



إدارة المناهج والكتب المدرسية

# الرياضيات

الجزء الثاني

الصف التاسع

٩

قرّرت وزارة التربية والتعليم تدرّيس هذا الكتاب في مدارس المملكة الأردنية الهاشمية جميعها، بناءً على قرار مجلس التربية والتعليم رقم (٢٠١٥/٣١) تاريخ ٢٦/٣/٢٠١٥م، بدءاً من العام الدراسي ٢٠١٥م/٢٠١٦م.

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم  
عمّان - الأردن - ص. ب (١٩٣٠)

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية  
(٢٠١٥/٥/٢٠٨٢)  
ISBN: 978 - 9957 - 84 - 627 - 5

قام بتأليف الكتاب كل من:  
فدوى خليل القطاطشة، اسماعيل علي صالح، د. حسين عسكر الشرفات، رناد حسن بغداددي.  
وأشرف على تأليفه كل من:  
أ. د. وصفي أحمد الشطناوي، أ. د. أحمد عبدالله رحيل، أ. د. عبدالله محمد ربابعة، أ. د. ربي محمد مقدادي،  
عصام سليمان الشطناوي (مقرراً).

التحرير العلمي: عصام سليمان الشطناوي  
التحرير الفني: نرومين داود العزة  
التحرير اللغوي: حياة عبدالله عبيدات  
التصميم والرسم: هاني سلطي مقطش  
الإنتاج: علي محمد العويدات

دقق الطباعة: اسماعيل علي صالح  
راجعها: عصام سليمان الشطناوي

## قائمة المحتويات

| الصفحة | الموضوع                             |
|--------|-------------------------------------|
| ٥      | الوحدة الخامسة: الأسس النسبية       |
| ٨      | ١-٥ الأسس النسبية                   |
| ١٥     | ٢-٥ قوانين الأسس ١                  |
| ٢٠     | ٣-٥ قوانين الأسس ٢                  |
| ٢٤     | ٤-٥ المعادلات الأسية                |
| ٢٨     | مراجعة                              |
| ٣٠     | اختبار ذاتي                         |
| ٣٣     | الوحدة السادسة: الهندسة الإحداثية   |
| ٣٦     | ١-٦ المسافة بين نقطتين              |
| ٤٣     | ٢-٦ إحداثيا نقطة منتصف قطعة مستقيمة |
| ٤٨     | ٣-٦ معادلة الخط المستقيم            |
| ٥٥     | ٤-٦ معادلة الدائرة                  |
| ٦٢     | مراجعة                              |
| ٦٤     | اختبار ذاتي                         |
| ٦٧     | الوحدة السابعة: النسب المثلثية      |
| ٧٠     | ١-٧ جيب الزاوية الحادة              |
| ٧٦     | ٢-٧ جيب تمام الزاوية الحادة         |
| ٨٢     | ٣-٧ ظل الزاوية الحادة               |
| ٨٨     | ٤-٧ العلاقة بين النسب المثلثية      |
| ٩٥     | ٥-٧ حل المثلث قائم الزاوية          |
| ١٠٢    | ٦-٧ زوايا الارتفاع والانخفاض        |
| ١٠٨    | مراجعة                              |
| ١١٠    | اختبار ذاتي                         |
| ١١٣    | الوحدة الثامنة: الهندسة             |
| ١١٦    | ١-٦ التشابه                         |
| ١٢١    | ٢-٦ تشابه المثلثات                  |
| ١٢٧    | ٣-٦ التطابق                         |
| ١٣١    | ٤-٦ تطابق المثلثات                  |
| ١٣٨    | مراجعة                              |
| ١٤٠    | اختبار ذاتي                         |

١-٥ الأسس النسبية.

٢-٥ قوانين الأسس ١.

٣-٥ قوانين الأسس ٢.

٤-٥ المعادلات الأسية.

تُستخدم الأسس في كثير من المجالات، حيث تُساعد في تسهيل الحسابات المتعلقة بكثير من المواضيع، مثل علم الفلك، والأبعاد بين الكواكب والنجوم وبعدها عن الأرض، وعلم الأحياء الدقيقة، وحساب سرعات الضوء والنيازك وغيرها، وحساب حجم جسيمات صغيرة لا تُرى بالعين المجردة مثل: الذرات والإلكترونات.



## الوحدة الخامسة

### الأسس النسبية



يُتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- التعرف على القوانين المتعلقة بالأسس النسبية.
- تطبيق قوانين الأسس النسبية - على فرض أنها معروفة - في تبسيط التعابير العددية:
  - إذا كانت م، ن أعدادًا نسبية؛ فإن:
  - $s^m \times s^n = s^{m+n}$
  - $s^m \div s^n = s^{m-n}$
  - $(s \times v)^m = s^m \times v^m$
  - $(s \div v)^m = s^m \div v^m$
  - $(s^m)^n = s^{(m \times n)} = (s^n)^m$
  - $s^0 = 1$
  - $s^{-m} = 1 \div s^m$
- حلّ مسائل حياتية على الأسس النسبية.

19  
تهیئة

١ اكتب كلاً ممّا يأتي على صورة أسس:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \quad (f)$$

۳- × ۳- × ۳- (ب)

OXOXOXOX\ -X\ -X\ - (جـ)

$$\frac{\xi^-}{0} \times \frac{\xi^-}{0} \times \frac{\xi^-}{0} \times \frac{\xi^-}{0} \quad (2)$$

[illegible]

$$\frac{1-}{V} \times \frac{1-}{V} \times \frac{1-}{V} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \quad (و)$$

٢ اكتب كلاً مما يأتي على شكل أس واحد ثم جد الناتج:

$$\gamma \gamma \times {}^0 \gamma (f$$

(ب)  ${}^4_7\text{Y} \times {}^4_6\text{Y}$

$$Y^{-1} \cdot X^Y \cdot (2)$$

$$\gamma(\cdot, \gamma \times \cdot, \gamma \circ) \quad (2)$$

$$\frac{1'(\lambda-)}{1'(\lambda-)} \quad (\text{هـ})$$

$$\frac{12q}{12p} (9)$$

$$\frac{\xi_0}{r_0} (j)$$

٣ عبّر بالصورة العلمية عن كلٍّ من الأعداد الآتية:

$\gamma, \dots, \gamma \quad (f)$

٦٩٥..... (ب)

(ج) ،،،،،،،،،،،،،،،،،

[illegible]

٤ اكتب العدد الذي يمثل كلاً مما يأتي:

أ)  $10 \times 9^4$

ب)  $10 \times 2,452^8$

ج)  $10 \times 5^6$

د)  $10 \times 1,9761^{13}$

هـ)  $10 \times 7 \frac{1}{2}^{\circ}$

و)  $10 \times 3 \frac{1}{4}^7$

٥ حلل الأعداد الآتية إلى عواملها الأولية، ثم اكتبها باستخدام الأسس:

٢٠٠ ، ٥٦ ، ١٩٦ ، ٣٤٣ ، ٧٢ ، ٥١٢

٦ حل المعادلات الآتية:

أ)  $243 = 3^{\circ}$

ب)  $1250 = 2^{\circ}$

صندوق خشب مكعب الشكل طول ضلعه  $\sqrt[3]{s}$  سم، يراؤ  
ملوئ بالتراب:



- (١) جِد حجم التراب.
- (٢) اكتب حجم التراب  
على صورة أسس.

## النتائج

- تتعرف الأسس النسبية.
- تحل مسائل حياتية على الأسس النسبية.

## تذكر

إذا كان  $s$ ،  $m \in s$ ،  $s$  صحفراً، فإن:

$$\frac{1}{s} = s^{-1}$$

$$s = s^{-(-1)}$$

## تعلم

- ط : مجموعة الأعداد الطبيعية.
- ص : مجموعة الأعداد الصحيحة.
- ح : مجموعة الأعداد الحقيقية.
- ن : مجموعة الأعداد النسبية.

مثال (١-٥):

جِد قيمة كل مما يأتي:

$$\begin{array}{lll} (١) \quad ٢٦ & (٢) \quad (٣-)^{\circ} & (٣) \quad ٥^{-٤} \\ (٤) \quad (٢-)^{-٣} & (٥) \quad (\frac{1}{٤})^2 & (٦) \quad (\frac{٢-}{٧})^3 \end{array}$$

## الحل:

$$(١) \quad ٢٦ = ٦ \times ٦ = ٣٦$$

$$(٢) \quad (٣-)^{\circ} = ٣- \times ٣- \times ٣- \times ٣- \times ٣- = ٢٤٣-$$



$$\frac{1}{625} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = {}^4\left(\frac{1}{5}\right) = ({}^4-5) \quad (3)$$

$$\frac{1-}{8} = \frac{1-}{2} \times \frac{1-}{2} \times \frac{1-}{2} = {}^3\left(\frac{1-}{2}\right) = {}^3-(2-) \quad (4)$$

$$\frac{1}{16} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = {}^2\left(\frac{1}{4}\right) \quad (5)$$

$$\frac{8-}{343} = \frac{2-}{7} \times \frac{2-}{7} \times \frac{2-}{7} = {}^3\left(\frac{2-}{7}\right) \quad (6)$$

### تدريب ١-٥

جد قيمة كل مما يأتي:

(أ)  $(3)^6$       (ب)  $(7)^{-4}$       (ج)  $\left(\frac{1}{5}\right)^7$

(د)  $\left(\frac{3-}{8}\right)^3$       (هـ)  $\left(\frac{2}{6}\right)^{-2}$       (و)  $\left(\frac{6-}{8}\right)^{-1}$

(ز)  $(2-)^{-4}$       (ح)  $(5-)^3$       (ط)  $(178)^{-1}$

### الأسس النسبية:

لمعرفة الأسس النسبية، إليك الآتي:

مربع العدد  $2^2 = 2 \times 2 = 4$  والجذر التربيعي للعدد  $4 = \sqrt{4} = 2$

وتكتب  $\sqrt{4}$  على صورة  $(4)^{\frac{1}{2}}$  وتسمى **أساً نسبياً**.

وكذلك

مكعب العدد  $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$  والجذر التكعيبي للعدد  $64 = \sqrt[3]{64} = 4$

وتكتب  $\sqrt[3]{64}$  على صورة  $(64)^{\frac{1}{3}}$

## الحل:

$$10^6 \times 7 = 7000000 \quad (1)$$

$$10^{12} \times 4,918 = 49180000000000 \quad (2)$$

$$10^{-10} \times 3 = \frac{3}{10^{10}} = \frac{3}{10000000000} = 0,0000000003 \quad (3)$$

$$\frac{120}{10^{14}} = \frac{120}{100000000000000} = 0,000000000000120 \quad (4)$$

$$10^{-14} \times 120 =$$

$$10^{-12} \times 1,20 = 10^{-10} \times 1,20 =$$

## تدريب ٤-٥

عبّر بالصورة العلمية عن كل من الأعداد الآتية:

$$9000000000000000000 \quad (ب) \quad 0,000000000346 \quad (أ)$$

$$0,00000000000000000002 \quad (د) \quad 58170000000000000000 \quad (ج)$$

## قاعدة (١)

عند كتابة العدد بالصورة العلمية فإنه يُكتب على صورة  $10^N \times A$  حيث  $A \in [1, 10)$ ،  $N \in \mathbb{Z}$  ص:  
(١) عند إزاحة الفاصلة العشرية إلى اليسار نضرب في  $10^N$ ، حيث  $N$  عدد المنازل التي تتحركها الفاصلة العشرية.

(٢) عند إزاحة الفاصلة العشرية إلى اليمين نضرب في  $10^{-N}$ ، حيث  $N$  عدد المنازل التي تتحركها الفاصلة العشرية.

## مثال (٥-٥)

اكتب الأعداد الآتية دون استخدام الصورة العلمية:

$$10^{16} \times 8 \quad (٢)$$

$$10^{-7} \times 4,5 \quad (١)$$

$$10^{-10} \times 6 \quad (٤)$$

$$10^9 \times 9,237 \quad (٣)$$

$$\frac{1}{625} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = {}^4\left(\frac{1}{5}\right) = ({}^4-5) \quad (3)$$

$$\frac{1-}{8} = \frac{1-}{2} \times \frac{1-}{2} \times \frac{1-}{2} = {}^3\left(\frac{1-}{2}\right) = {}^3-(2-) \quad (4)$$

$$\frac{1}{16} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = {}^2\left(\frac{1}{4}\right) \quad (5)$$

$$\frac{8-}{343} = \frac{2-}{7} \times \frac{2-}{7} \times \frac{2-}{7} = {}^3\left(\frac{2-}{7}\right) \quad (6)$$

### تدريب ١-٥

جد قيمة كل مما يأتي:

(أ)  ${}^6(3)$  (ب)  ${}^4-(7)$  (ج)  ${}^7\left(\frac{1}{5}\right)$

(د)  ${}^3\left(\frac{3-}{8}\right)$  (هـ)  ${}^2-\left(\frac{2}{6}\right)$  (و)  ${}^1-\left(\frac{6-}{8}\right)$

(ز)  ${}^4-(2-)$  (ح)  ${}^3(5-)$  (ط)  ${}^1(178)$

### الأسس النسبية:

لمعرفة الأسس النسبية، إليك الآتي:

مربع العدد  $2 = 2^2 = 2 \times 2 = 4$  والجذر التربيعي للعدد  $4 = \sqrt{4} = 2$

وتكتب  $\sqrt{4}$  على صورة  ${}^{\frac{1}{2}}(4)$  وتسمى **أساً نسبياً**.

وكذلك

مكعب العدد  $4 = 4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$  والجذر التكعيبي للعدد  $64 = \sqrt[3]{64} = 4$

وتكتب  $\sqrt[3]{64}$  على صورة  ${}^{\frac{1}{3}}(64)$

## قاعدة (١)

(١) إذا كانت  $n$  عددًا زوجيًا موجبًا، وكانت  $s$  عددًا حقيقيًا موجبًا، فإن:  $\sqrt[n]{s} = \overline{s}^{\frac{1}{n}}$

(٢) إذا كانت  $n$  عددًا فرديًا موجبًا، وكانت  $s$  عددًا حقيقيًا، فإن:  $\sqrt[n]{s} = \overline{s}^{\frac{1}{n}}$

**سؤال:** لماذا يُشترط أن يكون  $s$  عددًا موجبًا إذا كان  $n$  عددًا زوجيًا؟

## مثال (٥-٢)

اكتب كلاً مما يأتي على صورة أسس نسبية، ثم جد قيمة كل منها:

$$(١) \sqrt[3]{144} \quad (٢) \sqrt[3]{125} \quad (٣) \sqrt[3]{\frac{4}{16}} \quad (٤) \sqrt[3]{\frac{1-}{27}}$$

**الحل:**

$$(١) 12 = \sqrt[3]{144} = \overline{144}^{\frac{1}{3}} \quad (٢) 5 = \sqrt[3]{125} = \overline{125}^{\frac{1}{3}}$$

$$(٣) \frac{2}{4} = \sqrt[3]{\left(\frac{4}{16}\right)} = \overline{\left(\frac{4}{16}\right)}^{\frac{1}{3}} \quad (٤) \frac{1-}{3} = \sqrt[3]{\left(\frac{1-}{27}\right)} = \overline{\left(\frac{1-}{27}\right)}^{\frac{1}{3}}$$

## تدريب ٥-٢

اكتب كلاً مما يأتي على صورة أسس نسبية ثم جد قيمة كل منها:

$$(أ) \sqrt[3]{81} \quad (ب) \sqrt[3]{216-} \quad (ج) \sqrt[3]{512} \quad (د) \sqrt[3]{\frac{36}{100}} \quad (هـ) \sqrt[3]{\frac{64}{1000}} \quad (و) \sqrt[3]{\frac{27-}{1331}}$$

## تعلم

نستخدم طريقة التحليل إلى العوامل لحساب قيم بعض الأسس النسبية المختلفة.





## الحل:

$${}^6 10 \times 7 = 7000000 \quad (1)$$

$${}^{12} 10 \times 4,918 = 49180000000 \quad (2)$$

$${}^{10-} 10 \times 3 = \frac{3}{10} = \frac{3}{10000000000} = 0,0000000003 \quad (3)$$

$$\frac{120}{10} = \frac{120}{10000000000} = 0,000000000120 \quad (4)$$

$${}^{14-} 10 \times 120 =$$

$${}^{12-} 10 \times 1,20 = {}^2 10 \times {}^{14-} 10 \times 1,20 =$$

## تدريب ٤-٥

عبّر بالصورة العلمية عن كلٍّ من الأعداد الآتية:

$$900000000000 \quad (ب) \quad 0,000000000346 \quad (أ)$$

$$0,00000000000000000002 \quad (د) \quad 58170000000000000000 \quad (ج)$$

## قاعدة (١)

عند كتابة العدد بالصورة العلمية فإنه يُكتب على صورة  ${}^n 10 \times A$  حيث  $A \in [1, 10)$ ،  $n \in \mathbb{Z}$  ص:  
(١) عند إزاحة الفاصلة العشرية إلى اليسار نضرب في  ${}^n 10$ ، حيث  $n$  عدد المنازل التي تتحركها الفاصلة العشرية.

(٢) عند إزاحة الفاصلة العشرية إلى اليمين نضرب في  ${}^{-n} 10$ ، حيث  $n$  عدد المنازل التي تتحركها الفاصلة العشرية.

## مثال (٥-٥)

اكتب الأعداد الآتية دون استخدام الصورة العلمية:

$${}^{16} 10 \times 8 \quad (٢)$$

$${}^7- 10 \times 4,5 \quad (١)$$

$${}^{10-} 10 \times 6 \quad (٤)$$

$${}^9 10 \times 9,237 \quad (٣)$$



## تعمارين و مسائل

(١) عبّر بالصورة العلمية عن كلٍّ من الأعداد الآتية:

١٨٦ (ب) ..... ٩ (ا) .....

١٦٢..... (د) ،.....٧- (ج)

۳۲۰۰۰، ۰۰۴۵ - (و) ۱۵۴، ۶۳ (هـ)

(٢) اكتب الأعداد الآتية دون استخدام الصورة العلمية:

$$A^{-1} \cdot X^2 \quad (b) \quad 0 \cdot X^{39} \quad (f)$$

$^{10}1. \times 187.9$  (د)  $^81. \times 720$  (ج)

(و)  $111.0 \times 139,707 -$       (هـ)  $171.0 \times 54,82$

(۳) جَدُّ قِيَمَةٍ كُلُّ مِمَّا يَأْتِي:

$$\text{ج) } \gamma(4) \quad \text{ب) } \left( \frac{1}{0} \right)^{\circ-} \quad \text{ا) } \left( \frac{2-}{3} \right)^{\xi}$$

$$^{\wedge} \gamma (9) \quad \gamma - \left( \frac{\gamma}{9} \right) (10) \quad \gamma (7-) (11)$$

$$\frac{1}{4}(207) \text{ (ج)} \quad \frac{1}{5}\left(\frac{1}{33}\right) \text{ (و)} \quad \frac{1}{7}(792) \text{ (هـ)}$$

(٤) أرادت ولأء ملء صندوق زجاجي مكعب الشكل برمل ملون؁ فإذا كان حجم الرمل

الملون = ٨٠٠٠ سم<sup>٣</sup>، فكم طولُ حرفِ الصندوقِ؟

# قوانين الأسس (١)

٢ - ٥

حديقتان مربعتا الشكل، طول ضلع الأولى (س) م، وطول ضلع الثانية (ص) م، اكتب على صورة أسس كلاً من:

(١) حاصل ضرب مساحتهما.

(٢) ناتج قسمة مساحتهما.

هل يمكن كتابة:

(١) ناتج جمع مساحتهما على صورة أسس؟

(٢) ناتج طرح مساحتهما على صورة أسس؟

النتائج

• تعرّف قوانين

الأسس النسبية.

• تحلّ مسائل حياتية

باستعمال قوانين

الأسس النسبية.

مثال (٥-٦):

جدّ قيمة كلٍّ مما يأتي:

$$(٣) \quad ٢^٣ \times ٢^٤$$

$$(٢) \quad ٢^٣$$

$$(١) \quad ٢^٤$$

$$(٦) \quad ٢^{٣-٤}$$

$$(٥) \quad \frac{٢^٤}{٢^٣}$$

$$(٤) \quad ٢^٧$$

الحل:

$$(٢) \quad ٢^٣ \times ٢^٤ = ٢^٧ = ١٢٨$$

$$(١) \quad ٢^٤ = ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ = ١٦$$

$$(٤) \quad ٢^{٣+٤} = ٢^٧ = ١٢٨$$

$$(٣) \quad ٢^٣ \times ٢^٤ = ٨ \times ١٦ = ١٢٨$$

$$(٦) \quad ٢^{٣-٤} = ٢^{-١} = \frac{١}{٢}$$

$$(٥) \quad \frac{٢^٤}{٢^٣} = \frac{١٦}{٨} = ٢$$

مثال (٥-٧):

جدّ قيمة كلٍّ مما يأتي:

$$(٤) \quad ٢^{٣ \times ٢}$$

$$(٣) \quad ٢^{(٢ \times ٢)}$$

$$(٢) \quad ٢^{(٢^٢)}$$

$$(١) \quad ٢^٣$$

الحل:

$$(٢) \quad ٢^{(٢^٢)} = ٢^٤ = ١٦ = ٨ \times ٨$$

$$(١) \quad ٢^٣ = ٨$$

$$(٤) \quad ٢^{٣ \times ٢} = ٢^٦ = ٦٤ = ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢$$

$$(٣) \quad ٢^{(٢^٢)} = ٢^٤ = ١٦ = ٤ \times ٤ \times ٤ \times ٤$$

ماذا تلاحظ؟



## قاعدة (١)

إذا كان  $s$  عددًا حقيقيًا، وكان  $m, n$  عددين نسبيين، فإن:

$$(1) s^m \times s^n = s^{m+n}$$

$$(2) s^m = \frac{s^m}{s^0}, s \neq 0 \text{ صفرًا}$$

$$(3) (s^m)^n = s^{(m \times n)} = s^{n \times m}$$

مثال (٥-٨):

جد قيمة كل مما يأتي:

$$(1) 9 \times \frac{1}{4} (81) \quad (2) \left( \frac{243}{32} \right)^{\frac{1}{5}} \quad (3) \sqrt[2]{(82)} \quad (4) \frac{625}{125}$$

الحل:

$$(1) 27 = 3^3 = 3^{2+1} = 3^2 \times 3^1 = 3^2 \times \frac{1}{4} \times 4^3 = 3^2 \times \frac{1}{4} (4^3) = 9 \times \frac{1}{4} (81) \quad (1)$$

$$\frac{3}{2} = \frac{1(3)}{12} = \frac{\frac{1}{5} \times 60 (3)}{\frac{1}{5} \times 60 (2)} = \frac{\frac{1}{5} (60 \times 3)}{\frac{1}{5} (60 \times 2)} = \frac{\frac{1}{5} (243)}{\frac{1}{5} (32)} = \frac{1}{5} \left( \frac{243}{32} \right) \quad (2)$$

$$82 = \frac{1}{2} (164) = \sqrt[2]{(82)} \quad (3)$$

$$5 = 15 = 3-4 \quad 5 = \frac{5(5)}{1(5)} = \frac{5 \times 5 \times 5 \times 5}{5 \times 5 \times 5} = \frac{625}{125} \quad (4)$$

## تدريب (٥-٦)

جد قيمة كل مما يأتي:

$$(ب) \frac{1}{7} (128)$$

$$(أ) 36 \times \frac{1}{3} (216)$$

$$(د) \sqrt[7]{729}$$

$$(ج) \frac{1}{4} \left( \frac{16}{81} \right)$$

مثال (٥-٩):

جد قيمة كل مما يأتي:

$$(١) \quad {}^{\circ}٢ \times {}^{\circ}٣ \quad (٢) \quad {}^{\circ}(٢ \times ٣) \quad (٣) \quad {}^٣٤ \div {}^٣٨ \quad (٤) \quad {}^٣\left(\frac{٨}{٤}\right)$$

$$(٥) \quad {}^{\circ}٩ \div {}^{\circ}٩ \quad (٦) \quad {}^{\circ}\left(\frac{٩}{٩}\right) \quad (٧) \quad \frac{١}{٤-٧}$$

الحل

$$(١) \quad (٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢) \times (٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣) = {}^{\circ}٢ \times {}^{\circ}٣$$

$$(٢ \times ٣) \times (٢ \times ٣) \times (٢ \times ٣) \times (٢ \times ٣) \times (٢ \times ٣) =$$

$$٧٧٧٦ = {}^{\circ}٦ = {}^{\circ}(٢ \times ٣) =$$

$$(٢) \quad ٧٧٧٦ = {}^{\circ}٦ = {}^{\circ}(٢ \times ٣)$$

$$(٣) \quad ٨ = {}^٣٢ = {}^٣\left(\frac{٨}{٤}\right) = \frac{٨}{٤} \times \frac{٨}{٤} \times \frac{٨}{٤} = \frac{٨ \times ٨ \times ٨}{٤ \times ٤ \times ٤} = {}^٣٤ \div {}^٣٨$$

$$(٤) \quad ٨ = {}^٣٢ = {}^٣\left(\frac{٨}{٤}\right)$$

$$(٥) \quad ١ = \frac{{}^{\circ}٩}{{}^{\circ}٩} = {}^{\circ}٩ \div {}^{\circ}٩$$

$$(٦) \quad ١ = {}^{\circ}١ = {}^{\circ}\left(\frac{٩}{٩}\right)$$

$$(٧) \quad ٢٤٠١ = ٧ \times ٧ \times ٧ \times ٧ = {}^٤٧ = \frac{١}{٤-٧}$$

ماذا تلاحظ؟

● فكر

برر ما يأتي:

■ س<sup>-</sup> =  $\frac{١}{س}$  ، س  $\neq$  صفرًا

■ س<sup>٠</sup> = ١ ، س  $\neq$  صفرًا

## قاعدة (٢)

إذا كان  $s$ ،  $v$  عددين حقيقيين، حيث  $s \neq 0$ ،  $v \neq 0$ ، وكان  $(m)$  عددًا نسبيًا، على فرض أن  $s^m$ ،  $v^m$  معرفان، فإن:

$$(1) \quad s^m \times v^m = (s \times v)^m \quad (2) \quad \left(\frac{s}{v}\right)^m = \frac{s^m}{v^m}$$

$$(3) \quad s^{-1} = \frac{1}{s} \quad (4) \quad \frac{1}{s^m} = s^{-m}$$

## فكر

إذا كان  $s \neq 0$  صفرًا،  $m$  عددًا نسبيًا، هل يمكن أن يكون  $s^m$  غير معرف؟ برّر إجابتك.

## تدريب ٧-٥

جد قيمة كل مما يأتي:

$$(أ) \quad {}^2(15) \quad (ب) \quad {}^{23} \times {}^{28} \\ (ج) \quad 49 \times {}^2\left(\frac{1}{7}\right) \quad (د) \quad \frac{4}{15} \times {}^2\left(\frac{2}{5}\right)$$

## مثال (٥-١٠):

جد قيمة كل مما يأتي:

$$(1) \quad {}^9(\sqrt[3]{3} \times \sqrt[2]{2}) \quad (2) \quad \frac{{}^{10}(1-\sqrt{5})}{{}^{13}(1-\sqrt{5})}$$

## الحل:

$$(1) \quad \sqrt[3]{({}^9(3))} \times \sqrt[2]{({}^9(2))} = \sqrt[3]{({}^9(3))} \times \sqrt[2]{({}^9(2))} = {}^9(\sqrt[3]{3} \times \sqrt[2]{2})$$

$$216 = 27 \times 8 = {}^{23} \times {}^{22} =$$

$$(2) \quad {}^2(1-\sqrt{5}) = {}^{13-10}(1-\sqrt{5}) = \frac{{}^{10}(1-\sqrt{5})}{{}^{13}(1-\sqrt{5})}$$

$$\sqrt{5}2 - 6 = 1 + \sqrt{5}2 - 5 =$$



## تمارين ومسائل

(١) جد قيمة كل مما يأتي:

(أ)  $\frac{420 \times 2^{-5}}{72}$

(ب)  $\frac{1}{3}(64) \times \frac{1}{2}(64)$

(ج)  $\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{816}}$

(د)  $\frac{3(24)}{2^{-9} \times 5^6}$

(هـ)  $\frac{\sqrt{126}}{\sqrt{6}}$

(و)  $\sqrt{196} \times \sqrt{900}$

(٢) جد قيمة كل مما يأتي بأبسط صورة:

(أ)  $3^{-(\sqrt{2})^3}$

(ب)  $\frac{0^{(\sqrt{2}-\sqrt{3})}}{0^{-(\sqrt{2}-\sqrt{3})}}$

(ج)  $2^{\left(\frac{1}{3-(\sqrt{6})}\right)}$

(د)  $12^{\left(\frac{\sqrt{3}^3 \times \sqrt{2}}{5\sqrt{3}}\right)}$

(هـ)  $1^{(1+\sqrt{2})} 1^{(1-\sqrt{2})}$

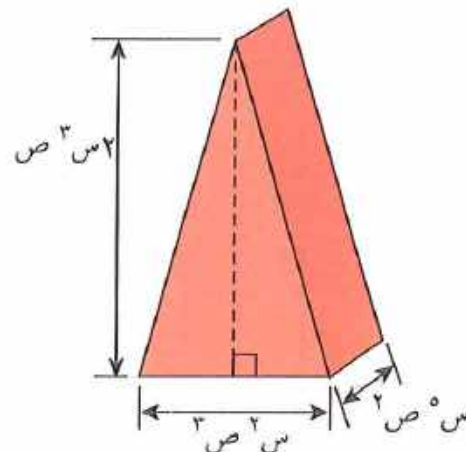
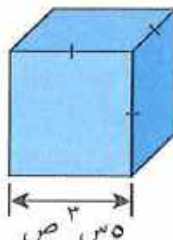
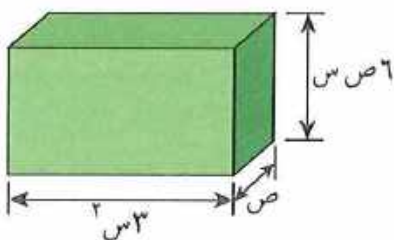
(و)  $\frac{1}{4} - \left(\frac{256}{625}\right)$

(٣) برهن أنه إذا كان أ، ب عددين حقيقيين بحيث أ، ب  $\neq$  صفراً، وكان ن عدداً نسبياً على فرض أن  $\left(\frac{أ}{ب}\right)^ن$  معرف، فإن:

$$\left(\frac{ب}{أ}\right)^{-ن} = \left(\frac{أ}{ب}\right)^ن$$

(٤) حل المسألة الواردة في بداية الدرس.

(٥) إذا كانت أطوال أحرف كل من الأشكال الآتية بالسنتيمترات، فعبّر عن حجم كل منها مستخدماً الأسس:



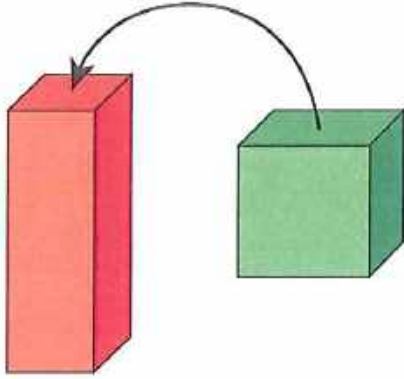
## قوانين الأسس (٢)

٣-٥

النتائج:

- تتعرف قوانين الأسس النسبية

خزان ماء على شكل مكعب طول حرفه  $(\frac{1}{4})$  م، مملوء بالماء، فَرَّغ الماء في خزان آخر على شكل متوازي مستطيلات له السعة نفسها، قاعدته مربعة الشكل وارتفاعه (١) م، ما طول ضلع قاعدته؟



### نشاط (١-١)

جد قيمة كل مما يأتي:

$$^2(\sqrt[3]{8}) \quad (٢)$$

$$^2\sqrt[3]{8} \quad (١)$$

$$^3(\sqrt[4]{64}) \quad (٤)$$

$$^3\sqrt[4]{64} \quad (٣)$$

$$^{\frac{1}{2}}(\sqrt[3]{16}) \quad (٦)$$

$$^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{16} \quad (٥)$$

ماذا تلاحظ؟

لا بد أنك لاحظت أنه:

### قاعدة (١)

إذا كانت  $m \in \mathbb{P}$ ،  $n$  عددًا نسبيًا،  $s \in \mathbb{H}^+$ ، فإن:

$$\sqrt[m]{s^n} = (\sqrt[m]{s})^n = (s^{\frac{1}{m}})^n = s^{\frac{n}{m}}$$



مثال (٥-١١):

جد قيمة كل مما يأتي:

$$(1) \sqrt[2]{(216)} \sqrt[3]{8} \quad (2) \sqrt[10]{8} \quad (3) \sqrt[3]{\left(\frac{1296}{81}\right)} \sqrt[4]{8}$$

الحل:

كتابة العدد على شكل أسس

$$(1) \sqrt[2]{(216)} \sqrt[3]{8} = \sqrt[2]{(2 \cdot 3^3)} \sqrt[3]{2^3} \quad (1)$$

استخدام قوانين الأسس

$$36 = 2^1 = 2^{\left(\frac{2}{3} \cdot 3\right)} = 2^{\left(\sqrt[3]{3} \sqrt[3]{3}\right)} =$$

استخدام قوانين الأسس

$$64 = 2^6 = 2^{\frac{10}{5}} = \sqrt[10]{8} \quad (2)$$

تحويل الجذر إلى أس

$$\sqrt[3]{\left(\frac{1296}{81}\right)} \sqrt[4]{8} = \sqrt[3]{\left(\frac{2^6 \cdot 3^4}{3^4}\right)} \sqrt[4]{2^3} \quad (3)$$

كتابة العدد على شكل أسس

$$8 = 2^3 = 2^{\left(\frac{6}{2}\right)} = 2^{\frac{2}{4} \times 4} = \sqrt[4]{16}$$

واستخدام قوانين الأسس

مثال (٥-١٢):

جد قيمة كل مما يأتي:

$$(1) \sqrt[4]{(2)} \times \sqrt[3]{(2)} \quad (2) \frac{\sqrt[5]{(3)}}{\sqrt[6]{(3)}} \quad (3) \sqrt[8]{(5)} \times \sqrt[4]{(5)}$$

الحل:

الأساسات متساوية، نجمع الأسس

$$\sqrt[4]{(2)} \times \sqrt[3]{(2)} = 2^{\frac{1}{4} + \frac{1}{3}} = 2^{\frac{7}{12}} \quad (1)$$

الأساسات متساوية، نطرح الأسس

$$\sqrt[5]{(3)} = \sqrt[6]{(3)} = 3^{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{30}} \quad (2)$$

الأساسات متساوية، نجمع الأسس

$$\sqrt[4]{\left(\frac{1}{5}\right)} = \sqrt[4]{(5^{-1})} = 5^{-\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{(5)} \times \sqrt[4]{(5)} \quad (3)$$

الأسس

$$25 = 5^2 = 5^{\frac{4}{2}} = 5^{\frac{1}{2} \times 4} = \sqrt[4]{625}$$

ويمكنُ حلُّ مثال (١٢-٥) كالآتي:

$$\text{تحويلُ الجذرِ إلى أسٍّ نسبيٍّ ثمَّ نجمعُ} \quad \frac{7}{2} \sqrt{2} = \left(\frac{7}{2} + \frac{3}{2}\right) \sqrt{2} = \frac{7}{2} \sqrt{2} \times \frac{3}{2} \sqrt{2} = {}^4\sqrt{(2\sqrt{2})} \times {}^3\sqrt{(2\sqrt{2})} \quad (١)$$

$${}^3\sqrt{(2\sqrt{2})} = {}^3\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)} = {}^{3 \times \left(\frac{1}{2}\right)}\sqrt{2} =$$

$$\text{تحويلُ الجذرِ إلى أسٍّ نسبيٍّ ثمَّ نطرحُ} \quad \sqrt[3]{3} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{3} = \frac{7}{3} - \frac{7}{3} \sqrt[3]{3} = \frac{{}^7\sqrt{(3)}}{\frac{7}{3}\sqrt{(3)}} = \frac{{}^7\sqrt{(3\sqrt{3})}}{{}^6\sqrt{(3\sqrt{3})}} \quad (٢)$$

$$\frac{8}{2} + \frac{4}{2} - ٥ = \frac{8}{2} \sqrt[2]{٥} \times \frac{4}{2} \sqrt[2]{٥} = {}^8\sqrt{(٥\sqrt{٥})} \times {}^4\sqrt{(٥\sqrt{٥})} \quad (٣)$$

$$\sqrt[2]{٥} = \sqrt[2]{٥} = \frac{4}{2} \sqrt[2]{٥} =$$

#### ٨-٥ تدريب

جدِّ قيمة كلِّ مما يأتي:

$$(أ) \sqrt[3]{18} \times \sqrt[3]{8}$$

$$(ب) \sqrt[3]{\frac{343}{1331}}$$

$$(ج) \sqrt[3]{25} \times \sqrt[3]{40}$$

$$(د) \sqrt[3]{\frac{169}{196}}$$

#### ٩-٥ تدريب

جدِّ قيمة كلِّ مما يأتي بأبسط صورة:

$$(أ) \sqrt[3]{\frac{32}{243}} \times \sqrt[3]{\frac{729}{64}}$$

$$(ب) \sqrt[3]{\frac{24}{375}}$$

$$(ج) \left( \left( \frac{125}{40} \right) \sqrt[3]{8} \right)^4$$

$$(د) \sqrt[3]{64} \times \sqrt[3]{64}$$

## تمارين ومسائل

(١) أي العبارات الآتية صحيحة وأيها غير صحيحة؟ مع تصحيح الخطأ:

- (أ)  ${}^2_7 = {}^2_7 \div {}^0_7$  (ب)  ${}^8_6 = {}^2_6 \times {}^4_6$   
 (ج)  $ص^3 \div ص^3 = ٠$  ،  $ص \neq$  صفراً (د)  $١ = (٠^9) = (٠^9)$   
 (هـ)  $ع^6 \div ع^2 = ع^3$  ،  $ع \neq$  صفراً (و)  $٧ = ٧ \times ٨$

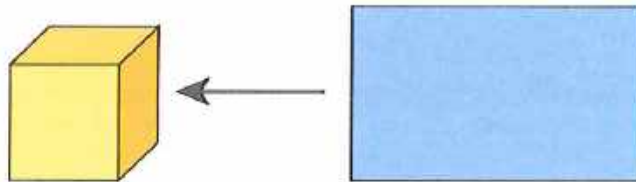
(٢) اكتب العبارات الآتية بأسس صحيحة موجبة:

- (أ)  $\sqrt[٩]{\frac{س}{س}}$  ،  $س \neq$  صفراً (ب)  $\sqrt[٣]{\frac{م}{٣-م}}$  ،  $م \neq$  صفراً  
 (ج)  $\sqrt[٥]{\frac{ص^٣}{ص^٨}}$  ،  $ص \neq$  صفراً (د)  $\sqrt[٧]{٧-س}$  ،  $س \neq$  صفراً  
 (هـ)  $\sqrt[٦]{٦ \times (٤-ن)}$  ،  $ن \neq$  صفراً (و)  $\sqrt[٦]{(٢-هـ)^4}$  ،  $هـ \neq$  صفراً

(٣) جذ قيمة كل مما يأتي بأبسط صورة:

- (أ)  $\sqrt[٣]{\frac{١٨٠ \times ٣(١٢)}{٣(٣ \times ٥)}}$  (ب)  $\sqrt[٤]{١٠-٢ \times \frac{٥(٤ \times ٧)}{٤٧}}$  (ج)  $\sqrt[٣]{\frac{٢٤ \times ٣٦}{٨٢ \times ٧(٣ \times ٢)}}$   
 (د)  $\sqrt[٨]{\frac{٨-٢ \times ١٩٣}{١١٣}}$  (هـ)  $\sqrt[٦]{٢-(٦٨)}$  (و)  $\sqrt[٣]{٣٣٧٥-}$

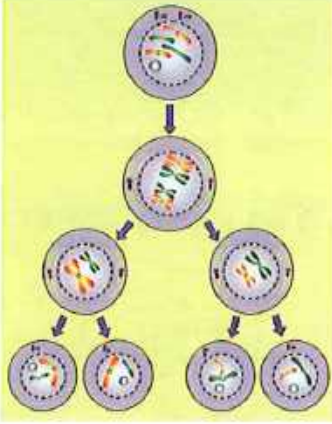
(٤) جذ طول حرف صندوق مكعب الشكل إذا استخدم في صنعه صفيحة معدنية مساحتها ١٥٠ سم<sup>٢</sup>.



النتائج:

- تُكوّن معادلات أسية.
- تحلّ مسائل وتطبيقات حياتية باستخدام الأسس.

في عملية تكاثر البكتيريا تنقسم الخلية الواحدة إلى خليتين، وتنقسم الخليتان إلى أربع خلايا وهكذا، فإذا كانت كل عملية انقسام تحتاج إلى دقيقة واحدة، وكان عدد البكتيريا الناتجة بعد (ن) من مرات الانقسام هو (١٢٨) خلية، جد قيمة (ن).



انقل الجدول الآتي إلى دفترك، ثم أكمل الفراغات الموجودة فيه:

| الانقسام        | عدد الخلايا الناتجة | كتابتها على صورة أس |
|-----------------|---------------------|---------------------|
| الأول           | ٢                   | $2^1 = 2$           |
| الثاني          | ٤                   | $2^2 = 4$           |
| الثالث          | .....               | .....               |
| الرابع          | .....               | .....               |
| الخامس          | .....               | .....               |
| بعد ن من المرات | ١٢٨                 | .....               |

يلاحظ في الجدول المذكور أن  $2^N = 128$  وهذا النوع من العبارات الرياضية يُسمى **معادلة أسية** لأن المتغير فيها أس.

**المعادلة الأسية:** هي عبارة رياضية يكون الأساس فيها عددًا حقيقيًا والأس متغيرًا، وتحتوي على إشارة المساواة (=).

ويمكن كتابتها على الصورة  $a^x = b$ ، حيث  $a, b \in \mathbb{R}$ .

• **فكر**

- هل يمكن أن يكون ب عددًا سالبًا؟
- هل يمكن أن يكون أ صفرًا أو ١؟



ومن الأمثلة على المعادلات الأسية:

$$\frac{1}{125} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{5}\right)}, \quad 729 = 9^{-4}, \quad 27 = 3^{\sqrt{3}}, \quad 32 = 1^{-3}$$

وحتى نستطيع حلها يجب كتابة الطرفين بصورة أسية تتساوى فيها الأساسات، وذلك بتحليل الأعداد إلى العوامل الأولية واستخدام قوانين الأسس. وبالتالي تكون الأسس متساوية،

أي أن:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 128 = 2^7$$

الأساسات متساوية (2)

$$2^7 = 2^7$$

الأسس تتساوى

$$7 = 7$$

|    |     |
|----|-----|
| 2  | 128 |
| 2  | 64  |
| 2  | 32  |
| 2  | 16  |
| 2  | 8   |
| 2  | 4   |
| 2  | 2   |
| قف | 1   |

### قاعدة (1)

إذا كان عددًا حقيقيًا موجبًا،  $a \neq 1$ ، وكان  $a^x = a^y$ ، فإن  $x = y$

### تدريب ١٠-٥

حل المعادلات الأسية الآتية:

$$81 = 3^x \quad (أ)$$

$$16 = 2^{x-1} \quad (ب)$$

$$\frac{206}{2401} = \left(\frac{4}{7}\right)^x \quad (ج)$$

$$\frac{1}{512} = \left(\frac{1}{8}\right)^{-x} \quad (د)$$

مثال (١٣-٥):

حل المعادلات الأسية الآتية:

$$82 = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad (١)$$

$$0.001 = \left(\frac{1}{10}\right)^x \quad (٢)$$

$$243 = 3 \times 9^x \quad (٣)$$

$$\text{الحل: (١)} \quad 82 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$82 = 2^{-x}$$

$$8 = -x$$

$$x = -8$$

استخدام قوانين الأسس

الأساسات متساوية في الطرفين، تتساوى الأسس



$$(٢) \quad ٠,٠٠١ = {}^٤\left(\frac{١}{١٠}\right)$$

$$\text{تحويل الطرف الأيسر إلى أسس} \quad {}^٣\left(\frac{١}{١٠}\right) = \left(\frac{١}{١٠٠٠}\right) = {}^٤\left(\frac{١}{١٠}\right)$$

$$\text{ويكون} \quad ٣ = ٤$$

$$(٣) \quad ٢٤٣ = ٣^٥ \times ٣$$

$$٥٣ = ٣^٢ \times ٣$$

$$٥٣ = ٣^٢ + ١$$

$$\text{ويكون} \quad ٥ = ٢ + ١$$

$$٤ = ٢$$

$$٢ = ٢$$

تحويل الطرفين إلى أسس

استخدام قوانين الأسس

تساوي الأسس

طرح العدد (١) من الطرفين

قسمة الطرفين على العدد (٢)

#### تدريب ١١-٥

حل المعادلات الآتية:

$$(ب) \quad ١ = ٩^٥$$

$$(أ) \quad (٠,٣) = {}^٣(٠,٨١)$$

$$(د) \quad {}^٦٤ = ٨^٥ \times \left(\frac{١}{٨}\right)$$

$$(ج) \quad {}^٦١١ \times {}^٢١١ = {}^٢١١$$

#### فكر

إذا كانت  $١ = ٣^٢$ ، أجب عما يأتي:

■ اذكر بعض الحلول الممكنة لهذه المعادلة.

■ هل يمكن حصر عدد الحلول الممكنة إذا كان الأساس ١؟

■ إذا كانت المعادلة الأسية أساسها صفر، فهل يمكن حصر عدد الحلول الممكنة لها؟

للاطلاع على المزيد من المواد التعليمية:

بإمكانك الرجوع إلى المناهج المحوسبة والاطلاع على منظومة التعليم الإلكتروني (EduWave)

على الوسائط الإلكترونية المتعلقة بالمعادلات الأسية.

## تمارين ومسابقات

(١) أحضر ورقة مربعة الشكل، واطوِها من المنتصف مراتٍ عدة، ثم أكمل الفراغات في الجدول الآتي بعد أن تنقله إلى دفترِكَ:

| عدد مرات الطي            | عدد الأجزاء الناتجة | الصورة الأسية لعدد الأجزاء الناتجة |
|--------------------------|---------------------|------------------------------------|
| ٠                        | ١                   | $١ = ٢^٠$                          |
| ١                        | ٢                   | $٢ = ٢^١$                          |
| <input type="checkbox"/> | ٤                   | $٤ = \square ٢$                    |
| <input type="checkbox"/> | ٨                   | $٨ = \square ٢$                    |
| <input type="checkbox"/> | ١٦                  | $١٦ = \square ٢$                   |

(٢) حلّ المعادلات الأسية الآتية:

(أ)  $١٦ = ٢^٤$  (ب)  $(٠,٠١) = ١٠^٧$  (ج)  $١٠٢٤ = ٢^٨$  (د)  $\left(\frac{١}{٤}\right)^{١٠} = \left(\frac{٥}{١٠}\right)^٧$  (هـ)  $\left(\frac{١}{٣}\right)^٧ = ٢٧ \times \left(\frac{١}{٣}\right)^٧$  (و)  $\left(\frac{١}{٣}\right)^٧ = ٢٧ \times \left(\frac{١}{٣}\right)^٧$

(٣) حصل مخترع لعبة الشطرنج على مكافأة من الملك وهي حبوب من القمح: حبة قمح عن المربع الأول في لوحة الشطرنج، حبتان عن المربع الثاني، أربع حبات عن المربع الثالث وهكذا، جد الآتي:

(أ) ما عدد حبات القمح التي حصل عليها في المربع التاسع؟  
 (ب) إذا كان عدد حبات القمح التي حصل عليها في المربع س هو ٢٠٤٨، جد قيمة س.  
 (ج) جد عدد حبات القمح التي حصل عليها في المربع الحادي والعشرين باستخدام الآلة الحاسبة.

(د) جد مجموع حبات القمح التي حصل عليها من المربعات الثمانية الأولى.

## مراجعة

(١) يتكوّن هذا السؤال من خمس فقرات من نوع الاختيار من متعدد، ولكل منها أربعة بدائل واحد فقط منها صحيح، اختر رمز البديل الصحيح لكل منها:

(١) قيمة  $s$  التي تحقق المعادلة  $3^{-s} = 27$  تساوي:

- (أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ١ (د) ٢

(٢) العدد  $7 \times 10^{-1} + 3 \times 10 + 4 \times 10^2$  هو تحليل للعدد:

- (أ) ٤٣٠,٧ (ب) ٤٣,٧ (ج) ٤٣,٠٧ (د) ٤٣٧

(٣) تحليل المقدار  $(s^2 - 5)$  هو:

- (أ)  $(s-5)(s+5)$  (ب)  $(s-5)(s-5)$

- (ج)  $(s+5)(s+5)$  (د)  $(s-5)(s+5)$

(٤) قيمة المقدار  $\sqrt[3]{\frac{125s^3}{3s^3}}$  عندما  $s = -1$ ،  $s = 3$ ، هو:

- (أ)  $\frac{5}{3}$  (ب)  $\frac{125}{27}$  (ج)  $\frac{5}{3}$  (د)  $\frac{125-}{27}$

(٥) إحدى العبارات الرياضية الآتية صحيحة:

- (أ)  $s^3 = s^2 \times s^6$  (ب)  $s^3 = s^2 + s^6$

- (ج)  $s^3 = s^2 \div s^6$  (د)  $s^6 = s^3 \times s^2$

(٢) اكتب كلاً من الأعداد الآتية بالصورة العلمية:

- (أ) ٣٥٠,١٢ (ب) ٧٠٠٠٠٠٠ (ج) ٤٨٩٠٠٠٠٠٠٠٠ (د) ٦٢,٠٠٣

(٣) حل المعادلات الآتية:

(أ)  $4^{-s} = 2^{s+3}$

(ب)  $1 = 2^s$

(ج)  $7^s = 49^{s-2}$

(د)  $400 = \sqrt[3]{\frac{125 \times 3}{5 \times 3}}$

(٤) جد قيمة كلٍّ من المقادير الآتية وفق قيمة المتغيرات المعطاة إزاء كلٍّ منها:

(أ)  $s^3ص^2 - ٧س^٢ص^٥$  عندما  $s = ٢$ ،  $ص = ١$

(ب)  $٤٢ص^٤ + ٤ص \times ١٦ع^٥$  عندما  $ع = ١$ ،  $ص = ٠$

(ج)  $\sqrt{s^٢ع^٢} + \sqrt{s^٣ع^٣}$  عندما  $s = ٤$ ،  $ع = ٣$

(٥) أعد كتابة المقادير الأسية الآتية دون استخدام خط الكسرة:

(أ)  $\frac{s^٥ص^٦}{s^{-٤}ص^{-٣}}$ ،  $s \neq \text{صفراً}$ ،  $ص \neq \text{صفراً}$

(ب)  $\frac{٣٩ع^٢س^{-٥}}{١٣س^٢ع^{-١}}$ ،  $s \neq \text{صفراً}$ ،  $ع \neq \text{صفراً}$

(ج)  $\frac{٧}{١٠-م}$ ،  $م \neq \text{صفراً}$

(د)  $\frac{٦صع^٥س^٣}{٢ص^{-٤}ع^{-٢}}$ ،  $ص \neq \text{صفراً}$ ،  $ع \neq \text{صفراً}$

## اختبار ذاتي

(١) ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (X) أمام العبارة غير الصحيحة فيما يأتي:

- (أ)  $ص^2 + ص^2 = ص^4$  (ب)  $(ص^3)^2 = ص^6$  (ج)  $ص^2 \times ص^3 \times ص^3 = ص^8$  (د)  $ص^7 = ص^4 - ص^{11}$  (هـ)  $(ص^2 م^4)^2 = ص^4 م^8$  (و)  $ص^3 = \sqrt[2]{\frac{1}{9}}$  (ز)  $\sqrt[2]{2} = \sqrt[2]{2} - \sqrt[2]{4}$  (ح)  $\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1}$

(٢) ضع العدد المناسب في □ حتى تصبح العبارة صحيحة:

- (أ)  $ص^{16} \times \square = \square = \square + ص^9$  ،  $ص \neq 0$  (ب)  $ص^6 \times \square = ص^{18}$  (ج)  $\square \times ص^2 = \square (ص \times ل)$  (د)  $\square م \div م^4 = م^{-7} = \square م^2$  ،  $م \neq 0$

(٣) اكتب المقادير الآتية بأبسط صورة:

- (أ)  $(ص^2 م^4 ب^3 ج^2)$  (ب)  $(ص^3 م^2 ل^4 ص^5 م^3)$  ،  $ص < صفر$  ،  $س < صفر$  (ج)  $\frac{ص^2 + ص^3}{ص^3}$  ،  $ص \neq 0$  (د)  $\frac{ل^3 - ل^2}{ل^4 - ل^3}$  ،  $ل \neq 0$  ،  $ل \neq 1$  (هـ)  $(ص^5 م^3 س^4) \div (ص^2 م^3 س^5)$  ،  $س \neq 0$  (و)  $\sqrt[3]{\frac{أ^6 ب^{10}}{ب^7 أ^{10}}}$  ،  $أ \neq 0$  ،  $ب \neq 0$

(٤) إذا كانت  $س = ٤$  ،  $ص = ٣$  ، جد قيمة كل مما يأتي:

- (أ)  $\sqrt[2]{\frac{ص^2 م^3}{ص^5 م^2}}$  (ب)  $\sqrt[3]{(ص^2 م^3 س^4)(ص^3 م^2 س^5)}$  (ج)  $\frac{(ص^3 - ص^2 س)}{(ص^3 - ص^2 س)}$  (د)  $\left(\frac{ص^3 - ص^2 س}{ص^2 س}\right) \times \left(\frac{ص^3 س^2}{ص^4 س}\right)$



(٥) حلّ المعادلات الآتية:

(أ)  $1331 = 11^3$

(ج)  $423 = \frac{18}{32}$

(هـ)  $7 = 1 + 3^4$

(ز)  $6 \times 12 = 2 - 6 \times 2$

(ب)  $256 = 8 \times 32$

(د)  $1 = 7 \times 20$

(و)  $1 - (10) = 1 + (1000)$

(ح)  $1 = 4 \times (8) + 1$

(٦) اكتب العبارات الآتية بأسس صحيحة موجبة:

(أ)  $\left(\frac{2}{8}\right)^3$  ،  $8 \neq 0$

(ب)  $0^-$  ،  $0 \neq 0$

(ج)  $(8^3)^3$  ،  $8 \neq 0$

(د)  $\frac{8^3 - 8^3}{8^3 - 8^3}$  ،  $8 \neq 0$  ،  $8 \neq 0$

(٧) خزان ماء على شكل متوازي مستطيلات، ارتفاعه (٥ س) م، قاعدته مربعة الشكل.

جدّ طول ضلع القاعدة إذا كانت سعة الخزان (٢٠ س) متر مكعب.

(٨) جدّ قيمة كل مما يأتي:

(أ)  $\left(\frac{2}{2}\right)^3$

(ب)  $\frac{1^2(2 - \sqrt{2})}{1^2(2 - \sqrt{2})}$

١-٦ المسافة بين نقطتين.

٢-٦ إحداثيا نقطة منتصف قطعة مستقيمة.

٣-٦ معادلة الخط المستقيم.

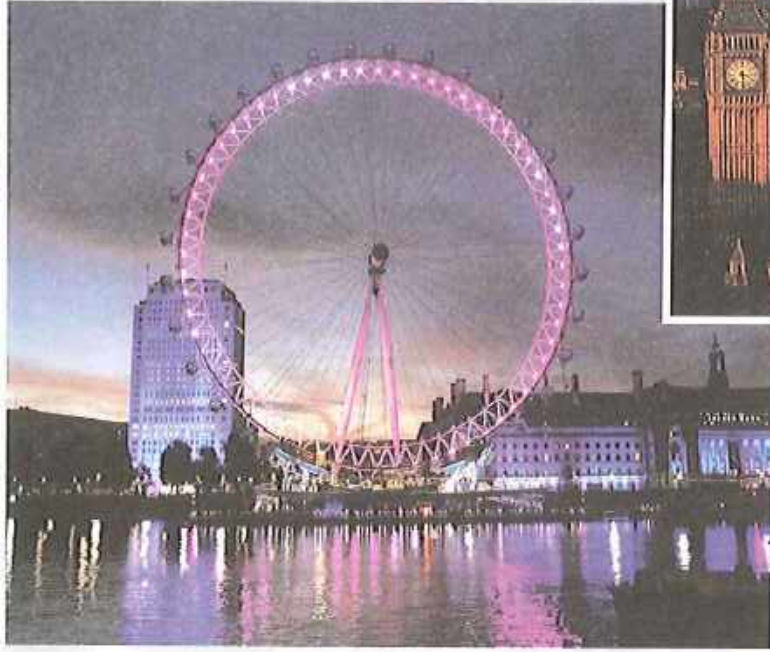
٤-٦ معادلة الدائرة.

تنبع أهمية الهندسة الإحداثية من أنها تربط بين مفاهيم الجبر ومفاهيم الهندسة، وقد اهتم العلماء القدامى بالهندسة الإحداثية أمثال ثابت بن قرة والخوارزمي والبيروني وطاليس وفيثاغورس، حيث أثروا العلم بإنجازات مبتكرة في الهندسة الإحداثية وتطبيقاتها العملية.

وللهندسة الإحداثية تطبيقات حياتية هامة، فما المخططات الهندسية وحساب المسافات عليها، والمستويات الإحداثية، ومعادلة الخط المستقيم، والدائرة ومعادلتها وما يرتبط بها من إنشاءات هندسية وتطبيقات حياتية، إلا أمثلة واقعية على تطبيق الهندسة الإحداثية في حياتنا.

# الوحدة السادسة

## الهندسة الإحداثية



يُتَوَقَّعُ مِنَ الطَّالِبِ بَعْدَ دِرَاسَةِ هَذِهِ الْوَحْدَةِ أَنْ يَكُونَ قَادِرًا عَلَى:

- حِسَابِ الْمَسَافَةِ بَيْنَ نَقْطَتَيْنِ فِي الْمُسْتَوَى الْإِحْدَاثِيِّ.
- إِيجَادِ إِحْدَاثِيٍّ نَقْطَةٍ مُتَنَصِّفٍ قِطْعَةٍ مُسْتَقِيمَةٍ.
- إِيجَادِ مُعَادِلَةِ الْخَطِّ الْمُسْتَقِيمِ مِنْ مَعْلُومَاتٍ كَافِيَةٍ مُعْطَاةٍ.
- إِيجَادِ مُعَادِلَةِ الدَّائِرَةِ بِالصُّورَةِ الْقِيَاسِيَّةِ مِنْ مَعْلُومَاتٍ كَافِيَةٍ مُعْطَاةٍ.
- إِيجَادِ إِحْدَاثِيٍّ مَرَكْزٍ وَطَوَّلٍ نَصْفِ قَطْرِ الدَّائِرَةِ إِذَا عُلِمَتْ مُعَادِلَتُهَا.
- حَلُّ مَسَائِلَ عَمَلِيَّةٍ عَلَى مَفَاهِيمِ الْهَنْدَسَةِ الْإِحْدَاثِيَّةِ.

# تمهينة

١ أكتب نصّ نظرية فيثاغورس.

٢ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، إذا كان  $أ ب = (٤) سم$ ،  $أ جـ = (١٠) سم$ ،  
جـ د ب جـ.

٣ ما ميل الخطّ المستقيم الذي يمرّ بالنقطتين  $(٥، ١-)$ ،  $(٣-، ٢)$ ؟

٤ أرسم المستوى الإحداثي وعيّن عليه كلّاً من النقاط الآتية:

أ  $(٠، ٠)$

ب  $(٣، ٠)$

جـ  $(٥، ٢-)$

د  $(٣-، ١)$

هـ  $(٦-، ٤-)$

و  $(٠، ٤)$

ز  $(١، \frac{١}{٢})$

٥ أيّ النقاط الآتية تحقق المعادلة  $(س^٢ + ص^٢ - ٢ س = ١)$ ؟

أ  $(١، ٢-)$

ب  $(١، ٢)$

جـ  $(١-، ٢)$

د  $(١، \sqrt{٢})$



٦ حلّ كل معادلة من المعادلات الآتية:

$$أ) ١٧ - = ٥ + س$$

$$ب) ٥ - = \frac{٣ + أ}{٢} + أ$$

$$ج) ٦ - = ١ - س \frac{٣}{٥}$$

$$د) ١١ = ٥ - س^٢$$

٧ حلّ المعادلتين الآتيتين بإكمال المربع:

$$أ) س^٢ + ٦س + ٥ = صفرًا$$

$$ب) س^٢ - ٨س - ٥ = صفرًا$$

٨ إذا كان  $(س + ١, ٥) = (٤, ٢ص - ١)$ ، فجد قيمة كل من  $س$ ،  $ص$ .

٩ جد الزوج المرتب  $(س, ص)$  الذي يحقق كلاً من المعادلتين الآتيتين معاً:

$$٢س + ص = ٥$$

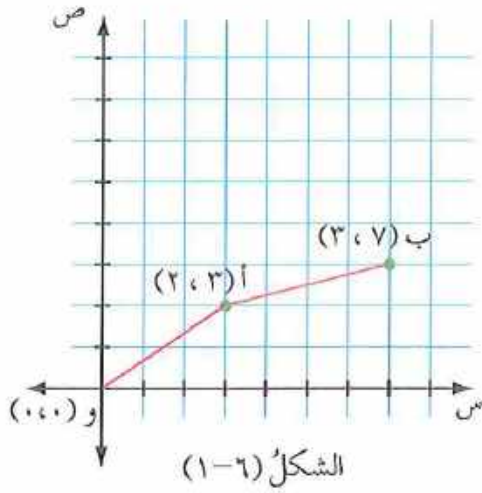
$$س - ص = ٤$$



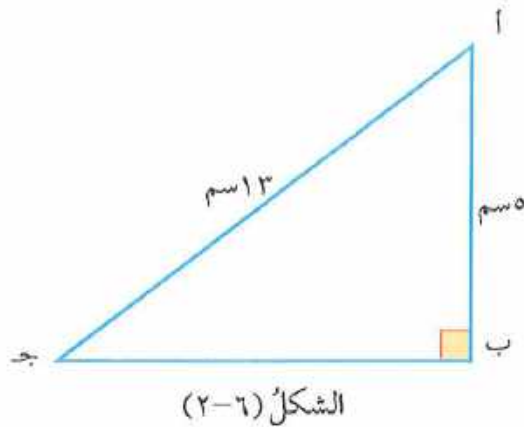
## النتائج

- تجد المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي.
- تحل مسائل عملية على المسافة بين نقطتين.

في الشكل (١-٦) النقاط و، أ، ب، حيث تمثل النقطة أ مدرسة، وتمثل النقطتان و، ب مركزين صحيين. يصل بين كل منهما والمدرسة طريق مستقيم، احتاج أحد طلبة المدرسة لعلاج سريع، كيف يمكنك المساعدة في تحديد المركز الصحي المناسب؟ ولماذا؟



١) يمثل الشكل (٢-٦) المثلث أ ب ج قائم الزاوية في ب، فيه أ ب = ٥ سم، أ ج = ١٣ سم. جـ طول الضلع ب جـ.



٢) اعتمد الشكل (٣-٦) في الإجابة عما يأتي:

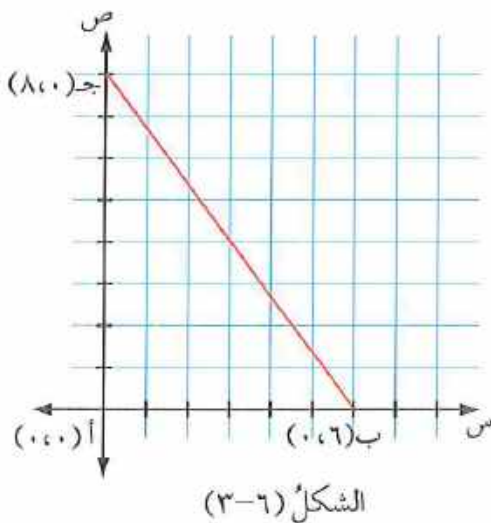
أ) جـ طول القطعة المستقيمة أ ب.

ب) جـ طول القطعة المستقيمة أ جـ.

جـ) جـ طول القطعة المستقيمة ب جـ باستخدام نظرية فيثاغورس.

د) جـ قيمة  $\sqrt{2(0-8) + 2(6-0)}$

ماذا تلاحظ؟



٣) اعتمد الشكل (٦-٤) في الإجابة عما يأتي:

أ) جِدْ طول القطعة المستقيمة أ ب.

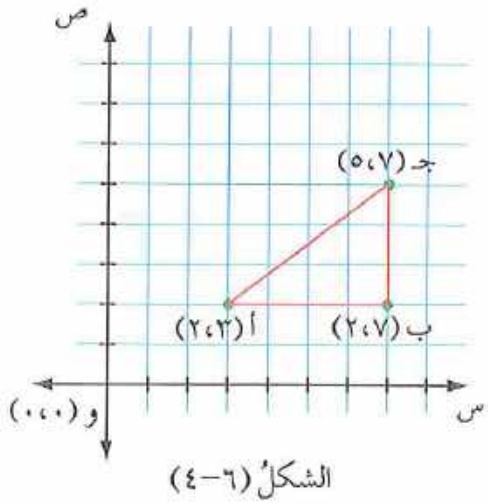
ب) جِدْ طول القطعة المستقيمة ب ج.

ج) جِدْ طول القطعة المستقيمة أ ج باستخدام

نظرية فيثاغورس.

د) جِدْ قيمة  $\sqrt{2(2-5) + 2(3-7)}$

ماذا تلاحظ؟



### نشاط (٦-١)

١) يمثّل الشكل (٦-٥) المستوى الإحداثي، عيّن عليه

كلًا من النقطتين أ (٢، ١)، ب (٦، ٤).

٢) أرسم خطًا موازيًا لمحور السينات من النقطة أ.

٣) أرسم خطًا موازيًا لمحور الصادات من النقطة ب.

٤) عيّن نقطة تقاطع الخطين اللذين رسمتهما، ولتكن النقطة ج.

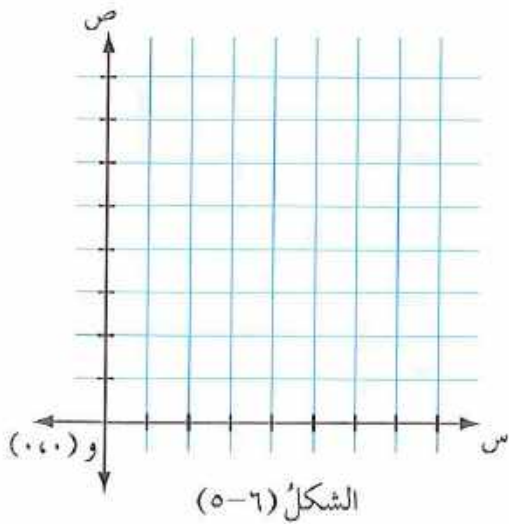
ما إحداثيا النقطة ج؟

٥) ما طول القطعة المستقيمة أ ج؟

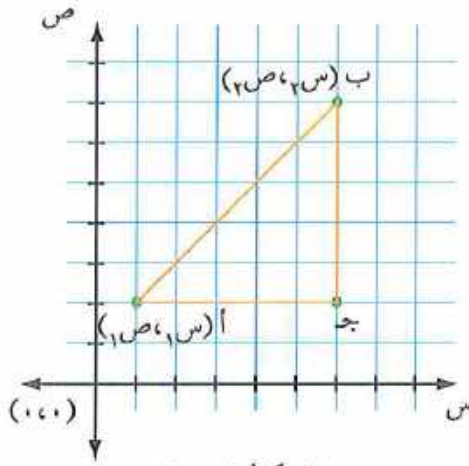
٦) ما طول القطعة المستقيمة ب ج؟

٧) ما نوع المثلث أ ب ج (من حيث زواياه)؟

٨) ما طول القطعة المستقيمة أ ب؟ (استخدم نظرية فيثاغورس).



## نشاط (٦-٢)



الشكل (٦-٦)

يمثل الشكل (٦-٢) المستوى الإحداثي، فيه النقطتان

أ (١، ١ ص)، ب (٢، ٢ ص).

(١) ما إحداثيا النقطة ج؟

(٢) ما طول أ ج بدلالة إحداثيات النقطتين أ، ج؟

(٣) ما طول ب ج بدلالة إحداثيات النقطتين ب، ج؟

(٤) استخدم نظرية فيثاغورس لإيجاد طول أ ب بدلالة

إحداثيات النقطتين أ، ب.

(٥) استنتج قاعدة المسافة بين النقطتين أ، ب من خلال الفرع (٤).

## النتيجة

إذا كانت النقطتان أ (١، ١ ص)، ب (٢، ٢ ص)، فإن:

طول القطعة المستقيمة أ ب = المسافة بين النقطتين أ، ب

$$= \sqrt{(١ص - ٢ص)^2 + (١س - ٢س)^2}$$

ملاحظة: يُعبّر أحياناً عن طول القطعة المستقيمة أ ب بالرمز أ ب .

مثال (٦-١):

جد المسافة بين النقطتين م (٢، ٣)، ن (٧، -١):

الحل:

$$١س = ٢، ٣ص = ٣، ٧س = ٧، -١ص = -١$$

$$\text{المسافة بين النقطتين م، ن} = \text{طول م ن} = \sqrt{(١س - ٢س)^2 + (١ص - ٢ص)^2}$$

$$م ن = \sqrt{(٣ - (١-)) + (٢ - ٧)^2}$$

$$= \sqrt{(٤)^2 + (٥)^2} = \sqrt{٤١}$$

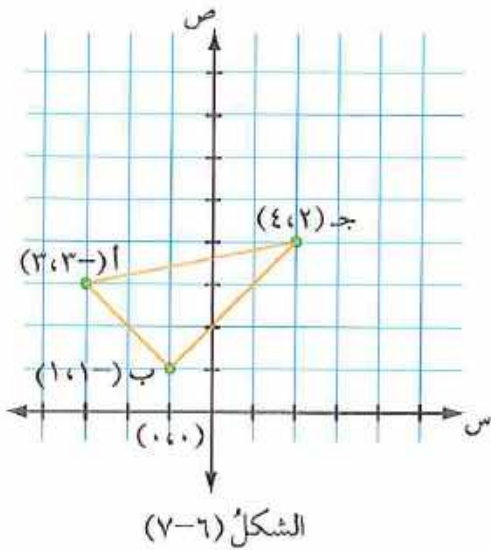
## تدريب (٦-٦)

جد طول ل هـ، حيث ل (٣، -١)، هـ (٢، -٢).

مثال (٦-٢):

يمثل الشكل (٦-٧) المثلث أ ب ج، يبين أن المثلث أ ب ج قائم الزاوية في ب.

الحل:



النقطة أ (٣، ٣-) :  $س_١ = ٣$  ،  $ص_١ = ٣$

النقطة ب (١، ١-) :  $س_٢ = ١$  ،  $ص_٢ = ١$

النقطة ج (٤، ٢) :  $س_٣ = ٤$  ،  $ص_٣ = ٢$

نحسب أطوال أضلاع المثلث أ ب ج :

$$أ ب = \sqrt{(س_١ - س_٢)^2 + (ص_١ - ص_٢)^2} = \sqrt{(٣ - ١)^2 + (٣ - ١)^2}$$

$$= \sqrt{(٣ - ١)^2 + ((٣ -) - (١ -))^2} =$$

$$= \sqrt{(٢ -)^2 + (٢)^2} =$$

$$= \sqrt{٨} = \sqrt{٤ + ٤} =$$

$$ب ج = \sqrt{(س_٢ - س_٣)^2 + (ص_٢ - ص_٣)^2} = \sqrt{(١ - ٤)^2 + ((١ -) - ٢)^2}$$

$$= \sqrt{(١ - ٤)^2 + ((١ -) - ٢)^2} =$$

$$= \sqrt{١٨} = \sqrt{(٣)^2 + (٣)^2} =$$

$$أ ج = \sqrt{(س_١ - س_٣)^2 + (ص_١ - ص_٣)^2} = \sqrt{(٣ - ٤)^2 + ((٣ -) - ٢)^2}$$

$$= \sqrt{(٣ - ٤)^2 + ((٣ -) - ٢)^2} =$$

$$= \sqrt{(١)^2 + (٥)^2} =$$

$$= \sqrt{٢٦} = \sqrt{١ + ٢٥} =$$

$$\text{لاحظ أن: } (أ ب)^2 + (ب ج)^2 = ٨ + ١٨ =$$

$$٢٦ =$$

$$\text{وأن } (ب ج)^2 = ٢٦$$

بما أن  $(أ ب)^2 + (ب ج)^2 = (ب ج)^2$ ، فإن المثلث أ ب ج قائم الزاوية في ب وفق نظرية

فيثاغورس.



إذا كانتِ النقاطُ أ (٢، ١)، ب (٥، ٦)، ج (٧، ٤)، د (٣، ٠) نقاطاً في المستوى الإحداثي،  
بيِّنْ أنَّ كلَّ ضلعينِ متقابلينِ في الشكلِ الرباعيِّ أ ب ج د متساويانِ في الطولِ.

مثال (٢-٣):

النقطتان م (٢، ٣)، ل (٥، س)، تمثلانِ نهايتي قطرِ دائرةٍ مركزُها ن، إذا كانَ طولُ نصفِ قطرِ  
الدائرة (٥) سم، جِدْ قيمَ س الممكنة.

**الحل:** طولُ نصفِ قطرِ الدائرة = ٥ سم

طولُ قطرِ الدائرة = ١٠ سم

م ل = ١٠ سم

م (٢، ٣): س<sub>١</sub> = ٢، ص<sub>٢</sub> = ٣-

ل (٥، س): س<sub>٢</sub> = س، ص<sub>٢</sub> = ٥

قانون

$$م ل = \sqrt{^2(ص_٢ - س_١) + ^2(س_٢ - ص_١)}$$

تعويض

$$١٠ = \sqrt{^2((٣-) - ٥) + ^2(٢ - س)}$$

تربيع الطرفين

$$١٠٠ = ^2(٨) + ^2(٢ - س)$$

طرح ٦٤ من الطرفين

$$١٠٠ - ٦٤ = ^2(٢ - س)$$

$$٣٦ = ^2(٢ - س)$$

$$٦ = |٢ - س|$$

إمّا س - ٢ = ٦ ومنها س = ٨

وإمّا س - ٢ = -٦ ومنها س = ٤-

أخذ الجذر التربيعي للطرفين

حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.



## تمارين ومسائل

(١) جد المسافة بين كل زوج من النقاط الآتية:

أ (٢، -٤)، (-٣، ٨)

ب (-١، ٥)، (-٤، ٢)

ج (-٥، ٤)، (-٧، ١)

د (م، هـ+١)، (م-٦، هـ-٧)

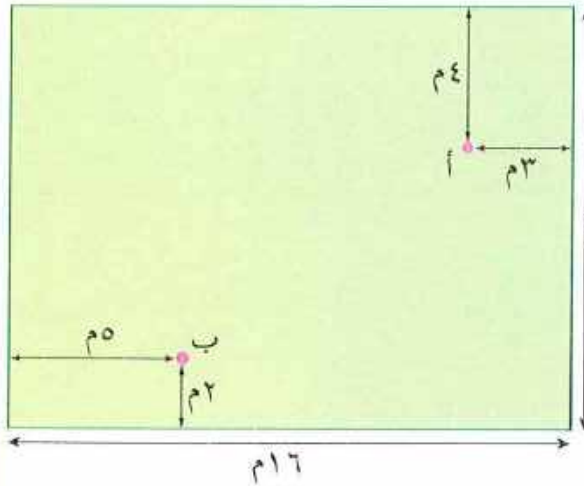
هـ (٥، -٤)، (٥، ٨)

(٢) إذا كانت النقطة م (٢، ١) تمثل موقع سيارة، والنقاط أ (٥، ٠)، ب (٦، ٢)، ج (٤، ٣)

تمثل مواقع ثلاث محطات وقود، أي المحطات الثلاث أقرب إلى السيارة؟

(٣) إذا كانت أ ب قطعة مستقيمة طولها (٥) وحدات، وكانت أ (ل، ٤)، ب (٧، ١)، فجد جميع القيم الممكنة للثابت ل.

(٤) م ن ل مثلث فيه م (٢، ١)، ن (٥، ٥)، ل (-٢، ٤)، ما نوع المثلث م ن ل من حيث أطوال أضلاعه؟



الشكل (٨-٦)

(٥) يمثل الشكل (٦-٨) حديقة مستطيلة

الشكل، النقطتان أ، ب تمثلان موقع حنفيتين لري المزروعات، نريد أن نصل بين الحنفيتين بأنبوب مستقيم، ما طول الأنبوب؟

(٦) إذا كانت القطعة المستقيمة أ ب قطراً

في دائرة طول نصف قطرها ٦,٥ سم،

وكانت النقطة أ (ع، -٤)، النقطة ب (٢ع، ٣+).

جد جميع القيم الممكنة للثابت ع.

٧) أرسم المستوى الإحداثي، وعرِّن عليه النقاط الآتية:

د (٤، ٤)، هـ (٥، ٥)، و (٤، -٤)، ع (٥، -٥)

أ) جد أطوال أضلاع الشكل الرباعي د هـ و ع.

ب) ما نوع الشكل الرباعي د هـ و ع؟

ج) جد طول كلٍّ من قطري الشكل د هـ و ع.

٨) دائرة مركزها النقطة م (٥، ٣) وتُمرُّ بالنقطة هـ (٣، ٩):

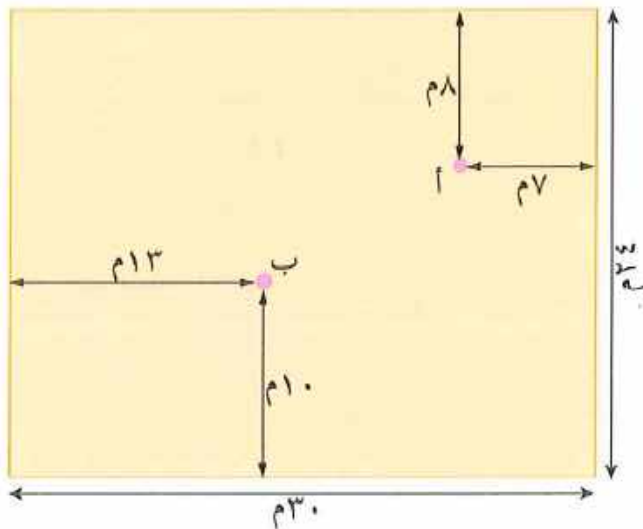
أ) ما طول قطرها؟

ب) إذا كانت النقطة و (١، ١) تقع على الدائرة، جد جميع القيم الممكنة للثابت ك.

النتائج

- تُجَدُ إحداثيي نقطة منتصف قطعة مستقيمة.
- تُحَلُّ مسائل عملية على إحداثيي نقطة منتصف قطعة مستقيمة.

يمثل الشكل (٦-٩) ساحة مدرسية مستطيلة الشكل، النقطتان أ، ب تمثلان آلي تصوير، أراد مدير المدرسة وضع آلة تصوير ثالثة في منتصف المسافة بين النقطتين أ، ب، ساعد مدير المدرسة في تحديد موقع آلة التصوير الثالثة.



الشكل (٦-٩)

نشاط (٦-٣)

ارسم المستوى الإحداثي وعرّن عليه النقطتين أ، ب، ثم حدّد عليه نقطة منتصف القطعة المستقيمة أ ب في كل حالة من الحالات الآتية:

(١) أ (٠، ٢)، ب (٠، ٦)

(٢) أ (١، ١)، ب (١، ٥)

(٣) أ (٤، ٠)، ب (٦، ٠)

(٤) أ (٢، ٣)، ب (٤، ٣)

أ) ماذا تلاحظ في الفرعين (١) و (٢)؟

ب) ماذا تلاحظ في الفرعين (٣) و (٤)؟

نلاحظ من الفرعين (١)، و (٢) بأن نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين

أ (١، ١)، ب (١، ٥) تعطى بالعلاقة  $(١، \frac{١+٥}{٢})$ .

كما نلاحظ من الفرعين (٣) و (٤) بأن نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين

أ (٤، ٣)، ب (٦، ٣) تعطى بالعلاقة  $(٤، \frac{٣+٣}{٢})$ .

يمثل الشكل (٦-١٠) النقطتين أ (س<sub>١</sub>، ص<sub>١</sub>)،  
ب (س<sub>٢</sub>، ص<sub>٢</sub>) في المستوى الإحداثي. النقطة جـ  
نقطة منتصف القطعة المستقيمة أ ب.

المثلثان جـ و أ، ب هـ أ مثلثان متشابهان (سوف ندرس  
حالات تشابه المثلثات بالتفصيل في الوحدة الثامنة).

ينتج من التشابه تناسب الأضلاع المتناظرة:

$$\frac{جـ و}{ب هـ} = \frac{و أ}{هـ أ} = \frac{جـ أ}{ب أ} = \frac{١}{٢}$$

$$\frac{١}{٢} = \frac{و أ}{هـ أ}$$

$$و أ = \frac{١}{٢} هـ أ$$

$$و أ = \frac{١}{٢} (س - س_٢)، لماذا؟$$

الإحداثي السيني للنقطة جـ = س<sub>١</sub> + و أ، لماذا؟

تعويض و أ

$$س = س_٢ + \frac{١}{٢} (س - س_٢)$$

فك القوس

$$س = س_٢ + \frac{١}{٢} س - \frac{١}{٢} س_٢$$

تجميع الحدود

$$س - \frac{١}{٢} س = س_٢ - \frac{١}{٢} س_٢$$

$$\frac{س - س_٢}{٢} = \frac{س_٢ - س_٢}{٢}$$

تدريب ٦-٤

بين أن الإحداثي الصادي للنقطة جـ =  $\frac{ص_١ + ص_٢}{٢}$

نتيجة:

إذا كانت النقطتان أ (س<sub>١</sub>، ص<sub>١</sub>)، ب (س<sub>٢</sub>، ص<sub>٢</sub>)، فإن:

إحداثي نقطة منتصف القطعة المستقيمة أ ب هما:  $(\frac{س_١ + س_٢}{٢}, \frac{ص_١ + ص_٢}{٢})$

### مثال (٦-٤):

إذا كانت النقطتان أ  $(-1, 4)$ ، ب  $(5, 10)$  نقطتين في المستوى الإحداثي، جد إحداثيي نقطة منتصف القطعة المستقيمة أ ب.

### الحل:

$$\begin{aligned} \text{لتكن } س_1 = -1, ص_1 = 4, س_2 = 5, ص_2 = 10 \\ \text{إحداثيا نقطة منتصف أ ب} = \left( \frac{ص_1 + س_2}{2}, \frac{ص_2 + س_1}{2} \right) \\ = \left( \frac{4 + 5}{2}, \frac{10 + (-1)}{2} \right) \\ = \left( \frac{9}{2}, \frac{9}{2} \right) \\ = (4.5, 4.5) \end{aligned}$$

### تدريب ٥-٦

جد إحداثيي نقطة منتصف القطعة المستقيمة ج د، حيث ج  $(2, 4)$ ، د  $(-2, -6)$ .

### مثال (٦-٥):

إذا كانت النقطتان أ  $(-2, 5)$ ، ب  $(1, -1)$  نقطتين في المستوى الإحداثي، وكانت النقطة ب نقطة منتصف أ هـ، ما إحداثيا النقطة هـ ؟

### الحل:

نفرض أن إحداثيي النقطة هـ هما  $(س, ص)$

النقطة ب هي نقطة منتصف أ هـ

$$\text{إحداثيا النقطة ب} = \left( \frac{ص_1 + س_2}{2}, \frac{ص_2 + س_1}{2} \right)$$

$$\left( \frac{5 + ص}{2}, \frac{(-2) + س}{2} \right) = (1, -1)$$

$$\text{لماذا؟} \quad \frac{(-2) + س}{2} = 1$$

$$\text{لماذا؟} \quad (-2) + س = 2$$

$$\text{لماذا؟} \quad س = 4$$



لماذا؟  $\frac{ص + ٥}{٢} = ١ -$

لماذا؟  $ص + ٥ = ٢ -$

لماذا؟  $ص = ٧ -$

إحداثيا النقطة هـ =  $(٧ - , ٤)$

#### تدريب ٦-٦

إذ كانت النقطة ن  $(٢ , ٠)$  نقطة منتصف القطعة المستقيمة م ل، حيث م  $(٤ , ١ -)$ ، فما إحداثيا النقطة ل؟

#### تدريب ٧-٦

حل المسألة الواردة في بداية الدرس.

## تمارين ومسائل

(١) إذا كانت النقاط أ (٢، -١)، ب (٨، -١)، ج (٨، ٧) رؤوس مثلث، وكانت النقاط د، هـ، و منتصفات الأضلاع أ ب، ب ج، أ ج على الترتيب:

أ) جد إحداثي كل من النقاط د، هـ، و.

ب) جد محيط المثلث أ ب ج.

ج) جد محيط المثلث د هـ و. ماذا تلاحظ؟

(٢) إذا كانت النقطة م (-٢، ٣) مركز المربع أ ب ج د، وكانت النقطة أ (-٤، ٦):

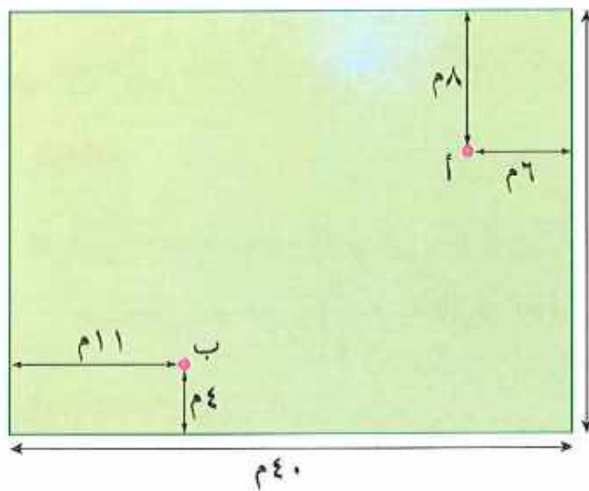
أ) جد طول قطر المربع.

ب) جد إحداثيات النقاط ب، ج، د.

(٣) إذا كانت النقاط أ (س+١، ص-١)، ب (س+٢، ٥)، م (٥، ٠)، وكانت النقطة م نقطة منتصف القطعة المستقيمة أ ب، فما قيمة كل من س، ص؟

(٤) إذا كانت النقاط أ (س<sup>٢</sup>، ٢)، ب (س<sup>٢</sup>+٢، ص<sup>٢</sup>+٢)، م (٢، ٤)، وكانت النقطة م نقطة منتصف القطعة المستقيمة أ ب، فجد قيم كل من س، ص الممكنة.

(٥) يمثل الشكل (٦-١١) حديقة مستطيلة الشكل النقطتان أ، ب تمثلان موقع حنفيتين لرّي المزروعات، يريد صاحب المزرعة أن يضع حنفية ثالثة في منتصف المسافة بين الحنفيتين، ساعد صاحب المزرعة في تحديد موقع الحنفية الثالثة.



الشكل (٦-١١)

يسير قطارٌ من المدينة أ إلى المدينة ب بسرعة منتظمة ويقف عند



الشكل (٦-١٢)

كل محطة بين المدينتين، يبين  
الجدول الآتي رقم المحطة  
(ن)، والمدة الزمنية للرحلة  
(س) ساعة وبُعْد المحطة عن  
المدينة أ (ص) كم:

| ٤   | ٣    | ٢    | ١   | رقم المحطة (ن)                   |
|-----|------|------|-----|----------------------------------|
| ٢   | ١,٧٥ | ٠,٧٥ | ٠,٥ | المدة الزمنية للرحلة (س) ساعة    |
| ٣٢٠ | ٩    | ١٢٠  | ٨٠  | بُعْد المحطة عن المدينة أ (ص) كم |

ما بُعْد المحطة الثالثة عن المدينة أ؟

ارسم المستوى الإحداثي وعين عليه الأزواج المرتبة (س، ص) المعطاة في الجدول أعلاه.  
تُسمى العلاقة الجبرية التي تربط بين الإحداثي السيني والإحداثي الصادي للنقطة (س، ص)  
التي تقع على الخطّ المستقيم: **معادلة الخطّ المستقيم**.

## تعلم

■ ميل الخطّ المستقيم الذي يمرُّ بالنقطتين (١، ص<sub>١</sub>)، (٢، ص<sub>٢</sub>) =  $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$   
حيث س<sub>٢</sub> ≠ س<sub>١</sub>، ويُرمز له بالرمز (م).

## نشاط (٦-٤)

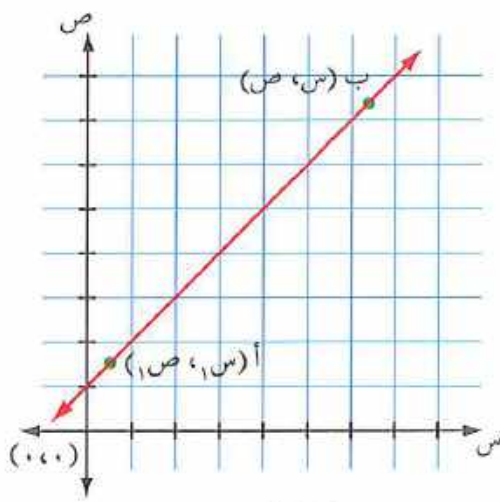
(١) ارسم المستوى الإحداثي وعين عليه النقاط الآتية:

أ (٢، ٠)، ب (٣، ١)، ج (٣، ٥)

(٢) احسب ميل كلٍّ من أ ب، ب ج، أ ج، ماذا تلاحظ؟

(٣) صل بين النقاط أ، ب، ج بخطّ مستقيم، وليكن الخطّ المستقيم ل. ما ميل الخطّ المستقيم ل؟

- ٤) لتكن النقطة د (س، ص) نقطة في المستوى الإحداثي تقع على الخط المستقيم ل، جد علاقة جبرية تربط بين س و ص من خلال النقطة أ والميل الذي أوجدته في فرع (٢).
- ٥) هل النقاط أ، ب، ج تحقق العلاقة الجبرية التي حصلت عليها في فرع (٤)؟



الشكل (١٢-٦)

في الشكل (١٢-٦)، لايجاد معادلة الخط المستقيم الذي ميله (م)، ويمر بالنقطة أ (س<sub>١</sub>، ص<sub>١</sub>)، نفرض أن ب (س، ص) نقطة أخرى على المستقيم.

$$\text{ميل المستقيم} = م = \frac{ص - ص_1}{س - س_1}$$

$$ص - ص_1 = م (س - س_1)$$

وهذه هي العلاقة الجبرية التي تربط بين الإحداثيين السيني والصادي لأي نقطة مثل ب (س، ص) تقع على الخط المستقيم.

### نتيجة:

معادلة الخط المستقيم الذي ميله (م)، ويمر بالنقطة أ (س، ص) هي:

$$ص - ص_1 = م (س - س_1)$$

### فكر

- هل للخط المستقيم الموازي لمحور السينات ميل؟ برّر إجابتك.
- ما معادلة الخط المستقيم الموازي لمحور السينات ويمر بالنقطة (م، ن)؟
- ما معادلة محور السينات؟

مثال (٦-٦):

جد معادلة الخط المستقيم الذي ميله (٤)، ويمر بالنقطة أ (-١، ٣).

الحل:

$$م = ٤ ، س_1 = -١ ، ص_1 = ٣$$



$$\begin{array}{ll}
\text{معادلة} & \text{معادلة الخط المستقيم: } ص - ص_1 = م(س - س_1) \\
\text{تعويض} & ص - 3 = م(س - 1) \\
\text{تبسيط} & ص - 3 = م(س - 1) \\
\text{تبسيط} & ص = م(س - 1) + 3
\end{array}$$

### تدريب ٦-٨

جد معادلة الخط المستقيم الذي ميله  $(-5)$ ، ويمر بنقطة الأصل.

مثال (٦-٧):

ما معادلة الخط المستقيم الذي يمر بكل من النقطتين أ  $(1, 2)$ ، ب  $(-1, 6)$ ؟

الحل:

$$\begin{array}{ll}
\text{قانون} & \text{ميل الخط المستقيم} = م = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} \\
\text{تعويض} & م = \frac{2 - 6}{1 - (-1)} \\
\text{تبسيط} & م = \frac{-4}{2} \\
\text{تبسيط} & م = -2 \\
\text{معادلة} & \text{معادلة الخط المستقيم: } ص - ص_1 = م(س - س_1) \\
\text{تعويض} & ص - 2 = م(س - 1) \\
\text{تبسيط} & ص - 2 = م(س - 1) \\
\text{تبسيط} & ص = م(س - 1) + 2
\end{array}$$

### فكر

هل تختلف معادلة المستقيم في المثال (٦-٧) باستخدام النقطة ب  $(-1, 6)$  بدلاً من النقطة أ  $(1, 2)$ ؟



### تدريب ٩-٦

جد معادلة المستقيم المارّ بالنقطتين أ  $(-1, 4)$ ، ب  $(-2, 5)$ .

### تدريب ١٠-٦

حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

### مثال (٦-٨):

ما معادلة الخطّ المستقيم الذي ميله  $(3)$ ، ومقطعه الصادي  $(-2)$ ؟

**الحل:**

بما أنّ المقطع الصادي  $= -2$ ، فإنّ الخطّ المستقيم

يمرّ بالنقطة  $(0, -2)$ ، لاحظ الشكل (٦-١٣)

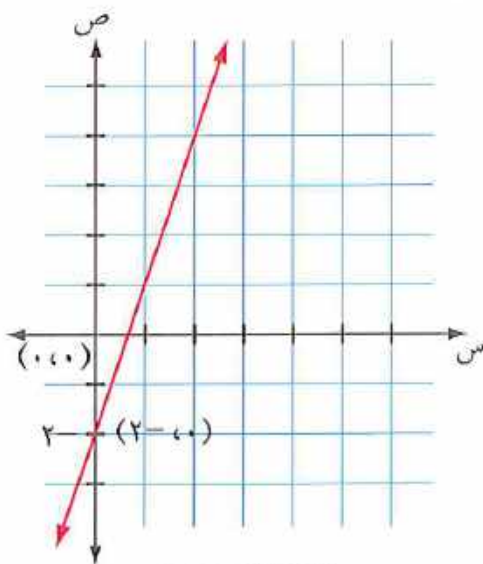
$$s_1 = 0, \quad v_1 = -2, \quad m = 3$$

معادلة الخطّ المستقيم:  $v - v_1 = m(s - s_1)$

$$v - (-2) = 3(s - 0)$$

$$v + 2 = 3s$$

$$v = 3s - 2$$



الشكل (٦-١٣)

### تدريب ١١-٦

ما معادلة الخطّ المستقيم الذي ميله  $(4)$ ، ومقطعه السيني  $(5)$ ؟

### مثال (٦-٩):

ما معادلة الخطّ المستقيم الذي مقطعه السيني  $(-3)$ ، ومقطعه الصادي  $(2)$ ؟

**الحل:**

بما أنّ المقطع السيني  $= -3$ ، فإنّ الخطّ المستقيم يمرّ بالنقطة  $(-3, 0)$

بما أنّ المقطع الصادي  $= 2$ ، فإنّ الخطّ المستقيم يمرّ بالنقطة  $(0, 2)$

$$s_1 = -3, \quad v_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad v_2 = 2$$

$$\text{ميل الخط المستقيم} = m = \frac{ص_1 - ص_2}{س_1 - س_2}$$

$$= m = \frac{٠ - ٢}{(٣-) - ٠}$$

$$= m = \frac{٢}{٣}$$

معادلة

$$\text{معادلة الخط المستقيم: } ص - ص_1 = m(س - س_1)$$

تعويض

$$ص - ٠ = \frac{٢}{٣}(س - ٣)$$

تبسيط

$$ص = \frac{٢}{٣}س + ٢$$

### تعلم

لايجاد المقطع السيني للمستقيم الذي معادلته:  $ص = م س + أ$  فإننا نعوض مكان  $ص$  صفراً.  
ولايجاد المقطع الصادي للمستقيم الذي معادلته:  $ص = م س + أ$  فإننا نعوض مكان  $س$  صفراً.

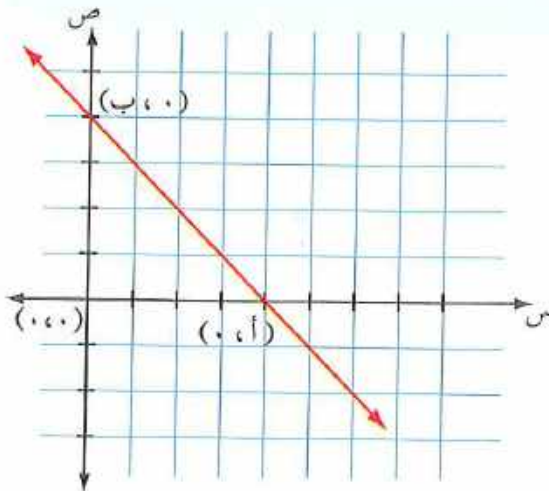
سؤال: جد المقطع السيني والمقطع الصادي للمستقيم الذي معادلته:  $ص = ٢س + ٢$

### فكر وناقش

معادلة الخط المستقيم الذي مقطعه السيني (أ)، ومقطعه الصادي (ب)، هي:

$$١ = \frac{ص}{ب} + \frac{س}{أ}$$

لاحظ الشكل (٦-١٤)



الشكل (٦-١٤)

## تمارين ومسابقات

(١) أي النقاط الآتية تقع على الخط المستقيم الذي معادلته  $ص = ٢س - ١$  ؟

أ (٥، ٢)

ب (٣-، ١-)

ج (٥، ٣)

د (م، ٢م - ١)

هـ (٠، ١)

و (ك + ١، ٢ك + ١)

(٢) اكتب معادلة الخط المستقيم في كل حالة من الحالات الآتية:

أ ( ميله (٣-)، ويمرُّ بالنقطة (٤، -١)

ب ( يمرُّ بالنقطتين (١، -١)، (٤، ٣)

ج ( ميله (٢)، ومقطعه السيني (٥-)

د ( ميله (١-)، ومقطعه الصادي (٤)

هـ ( مقطعه السيني (٣)، ومقطعه الصادي (٣-)

و ( يوازي محور السينات ومقطعه الصادي (٦)

(٣) جد إحداثيي نقطة تقاطع المستقيم الذي معادلته  $٣س + ٢ص = ٦$  مع محور السينات.

(٤) جد إحداثيي نقطة تقاطع المستقيم الذي معادلته  $٥س - ٣ص = ١٢$  مع محور الصادات.

(٥) جد كلاً من المقطع السيني والمقطع الصادي للمستقيم الذي معادلته  $٤ص = ٣س - ٢٤$

(٦) ما معادلة المستقيم الذي ميله (٢-)، ويمرُّ بنقطة تقاطع المستقيم الذي معادلته  $٥س + ٥ص = ١٥$

مع محور الصادات؟

(٧) المستقيم ل يمرُّ بالنقطتين (٣ك، ١)، (ك، ٤ - ك)، وميله (٢):

أ ( ما قيمة الثابت ك؟

ب ( ما معادلة المستقيم ل؟

٨) جُذِّدْ إحدائيه نقطه تقاطع المستقيم الذي معادلته  $2س + 3ص = ٧$  ، مع المستقيم الذي معادلته  $ص = ٥$ .

٩) جُذِّدْ إحدائيه نقطه تقاطع المستقيم الذي معادلته  $س - 3ص = 2$  ، مع المستقيم الذي معادلته  $س + ص = ٦$ .

١٠) إذا كانت النقطتان أ (٢، ٣)، ب (٢، ٤)، وكان المستقيمان أ جـ ، ب جـ متقاطعين في النقطة جـ ، وكان ميلاهما ١- ، ٢ على الترتيب، ما إحداثيا النقطة جـ ؟

١١) إذا كانت النقاط ن (١، ٣)، هـ (٣، -٣)، ك (٢، -٤)، و (١، -١) نقاطا في المستوى الإحداثي، فجد:

أ) معادلة المستقيم ن هـ.

ب) معادلة المستقيم ك و.

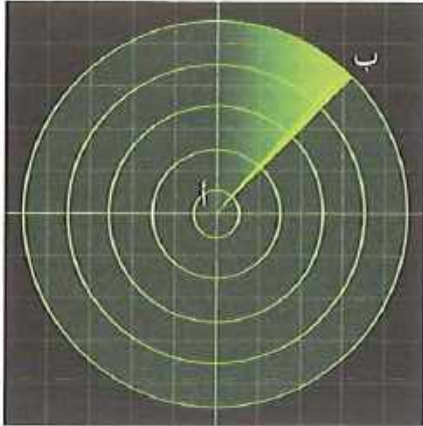
ج) نقطة تقاطع المستقيمين ن هـ، ك و (إن وجدت).



## النتائج

- تجد معادلة الدائرة بالصورة القياسية من معلومات كافية.
- تجد إحداثي مركز دائرة وطول نصف قطرها إذا علمت معادلتها.
- تحل مسائل عملية على الدائرة.

النقطة (أ) في الشكل (٦-١٥) تمثل موقع رادار يرصد سيارة (النقطة ب) بحيث تبقى السيارة على بعد ثابت مقدارُه (٦٠) كم عن الرادار.



أ) ما الشكل الهندسي الذي تتحرك عليه السيارة؟  
ب) ما معادلة المنحنى الذي تتحرك عليه السيارة؟ (معتبراً النقطة (أ) نقطة الأصل).

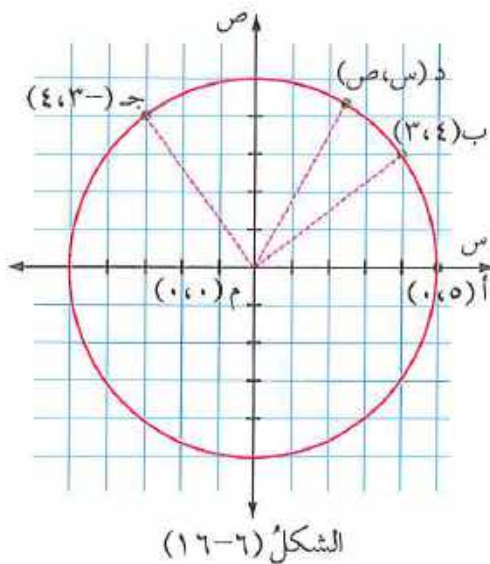
الشكل (٦-١٥)

**معادلة الدائرة** هي العلاقة الجبرية التي تربط بين الإحداثي السيني والإحداثي الصادي لجميع النقاط التي تقع على الدائرة. وكل زوج مرتب (س، ص) يحقق معادلة الدائرة يمثل نقطة على الدائرة.

## تذكر

- الدائرة: هي جميع النقاط في المستوى التي تبعد بُعداً ثابتاً عن نقطة ثابتة في المستوى المذكور نفسه.
- بُعد النقاط عن النقطة الثابتة يُسمى طول نصف قطر الدائرة.
- النقطة الثابتة تُسمى مركز الدائرة.

## نشاط (٦-٥)



الشكل (٦-١٦)

يمثل الشكل (٦-١٦) دائرة يقع مركزها على نقطة الأصل (م) ويمرُّ بكلِّ من النقاط أ، ب، ج، د.  
١) جد طول كلِّ من القطع المستقيمة م أ، م ب، م ج، ماذا تلاحظ؟

٢) ما طول نصف قطر الدائرة؟

٣) ما طول القطعة المستقيمة م د؟ لماذا؟

- ٤) استخدم فرع (٣) وقانون المسافة بين النقطتين م، د في إيجاد العلاقة بين س، ص.  
 ٥) تحقق من أن النقاط أ، ب، ج تحقق المعادلة التي حصلت عليها في فرع (٤).  
 ٦) هل يمكنك التعبير عن معادلة دائرة مركزها (٠، ٠) وطول نصف قطرها (ر)؟

معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل (٠، ٠) وطول نصف قطرها (ر) هي:

$$^2(س) + ^2(ص) = ^2(ر)$$

مثال (٦-١٠):

ما معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول قطرها (٨) وحدات؟

**الحل:**

نقطة المركز هي نقطة الأصل (٠، ٠)، وطول نصف قطرها  $ر = ٤$  وحدات.

معادلة الدائرة:  $^2ر = ^2ص + ^2س$

$$^2(٤) = ^2ص + ^2س$$

$$١٦ = ^2ص + ^2س$$

**تدريب ٦-١٢**

ما معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وتمرّ بالنقطة (١، -٦)؟

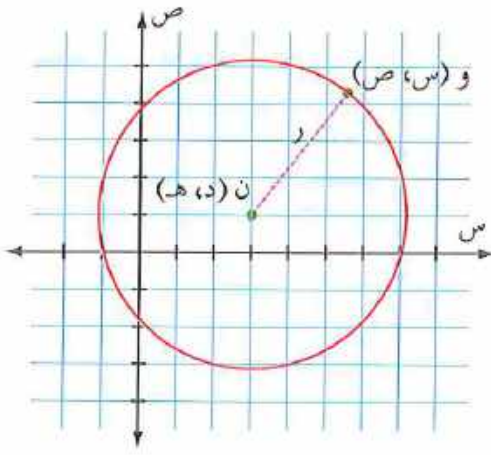
**تدريب ٦-١٣**

إذا كانت النقطتان أ (٥، -١٢)، ب (-٥، ١٢) نهايتي قطر في دائرة مركزها النقطة م:

أ) ما إحداثيا مركز الدائرة؟

ب) ما طول نصف قطر الدائرة؟

ج) ما معادلة الدائرة؟



الشكل (١٧-٦)

يوضح الشكل (١٧-٦) دائرة مركزها النقطة ن (د، هـ)، وطول نصف قطرها (ر)، النقطة و (س، ص) نقطة تقع على محيط الدائرة.

طول نصف قطر الدائرة = البعد بين النقطتين ن ، و

$$r = \sqrt{(s-d)^2 + (v-h)^2}$$

$$r^2 = (s-d)^2 + (v-h)^2$$

تسمى هذه الصورة:

**الصورة القياسية لمعادلة الدائرة** التي مركزها النقطة (د، هـ) وطول نصف قطرها (ر).

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها النقطة (د، هـ) وطول نصف قطرها (ر) هي:

$$r^2 = (s-d)^2 + (v-h)^2$$

مثال (١١-٦):

ما معادلة الدائرة التي مركزها النقطة (-١، ٤) وطول نصف قطرها (٦) وحدات؟

**الحل:**

إحداثيات نقطة المركز (د، هـ) = (-١، ٤)

طول نصف القطر = ر = ٦

معادلة الدائرة هي:  $r^2 = (s-d)^2 + (v-h)^2$

تعويض

$$6^2 = (s - (-1))^2 + (v - 4)^2$$

تبسيط

$$36 = (s+1)^2 + (v-4)^2$$

مثال (١٢-٦):

ما معادلة الدائرة التي مركزها النقطة (-٢، ٤) وتمر بالنقطة (٣، -١)؟

**الحل:**

إحداثيات المركز (د، هـ) = (-٢، ٤)

طول نصف القطر = ر = البعد بين المركز (-٢، ٤) والنقطة (٣، -١) الواقعة على الدائرة

$$r = \sqrt{(s_1 - s_2)^2 + (v_1 - v_2)^2}$$



$$\sqrt{2(4-(1-)) + 2((2-)-3)} \sqrt{V} =$$

$$\sqrt{2(0-)+2(0)} \sqrt{V} =$$

$$\sqrt{20+20} \sqrt{V} =$$

$$\sqrt{0.} \sqrt{V} =$$

معادلة الدائرة هي :  $(س-د)^2 + (ص-هـ)^2 = ر^2$

$$(س-(2-))^2 + (ص-4)^2 = (0. \sqrt{V})^2$$

$$50 = (س+2)^2 + (ص-4)^2$$

### تدريب ٦-١٤

أ) جد معادلة الدائرة التي مركزها النقطة (٧، ١) وتمرُّ بالنقطة (١-، ٦).

ب) جد إحداثيي نقطة المركز وطول قطر الدائرة التي معادلتها  $(س-٥)^2 + (ص+٣)^2 = ٤٩$

### مثال (٦-١٣):

جد إحداثيي نقطة المركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها

$$س^2 + ص^2 - ٦س + ٨ص - ١١ = 0$$

### الحل:

معادلة الدائرة  $(س^2 + ص^2 - ٦س + ٨ص - ١١ = 0)$  ليست على الصورة القياسية، نكتبها

على الصورة القياسية بإكمال المربع لكل من المتغيرين س، ص.

$$س^2 + ص^2 - ٦س + ٨ص - ١١ = 0$$

$$(س^2 - ٦س + ٩) + (ص^2 + ٨ص + ١٦) - ١١ = 0$$

$$(س-٣)^2 + (ص+٤)^2 - ١١ = 0$$

$$(س-٣)^2 + (ص+٤)^2 = ١١$$

تحليل

$$(س-٣)^2 + (ص+٤)^2 = ١١$$

الصورة القياسية

$$(س-٣)^2 + (ص+٤)^2 = ١١$$



فيكون:  $د = ٣$  ،  $هـ = -٤$  ،  $ر = ٣٦$   
 إحداثيا مركز الدائرة  $(د، هـ) = (٣، -٤)$   
 طول نصف قطر الدائرة  $ر = (٦)$  وحدات.

#### تدريب ١٥-٦

جدّ إحداثي نقطة المركز وطول قطر الدائرة التي معادلتها  
 $س^٢ + ص^٢ + ٢س - ٦ص - ١٥ = ٠$  صفراً

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها النقطة  $(د، هـ)$  وطول نصف قطرها  $(ر)$  هي:  
 $(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = ر^٢$

**المفكوك**  
**ترتيب الحدود**  
 $(س^٢ - ٢س + د^٢) + (ص^٢ - ٢ص + هـ^٢) = ر^٢$   
 $س^٢ + ص^٢ - ٢س - ٢ص + د^٢ + هـ^٢ - ر^٢ = ٠$  صفراً  
 نفرض أن  $(د^٢ - ٢د + ١) = أ$  ،  $(هـ^٢ - ٢هـ + ١) = ب$  ،  $(د^٢ - ٢د + ١ + هـ^٢ - ٢هـ + ١ - ر^٢) = ج$   
 فتكون معادلة الدائرة:  $س^٢ + ص^٢ + أس + ب ص + ج = ٠$  صفراً  
 تُسمى هذه الصورة **الصورة العامة لمعادلة الدائرة**، لاحظ أن:

$$(١) \text{ معامل } س = \text{معامل } ص = ١$$

$$(٢) \text{ إحداثيا نقطة المركز } (د، هـ) = (-\text{نصف معامل } س، -\text{نصف معامل } ص)$$

$$(٣) \text{ طول نصف القطر } ر = \sqrt{د^٢ + هـ^٢ - \text{الحديد الثابت } (ج)}، \text{ حيث } (د^٢ + هـ^٢ - ج) \geq ٠$$

#### تدريب ١٦-٦

حلّ تدريب (١٥ - ٦) باستخدام الصورة العامة لمعادلة الدائرة.

#### فكر

في الصورة العامة لمعادلة الدائرة:

■ لماذا كان الشرط  $(د^٢ + هـ^٢ - ج) \geq ٠$  ؟

■ إذا كان  $د^٢ + هـ^٢ - ج = ٠$  صفراً ، ماذا تمثل معادلة الدائرة؟

مثال (٦-١٤):

حدّد موقع كلّ من النقاط الآتية بالنسبة للدائرة التي معادلتها  $(س-١) + (ص+٢) = ٢٥$   
 أ  $(٢، ٢)$  ، ب  $(٢-، ٢-)$  ، ج  $(٢، ٦)$

الحل:  $٢٥ = ٢ \Leftrightarrow ٥ = ٠$

تعويض

$$٢(٢+(٢-)) + ٢(١-٢) = ٢(٢+ص) + ٢(١-س) : (٢-، ٢) أ$$

$$٢٥ > ١ = ٠ + ١ =$$

أي أن بُعد النقطة أ عن المركز أصغر من ر ، لذلك النقطة أ تقع داخل الدائرة.

تعويض

$$٢(٢+(٦-)) + ٢(١-(٢-)) = ٢(٢+ص) + ٢(١-س) : (٦-، ٢) ب$$

$$٢٥ = ٢٥ = ١٦ + ٩ =$$

أي أن بُعد النقطة ب عن المركز يساوي ر ، لذلك النقطة ب تقع على الدائرة.

تعويض

$$٢(٢+٦) + ٢(١-٢) = ٢(٢+ص) + ٢(١-س) : (٦، ٢) ج$$

$$٢٥ < ٦٥ = ٦٤ + ١ =$$

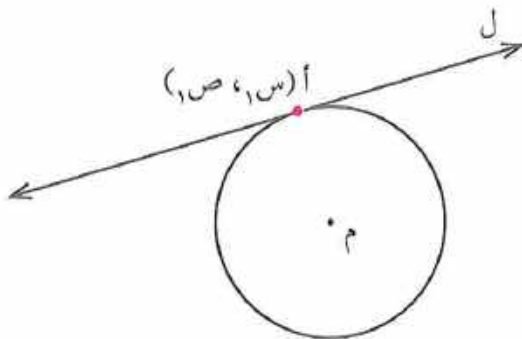
أي أن بُعد النقطة ج عن المركز أكبر من ر ، لذلك النقطة ج تقع خارج الدائرة.

تدريب ٦-١٧

حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

تحذّر: جدّ معادلة دائرة تمسّ كلاً من المستقيمين  $س + ص = ٢$  ،  $س + ص = ٢-$   
 هل هناك حلول أخرى؟ برّر إجابتك.

تعلم:



يُسمّى المستقيم ل مماساً للدائرة التي مركزها م إذا قطعها في نقطة واحدة فقط. كما في الشكل المجاور.

## تمارين ومسائل

- (١) اكتب معادلة الدائرة في كل حالة من الحالات الآتية:
- أ) مركزها النقطة الأصل وطول نصف قطرها (٢) وحدة.
- ب) مركزها النقطة  $(-١, ٣)$  وطول قطرها (٤) وحدة.
- ج) مركزها النقطة  $(٤, -١)$  وتمس بالنقطة  $(٩, -٢)$ .
- د) مركزها النقطة  $(٥, ٣)$  وتمس محور السينات.
- هـ) طول قطرها (٦) وحدات وتمس كلاً من محور السينات ومحور الصادات (جد جميع الحلول الممكنة).

- (٢) جد إحداثيي المركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها:

أ)  $١٢١ = ص^٢ + س^٢$

ب)  $١٨ = (ص-٢)^٢ + (س+٤)^٢$

ج)  $٣٦ = (٣-س)^٢ + (١٢+ص)^٢$

د)  $٢٨ - ص = س^٢ + ص^٢$

هـ)  $١٢ = ص^٢ + ص - ٨س$

- (٣) جد موقع كل نقطة من النقاط الآتية بالنسبة للدائرة التي معادلتها

$٩ = (س-٥)^٢ + (ص+١)^٢$

ن  $(٢, -١)$  ، و  $(١, ٠)$  ، ل  $(٤, -٢)$  ، ك  $(٥, -١)$

- (٤) ما معادلة الدائرة التي مركزها النقطة  $(٤, ١)$  وتمس المستقيم الذي معادلته

$ص = ٢ - ؟$

- (٥) ما معادلة الدائرة التي يقع مركزها على المستقيم الذي معادلته  $س = ٥$ ، وتمس محور الصادات

عند النقطة  $(٠, ٣)؟$

- (١) إذا كانت النقطتان أ (١، ٥)، ب (٣، ٠) نقطتين في المستوى الإحداثي، فأجب عما يأتي:
- أ ( جـ طول القطعة المستقيمة أ ب.
- ب ( جـ إحداثي نقطة منتصف القطعة المستقيمة أ ب.
- جـ ( جـ معادلة الخط المستقيم أ ب.
- د ( جـ معادلة الدائرة التي تكون أ ب قطرًا فيها.
- (٢) إذا كانت النقطتان م (١، ٧)، ن (١، ٣) نقطتين في المستوى الإحداثي، وكانت النقطة جـ (٣، ٥) نقطة منتصف القطعة المستقيمة م ن، فما قيمة كل من س، ص؟
- (٣) إذا كانت النقاط ل (١، ٣)، ن (٥، ١)، هـ (١، ١) رؤوس مثلث، فجد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بنقطة منتصف الضلع ن ل، والرأس هـ.
- (٤) جـ معادلة الخط المستقيم في كل مما يأتي:
- أ ( ميله (٤)، ويمر بالنقطة (١، ٧)
- ب ( يمر بالنقطتين (٢، ١)، (٥، ١٣)
- جـ ( ميله (٣-) ويمر بنقطة الأصل.
- د ( مقطعه الصادي (٦)، ويوازي محور السينات.
- هـ ( مقطعه السيني (٣-)، ومقطعه الصادي (٢).
- (٥) إذا كانت النقاط أ (١، ٦)، ب (١، ٢)، جـ (٥، ١) نقاطًا في المستوى الإحداثي، فما معادلة الدائرة التي مركزها نقطة منتصف القطعة المستقيمة أ ب، وتمر بالنقطة جـ؟
- (٦) ما معادلة المستقيم الذي ميله (٢)، ويمر بمركز الدائرة التي معادلتها  $(٢س - ٢) + (٢ص + ٤) = ١٠٠$ ؟
- (٧) إذا كان أ ب جـ مثلثًا، فيه النقطة أ (٢، ٣)، وكانت النقطة د (٣، ٥) منتصف القطعة المستقيمة أ ب، والنقطة هـ (١، ٥، ٤) منتصف القطعة المستقيمة أ جـ:
- أ ( جـ إحداثي كل من النقطتين ب، جـ.
- ب ( بين أن المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في أ.



٨ ( جَدِّ إحدائيي المركزِ وطولِ نصفِ قطرِ الدائرةِ التي معادلُها:

$$\text{أ) } 64 = 2\text{ص} + 2\text{س}$$

$$\text{ب) } 81 = 2\text{س} + 2(1 + \text{ص})$$

$$\text{ج) } 196 = 2(12 + \text{ص}2) + 2(6 - \text{س}2)$$

$$\text{د) } 12 - \text{ص} = 2\text{س} + 2\text{ص} = 4\text{س} - 12 - \text{ص}$$

٩ ( إذا كانتِ النقطةُ ك (ن، ١-) تقعُ على محيطِ الدائرةِ التي معادلُها

$$(1 - \text{س}) + 2(5 - \text{ص}) = 40$$

جَدِّ جميعِ القيمِ الممكنةِ للثابتِ ن.

١٠ ( جَدِّ إحدائيي كلِّ مِنْ نقطتي تقاطعِ الخطِّ المستقيمِ الذي معادلُته (ص = ٣) معَ الدائرةِ التي

$$\text{معادلُها } (2 + \text{س}) + 2(5 - \text{ص}) = 29$$

## اختبار ذاتي

(١) يتكون هذا السؤال من ثماني فقرات من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة أربعة بدائل، واحد منها فقط صحيح، اختر رمز البديل الصحيح لكل منها.

(١) إذا كانت النقطتان  $(١, ٢)$  و  $(٢, ٢)$  نقطتين في المستوى الإحداثي، فإن طول القطعة المستقيمة ومساوي:

- أ (٧) ب (٢٥) ج (٥) د (١)

(٢) ما طول نصف قطر الدائرة التي معادلتها  $٩س + ٩ص = ٩٠٠$ ؟

- أ (٤٥٠) ب (٣٠) ج (٥٠) د (١٠)

(٣) ما إحداثيا مركز الدائرة التي معادلتها  $٢س + ٢ص - ٦س + ٨ص - ١٠ = ٠$ ؟

- أ (٣، -٤) ب (-٣، ٤) ج (٦، -٨) د (-٦، ٨)

(٤) أي النقاط الآتية تقع على محيط الدائرة التي معادلتها  $٢س + ٢(ص - ٢) = ٢٥$ ؟

- أ (٥، ٠) ب (٤، ٥) ج (٠، ٤) د (٠، -٤)

(٥) إذا كانت النقطتان هـ  $(١، ٣)$  و و  $(٣، ١)$  نقطتين في المستوى الإحداثي، وكانت النقطة هـ نقطة منتصف القطعة المستقيمة و ل، فما إحداثيا النقطة ل؟

- أ (٢، ١) ب (-١، ٧) ج (٤، ٢) د (٥، -٥)

(٦) معادلة الخط المستقيم الذي ميله (٥) ويمر بنقطة الأصل هي:

- أ (ص = ٥) ب (ص = ٥س) ج (ص + س = ٥) د (س = ٥ص)

(٧) أي المعادلات الآتية تمثل معادلة دائرة؟

- أ (س + ٢ص = ٢٥) ب (س - ٢ص = ٢٥)

- ج (س + ٢ص + ٤ = ٢٥) د (س - ٢ص = ٢٥)

(٨) ميل الخط المستقيم الذي معادلته  $(٣ - ص) = ٢(٣ - س)$  يساوي:

- أ (٣) ب (-٣) ج (-٢) د (٢)

(٢) أ ب ج مثلث رؤوسه النقاط أ (١، ١)، ب (١، ٧)، ج (٨، ٤):

أ ( يبين أن المثلث أ ب ج متساوي الساقين.

ب) ما مساحة المثلث أ ب ج؟

(٣) ما معادلة الخط المستقيم الذي يمرّ بالنقطتين  $(-١، ٥)$ ،  $(١، -٣)$ ؟

(٤) ما معادلة الدائرة التي طول قطرها (١٠) وحدات ومركزها النقطة  $(-٢، ١)$ ؟

(٥) إذا كانت النقاط ك (٣، ١)، ن  $(-١، -٥)$ ، ل (س، ص) نقاطاً في المستوى الإحداثي، وكان ميل الخط المستقيم ك ل يساوي (١)، وميل الخط المستقيم ن ل يساوي (٢)، فجد إحداثيي النقطة ل.

(٦) إذا كانت النقطة  $(٣، ٥)$  تقع على محيط دائرة مركزها النقطة  $(٢، د)$ ، وكان طول نصف قطر الدائرة يساوي ٥ وحدات:

أ ( جد جميع القيم الممكنة للثابت د.

ب) جد معادلة الدائرة في كل حالة.



١-٧ جيبُ الزاويةِ الحادة.

٢-٧ جيبُ تمامِ الزاويةِ الحادة.

٣-٧ ظلُ الزاويةِ الحادة.

٤-٧ العلاقةُ بينِ النسبِ المثلثيةِ.

٥-٧ حلُّ المثلثِ قائمِ الزاويةِ.

٦-٧ زوايا الارتفاعِ والانخفاضِ.

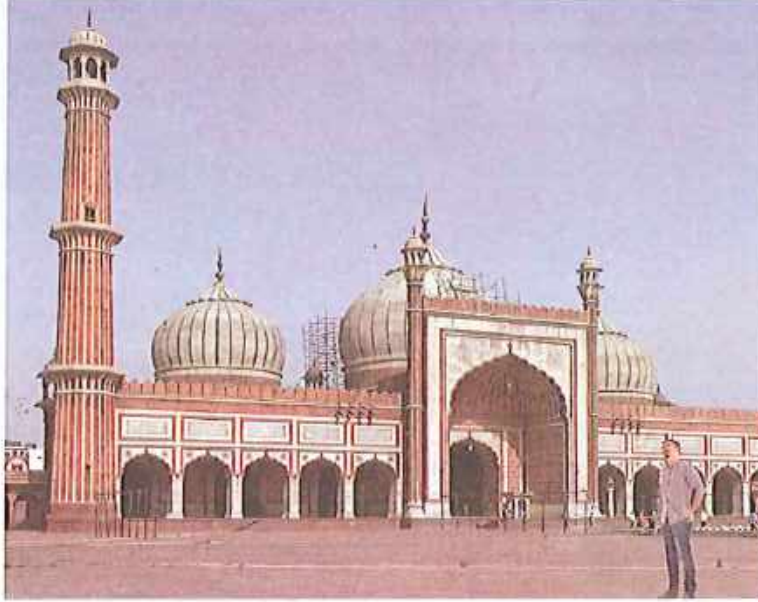
يبحثُ حسابُ المثلثاتِ في العلاقةِ بينِ أطوالِ أضلاعِ المثلثِ، وقياساتِ زواياه، وإيجادِ أطوالِ هذهِ الأضلاعِ، وقياساتِ هذهِ الزوايا.

ويستخدمُ حسابُ المثلثاتِ لحسابِ المسافاتِ والارتفاعاتِ وقياساتِ الزوايا في تطبيقاتٍ حياتيةٍ كثيرةٍ، مثل: إيجادِ ارتفاعاتِ الأبراجِ، والعماراتِ، والأعمدةِ، ودراسةِ حركةِ الصواريخِ، والأقمارِ الصناعيةِ، والمركباتِ الفضائيةِ، ورصدِ النجومِ، كما يُستخدمُ حسابُ المثلثاتِ في الملاحةِ، والمساحةِ، والجغرافيا، والفيزياءِ، وكثيرٍ منِ فروعِ الهندسةِ.



# الوحدة السابعة

## النسب المثلثية



الشكل (٧-١)

يُتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- استقصاء مفاهيم النسب المثلثية (الجيب وجيب التمام والظل).
- إيجاد النسب المثلثية (الجيب وجيب التمام والظل) في المثلث القائم الزاوية.
- حلّ مسائل تتعلق بالمثلث قائم الزاوية.
- استقصاء العلاقات الآتية:  $\text{جاس} = \text{جتا} (90^\circ - \text{س})$ .
- $\text{جتاس} = \text{جا} (90^\circ - \text{س})$ .
- $\text{جا}^2 \text{س} + \text{جتا}^2 \text{س} = 1$ .
- $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} = \text{ظاس}$ .
- استخدام النسب المثلثية (الجيب وجيب التمام والظل) في حلّ المثلث القائم الزاوية.
- حلّ مسائل حياتية تتعلق بزوايا الارتفاع والانخفاض.

## تهئية

١) س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص، فيه: س ص = ٨ سم، ص ع = ٦ سم، جد س ع.

٢) يقف حمزة على النقطة (أ) التي تبعد ١٢ م عن قاعدة بناية ارتفاعها ٥ م.

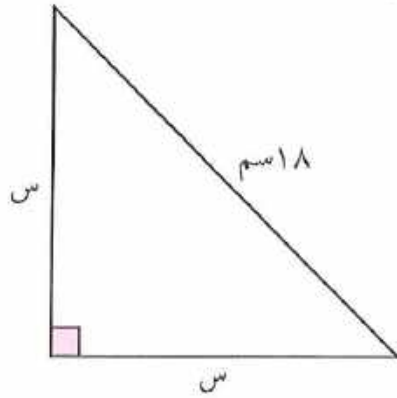
أ) ارسم شكلاً هندسياً يوضح المسألة.

ب) جد البعد بين النقطة (أ) وقمة البناية.

٣) ما مجموع قياسات زوايا المثلث؟

٤) مثلث قائم الزاوية قياس إحدى زواياه الحادة يساوي  $35^\circ$ ، فما قياس الزاوية الثالثة؟

٥) جد قيمة س في الشكل الآتي:



٦) حل المعادلات الآتية:

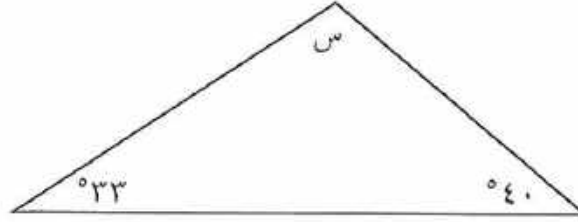
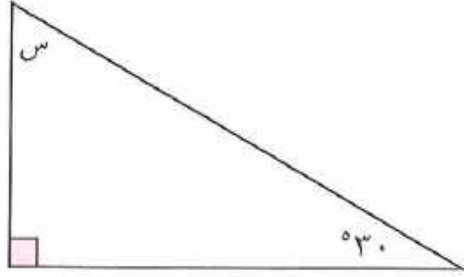
أ)  $١ = ٠,٣٦ + ٢س$

ب)  $٠,٤ = \frac{س}{٥}$

ج)  $٢ = \frac{٣}{ص}$

د)  $٩٠ - س٢ = ٣ + ٥س$

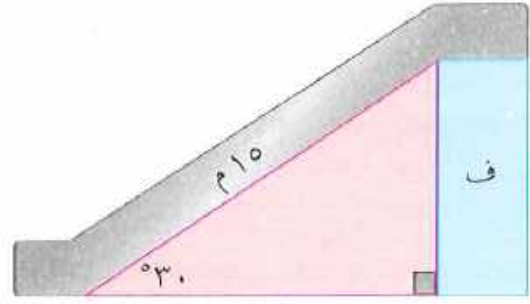
٧ ما قياسُ الزوايا المجهولة في المثلثات الآتية؟



## جيب الزاوية الحادة

٧-١

يبين الشكل (٧-١) سلماً كهربائياً طوله ١٥ م، وقياس الزاوية



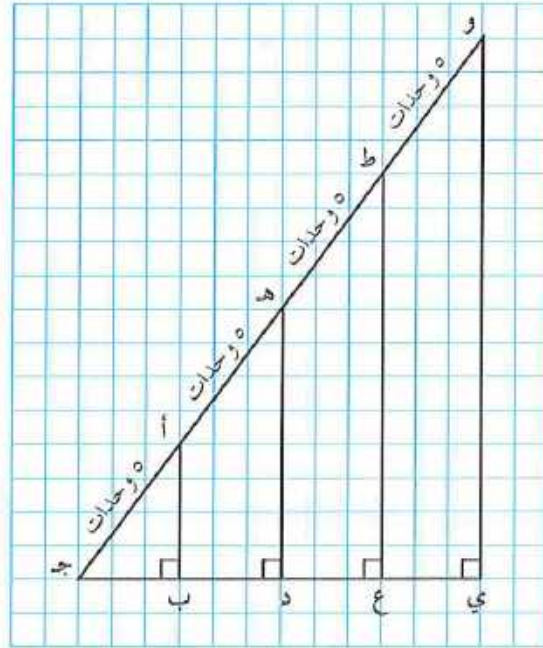
الشكل (٧-١)

التي يكونها مع الأرض  $30^\circ$ ، جد ارتفاع أعلى السلم (ف) عن سطح الأرض.

### النتائج

- تحسب جيب زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية.
- تحسب قياس الزاوية إذا عُلم جيبها.
- تحل مسائل عملية على الجيب.

الشكل (٧-٢) فيه ج زاوية حادة مشتركة في كل من المثلثات القائمة الزاوية: أ ب ج، هـ د ج، ط ع ج، و ي ج، تأمل الشكل وأمل الفراغات في الجدول الآتي:



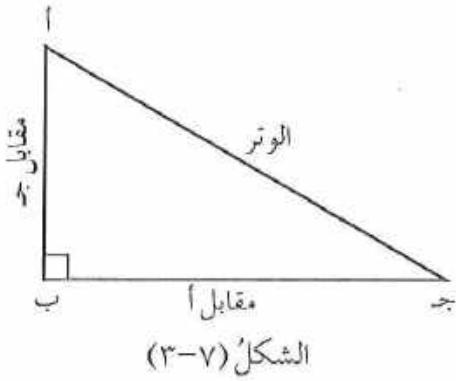
الشكل (٧-٢)

| المثلث | طول المقابل (بالوحدة) | طول الوتر (بالوحدة) | المقابل الوتر |
|--------|-----------------------|---------------------|---------------|
| أ ب ج  | ٤                     | ٥                   | $\frac{٤}{٥}$ |
| هـ د ج | ٨                     | ١٠                  |               |
| ط ع ج  |                       |                     |               |
| و ي ج  |                       |                     |               |

ماذا تلاحظ على النسبة  $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$  ؟

لا بُدَّ أنكَ لاحظت أنَّ النسبة ثابتة، وتمثل النسبة  $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$  نسبة طول الضلع المقابل للزاوية ج إلى طول الوتر في المثلث قائم الزاوية، وهي نسبة ثابتة، وتسمى هذه النسبة **جيب الزاوية الحادة ج**، ويُرمز لها بالرمز (جا ج).





الشكل (٣-٧) يمثل مثلثاً قائم الزاوية، نسبة طول الضلع المقابل للزاوية الحادة إلى طول الوتر تُسمى **جيب الزاوية**، ويُرمز لها بالرمز (جا) وبالإنجليزية (Sine) ونُقرأ (صاين)، واختصاراً (sin).

$$\text{جا أ} = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية أ}}{\text{طول الوتر}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}}$$

### نشاط (١-٧)

ابحث في الإنترنت عن سبب تسمية جيب الزاوية بهذا الاسم.

مثال (١-٧):

في الشكل (٤-٧)، أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب، فيه أ ب = ٩ سم، ب ج = ١٢ سم، جد كلاً مما يأتي:  
 (١) أ ج (٢) جا أ (٣) ج ج (٤) جا<sup>٢</sup> أ + جا<sup>٢</sup> ج

الحل:

(١) من الشكل (٤-٧)، ووفق نظرية فيثاغورس:

$$(\text{أ ج})^2 = (\text{أ ب})^2 + (\text{ب ج})^2$$

$$= 9^2 + 12^2$$

$$= 81 + 144 = 225$$

إذن طول الوتر أ ج =  $\sqrt{225} = 15$  سم.

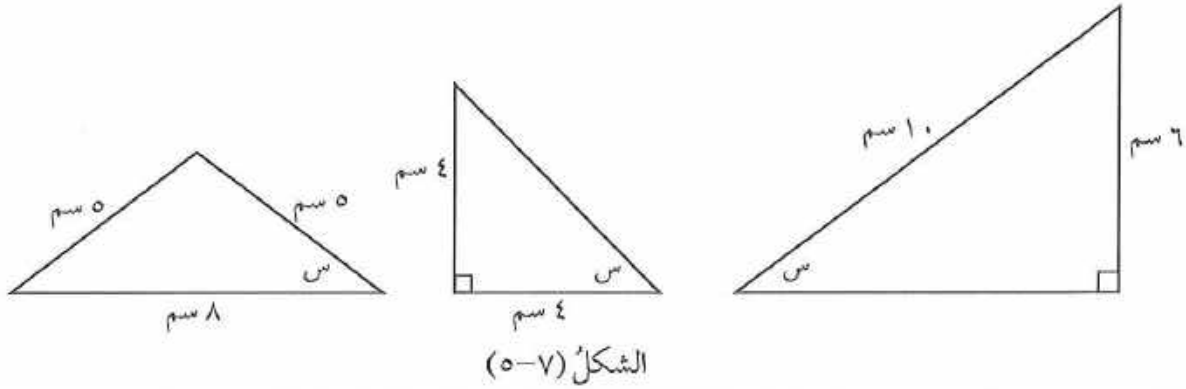
$$(٢) \text{ جا أ} = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية أ}}{\text{طول الوتر}} = \frac{12}{15}$$

$$(٣) \text{ ج ج} = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية ج}}{\text{طول الوتر}} = \frac{9}{15}$$

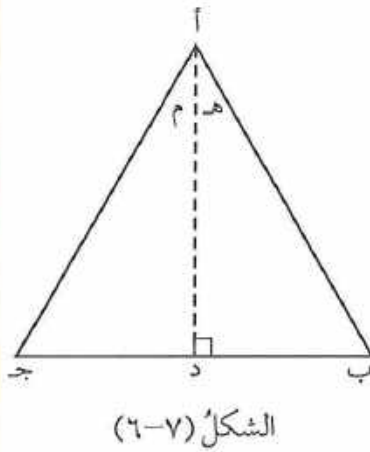
$$(٤) \text{ جا}^2 \text{ أ} + \text{جا}^2 \text{ ج} = 1 \text{ لماذا؟}$$

ناقش أ ج ≠ ١٥. لماذا؟

احسب جاس في كل من المثلثات الآتية:



في الشكل (٦-٧)، أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع، نُصِفَت الزاوية أ حيثُ أُسِقِطَ عمودٌ من (أ) على منتصفِ الضلعِ ب جـ في النقطة د، أجب عما يأتي:



- أ) ما قياس كل من:  $\angle A$ ،  $\angle B$ ،  $\angle C$ ؟ برّر إجابتك.  
 ب) ما قياس كل من:  $\angle D$ ،  $\angle A$ ،  $\angle B$ ؟ برّر إجابتك.  
 ج) ماذا تلاحظ على أطوال الأضلاع المتناظرة، وقياسات الزوايا المتناظرة في المثلثين أ د ب، أ د جـ؟

مثال (٢-٧):

في التدريب (٢-٧)، افرض أن طول أ ب يساوي س، ثم جد كلاً مما يأتي:

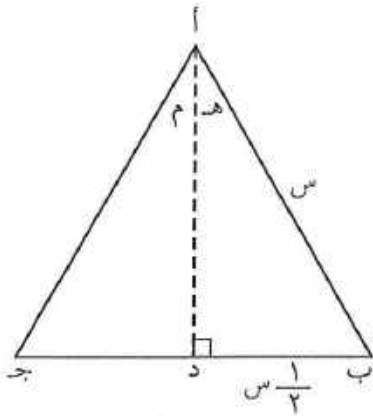
- ١) طول ب د ٢) طول أ د ٣) جاب ٤) جـ هـ

الحل:

١) بما أن أ د يُنصّف ب جـ، وأن المثلث متساوي الأضلاع كما في الشكل (٧-٧) فإن:

$$\text{طول ب د} = \text{طول د جـ} = \frac{1}{2} \text{ س}$$

$$٢) (\text{أ ب})^2 = (\text{ب د})^2 + (\text{أ د})^2$$



نظرية فيثاغورس

$$س^2 = \frac{1}{4} س^2 + (أد)^2$$

$$(أد)^2 = س^2 - \frac{1}{4} س^2 = س^2 \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow أد = س \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**سؤال:** لماذا  $أد \neq س \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ ؟

$$(3) \text{ جاب} = \frac{س \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{س} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(4) \text{ جاه} = \frac{\frac{1}{2} س}{س} = \frac{1}{2}$$

### • فكر

هل يمكنك استنتاج قيمة كل من جاب  $30^\circ$ ، جاب  $60^\circ$  من خلال حل المثال (7-2)؟

تستخدم الآلة الحاسبة في إيجاد جيب زاوية معلومة عن طريق فتح الآلة الحاسبة وإدخال قياس الزاوية، ثم الضغط على المفتاح «sin».

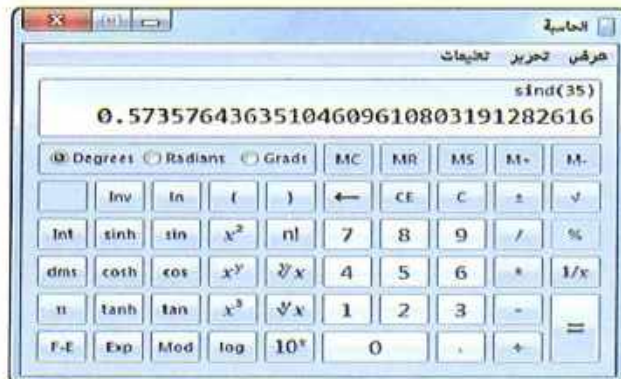
كما تستخدم في إيجاد قياس الزاوية إذا علم قيمة الجيب لها عن طريق فتح الآلة الحاسبة وإدخال قيمة جيب الزاوية، ثم الضغط على المفتاح «Inv» ثم الضغط على المفتاح «sin».

مثال (7-3):

استخدم الآلة الحاسبة في إيجاد جاب  $35^\circ$

**الحل:** نفتح الآلة الحاسبة وندخل قياس الزاوية  $35^\circ$ ، ثم نضغط على المفتاح «sin» فيكون الناتج

$$\text{جاب } 35^\circ = 0.57357643635104609610803191282616 \approx 0.57$$



أنظر الشكل (7-8)

الشكل (7-8)

### مثال (٧-٤):

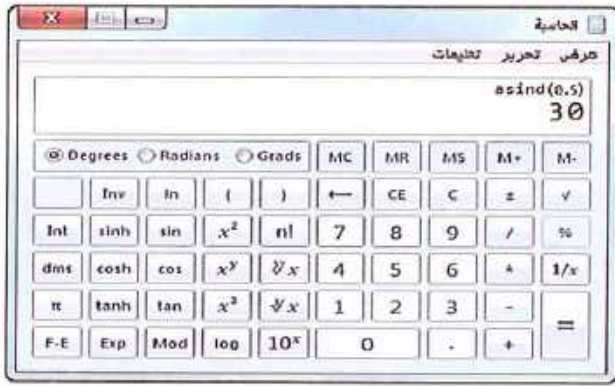
إذا علمت أن جاس = ٠,٥، فجدّ قياس الزاوية س.

**الحل:** نفتح الآلة الحاسبة ونُدخل قيمة جيب الزاوية

(٠,٥)، ثم نضغط على المفتاح «Inv» ثم

على المفتاح «sin<sup>-1</sup>» فيكون الناتج قيمة

الزاوية س = ٣٠°، أنظر الشكل (٧-٩).



الشكل (٧-٩)

### مثال (٧-٥):

قام لاعبٌ بالترليج من تلةٍ ارتفاعها (١٠٠) م، وقياسُ زاوية ميلها عن سطح الأرض ١٨°، كما في

الشكل (٧-١٠) أحسب طول مسار التزلج ل.

**الحل:** جا ١٨° =  $\frac{100}{L}$

جا ١٨° = ٠,٣٠٩٠ «باستخدام الآلة الحاسبة».

$$100 = 0,3090 \times L$$

$$\text{أي أن } L = 100 \div 0,3090$$

$$L = 324 \text{ م تقريبًا.}$$



الشكل (٧-١٠)

### تدريب ٧-٣

حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

### مثال (٧-٦):

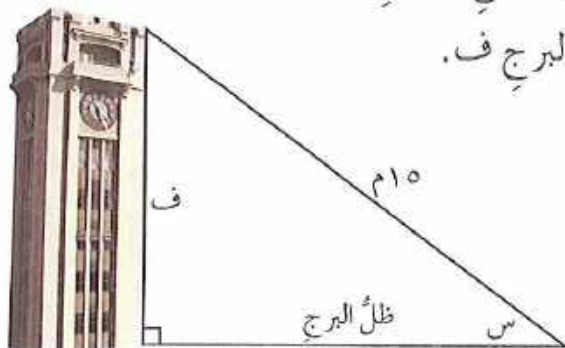
في لحظةٍ ما كانت المسافة بين قمة برج ورأس ظلّه على سطح الأرض تساوي (١٥) مترًا، وكان

جاس = ٠,٦، كما في الشكل (٧-١١)، جدّ ارتفاع البرج ف.

**الحل:** جاس = ٠,٦

$$0,6 = \frac{F}{15}$$

$$F = 15 \times 0,6 = 9 \text{ م.}$$



الشكل (٧-١١)

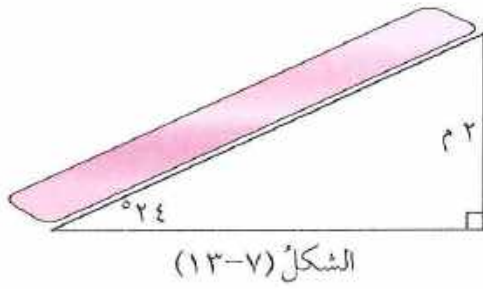
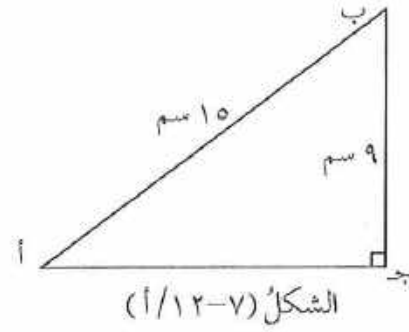
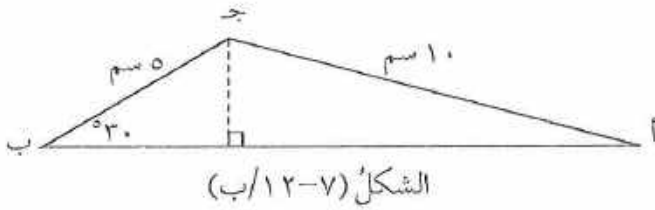


## تمارين ومسابقات

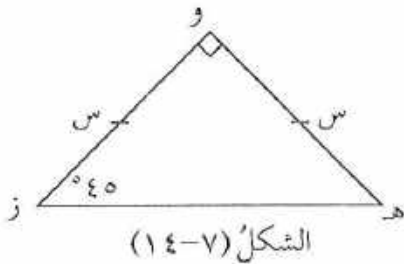
(١) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، فيه أ ب = ٦ سم، ب جـ = ٨ سم، جـ د كلاً مما يأتي:  
(أ) أ جـ (ب) جـ أ (ج) جـ ب

(٢) س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص، فيه س ص = ٥ سم، ص ع = ١٢ سم، جـ د:  
(أ) س ع (ب) جـ س (ج) قياس الزاوية س باستخدام الآلة الحاسبة.

(٣) احسب جـ أ، جـ ب، في الشكلين (أ/١٢-٧)، (ب/١٢-٧)

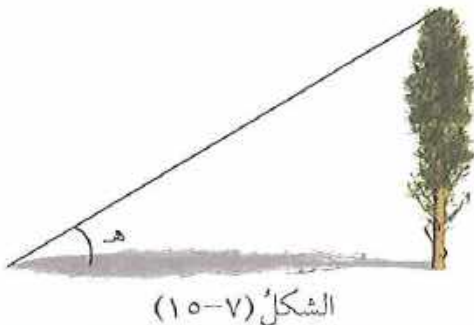


(٤) جـ د طول لوح تزلج يرتفع أحد طرفيه عن الأرض (٢) م، ويصنع طرفه الآخر مع الأرض زاوية قياسها  $24^\circ$ ، انظر الشكل (١٣-٧).



(٥) هـ و ز مثلث قائم الزاوية في و، كما في الشكل

$$(١٤-٧) \text{ أثبت أن جـ أ} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$



(٦) شجرة ارتفاعها (١٠) م، كما في الشكل (١٥-٧)، إذا كان جـ أ = ٠,٥، فجد المسافة بين قمة الشجرة ورأس الظل.

## جيب تمام الزاوية الحادة

٢ - ٧

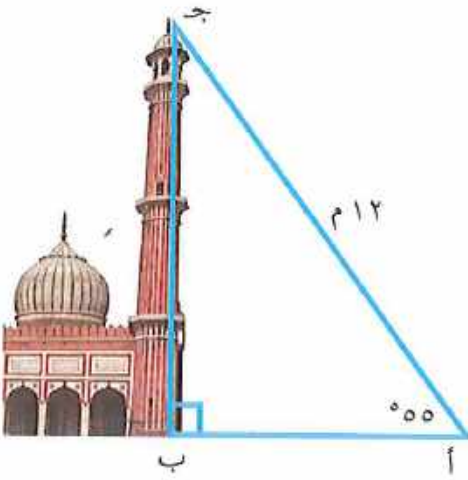
### النتائج

- تحسب جيب تمام زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية.
- تحسب قياس الزاوية إذا عُلِمَ جيب تمامها.
- تحل مسائل عملية على جيب التمام.

رصد شخص من النقطة أ منبئة مسجد، حيث تبعد النقطة أ (١٢) م عن قمة المنبئة، فإذا كان قياس الزاوية أ =  $55^\circ$ ، فجد:

(١) بُعد النقطة أ عن المسجد.

(٢) ارتفاع المنبئة عن سطح المسجد، إذا كان ارتفاع المسجد (٥) م.



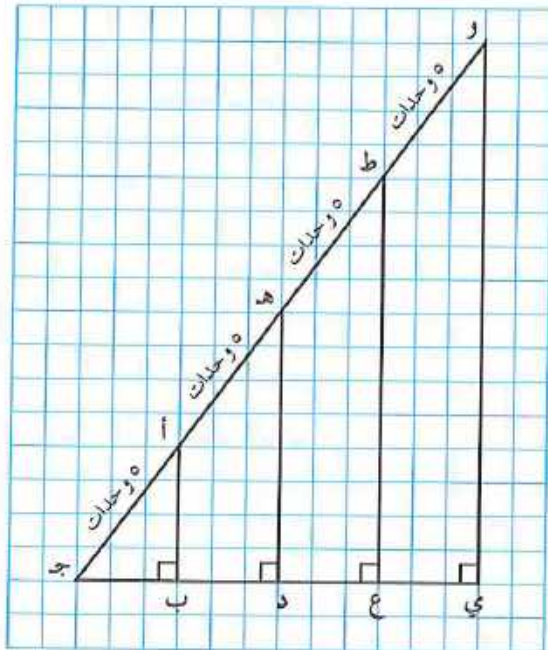
الشكل (١٦-٧)

الشكل (١٧-٧) فيه جـ زاوية حادة مشتركة في كلٍّ من المثلثات القائمة الزاوية: أ ب جـ، هـ د جـ، ط ع جـ، و ي جـ، تأمل الشكل وأملأ الفراغات في الجدول الآتي:

| المثلث  | طول المجاور (بالوحدة) | طول الوتر (بالوحدة) | المجاور الوتر |
|---------|-----------------------|---------------------|---------------|
| أ ب جـ  | ٣                     | ٥                   | $\frac{٣}{٥}$ |
| هـ د جـ | ٦                     | ١٠                  |               |
| ط ع جـ  |                       |                     |               |
| و ي جـ  |                       |                     |               |

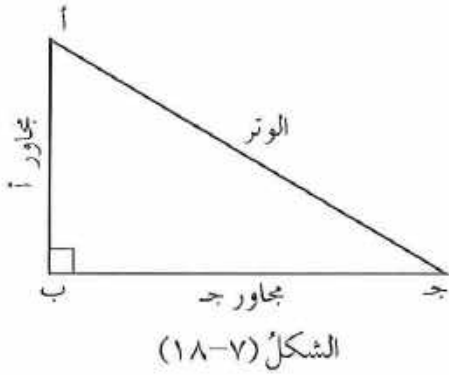
ماذا تلاحظ على النسبة  $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$  ؟

لا بُدَّ أنك لاحظت أنَّ النسبة ثابتة، وتمثل النسبة  $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$  نسبة طول الضلع المجاور للزاوية جـ إلى طول الوتر في المثلث قائم الزاوية، وهي نسبة ثابتة، وتسمى هذه النسبة **جيب تمام الزاوية الحادة جـ**، ويُرمز لها بالرمز (جتا جـ).



الشكل (١٧-٧)

الشكل (٧-١٨) يمثّل مثلثًا قائم الزاوية، نسبة طول الضلع المجاور للزاوية الحادة إلى طول الوتر تُسمى **جيب تمام الزاوية**، ويُرمز لها بالرمز (جتا) وبالإنجليزية (Cosine) وتُقرأ (كوساين)، واختصارًا (cos).



$$\text{جتا ج} = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية ج}}{\text{طول الوتر}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}}$$

### نشاط (٧-٢)

ابحث في الإنترنت عن سبب تسمية جيب تمام الزاوية بهذا الاسم.

مثال (٧-٧):

أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب، فيه أ ب = ٣ سم، ب ج = ٤ سم، جد كلاً مما يأتي:  
(١) أ ج (٢) جتا أ (٣) جتا ج (٤) جا أ (٥) جا ج ماذا تلاحظ؟

الحل:

(١) من الشكل (٧-١٩)، ووفق نظرية فيثاغورس:

$$(\text{أ ج})^2 = (\text{أ ب})^2 + (\text{ب ج})^2$$

$$= ٣^2 + ٤^2$$

$$= ٩ + ١٦ = ٢٥$$

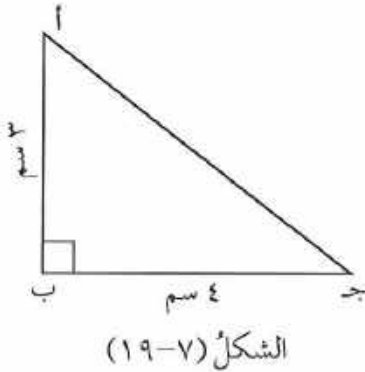
إذن طول الوتر أ ج =  $\sqrt{٢٥} = ٥$  سم.

$$(٢) \text{ جتا أ} = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية أ}}{\text{طول الوتر}} = \frac{٣}{٥}$$

$$(٣) \text{ جتا ج} = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية ج}}{\text{طول الوتر}} = \frac{٤}{٥}$$

$$(٤) \text{ جا أ} = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية أ}}{\text{طول الوتر}} = \frac{٤}{٥}$$

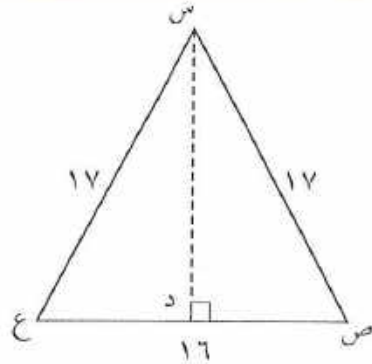
$$(٥) \text{ جا ج} = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية ج}}{\text{طول الوتر}} = \frac{٣}{٥}$$





تلاحظ أن  $\text{جا أ} = \text{جتا ج}$  ،  $\text{جا ج} = \text{جتا أ}$  ، كما تلاحظ أن الزاويتين أ ، ج متتامتان (مجموعهما  $90^\circ$ ) وسندرس لاحقاً العلاقة بين جيب الزاوية وجيب تمام متممتها.

#### تدريب ٧-٤



الشكل (٧-٢٠)

في الشكل (٧-٢٠): إذا كان  $\text{س ص} = \text{س ع} = ١٧ \text{ سم}$   
 $\text{ص ع} = ١٦ \text{ سم}$ ، فجد كلاً مما يأتي:  
 جاع ، جتا ع ، جتا د ، د س ع

#### تدريب ٧-٥

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، فيه  $\text{أ ب} = \text{ب ج} = \text{س}$ ، جد:  
 أ (  $\text{ق د} + \text{ق ج}$  ) ب (  $\text{أ ج}$  ) ج (  $\text{جتا أ}$  ) د (  $\text{جا أ}$  )  
 هـ (  $\text{جتا ج}$  ) و (  $\text{جا ج}$  ) ز (  $\text{جتا أ}^2 + \text{جتا ج}^2$  ) (  $90^\circ - \text{أ}$  )

#### فكر

هل يمكنك استخدام تدريب (٧-٥) لإيجاد  $\text{جا } 45^\circ$ ،  $\text{جتا } 45^\circ$ ؟ برّر إجابتك.

**ناقش** قالت ليان: إذا كانت هـ زاوية حادة فإن: (١)  $\text{جا هـ} > ١$  (٢)  $\text{جتا هـ} > ١$

مثال (٧-٨):

جد ما يأتي باستخدام الآلة الحاسبة:

(١)  $\text{جتا } 64^\circ$

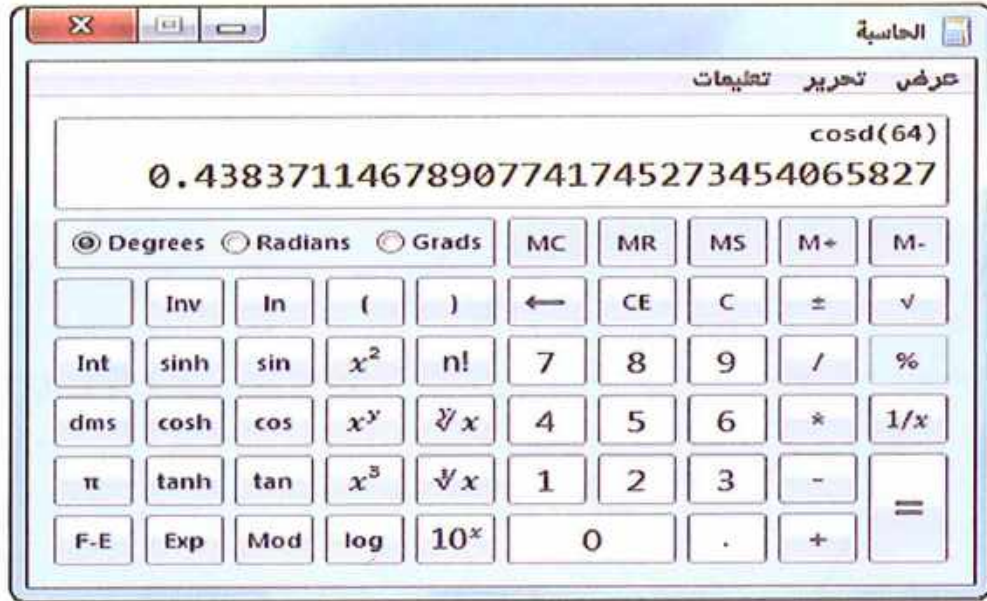
(٢) إذا كان  $\text{جتا هـ} = 0,87$ ، فجد قياس الزاوية هـ.

**الحل:**

(١) نفتح الآلة الحاسبة وندخل قياس الزاوية  $64^\circ$ ، ثم نضغط على المفتاح «cos» فيكون الناتج

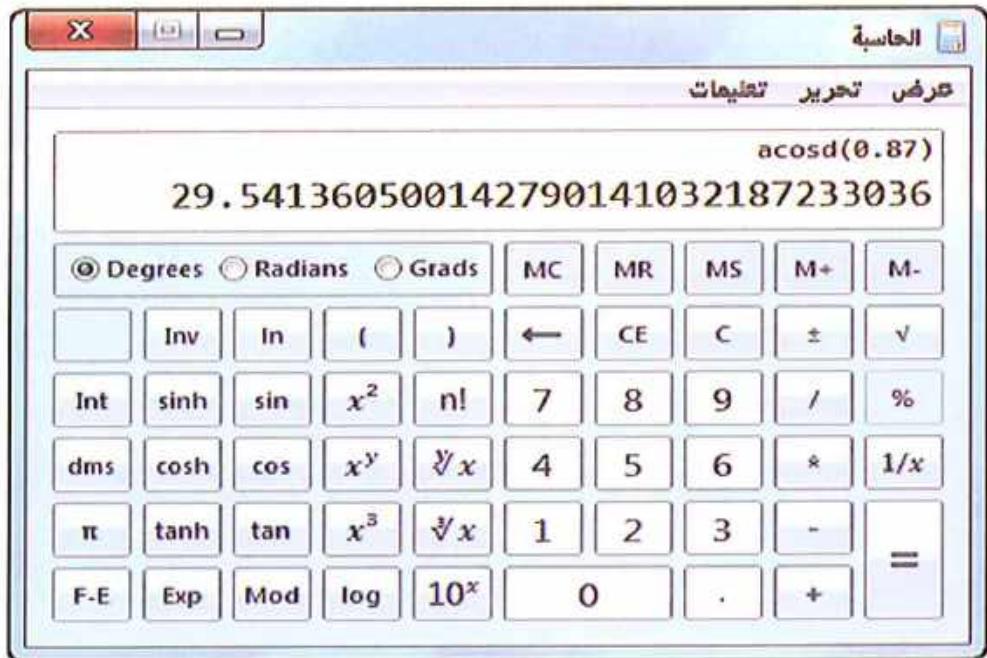
$\text{جتا } 64^\circ = 0,43837114678907741740273404060827 = 0,44$  تقريباً.





الشكل (٧-٢١)

(٢) ولإيجاد قيمة الزاوية هـ نُدخل قيمة جيب تمام الزاوية ٨٧,٠، ثم نضغط على المفتاح «Inv» ثم على المفتاح « $\cos^{-1}$ » فيكون الناتج قياس الزاوية هـ =  $29,٥٤^\circ$  تقريبًا.



الشكل (٧-٢٢)

مثال (٧-٩):

ربطت شركة الكهرباء عمود كهرباء من قمته إلى نقطة على الأرض تبعد عن قاعدته (٤) م، فإذا كان السلك يكون مع الأرض زاوية قياسها  $64^\circ$ ، فجد طول السلك، ثم جد طول العمود.

## الحل:

نفرض أنّ طول السلك س، وطول العمود ف كما في الشكل (٧-٢٣).

$$\frac{4}{س} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \cos 64^\circ$$

جتا  $64^\circ = 0,4383$  عن طريق الآلة الحاسبة

$$\frac{4}{س} = 0,4383$$

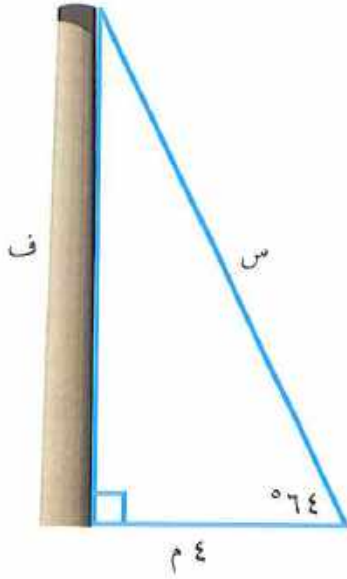
$$\text{ومنهُ س} = \frac{4}{0,4383} = 9,1 \text{ م طول السلك تقريبا.}$$

ولإيجاد طول العمود فإن:

$$\frac{ف}{س} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \sin 64^\circ$$

جا  $64^\circ = 0,8987$  عن طريق الآلة الحاسبة

$$\frac{ف}{9,1} = 0,8987 \text{ ، ومنهُ ف} = 9,1 \times 0,8987 = 8,17 \text{ م طول العمود تقريبا.}$$



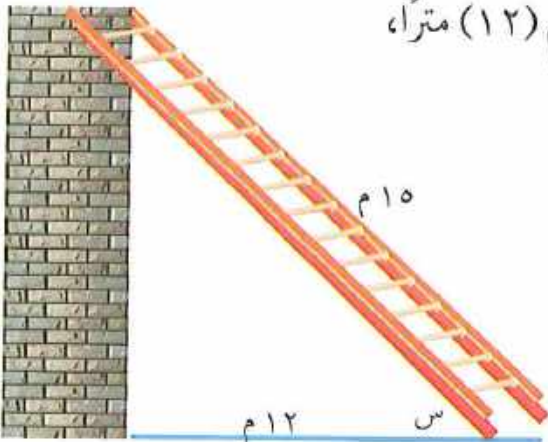
الشكل (٧-٢٣)

## تدريب ٦-٧

حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

## مثال (٧-١٠):

سلم طوله (١٥) متراً يتكئ طرفه العلوي على حائط رأسي وطرفه السفلي على أرض أفقية، فإذا كانت المسافة بين قاعدة الحائط والطرف السفلي للسلم (١٢) متراً، فجدّ قياس الزاوية (س) بين السلم وسطح الأرض.



الشكل (٧-٢٤)

## الحل:

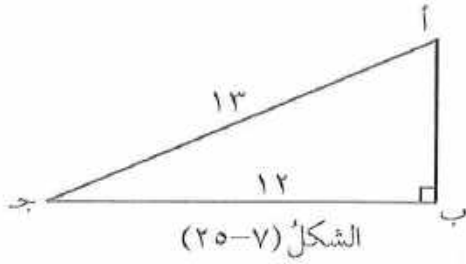
$$\frac{12}{15} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \cos س$$

$$\text{ومنهُ جتا س} = 0,8$$

وبالتالي  $س = 37^\circ$  تقريباً «باستخدام الآلة الحاسبة»

## تمارين ومسابائل

(١) أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب ، كما في الشكل (٧-٢٥) ، فيه أ ج = (١٣) سم ،



ب ج = (١٢) سم ، ج د كلاً مما يأتي :

أ ( أ ب ) جتا أ

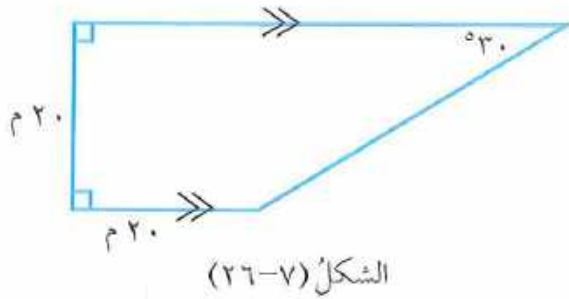
ب ( ب جتا أ ) جتا ج

(٢) ل م ن مثلث متساوي الساقين فيه ل م = ل ن = (١٠) سم ، م ن = (١٦) سم ، ج د :

أ ( أ ج م ) جتا م

ب ( ب جتا ن ) جتا م

(٣) يمثل الشكل (٦-٢٦) قطعة أرض على شكل شبه منحرف .

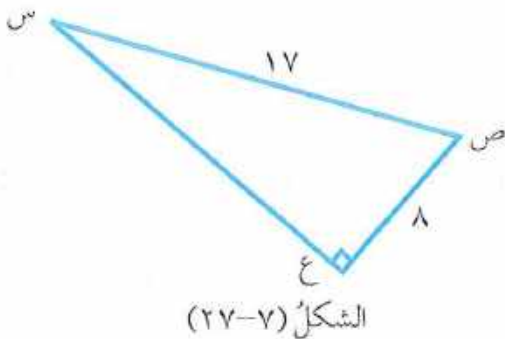


أحسب محيط قطعة الأرض .

(٤) أ ب ج د مستطيل فيه : أ ب = (٥٠) سم ، ب ج = (١٢٠) سم ، ج د جتا د أ ج د .

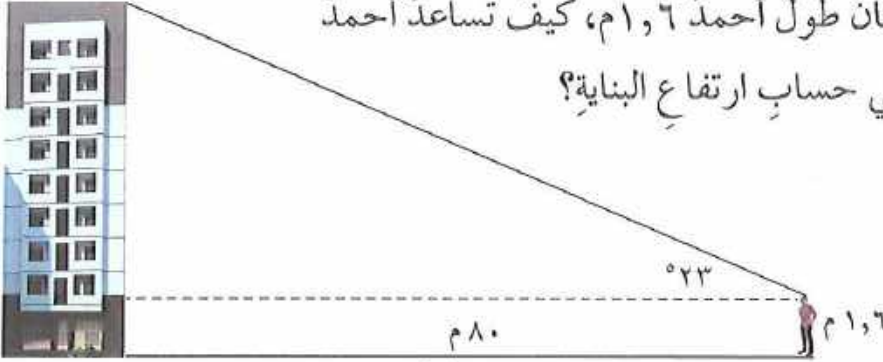
(٥) إذا كانت (س) زاوية حادة ، بحيث ج ا س = جتا س ، فما قيمة س ؟

(٦) في الشكل (٧-٢٧) ج د قياس الزاوية ص .





وقف أحمد على بعد ٨٠ م من قاعدة بناية، وكان قياس الزاوية المحصورة بين خط نظره المارّ بقمة البناية والخط الأفقي  $23^\circ$ ، إذا كان طول أحمد ١,٦ م، كيف تساعد أحمد في حساب ارتفاع البناية؟



الشكل (٧-٢٨)

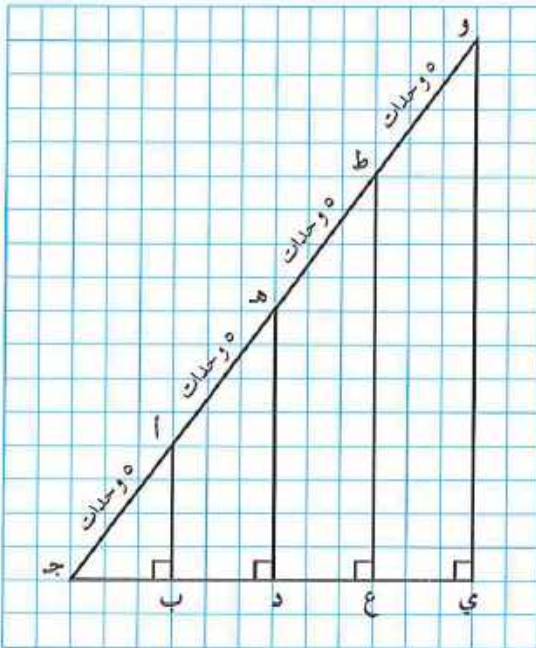
النتائج

- تحسب ظل زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية.
- تحسب قياس الزاوية إذا عُلِمَ ظلّها.
- تحلّ مسائل عملية على الظلّ.

الشكل (٧-٢٩) فيه جـ زاوية حادة مشتركة في كلٍّ من المثلثات القائمة الزاوية:

أ ب جـ، هـ د جـ، ط ع جـ، و ي جـ،

تأمّل الشكل واملأ الفراغات في الجدول الآتي:



الشكل (٧-٢٩)

| المثلث  | طول المقابل (بالوحدة) | طول المجاور (بالوحدة) | المقابل المجاور |
|---------|-----------------------|-----------------------|-----------------|
| أ ب جـ  | ٤                     | ٣                     | $\frac{٤}{٣}$   |
| هـ د جـ | ٨                     | ٦                     |                 |
| ط ع جـ  |                       |                       |                 |
| و ي جـ  |                       |                       |                 |

ماذا تلاحظ على النسبة  $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$  ؟

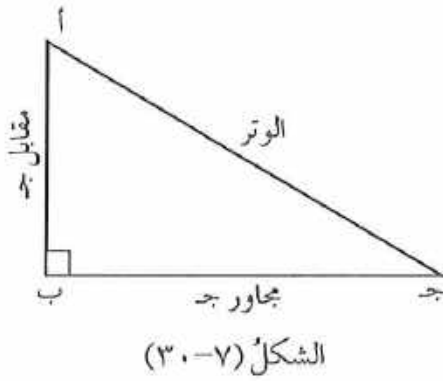
لا بُدَّ أنكَ لاحظت أنَّ النسبة ثابتة، وتمثّل النسبة  $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$  نسبة طول الضلع المقابل للزاوية جـ

إلى طول الضلع المجاور في المثلث قائم الزاوية، وهي نسبة ثابتة، وتُسمى هذه النسبة **ظل الزاوية**

الحادة جـ، ويُرمز لها بالرمز (ظا جـ).



الشكل (٣٠-٧) يمثّل مثلثًا قائم الزاوية، نسبة طول الضلع المقابل للزاوية الحادة إلى طول الضلع المجاور تُسمى **ظل الزاوية**، ويرمز لها بالرمز **(ظا)** وبالإنجليزية **(Tangent)** وتقرأ (تانجنت)، واختصارًا **(tan)**.



$$\text{ظا ج} = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية ج}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية ج}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب ج}}$$

مثال (١١-٧):

أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب، فيه أ ب = (٥) سم، ب ج = (١٢) سم، ج د كلاً ممّا يأتي:

(١) أ ج (٢) ظا أ (٣) ظا ج (٤) جا أ (٥) جتا أ

الحل:

(١) من الشكل (٣١-٧)، ووفق نظرية فيثاغورس:

$$(\text{أ ج})^2 = (\text{أ ب})^2 + (\text{ب ج})^2$$

$$= ٥^2 + ١٢^2$$

$$= ٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩$$

إذن طول الوتر أ ج =  $\sqrt{١٦٩} = ١٣$  سم.

$$(٢) \text{ ظا أ} = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية أ}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية أ}} = \frac{١٢}{٥}$$

$$(٣) \text{ ظا ج} = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية ج}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية ج}} = \frac{٥}{١٢}$$

$$(٤) \text{ جا أ} = \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية أ}}{\text{طول الوتر}} = \frac{١٢}{١٣}$$

$$(٥) \text{ جتا أ} = \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية أ}}{\text{طول الوتر}} = \frac{٥}{١٣}$$

**سؤال:** من خلال المثال (١١-٧) هل يمكنك التوصل إلى علاقة بين جا أ، جتا أ، ظا أ؟

## • فِكْرٌ

متى يكون ظاهر  $= 1$ ، حيث هـ زاوية حادة؟

## تدريب ٧-٧

س ص ع مثلث قائم في ص، فيه: س ص = ٢ سم، س ع = ٣ سم، جـ ظا س، ظا ع.

## ناقش

قال رعد: إذا كانت هـ زاوية حادة، فإن ظاهر  $\geq 1$ .

## مثال (٧-١٢):

جـ ما يأتي باستخدام الآلة الحاسبة:

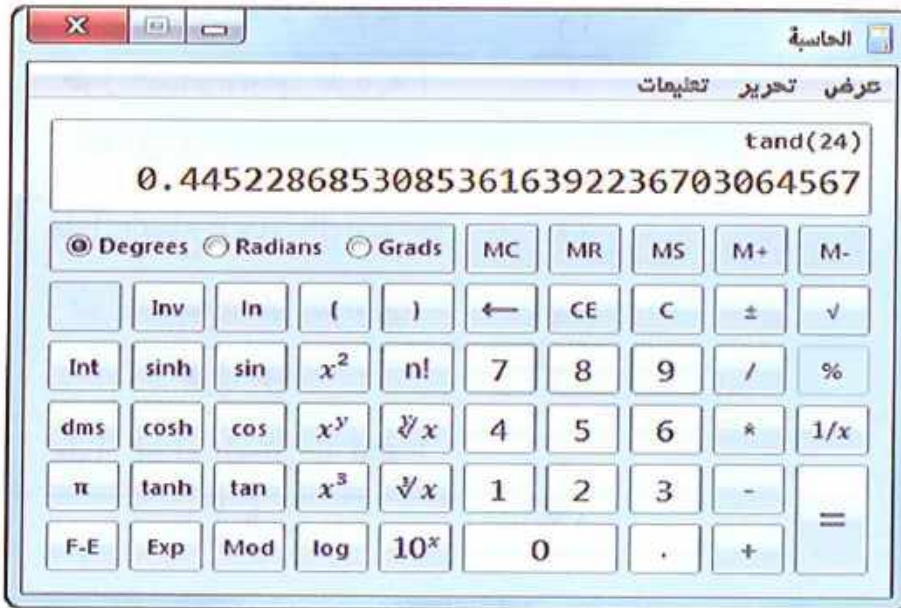
(١) ظا  $24^\circ$

(٢) إذا كان ظاهر  $= 1,83$ ، فجد قياس الزاوية هـ.

## الحل:

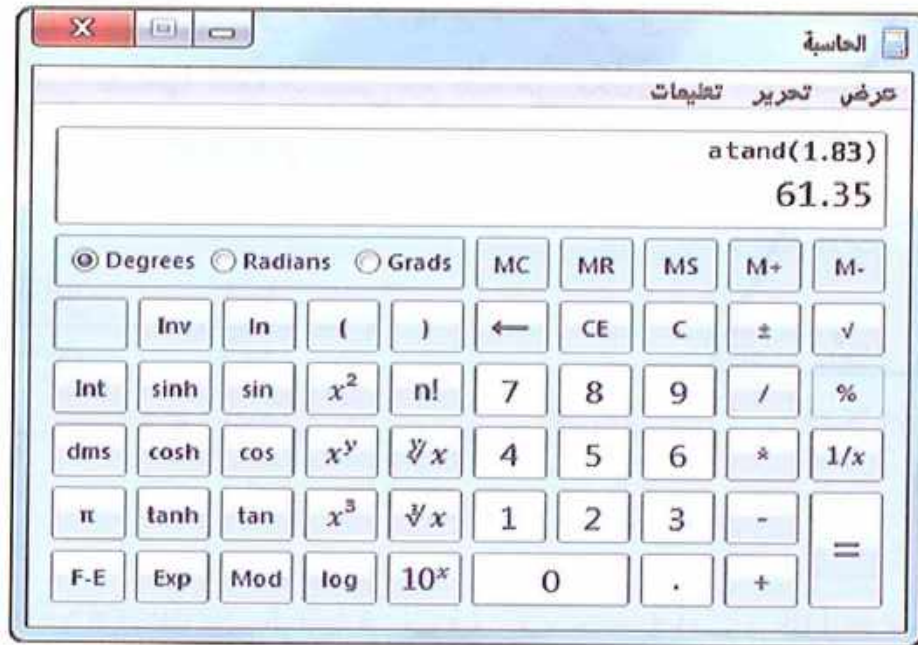
(١) نفتح الآلة الحاسبة وندخل قياس الزاوية  $24^\circ$ ، ثم نضغط على المفتاح «tan» فيكون الناتج

ظا  $24^\circ = 0,4452$ ، تقريباً أنظر الشكل (٧-٣٢).



الشكل (٧-٣٢)

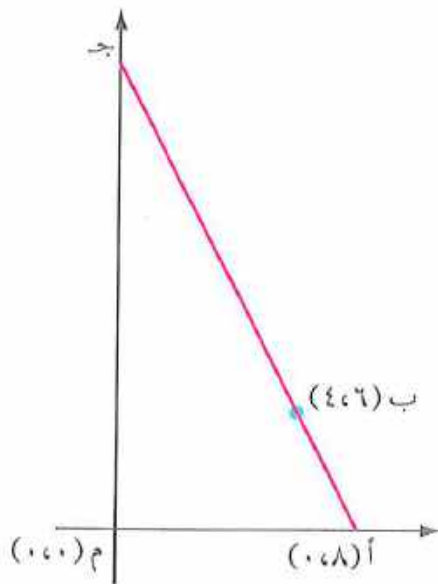
(٢) ولإيجاد قيمة الزاوية هـ نُدخل قيمة ظل الزاوية ٨٣, ١، ثم نضغطُ على المفتاح «Inv» ثم على المفتاح « $\tan^{-1}$ » فيكون الناتج قيمة الزاوية ٦١, ٣٥ تقريباً، أنظر الشكل (٧-٣٣).



الشكل (٧-٣٣)

#### تدريب ٧-٨

في الشكل (٧-٣٤): أ (٨, ٠)، ب (٦, ٤)، م (٠, ٠) والنقطة ج تقع على محور الصادات الموجب. جـ:  
أ) ظا م أ جـ.  
ب) إحداثيا النقطة جـ.



الشكل (٧-٣٤)

مثال (٧-١٣):

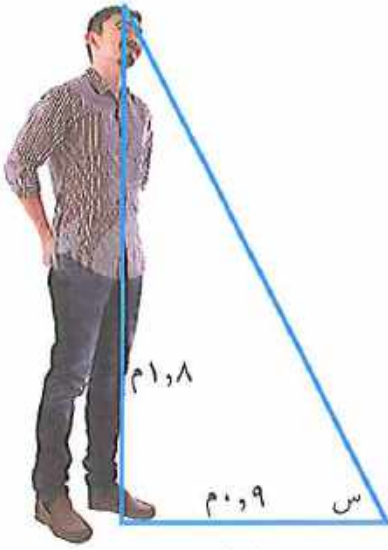
رجل طوله ١,٨ م، في لحظة ما كان طول ظله على أرض مستوية (٠,٩ م)، كما في الشكل (٧-٣٥)، أراد هذا الرجل معرفة الزاوية التي تصنعها أشعة الشمس مع ظله هل يمكنك مساعدة الرجل في تحديد تلك الزاوية؟

الحل:

$$\text{ظاس} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{1,8}{0,9} = 2$$

ظاس = 2 ومنه س = ٦٣,٤ ° تقريباً عن طريق الآلة الحاسبة

الشكل (٧-٣٥)



مثال (٧-١٤):

يمثل الشكل (٧-٣٦) مثلثاً قائم الزاوية في ب فيه: ب ج = ١٤ سم، ظا =  $\frac{7}{3}$ ، جـد طول أ ب.

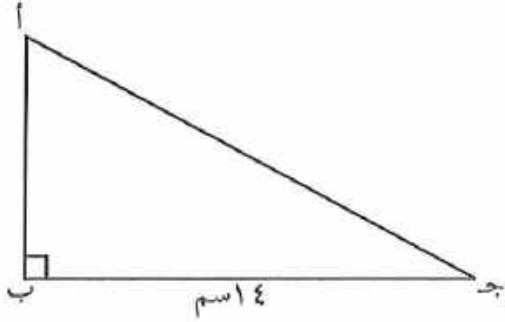
الحل:

$$\text{ظا} = \frac{\text{ب ج}}{\text{أ ب}} = \frac{7}{3}$$

$$\text{ومنهُ،} \quad \frac{7}{3} = \frac{14}{\text{أ ب}}$$

$$\text{ومنهُ،} \quad \text{أ ب} = \frac{14 \times 3}{7}$$

$$\text{ومنهُ،} \quad \text{أ ب} = 6 \text{ سم.}$$



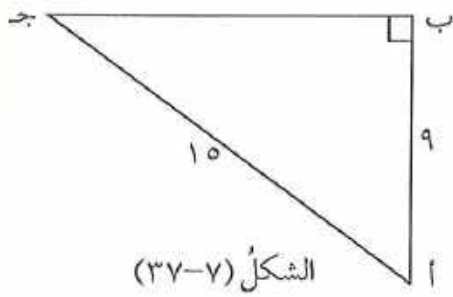
الشكل (٧-٣٦)

تدريب ٧-٩

حل المسألة الواردة في بداية الدرس.



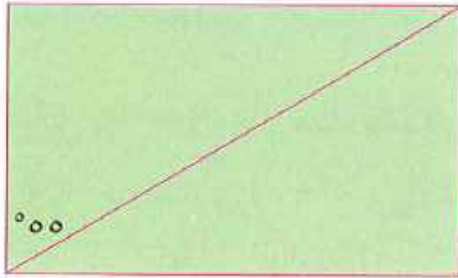
## تمارين ومسابقات



الشكل (٣٧-٧)

(١) يمثل الشكل (٣٧-٧) مثلثًا قائم الزاوية في ب، فيه  $أج = ١٥$  سم،  $أب = ٩$  سم، جِدْ كلاً مما يأتي:  
(أ) ب ج (ب) ظ أ (ج) ظا ج

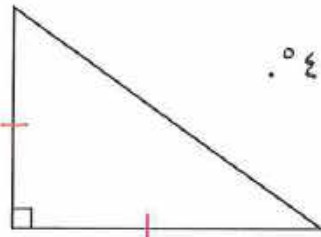
(٢) د م ن مثلث متساوي الساقين فيه  $د م = د ن = ٨$  سم،  $م ن = ٦$  سم، جِدْ:  
(أ) ظام (ب) ظان



الشكل (٣٨-٧)

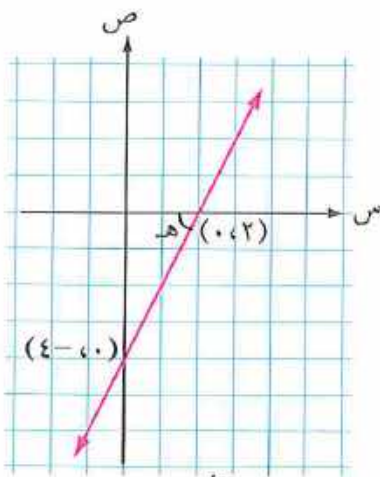
(٣) قطعة أرض مستطيلة الشكل طولها ١٠٠ م، فإذا كان قطر القطعة يصنع زاوية مقدارها  $٥٥^\circ$  مع ضلعها الأصغر، كما في الشكل (٣٨-٣)، فما عرض قطعة الأرض؟

(٤) س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص، فيه:  $س ص = ١٦$  سم، و  $ظا س = ٢$ ، جِدْ طول س ع.



الشكل (٣٩-٧)

(٥) استخدم الشكل (٣٩-٧) في إيجاد:  $ظا ٤٥^\circ$ .



الشكل (٤٠-٧)

(٦) المستقيم  $ص = ٢س - ٤$ ، يقطع محوري السينات والصادات عند النقطتين  $(٠, ٢)$ ،  $(٤, ٠)$  على الترتيب، ويشكل مع المحورين الإحداثيين مثلثًا كما في الشكل (٤٠-٧)،  $هـ$  تمثل الزاوية الحادة التي يصنعها المستقيم مع محور السينات. جِدْ كلاً مما يأتي:  
(أ) جا هـ (ب) جتا هـ (ج) ظا هـ

## النتائج

• تستقضي العلاقات الآتية:

$$\text{جاس} = \text{جتا} (\text{س} - 90^\circ)$$

$$\text{جتاس} = \text{جا} (\text{س} - 90^\circ)$$

$$\text{جا}^2 \text{س} + \text{جتا}^2 \text{س} = 1$$

$$\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} = \frac{\text{ظاس}}{\text{جتاس}}$$

أجب عن الآتي دون استخدام الآلة الحاسبة أو المثلث قائم الزاوية:

(١) جد القيمة العددية للمقدار:

$$\text{جا } 33^\circ - \text{جتا } 57^\circ$$

(٢) إذا كان  $\text{جا } 17^\circ = 0,3$  ، فما قيمة  $\text{جا } 73^\circ$

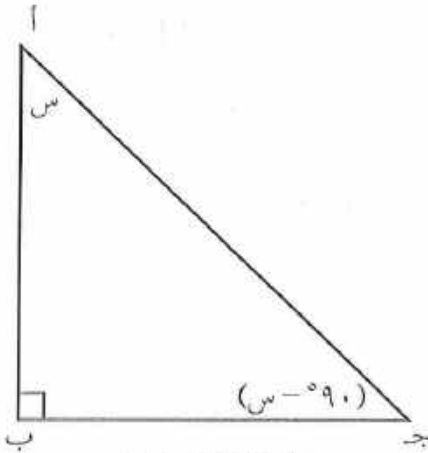
الشكل (٧-٤١) يمثل مثلثًا قائم الزاوية في ب، إذا كان قياس الزاوية أ يساوي س، فإن قياس الزاوية ج يساوي  $(\text{س} - 90^\circ)$ ، لماذا؟

$$\text{جاس} = \frac{\text{المقابل للزاوية أ}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}}$$

$$\text{جتا} (\text{س} - 90^\circ) = \frac{\text{المجاور للزاوية ج}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}}$$

ماذا تستنتج؟

لأبد أنك توصلت إلى أن:  $\text{جاس} = \text{جتا} (\text{س} - 90^\circ)$



الشكل (٧-٤١)

بشكل عام، إذا كانت س زاوية حادة فإن:

$$\text{جاس} = \text{جتا} (\text{س} - 90^\circ) , \text{جتاس} = \text{جا} (\text{س} - 90^\circ)$$

مثال (٧-١٥):

إذا كان  $\text{جتا } 35^\circ = 0,8192$  ، فما قيمة  $\text{جا } 55^\circ$  ؟

الحل:  $\text{جا } 55^\circ = \text{جتا} (55^\circ - 90^\circ)$  العلاقة

$$= \text{جتا } 35^\circ$$

$$= 0,8192$$

- أ) إذا كان جاس = ٠,٣٥٨٤، فما قيمة جتا (٩٠° - س)؟  
 ب) جد القيمة العددية للمقدار: جا ٢٥° - جتا ٦٥°

مثال (٧-١٦):

إذا كان جاس = جتا ٤س، فما قيمة س بالدرجات؟ حيث  $٠ < س < ١٨٠$

**الحل:** جتا ٤س = جا (٩٠° - ٤س) ..... (١) **العلاقة**

جتا ٤س = جا (٥س) ..... (٢) **معطى**

من تساوي المعادلتين (١) و (٢)

$$\text{إذن جا (٩٠° - ٤س) = جا ٥س}$$

$$\text{ومنهُ } ٩٠° - ٤س = ٥س$$

$$٩٠° = ٩س$$

$$س = ١٠°$$

**ناقش:** قام رائد بحل المثال (٧-١٦) بالطريقة الآتية:

$$\text{بما أن جاس = جتا ٤س}$$

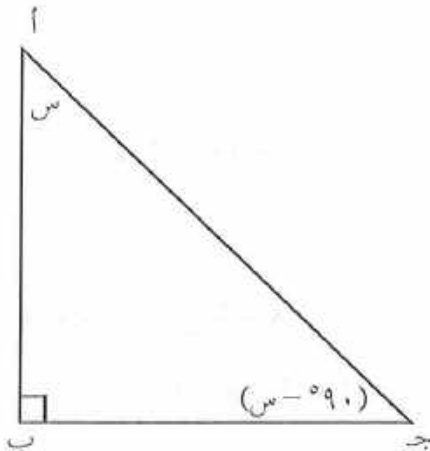
$$\text{فإن: } ٥س + ٤س = ٩٠°، \text{ ومنهُ } ٩س = ٩٠°$$

$$س = ١٠°$$

ما رأيك بما قام به رائد؟ وكيف تفسر خطوات حله؟

**فكر**

هل يوجد زاوية حادة قياسها س بحيث: جاس = جتا س؟ ما قياسها؟



الشكل (٧-٤٢)

استخدم الشكل (٧-٤٢) في إيجاد:

جا<sup>٢</sup> س + جتا<sup>٢</sup> س، حيث س زاوية حادة.

$$\text{جاس} = \frac{\text{المقابل للزاوية أ}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}}$$

$$\text{جتاس} = \frac{\text{المجاور للزاوية أ}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}}$$

$$\text{جا}^2 \text{س} + \text{جتا}^2 \text{س} = \left( \frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}} \right)^2 + \left( \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}} \right)^2$$

$$1 = \frac{\text{ب ج}^2 + \text{أ ب}^2}{\text{أ ج}^2} \text{ لماذا؟}$$

ومن ذلك نستنتج العلاقة الآتية:

$$\text{جا}^2 \text{س} + \text{جتا}^2 \text{س} = 1, \text{ لكل زاوية حادة س.}$$

**ناقش:** تأكد من صحة العلاقة السابقة مع زملائك مستخدمي الآلة الحاسبة وبفرض أن س أي زاوية حادة.

مثال (٧-١٧):

إذا كانت س زاوية حادة، وكان جا س = ٠,٨، فما قيمة جتا س؟

**الحل:**

باستخدام العلاقة: جا<sup>2</sup>س + جتا<sup>2</sup>س = ١

$$1 = \text{جتا}^2 \text{س} + (0,8)^2$$

$$\text{جتا}^2 \text{س} = 1 - 0,64 = 0,36$$

$$\text{ومنه جتا س} = \pm 0,6 \text{ إذن جتا س} = 0,6 \text{ لماذا؟}$$

**تدريب (٧-١١)**

إذا كانت س زاوية حادة، وكان جتا س =  $\frac{5}{13}$ ، فما قيمة جا س؟

مثال (٧-١٨):

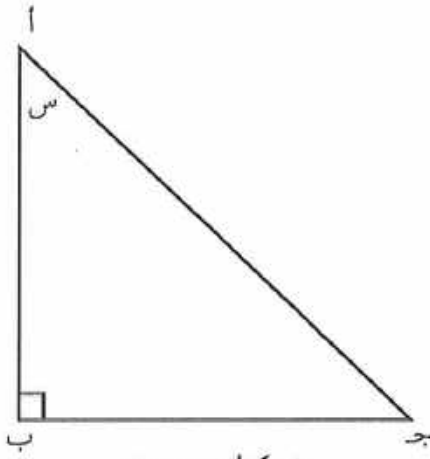
جد القيمة العددية للمقدار: جا<sup>2</sup>١٥° + جا<sup>2</sup>٧٥°

**الحل:**

$$\text{جا}^2 ٧٥^\circ = \text{جتا}^2 ١٥^\circ$$

$$\text{ومنه جا}^2 ١٥^\circ + \text{جا}^2 ٧٥^\circ = \text{جتا}^2 ١٥^\circ + \text{جتا}^2 ١٥^\circ = 1$$





الشكل (٧-٤٣)

استخدم الشكل (٧-٤٣) في اكتشاف:

العلاقة بين جاس، جتا س، ظا س، حيث س زاوية حادة.

$$\frac{\text{جاس}}{\text{جتا س}} = \frac{\text{المقابل للزاوية أ}}{\text{المجاور للزاوية أ}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}}$$

$$\frac{\text{جتا س}}{\text{ظا س}} = \frac{\text{المجاور للزاوية أ}}{\text{المقابل للزاوية أ}} = \frac{\text{أ ج}}{\text{ب ج}}$$

$$\frac{\text{ظا س}}{\text{جتا س}} = \frac{\text{المقابل للزاوية أ}}{\text{المجاور للزاوية أ}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}}$$

$$\frac{\text{ظا س}}{\text{جتا س}} = \frac{\frac{\text{المقابل للزاوية أ}}{\text{المجاور للزاوية أ}}}{\frac{\text{المجاور للزاوية أ}}{\text{الوتر}}}$$

بقسمة كل من البسط والمقام على الوتر

$$\frac{\text{ظا س}}{\text{جتا س}} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتا س}}$$

ومن ذلك نستنتج العلاقة الآتية:

$$\text{ظا س} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتا س}} ، \text{جتا س} \neq 0$$

• ففكر

لماذا جتا س  $\neq 0$  ؟

**ناقش:** تأكد من صحة العلاقة السابقة مع زملائك مستخدمي الآلة الحاسبة وبفرض أن س أي زاوية حادة.

### مثال (٧-١٩):

إذا كانت  $\theta$  زاوية حادة، وكان  $\sin \theta = \frac{3}{5}$ ، فجد  $\cos \theta$ ،  $\tan \theta$ .

### الحل:

$$\sin \theta = \frac{3}{5}، \text{ ومنه } \cos \theta = \frac{4}{5}، \text{ ومنه } \tan \theta = \frac{3}{4}$$

$$\text{لكن } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ إذن:}$$

$$1 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta$$

$$1 = \sin^2 \theta + \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$1 = \sin^2 \theta + \frac{9}{16} \Rightarrow \sin^2 \theta = \frac{7}{16}$$

$$\sin \theta = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{7}}{4} \text{ ومنه، } \cos \theta = \frac{3}{4}، \text{ لماذا؟}$$

### ناقش: قامت آلاء بحل المثال (٧-١٩) بالطريقة الآتية:

رسمت آلاء المثلث المجاور وحددت عليه  $\theta$  زاوية حادة

وقالت: بما أن  $\sin \theta = \frac{3}{5}$  فإنه يمكن اعتبار الضلع المقابل للزاوية  $\theta$  هو البسط

ويساوي ٣، والضلع المجاور للزاوية  $\theta$  هو المقام ويساوي ٤.

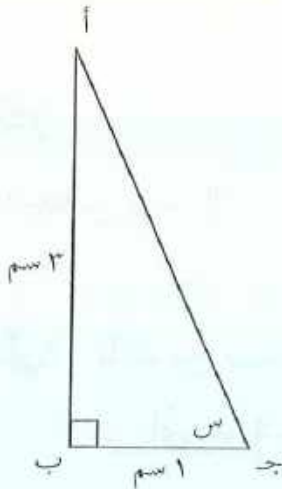
وكتبت:  $(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1$  من نظرية فيثاغورس

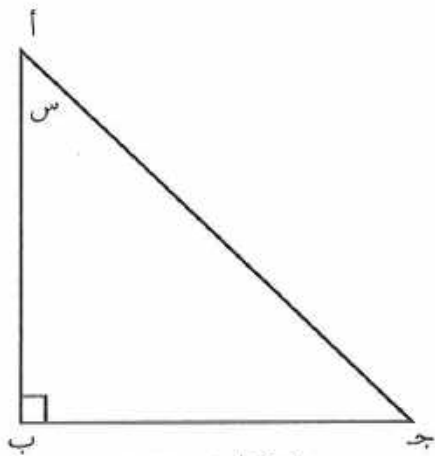
$$1 + 9 = (\cos \theta)^2$$

$$(\cos \theta)^2 = 10 \text{ ومنه، } \cos \theta = \sqrt{10}$$

$$\sin \theta = \frac{3}{4}، \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

ما رأيك بما قامت به آلاء؟





الشكل (٧-٤٣)

استخدم الشكل (٧-٤٣) في اكتشاف:

العلاقة بين جاس، جتا س، ظا س، حيث س زاوية حادة.

$$\text{جاس} = \frac{\text{المقابل للزاوية أ}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}}$$

$$\text{جتا س} = \frac{\text{المجاور للزاوية أ}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}}$$

$$\text{ظا س} = \frac{\text{المقابل للزاوية أ}}{\text{المجاور للزاوية أ}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{أ ب}}$$

$$\text{ظا س} = \frac{\frac{\text{المقابل للزاوية أ}}{\text{الوتر}}}{\frac{\text{المجاور للزاوية أ}}{\text{الوتر}}}$$

بقسمة كل من البسط والمقام على الوتر

$$\text{ظا س} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتا س}}$$

ومن ذلك نستنتج العلاقة الآتية:

$$\text{ظا س} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتا س}}, \text{ جتا س} \neq 0$$

• ففكر

لماذا جتا س  $\neq 0$  ؟

**ناقش:** تأكد من صحة العلاقة السابقة مع زملائك مستخدمي الآلة الحاسبة وبفرض أن س أي زاوية حادة.

مثال (٧-١٩):

إذا كانت  $\theta$  زاوية حادة، وكان  $\cos \theta = \frac{3}{5}$ ، فجد  $\sin \theta$ ، جتا  $\theta$ .

الحل:

$$\cos \theta = \frac{3}{5}، \sin \theta = \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}، \text{ومنهُ جاس} = \frac{3}{5} \text{ جتا} \theta$$

$$\text{لكن جاس}^2 + \text{جتا}^2 \theta = 1 \text{ إذن:}$$

$$1 = \left(\frac{3}{5} \text{ جتا} \theta\right)^2 + \text{جتا}^2 \theta$$

$$1 = \frac{9}{25} \text{ جتا}^2 \theta + \text{جتا}^2 \theta$$

$$10 \text{ جتا}^2 \theta = 1 \Rightarrow \text{جتا}^2 \theta = \frac{1}{10}$$

$$\text{جتاس} = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\text{جتاس} = \frac{1}{\sqrt{10}} \text{ ومنهُ، جاس} = \frac{3}{\sqrt{10}}، \text{ لماذا؟}$$

ناقش: قامت آلاء بحل المثال (٧-١٩) بالطريقة الآتية:

رسمت آلاء المثلث المجاور وحددت عليه  $\theta$  زاوية حادة

وقالت: بما أن  $\cos \theta = \frac{3}{5}$  فإنه يمكن اعتبار الضلع المقابل للزاوية  $\theta$  هو البسط

ويساوي ٣ سم، والضلع المجاور للزاوية  $\theta$  هو المقام ويساوي ٥ سم.

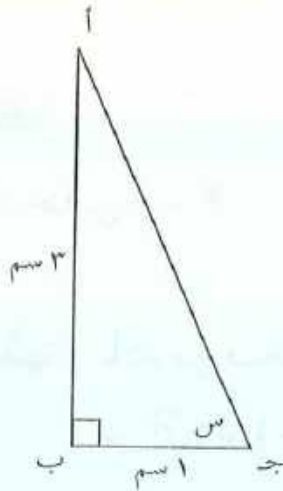
وكتبت:  $(\text{أج})^2 = (\text{أب})^2 + (\text{بج})^2$  من نظرية فيثاغورس

$$(\text{أج})^2 = 1 + 9$$

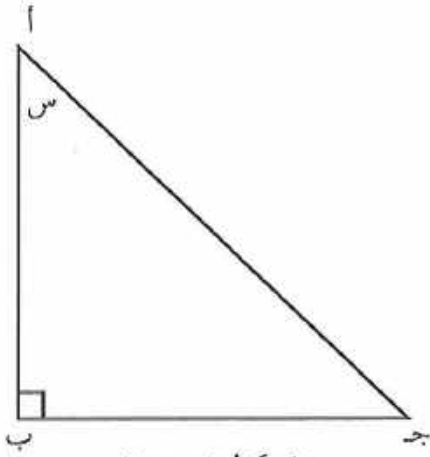
$$(\text{أج})^2 = 10 \text{ ومنهُ، أج} = \sqrt{10}$$

$$\text{ومنهُ، جتاس} = \frac{1}{\sqrt{10}}، \text{ جاس} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

ما رأيك بما قامت به آلاء؟







الشكل (٧-٤٣)

استخدم الشكل (٧-٤٣) في اكتشاف:  
العلاقة بين جاس، جتا س، ظا س، حيث س زاوية حادة.

$$\text{جاس} = \frac{\text{المقابل للزاوية أ}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}}$$

$$\text{جتا س} = \frac{\text{المجاور للزاوية أ}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}}$$

$$\text{ظا س} = \frac{\text{المقابل للزاوية أ}}{\text{المجاور للزاوية أ}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{أ ب}}$$

$$\text{ظا س} = \frac{\frac{\text{المقابل للزاوية أ}}{\text{الوتر}}}{\frac{\text{المجاور للزاوية أ}}{\text{الوتر}}}$$

بقسمة كلٍّ من البسط والمقام على الوتر

$$\text{ظا س} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتا س}}$$

ومن ذلك نستنتج العلاقة الآتية:

$$\text{ظا س} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتا س}}, \text{ جتا س} \neq 0$$

• ففكر

لماذا جتا س  $\neq 0$  ؟

**ناقش:** تأكد من صحة العلاقة السابقة مع زملائك مستخدمي الآلة الحاسبة وبفرض أن س أي زاوية حادة.

### مثال (٧-١٩):

إذا كانت  $\theta$  زاوية حادة، وكان  $\sin \theta = \frac{3}{5}$ ، فجد  $\cos \theta$ ، جتا  $\theta$ .

### الحل:

$$\sin \theta = \frac{3}{5}، \text{ ومنه } \cos \theta = \frac{\text{جتا } \theta}{\text{جتا } \theta}، \text{ ومنه جتا } \theta = \frac{3}{5} \text{ جتا } \theta$$

$$\text{لكن جتا } \theta^2 + \sin^2 \theta = 1 \text{ إذن:}$$

$$1 = \cos^2 \theta + \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$1 = \cos^2 \theta + \frac{9}{25}$$

$$10 = 25 \cos^2 \theta + 9 \Rightarrow 1 = 5 \cos^2 \theta \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{5}$$

$$\cos \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ ومنه، جتا } \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}، \text{ لماذا؟}$$

### ناقش: قامت آلاء بحل المثال (٧-١٩) بالطريقة الآتية:

رسمت الآء المثلث المجاور وحددت عليه  $\theta$  زاوية حادة

وقالت: بما أن  $\sin \theta = \frac{3}{5}$  فإنه يمكن اعتبار الضلع المقابل للزاوية  $\theta$  هو البسط

ويساوي ٣سم، والضلع المجاور للزاوية  $\theta$  هو المقام ويساوي ٤سم.

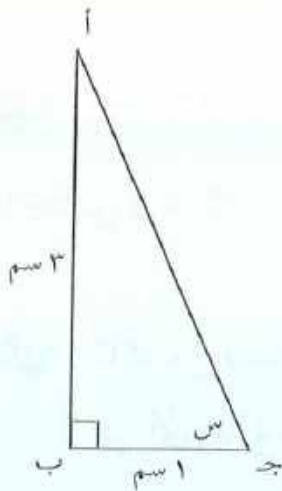
وكتبت: (أ ج) = ١ + ٩ = ١٠ (ب ج) = ١٠ ومنه، جتا  $\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$$1 + 9 = 10$$

$$10 = 10 \text{ ومنه، جتا } \theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{10}}، \text{ جتا } \theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

ما رأيك بما قامت به آلاء؟



مثال (٧-٢٠):

أثبت أن ظاس  $\times$  ظا (٩٠° - س) = ١

الحل:

$$\frac{\text{جا (٩٠° - س)}}{\text{جتا (٩٠° - س)}} \times \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} = \text{ظاس} \times \text{ظا (٩٠° - س)}$$

$$= \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} \times \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} = ١ ، لماذا؟$$

تدريب ٧-١٢

إذا كانت هـ زاوية حادة ، وكان جـ هـ = ٥ جـ هـ ، فجد:

أ ( ظـ هـ      ب ) جـ هـ

تدريب ٧-١٣

حلّ المسائل الواردة في بداية الدرس.

## تمارين ومسابقات

(١) إذا كان  $\text{جاس} = ٠,٣٧٤٦$ ، فما قيمة  $\text{جتا} (٩٠^\circ - \text{س})$ ، حيث  $\text{س}$  قياس زاوية حادة؟

(٢) اثبت أن  $\text{جا} (٣٠^\circ + \text{س}) = \text{جتا} (٦٠^\circ - \text{س})$ ، حيث أن  $\text{س} > ٦٠^\circ$

(٣) إذا كانت  $\text{س}$  تمثل قياس زاوية حادة، وكان  $\text{جا} (٩٠^\circ - \text{س}) = ٠,٤$ ، فجد:

أ)  $\text{جتا س}$       ب)  $\text{جاس}$       ج)  $\text{ظاس}$

(٤) جد القيمة العددية لكل من المقادير الآتية:

أ)  $٣ - \text{جتا} ١٩^\circ - \text{جا} ٧١^\circ$

ب)  $\text{جتا} ٨٣^\circ + \text{جتا} ٧^\circ$

ج)  $\text{ظا} ٣٤^\circ \times \text{ظا} ٥٦^\circ$

هـ)  $\frac{\text{جتا} (٤٨^\circ)}{\text{جا} (٤٢^\circ)}$

(٥) إذا كانت  $\text{س}$  زاوية حادة، وكان  $\text{جاس} = \frac{٣}{٥}$ ، فجد  $\text{جتا س}$ ،  $\text{ظاس}$ .

(٦) إذا كانت  $\text{س}$  زاوية حادة، وكان  $\text{جتا س} = ٢$   $\text{جاس}$ ، فجد:

أ)  $\text{ظاس}$       ب)  $\text{جتا س}$

(٧) في حوار بين الطالبين شذى ورشا، قالت شذى: يمكن أن نجد زاوية حادة، جيئها يساوي ٢، فردت عليها رشا: لا يمكن ذلك. أي الطالبين كلامها صحيح؟ برّر إجابتك.

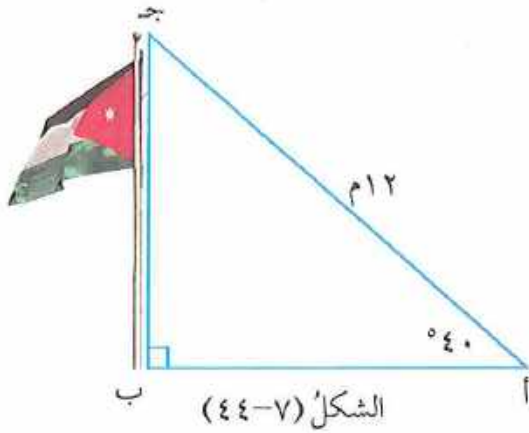


## حلُّ المثلث قائم الزاوية

٥ - ٧

النتائج

- نستخدمُ النسب المثلثية (جا، جتا، ظا) في حلِّ المثلث قائم الزاوية.



وقف بشارٌ عند النقطة (أ) التي تبعدُ (١٢) مترًا عن قمةٍ سارية علم المدرسة، فإذا كان قياسُ الزاوية (أ) يساوي  $40^\circ$ ، كما في الشكل (٤٤-٧). فجد:

(١) قياسُ الزاوية (ج).  
(٢) المسافة بين النقطة (أ) التي يقفُ عندها بشارٌ، وقاعدة السارية.

(٣) ارتفاع السارية.

مرّ معك في الدروس السابقة كيفية حساب النسب المثلثية (جا، جتا، ظا) للزاوية الحادة في المثلث القائم الزاوية، من خلال ارتباطها بأطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية، سنستخدمُ كل ما تعلمته في الدروس السابقة في إيجاد أطوال أضلاع المثلث، وقياسات زواياه، وسنبداً بتقديم التعريفين الآتيين:

### تعريف:

عناصر المثلث: أضلاعه الثلاثة، وزواياه الثلاث.  
حلُّ المثلث: إيجاد أطوال أضلاعه، وقياسات زواياه.

مثال (٢١-٧):

س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص، فيه: س ع = ١٥ سم، ص ع = ١٢ سم، جد ما يأتي:

(١) س ص

(٢) قياسات زوايا المثلث.

### الحل:

(١) من الشكل (٧-٤٥)، ووفق نظرية فيثاغورس:

$$^2(ع) + ^2(ص) = ^2(س)$$

$$^2(١٢) + ^2(ص) = ^2(١٥)$$

$$١٤٤ + ^2(ص) = ٢٢٥$$

$$١٤٤ - ٢٢٥ = ^2(ص)$$

$$٨١ = ^2(ص)$$

$$ص = ٩ \text{ سم}$$

(٢) جاس =  $\frac{١٢}{١٥} = \frac{٣}{٥} = ٠,٦$  ، وباستخدام الآلة الحاسبة

$$س = ٣٧^\circ \text{ تقريبًا.}$$

$$ع = ٩٠^\circ - ٣٧^\circ. \text{ لماذا؟}$$

$$ع = ٥٣^\circ \text{ تقريبًا.}$$

### مثال (٧-٢٢):

حلّ المثلث أ ب ج القائم الزاوية في ب، والذي فيه: ق = أ =  $٦٠^\circ$ ، أب =  $٣ \text{ سم}$

### الحل:

$$ق = ج = ٩٠^\circ - ٦٠^\circ = ٣٠^\circ$$

$$\text{جتا } ٦٠^\circ = ٠,٥ \text{ من الآلة الحاسبة.}$$

$$\frac{٣}{أج} = ٠,٥ \text{ ومنه، } أج = ٠,٥ \times ٣ = ١,٥$$

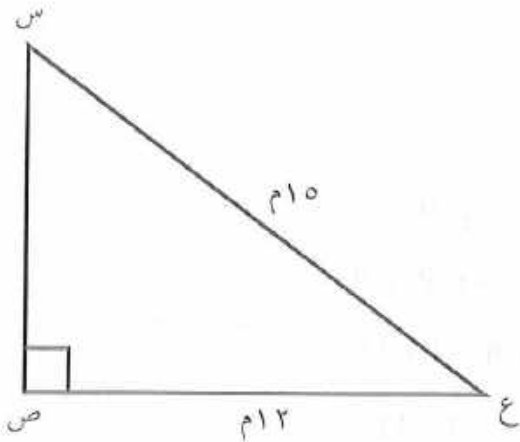
$$\text{إذن، } أج = ١,٥ \text{ سم}$$

$$^2(أج) + ^2(أب) = ^2(ج) \quad \text{من نظرية فيثاغورس}$$

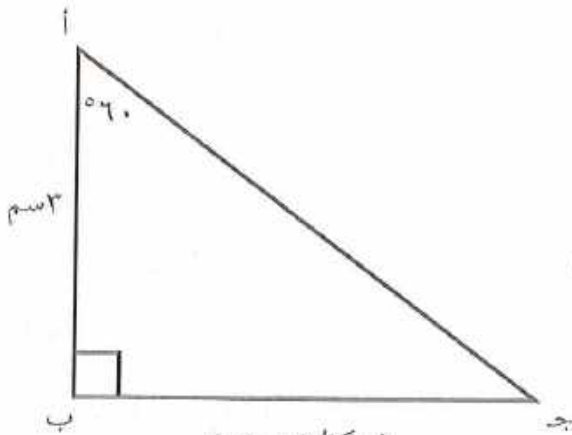
$$^2(١,٥) + ^2(٣) = ^2(ج)$$

$$٢٧ = ^2(ج)$$

$$ج = ٥,٢ \text{ سم تقريبًا.}$$



الشكل (٧-٤٥)



الشكل (٧-٤٦)

في المثال (٧-٢٢) كيف تستطيع إيجاد طول ب ج دون استخدام نظرية فيثاغورس؟

تدريب ٧-١٤

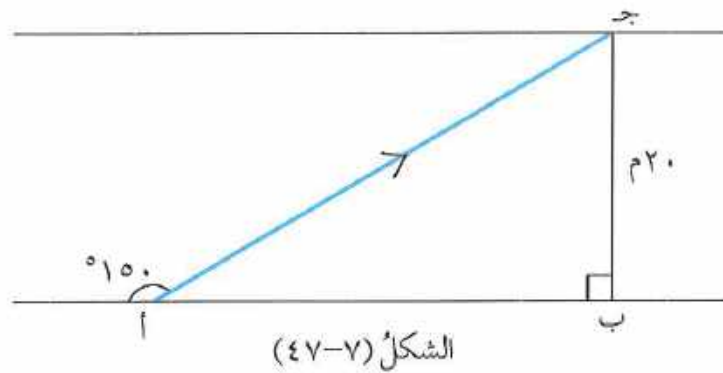
حلّ المثلث ل م ن القائم الزاوية في م، الذي فيه: ل م = ١٦ سم، م ن = ١٢ سم

فكر وناقش

هل تستطيع حلّ مثلث قائم الزاوية إذا علمت قياسات زواياه فقط؟

مثال (٧-٢٣):

قام سباح بعبور نهر عرضه (٢٠) متراً، من النقطة (أ) على الضفة الأولى، فجرفه التيار كما في الشكل (٧-٤٧)، ووصل النقطة ج على الضفة المقابلة للنهر. جد المسافة التي قطعها السباح.



الحل:

- أفهم: نهر عرضه العمودي ٢٠ متراً
- السباح انطلق من النقطة أ وسبح على الخط (أ ج).
- المطلوب حساب المسافة التي قطعها السباح (أ ج).
- أخطئ: الشكل يبين المثلث أ ب ج قائم الزاوية في ب،
- ستستخدم النسب المثلثية ومنها الجيب (جا) لمعرفة طول الوتر في المثلث.
- أنقذ: المسافة التي قطعها السباح تمثل طول الضلع أ ج في المثلث القائم الزاوية أ ب ج
- قياس الزاوية الحادة أ = ٣٠°، لماذا؟

تعريف جيب الزاوية الحادة

$$\frac{ب ج}{أ ج} = \text{جا أ}$$

تعويض

$$\frac{٢٠}{أ ج} = \text{جا } ٣٠^\circ$$

$$\text{جا } ٣٠^\circ = ٠,٥$$

$$\frac{٢٠}{أ ج} = ٠,٥$$

ضرب تبادلي

$$٢٠ = أ ج \times ٠,٥$$

نتيجة

$$\text{ومنه، أ ج} = ٤٠ \text{ متراً}$$

$$\text{أتحقق: جا } \angle ب أ ج = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{٢٠}{٤٠}$$

$$\text{جا } \angle ب أ ج = \frac{١}{٢}$$

$$\text{إذن ق } \angle ب أ ج = ٣٠^\circ$$

وهذا صحيح لأن ق  $\angle ب أ ج = ٣٠^\circ = ١٥٠^\circ - ١٨٠^\circ$  لأنهما تشكّلان زاوية مستقيمة.

مثال (٧-٢٤):

حلّ المثلث د هـ و القائم الزاوية في هـ، المرسوم في الشكل (٧-٤٨) الذي فيه:  
جتا و = ٠,٦ ، د و = ٩ سم.

الحل:

$$\text{جتا و} = ٠,٦$$

معطى

ومنه، قياس الزاوية و =  $٥٣^\circ$  تقريباً

استخدام الآلة الحاسبة

لماذا؟

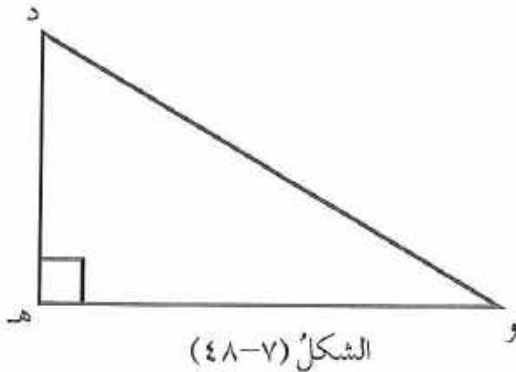
قياس الزاوية د =  $٣٧^\circ$  تقريباً

معطى

$$\text{جتا و} = ٠,٦$$

$$\frac{و هـ}{٩} = ٠,٦$$

تعريف جيب التمام وتعويض



الشكل (٧-٤٨)

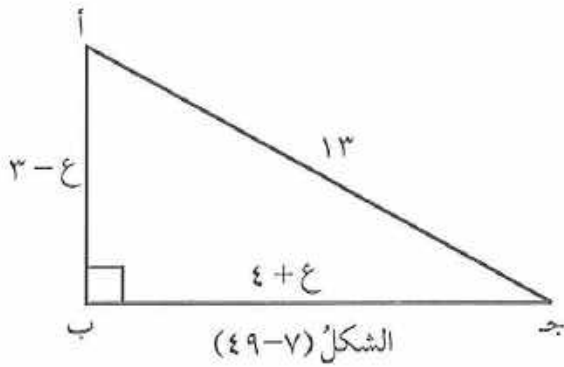


|                       |                               |
|-----------------------|-------------------------------|
| تبسيط                 | ومنهُ، وهـ = ٥,٤              |
| تعريف الجيب وتعويض    | جا و = $\frac{\text{ده}}{٩}$  |
| تعويض                 | جا ٥٣ = $\frac{\text{ده}}{٩}$ |
| استخدام الآلة الحاسبة | ٥,٨ = $\frac{\text{ده}}{٩}$   |
| نتيجة                 | ده = ٥١,٢ سم                  |

### تدريب (٧-١٥)

حلّ المثلث س ص ع القائم الزاوية في ص، الذي فيه: س ص = ٧ سم، ظا س = ١.

مثال (٧-٢٥):



جدّ أطوال المثلث المرسوم في الشكل (٧-٤٩)  
علماً بأنّ الأطوال مقيسة بالسنتيمتر.

**تذكر:**

$$(أ + ب)^2 = أ^2 + ٢ أ ب + ب^2$$

$$(أ - ب)^2 = أ^2 - ٢ أ ب + ب^2$$

**الحل:**

أطوال أضلاع المثلث هي: ١٣، ٤ + ع، ٣ - ع

نظرية فيثاغورس

$$١٣^2 = (٣ - ع)^2 + (٤ + ع)^2$$

$$١٦٩ = (٩ - ٦ع + ع^2) + (١٦ + ٨ع + ع^2)$$

$$١٦٩ = ٢٥ + ٢ع + ع^2$$

$$٠ = ١٦٩ - ٢٥ + ٢ع + ع^2$$

$$٠ = ١٤٤ - ٢ع + ع^2$$

$$٠ = ٧٢ - ع + ع^2$$

$$٠ = (٩ + ع)(٨ - ع)$$

إما  $ع - ٨ = ٠$  ومنه،  $ع = ٨$

وإما  $ع + ٩ = ٠$  ومنه،  $ع = -٩$  وهذه القيمة مرفوضة. لماذا؟

أطوال أضلاع المثلث هي:  $١٣$  سم،  $ع + ٨ = ٤ + ٨ = ١٢$  سم،  $ع - ٨ = ٣ - ٨ = -٥$  سم

### فكر

حلّ مثلثًا قائم الزاوية أطوال أضلاعه الثلاثة أعداد صحيحة متتالية.

### نشاط (٧-٣)

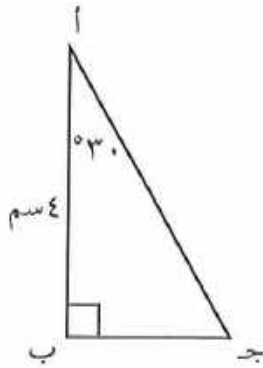
تأمل الشكل (٧-٥٠)

(١) ما قياس  $\angle ج$ ؟

(٢) ما طول  $ب ج$ ؟ باستخدام الآلة الحاسبة.

(٣) جد  $ج أ$ ، جتا  $ج$ ؟ ماذا تلاحظ.

(٤) استنتج قيم  $ج أ$ ، جتا  $ج$ ، جتا  $ج$ ، جتا  $ج$ .



الشكل (٧-٥٠)

### تعلم

يُسمى مثل هذا المثلث مثلثًا ثلاثينيًا ستينيًا.

$$\blacksquare \text{ جا } ٣٠^\circ = \frac{١}{٢} , \text{ جتا } ٣٠^\circ = \frac{\sqrt{٣}}{٢} , \text{ جا } ٦٠^\circ = \frac{\sqrt{٣}}{٢} , \text{ جتا } ٦٠^\circ = \frac{١}{٢}$$

### نشاط (٧-٤)

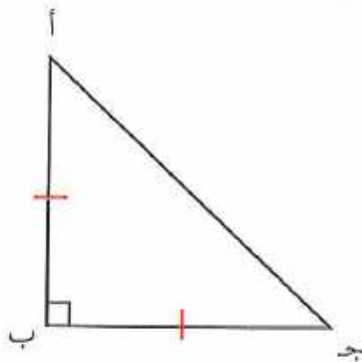
تأمل الشكل (٧-٥١)

(١) ما قياس كل من الزاويتين  $أ$ ،  $ج$ ؟

(٢) إذا كان طول  $أ ب$  وحدة واحدة، فما طول  $أ ج$ ؟

(٣) جد  $ج أ$ ، جتا  $ج$ . ماذا تلاحظ؟

(٤) استنتج قيم  $ج أ$ ، جتا  $ج$ ، جتا  $ج$ .



الشكل (٧-٥١)

### تعلم

$$\blacksquare \text{ جا } ٤٥^\circ = \frac{١}{\sqrt{٢}} = \text{ جتا } ٤٥^\circ$$

### تدريب ١٦-٧

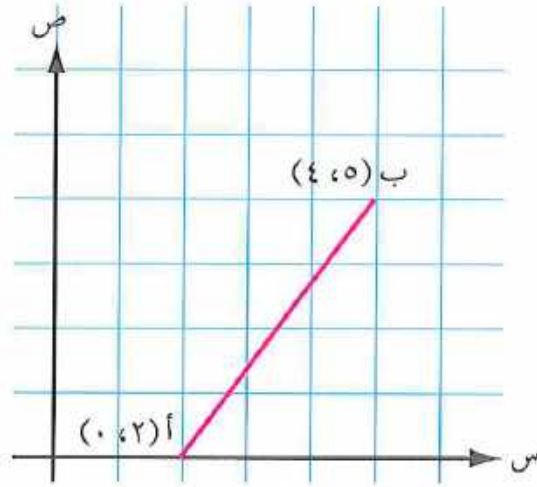
حلّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

## تمارين ومسائل

١) أ ب قطعة مستقيمة تصل بين النقطتين أ (٠، ٢)، و ب (٤، ٥)، كما هو موضح في الشكل (٥٣-٧). جـد:

أ) طول القطعة المستقيمة أ ب.

ب) قياس الزاوية الحادة المحصورة بين القطعة المستقيمة أ ب ومحور السينات.



الشكل (٥٢-٧)

٢) يسير رجلٌ مقترباً من قاعدة عمودٍ كهرباءٍ يعلوه مصباح ارتفاعه (٥) م، في اللحظة التي كان فيها طول ظل الرجل يساوي (٢) م، كان قياس الزاوية بين المصباح ورأس ظل الرجل  $38^\circ$ . جـد المسافة بين الرجل وقاعدة العمود في تلك اللحظة.

٣) حلّ المثلث القائم الزاوية في كلٍّ من الحالات الآتية:

أ) ل م ن مثلث قائم الزاوية في م، فيه: م ن = ٤ سم، ل م = ٢ سم.

ب) س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص، فيه: س ص = ٣ سم، وقياس الزاوية (س) يساوي  $60^\circ$ .

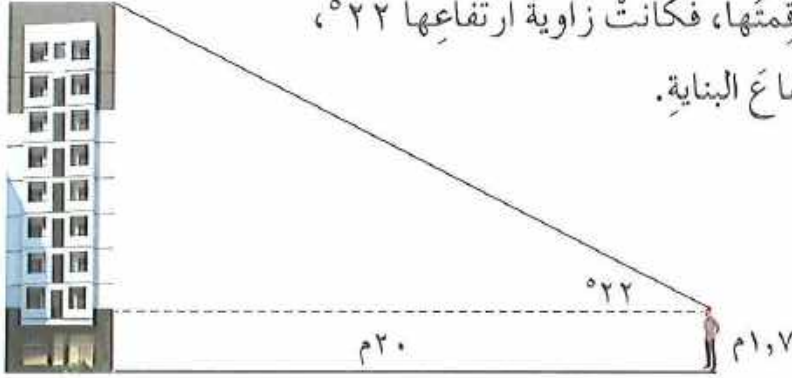
ج) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، فيه: جـ ا = ٥، ٠، أ جـ = ٤ سم.

د) د هـ و مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في هـ، د هـ = ١ سم.

النتائج

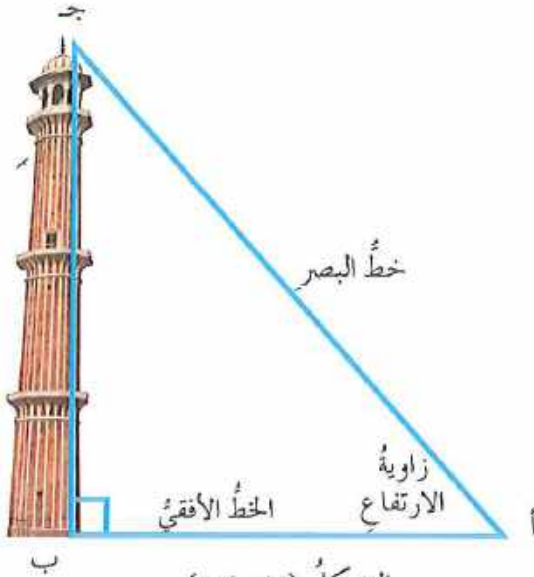
- تحل مسائل حياتية باستخدام زوايا الارتفاع والانخفاض.

وقف شخص طوله (١,٧) متراً على بُعد (٢٠) متراً من بناية ورصد قيمتها، فكانت زاوية ارتفاعها  $22^\circ$ ، حدد ارتفاع البناية.



الشكل (٥٣-٧)

في الشكل (٥٤-٧) يرصد شخص قمة مئذنة من النقطة (أ)، يُسمى الخط المستقيم المارّ بعين الناظر وقمة المئذنة: **خط البصر**. وتُسمى الزاوية المحصورة بين خط البصر والخط الأفقي المارّ بعين الناظر: **زاوية ارتفاع المئذنة**.



الشكل (٥٤-٧)

في الشكل (٥٥-٧) ينظر شخص إلى سفينة في البحر من قمة منارة، (لاحظ أن موقع الشخص أعلى من موقع السفينة في البحر)، تُسمى الزاوية المحصورة بين خط البصر والخط الأفقي المارّ بعين الناظر: **زاوية انخفاض السفينة**.



الشكل (٥٥-٧)



## فكر وناقش:

زاوية ارتفاع المنارة = زاوية انخفاض السفينة. برّر ذلك.

## نشاط (٥-٧)

شخصان يقف أحدهما فوق سطح بناية، ويقف الآخر على الشارع، وينظر كل منهما إلى الآخر. أرسم شكلاً يوضح زاوية ارتفاع الشخص الواقف على البناية، وزاوية انخفاض الشخص الواقف في الشارع.

## مثال (٧-٢٦):

من نقطة تبعد (٢٠) متراً عن قاعدة سارية العلم، قاس خالد زاوية ارتفاع قمة السارية، فوجد أن قياسها  $40^\circ$ . ما ارتفاع هذه السارية؟ أنظر الشكل (٧-٥٦)

## الحل:

ارتفاع السارية هو طول الضلع ب ج

تعريف ظل لزاوية

$$\frac{\text{ب ج}}{20} = \tan 40^\circ$$

استخدام الآلة الحاسبة

$$\frac{\text{ب ج}}{20} = 0,8391$$

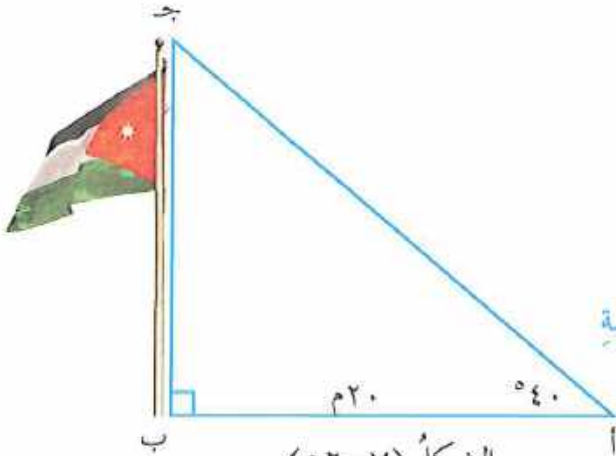
ضرب تبادلي

$$\text{ب ج} = 20 \times 0,8391$$

نتيجة

$$\text{ب ج} = 16,78 \text{ م تقريباً}$$

الشكل (٧-٥٦)



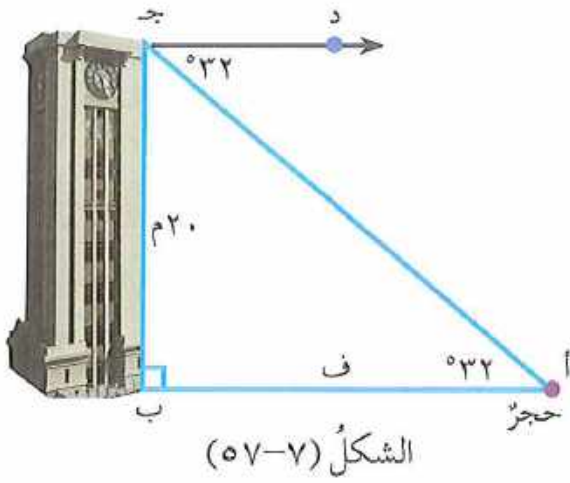
## تعلم:

■ لقياس زوايا الارتفاع والانخفاض يستخدم جهاز يُسمى **التيودوليت**.

## تدريب (٧-١٧)

وقف أسامة على بُعد (١٢) متراً من قاعدة شجرة ورصد قممتها فكانت زاوية ارتفاعها  $35^\circ$ . ما ارتفاع هذه الشجرة؟

مثال (٧-٢٧):



رصد موسى من برج ارتفاعه (٢٠) متراً، حجراً  
بزواوية انخفاض قياسها ٣٢°، ما المسافة بين قاعدة  
البرج وموقع الحجر؟ أنظر الشكل (٧-٥٧).

الحل:

الزاوية ج أ ب = زاوية الانخفاض أ ج د . لماذا؟  
المسافة بين قاعدة البرج وموقع الحجر هي: ف

$$\frac{٢٠}{ف} = ٣٢^\circ$$

$$\frac{٢٠}{ف} = ٠,٦٢٤٨$$

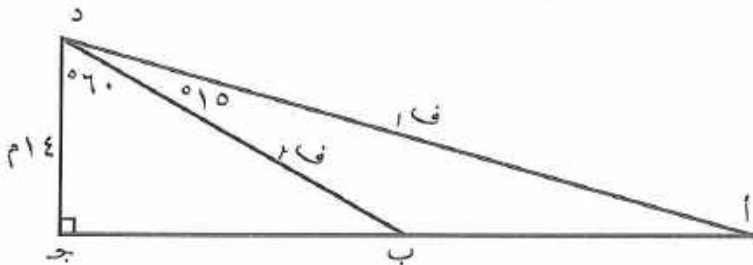
$$ف = \frac{٢٠}{٠,٦٢٤٨} = ٣٢ \text{ متراً تقريباً.}$$

مثال (٧-٢٨):

من قمة مدرسة ارتفاعها (١٤) متراً، رصد الحارس شخصان يقف الأول عند النقطة (أ)، ويقف  
الثاني عند النقطة (ب)، كما هو موضح في الشكل (٧-٥٨). جـد ما يأتي:  
(١) المسافة بين الحارس والشخص الذي يقف عند النقطة (أ).  
(٢) المسافة بين الحارس والشخص الذي يقف عند النقطة (ب).  
(٣) المسافة بين النقطتين (أ)، (ب).

الحل:

(١) المسافة بين الحارس والشخص الذي يقف عند النقطة (أ) = ف<sub>١</sub>



$$٠,٢٥٨٨ = \frac{١٤}{ف} = ٧٥^\circ$$

$$ف = \frac{١٤}{٠,٢٥٨٨}$$

$$ف = ٥٤ \text{ متراً تقريباً.}$$

(٢) المسافة بين الحارس والشخص الذي يقف عند النقطة (ب) = ف<sub>٢</sub>

$$٠,٥ = \frac{١٤}{ف_٢} = ٥٦,٠$$

$$ف_٢ = \frac{١٤}{٠,٥} = ٢٨ \text{ متراً}$$

(٣) المسافة بين النقطتين (أ)، (ب) = أ ج - ب ج

$$ظا ٥٧ = \frac{أ ج}{١٤} = ٣,٧٣٢$$

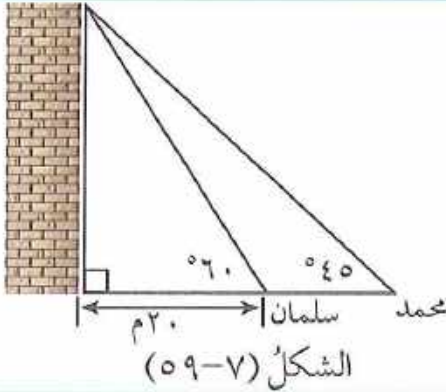
$$أ ج = ٣,٧٣٢ \times ١٤ = ٥٢,٢٤ \text{ متراً تقريباً.}$$

$$ظا ٥٦ = \frac{ب ج}{١٤} = ١,٧٣٢$$

$$ب ج = ١,٧٣٢ \times ١٤ = ٢٤,٢٤ \text{ متراً تقريباً.}$$

$$إذن أ ج - ب ج = ٥٢,٢٤ - ٢٤,٢٤ = ٢٨ \text{ متراً}$$

#### تدريب ٧-١٨



يقف محمد وسلمان أمام مستشفى، كما هو موضح في

الشكل (٧-٥٩)، جـ:

أ) ارتفاع المستشفى.

ب) المسافة بين محمد وسلمان.

#### مثال (٧-٢٩):

شاهد شخص يركب طائرة عمودية ارتفاعها (٧٠٠) متر

عن سطح البحر سفيتين أ، ب، كما في الشكل (٧-٦٠).

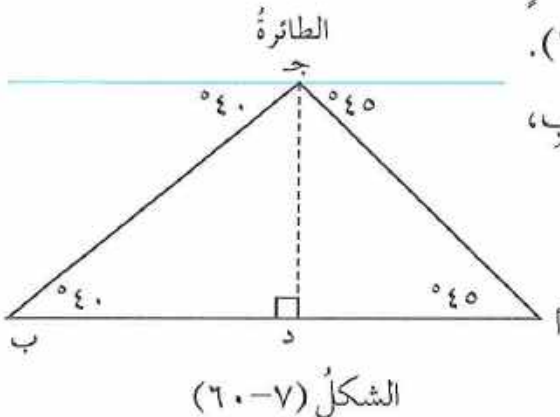
إذا كانت زاويتا انخفاضهما ٤٥°، ٤٠°، على الترتيب،

فجد المسافة بين السفيتين.

**الحل:**

الزاوية جـ أ د = ٤٥°، لماذا؟

الزاوية جـ ب د = ٤٠°، لماذا؟



$$\text{ظا } ١ = \frac{٧٠٠}{\text{أد}} = ٤٥^\circ$$

ومنه، أد = ٧٠٠ متر

$$\text{ظا } ٠,٨٣٩١ = \frac{٧٠٠}{\text{ب د}} = ٤٠^\circ$$

$$\text{ب د} \times ٠,٨٣٩١ = ٧٠٠ \text{ ومنه، ب د} = \frac{٧٠٠}{٠,٨٣٩١} = ٨٣٤ \text{ متراً تقريباً.}$$

إذن المسافة بين السفينتين = أب = أد + ب د = ٧٠٠ + ٨٣٤ = ١٥٣٤ متراً.

### تدريب (٧-١٩)

حل المسألة الواردة في بداية الدرس.

مثال (٧-٣٠):

رصدت آية قمة مئذنة ارتفاعها (١٨) متراً كما في الشكل (٧-٦١)، من النقطة (أ) التي تبعد (٢٥) متراً عن قاعدة المئذنة. جد زاوية الارتفاع التي رصدت منها آية قمة المئذنة.

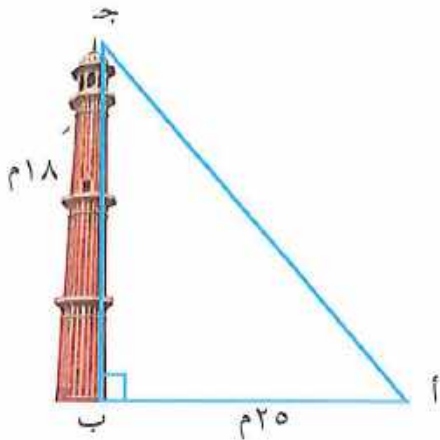
الحل:

زاوية الارتفاع هي ب أ ج

$$\text{ظا } ب أ ج = \frac{\text{ب ج}}{\text{أ ب}} = \frac{١٨}{٢٥}$$

ومنه، ظا ب أ ج = ٧٢°

إذن ق ب أ ج = ٣٦° تقريباً باستخدام الآلة الحاسبة.



الشكل (٧-٦١)

### تدريب (٧-٢٠)

رصد قائد طائرة حربية في لحظة ما هدفاً على الأرض، حيث كانت الطائرة على ارتفاع (٩٧٥) متر عن سطح الأرض، وتبعد (١٨٠٠) متر عن ذلك الهدف. جد زاوية انخفاض الهدف.

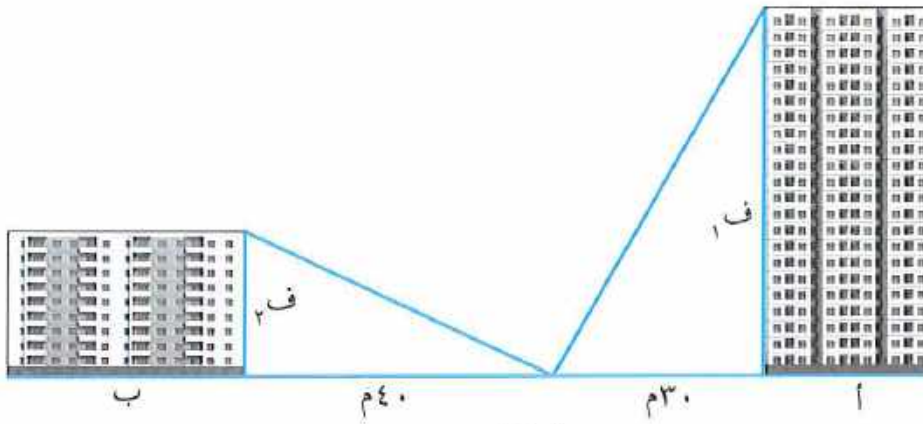


## تمارين ومسائل

(١) حديقة مربعة الشكل، طول ضلعها  $(20\sqrt{7})$  متراً، من أحد طرفي قطريها، رُصدت قمة عمود إنارة مثبت على الطرف الآخر لهذا القطر، فكانت زاوية ارتفاع قمة العمود  $22^\circ$ .  
ما ارتفاع عمود الإنارة؟

(٢) رَصَدَ سامرٌ طائرة عمودية من نقطة على سطح الأرض، فكانت زاوية ارتفاعها  $40^\circ$ ، فإذا كان بعد الطائرة عن سامر في تلك اللحظة يساوي  $(2000)$  متر، فما ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض حينذاك؟

(٣) وقفَ أكرم بين العمارتين أ، ب، على بعد  $(30)$  م،  $(40)$  م على الترتيب، أنظر الشكل  $(٦٢-٧)$ ، إذا كانت زاويتا ارتفاع كلٍّ من العمارتين هما  $60^\circ$ ،  $25^\circ$  على الترتيب، فجد ارتفاع كلٍّ من العمارتين.



الشكل (٦٢-٧)

(٤) ينظر رجل إلى قارب صيد من فوق جسر يرتفع  $(15)$  متراً عن سطح نهر، إذا كانت زاوية انخفاض القارب  $28^\circ$ ، فجد:

أ) المسافة بين القارب ونقطة في النهر أسفل الجسر.

ب) المسافة بين الرجل والقارب.

(٥) وُضعت كاميرا للمراقبة على ارتفاع  $(3)$  أمتار فوق سطح غرفة لمراقبة المدخل الذي يبعد  $(5)$  أمتار عن الغرفة، جد زاوية ارتفاع الكاميرا.

(١) أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب، فيه: ب ج =  $\sqrt{2}$  سم، أ ب = ٥ سم، ج د كلاً مما يأتي:

- أ ( ج أ      ب) جتا أ      ج) ظا أ      د) جتا ج  
هـ) جتا ج      و) ظا ج

(٢) مثلث متساوي الساقين ارتفاعه (١٢) سم، وقياس زاوية الرأس  $70^\circ$ ، ج د طول القاعدة.

(٣) إذا كانت س زاوية حادة، وكان جتا (٩٠ - س) = ٤، ٠، ٤، فجد:

- أ) جتا س      ب) جتا س      ج) ظا س      د) جتا (٩٠ - س)

(٤) إذا كان ٤ جتا س = ٣، حيث س زاوية حادة، فجد قيمة س.

(٥) أثبت أن (جتا س + جتا س) = ٢ = ١ + ٢ جتا س.

(٦) حلّ المثلث أ ب ج القائم الزاوية في ب، فيه ب ج = ١٠ سم، وقياس الزاوية ج =  $42^\circ$ .

(٧) ل م ن مثلث قائم الزاوية في م، إذا كان قياس الزاوية ن =  $30^\circ$ ، فأجب عما يأتي:

أ) هل يمكن حلّ المثلث ل م ن؟

ب) هل يوجد حلول أخرى للمثلث؟

ج) ما المعلومة اللازم توافرها ليكون للمثلث حلّ وحيد؟

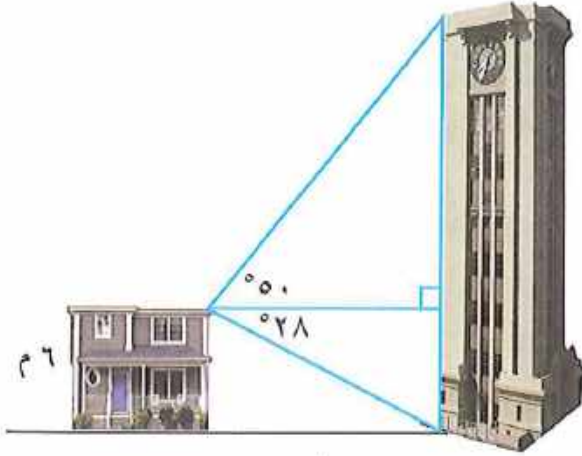
(٨) رصد هاشم قمة سارية العلم، من نقطة ( أ ) بزاوية ارتفاع قياسها  $38^\circ$ ، ثم تقدّم (٧) م نحو

السارية، ورصد قمة السارية مرة أخرى بزاوية ارتفاع قياسها  $42^\circ$ ، ج د ارتفاع السارية.

٩) يسكن شخص في منزل ارتفاعه (٦) أمتار، يقابله برج. رصد هذا الشخص من فوق منزله قمة البرج فكانت زاوية ارتفاعه  $50^\circ$ ، ورصد أسفل البرج فكانت زاوية الانخفاض  $28^\circ$ ، أنظر الشكل (٦٣-٧). جد ما يأتي:

أ) البعد بين المنزل والبرج.

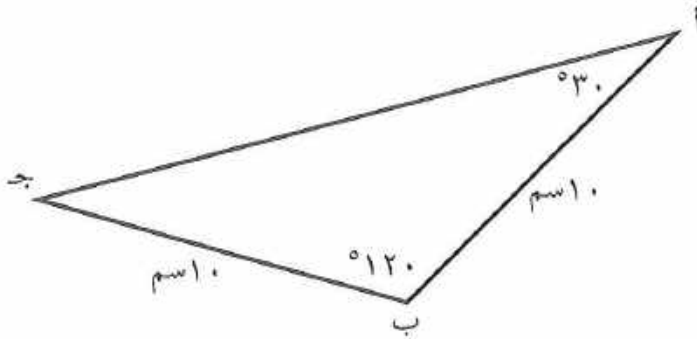
ب) ارتفاع البرج.



الشكل (٦٣-٧)

١٠) في الشكل (٦٤-٧)، أ ب ج مثلث منفرج الزاوية فيه: قياس الزاوية (أ) يساوي  $30^\circ$  وقياس الزاوية ب يساوي  $120^\circ$ ، إذا كان أ ب = ب ج = ١٠ سم، أحسب محيط هذا

المثلث.



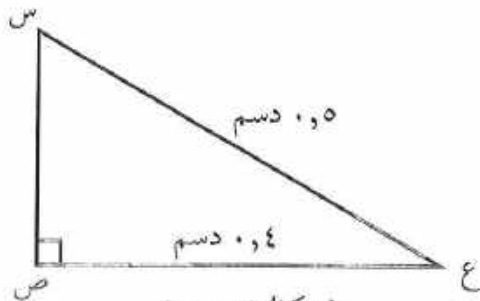
الشكل (٦٤-٧)

## اختبار ذاتي

(١) يتكوّن هذا السؤال من خمس فقرات من نوع الاختيار من متعدد، لكل منها أربعة بدائل، واحد منها فقط صحيح، اختر رمز البديل الصحيح لكل منها:

(١) في المثلث المرسوم في الشكل (٧-٦٥) جتا س يساوي:

- أ (١,٣٣)      ب (٠,٨٠)      ج (٠,٧٥)      د (٠,٦٠)



الشكل (٧-٦٥)

(٢)  $\frac{\sin 24^\circ}{\sin 66^\circ}$  يساوي:

- أ (١)      ب (٢ جا ٢٤°)      ج (جا ٢٤°)      د (ظا ٦٦°)

(٣) القيمة العددية للمقدار:  $\frac{\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ} + \tan 45^\circ$  يساوي:

- أ (٥)      ب (٤)      ج (٢)      د (١)

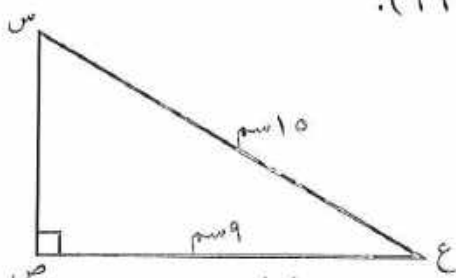
(٤) إذا كان  $\sin 3^\circ = \cos 6^\circ$  جتا س، حيث (س) زاوية حادة، فإن ظا س يساوي:

- أ (٦)      ب (٣)      ج (٢)      د ( $\frac{1}{2}$ )

(٥) إذا كان  $\sin 5^\circ = \cos 90^\circ$ ، فإن ظا (س) يساوي:

- أ (٥)      ب (٠,٧٥)      ج (١)      د ( $\frac{1}{5}$ )

(٢) جِدْ قياس الزاوية (س) في المثلث المرسوم في الشكل (٧-٦٦).



الشكل (٧-٦٦)



(٣) في مثلث قائم الزاوية، إذا كان جيب زاوية حادة مساوياً لجيب تمامها، فماذا يمكن أن تستنتج عن هذا المثلث؟ برّر إجابتك.

(٤) جد القيمة العددية للمقادير الآتية:

أ ( جتا  $55^\circ$  - جا  $35^\circ$  )

ب ( جتا  $3^\circ$  + جتا  $2^\circ$  ) (  $90^\circ - 3^\circ$  )، حيث، صفر  $> \sin 30^\circ$ .

(٥) حلّ المعادلة: جتا  $3^\circ$  - جا  $7^\circ$  = ٠، حيث،  $\sin 7^\circ$  يمثل قياس زاوية حادة.

(٦) رصدت جنى سيارة من قمة برج ارتفاعه (٢٥) متراً عن سطح الأرض، وكانت زاوية الانخفاض  $10^\circ$ ، جد:

أ ( بعد السيارة عن قاعدة البرج.

ب) بعد السيارة عن قمة البرج.



١-٨ التشابه.

٢-٨ تشابه المثلثات.

٣-٨ التطابق.

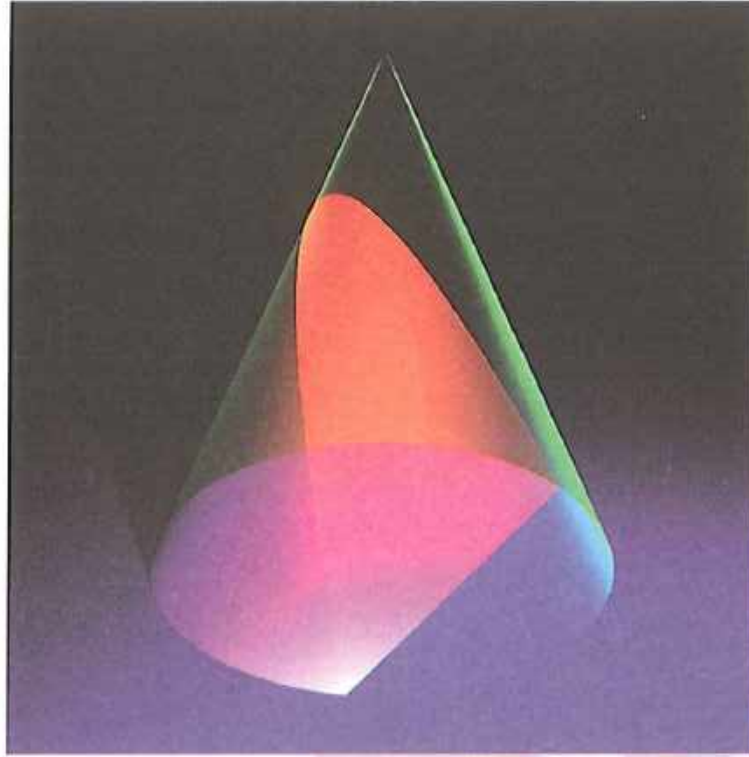
٤-٨ تطابق المثلثات.

ما العلاقة بين القطع النقدية من الفئة نفسها؟ كيف شُيّدت الأبنية؟ على ماذا يعتمد مُصمّم المخطّطات الهندسيّة؟ كيف يُكَبَّرُ نموذج ما؟ ما العلاقة بين مجموعة من أعلام الأردن؟ لماذا يجب أن تكون صفحات الكتاب متطابقة؟

إذا خطر في بالك مثل هذه التساؤلات، فستجد تفسيراً لها عبر دراستك هذه الوحدة، من خلال تعرّف مفهومي التشابه والتطابق، وتحديد تشابه المثلثات وتطابقها.

# الوحدة الثامنة

## الهندسة

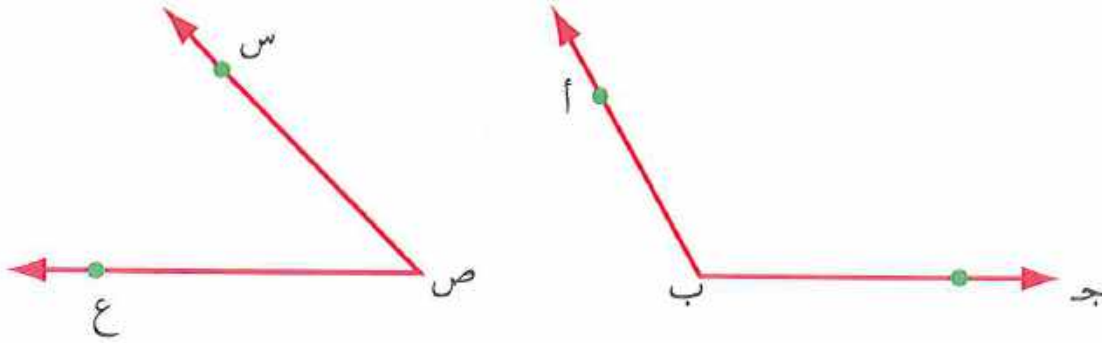


يُتَوَقَّعُ مِنَ الطَّالِبِ بَعْدَ دِرَاسَةِ هَذِهِ الْوَحْدَةِ أَنْ يَكُونَ قَادِرًا عَلَى:

- تحديد تشابه المثلثات وتفسيره.
- تحديد تطابق المثلثات.
- استقصاء العلاقة بين التطابق والتشابه.
- استخدام تشابه وتطابق المثلثات في حل مسائل.
- حل مشكلات باستخدام مفهومي التطابق والتشابه.

# تهميّة

١ باستخدام المنقلة جِدْ قياسَ الزاويتين الآتيتين:



٢ استخدم المسطرة والفرجار في رسمِ زاويةٍ قياسُها  $175^\circ$ ، ورسمِ زاويةٍ قياسُها  $22^\circ$

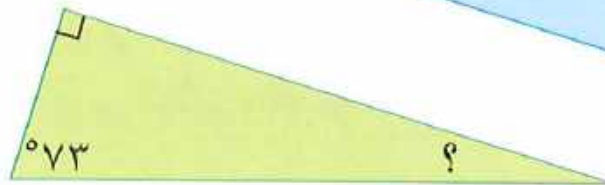
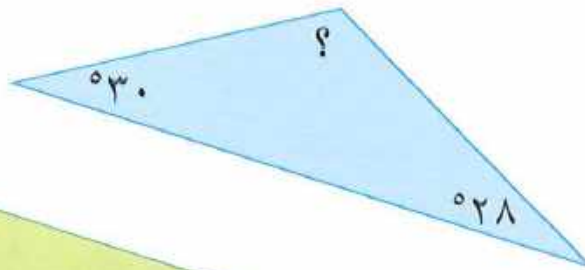
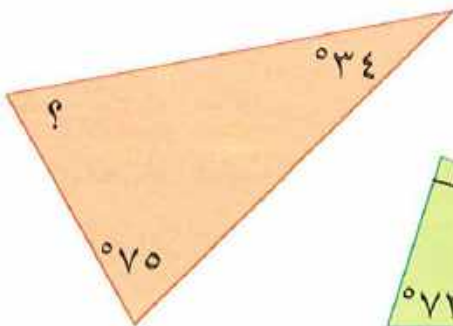
٣ ارسم المثلثَ ع ل و الذي فيه:

$$\text{ع ل} = 13^\circ$$

$$\text{ع و} = 15^\circ$$

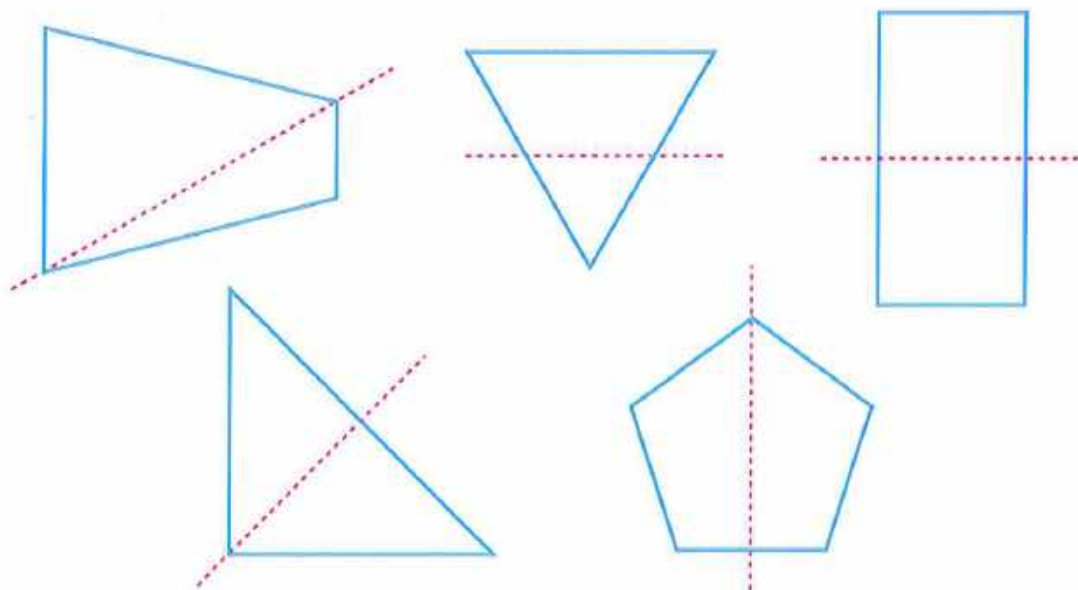
$$\text{ق ح} = 45^\circ$$

٤ جِدْ قياسَ الزاويةِ المجهولةِ في المثلثاتِ الآتية:

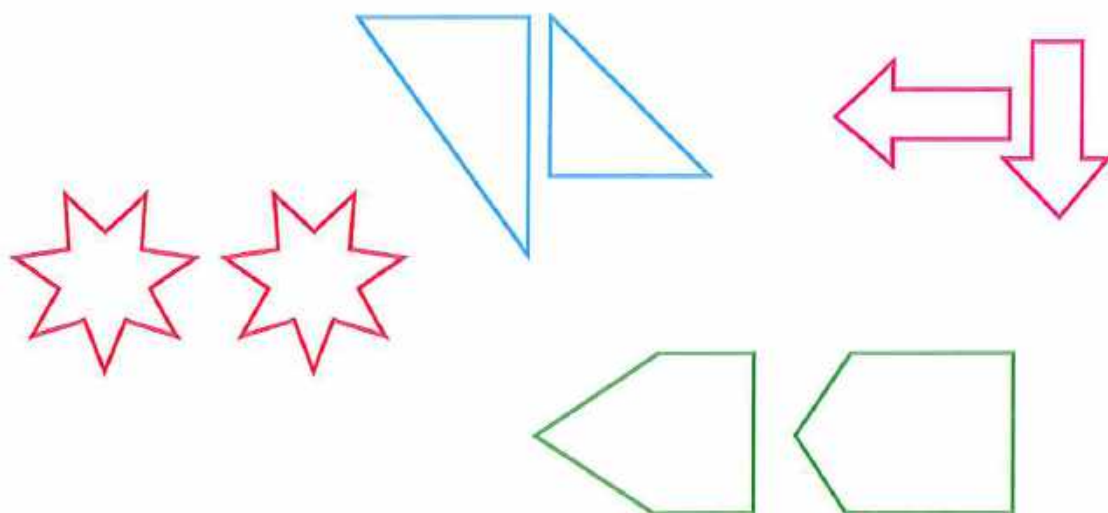


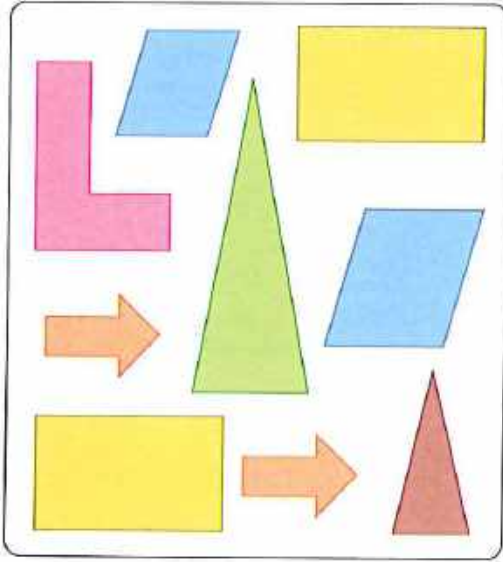


٥ هل الخط المنقط في كل شكل من الأشكال الآتية هو خط تماثل للشكل؟



٦ مَبِّزِ الأزواج المتطابقة في الأشكال الآتية:





الشكل (١-٨)

تأمل الشكل (١-٨).  
هل يمكنك تحديد الأشكال  
المتشابهة؟  
كيف يمكنك الحكم على  
تشابه مربعين؟  
هل جميع المثلثات متشابهة؟

النتائج

- نتعرف مفهوم التشابه
- نحل مشكلات باستخدام خصائص التشابه.

**يتشابه شكلان** إذا كان لهما الهيئة نفسها وإن اختلفا في الحجم بالتكبير أو التصغير. أما في المضلعات **فيتشابه مضلعان** لهما العدد نفسه من الأضلاع إذا كانت زواياهما المتناظرة متساوية في القياس وأطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة بنسبة ثابتة، ويرمز للتشابه بالرمز ( $\sim$ ).

في الشكل (٢-٨) على فرض أن

$أب \sim ج د$  فيمكن تحديد

الأضلاع المتناظرة والزوايا المتناظرة كما يأتي:

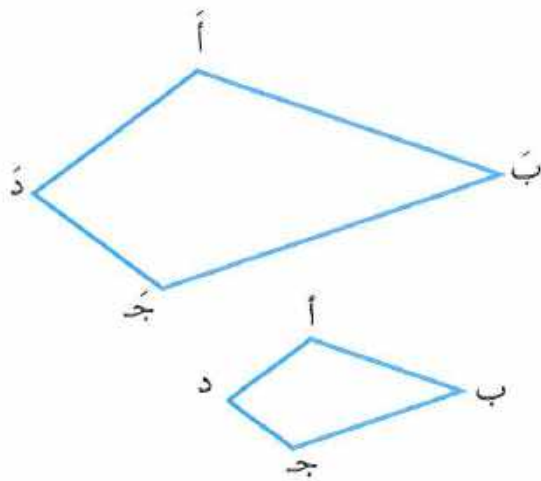
**الأضلاع المتناظرة:**

الضلع  $أ ب$  يناظر الضلع  $أ ب$

الضلع  $ب ج$  يناظر الضلع  $ب ج$

الضلع  $ج د$  يناظر الضلع  $ج د$

الضلع  $د أ$  يناظر الضلع  $د أ$



الشكل (٢-٨)

الزوايا المتناظرة:

- ✗ أ ب ج د تناظر ✗ أ ب ج د
- ✗ ب ج د د تناظر ✗ ب ج د د
- ✗ ج د د أ تناظر ✗ ج د د أ
- ✗ د أ ب تناظر ✗ د أ ب

### قاعدة (١)

يتشابه المضلعان إذا كان لهما نفس عدد الأضلاع وكانت قياسات الزوايا المتناظرة فيهما متساوية وكانت أطوال الأضلاع المتناظرة فيهما متناسبة، ويقصد بالتناسب أن نسبة أي ضلع في المضلع الأول إلى نظيره في المضلع الثاني هي نسبة ثابتة، وتسمى هذه النسبة **مقياس الرسم** أو **معامل التشابه**.

مثال (٨-١):

إذا كان المثلثان في الشكل (٨-٣) متشابهين، فجد ما يأتي:

(١) النسبة بين كل ضلعين متناظرين

(٢) طول كل من س ل، س ع

(٣) نسبة محيط  $\Delta$  س ل ع : محيط  $\Delta$  و د ه

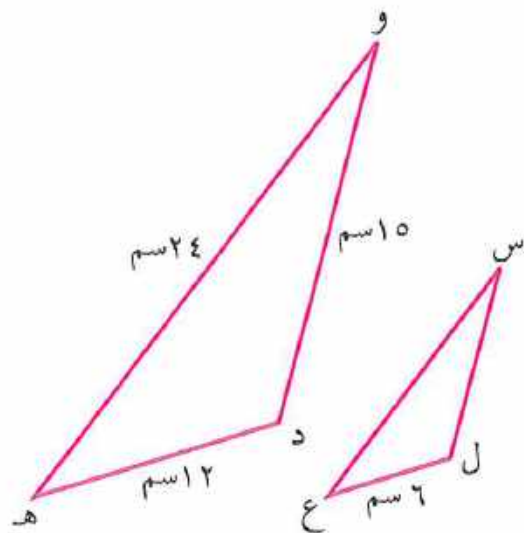
الحل:

$$(١) \text{ بما أن } \frac{ل}{د} = \frac{ع}{ه} = \frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢}$$

فإن النسبة بين أي ضلعين متناظرين هي ١ : ٢

(٢) بما أن  $\Delta$  س ل ع،  $\Delta$  و د ه متشابهان فإن:

$$\frac{ل}{د} = \frac{س}{و} = \frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢}$$



الشكل (٨-٣)

١٢ س ل = ٦ × ١٥ ومنه، س ل = ٧,٥ سم

$$\frac{\text{س ع}}{\text{و ه}} = \frac{\text{ل ع}}{\text{د ه}}$$

$$\frac{\text{س ع}}{٢٤} = \frac{٦}{١٢}$$

$$(٢) \text{ س ع} = \frac{٢٤ \times ٦}{١٢} \text{ ومنه س ع} = ١٢ \text{ سم}$$

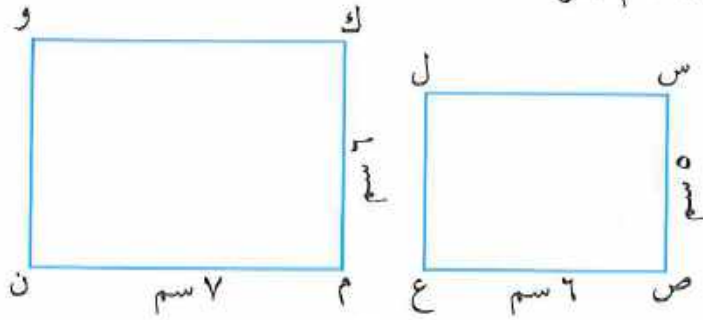
(٣) نسبة محيط  $\Delta$  س ل ع : محيط  $\Delta$  و د ه

$$(١٢ + ٦ + ٧,٥) : (٢٤ + ١٢ + ١٥)$$

١ : ٢ ماذا تلاحظ؟

#### تدريب ٨-١

تحقق من أن المستطيلين س ص ع ل، ك م ن و متشابهان أم لا، وبرر إجابتك.



الشكل (٨-٤)

#### مثال (٨-٢):

رسمت شادن الواجهة الأمامية لمدرستها على لوحة من الكرتون، وكان الطول الذي يمثل ارتفاع المدرسة في الرسم ٢٤ سم، فإذا علمت أن المدرسة مكوّنة من ثلاثة طوابق، ارتفاع الواحد منها ٤ م، جد معامل التشابه بين الرسم والأصل.

#### الحل:

$$\text{نحسب ارتفاع المدرسة الحقيقي} = (١٠٠ \times ٤) \text{ سم} \times ٣ = ١٢٠٠ \text{ سم}$$





$$\frac{\text{الطول في الرسم}}{\text{الطول في الأصل}} = \frac{24}{1200} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$$

أي أن الطول في الرسم  $= \frac{1}{50}$  من الطول في الأصل.

#### تدريب (٢-٨)

أراد عماد تكبير صورته التي طولها ٤ سم، وعرضها ٣ سم ليصبح طولها ٢٠ سم، كم سيكون عرض الصورة بعد التكبير، مع المحافظة على شكلها؟

#### تعريف:

يتكافأ مضعان في حالة واحدة فقط وهي: إذا تساوت مساحتهما.  
أي أن: المضع س<sub>١</sub> يكافئ المضع س<sub>٢</sub> إذا كانت:  
مساحة س<sub>١</sub> = مساحة س<sub>٢</sub>

#### مثال (٣-٨):

س ص ع ل مربع فيه س ص = ٤ سم، أ ب ج د مربع آخر فيه أ ب = ٤ سم، هل المربعان متشابهان؟ هل المربعان متكافئان؟ لماذا؟

#### الحل:

بما أن كلا من الشكلين مربع، فإن زواياهما قوائم، أي أن الزوايا المتناظرة فيهما متساوية في القياس، وأطوال الأضلاع المتناظرة فيهما متناسبة لأن أطوالهما متساوية، إذن المربعان متشابهان.

$$\text{مساحة المربع س ص ع ل} = 24 = 16 \text{ سم}^2$$

$$\text{مساحة المربع أ ب ج د} = 24 = 16 \text{ سم}^2$$

وبما أن مساحتهما متساويتان، فإن المربعين متكافئان.

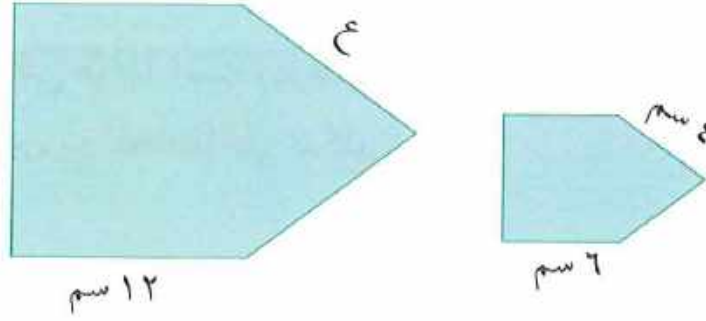
#### نقاش

قالت نقاء: إذا تكافأ مضعان فإنهما يكونان متشابهين.

ما رأيك في صحة ما قالت نقاء؟

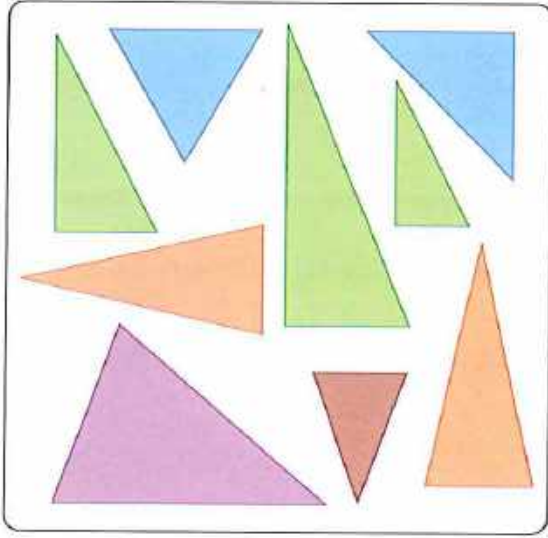
## تمارين ومسائل

- (١) هل يمكن أن يكون المضلع الخماسي مشابهًا للمضلع الرباعي؟ فسّر إجابتك.  
 (٢) ما قيمة  $\epsilon$  في الشكل (٨-٥)، علمًا بأن الشكلين متشابهان؟



الشكل (٨-٥)

- (٣) لدى رامة مغلفان مستطيل الشكل، أحدهما طوله (٢٢) سم، وعرضه (١٠) سم، والثاني طوله (٣٣) سم، وعرضه (١٢) سم، هل المغلفان متشابهان؟  
 (٤) هل يمكنك رسم مضلعين يتساوى فيهما عدد الأضلاع وعدد الزوايا، ولكنهما غير متشابهين؟ أعط مثالاً لتدعم إجابتك.  
 (٥) هل المستطيلان المتشابهان متكافئان؟ بين ذلك.  
 (٦) أ ب ج د مربع فيه أ ب = ٧ سم، ما عدد المربعات المشابهة للمربع أ ب ج د والتي يمكنك رسمها بحيث تكون مختلفة الأبعاد؟



الشكل (٦-٨)

تأمل الشكل (٦-٨).  
متى يتشابه مثلثان؟  
كيف يمكنك الحكم على  
تشابه مثلثين؟  
ما العناصر التي يكفي توفرها  
كي يتشابه مثلثان؟

النتائج

- تتعرف حالات تشابه المثلثات.
- تطبق تشابه المثلثات في حل مسائل.

بالعودة إلى الشكل (٦-٨)، لا بد أنك واجهت صعوبة في تحديد المثلثات المتشابهة وذلك لعدم توفر العناصر الكافية لتحديد التشابه بين هذه المثلثات، وهنا لا بد أن تتعرف العناصر الكافية التي تحكم من خلالها على تشابه مثلثين.

## نشاط (١-٨)

الشكلان المجاوران يمثلان مثلثين قائمي الزاوية، أجب عن كل مما يأتي:

(١) هل الزوايا المتناظرة في الشكلين متساوية في القياس؟

(٢) هل تستطيع التوصل إلى علاقة بين أطوال

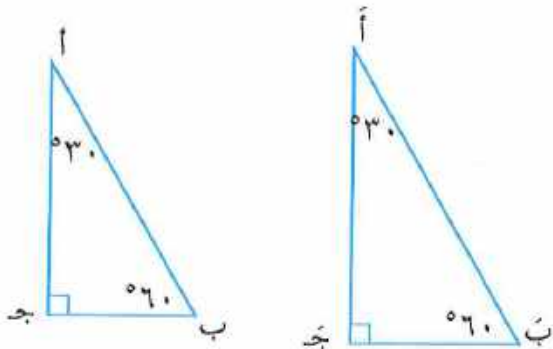
الأضلاع المتناظرة في الشكلين باستخدام

النسب المثلثية؟

(٣) هل تستطيع الحكم فيما إذا كان المثلثان

متشابهين أم لا؟

(٤) ماذا تلاحظ؟



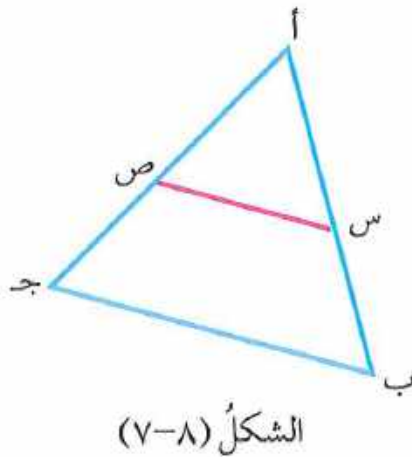
لا بد أنك لاحظت بعد الإجابة عن أسئلة النشاط (٨-١) إجابةً صحيحةً، أن المثلثين متشابهين. ويمكنك القول بأنه إذا تساوت قياسات الزوايا المتناظرة في مثلثين فإن هذا كافٍ للحكم على تشابه المثلثين، وهذه حقيقة مثبتة في علم الرياضيات وهي الحالة الأولى من تشابه المثلثات.

**الحالة الأولى: يتشابه مثلثان إذا تطابقت زواياهما المتناظرة.**

**مثال (٨-٤)**

في الشكل (٨-٧) إذا علمت أن  $س ص // ب ج$    
 بين أن  $\Delta أ س ص \sim \Delta أ ب ج$  متشابهان

**الحل**



زاوية مشتركة  $\angle أ ص س = \angle أ ب ج$    
 متناظرتان،  $س ص // ب ج$   $\angle أ ص ج = \angle أ ب ج$    
 متناظرتان،  $س ص // ب ج$   $\angle أ س ج = \angle أ ب ج$

بما أن الزوايا المتناظرة في المثلثين متساوية في القياس، فإن المثلثين متشابهان   
 وبالرموز:  $\Delta أ س ص \sim \Delta أ ب ج$

## قاعدة (٢)

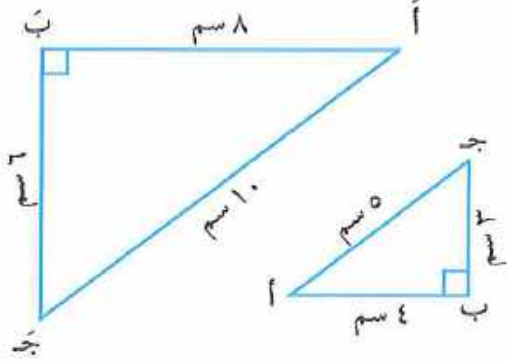
نتيجة (١): يتشابه مثلثان إذا تطابقت زاويتان متناظرتان فيهما.

نتيجة (٢): إذا رسمت قطعة مستقيمة تصل بين ضلعين في مثلث وتوازي الضلع الثالث، فإن المثلثين الناتجين متشابهان.

## تدريب ٨-٣

ليكن  $أ ب ج$  مثلثاً،  $ص$  نقطة على  $ب ج$ ،  $س$  نقطة على  $أ ج$ ،  $أ ب // س ص$  بحيث   
  $ب ج = ٩$  سم،  $أ ج = ١٠$  سم،  $س ج = ٧$  سم،  $أ ب = ٤$  سم،  $ص ج = ٦$  سم   
 أ) بين أن  $\Delta أ ب ج \sim \Delta أ س ص$    
 ب) احسب طول  $س ص$





اعتمد الشكليين المجاورين في الإجابة عن كل مما يأتي:

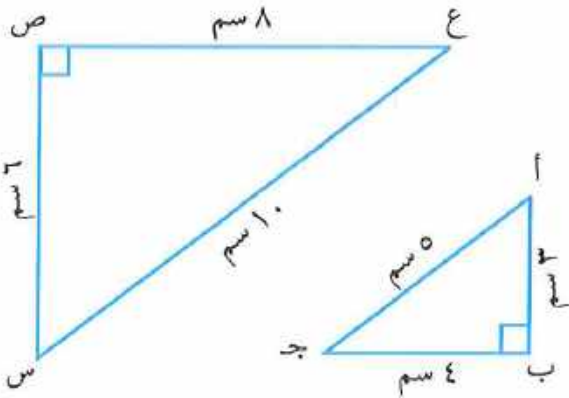
- (١) هل أطوال الأضلاع المتناظرة في المثلثين متناسبة؟
- (٢) هل تستطيع التوصل إلى علاقة بين قياسات الزوايا المتناظرة في الشكليين باستخدام النسب المثلثية؟
- (٣) هل تستطيع أن تُحدّد إذا كان المثلثان متشابهين أو لا؟
- (٤) ماذا تلاحظ؟

لا بُدَّ أنكَ لاحظت - بعد الإجابة عن أسئلة النشاط (١) إجابة صحيحة - أن المثلثين متشابهان. ويمكنك القول أنه إذا تناسبت الأطوال المتناظرة في مثلثين فإن المثلثين متشابهان، وهذه حقيقة مثبتة في علم الهندسة، وهي الحالة الثانية من تشابه المثلثات.

**الحالة الثانية: يتشابه مثلثان إذا تناسبت أطوال أضلعهما المتناظرة.**

مثال (٨-٥) \*

اعتمد الشكل (٨-٨) في تحديد الزوايا المتساوية في القياس في كل من المثلثين أ ب ج، س ص ع.



الحل:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

$$\frac{8}{3} = \frac{5}{4} = \frac{10}{6}$$

الشكل (٨-٨)

تناسب الأضلاع المتناظرة

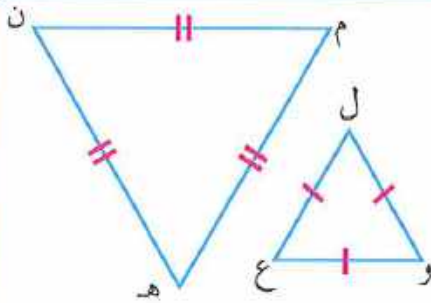
تشابه المثلثات

$\Delta$  أ ب ج يشابه  $\Delta$  س ص ع

إذا جميع الزوايا المتناظرة متساوية

ومنه  $\angle A = \angle S$  ،  $\angle B = \angle V$  ،  $\angle C = \angle E$

\* المثال من أسئلة الاختبارات الدولية.



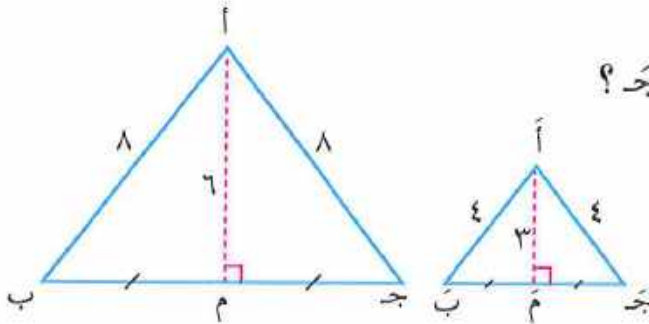
الشكل (٨-٩)

في الشكل (٨-٩) هل  $\triangle L$  و  $\triangle$  يشابه  $\triangle$  هـ ن م ، برّر إجابتك.

## نشاط (٨-٣)

اعتمد الشكلين المجاورين في الإجابة عن كل مما يأتي علماً بأن  $\angle A = \angle C$  ؟

(١) هل هناك علاقة بين  $\frac{AB}{AC}$  ،  $\frac{AB}{AC}$  ؟



(٢) هل قياس  $\angle B$  أ ج يساوي قياس  $\angle B$  أ ج ؟

(٣) هل يمكنك استنتاج أن المثلثين متشابهان ؟

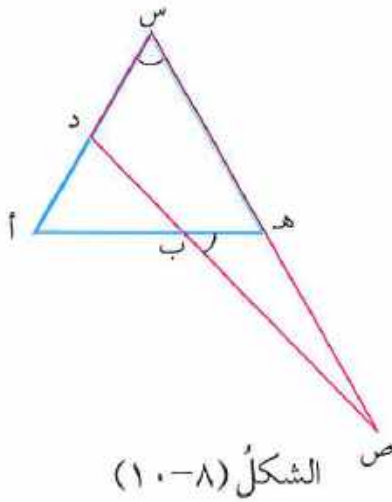
لا بد أنك لاحظت أن المثلثين متشابهان، وهنا يمكنك القول بأنه إذا تناسب طولاً ضلعين في مثلث مع طولي الضلعين المناظرين لهما في مثلث آخر، وكانت الزاوية المحصورة بين الضلعين في الأول تطابق الزاوية المحصورة بين الضلعين في الآخر، فإن المثلثين متشابهان، وهذه حقيقة مثبتة في علم الهندسة، وهي الحالة الثالثة من تشابه المثلثات.

**الحالة الثالثة:** يتشابه مثلثان إذا تناسب طولاً ضلعين في أحدهما مع طولي الضلعين المناظرين لهما في الآخر، وكانت الزاوية المحصورة بين الضلعين في المثلث الأول تطابق الزاوية المناظرة لها في المثلث الثاني.

مثال (٨-٦):

في الشكل (٨-١٠) أثبت أن  $ق \times ا س ص = ق \times ه ب ص$   
 علماً أن  $ا د \times ا س = ا ب \times ا ه$

الحل:



معطيات

$$ا د \times ا س = ا ب \times ا ه$$

بالقسمة على  $ا ه \times ا س$

$$\frac{ا د \times ا س}{ا ه \times ا س} = \frac{ا ب \times ا ه}{ا ه \times ا س}$$

من المعطيات ،  $ا ب = ا د$  مشتركة

تشابه ضلعين وزاوية محصورة

$$\Delta ا ب د \sim \Delta ا س ه$$

من التشابه

$$ق \times ا د ب ا = ق \times ا ه س ا$$

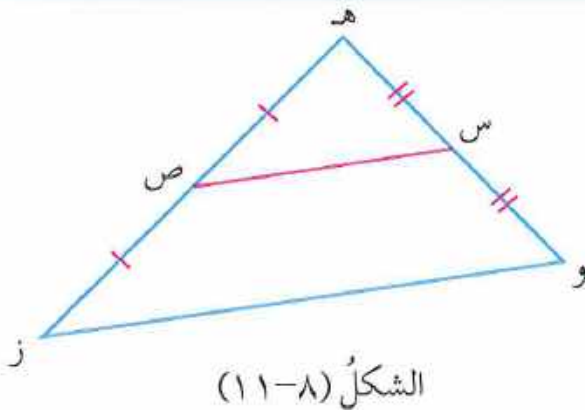
تقابل بالرأس

$$ق \times ا د ب ا = ق \times ا ه ب ص$$

$$ا ذ ن ق \times ا ه س ا = ق \times ا ه ب ص$$

$$ا ذ ن ق \times ا س ص = ق \times ا ه ب ص$$

تدريب (٨-٥)

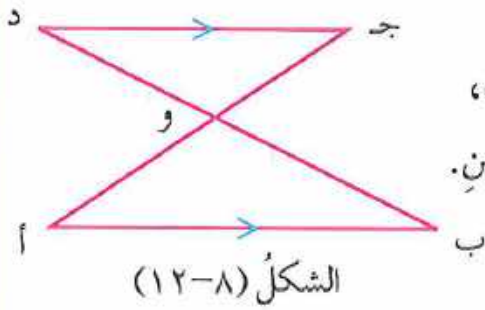


في الشكل (٨-١١)  $ه ز = ٨$  سم

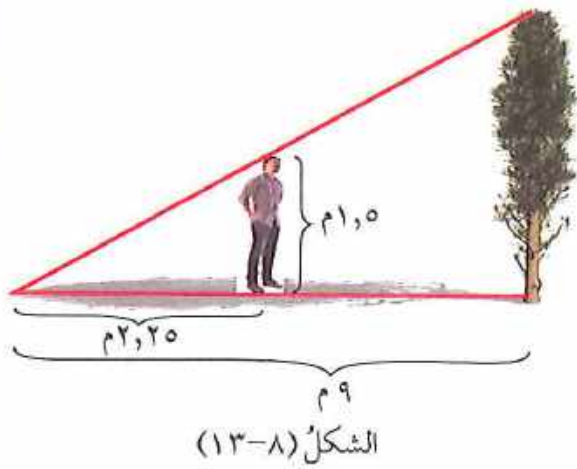
$ز و = ١٠$  سم،  $ه س = ٣$  سم،

احسب طول  $ه و$  ،  $س ص$

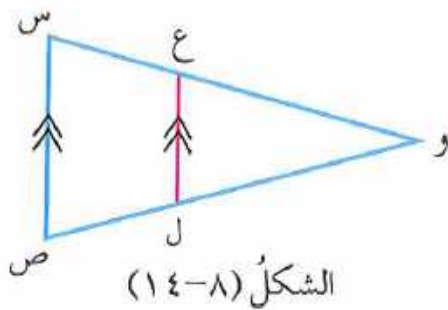
## تمارين ومسائل



(١) في الشكل (٨-١٢) المثلثان أ و ب، ج و د متشابهان، سمّ زوجاً من الزوايا المتناظرة بسبب تشابه هذين المثلثين.



(٢) وقف طالب أمام شجرة كما في الشكل (٨-١٣)، ساعد هذا الطالب في إيجاد طول الشجرة.



(٣) في الشكل (٨-١٤) ع ل // س ص، س ص = ٥ سم، ع ل = ٣ سم، و ل = ٨ سم، احسب طول و ص.

(٤)  $\Delta$  ه و ي،  $\Delta$  ع ص س مثلثان متشابهان، حيث و ي، ه ي متناظران على التوالي مع ص س، ع س.

أ) اذكر الزوايا المتناظرة في هذين المثلثين.

ب) احسب طول ص س، ع س إذا علمت أن:

وي = ٢٠ سم، ه ي = ٢٤ سم، ه و = ٣٢ سم، ص ع = ١٦ سم.



الشكل (٨-١٥)



تأمل الشكل (٨-١٥)، هل يحتوي الشكل إشارات تعبر عن التحذير نفسه؟



(١) هل تمثل إشارة التحذير بوجود مدرسة مضعاً؟



(٢) ما أوجه الشبه بين الإشارات المتشابهة؟

الشكل (٨-١٥)

(٣) قارن بين الزوايا المتناظرة والاضلاع المتناظرة؟

(٤) اذا قصت إحدى الإشارات المتشابهة وطُبقت على الأخرى ماذا ستلاحظ؟

للتأكد من تطابق شكلين يُوضَع أحدهما على الآخر، فإذا غطى أحدهما الآخر تماماً دون زيادة أو نقصان في أحدهما، فإنهما **متطابقان**، ولا يحدث ذلك إلا إذا كان لهما الهيئة نفسها، والقياسات نفسها.

وإذا كان ش ١، ش ٢ **شكلين متطابقين**، يُكتب ذلك بالرموز **ش ١ ≡ ش ٢**

## تعريف (١)

(١) تتطابق القطعتان المستقيمتان إذا كانتا متساويتين في الطول، أي أن:

$$\overline{س ص} \equiv \overline{ل ع} \text{ إذا وفقط إذا كان طول س ص} = \text{طول ل ع}$$

(٢) تتطابق الزاويتان إذا كانتا متساويتين في القياس، أي أن:

$$\angle أ ب ج \equiv \angle ه و ل \text{ إذا وفقط إذا كان } \angle أ ب ج = \angle ه و ل$$

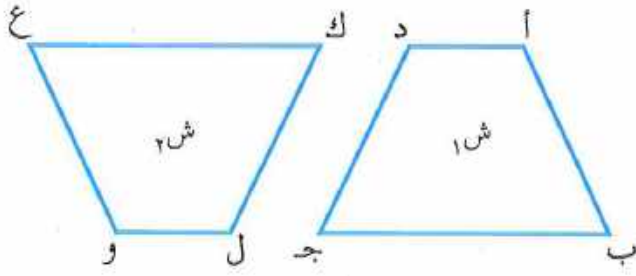
(٣) يتطابق الشكلان الهندسيان إذا وجد تناظر بين أضلاع ورؤوس الشكلين بحيث يطابق كل ضلع وكل رأس في أحد الأشكال نظيره في الشكل الآخر.

مثال: (٧-٨) :

تأمل الشكل (٨-١٦)

إذا كان  $ش١ \equiv ش٢$

عين الأضلاع المتطابقة والزوايا المتطابقة.



الشكل (٨-١٣)

الحل:

لاحظ أن كلا الشكلين ش١، ش٢ رباعي، وحسب ترتيب الأضلاع المتناظرة والزوايا المتناظرة، يمكن كتابة جمل التطابق لهما على النحو الآتي:

$$\overline{أ ب} \equiv \overline{ل ك} , \quad \overline{أ ب} \equiv \overline{أ ب} \quad \text{و} \quad \overline{ل ك} \equiv \overline{ل ك}$$

$$\overline{ب ج} \equiv \overline{ك ع} , \quad \overline{أ ب ج} \equiv \overline{أ ب ج} \quad \text{و} \quad \overline{ك ع} \equiv \overline{ك ع}$$

$$\overline{ج د} \equiv \overline{ع و} , \quad \overline{أ ب ج د} \equiv \overline{أ ب ج د} \quad \text{و} \quad \overline{ع و} \equiv \overline{ع و}$$

$$\overline{د أ} \equiv \overline{و ل} , \quad \overline{أ ب ج د أ} \equiv \overline{أ ب ج د أ} \quad \text{و} \quad \overline{و ل} \equiv \overline{و ل}$$

تدريب (٨-٦)

في المثال السابق، قم بقياس أطوال الأضلاع المتناظرة، وقياس الزوايا المتناظرة، ثم ارسم شكلاً ثالثاً ش٣ حيث أن ش٣ يطابق كلا من ش١، ش٢.

تعريف (٢)

يتطابق مضلعان لهما العدد نفسه من الأضلاع في حالة واحدة فقط، إذا تطابقت الأضلاع المتناظرة والزوايا المتناظرة فيهما.

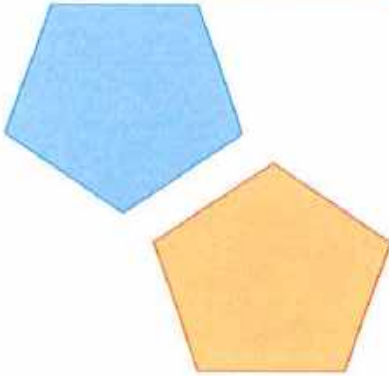
مثال (٨-٨):

أ ب ج د مربع طول ضلعه = ٦ سم، ع ل و ي مربع آخر طول ضلعه = ١٢ سم، هل المربعان متطابقان؟ لماذا؟

### الحل:

بما أن كلاً من الشكلين مربع، إذا زواياهما قوائم، أي أن جميع الزوايا المتناظرة متطابقة، ولكن أطوال الأضلاع المتناظرة غير متساوية لأن أطولهما غير متساوية، ومنه:  
المربع أ ب ج د (لا يطابق) المربع ع ل و ي، وبالرموز:  
المربع أ ب ج د  $\neq$  المربع ع ل و ي

### تدريب ٧-٨



الشكل (٨-١٨)

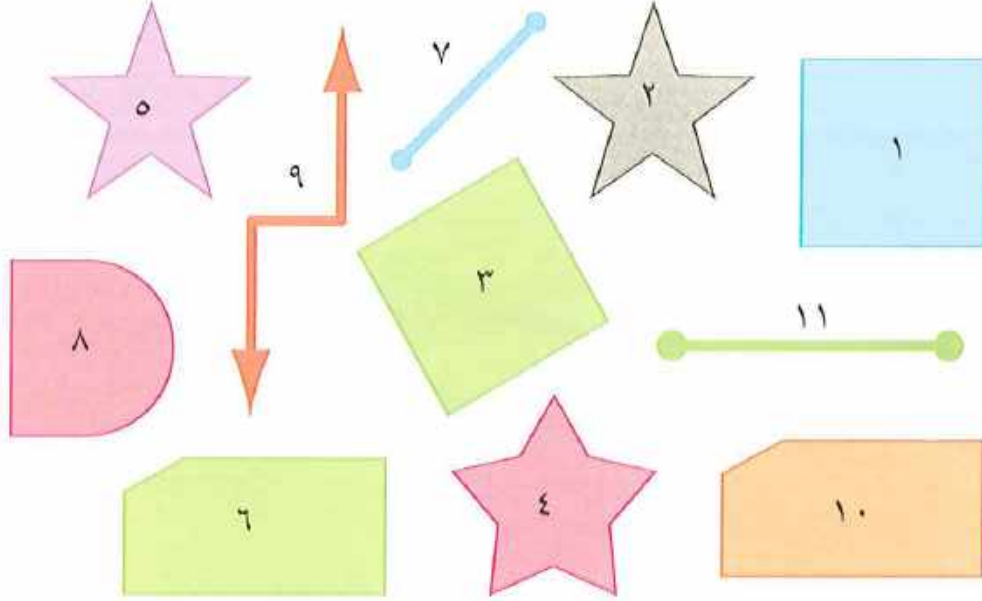
جد قياسات كل من أطوال أضلاع وزوايا المضلعين في الشكل (٨-١٧)، وقرّر إن كانا متطابقين، مستخدماً الأدوات الهندسية.

### تدريب ٨-٨

ارسم مضلعين متطابقين، وبيّن إذا كانا متكافئين.

## تمارين ومسابقات

- (١) قطعتان مستقيمتان طول كل منهما يساوي ١٠ سم، هل هما متطابقتان؟ لماذا؟  
 (٢) عيّن الأشكال المتطابقة في الشكل (٨-١٨)



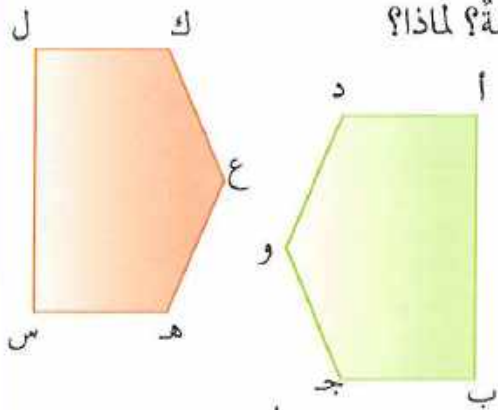
الشكل (٨-١٨)

- (٣) ارسم دائرتين متطابقتين، واحسب مساحة كل منهما.

- (٤) هل جميع المستطيلات التي لها المساحة نفسها متطابقة؟ لماذا؟

- (٥) الشكلان الموضحان في الشكل (٨-١٩) متطابقان،

اكتب جمل التوافق لهما.



الشكل (٨-١٩)

- (٦) هل يمكنك رسم مضعين يتساوى فيهما عدد الأضلاع، ولكنهما غير متطابقين؟  
 أعط مثالا لتدعم إجابتك.

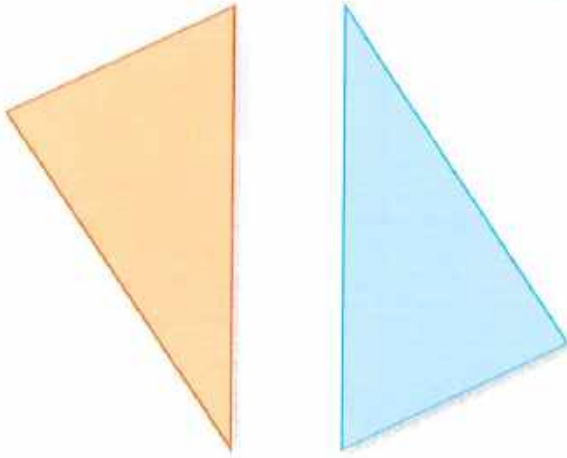
- (٧) أ ب ج د مربع فيه  $أ ب = ٧$  سم، ما عدد المربعات المطابقة للمربع أ ب ج د والتي يمكنك رسمها؟



## النتائج

- تُستقرى حالات تطابق المثلثات.
- تحل أسئلة على تطابق المثلثات.

- (١) متى يتطابق مثلثان؟
- (٢) هل تطابق بعض العناصر المتناظرة يضمن تطابق العناصر المتناظرة الأخرى؟

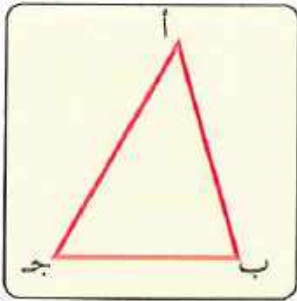


للتعرّف على حالات تطابق المثلثات نفذ النشاط الآتي:

## نشاط (٨-٤)

احضر ورقة وابدأ بالخطوات الآتية:

- (١) ارسم مثلثاً وليكن  $\Delta$  أ ب ج.
- (٢) استخدم المسطرة والمنقلة لقياس أطوال أضلاع  $\Delta$  أ ب ج، وزواياه.

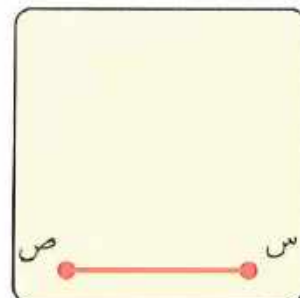
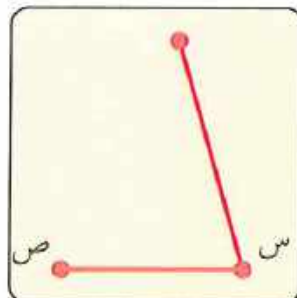
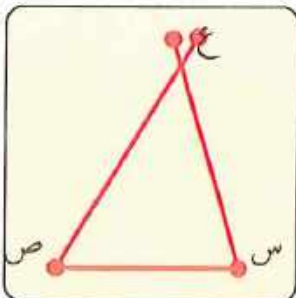


- (٣) باستخدام القياسات التي حصلت عليها في خطوة (٢):

ارسم  $\Delta$  ص = ج

ارسم  $\Delta$  س = ب

ارسم  $\Delta$  س ص = أ ب

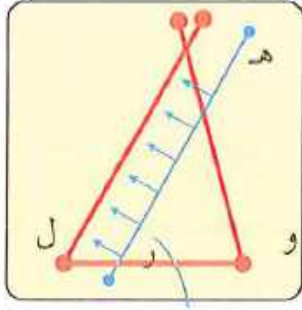


- (٤) قس  $\Delta$  س ص ع وطابقه مع  $\Delta$  أ ب ج، ماذا تلاحظ؟

- (٥) هل يمكنك رسم  $\Delta$  س ص ع في الخطوة (٣) بحيث يكون  $\Delta$  س ص ع لا يطابق  $\Delta$  أ ب ج؟ لماذا؟

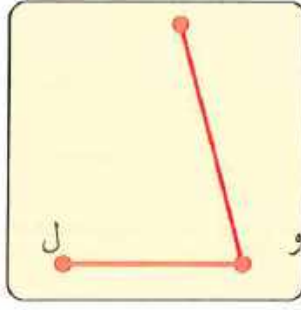
(٥) باستخدام القياسات التي حصلت عليها في الخطوة (٢)

ارسم  $\triangle هـ ل أ$   $\equiv \triangle و ل ب$

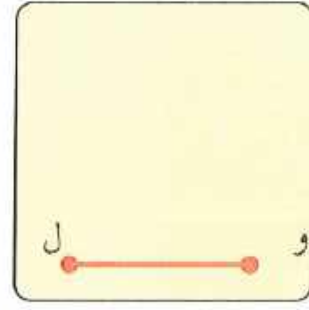


اضبط هـ ر بحيث يمرُّ بالنقطة ل

ارسم  $\triangle و ل ب$   $\equiv \triangle و ل ب$



ارسم  $\triangle و ل ب$   $\equiv \triangle و ل ب$



(٦) قصّ  $\triangle و ل هـ$  وطابقه مع  $\triangle أ ب جـ$ ، ماذا تلاحظ؟

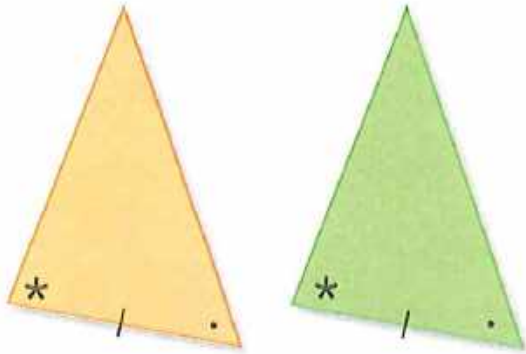
هل يمكنك رسم  $\triangle و ل هـ$  في الخطوة (٥) بحيث يكون  $\triangle و ل هـ$

لا يطابق  $\triangle أ ب جـ$ ؟ لماذا؟

والآن سنقوم بدراسة أربع حالات مختلفة لتطابق المثلثات

الحالة الأولى:

يتطابق مثلثان إذا تطابقت زاويتان والضلع الواصل بين رأسيهما في المثلث الأول مع زاويتين والضلع الواصل بين رأسيهما في المثلث الثاني. (زاوية، ضلع، زاوية)



الشكل (٨-٢٠)

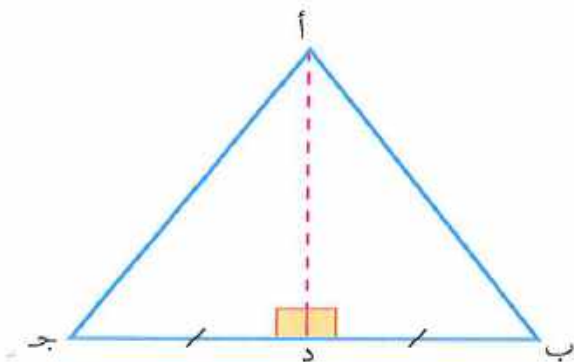
مثال: (٨-٩):

في الشكل (٨-٢١)

$\triangle أ ب جـ$  متساوي الساقين

مساحة  $\triangle أ ب د = ٢٤$  سم<sup>٢</sup>

احسب مساحة  $\triangle أ ب جـ$



الشكل (٨-٢١)

## الحل:

معطى بالشكل

زوايا القاعدة لثلث متساوي الساقين

معطى بالشكل

تطابق (زاوية، ضلع، زاوية)

$$ب د = ج د$$

$$ق \nabla أ ب د = ق \nabla أ ج د$$

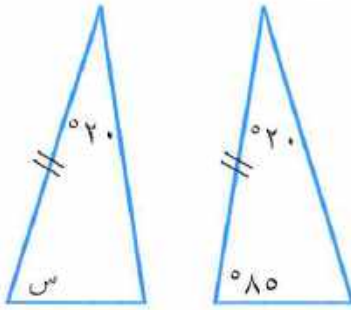
$$ق \nabla أ د ب = ق \nabla أ د ج = ٩٠^\circ$$

$$\text{إذا: } \Delta أ ب د \equiv \Delta أ ج د$$

$$\text{ومنه، مساحة } \Delta أ ب ج = ٢٤ \times ٢ = ٤٨ \text{ سم}^2$$

## تدريب ٨-٩

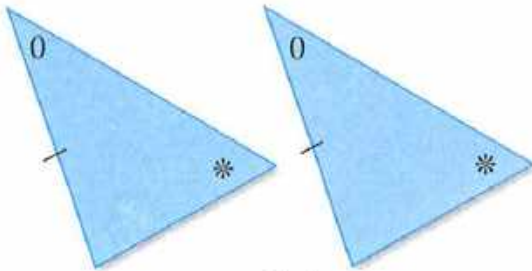
في الشكل (٨-٢٢) على فرض أن المثلثين متطابقان، جد قياس الزاوية س



الشكل (٨-٢٢)

## الحالة الثانية:

يتطابق مثلثان إذا تطابق زاويتان متتاليتان والضلع المجاور لأحدهما في المثلث الأول مع زاويتين متتاليتين والضلع المجاور لأحدهما في المثلث الثاني. (زاوية، زاوية، ضلع)



الشكل (٨-٢٣)

## مثال (٨-١٠):

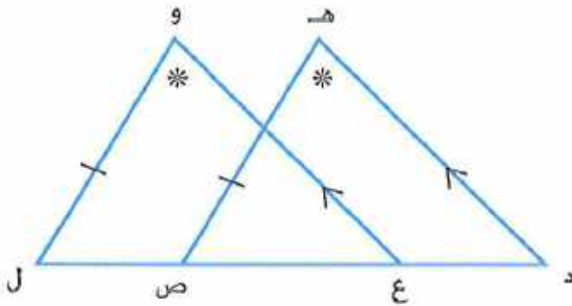
في الشكل (٨-٢٣)، إذا كان

$$\overline{ل ه} = \overline{و ص}$$

$$ق \nabla و = ق \nabla ه،$$

$$\text{و ع} // \text{د ه،}$$

$$\text{بين أن } \Delta و ع ل = \Delta ه د ص$$



الشكل (٨-٢٤)

## الحل:

من المعطيات  
بالتناظر والتوازي  
زاوية، زاوية، ضلع

$\angle و = \angle هـ$ ،  $\overline{ول} = \overline{هـ ص}$   
 $\angle ع = \angle د$   
إذن  $\Delta و ع ل \equiv \Delta هـ د ص$

### تدريب ٨-١٠

في الشكل (٨-٢٥)

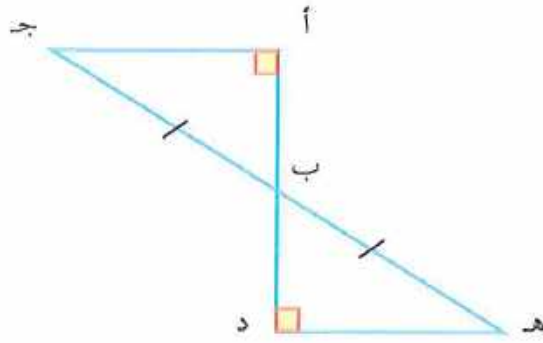
$\overline{أ د} \perp \overline{أ ج}$

$\overline{أ د} \perp \overline{د هـ}$

ب تنصف ج هـ،

ابحث في تطابق  $\Delta أ ب ج$

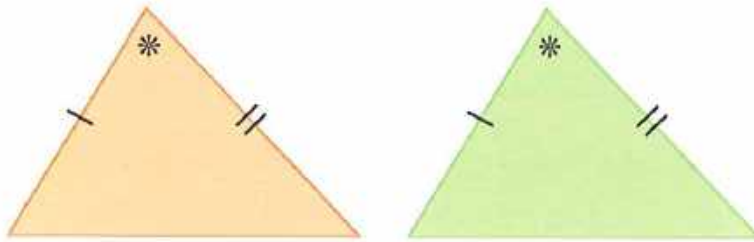
و  $\Delta د ب هـ$



الشكل (٨-٢٥)

### الحالة الثالثة:

يتطابق مثلثان إذا كان الضلعان والزاوية  
المحصورة بينهما في أحد المثلثين تطابق  
نظيراتها في المثلث الآخر. (ضلع،  
زاوية، ضلع).



الشكل (٨-٢٦)

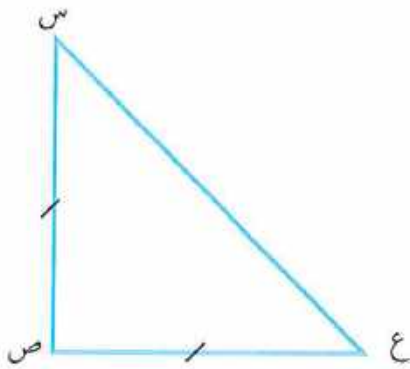
### مثال (٨-١١):

في المثلث س ص ع

$\overline{س ص} = \overline{ع ص}$

ارسم خطاً يقسم  $\Delta س ص ع$

إلى مثلثين متطابقين، انظر الشكل (٨-٢٧/أ)

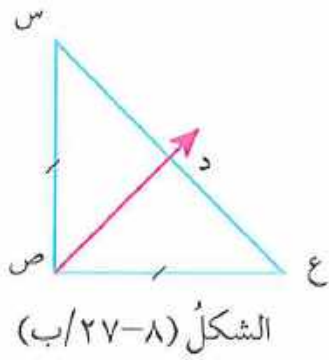


الشكل (٨-٢٧/أ)



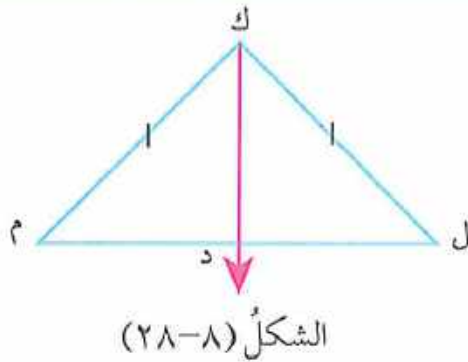
الحل:

$\Delta$  س ص ع متساوي الساقين، نرسم خطًا مستقيمًا ص د،  
ينصف ص ع حيث ص د محور تماثل، انظر الشكل  
(٢٧-٨/ب).



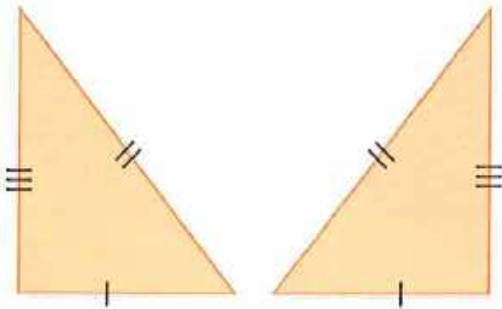
الشكل (٢٧-٨/ب)

تدريب ٨-١١



الشكل (٢٨-٨)

في الشكل (٢٨-٨)  
 $\vec{ك د}$  ينصف م ك ل  
 $\overline{ك ل} = \overline{ك م}$   
بين أن  $\overline{ل د} = \overline{م د}$



الشكل (٢٩-٨)

الحالة الرابعة:

يتطابق مثلثان إذا كانت أضلاعهما المتناظرة متطابقة.  
(ضلع، ضلع، ضلع)

مثال (١٢-٨):

اعتمادًا على الشكل (٣٠-٨) إذا علمت أن:

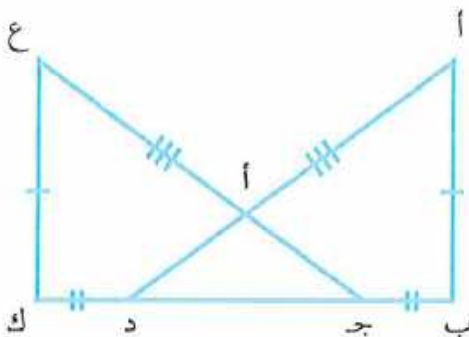
$$\overline{أ ب} \equiv \overline{ع ك}$$

$$\overline{ب ج} \equiv \overline{ك د}$$

$$\overline{أ د} \equiv \overline{ع ج}$$

بين أن:

$$\Delta أ ب د \equiv \Delta ع ك ج$$



الشكل (٣٠-٨)

الحل:

لاحظ أن

$$\overline{أب} \equiv \overline{عك} , \overline{أد} \equiv \overline{عج}$$

$$\overline{بج} \equiv \overline{كد}$$

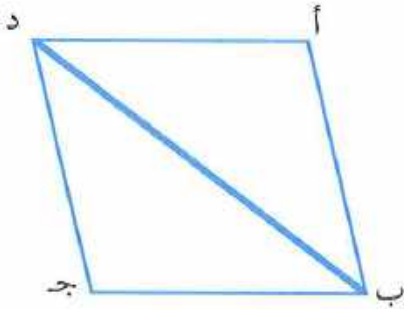
$$\overline{بج} + \overline{جك} = \overline{جك} + \overline{كد}$$

$$\overline{بج} \equiv \overline{كد}$$

$$\text{إذن: } \Delta أبج \equiv \Delta كد$$

تطابق بثلاثة أضلاع

تدريب ٨-١٢



الشكل (٨-٣١)

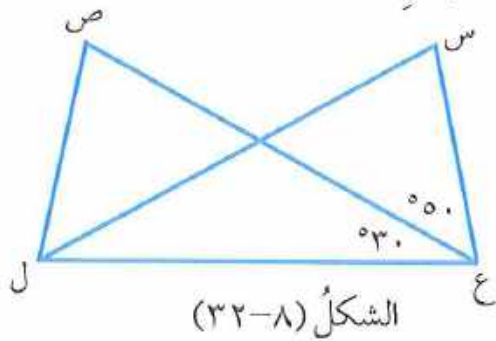
ليكن أبج د متوازي أضلاع بين أن:

المثلثين أبج د، ج د ب متكافئان

لاحظ الشكل (٨-٣١)

## تمارين ومسابقات

(١) في الشكل (٣٢-٨) المثلثان س ع ل، ص ع ل متطابقان،



الشكل (٣٢-٨)

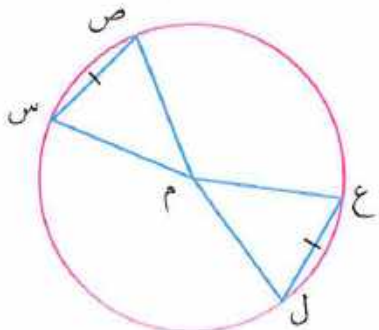
وقياس  $\angle ص ع ل = 30^\circ$

قياس  $\angle س ع ل = 50^\circ$

احسب قياس  $\angle ص ل ع$

(٢) إذا كان ب ك ر، س ه و مثلثين، فيهما:

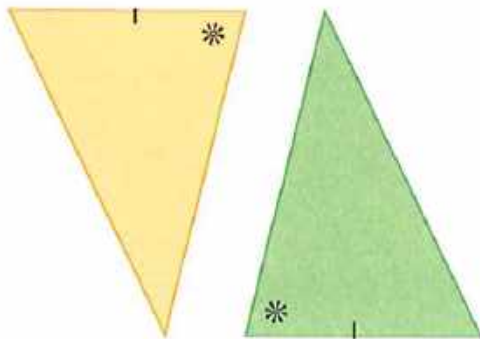
$\angle ك ر ب \equiv \angle ه و س$ ،  $\angle ك ب ر \equiv \angle ه س و$ ،  $\overline{ب ر} \equiv \overline{س و}$  فهل المثلثان متطابقان؟



الشكل (٣٣-٨)

(٣) في الشكل (٣٣-٨)،  $ل ع = س ص$  بين أن:

$\angle ع م ل \equiv \angle ص م س$  (حيث م مركز الدائرة)



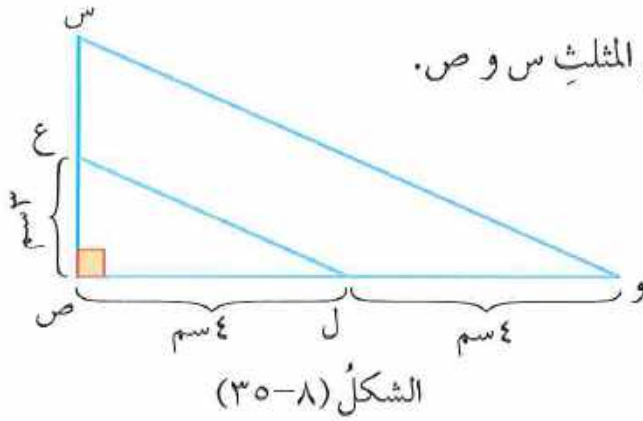
الشكل (٣٤-٨)

(٤) اعتماداً على الشكل (٣٤-٨)،

هل يمكنك الحكم على تطابق المثلثين؟

(٥) ارسم مثلثين متكافئين مساحة كل منهما تساوي (٦٠) سم<sup>٢</sup>، هل بالضرورة أن يكونا متطابقين؟

(١) في الشكل (٨-٣٥) احسب طول الوتر في المثلث س و ص.

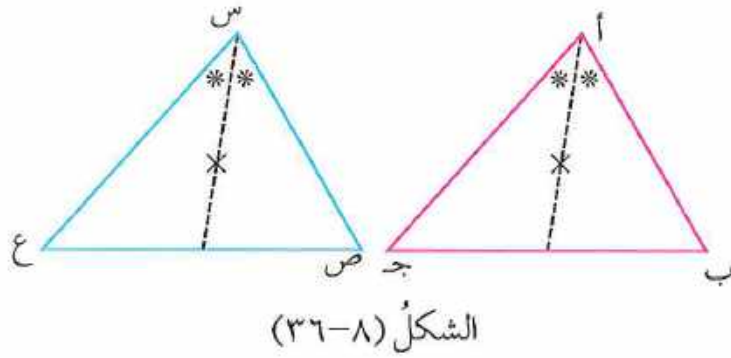


(٢) تأمل الشكل (٨-٣٦)

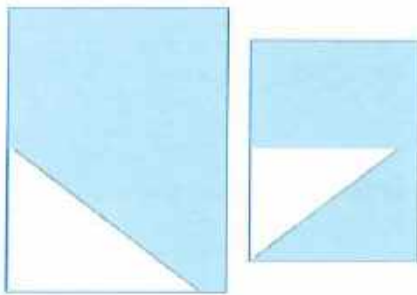
$$ب ج = ص ع$$

بيّن أنّ

$$\Delta أ ب ج \equiv \Delta س ص ع$$



(٣) عمود كهرباء طوله (٣٠) م، إذا كان طول ظلّه في لحظة ما (٤٠) م، فما طول عمود آخر ملاصق له طول ظلّه (١٠) م؟



الشكل (٨-٣٦)

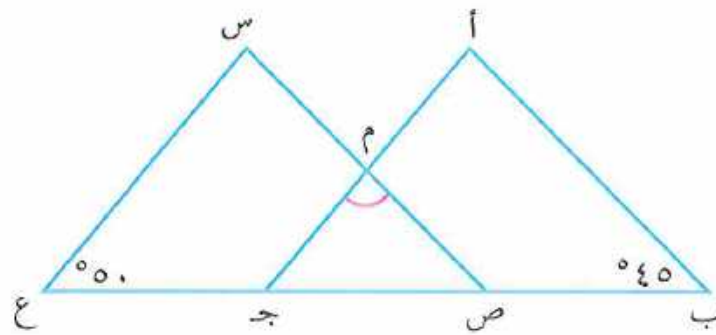
(٤) هل المثلثان المتشابهان متطابقان؟ فسّر إجابتك.

(٥) انظر الشكل (٨-٣٦)، هل الشكلان متشابهان؟



٦) أ ب ج، س ع ص مثلثان متشابهان حيثُ أ ب، أ ج متناظرانِ على الترتيبِ مع س ع، س ص  
 أ) اذكرِ الزوايا المتناظرة في هذينِ المثلثينِ.  
 ب) احسبْ س ص إذا علمتْ أنَّ.  
 س ع = ١٠، أ ج = ٢٤، أ ب = ٢٠

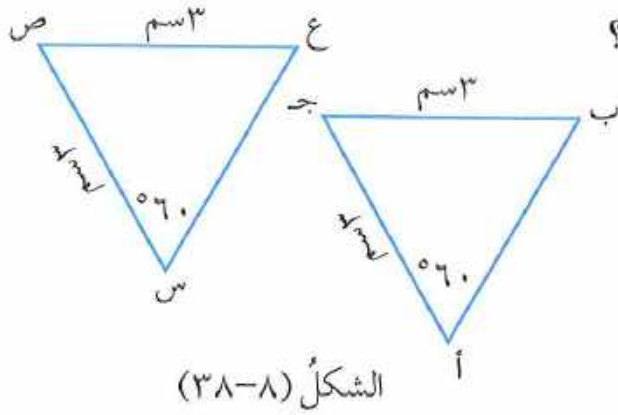
٧) في الشكلِ (٣٧-٨) المثلثانِ أ ب ج، س ص ع متطابقانِ، حيثُ أنَّ قياسَ  $\angle$  أ ب ج =  $٥٠^\circ$ ،  
 $\angle$  س ع ص =  $٥٠^\circ$  جدِّ قياسَ ص م ج ثمَّ بيِّنْ أنَّ  $\triangle$  م ص ج يشابهُ  $\triangle$  أ ب ج



الشكل (٣٧-٨)

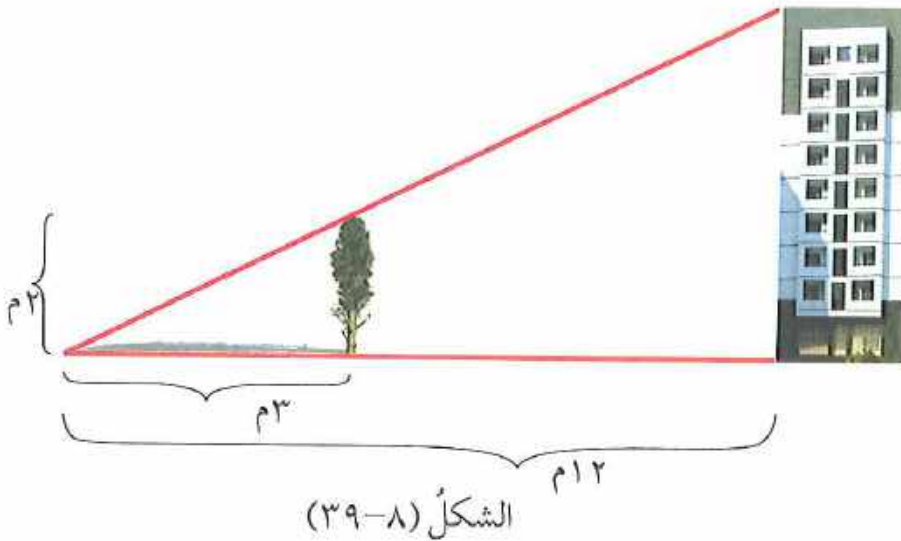
## اختبار ذاتي

- ١) ضع إشارة (✓) أمام العبارة الصحيحة، وإشارة (x) أمام العبارة غير الصحيحة فيما يأتي:
- أ) الأشكال الهندسية المتطابقة جميعها متشابهة.
- ب) إذا تشابه مضلعان فإن أضلاع المتناظرة متناسبة وقياسات الزوايا المتناظرة متساوية.
- ج) المضلعان المتشابهان متطابقان.
- د) نُسَمِّي النسبة الثابتة بين أطوال الأضلاع المتناظرة في الأشكال المتشابهة بمقياس الرسم.
- هـ) المضلعان المتشابهان مع مضلع ثالث يكونان متشابهين.



- ٢) هل المثلثان أ ب ج، س ع ص متشابهان؟ لماذا؟  
انظر الشكل (٣٨-٨).

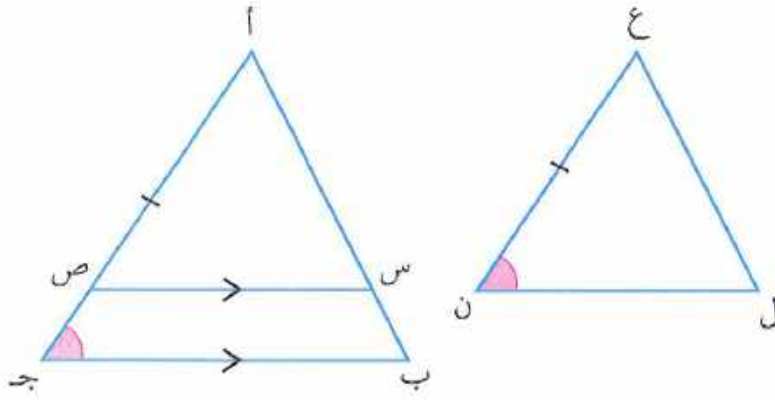
- ٣) أراد سيف حساب ارتفاع عمارة، إذا كان طول ظلها ١٢ م، وطول شجرة أمامها ٢ م، وطول ظل الشجرة ٣ م، فكَمْ سيكون ارتفاع تلك العمارة؟ انظر الشكل (٣٩-٨).



٤) في الشكل (٨-٤٠)،  $\Delta أ ب ج \sim \Delta ع ل ن$

أص = ع ن

س ص // ب ج



الشكل (٨-٤٠)

أ) ( يبين أن:  $\Delta أ س ص \equiv \Delta ع ل ن$  )

ب) استنتج أن:  $\frac{أص}{أج} = \frac{أس}{أ ب} = \frac{س ص}{ب ج}$

تَمَّ بِحَمْدِ اللَّهِ تَعَالَى



