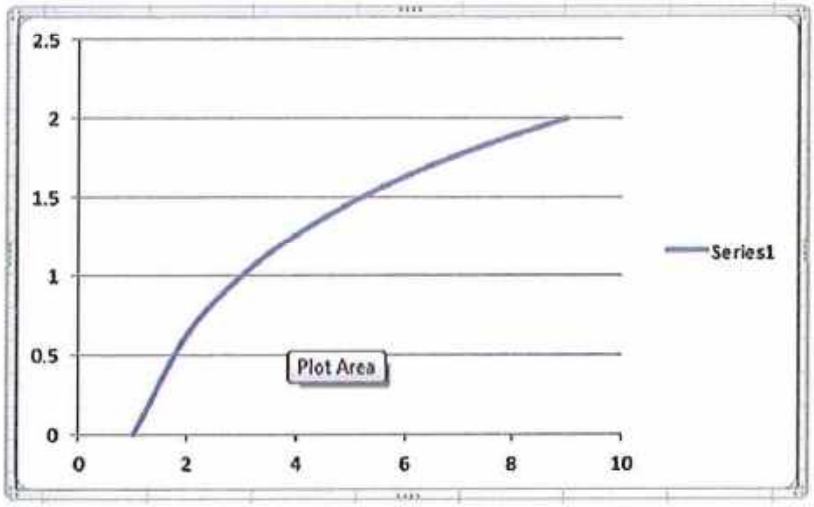
الشكل (٥–١٦).

٨) ظلل العمودين A،B ثم اختر من تبوبية إدراج مجموعة "مخططات" نوع المخطط (Line) ثم اختر من الأشكال الشكل س، ص مبعثر (XY–Scatter) ثم اختر نوع المنحنى كما في الشكل (٥– ١٧).



الشكل (٥–١٧).

٩) اختر (موافق) ليظهر لك رسم الاقتران ق(س) = لـــو س كما في الشكل(٥–١٨).



الشكل (٥–١٨).

ويمكن رسم الاقتران يدويًا، من خلال تكوين الجدول الآتي:

س	٩	٣	١	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٩}$
ق(س)	٢	١	٠	١–	٢–

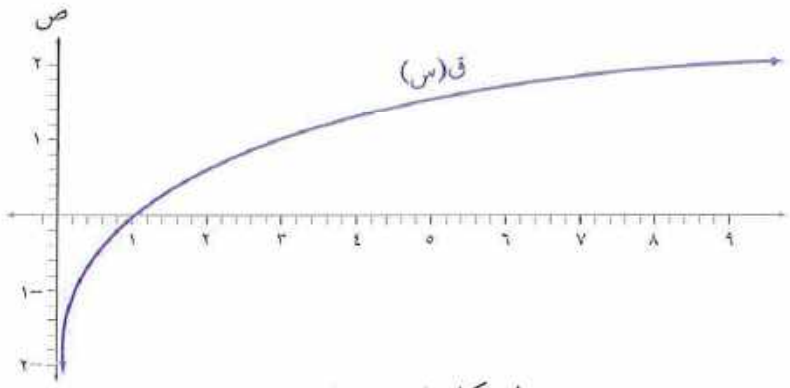
ق(٩) = لـــو ٩ = ٢

ق(٣) = لـــو ٣ = ١

ق(١) = لـــو ١ = ٠

ق($\frac{١}{٣}$) = لـــو ($\frac{١}{٣}$) = –١،

ق($\frac{١}{٩}$) = لـــو ($\frac{١}{٩}$) = –٢



الشكل (٥–١٩).

نعين مجموعة النقط (س، ص) من الجدول في المستوى الديكارتي، ونصل بين النقاط بخطٍّ منحنٍ أملس لينتج الشكل (٥– ١٩).

مثال (٥)

إذا كان ق(س) = لـــو$_{٢}$ س، ارسم منحنى الاقتران ق، وقارنه مع منحنى الاقتران ل (س) = ٢^{س}

الحل

نكوّن جدولًا كما يأتي:

س	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤
لـو$_{٢}$ س	٢−	١−	٠	١	٢

ق($\frac{١}{٤}$) = لـــو$_{٢}$ ($\frac{١}{٤}$) = ٢−

ق($\frac{١}{٢}$) = لـــو$_{٢}$ ($\frac{١}{٢}$) = ١−

ق(١) = لـــو$_{٢}$ (١) = ٠

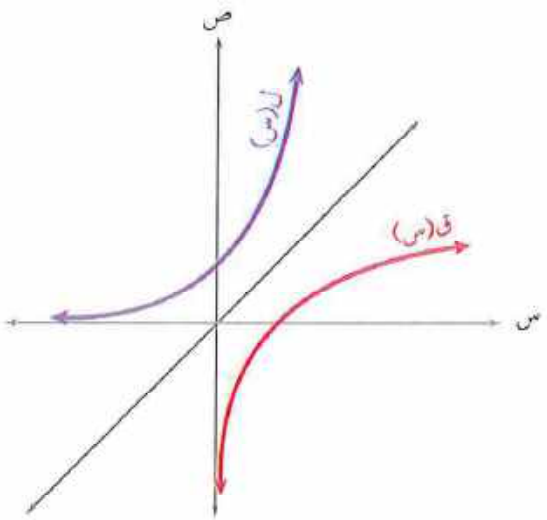
ق(٢) = لـــو$_{٢}$ (٢) = ١

ق(٤) = لـــو$_{٢}$ (٤) = ٢

بطريقة مماثلة يمكن الحصول على مجموعة نقاط تقع على منحنى ل، كما يتضح في الجدول الآتي:

س	٢−	١−	٠	١	٢
٢^{س}	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤

ونقوم بتمثيل الاقترانيْنِ على مستوى بياني واحد كما هو موضح في الشكل (٥−٢٠).



الشكل (٥−٢٠).

يبين الشكل (٥-٢٠) منحنى كلٍّ من ق(س) = لـــو(س)، ل(س) = ٢^س، نلاحظ أن المنحنيين انعكاس لبعضهما حول المستقيم ص = س، وهذا يشير إلى أن الاقتران اللوغاريتمي هو اقتران عكسي للاقتران الأسي.

تعلّم

١) الاقتران العكسي للاقتران ق(س) = أ^س هو الاقتران ق^-١(س) = لـــو س.

٢) الاقتران العكسي للاقتران ل(س) = لـــو س هو الاقتران ل^-١(س) = أ^س

بالاعتماد على منحنى ق(س) = لـــو س ، أجب عن الأسئلة الآتية

مع التبرير:

١) ما مجال الاقتران ق؟

٢) ما مدى الاقتران ق؟

٣) ما المقطع السيني للاقتران ق؟

٤) ما المقطع الصادي للاقتران ق؟

٥) هل الاقتران ق متزايد أم متناقص؟

٦) هل الاقتران ق واحد لواحد؟

تدريب (٤)

إذا كان ق(س) = لـــو س، فارسم منحنى الاقتران ق.

مثال (٦)

إذا كان ق(س) = لـــو س ، فارسم منحنى الاقتران ق.

الحل

ق(١/٩) = لـــو (١/٩) = ٢

ق(١/٣) = لـــو (١/٣) = ١

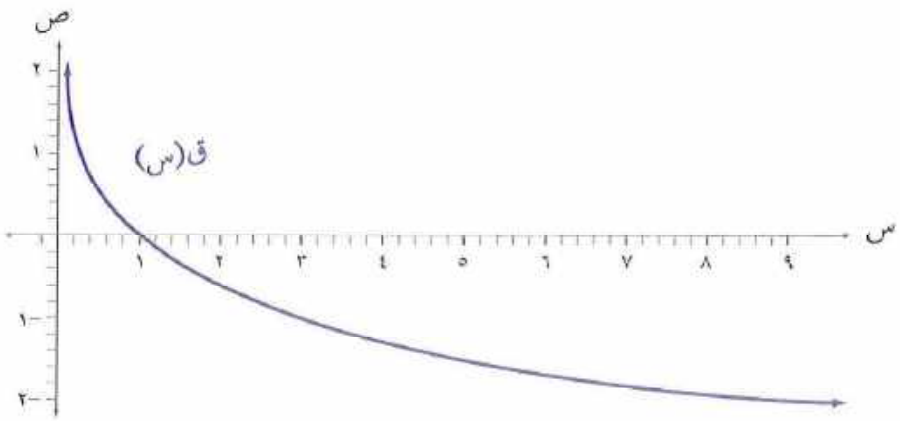
ق(١) = لـو (١) = ٠
$\frac{١}{٣}$

ق(٣) = لـو (٣) = −١
$\frac{١}{٣}$

ق(٩) = لـو ٩ = −٢
$\frac{١}{٣}$

س	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩
لـو س $\frac{١}{٣}$	٢	١	٠	−١	−٢

نعين النقاط على المستوى الديكارتي ثم نصل بينها بخطٍّ منحنٍ أملس فيظهر الشكل (٥−٢١).



الشكل (٥−٢١).

اعتمادًا على منحنى الاقتران ق(س) = لـو س
$\frac{١}{٣}$

١) جد مجال الاقتران ق.

٢) جد مدى الاقتران ق.

٣) هل الاقتران ق متزايد أم متناقص؟ لماذا؟

٤) هل الاقتران ق واحد لواحد؟

لاحظ أنه اذا كان ق(س) = لـــو (س) فان:

١) مجال ق: ح+

٢) مدى ق: ح

٣) يقطع ق محور السينات عند النقطة (١، ٠).

٤) لا يقطع ق محور الصادات.

٥) يكون متزايدًا عندما أ > ١ ، ويكون متناقصًا عندما ٠ < أ < ١

٦) الاقتران ق واحد لواحد.

تدريب (٥)

إذاكان ق(س) = لـــو$_{٣}$ (س−٢)، جد مجال ق ثم ارسم منحناه.

مثال (٧)

جد المجال والمدى لكلٍّ من الاقترانات الآتية:

١) ق(س) = لـــو(س^{٢}+١)　　٢) ل(س) = لـــو$_{٧}$(س^{٢}− س−١٢)

٣) ك(س) = لـــو$_{٥}$(س^{٢}−١٦)　　٤) م(س) = لـــو$_{٤}$(٦+س−س^{٢})

الحل

١) مجال الاقتران ق هو مجموعة حل المتباينة س^{٢}+١ > ٠ وهي مجموعة الأعداد الحقيقية　　(ناقش ذلك مع معلمك)

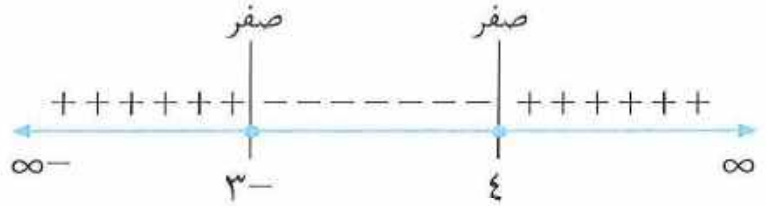
المدى= ح

٢) مجال الاقتران ل هو مجموعة حل المتباينة س^{٢}− س−١٢ > ٠

(س−٤)(س+٣) > ٠　　(تحليل العبارة التربيعية الى العوامل)

−٣ ، ٤ هي جذور المعادلة التربيعية: س^{٢}−س−١٢=٠

نحدِّد الجذور على خط الأعداد، ونبحث الإشارة لتحديد فترات المجال كما يأتي:



∴ مجال الاقتران ل هو: (−∞، −٣) ∪ (٤، ∞)

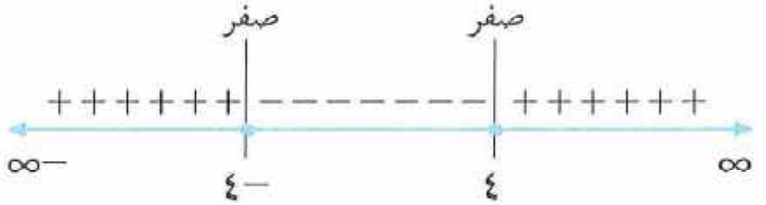
المدى هو: ح

٣) مجال الاقتران ك(س) = لـــو٥ (س٢ − ١٦) هو مجموعة حل المتباينة:

س٢ − ١٦ > ٠

(س − ٤) (س + ٤) > ٠ (تحليل العبارة التربيعية الى العوامل)

−٤ ، ٤ هي جذور المعادلة التربيعية س٢ − ١٦ = ٠



∴ مجموعة حل المتباينة س٢ − ١٦ > ٠ هي:

(−∞، −٤) ∪ (٤، ∞)

∴ مجال الاقتران ك(س) هو: (−∞، −٤) ∪ (٤، ∞)

المدى هو: ح

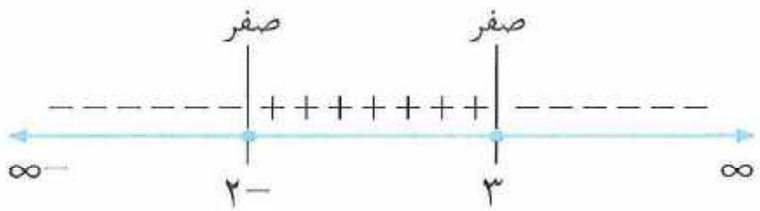
٤) مجال الاقتران م(س) = لـــو٤ (٦ + س − س٢) هو مجموعة حل المتباينة:

٦ + س − س٢ > ٠

س٢ − س − ٦ < ٠ (بضرب طرفي المتباينة بالعدد −١)

(س − ٣) (س + ٢) < ٠ (تحليل العبارة التربيعية إلى العوامل)

−٢ ، ٣ هي جذور المعادلة التربيعية س٢ − س − ٦ = ٠



مجموعة حل المتباينة $س^{٢} - س - ٦ < ٠$ هي الفترة: $(-٢ ، ٣)$

∴ مجال الاقتران م هو: $(-٢، ٣)$

المدى هو: ح

تدريب (٦)

جد مجال ومدى كل من الاقترانات الآتية:

١) $ق(س) = لـــو_{٤}(س^{٢} + ١١)$ ٢) $ل(س) = لـــو_{٧}(س^{٢} + س - ١٢)$

٣) $ك(س) = لـــو_{٥}(٩ - س^{٢})$ ٤) $م(س) = ١ + لـــو_{٤}(٢ - س)$

الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

هنالك اقترانات لوغاريتمية يكثر استخدامها مثل اقتران اللوغاريتم الطبيعي الذي يرمز له بالرمز $ق(س) = لـــو_{هـ} س$، حيث هـ (العدد النايبيري) ويرمز لاقتران اللوغاريتم الطبيعي في الآلة الحاسبة بالرمز (Ln) .

مثال (٨)

باستخدام الآلة الحاسبة احسب قيمة كلٍّ مما يأتي:

١) $لـــو_{هـ} ٥$ ٢) $لـــو_{هـ} ٠,٧$ ٣) $لـــو_{هـ} ٠,٠٠٠١$

الحل

١) باستخدام الآلة الحاسبة $لـــو_{هـ} ٥ = ١,٦٠٩٤٣$

الجدول الآتي يمثل حل الفرعين (٢)، (٣) باستخدام الآلة الحاسبة

العدد	الإجراءات	النتيجة
$لـــو ٠,٧$	Ln 0.7	− 0.356674
$لـــو ٠,٠٠٠١$	Ln 0.0001	− 9.210340

تدريب (٧)

باستخدام الآلة الحاسبة احسب قيمة كلٍّ مما يأتي :

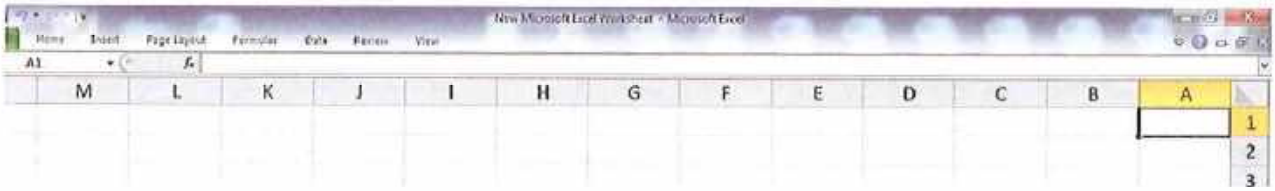
١) لـــو$_{هـ}$ $\frac{٢}{٣}$ ٢) لـــو$_{هـ}$ ٨ ٣) لـــو$_{هـ}$ ٠,٠٠٤

مثال (٩)

ارسم منحنى الاقتران ق(س) = لـــو$_{هـ}$ س بالفترة [١، ٩] باستخدام برمجية إكسل.

الحل

١) شغل برمجية إكسل (Excel)، تظهر لك نافذة اكسل كما في الشكل (٥-٢٢):

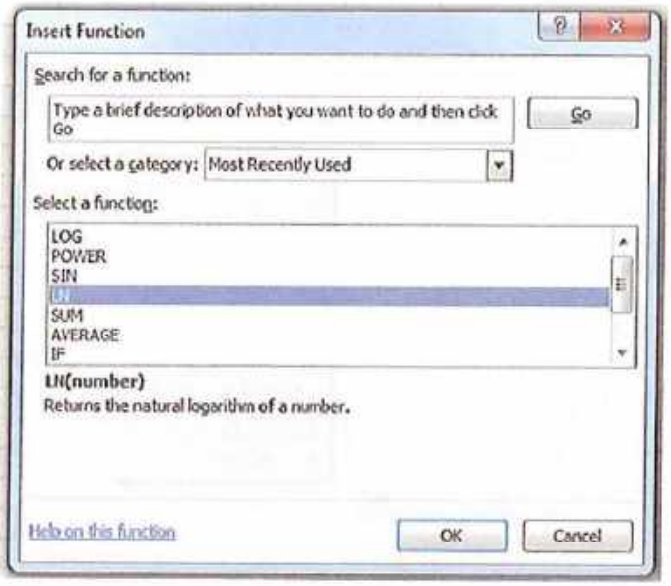


الشكل (٥-٢٢).

٢) اختر عمودًا وليكن A، وضع المؤشر في الخلية A1 اكتب القيمة الأولى للمتغير س وهي (١)، ثم نضع المؤشر في الخلية A2 واكتب القيمة الثانية وهي للمتغير س وهي (٢). ثم ظلل الخليتين ثم اسحب المؤشر للأسفل حتى تظهر آخر قيمة للمتغير كما في الشكل (٥-٢٣).

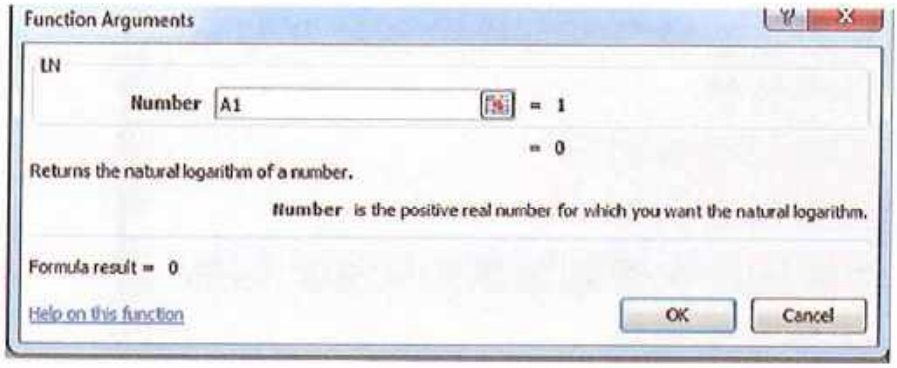
الشكل (٥-٢٣).

٣) ضع المؤشر في الخلية (B1). ومن تبويبة الصيغ (Formulas)، اختر أداة إدراج دالة فيظهر لك حوار إدراج كما في الشكل (٥-٢٤).



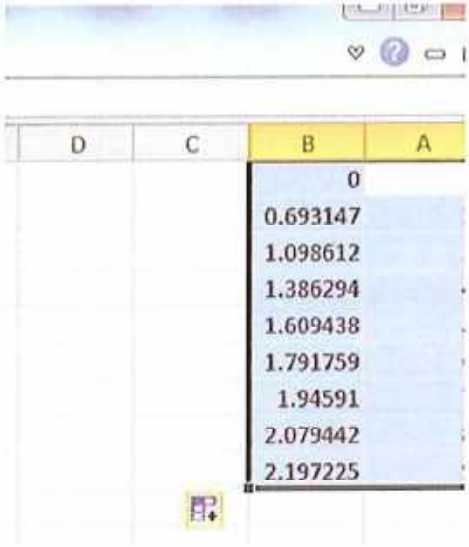
الشكل (٥-٢٤).

٤) اختر الدالة (LN) وانقر على موافق، يظهر لك صندوق حوار الدالة، ثم اكتب أساس الاقتران ق في مستطيل (Base) واكتب A1 كما في الشكل (٥- ٢٥).



الشكل (٥-٢٥).

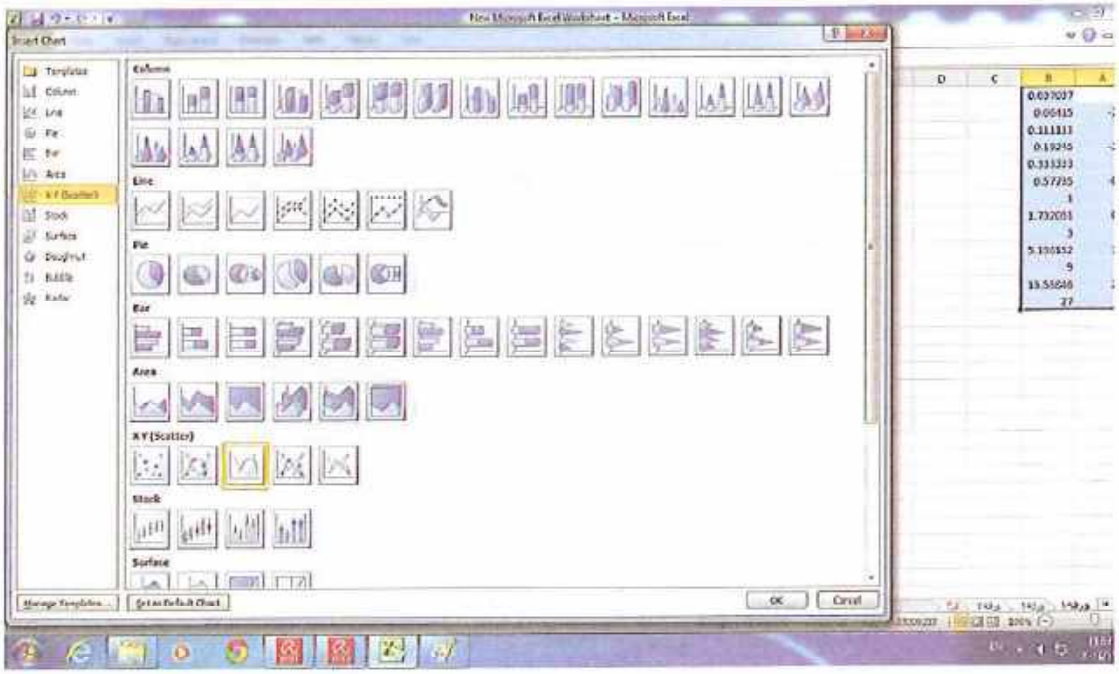
٥) اسحب المؤشر على جميع الخلايا التي كتبتها ليظهر لك مجموعة صور قيم المتغير س كما في العمود B. كما في الشكل (٥-٢٦).



D	C	B	A
		0	
		0.693147	
		1.098612	
		1.386294	
		1.609438	
		1.791759	
		1.94591	
		2.079442	
		2.197225	

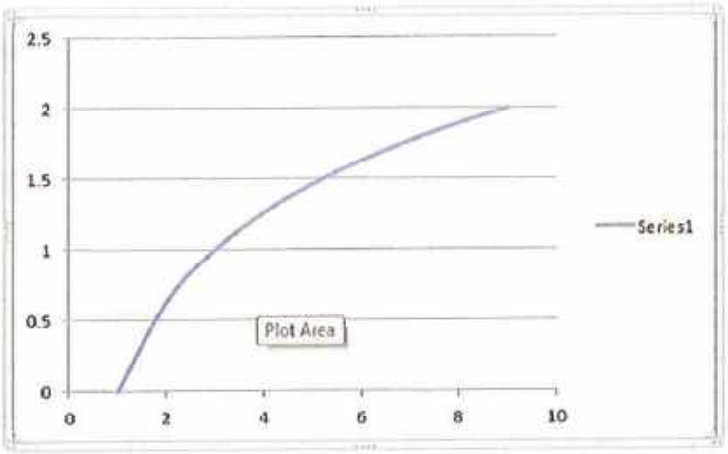
الشكل (٥-٢٦).

٦) ظلل العمودين A،B ثم اختر من تبويبة إدراج مجموعة مخططات نوع المخطط (Line) ثم اختر من الأشكال الشكل س، ص مبعثر (XY-Scatter) ثم اختر نوع المنحنى كما في الشكل (٥-٢٧).



الشكل (٥-٢٧).

٧) اختر (موافق) ليظهر لك رسم منحنى الاقتران ق(س)= لـــو٣ س كما في الشكل (٢- ٢٨).



الشكل (٢-٢٨).

تدريب (٨)

استخدم برمجية إكسل في رسم منحنى كل من الاقترانين: ق(س) = لـــو٣ س
ل(س)= هـ^س ، وذلك على مستوى ديكارتي واحد.

ومن اللوغاريتمات المستخدمة اللوغاريتمات ذات الأساس ١٠ ، وتسمى **اللوغاريتمات العادية**، وتكتب اختصاراً دون أساس مثل لـــو٨ وتعني لوغاريتم العدد ٨ للأساس ١٠، ويرمز لها في الآلة الحاسبة بالرمز: log

مثال (١٠)

مستخدمًا الآلة الحاسبة، جد قيمة كلٍّ مما يأتي:

١) لـــو١٢ ٢) لـــو٣,٦ ٣) لـــو٠,٧

الحل

باستخدام الآلة الحاسبة نجد أنّ:

١) لـــو١٢ = ١,٠٧

٢) لـــو٣,٦ = ٠,٥٥

٣) لـــو٠,٧ = -٠,١٥

تمارين و مسائل

١) اكتب كل من الصيغ الأسية الآتية بصورة لوغاريتمية:

أ) $٣^{٢}=٩$ ب) $(\frac{١}{٢})^{-٤}=١٦$

جـ) $س^{-٢}=ص$ د) $أ^{هـ+١}=جـ$

٢) اكتب كل من الصيغ اللوغاريتمية الآتية بصورة أسية:

أ) $لـــو_{٢} س = ٣$ ب) $لـــو_{٣} ٢٤٣ = ٥$.

جـ) $لـــو_{\frac{٢}{٥}} (\frac{١٦}{٦٢٥}) = ٤$ د) $لـــو_{ب} ٢ = ص$.

٣) جد مجال الاقتران ق(س) = $لـــو_{٢}$(س+١) ثم ارسم منحناه.

٤) إذا كان هـ (س)= ٢+ $لـــو_{٥}$(س)، ارسم منحنى الاقتران هـ باستخدام برمجية إكسل.

٥) أثبت أنّ $لـــو_{أ}$($لـــو_{أ}$أ) = ٠

٦) إذا كان ق(س) = $لـــو_{٣}$ (س- ١) فجد ما يأتي:

أ) مجال الاقتران ق.

ب) مدى الاقتران ق.

جـ) هل يُعدُّ الاقتران ق متزايدًا أم متناقصًا؟

د) حدد نقطة تقاطع الاقتران ق مع محور السينات.

٧) استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد القيم الآتية:

أ) $لـــو_{هـ} ٢٤$ ب) $لـــو_{هـ}$(٠,٠٠٢٢) جـ) $لـــو_{هـ}(\frac{٣}{٧})$

٨) إذا كان ق ={ (١ ، ٠) ، (١٠ ، ١) ، (١٠٠ ، ٢) ، (١٠٠٠ ، ٣) }،

فجد قاعدة الاقتران ق.

٩) إذا كان ق(س) = $لـــو_{١٠}$(٣س + ٣) ، فما مجال الاقتران ق؟

١٠) جد قيمة كلٍّ مما يأتي:

أ) لـــو$_{٣}$ (٢٤٣)^{٤}

ب) لـــو$_{٥}$ (١٢٥)

جـ) لـــو$_{١١}$ (١٢١)

د) لـــو$_{٢}$ (لـــو$_{٢}$ (لـــو$_{٢}$ (١٦)))

١١) كرة حجمها ٨,٦٠١ دسم^{٣} ، احسب مساحة سطح الكرة مستخدما اللوغاريتمات.

١٢) ارسم منحنى الاقتران ق(س) = لـــو$_{هـ}$ (س + ١) مستخدمًا برمجية إكسل.

١٣) إذا كان ق(س) = لـــو$_{٢}$ س ، فجد قاعدة ق$^{-١}$ ثم أثبت أنّ:

أ) (ق o ق$^{-١}$) (س) = س

ب) (ق$^{-١}$ o ق) (س) = س

١٤) إذا كان ق(س) = ٣(٢)$^{س-١}$ ، جد ق$^{-١}$(س)

١٥) إذا كان ق(س) = ٣(٢)$^{س+١}$، جد ق$^{-١}$(−٥)

من خلال دراستك السابقة للاقتران ق(س) = لـــو س حيث أ ≠ ١ ، أ > ٠ أجب عن الآتي:

١) ما قيمة لـــو أ ؟

٢) ما قيمة لـــو ١ ؟

تعلمت سابقًا أن ق(س) = لـــو س هو اقتران واحد لواحد وهذا يعني أنّ:

لـــو س = لـــو ص إذا وفقط إذا كان س = ص.

وبما أنّ أ^{١} = أ فإنّ لـــو أ = ١ ، وأيضًا بما أنّ أ^{٠} = ١ فإنّ لـــو ١ = ٠

هل هناك قوانين أخرى للوغاريتمات؟

جد قيمة المقادير العددية الآتية:

١) لـــو$_{٢}$ ٨ + لـــو$_{٢}$ ٤ ٢) لـــو$_{٢}$ ٣٢

٣) لـــو$_{٣}$ ٣ + لـــو$_{٣}$ ٩ ٤) لـــو$_{٣}$ ٢٧

ماذا تلاحظ؟

قانون(١)

إذا كانت أ ، ب ، جـ أعدادًا حقيقية موجبة وكانت أ ≠ ١ فإنّ:

لـــو س ص = لـــو س + لـــو ص

البرهان

افرض أنّ لـــو س = ن

س = أ^{ن} (التحويل إلى الصورة الأسية)

لـــو ص = ل

ص = أ^{ل} (التحويل إلى الصورة الأسية)

ومنه: س ص = أ^{ن} × أ^{ل} = أ$^{ن+ل}$ (قوانين الأسس)

بالتحويل إلى الصورة اللوغاريتمية :

$لـــو_{أ} س ص = ن + ل$

لكن $ن = لـــو_{أ} س$

$ل = لـــو_{أ} ص$

ومنه : $لـــو_{أ} س ص = لـــو_{أ} س + لـــو_{أ} ص$

جد قيمة كل من المقادير العددية الآتية :

١) $لـــو_{٢} ١٦ - لـــو_{٢} ٨$ ٢) $لـــو_{٢} ٢$

٣) $لـــو_{٣} ٨١ - لـــو_{٣} ٩$ ٤) $لـــو_{٣} ٩$

ماذا تلاحظ؟

قانون(٢)

إذا كانت أ ، ب ، جـ أعدادًا حقيقية موجبة وكانت أ ≠ ١ فإنّ:

$لـــو_{أ} \frac{س}{ص} = لـــو_{أ} س - لـــو_{أ} ص$

البرهان

افرض أنّ $س = أ^{م}$

$م = لـــو_{أ} س$ (بالتحويل إلى الصورة اللوغاريتمية)

$ص = أ^{ل}$

$ل = لـــو_{أ} ص$ (بالتحويل إلى الصورة اللوغاريتمية)

وبما أنّ: $\frac{س}{ص} = \frac{أ^{م}}{أ^{ل}} = أ^{م-ل}$ (قوانين الأسس)

$لـــو_{أ} \frac{س}{ص} = م - ل$ (تعريف اللوغاريتم)

ومنها $لـــو_{أ} \frac{س}{ص} = لـــو_{أ} س - لـــو_{أ} ص.$

جد قيمة كل من المقادير العددية الآتية:

١) $٣ \times لـو_{٢} ٤$ ٢) $لـو_{٢} ٤^{٣}$

٣) $لـو_{٣} ٩^{٢}$ ٤) $٢ \times لـو_{٣} ٩$

ماذا تلاحظ؟

قانون(٣)

إذا كانت أ ، س عددين حقيقيّين موجبين فإن:

$لـو_{م} س^{ن} = ن \times لـو_{م} س$

البرهان

افرض أنّ $لـو_{م} س = م$ ، ومنه : $أ^{م} = س$

ومنه : $س^{ن} = (أ^{م})^{ن}$ (رفع الطرفين للأس ن)

$س^{ن} = أ^{ن \times م}$ (حسب قوانين الأسس)

وبالتحويل إلى الصورة اللوغاريتمية ينتج أنّ :

$لـو_{م} س^{ن} = ن م$

ينتج أنّ : $لـو_{م} س^{ن} = ن لـو_{م} س$ (التعويض عن م)

مثال (١)

إذا كان $لـو_{٣} ٥ = ١,٤٦٥$، $لـو_{٣} ٢ = ٠,٦٣١$ فجد قيمة كلٍّ مما يأتي :

١) $لـو_{٣} ١٠$ ٢) $لـو_{٣} ٠,٤$

الحل

١) $لـو_{٣} ١٠ = لـو_{٣} (٢ \times ٥)$

$= لـو_{٣} ٥ + لـو_{٣} ٢$ (قوانين اللوغاريتمات)

$= ١,٤٦٥ + ٠,٦٣١$

$= ٢,٠٩٦$

٢) $لـو_{٣} ٠,٤ = لو_{٣} \frac{٤}{١٠} = لـو_{٣} \frac{٢}{٥}$ (تبسيط)

$= لـو_{٣} ٢ - لـو_{٣} ٥$ (قوانين اللوغاريتمات)

$= ٠,٦٣١ - ١,٤٦٥$

$= - ٠,٨٣٤$

تدريب (١)

إذا كان $لـو_{١٠} ٥ = ٠,٦٩٩$ ، $لـو_{١٠} ٣ = ٠,٤٧٧$ فجد قيمة كُلٍّ ممَّا يأتي :

١) $لـو_{١٠} ٩٠$ ٢) $لـو_{١٠} ٠,٦$ ٣) $لـو_{١٠} ٤٥$

مثال (٢)

إذا كان $لـو_{٣} ٢ = ٠,٦٣٠٩$ فجد قيمة كل مما يأتي :

١) $لـو_{٣} ٨$ ٢) $لـو_{٣} ٩$ ٣) $لـو_{٣} ١٠ - لـو_{٣} ٥$

الحل

١) $لـو_{٣} ٨ = لـو_{٣} ٢^{٣} = ٣ لـو_{٣} ٢$ (حسب القانون ٣)

$= ٣ \times ٠,٦٣٠٩ = ١,٨٩٢٧$

٢) $لـو_{٣} ٩ = لـو_{٣} ٣^{٢} = ٢ لـو_{٣} ٣$ (حسب القانون ٣)

$= ٢ \times ١ = ٢$

٣) $لـو_{٣} ١٠ - لـو_{٣} ٥ = لـو_{٣} \frac{١٠}{٥}$ (حسب قانون ٢)

$= لـو_{٣} ٢ = ٠,٦٣٠٩$ (يمكنك استخدام الآلة الحاسبة للتحقق)

تدريب (٢)

إذا كان لـــو٥ = ٠,٦٩٩ ، لـــو٦ = ٠,٧٧٨٢ ، فجد كلًا من:

١) لـــو٢٥ ٢) لـــو٧٥ - لـــو١٥ ٣) لـــو ٥٠

٤) لـــو $\sqrt{٣٠}$ ٥) لـــو ٩٠٠ ٦) لـــو١,٢ ٧) لـــو ٣٦

مثال (٣)

أثبت أنّ:

لـــو (جـ^{٢}+٧جـ+١٢) - لـــو(جـ+٣) - لـــو$\sqrt{\text{جـ}+٤}$ = $\frac{١}{٢}$ لـــو(جـ+٤)، حيث جـ > −٤

الحل

بما أن: لـــو(جـ^{٢} + ٧ جـ + ١٢)

= لـــو(جـ+٣) (جـ+٤) (بالتحليل الى العوامل)

= لـــو(جـ+٣) + لـــو(جـ+٤) (قوانين اللوغاريتمات)

إذن الطرف الأيمن = لـــو (جـ^{٢} + ٧ جـ + ١٢) - لـــو(جـ + ٣) - لـــو$\sqrt{\text{جـ}+٤}$

= ~~لـــو(جـ+٣)~~ + لـــو(جـ+٤) - ~~لـــو(جـ + ٣)~~ - لـــو$\sqrt{\text{جـ}+٤}$ (بالتعويض)

= لـــو(جـ+٤) - لـــو$\sqrt{\text{جـ}+٤}$

= لـــو$\sqrt{\text{جـ}+٤}$ = لـــو (جـ+٤)$^{(\frac{١}{٢})}$

= $\frac{١}{٢}$ لـــو (جـ+٤) (قوانين الأسس)

= الطرف الايسر

تدريب (٣)

أثبت أن:

$\frac{١}{٢}$ لـــو (جـ − ١) + لـــو$\sqrt{\text{جـ}^{٢}+\text{جـ}+١}$ = لـــو $\sqrt{\text{جـ}^{٣}-١}$ حيث جـ > ١

مثال (٤)

اكتب المقادير الآتية بأبسط صورة ممكنة:

١) $٢ \text{لو}_{٣} ٩ - \text{لو}_{٣} ٢٧ - ٤ \text{لو}_{٣} \sqrt[٤]{٨١}$

٢) $٣ \text{لو}_{٥} ٣ + \text{لو}_{٥} ٤ - \text{لو}_{٥} \sqrt{٢}$

٣) $\frac{١}{٣}(٢ \text{لو}_{٣} س - \text{لو}_{٣} س^{٢}) + \frac{١}{٢} \text{لو}_{٣} ٤$ حيث س > صفر.

الحل

١) $٢ \text{لو}_{٣} ٩ - \text{لو}_{٣} ٢٧ - ٤ \text{لو}_{٣} \sqrt[٤]{٨١}$

$= ٢ \text{لو}_{٣}(٣)^{٢} - \text{لو}_{٣} ٣^{٣} - ٤ \text{لو}_{٣}(٨١)^{\frac{١}{٤}}$

$= ٤ \text{لو}_{٣} ٣ - ٣ \text{لو}_{٣} ٣ - ٤ \times \frac{١}{٤} \text{لو}_{٣} ٣^{٤}$

$= ٤ - ٣ - ٤$

$= ١ - ٤$

$= -٣$

٢) $٣ \text{لو}_{٥} ٣ + \text{لو}_{٥} ٤ - \text{لو}_{٥} \sqrt{٢}$

$= \text{لو}_{٥}(٣)^{٣} + \text{لو}_{٥} ٤ - \text{لو}_{٥} \sqrt{٢}$ (قوانين اللوغاريتمات)

$= \text{لو}_{٥} ٢٧ \times ٤ - \text{لو}_{٥} \sqrt{٢}$ $= \text{لو}_{٥} ١٠٨ - \text{لو}_{٥} \sqrt{٢}$

$= \text{لو}_{٥}(١٠٨ \div \sqrt{٢})$ (إنطاق مقام)

$= \text{لو}_{٥} ٥٤ \sqrt{٢}$ (قوانين اللوغاريتمات)

٣) $\frac{١}{٣}(٢ \text{لو}_{٣} س - \text{لو}_{٣} س^{٢}) + \frac{١}{٢} \text{لو}_{٣} ٤$

$= \frac{١}{٣}(\text{لو}_{٣} س^{٢} - \text{لو}_{٣} س^{٢}) + \text{لو}_{٣}(٤)^{\frac{١}{٢}}$

$= \text{لو}_{٣} ٢$ (قوانين اللوغاريتمات)

مثال (٥)

أثبت أنّ لـــو ١١ + لـــو ٣٠ − لـــو ٣٣ = ١

الحل

لـــو ١١ + لـــو ٣٠ − لـــو ٣٣ = (لـــو ١١ + لـــو ٣٠) − لـــو ٣٣

= لـــو (١١ × ٣٠) − لـــو ٣٣

= لـــو ٣٣٠ − لـــو ٣٣

$= \text{لـــو} \frac{٣٣٠}{٣٣}$

= لـــو ١٠

= ١

تدريب (٤)

بين أنّ لـــو$_{ب}$ (أ^{٤} − ٨١) − لـــو$_{ب}$ (أ + ٣) − لـــو$_{ب}$ (أ − ٣) = لـــو$_{ب}$ (أ^{٢} + ٩)، حيث أ > ٣

تعلم أن اللوغاريتمات الشائعة في الآلات الحاسبة هي العادية والطبيعية ، والقانون الآتي يساعدك على حساب اللوغاريتمات ذات الأساسات غير الشائعة.

جد قيمة كل من المقادير العددية الآتية:

١) لـــو$_{٢}$ ١٦ ٢) لـــو$_{٤}$ ١٦

٣) لـــو$_{٩}$ ٨١ × لـــو$_{٣}$ ٩ ٤) لـــو$_{٣}$ ٨١

ماذا تلاحظ؟

قانون (٤)

إذا كانت أ ، ب ، جـ أعداداً حقيقية موجبة ، وكان أ ≠ ١ ، ب ≠ ١ فإنّ:

لـــو$_{ب}$ جـ × لـــو$_{أ}$ ب = لـــو$_{أ}$ جـ

ملاحظة: يمكن كتابة القانون السابق على الشكل:

$$\text{لـــو}_{ب} جـ = \frac{\text{لـــو}_{ب} جـ}{\text{لـــو}_{ب} أ}$$

البرهان

افرض أنّ : $\text{لـــو}_{ب} أ = س$ ، $\text{لـــو}_{ب} جـ = ص$

بالتحويل إلى الصورة الأسية يكون:

$أ = ب^{س}$ ، $جـ = أ^{ص}$

وبتعويض قيمة أ في جـ ينتجُ أن:

$جـ = (ب^{س})^{ص} = ب^{س ص}$

وبالتحويل إلى الصورة اللوغاريتمية:

$$\text{لـــو}_{ب} جـ = س ص = \text{لـــو}_{ب} أ \times \text{لـــو}_{ب} جـ$$

فسر لماذا تم وضع شرط أ≠١ ، ب≠١ في القانون؟

مثال (٦)

احسب قيمة $\text{لـــو}_{٢} ٩ \times \text{لـــو}_{٣} ٢$

الحل

$\text{لـــو}_{٢} ٩ \times \text{لـــو}_{٣} ٢ = \text{لـــو}_{٣} ٩$ (حسب القانون ٤)

$= \text{لـــو}_{٣} ٣^{٢}$

$= ٢ \text{لـــو}_{٣} ٣$

$= ٢ \times ١ = ٢$ (حسب قانون ٢)

تدريب (٥)

احسب قيمة $\text{لـــو}_{٤} ٩ \times \text{لـــو}_{٣} ١٦$

مثال (٧)

احسب قيمة $\log_{٥} ١٤$

الحل

يمكنك أن تكتب $\log_{٥} ١٤ = \frac{\log ١٤}{\log ٥}$ (قانون ٤)

ومنه $\log_{٥} ١٤ = \frac{١,١٤}{٠,٦٩}$ (باستخدام الآلة الحاسبة)

$= \frac{٣٨}{٢٣} = ١,٦٥$

تدريب (٦)

جد قيمة $\log_{٢} ٩$ باستخدام الآلة الحاسبة

مثال (٨)

احسب قيمة كل مما يأتي:

١) $\log_{٤} ١٣$ ٢) $\log_{هـ} ٥$ ٣) $\log_{٢} هـ$

الحل

١) $\log_{٤} ١٣ = \frac{\log_{هـ} ١٣}{\log_{هـ} ٤}$

$= \frac{٢,٥٦}{١,٣٩} = ١,٨٤$ (تقريبًا)

٢) $\log_{هـ} ٥ = \frac{\log_{هـ} ٥}{\log_{هـ} هـ}$

$= \frac{١,٦}{١} = ١,٦$ (تقريبًا)

٣) $\log_{٢} هـ = \frac{\log_{هـ} هـ}{\log_{هـ} ٢} = \frac{١}{٠,٦٩} = ١,٤٥$ (تقريبًا)

مثال (٩)

احسب قيمة كلٍّ مما يأتي:

١) لـــو ٧ ٢) لـــو$_{هـ}$ (٧,٤) ٣) لـــو$_{٩}$ (١,٤)

الحل

١) لـــو ٧ $= \frac{\text{لـــو}_{هـ}\ ٧}{\text{لـــو}_{هـ}\ ١٠}$ (قوانين اللوغاريتمات)

$= \frac{١,٩}{٢,٣} = ٠,٨٢$

٢) لـــو$_{هـ}$ ٧,٤

$= \text{لـــو}_{هـ}(\frac{٧٤}{١٠}) = \text{لـــو}_{هـ}(٧٤) - \text{لـــو}_{هـ}(١٠)$ (قوانين اللوغاريتمات)

$= ٣,٤ - ٣,٢ = ٠,٢$ (تقريبًا)

٣) لـــو$_{٩}$ ١,٤ $= \frac{\text{لـــو}_{هـ}\ ١,٤}{\text{لـــو}_{هـ}\ ٩}$

$= \frac{٠,٣٣}{٢,١}$ (باستعمال الآلة الحاسبة)

$= \frac{١١}{٧٠} = ٠,١٥$

تدريب (٧)

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد ما يأتي :

١) لـــو ٢ ٢) لـــو$_{٨}$ ٥ ٣) لـــو$_{\frac{١}{٢}}$ هـ

مثال (١٠)

اكتب العبارة اللوغاريتمية الآتية على شكل لوغاريتم واحد:

$\frac{١}{٢}$ لـو س − ٣ لـو(س + ١) ، حيث س > −١

الحل

$$\frac{١}{٢}\text{لـو س} - ٣\,\text{لـو}(س+١) = \text{لـو}\,س^{\frac{١}{٢}} - \text{لـو}(س+١)^{٣} = \text{لـو}\,\frac{(س)^{\frac{١}{٢}}}{(س+١)^{٣}}$$

تدريب (٨)

اكتب العبارة اللوغاريتمية الآتية على شكل لوغاريتم واحد:

$٢ \times \text{لـو}_{هـ}(س+٢) + \text{لـو}_{هـ}س - \text{لـو}_{هـ}س^{٢}$

تمارين و مسائل

١) عبر عن $لـو_{٧}$ ١٧٥ بدلالة $لـو_{٧}$ ٥

٢) عبر عن $لـو_{٣}$ ١٠٨ بدلالة $لـو_{٣}$ ٢

٣) اكتب ما يأتي بأبسط صورة ممكنة:

أ) $(٤لـو_{ب}٣ - لـو_{ب}٤) \div (٣لـو_{ب}٩ - لـو_{ب}٨)$ ، ب > ٠ ، ب ≠ ١

ب) $(لـو_{جـ}ب \times لـو_{م}جـ \div لـو_{م}ب^{٣}$ حيث أ، ب، جـ > ٠ ، أ، جـ ≠ ١

٤) إذا كان لـو ٥ = س ، لـو ٤ = ص ، جد قيمة لـو ٤٠٠ بدلالة س ، ص .

٥) أثبت أنّ: $لـو_{ب}أ = \frac{١}{لـو_{أ}ب}$ ، أ > ٠ ، ب > ٠ ، أ ≠ ١ ، ب ≠ ١

٦) جد قيمة كل مما يأتي :

أ) $لـو_{١٠}٥ \times لـو_{٦٢٥}١٠$

ب) $لـو_{٨}٤٩ \times لـو_{٧}٦٤$

جـ) $لـو_{٥}(لـو_{٦}(لـو_{٣}٧٢٩))$

د) $لو_{\frac{١}{٢}}(لـو_{٥}٦٢٥)$

هـ) $لـو_{م}(لـو_{م}أ)$

٧) أثبت أنّ: $لـو_{جـ}(أ \times ب \times جـ) = لـو_{جـ}أ + لـو_{جـ}ب + ١$ ، أ > ٠ ، ب > ٠ ، جـ > ٠ ، جـ ≠ ١

٨) أثبت أنّ: $لـو_{جـ}\frac{١}{ب} = -لـو_{جـ}ب$

٩) إذا كان لـو ٣ = ٠,٤٧٧ ، لـو ٧ = ٠,٨٤٥ ، فجد قيمة كلٍّ مما يأتي:

أ) لـو ١٤٧ ب) لـو ٦٣ جـ) لـو ٢١٠

١٠) أثبت أنّ : لـــو $(\frac{٧٢}{٣٤})$ + لـــو $(\frac{١٧٠}{٧})$ - لـــو $(\frac{١٨}{٣٥})$ = ٢

١١) إذا كان لـــو م = ١,٦٥٤٣ ، لـــو ب = ٣,٦٥٤٣ ، فجد قيمة أ بدلالة ب .

١٢) يتزايد حجم مادة ح بمعدل ٤٪ في الساعة وفق العلاقة الآتية:

ح = ح$_{.}$ $(١+ز)^{ن}$ ، حيث ح$_{.}$: الحجم الأصلي، ز: معدل الزيادة في الحجم ، ن: الزمن بالساعات، بعد كم ساعة يصبح حجم المادة أربعة أضعاف حجمها الأصلي.

في أحد مختبرات العلوم الحياتية، توصل باحث إلى أنّ عدد البكتيريا يتزايد وفق العلاقة $ع = ع_{١} \times (٢)^{ن}$، حيث (ن) عدد الساعات. فجد الزمن المتوقع ليصبح عدد البكتيريا (ع) ثلاثة أضعاف عددها الحالي ($ع_{١}$).

تعرفت سابقًا المعادلات الأسية وطريقة حلها، وستتعرف في هذا الدرس المعادلات اللوغاريتمية وطريقة حلّها أيضًا.

تعريف

تسمى كل معادلة تتضمن مقدارًا لوغاريتميًّا أو أكثر (معادلة لوغاريتمية).

فالمعادلات الآتية أمثلة على معادلات لوغاريتمية:

١) $لـو_{٢} (٢س + ٣) = ٣$ ٢) $لـو_{٣} (٢س+٣) - لـو_{٣} (س) = ٢$

٣) $لـو_{٥} س^{٣} \times لـو_{س} ٥ = ٢$

ولحلِّ المعادلة اللوغاريتمية نحول المعادلة من الصيغة اللوغاريتمية إلى الصيغة الأسية.

مثال (١)

حُلّ المعادلة اللوغاريتمية: $لـو_{٢} (٢س + ٣) = ٣$

$(٢س + ٣) = (٢)^{٣}$ (تعريف اللوغاريتم)

$٢س + ٣ = ٨$ (تبسيط)

$٢س = ٥$

$س = ٢,٥$

مجموعة الحل هي: $\{٢,٥\}$

مثال (٢)

حُلّ المعادلة: $لـــو_{٣}(٢ - س) - لـــو_{٣}(١ + س) = ٢$

الحل

$لـــو_{٣}(٢ - س) - لـــو_{٣}(١ + س) = ٢$

$لـــو_{٣}(\frac{٢-س}{١+س}) = ٢$ (قوانين اللـوغاريتمات)

$\frac{٢-س}{١+س} = (٣)^{٢} = ٩$ (تعريف اللـوغاريتم)

$٢ - س = ٩(س + ١)$

$٢ - س = ٩س + ٩$

$١٠ س = -٧$

$س = -٠,٧$

مثال (٣)

حُلّ المعادلة $لـــو_{٢} س + لـــو_{٢}(س+٢) = ٣$

الحل

بتطبيق قوانين اللـوغاريتمات نحصل على:

$لـــو_{٢}(س(س+٢)) = ٣$

ثم نحول الى الصيغة الأسية

$س(س+٢) = (٢)^{٣}$ (تعريف اللـوغاريتم)

$س^{٢} + ٢س = ٨$

$س^{٢} + ٢س - ٨ = ٠$

$(س+٤)(س - ٢) = ٠$

إما $س+٤ = ٠$ ومنها $س = -٤$

أو س− ٢ = ٠ ومنها س= ٢

مجموعة الحل هي: { −٤ ، ٢}

تحقق من صحة الحل.

تدريب (١)

حُلّ المعادلة الآتية: لـــو٥(٣− س) − لـــو٥(س+١) = ٢

مثال (٤)

يتكاثر نوع من الكائنات الدقيقة حسب العلاقة: ع = ع٠ (١+ ز)^{ن} ، حيث ز : نسبة الزيادة في الساعة الواحدة، ن : عدد الساعات، ع٠ = العدد الحالي، ع : العدد المتوقع بعد ن ساعة، إذا كانت نسبة الزيادة ٣٪، ما الوقت اللازم ليصل العدد الى ثلاثة أضعاف العدد الأصلي؟

الحل

ع = ع٠ (١+ ز)^{ن}

٣ع٠ = ع٠ (١+ ٠,٠٣)^{ن} (ع = ٣ع٠)

٣ = (١,٠٣)^{ن}

لـــو٣ = لـــو (١,٠٣)^{ن} (أخذ اللـوغاريتم للطرفين)

لـــو٣ = ن لـــو (١,٠٣) (تعريف اللـوغاريتم)

ن = (لـــو٣) ÷ (لـــو (١,٠٣)

= ٠,٤٧٧ ÷ ٠,٠١٣ = ٣٧ ساعة تقريبًا.

تدريب (٢)

حُلّ المسألة الـواردة في بداية الدرس.

وبعد أن تعرفت المعادلة اللـوغاريتمية وطريقة حلّها ستتعرف المتطابقة اللـوغاريتمية.

المتطابقة اللوغاريتمية: عبارة رياضية تتضمن مقدارًا لوغاريتميًا أو أكثر، وتكون صحيحة لجميع قيم المتغيّر فيها.

يمكن إثبات المتطابقة بإحدى الطرق الآتية:

١) نبدأ بالطرف الأيمن للوصول للطرف الأيسر.

٢) نبدأ بالطرف الأيسر للوصول للطرف الأيمن.

٣) تبسيط الطرفين معًا للوصول إلى المقدار نفسِه.

مثال (٥)

أثبت صحة المتطابقة الآتية:

$$\text{لـــو}_{\text{م}} \sqrt[\text{ن}]{\text{س}^{\text{د}}} = \frac{\text{د}}{\text{ن}} \text{لـــو}_{\text{م}} \text{س}$$

الحل

الطرف الأيمن $= \text{لـــو}_{\text{م}} \sqrt[\text{ن}]{\text{س}^{\text{د}}}$

$= \text{لـــو}_{\text{م}} \text{س}^{\frac{\text{د}}{\text{ن}}}$ (التحويل إلى الصيغة الأسية)

$= \frac{\text{د}}{\text{ن}} \text{لـــو}_{\text{م}} \text{س}$ (تعريف اللـوغاريتم)

= الطرف الأيسر

مثال (٦)

أثبت أن $\frac{\frac{١}{٢} \text{لـــو}_{\text{م}} \frac{\text{ب}^{٢}}{\text{جـ}^{٢}} - \text{لـــو}_{\text{م}} \text{ب}}{\text{لـــو}_{\text{م}} \text{جـ}} = -١$

الطرف الأيمن $= \frac{\frac{١}{٢} \text{لـــو}_{\text{م}} \frac{\text{ب}^{٢}}{\text{جـ}^{٢}} - \text{لـــو}_{\text{م}} \text{ب}}{\text{لـــو}_{\text{م}} \text{جـ}}$

$= \frac{\frac{١}{٢} \text{لـــو}_{\text{م}} \text{ب}^{٢} - \frac{١}{٢} \text{لـــو}_{\text{م}} \text{جـ}^{٢} - \text{لـــو}_{\text{م}} \text{ب}}{\text{لـــو}_{\text{م}} \text{جـ}}$

$$= \frac{\cancel{\text{لـوم ب}} - \text{لـوم جـ} - \cancel{\text{لـوم ب}}}{\text{لـوم جـ}}$$

$$= \frac{-\text{لـوم جـ}}{\text{لـوم جـ}} = -1$$

= الطرف الأيسر

مثال (٧)

أثبت أنّ:

لـوم ص^{٢} − ٢لـوم (س ص) + لـوم س^{٢} = صفرًا

الحل

الطرف الأيمن = لـوم ص^{٢} − ٢ لـوم (س ص) + لـوم س^{٢}

= ٢لـوم ص − ٢(لـوم س + لـوم ص) + ٢لـوم س

= $\cancel{\text{٢لـوم ص}}$ − $\cancel{\text{٢لـوم س}}$ − $\cancel{\text{٢لـوم ص}}$ + $\cancel{\text{٢لـوم س}}$

= صفرًا

= الطرف الأيسر

مثال (٨)

أثبت أنّ: $لـــو_{٢}\sqrt{س-ص} + لـــو_{٢}\sqrt{س+ص} = \frac{١}{٢} لـــو_{٢}(س^{٢} - ص^{٢})$ ،

الحل

الطرف الأيمن

$= لـــو_{٢}\sqrt{س-ص} + لـــو_{٢}\sqrt{س+ص}$

$= \frac{١}{٢} لـــو_{٢}(س - ص) + \frac{١}{٢} لـــو_{٢}(س + ص)$

$= \frac{١}{٢} لـــو_{٢}(س - ص)(س + ص)$

$= \frac{١}{٢} لـــو_{٢}(س^{٢} - ص^{٢})$

= الطرف الأيسر.

تدريب (٣)

أثبت صحة المتطابقة الآتية:

$لـــو_{٣}(س+١)(س-٢)^{٢} - لـــو_{٣}(س+١)^{٢}(س-٢) = لـــو_{٣} \frac{س-٢}{س+١}$ ، $س > ٢$

تمارين و مسائل

١) حُلّ كلًّا المعادلات الآتية:

أ) $\text{لـو}_{٢}\, س - \text{لـو}_{٢}\, (س - ١) = ٣$

ب) $\text{لـو}_{٣}\, س + \text{لـو}_{٣}\, (٦ - س) = ٢$

جـ) $\text{لـو}_{٥}\, (س + ١) - \text{لـو}_{٥}\, (س - ١) = ١$

د) $٢^{٢س - ٣} = ٧^{٣س + ٥}$

هـ) $٧^{-س - ١} = ٢٨$

٢) يتزايد عدد سكان مدينة بنسبة زيادة ٤٪ سنويًا وفقا لعلاقة النمو والاضمحلال، بينما كانت نسبة الوفيات ١٪ سنويًا، حدد الـوقت اللازم ليصبح عدد السكان مثلي العدد الحالي.

٣) حُلّ المعادلة الآتية: لـو ٣س + لـو (س - ٢) = ٠.

٤) تتناقص كتلة مادة مشعة مع مرور الزمن وفقًا للعلاقة:

$ك = ك_{١} \times ١٠^{-٠,٠٢٤ن}$، حيث $ك_{١}$: الكتلة الأصلية، ك: الكتلة بعد مرور ن ساعة.

جـد الزمن الذي تكون عنده الكتلة مساوية نصف الكتلة الأصلية.

٥) ترتبط قوة زلزال (ق) على مقياس ريختر بالطاقة الناشئة (ش) مقاسة بالجـول وفقًا للعلاقة الآتية: لـو ش = ١٤,٤ + ١,٥ ق

جـد مقدار الطاقة الناشئة عن زلزال قوته ٨,٢ على مقياس ريختر.

٦) تحتاج كتلة من الراديوم تبلغ (٥٠) غ إلى (٥٦١٥) سنة لتصبح (٥) غرامات نتيجـة للتحلل الإشعاعي، فإذا كانت العلاقة بين الكتلة والزمن تعطى بالعلاقة:

$ك = ك_{.} \times (٢)^{\frac{-ن}{جـ}}$ حيث ك: الكتلة الأصلية، ك: الكتلة بعد مرور ن سنة

جـد عمر النصف لمادة الراديوم.

٧) أثبت صحة المتطابقات الآتية:

أ) $\text{لـــو}_{٢}\, س^{٣} - \text{لـــو}_{٢}(س^{٢} + ٢س + ١) = \dfrac{٣\,\text{لـــو}\, س}{٢\,\text{لـــو}\, س + ١}$ ، $س > ٠$

ب) $\text{لـــو}\, س + \text{لـــو}\,(س+١) = \text{لـــو}\,((س^{٢} + س) \div ٥) + \text{لـــو}\, ٥$ ، $س > ٠$

جـ) $\text{لـــو}_{٢}(س - ٢) + \text{لـــو}_{٢}(س + ٢) + \text{لـــو}_{٢}(س^{٢} + ٤) = \text{لـــو}_{٢}(س^{٤} - ١٦)$ ، $س > ٢$

د) $\text{لـــو}_{٧}\sqrt{١ + س^{٠,٥}} + \text{لـــو}_{٧}\sqrt{١ - س^{٠,٥}} = \dfrac{\text{لـــو}(١ - س)}{٢}$ ، $٠ < س < ١$

أسئلة الوحدة

١) حول كلًّا من الصيغ الأسية الآتية إلى الصيغة اللوغاريتمية:

أ) $٥^{٣} = ١٢٥$ ب) $٢^{-٤} = \frac{١}{١٦}$

جـ) $٢^{٥} = ٣٢$ د) $س^{ن} = ص$

٢) حول كلًّا من الصيغ اللوغاريتمية الآتية إلى الصيغة الأسية:

أ) $لو_{٣} ٨١ = ٤$ ب) $لو_{هـ} ١ = ٠$ جـ) $لو_{\frac{٢}{٣}} (\frac{٨}{٢٧}) = ٣$

٣) حل كلًّا من المعادلات الآتية:

أ) $٣^{س-١} = \frac{١}{٢٤٣}$ ب) $٢^{٣-س} = (\frac{١}{٨})^{٢س}$.

جـ) $لو_{٢}(س+١) + لو_{٢}(س+٥) = ٢$ د) $لو_{٣} س - لو_{٣}(س-١) = ٢$

هـ) $لو_{٦}(لو_{٥}(لو_{٣} س)) = ٠$ و) $لو_{٤}(لو_{٣} س) = ١$

٤) جد المجال والمقطع الصادي للاقتران ق المعطى بالقاعدة الآتية:

$ق(س) = ٢ + هـ^{-س}$.

٥) باستخدام الآلة الحاسبة جد :

أ) $لو ٤,٣٧٢$ ب) $لو ٠,٨٧٤$ جـ) $هـ^{١,٢}$

٦) ارسم منحنى كلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ) $ص = ٣ - ٢هـ^{س}$ ب) $ص = ٢ + لو_{هـ} س^{٣}$

جـ) $ق(س) = -٤ + لو_{هـ} س$ د) $ك(س) = (٢)^{٣-س}$

٧) أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية.

أ) $\text{لو}(\text{جـ}^{٢}+٧\text{جـ}+١٠)-\text{لو}(\text{جـ}+٢)\times\sqrt{\text{جـ}+٥}=\frac{١}{٢}\text{لو}(\text{جـ}+٥)$

ب) $\frac{١}{٣}\text{لو}(\text{جـ}-١)+\text{لو}\sqrt{\text{جـ}^{٢}+\text{جـ}+١}=\text{لو}\sqrt{\text{جـ}^{٣}-١}$ ، حيث جـ > ١

٨) جد قيمة كلٍّ مما يأتي:

أ) $\text{لو}_{\frac{١}{٢}}٨$

ب) $\text{لو}_{٢}((١٦)(\sqrt{٢}))$

جـ) $\text{لو}_{٥}٣\times\frac{١}{٢}\text{لو}_{٩}\frac{١}{٥}$

د) $(\text{لو}_{٢}٣٠-\text{لو}_{٢}٥)\times\text{لو}_{٦}\frac{١}{٤}$

هـ) $\frac{\text{لو}_{٥}٣٢-\text{لو}_{٥}٦٤}{\text{لو}_{٥}٨}$

و) $\text{لو}_{٢}٤٩\times\text{لو}_{٨}٤\times\text{لو}_{٧}١٦$

٩) اكتب العبارات اللوغاريتمية الآتية على شكل لوغاريتم واحد:

أ) $-\text{لو}_{٣}س-\frac{١}{٤}\text{لو}_{٣}س^{-١}\times\text{لو}_{٣}\sqrt{٣}+\text{لو}_{٣}(س+١)$

ب) $٢\,\text{لو}_{٥}٩م-\text{لو}_{٥}١٥م+\frac{١}{٢}\text{لو}_{٥}١٢م\times\text{لو}_{٥}(\sqrt{٥})^{٢}$

١٠) إذا كان لو٥ = ٠,٦٩٩ ، لو٩ = ٠,٩٥٤٢

جد قيمة كلٍّ مما يأتي:

أ) $\frac{١}{٣}$لو٢ ب) لو٦, جـ) لو٢, د) $\text{لو}^{٥}\sqrt{٣}$

١١) جد قيمة كلٍّ مما يأتي :

أ) $\text{لو}\sqrt{٥}+\text{لو}\sqrt{٢}$

ب) $\text{لو}_{٩}\sqrt{٣}\times\text{لو}_{٣}\sqrt{٥}\times\text{لو}_{٥}٨١$

جـ) $\frac{\text{لـــو}_{٥}\ ٢ + \text{لـــو}_{٥}\ ٤}{\text{لـــو}_{٥}\ ٤ + \text{لـــو}_{٥}\ ١٦}$

١٢) حُلّ كلاً من المعادلات الآتية:

أ) $\text{لـــو}_{٥}(٢س - ٣) \times \text{لـــو}_{٢}\ ٥ = ٤$

ب) $٢\text{لـــو}_{٢}(س^{٣} - ١٩) = ٦$

جـ) $\text{لـــو}_{٢}(\text{لـــو}س^{٢}) = ١$

د) $\text{لـــو}\ س^{٢} + \text{لـــو}\ س^{٢} = ٨$

١٣) اكتشف العلماء أنّ المادة تتحول إلى طاقة، والمعادلة التي اكتشفها (آينشتاين) للعلاقة بين الطاقة ط ، وكتلة المادة ك هي: ط = ك × $(ع_{س})^{٢}$ حيث ك: الكتلة بالكيلـو غرام ، $ع_{س}$: سرعة الضوء = ٢,٩٩ × $١٠^{٨}$ م / ث، وعندها تكون الطاقة المقدرة بالجـول، جـد الطاقة التي تعادل إلكترونًا واحدًا، (كتلة الإلكترون هي: ٩ × $١٠^{-٢٥}$ كغ).

١٤) أيُّ الاقترانات الآتية يكون متزايدًا وأيُّها يكون متناقصًا؟

أ) ق(س) = $١٠٠ \left(\frac{٥}{٢}\right)^{س}$

ب) ق(س) = $٠,٠٠٥ \times ٨^{س}$

جـ) ق (س) = $١٥٥ \frac{١}{٢}^{س}$

١٥) إذا كانت العلاقة التي تربط قوة الزلزال بالطاقة الناتجة عنه هي :

$$\text{ق} = \text{لـــو}_{\frac{٢}{٣}} \frac{\text{ط}}{١١,٨١٠}$$

حيث ق : قوة الزلزال بالدرجة، ط : الطاقة الناتجة عن الزلزال .

احسب كمية الطاقة الناتجة عن زلزال قوته ٨,١ وحدة على مقياس ريختر .

١٦) تتحلل مادة مشعة وفق العلاقة $ت = ت_{.} \times (هـ)^{-٠,٠٢٣٨ن}$، حيث $ت_{.}$: الكمية الابتدائية بالغرام، ت: الكمية المتبقية بالغرام، ن: الزمن (السنوات)، كم يصبح الجزء المتبقي من المادة بعد ٢٥ سنة، علماً أنّ $ت_{.} = ٤٠$ غم؟

١٧) وجد عالم مخطوطة، وادّعى أنّ عمرها (٢٠٠٠) سنة، إذا كانت المخطوطة تحتوي على ٧٨٪ من الكربون الأصلي (الكربون ١٤)، بيّن فيما إذا كان ادّعاء العالم صحيح علمًا بأن الكربون يتحلل حسب العلاقة $ع(ت) = ع_{.} \times ت \times هـ^{-٠,٠٠٠١٢ت}$

حيث ت: الزمن بالسنوات، $ع_{.}$: الكمية قبل التحلل.

١٨) صف متى يكون الاقتران $ق(س) = أ \times (ب)^{س}$ خطًّا مستقيمًا أفقيًّا.

١٩) يتكون هذا السؤال من سبع فقرات من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة أربعة بدائل، واحد فقط منهاصحيح، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) قيمة $-٢٤٣^{\frac{١}{٥}}$ تساوي :

أ) ٧ ب) -٣

جـ) ٣ د) -٧

أ) $\frac{-٢}{٩}$ ب) ٤

جـ) $\frac{٤}{٩}$ د) -٤

(٣) مجال الاقتران المعطى بالقاعدة ق(س) = لـــو

أ) $(-\infty، ٢)$ ب) $\{٢\}$

جـ) $(-\infty، ٢]$ د) $(\infty، ٢)$

(٤) مدى الاقتران المعطى بالقاعدة ق(س) = ٣ $-$ س

أ) $(\infty، ١)$ ب) $(-\infty، ٠)$

جـ) $(\infty، ٠)$ د) $(-\infty، ١)$

(٥) قيمة س التي تحقق المعادلة ٣ $-$ لـــو$_{٢}$ س = ١ :

أ) ١ ب) ٢

جـ) -١ د) ٤

(٦) نقطة تقاطع المنحنى ص $-$ ٣س$^{+٢}$ = ٠ مع محور

أ) $(٣، ٠)$ ب) $(٠، -٢)$

جـ) $(٩، ٠)$ د) $(٠، ٩)$

*(٧) إذا كان لـــو$_{ب}$ ٢ = $\frac{١}{٣}$ ، فإنَّ لـــو$_{ب}$ ٣٢ يساوي:

أ) ٢ ب) ٥

جـ) $\frac{-٣}{٥}$ د) $\frac{٥}{٣}$

*

النتاجات

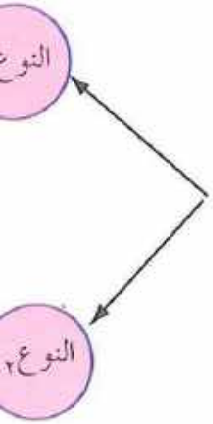
- تتعرف مبدأ العد.
- تستخدم مبدأ العد في حلّ مسائل حياتية.

أمام فتاة صحن فيه بسكويت يحتوي على عشرين قطعة، اثنتا عشرة قطعة طرية والباقي قاسية، كم عدد الطرق التي تستطيع من خلالها هذه الفتاة اختيار ثلاث قطع بسكويت بحيث يُوجد قطعتان قاسيتان وواحدة طرية؟

مثال (١)

يريد محمد شراء سيارة وعندما ذهب إلى معرض السيارات و
منهما بثلاثة ألوان (أسود، أحمروأخضر)، بكم طريقة يمكن لـ

الحل



لإيجاد عدد الطرائق سيتم الاختيار على مرحلتين، المرحلة الأولى اختيار نوع السيارة وتتم بطريقتين، والمرحلة الثانية اختيار اللون وتتم بثلاث طرائق وبحسب طريقة الشجرة

الموضحة في الشكل (٦-١) يصبح عدد الطرائق التي من خلالها يمكن لمحمّد اختيار السيارة بها هو ٦ طرق، و يمكن كتابة الاختيارات على الشكل {النوع١ أحمر، النوع١ أخضر، النو

(٢) قيمة لـــو$_{\frac{٣}{٢}}$ ($\frac{٨١}{١٦}$) تساوي:

أ) $\frac{-٢}{٩}$ ب) ٤

جـ) $\frac{٤}{٩}$ د) -٤

(٣) مجال الاقتران المعطى بالقاعدة ق(س) = لـــو(٢ - س) يساوي:

أ) (-∞،٢) ب) {٢}

جـ) (-∞،٢] د) (∞،٢)

(٤) مدى الاقتران المعطى بالقاعدة ق(س) = ٣ $^{-س}$ يساوي:

أ) (∞،١) ب) (-∞، ٠)

جـ) (∞،٠) د) (-∞،١)

(٥) قيمة س التي تحقق المعادلة ٣- لـــو$_{٢}$ س = ١ :

أ) ١ ب) ٢

جـ) -١ د) ٤

(٦) نقطة تقاطع المنحنى ص= ٣$^{س+٢}$ = ٠ مع محور الصادات:

أ) (٣،٠) ب) (٠، -٢)

جـ) (٩، ٠) د) (٠، ٩)

*(٧) إذا كان لـوب ٢ = $\frac{١}{٣}$ ، فإنَّ لـوب ٣٢ يساوي:

أ) ٢ ب) ٥

جـ) -$\frac{٣}{٥}$ د) $\frac{٥}{٣}$

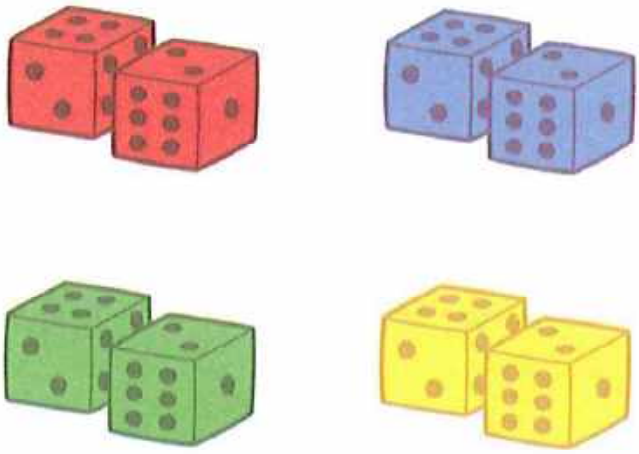
* السؤال من أسئلة الاختبارات الدولية

الوحدة السادسة

طرائق العد

العدُّ مهارة أساسية نحتاج إليها في مجالات الحياة المختلفة، ويعتمد الإحصاء على طرق العد في اختيار العينات التي يحللها ومن خلالها يصدر بعض النتائج، فمثلاً إذا أراد مرشّح في الانتخابات النيابية أن يعرف فرص نجاحه فهو يعتمد على جمع البيانات وتحليلها، وكذلك الأمر بالنسبة للطبيب الذي يرغب في معرفة مدى انتشار مرض معين، والمزارع الذي يرغب في معرفة مدى نجاح زراعة نوع معين من النباتات.

تعتمد طريقة العد التي نستخدمها على طبيعة الموقف، فطريقة العد التي نتبعها عندما يكون التكرار مسموحًا به تختلف عن طريقة العد التي نتبعها عندما لا يكون التكرار مسموحًا به، سنتعرض في هذه الوحدة إلى مبدأ العد الأساسي و مضروب العدد الصحيح والتباديل و التوافيق.



Counting Methods

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادرا على:

- التعرف إلى مبدأ العد الأساسي.
- استخدام مبدأ العد الأساسي في حلّ مسائل حياتية.
- استقصاء التباديل والتوافيق ومضروب العدد الصحيح غير السالب.
- حلّ مسائل حياتية، باستخدام التباديل والتوافيق.

النتاجات

- تتعرف مبدأ العد.
- تستخدم مبدأ العد في حلّ مسائل حياتية.

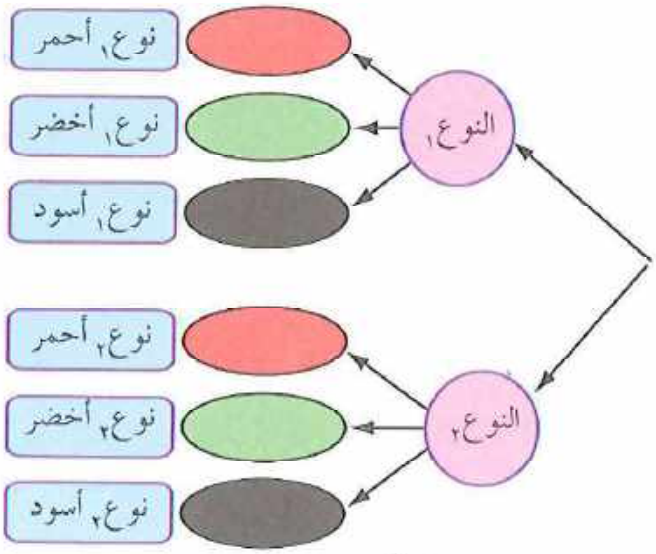
أمام فتاة صحن فيه بسكويت يحتوي على عشرين قطعة، اثنتا عشرة قطعة طرية والباقي قاسية، كم عدد الطرق التي تستطيع من خلالها هذه الفتاة اختيار ثلاث قطع بسكويت بحيث يُوجد قطعتان قاسيتان وواحدة طرية؟

مثال (١)

يريد محمد شراء سيارة وعندما ذهب إلى معرض السيارات وجد نوعين من السيارات و كل منهما بثلاثة ألوان (أسود، أحمروأخضر)، بكم طريقة يمكن لمحمد اختيار سيارة؟

الحل

لإيجاد عدد الطرائق سيتم الاختيار على مرحلتين، المرحلة الأولى اختيار نوع السيارة وتتم بطريقتين، والمرحلة الثانية اختيار اللون وتتم بثلاث طرائق وبحسب طريقة الشجرة الموضحة في الشكل (٦-١) يصبح عدد الطرائق التي من خلالها يمكن لمحمّد اختيار السيارة بها هو ٦ طرق، و يمكن كتابة الاختيارات على الشكل {النوع$_1$ أحمر، النوع$_1$ أخضر، النوع$_1$ أسود، النوع$_2$ أحمر، النوع$_2$ أخضر، النوع$_2$ أسود}. لكن هذه الطريقة تكون صعبة لو كان عدد المراحل أكثر.



الشكل (٦-١).

لاحظ أن الاختيارتم على مرحلتين المرحلة الأولى ولها طريقتان و المرحلة الثانية لها ثلاث طرائق، وعليه يكون عدد الطرائق هو: ٢×٣ =٦ طرائق وهو نفسه عدد فروع الشجرة في الرسم.

مثال (٢)

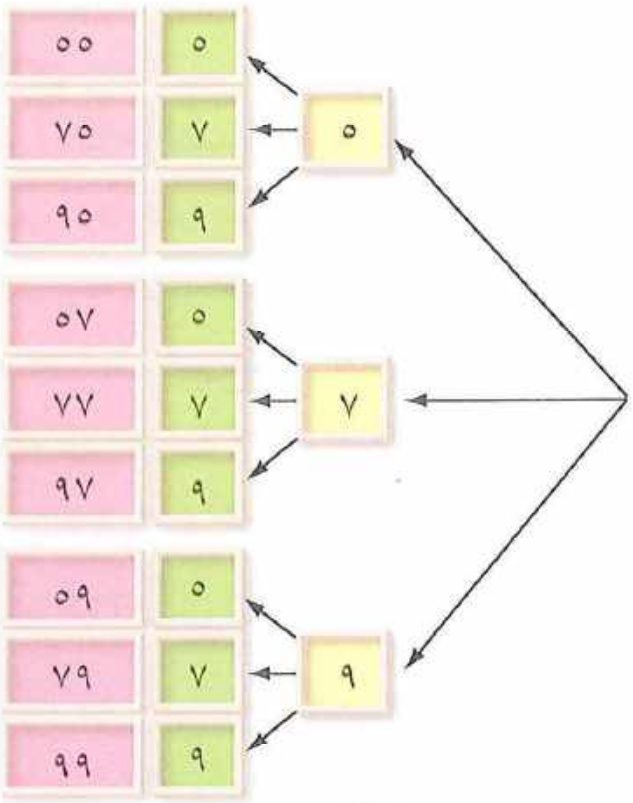
كم عددًا مكوّنًا من منزلتين يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {٥، ٧، ٩}؟

الحل

بما أن المطلوب تكويـن أعداد فإن التكرار مسموح أي أننا نستطيع اختيار منزلة الآحاد واختيـار منزلـة العشـرات بثـلاث طرائق، وبذلك تكون الخيارات كما هو موضح في الشكل(٦-٢)، وبِعدِّ فروع الشجرة يكون عدد الأعداد هو ٩.

لكن إذا ضربنا عدد اختيارات منزلة الآحاد بعدد اختيارات منزلة العشرات ينتج:

٣ × ٣ = ٩.



الشكل (٦-٢).

ماذا سيكون الناتج في المثال (٢) إذا كان تكرار الرقم في المنزلة الواحدة غير مسموح به؟

لاحظ أن المثالين السابقين يقدمان مبدأ العد.

تدريب (١)

ألقي حجر نرد وقطعة نقد معدنية معًا مرة واحدة، ما عدد النتائج المتوقع ظهورها؟

مثال (٣)

أراد سمير الذهاب إلى حفلة وعندما نظر في خزانته وجد أمامه قميصين وأربعة بنطلونات وحذاءين و ثلاثة جاكيتات، ما عدد خيارات سمير لاختيار ملابسه المكوّنة من قميص وحذاء وجاكيت؟

الحل

لو أردنا حلّ المسألة باستخدام الشجرة لوجدنا صعوبة بعض الشيء. لاختيار الملابس سيقوم سمير بالاختيار على أربع مراحل المرحلة الأولى اختيار قميص ولها طريقتان مختلفتان، والمرحلة الثانية اختيار بنطال ولها ٤ طرق مختلفة والمرحلة الثالثة اختيار حذاء ولها طريقتان مختلفتان، والمرحلة الرابعة اختيار جاكيت ولها ثلاث طرق مختلفة، وبذلك يصبح عدد الخيارات هو: ٢ × ٤ × ٢ × ٣ = ٤٨ طريقة لاختيار ملابسه.

إن حساب عدد الطرق للأمثلة السابقة يعتمد على مبدأ يسمى **مبدأ العد الأساسي**.

مبدأ العد الأساسي

إذا تم إجراء عملية على ك من المراحل حيث إنّ المرحلة الأولى لها $ن_1$ من الطرق، المرحلة الثانية لها $ن_2$ من الطرق ، المرحلة الثالثة لها $ن_3$ من الطرق، وهكذا حتى المرحلة الأخيرة (ك) التي لها $ن_ك$ من الطرق، فإنه يمكن إجراء العملية كاملة بطرائق عددها = $ن_1 \times ن_2 \times ن_3 \times ..... \times ن_ك$ طريقة، على فرض أن الاختيار في أي مرحلة لا يؤثر في الاختيار في المراحل الأخرى.

تدريب (٢)

ذهبت سارة إلى مطعم لتناول وجبة طعام وعندما نظرت في قائمة الطعام وجدت أمامها ثلاثة أنواع من اللحوم، سبعة أنواع من العصير، وأربعة أنواع من الحلوى، بكم طريقة يمكن اختيار وجبة مكوّنة من نوع واحد من اللحم ونوع واحد من العصير ونوع واحد من الحلوى؟

مثال (٤)

إذا ألقيت ثلاثة أحجار نرد منتظمة مرة واحدة، ما عدد النتائج المتوقع ظهورها؟

الحل

تتم العملية على ثلاث مراحل كل مرحلة لها ستة اختيارات فيكون عدد النتائج المتوقع ظهورها هو:

$٦ \times ٦ \times ٦ = ٦^{٣} = ٢١٦$ (استخدام مبدأ العد)

وفي هذه الحالة التي يكون عدد الخيارات(ك) لكل مرحلة من مراحل التجربة مساويًا لعدد الخيارات في المراحل الأخرى ولنرمز له بالرمز ك، وعدد المراحل ن، يكون عدد النتائج المتوقعة = $(ك)^{ن}$.

تدريب (٣)

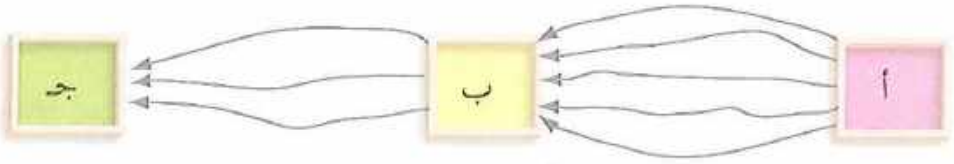
ما عدد النتائج المتوقعة في تجربة إلقاء قطعة نقد معدنية منتظمة خمس مرات متتالية؟

تدريب (٤)

كم كلمة مكونة من أربعة أحرف، يمكن تكوينها من مجموعة الأحرف {و، أ، هـ، م، ن، س}، ولا يشترط أن يكون للكلمة معنى مع مراعاة عدم تكرار الحرف؟

تمارين و مسائل

١) هنالك ثلاث مدن أ ، ب ، جـ وهنالك ٥ طرق تصل المدينة أ بالمدينة ب و ٣ طرق تصل المدينة ب بالمدينة جـ، انظر الشكل (٦-٣) إذا أراد شخص الوصول إلى المدينة جـ انطلاقًا من المدينة أ مرورًا بالمدينة ب ما عدد الطرائق التي يمكنه سلوكها؟



الشكل (٦-٣).

٢) في أحد محلات بيع أسماك الزينة يحتوي أحد أحواض هذا المحل على ٧ سمكات ذهبية و ٨ سمكات سوداء، أجب عن كلٍّ مما يأتي:

أ) ما عدد طرق اختيار٣ سمكات إذا كانت السمكة التي نختارها لا تعاد إلى الحوض (بغضّ النظر عن لون السمكة)؟

ب) بِكَمْ طريقةً يمكن اختيار ٣ سمكات أول اثنتين ذهبيتين علماً بأنّ البائع يتفقد السمكة ثم يعيدها إلى الحوض؟

٣) أراد شخص اختيار رقم سري لهاتفه الخلوي مكون من أربع أرقام، ما عدد الخيارات المتاحة أمام هذا الشخص في كلٍّ من الحالات الآتية:

أ) إذا لم توضع شروط على الخيارات.

ب) إذا اشترط أن الخانة الأولى لا تساوي صفرًا.

جـ) إذا لم يسمح بتكرار الرقم في المنزلة الواحدة.

٤) كم عددًا فرديًا مكوّنًا من منزلتين يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام: {٢، ١، ٤، ٦، ٣، ٥} في كلٍّ من الحالات الآتية:

أ) إذا سُمح بتكرار الرقم في المنزلة.

ب) إذا لم يُسمح بتكرار الرقم في المنزلة.

٥) بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكوّن من (٣) منازل من مجموعة الارقام { ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} بحيث يكون العدد الناتج أكبر من ٣٠٠؟

٦) بكم طريقة يمكن كتابة اقتران على الصورة ق(س) = أ س^{٣} + ب س^{٢} + جـ س − ٥ . حيث (أ ، ب ، جـ) معاملات مأخوذة من المجموعة {− ٢، − ١، ١، ٢ } إذا كان :

أ) تكرار المعاملات غير مسموح به.

ب) تكرار المعاملات مسموحًا به.

٧) حُلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

النتاجات

- تتعرف مضروب العدد الصحيح غير السالب.
- تستخدم المضروب في حلّ مسائل حياتية.

اجتمع عشرة أشخاص في مؤتمر وقبل الاجتماع قام كل شخص بمصافحة الباقين، بكم طريقة يمكن أن تحدث المصافحات؟

مثال (١)

في أحد الصفوف أراد خمسة طلاب الجلوس على خمسة مقاعد على استقامة واحدة، ما عدد الطرق الممكنة لجلوس الطلبة؟

الحل

أمام الطالب الأول خمس طرق لاختيار مقعده، وبعد أن يجلس الطالب الأول يكون أمام الطالب الثاني أربع طرق لاختيار مقعده، وهكذا:

وبذلك يكون عدد طرق الجلوس الممكنة للطلبة هو:

٥×٤×٣×٢×١ = ١٢٠ طريقة. (مبدأ العد)

وهذا ما يُعرف **بمضروب العدد**.

المضروب

ليكن ن عددًا صحيحًا غير سالب، يعرف مضروب العدد ن الذي يرمز له بالرمز ن! على أنه المقدار: ن×(ن−١)×(ن−٢)×.....×٣×٢×١ ويكون مضروب الصفر=٠! =١

تدريب (١)

بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكوّن من أربع منازل من مجموعة الأرقام:
{ ٣، ٥، ٨، ٧ }، مع مراعاة عدم تكرار الرقم في المنزلة الواحدة.

مثال (٢)

جد قيمة كل مما يأتي:

١) $!٤$ ٢) $\frac{!٨}{!٦}$ ٣) $!١$

الحل

١) $!٤ = ١\times٢\times٣\times٤ = ٢٤$ (تعريف المضروب)

٢) $\frac{!٨}{!٦} = \frac{١\times٢\times٣\times٤\times٥\times٦\times٧\times٨}{١\times٢\times٣\times٤\times٥\times٦}$ (تعريف المضروب)

$= ٧\times٨$ (اختصار)

$= ٥٦$

ويمكن الحل بطريقة أخرى أكثر اختصاراً:

$\frac{!٨}{!٦} = \frac{٧\times٨\times!٦}{!٦}$ (تعريف المضروب)

$= ٧\times٨$ (اختصار)

$= ٥٦$

٣) $!١ = ١$

تدريب (٢)

جد قيمة كل مما يأتي:

١) $!٧$ ٢) $\frac{!٢٠}{!١٦}$ ٣) $\frac{!٨}{!٦\times!٢}$

مثال (٣)

احسب قيمة ن، حيث ن ∈ ص$^+$، في كلٍّ مما يأتي:

١) $٤(!ن) = ٩٦$ ٢) $\frac{!(ن+٢)}{!ن} = ٧٢$

الحل

١) $٤(!ن) = ٩٦$ (بقسمة الطرفين على ٤)

ن! = ٢٤ (تحليل)

ن! = ١×٢×٣×٤

ن! = ٤! (تعريف المضروب)

ن = ٤

٢) $\frac{(ن+٢)!}{ن!} = ٧٢$

$\frac{(ن+٢)(ن+١)ن!}{ن!} = ٧٢$ (تعريف المضروب)

(ن+٢)(ن+١) = ٧٢ (اختصار)

(ن+٢)(ن+١) = ٩×٨ (تحليل إلى عوامل)

(ن+٢) = ٩ (مقارنة الطرفين)

ن = ٧ (طرح ٢ من الطرفين)

تدريب (٣)

احسب قيمة ن، ن ∈ ص$^+$، في كلٍّ مما يأتي:

١) $\frac{(ن+٣)!}{ن!} = ٣٣٦$ ٢) ٥ (ن!) = ٣٦٠٠

مثال (٤)

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد ٧!

الحل

اضغط على [٧] ثم [shift] ثم [n!] ثم [=] فيظهر الناتج على الشاشة ٥٠٤٠

تدريب (٤)

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد:

١) ١٢! ٢) ١٣! ٣) ١١!

تمارين و مسائل

١) عبر عن كلٍّ من المقادير الآتية باستخدام المضروب:

أ) ١×٢×٣×٤×٥×٦×٧

ب) ١٦×١٥×١٤×١٣

جـ) $\frac{٧\times٦\times٥\times٤}{٣\times٢\times١}$

٢) بسّط كلًّا من المقادير الآتية:

أ) $\frac{!٢٠}{!٢!١٨}$ ب) $\frac{!١٢٠}{!٥\times!١١٨}$ جـ) $\frac{!(٤+ن)}{!(٢+ن)}$

٣) جد قيمة كُلٍّ مما يأتي:

أ) !٥ ب) ٨!−٦! جـ) $\frac{!١٦}{!٥\times!١١}$

د) $\frac{!٨}{!٦}$ هـ) (٩−٤)! و) ٥(٤!)

٤) جد قيمة كُلٍّ مما يأتي:

أ) (٤+٥)! ب) ٤! + ٥! جـ) ٤!×٥! د) (٤×٥)!

٥) احسب قيم ن في ما يأتي، ن ∈ ص$^+$:

أ) ٢((٥ن)!) = ٢٤٠ ب) (٤ن−٢)! = ٧٢٠

٦) حُلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

٧) أراد ثلاثة أشخاص الخروج من غرفة بابها يتسع لشخص واحد فقط، ما عدد الطرق التي يخرج بها هؤلاء الأشخاص من الغرفة؟

٨) تسع سيدات مع كل سيدة طفل يُراد ترتيب جلستهم بحيث تجلس السيدات متجاورات والأطفال متجاورين. بكم طريقة يمكن أن يجلسوا؟

٩) أرادت سلمى إرسال ٧ رسائل نصّيّة مختلفة إلى صديقاتها السبع للتهنئة بحلول عيد الفطر السعيد، ما عدد الطرق التي يمكن لها من خلالها إرسال هذه الرسائل لصديقاتها؟

النتاجات

- تتعرف التباديل.
- تستخدم التباديل في حلّ مسائل حياتية.

اجتمع عشرون شخصًا في أحد المطاعم وأراد صاحب المطعم تقديم ثلاث جوائز مختلفة لثلاثة أشخاص من الموجودين فوضع بطاقات تحمل أرقام مقاعد الحاضرين في صندوق وقام بسحب ثلاث بطاقات على التوالي، ما عدد الطرق التي يمكن أن يختار بها صاحب المطعم البطاقات الثلاث؟

مثال (١)

يريد محمد وسَعْد و جمال التقاط صورة جماعية لهم، فقام المصور بوضع ثلاثة مقاعد على استقامة واحدة لتصويرهم، ما عدد طرائق ترتيب جلستهم؟

الحل

هنالك ثلاثة مقاعد وثلاثة أشخاص، يمكن أن يكون محمد في المنتصف وعلى يمينه سعد وعلى يساره جمال ويمكن أن يكون محمد في المنتصف وعلى يساره سعد وعلى يمينه جمال، فتكون الصورة الأولى مختلفة عن الصورة الثانية.

بذلك تكون التراتيب المختلفة للصورة هي:

سعد، محمد، جمال

سعد، جمال، محمد

محمد، سعد، جمال

محمد، جمال، سعد

جمال، محمد، سعد

جمال، سعد، محمد

وكل واحدة من هذه الصور تختلف عن الأخرى ولذلك يعتبر فيها الترتيب مهمًّاوطريقة الترتيب هذه تسمى **التباديل**.

تعريف التبادل

إذا تم اختيار عناصر عددها ر من مجموعة عدد عناصرها ن بحيث يكون ترتيب الاختيار مهمًّا. فإن هذا الاختيار يسمى تباديل.

ويُرمز لعددها بالرمز ل(ن، ر) حيث ن ، ر ∈ ص+، ٠ < ر < ن

و يكون $ل(ن، ر) = \frac{ن!}{(ن-ر)!}$

تدريب (١)

ما عدد طرق اختيار لجنة ثنائية مِنْ عشرة طلاب بحيث يكون أحدهم قائدًا للصف والآخر مساعدًا له؟

مثال (٢)

بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكوّن من منزلتين مختلفتين من مجموعة الأرقام {٨،٢،٣،٥}

الحل

العدد مكون من منزلتين والترتيب فيها مهم فالعدد ٣٥ يختلف عن العدد ٥٣، وبذلك يكون

عدد الاختيارات هو: $ل(٤، ٢) = \frac{٤!}{٢!}$ (تعريف التباديل)

$= \frac{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤!}{١ \times ٢!}$ (تعريف المضروب)

$= ٣ \times ٤$ (اختصار)

$= ١٢$

و يمكن حلّ المثال بطريقة أخرى باستخدام مبدأ العد:

يتم اختيار منزلة الآحاد وأمامها ٤ اختيارات، ثم منزلة العشرات وأمامها ٣ اختيارات فيكون الناتج: ٤ × ٣ = ١٢

ويمكن حساب ل(ن ، ر) بطريقة أخرى على النحو الآتي:

$$ل(ن، ر) = \frac{!ن}{!(ن-ر)}$$ (تعريف التباديل)

$$= \frac{ن \times (ن-١) \times (ن-٢) \times ..... \times (ن-(ر-١)) \times !(ن-ر)}{!(ن-ر)}$$ (تعريف المضروب)

$$= ن \times (ن-١) \times (ن-٢) \times ..... \times (ن-ر+١)$$ (تبسيط)

ويمكن اعتماد النتيجة السابقة في حل التباديل.

مثال (٣)

احسب قيمة كلٍّ مما يأتي:

١) ل(٥، ٢)　　٢) ل(٥، ٣)　　٣) ل(٨، ٣)

٤) ل(٦، ٤)　　٥) ل(٧، ٢)

الحل

١) $ل(٥، ٢) = \frac{!٥}{!(٥-٢)}$ (تعريف التباديل)

$$= \frac{٥ \times ٤ \times ٣!}{!٣}$$ (تعريف المضروب)

$$= ٥ \times ٤ = ٢٠$$ (اختصار)

٢) $ل(٥، ٣) = \frac{!٥}{!(٥-٣)}$ (تعريف التباديل)

$$= \frac{٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢!}{!٢}$$ (تعريف المضروب)

$$= ٥ \times ٤ \times ٣$$ (اختصار)

$$= ٦٠$$

٣) $ل(٨، ٣) = \frac{!٨}{!(٣-٨)}$ (تعريف التباديل)

$= \frac{!٥ \times ٦ \times ٧ \times ٨}{!٥}$ (تعريف المضروب)

$= ٦ \times ٧ \times ٨$ (اختصار)

$= ٣٣٦$

٤) $ل(٦، ٤) = \frac{!٦}{!(٤-٦)}$ (تعريف التباديل)

$= \frac{!٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦}{!٢}$ (تعريف المضروب)

$= ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ = ٣٦٠$ (اختصار)

٥) $ل(٧، ٢) = \frac{!٧}{!(٢-٧)}$ (تعريف التباديل)

$= \frac{!٥ \times ٦ \times ٧}{!٥}$ (تعريف المضروب)

$= ٤٢$ (اختصار)

مثال (٤)

احسب قيمة كلٍّ مما يأتي:

١) $ل(٤، ٠)$ ٢) $ل(٤، ١)$ ٣) $ل(٤، ٤)$

٤) $ل(٧، ٠)$ ٥) $ل(٧، ١)$ ٦) $ل(٧، ٧)$

الحل

١) $ل(٤، ٠) = \frac{!٤}{!(٠-٤)} = \frac{!٤}{!٤} = ١$

٢) $ل(٤، ١) = \frac{!٤}{!(١-٤)} = \frac{!٤ \times ٤}{!٣} = ٤$

٣) $ل(٤، ٤) = \frac{!٤}{!(٤-٤)} = \frac{!٤}{!٠} = \frac{!٤}{١} = !٤ = ٢٤$

٤) $ل(٧، ٠) = \frac{!٧}{!(٠-٧)} = \frac{!٧}{!٧} = ١$

٥) $ل(٧ ، ١) = \frac{!٧}{!(١-٧)} = \frac{!٧}{!٦} = \frac{!٦ \times ٧}{!٦} = ٧$

٦) $ل(٧ ، ٧) = \frac{!٧}{!(٧-٧)} = \frac{!٧}{!٠} = \frac{!٧}{١} = !٧ = ٥٠٤٠$

فكّر وناقش

ادّعى سمير أنّ: $ل(ن ، ن) = ل(ن ، ن-١)$

ناقش ادّعائه مبررًا إجابتك من خلال تقديم أمثلة.

تدريب (٢)

احسب قيمة كلٍّ مما يأتي:

١) $ل(٧، ٣)$ ٢) $ل(١٠٠، ٠)$

٣) $ل(٨، ٨)$ ٤) $ل(٢٠، ١)$ ٥) $ل(٢٠، ١٩)$

بشكل عام

$ل(ن، ن) = ن!$ $ل(ن، ن-١) = ن!$

$ل(ن، ١) = ن$

$ل(ن، ٠) = ١$

مثال (٥)

يريد خمسة أشخاص الجلوس حول طاولة مستديرة، ما عدد الطرائق التي يمكن أن يجلس بها هؤلاء الأشخاص في كلٍ من الحالات الآتية:

١) دون وضع أي شرط على طريقة جلوسهم؟

٢) إذا كان أحدهم سيجلس بجوار باب الغرفة؟

الحل

١) نوع التبديل تبديل دائري.

هنا الخيارات ٢٤ خيارًا وبشكل عام التبديل الدائري عدد خياراته $(ن-١)!$

٢) وضع شرط جلوس أحد الأشخاص بجوار الباب يجعل هنالك نقطة مرجع و أي شرط من هذا النوع يعيد التبديل للتبديل الخطي (على استقامة واحدة) فيكون الجواب هو ل(٥، ٥) =٥!

تعلّم

التبديل الدائري: كيفما جَلس الأشخاص حول طاولة مستديرة، فإنّ خيارات الجلوس تبقى نفسها وهذا يُشْبه تمامًا عملية ترتيب خمسة أعداد على دائرة معيّنة، وما ينطبقُ على خمسة أشخاص ينطبقُ على أي عددٍ من الأشخاص.

تدريب (٣)

١) يُراد تصميم لعبة للأطفال مكونة من دولاب دائري مقسم إلى ستة أجزاء يراد تلوينها بستة ألوان مختلفة (جميع الدواليب لها الألوان نفسها)، ما عدد الطرق المتاحة أمام المصنع للإنتاج في الحالات الآتية:

٢) إذا لم يكن شرط على ترتيب الألوان.

٣) إذا كان هنالك مؤشر يجب أن يكون عند اللون الأحمر.

مثال (٦)

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة ل(٨ ، ٦).

الحل

اضغط على | ٨ | ثم | shift | ثم | nPr | ثم | ٦ | ثم | = | فيظهر على الشاشة

٢٠١٦٠

تدريب (٤)

استخدم الآلة الحاسبة في إيجاد قيمة كلٍّ مما يأتي:

١) ل(٩ ، ٦)　　٢) ل(١٠ ، ٤)

٣) ل(١١ ، ٨)　　٤) ل(١٢ ، ٧)

تمارين و مسائل

١) احسب قيمة كُلٍّ مما يأتي:

أ) ل (١٠، ٥) ب) ل (١٥، ١)

جـ) ل (١٤، ٠) د) ل (١٠٠، ٩٩)

هـ) ل (٢٥، ٢٥)

٢) جد قيمة ن التي تحقق كُلٍّ مما يأتي:

أ) ل (ن، ٢) = ٩٠

ب) ل (ن، ٤) = ٧٩٢٠

جـ) ل (ن، ٤) = ١٢ ل (ن، ٢)

د) ل (ن^{٢} +١ ، ٣) = ١٠ ن ل(ن+١ ، ٣)

٣) جد قيمة ر التي تحقق ما يأتي:

ل (٧، ر)= ٨٤٠

٤) يريد شخص اختيار كلمة سر لأحد المواقع الإلكترونية، ما عدد الخيارات أمام هذا الشخص في كلٍّ من الحالات الآتية:

أ) إذا كانت كلمة السر مكونة من ثلاثة أحرف مختلفة من اللغة العربية يتبعها ثلاثة أرقام.

ب) إذا كانت كلمة السر مكونة من ثلاثة أحرف مختلفة من اللغة العربية يتبعها ثلاثة أرقام مختلفة.

٥) بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكوّن من ٣ منازل مختلفة من مجموعة الأرقام{ ٩، ٥، ٧، ٣، ٤}؟

٦) بكم طريقة يمكن تكوين كلمة مكوّنة من أربعة أحرف مختلفة من مجموعة الحروف { و، ج، د، ع، هـ، س،ص} بحيث لا يشترط أن يكون للكلمة معنى؟

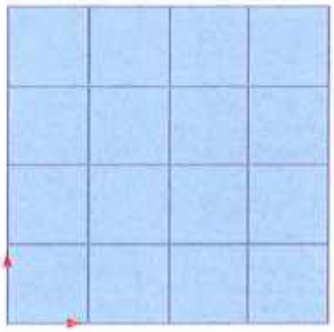
٧) بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة ثلاثية مكونة من رئيس ونائب للرئيس وأمين صندوق من بين عشرين شخصًا؟

٨) حُلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

النتاجات

- تتعرف التوافيق.
- تستخدم التوافيق في حلّ مسائل حياتية.

ما عدد الطرائق التي يمكن سلوكها للوصول من المدينة (أ) إلى المدينة (ب) من خلال تخطيط الشوارع الموضح في الشكل (٦-٤) علمًا بأن الحركة باتجاهي الشمال و الشرق فقط؟



الشكل (٦-٤).

مثال (١)

بكم طريقة يمكن سحب كرتين معًا من صندوق يحتوي على ثلاث كرات مرقمة ١ ، ٢ ، ٣؟

الحل

للحصول على الكرتين معًا فلن يكون الترتيب مهمًّا أي أنَّ سحب الكرتين ١ ، ٢ معًا نفس سحب الكرتين ٢ ، ١ معًا وبذلك تكون الخيارات لعملية السحب هي: ١،٢ ، ٣،١ ، ٢،٣.

الحالات التي يكون الترتيب فيها غير مهم نستخدم ما يُسمى **بالتوافيق**،و في ما يأتي نورد تعريف التوافيق و قاعدة إيجادها:

التوافيق

هي عدد طرائق اختيار ر عنصرًا من مجموعة عدد عناصرها ن إذا كان الترتيب فيها غير مهم والتكرار غير مسموح به.

ويرمز لها بالرمز $\binom{ن}{ر}$ وتُقرأ ن فوق ر، وتُعطى بالقاعدة الآتية:

$$\binom{ن}{ر} = \frac{ل(ن ، ر)}{ر!} = \frac{ن!}{(ن-ر)! \times ر!}$$

مثال (٢)

جد قيمة كلٍّ مما يأتي:

١) $\binom{٧}{٥}$ ٢) $\binom{٨}{٣}$

الحل

١) $\binom{٧}{٥} = \frac{!٧}{!٥\times!(٥-٧)}$ (تعريف التوافيق)

$= \frac{!٥\times٦\times٧}{!٥\times١\times٢}$ (تعريف المضروب)

$= ٣\times٧ = ٢١$ (اختصار)

٢) $\binom{٨}{٣} = \frac{!٨}{!٣\times!(٣-٨)}$ (تعريف التوافيق)

$= \frac{!٥\times٦\times٧\times٨}{١\times٢\times٣\times!٥}$ (تعريف المضروب)

$= ٧\times٨$ (اختصار)

$= ٥٦$

مثال (٣)

جد قيمة كلٍّ مما يأتي:

١) $\binom{٨}{١}$ ٢) $\binom{٩}{١}$ ٣) $\binom{٨}{٧}$ ٤) $\binom{٩}{٨}$

الحل

١) $\binom{٨}{١} = \frac{!٨}{!١\times!(١-٨)} = \frac{!٧\times٨}{١\times!٧} = ٨$

٢) $\binom{٩}{١} = \frac{!٩}{!١\times!(١-٩)} = \frac{!٨\times٩}{١\times!٨} = ٩$

٣) $\binom{٨}{٧} = \frac{!٨}{!٧\times!(٧-٨)} = \frac{!٧\times٨}{!٧\times١} = ٨$

٤) $\binom{٩}{٨} = \frac{!٩}{!٨\times!(٨-٩)} = \frac{!٨\times٩}{!٨\times!١} = ٩$

ماذا تستنتج؟

فكّر وناقش

ناقش مع زملائك صحة العبارات الآتية:

١) $\binom{ن}{١} = \binom{ن}{ن-١} = ن$

٢) $\binom{ن}{ن} = \binom{ن}{٠} = ١$

مثال (٤)

جد قيمة كلٍّ مما يأتي:

١) $\binom{٧}{٧}$ ٢) $\binom{٧}{٠}$ ٣) $\binom{٨}{٨}$ ٤) $\binom{٨}{٠}$

الحل

١) $\binom{٧}{٧} = \frac{!٧}{!(٧-٧)!٧} = \frac{!٧}{!٠\times!٧} = ١$

٢) $\binom{٧}{٠} = \frac{!٧}{!(٠-٧)!٠} = \frac{!٧}{!٧\times!٠} = ١$

٣) $\binom{٨}{٨} = \frac{!٨}{!(٨-٨)!٨} = \frac{!٨}{!٠\times!٨} = ١$

٤) $\binom{٨}{٠} = \frac{!٨}{!(٠-٨)!٠} = \frac{!٨}{!٨\times!٠} = ١$

ماذا تستنتج؟

تدريب (١)

جد قيمة كلٍّ مما يأتي:

١) $\binom{١٠}{٨}$ ٢) $\binom{٩}{٦}$ ٣) $\binom{١٨}{١٧}$ ٤) $\binom{٢٥}{١}$

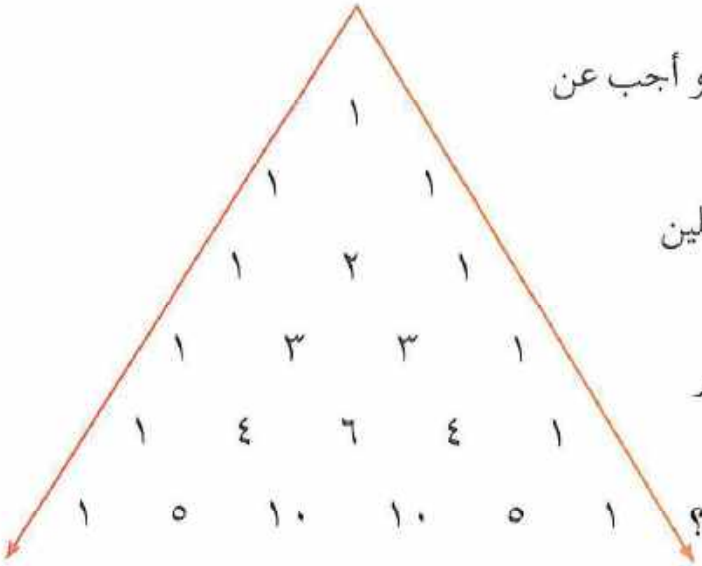
٥) $\binom{١٢٨}{١٢٨}$ ٦) $\binom{٦}{٣}$ ٧) $\binom{٢٥}{٠}$

لاحظ أنه يمكن حساب التوافيق باستخدام مثلث باسكال انظر الشكل(٦–٥/أ)

$$
\begin{aligned}
١ &= \binom{٠}{٠} \\
٢ &= \binom{١}{٠}+\binom{١}{١} \\
٤ &= \binom{٢}{٠}+\binom{٢}{١}+\binom{٢}{٢} \\
٨ &= \binom{٣}{٠}+\binom{٣}{١}+\binom{٣}{٢}+\binom{٣}{٣} \\
١٦ &= \binom{٤}{٠}+\binom{٤}{١}+\binom{٤}{٢}+\binom{٤}{٣}+\binom{٤}{٤} \\
٣٢ &= \binom{٥}{٠}+\binom{٥}{١}+\binom{٥}{٢}+\binom{٥}{٣}+\binom{٥}{٤}+\binom{٥}{٥}
\end{aligned}
$$

الشكل (٦–٥/أ).

قارن هذا الشكل مع الشكل (٦–٥/ ب) و أجب عن الأسئلة الآتية:



الشكل (٦–٥/ب).

١) قارن المدخلات المتناظرة في الشكلين ماذا تلاحظ؟

٢) قارن المدخل الأول بالمدخل الأخير في كل صف من صفوف المثلث في الشكل(٦–٥/ب)، ماذا تلاحظ؟

٣) قارن المدخل الثاني بالمدخل قبل الأخير في كل صف من صفوف الشكل(٦–٥/ ب)، ماذا تلاحظ؟

٤) عبر عن مدخلات كل صف من صفوف المثلث مستخدمًا رمز المجموع.

٥) اكتب نواتج جمع كل صف من صفوف المثلث على شكل متسلسلة مستخدمًا رمز المجموع.

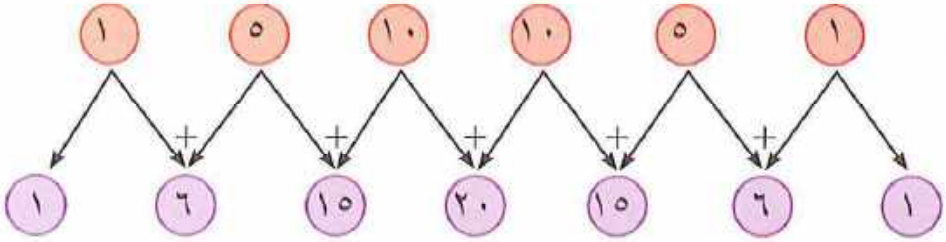
إذا أجبت إجابة صحيحة عن الأسئلة السابقة تكون قد حصلت على النتائج الآتية:

$$\binom{ن}{ن}=\binom{ن}{٠}=١ \qquad \binom{ن}{١}=\binom{ن}{ن-١}=ن \qquad \binom{ن}{ر}=\binom{ن}{ن-ر}$$

$$\sum_{ر=٠}^{ن}\binom{ن}{ن-ر}=٢^{ن}.$$

كما أنَّك ستجد أنَّ الحد العام للمتسلسلة هو: $٢^{ن}$.

من الجدير بالذكر أن مثلث باسكال يمتد إلى ما لانهاية، والشكل الآتي يوضّح كيفية إيجاد الصف السابع:



تدريب (٢)

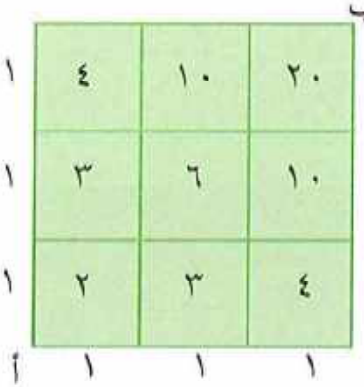
جد عناصر الصف الثامن

مثال (٥)

كم عدد الطرائق التي يمكن سلوكها للوصول من المدينة أ إلى المدينة ب من خلال الترتيب التالي للشوارع علمًا بأنك لا تستطيع التحرك إلا باتجاهي الشمال والشرق فقط؟

الحل

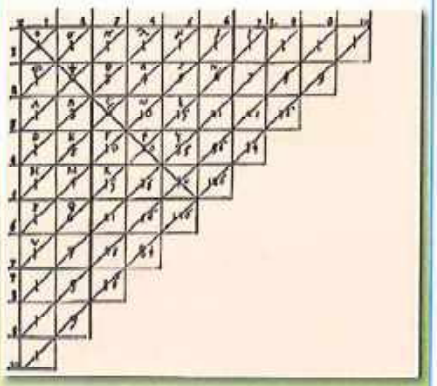
باستخدام مثلث باسكال يكون الحل كما في الشكل المجاور.



الشكل (٦-٦).

أضف لمعلوماتك

أول من حصل على مثلث باسكال هو عالم عربي مسلم اسمه محمد بن الحسن الكرخي، لكنه صمم المثلث مثلث قائم الزاوية وهذه صورة المثلث الذي صممه الكرخي. أما مثلث باسكال فهو المثلث نفسه لكنه متطابق الضلعين.



صورة لمثلث الكرخي.

مثال (٦)

ما عدد طرائق تكوين لجنة تضم ٥ رجال و ٦ سيدات من ضمن مجموعة أشخاص مكونة من ٨ رجال و ١٠ سيدات؟

الحل

لاحظ أنَّ التَرتيب غير مهم لذا يكون الحل كالآتي:

عدد الطرق $= \binom{٨}{٥} \times \binom{١٠}{٦} = ٥٦ \times ٢١٠ = ١١٧٦٠$

تدريب (٣)

جد عدد طرق اختيار لجنة خماسية من ٧ رجال و ٦ سيداتٍ ، في كلٍّ من الحالات الآتية:

١) تضم اللجنة ٣ سيدات و رجلين. ٢) تضم اللجنة ثلاثة رجال على الأقل.

٣) رئيس اللجنة ونائبه من الرجال و الباقي سيدات.

مثال (٧)

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد $\binom{٨}{٥}$

الحل

اضغط على [٨] ثم [shift] ثم [nCr] ثم [٥] ثم [=]

فيظهر على الشاشة [٥٦]

تدريب (٤)

استخدم الآلة الحاسبة في إيجاد:

١) $\binom{١٣}{٥}$ ٢) $\binom{١٢}{٧}$ ٣) $\binom{١١}{٤}$ ٤) $\binom{١٣}{٨}$

تمارين و مسائل

١) احسب قيمة كلٍّ مما يأتي:

أ) $\binom{١٣}{٥}$ ب) $\binom{٩}{١}$ جـ) $\binom{١٨}{١٨}$ د) $\binom{٩}{٦}$

٢) اثبت أن:

$$\binom{ن}{٢} + \binom{ن+١}{٢} = ن^{٢} \qquad ن \geq ٢$$

٣) احسب قيمة ن في الحالة الآتية:

أ) $\binom{ن}{٣} = ٥٦$ ب) $\binom{ن}{٢} = ٣٢٥$

٤) ما عدد المثلثات التي يمكن تشكيلها من بين ٦ نقاط لا تقع على استقامة واحدة؟

٥) امتحان مكون من ١٠ أسئلة مقسمة إلى قسمين كل قسم مكون من ٥ أسئلة، المطلوب من الطلبة إجابة ما مجموعهُ ٦ أسئلة من القسمين بحيث يجيب على الأقل على سؤالين من القسم الأول، وسؤالين من القسم الثاني على الأقل، بكم طريقة يمكن أنْ يجيب الطلبة عن الأسئلة؟

٦) حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

٧) صندوق يحتوي على ٥ كرات بيضاء و ٣ كرات سوداء وأربع كرات حمراء، بكم طريقة يمكن سحب ٣ كرات معًا من الصندوق إذا كان من بين الكرات المسحوبة كرة واحدة سوداء على الأقل؟

أسئلة الوحدة

١) احسب قيمة كلٌ مما يأتي:

أ) ل(٦ ، ٢) ب) $\binom{١٠}{٧}$ جـ) ٨!

٢) بسط المقادير الآتية:

أ) $\frac{(ن+١)! + ن! - (ن-١)!}{(ن-١)!}$ ب) $\frac{(ن+١)! - ن!}{ن!}$

٣) احسب قيمة ن في ما يأتي ، حيث ن عدد صحيح موجب:

أ) $\binom{ن}{٢} = ٧٨$ ب) $\frac{(ن+٣)!}{ن!} = ٣٣٦$

٤) احسب قيمة ر في ما يأتي:

$$\binom{١١}{ر^{٢}} = \binom{١١}{ر-١}$$

٥) اثبت كل مما يأتي:

أ) $\binom{ن}{ن-٢} + \binom{ن+١}{ن-١} = ن^{٢}$ $ن \geq ٢$

ب) ل(ن+١، ر) = ل(ن ، ر) + ر ل(ن، ر−١)

٦) أثبت أنّ :

$$\binom{ن+١}{٣} - \binom{ن-١}{٣} = (ن - ١)^{٢}$$

ثم احسب قيم ن في الحالة الآتية: $\binom{ن+١}{٣} - \binom{ن-١}{٣} = ٤٩$

٧) بكم طريقة يمكن إرسال ٤ رسائل عبر أربع صناديق بريد بحيث يوضع في كل صندوق رسالة؟

٨) في المضلع المنتظم القطعة الواصلة بين رأسين غير متجاورين تسمى قُطراً للشكل، ما عدد أقطار المضلع السباعي؟

٩) صندوق يحتوي على بطاقات مرقمة من ١−١١، إذا سُحبَت بطاقتان معًا عشوائيًا، ما عدد طرائق اختيار البطاقتين بحيث يكون مجموع العددين الظاهرين فرديًا؟