إدارة المناهج والكتب المدرسية

الرياضيات

الجزء الثاني

١٠

الصف العاشر

قـررت وزارة التربية والتعليم تدريس هذا الكتاب في مدارس المملكة الأردنية الهاشمية جميعها، بناءً على قرار مجلس التربية والتعليم رقم (٥٩ / ٢٠١٦) تـاريخ ٢٠١٦/٣/٦م، بدءًا من العام الدراسي ٢٠١٦م / ٢٠١٧م.

حقوق الطبع جميعها محفوظة لوزارة التربية والتعليم

عمّان – الأردنّ / ص. ب (١٩٣٠)

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية

(٢٠١٦/٣/١٢٣٣)

ISBN: 978 - 9957 - 84 - 714- 2

أشرف على تأليف هذا الكتاب كل من:

أ.د. حسن زارع هديب (رئيسًا) — أ.د. أحمد عبد الله رحيل

أ. د. عبد الله محمد ربابعة — أ. د. ربى محمد مقدادي

د. معاذ محمود الشهاب

وقام بتأليفه كل من:

إسماعيل علي صالح — د. حسين عسكر الشرفات

د. فدوى خليل القطاطشة — رناد حسن بغدادي

التحرير العلمي: جهاد حسين أبو الركب، نفين أحمد جوهر

التصميم: عمر أحمد أبو عليان — الرسم: فاتنة فايز حداد

التحرير اللغوي: ماجدة سلمان كنانة — المصور: أديب عطوان

التحرير الفني: نرمين داود العزة — الإنتاج: علي محمد العويدات

دقق الطباعة وراجعها: نفين أحمد جوهر

الطبعة الأولى (التجريبية) ١٤٣٧هـ/٢٠١٦م

أعيدت طباعته ٢٠١٧م

قائمةُ المحتوياتِ

الموضوعُ	الصفحةُ
الوحدةُ الخامسةُ: النسب المثلثيةُ وحلُّ المثلثاتِ	٦
الفصلُ الأولُ: الزوايا والنسبُ المثلثيةُ	٨
أولًا : الوضعُ القياسيُّ للزاويةِ	٨
ثانيًا : النسبُ المثلثيّةُ	١٣
ثالثًا : النسبُ المثلثيّةُ للزوايا ضمنَ دورةٍ كاملةٍ	١٩
الفصلُ الثاني: تطبيقاتُ المثلثِ	٢٧
أولًا : مساحةُ المثلثِ بدلالةِ طولَيْ ضلعيْنِ فيهِ والزاويةِ المحصورةِ بينَهُما	٢٧
ثانيًا : قانونُ الجيوبِ	٣١
ثالثًا : قانونُ جيوبِ التمامِ	٣٨
أسئلةُ الوحدةِ	٤٤
الوحدةُ السادسةُ: الهندسةُ التحليليّةُ والفضائيّةُ	٤٦
الفصلُ الأولُ: المستقيماتُ	٤٨
أولًا : المستقيماتُ المتوازيةُ والمتعامدةُ	٤٨
ثانيًا : البعدُ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ	٥٣
الفصلُ الثاني: خصائصُ الأشكالِ الهندسيةِ	٥٩
أولًا : خصائصُ المثلثِ (١)	٥٩
ثانيًا : خصائصُ المثلثِ (٢)	٦٣
ثالثًا : خصائصُ متوازِي الأضلاعِ	٦٧

الموضوعُ	الصفحةُ
الفصلُ الثالثُ: الهندسةُ الفضائيةُ	٧٢
أولًا : مُسلَّماتُ الهندسةِ الفضائيةِ	٧٢
ثانيًا :أوضاعُ المستقيماتِ والمستوياتِ في الفضاءِ	٧٧
أسئلةُ الوحدةِ	٨٠
الوحدةُ السابعةُ: الإحصاءُ والاحتمالاتُ	٨٢
الفصلُ الأولُ: الإحصاءُ	٨٤
أولًا : مقاييسُ التشتتِ	٨٤
ثانيًا :أثرُ تعديلِ البياناتِ على مقاييسِ التشتتِ	١٠٠
الفصلُ الثاني: الاحتمالاتُ	١١٢
أولًا : قوانينُ الاحتمالاتِ	١١٢
ثانيًا : الاحتمالُ المشروطُ والحوادثُ المستقلةُ	١٢٦
أسئلةُ الوحدةِ	١٣٦
الوحدةُ الثامنةُ: الرياضياتُ الماليةُ	١٤٠
الفصلُ الأولُ: تبديلُ العملةِ	١٤٢
الفصلُ الثاني: العمولةُ والربحُ والتخفيضُ	١٤٦
أولًا : العمولةُ	١٤٦
ثانيًا : هامشُ الربحِ، والتخفيضُ	١٤٩
ثالثًا : الربحُ	١٥٤
أسئلةُ الوحدةِ	١٦٠

الوحدةُ الخامسةُ

٥

النسبُ المثلثيةُ وحلُّ المثلثاتِ

يعـدُّ حسابُ المثلثاتِ أحدَ أهمِّ فـروعِ الرياضياتِ، حيثُ يبحثُ في العلاقةِ بينَ أطوالِ أضلاعِ المثلثِ، وقياساتِ زواياهُ.

وتكمـنُ أهميةُ حسـابِ المثلثاتِ في عددٍ مـنَ التطبيقاتِ الرياضيةِ والحياتيـةِ، حيثُ يستخـدمُ حسابُ المثلثاتِ في إيجـادِ قياساتِ الزوايَا، ومعرفةِ الأبعادِ والارتفاعـاتِ والانخفاضاتِ دونَ حسابِها مباشرةً، وفي دراسـاتِ الفضـاءِ: كحركـةِ الصواريخِ والأقمـارِ الصناعيـةِ والمركباتِ الفضائيةِ، كما إن لحسابِ المثلثاتِ استخداماتٍ في المساحةِ.

Trigonometric Ratios and Solving Triangles

يتوقعُ منَ الطالبِ بعدَ نهايةِ هذهِ الوحدةِ، أن يكونَ قادرًا على:

- رسمِ زاويةٍ في وضعِها القياسيِّ.
- تعرفِ مفاهيمِ القاطعِ، وقاطعِ التمامِ، وظلِّ التمامِ.
- استقصاءِ النسبِ المثلثيةِ للزوايا حتَّى ٣٦٠°.
- استنتاجِ قانونِ مساحةِ المثلثِ (بدلالةِ طولَيْ ضلعيْنِ، وجيبِ الزاويةِ المحصورةِ بينَهُما).
- استنتاجِ قانونَيِ الجيوبِ، وجيوبِ التمامِ.
- استخدامِ قانونَيِ الجيوبِ وجيوبِ التمامِ في حلِّ المثلثِ.
- حلِّ مسائلَ عمليةٍ على النسبِ المثلثيةِ.

الفصلُ الأولُ

الزوايا والنسبُ المثلثيةُ

Angles and Trigonometric Ratios

النتاجاتُ

- ترسمُ زاويةً في وضعِها القياسيِّ.
- تجدُ النسبَ المثلثيةَ لزاويةٍ في الوضعِ القياسيِّ.
- تجدُ النسبَ المثلثيةَ لزاويةٍ قياسُها (هـ) حيثُ ٠° ≤ هـ ≤ ٣٦٠° وتستنتجُ العلاقاتِ بينَها.

أولًا الوضعُ القياسيُّ للزاويةِ Standard Form of the Angle

طلبَ معلمُ الرياضياتِ منْ أحمدَ رسمَ زاويةٍ قياسُها ٢٢٥°، بحيثُ يكونُ رأسُها في نقطةِ الأصلِ، وينطبقُ ضلعُ ابتدائِها على محورِ السيناتِ الموجبِ.

١) كيفَ تساعدُ أحمَدَ في رسمِ هذهِ الزاويةِ ؟

٢) ماذا تُسمَّى الزاويةُ في مثلِ هذا الوضعِ؟

الزاويةُ: هيَ اتحادُ شعاعيْنِ لهُمَا نقطةُ البدايةِ نفسُها. تُسمَّى هذهِ النقطةُ رأسَ الزاويةِ، ويُسمَّى أحدُ الشعاعيْنِ ضلعَ الابتداءِ للزاويةِ، ويسمّى الثاني ضلعَ الانتهاءِ.

قياسُ الزاويةِ: هوَ مقدارُ دورانِ ضلعِ الابتداءِ، حتى يأخذَ وضعَ ضلعِ الانتهاءِ.

يكونُ القياسُ موجبًا، إذا دارَ ضلعُ الابتداءِ باتجاهٍ يعاكسُ دورانَ عقاربِ الساعةِ، ويكونُ سالبًا عندَما يكونُ الدورانُ معَ عقاربِ الساعةِ، كما في الشكل (٥–١). وستقتصرُ دراستُنا للقياسِ الموجبِ.

الشكلُ (٥–١)

وحدةُ قياسِ الزاويةِ: هيَ الدرجةُ ويرمزُ لَها (°١)، وتُقرأُ (درجةً).

الدورةُ الواحدةُ = ٣٦٠°

الدرجةُ الواحدةُ (°١) = ٦٠ دقيقةً، وتُكتَبُ (°١ = ′٦٠)

الدقيقةُ الواحدةُ (′١) = ٦٠ ثانيةً، وتُكتَبُ (′١ = ″٦٠)

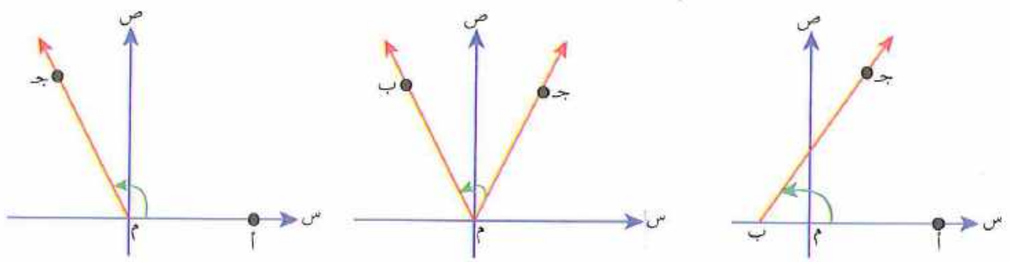
ويُسمّى هذا القياسُ بالقياسِ الستّينيِّ.

الوضعُ القياسيُّ للزاويةِ

تكونُ الزاويةُ في الوضعِ القياسيِّ في المستوى الإحداثيِّ، إذا كانَ رأسُها في نقطةِ الأصلِ، وضلعُ الابتداءِ منطبقاً على محورِ السيناتِ الموجبِ.

مثالٌ (٥–١)

سَمِّ الزاويةَ المرسومةَ في وضعٍ قياسيٍّ في الشكلِ (٥–٢):



الشكلُ (٥–٢)

الحلُّ

✗ أ ب جـ ليستْ في وضعٍ قياسيٍّ، لأنَّ رأْسَها ب ليسَ في نقطةِ الأصلِ.

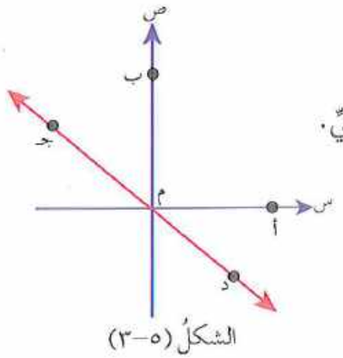
✗ جـ م ب ليستْ في وضعٍ قياسيٍّ، لأنَّ ضلعَ ابتدائِها لا ينطبقُ على محورِ السيناتِ الموجبِ.

✗ أ م جـ في وضعٍ قياسيٍّ، لأنَّ رأْسَها في نقطةِ الأصلِ، وضلعَ ابتدائِها $\overleftarrow{م أ}$ ينطبقُ على محورِ السيناتِ الموجبِ.

هلْ يمكنُكَ أنْ ترسمَ ✗ أ ب جـ في وضعٍ قياسيٍّ؟

تدريبُ ٥-١

في الشكلِ (٥-٣)، سمِّ ثلاثَ زوايا مرسومةٍ في الوضعِ القياسيِّ.



الشكلُ (٥-٣)

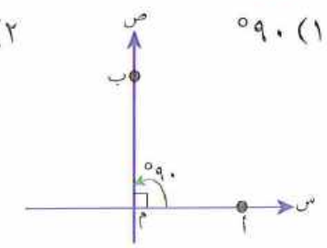
مثالٌ (٥-٢)

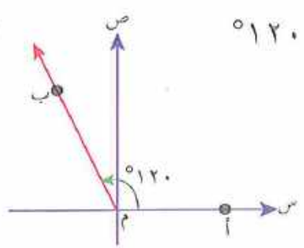
ارسمْ في الوضعِ القياسيِّ كلًّا منَ الزوايا التي قياساتُها كَما يأتِي:

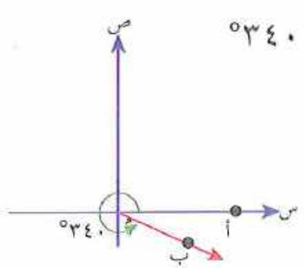
١) 90° ٢) 120° ٣) 340°

الحلُّ

١) 90° ٢) 120° ٣) 340°







الشكلُ (٥-٤)

تدريبُ ٥-٢

ارسمْ في الوضعِ القياسيِّ كلاً منَ الزوايا التي قياساتُها كَما يأتِي:

١) 280° ٢) 200° ٣) 180°

وحدةُ قياسِ الزاويةِ: هيَ الدرجةُ ويرمزُ لَها (°١)، وتُقرأُ (درجةً).

الدورةُ الواحدةُ = ٣٦٠°

الدرجةُ الواحدةُ (°١) = ٦٠ دقيقةً، وتُكتَبُ (°١ = ٦٠′)

الدقيقةُ الواحدةُ (′١) = ٦٠ ثانيةً، وتُكتَبُ (′١ = ٦٠″)

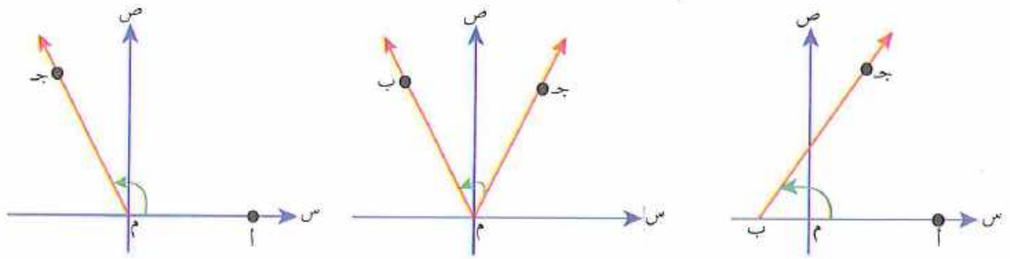
ويُسمّى هذا القياسُ بالقياسِ الستّينيِّ.

الوضعُ القياسيُّ للزاويةِ

تكونُ الزاويةُ في الوضعِ القياسيِّ في المستوى الإحداثيِّ، إذا كانَ رأسُها في نقطةِ الأصلِ، وضلعُ الابتداءِ منطبقاً على محورِ السيناتِ الموجبِ.

مثالٌ (٥–١)

سَمِّ الزاويةَ المرسومةَ في وضعٍ قياسيٍّ في الشكلِ (٥–٢):



الشكلُ (٥–٢)

الحلُّ

✗ أ ب جـ ليستْ في وضعٍ قياسيٍّ، لأنَّ رأْسَها ب ليسَ في نقطةِ الأصلِ.

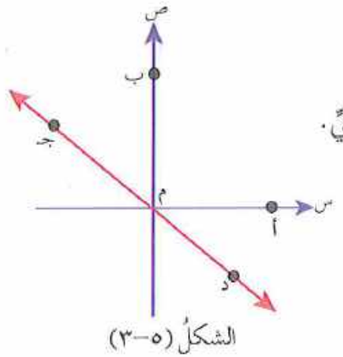
✗ جـ م ب ليستْ في وضعٍ قياسيٍّ، لأنَّ ضلعَ ابتدائِها لا ينطبقُ على محورِ السيناتِ الموجبِ.

✗ أ م جـ في وضعٍ قياسيٍّ، لأنَّ رأْسَها في نقطةِ الأصلِ، وضلعَ ابتدائِها $\overleftarrow{م أ}$ ينطبقُ على محورِ السيناتِ الموجبِ.

هلْ يمكنُكَ أنْ ترسمَ ✗ أ ب جـ في وضعٍ قياسيٍّ؟

تدريبُ ٥–١

في الشكلِ (٥–٣)، سمِّ ثلاثَ زوايا مرسومةٍ في الوضعِ القياسيِّ.



الشكلُ (٥–٣)

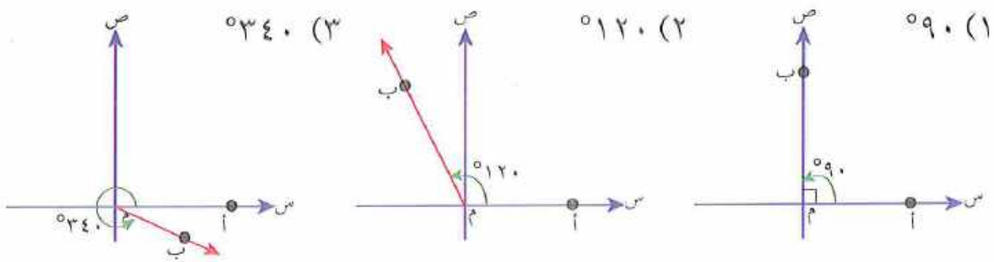
مثالُ (٥–٢)

ارسمْ في الوضعِ القياسيِّ كلًّا منَ الزوايا التي قياساتُها كَما يأتِي:

١) 90° ٢) 120° ٣) 340°

الحلُّ

١) 90° ٢) 120° ٣) 340°



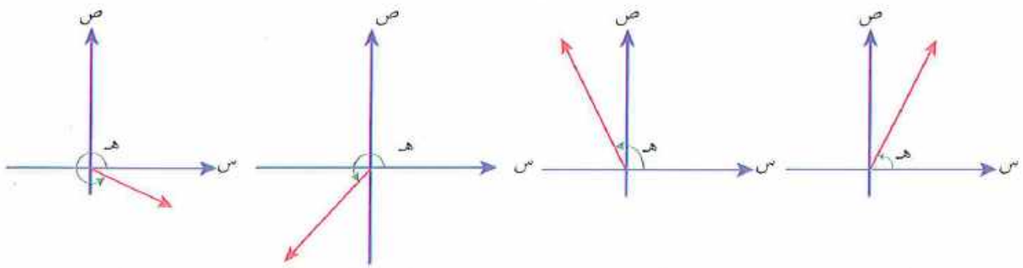
الشكلُ (٥–٤)

تدريبُ ٥–٢

ارسمْ في الوضعِ القياسيِّ كلاً منَ الزوايا التي قياساتُها كَما يأتِي:

١) 280° ٢) 200° ٣) 180°

إذا رسمْنا زاويةً في الوضعِ القياسِّي، فإنَّ ضلعَ الانتهاءِ، يحدّدُ الربعَ الذي تقعُ فيهِ الزاويةُ، كما في الشكلِ (٥–٥):



الشكلُ (٥–٥)

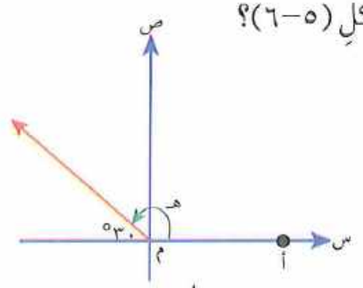
وتُسمّى الزاويةُ المرسومةُ في الوضعِ القياسيِّ، التي يقعُ ضلعُ انتهائِها على أحدِ المحوريْنِ، زاويةً رُبْعيّةً، مثلَ: ٠°، ٩٠°، ١٨٠°، ٢٧٠°، ٣٦٠°

الأسئلةُ ؟

١) ارسمْ في الوضعِ القياسيِّ كلاً منَ الزوايا التي قياساتُها كَما يأتِي :

أ) ٠° ب) ٣٠° جـ) ١١٠° د) ٢٢٥° هـ) ٢٧٠° و) ٣٠٠°

٢) ما قياسُ الزاويةِ هـ في الشكلِ (٥-٦)؟

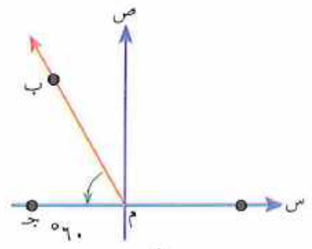


الشكلُ (٥-٦)

٣) حدّدِ الربعَ أوِ المحورَ الذي يقعُ فيهِ ضلعُ الانتهاءِ في الوضعِ القياسيِّ لكلٍّ منَ الزوايا التي قياساتُها كَما يأتِي :

أ) ١٠° ب) ٢٧٠° جـ) ٢١٠° د) ٣٦٠° هـ) ٧٠° و) ١٥°

٤) تقولُ شهدُ إنَّ الزاويةَ ب م جـ مرسومةٌ في الوضعِ القياسيِّ، ما رأيُكَ ؟



الشكلُ (٥-٧)

٥) أكملْ:

أ) الزاويةُ في الربعِ الأولِ قياسُها محصورٌ بينَ .....

ب) الزاويةُ في الربعِ الثاني قياسُها محصورٌ بينَ .....

جـ) الزاويةُ في الربعِ الثالثِ قياسُها محصورٌ بينَ .....

٦) اكتشفِ الخطأَ في العبارةِ الآتيةِ: الزاويةُ هـ في الربعِ الرابعِ قياسُها ٢٧٠° ≤ هـ < ٣٦٠°

٧) حُلَّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

ثانيًا النسبُ المثلثيةُ Trigonometric Ratios

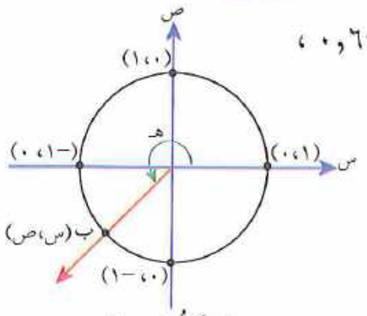
إذا كانتْ ١٨٠° < هـ < ٢٧٠°، وكانتْ جا هـ = −٠,٦ ،

فجِدْ:

١) جتا هـ ٢) ظا هـ

٣) $\frac{\text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}}$ ٤) $\frac{١}{\text{جتا هـ}}$

٥) $\frac{١}{\text{جا هـ}}$

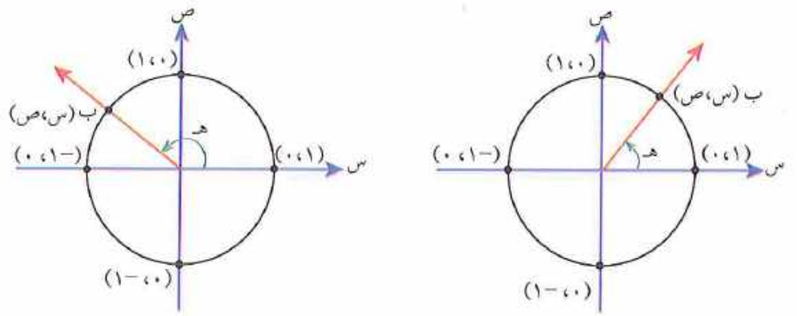


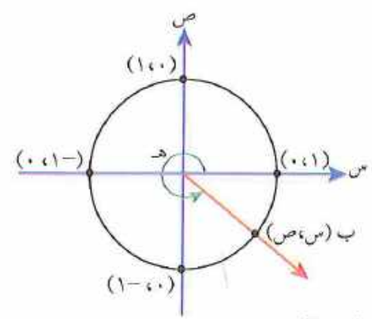
الشكلُ (٥−٨)

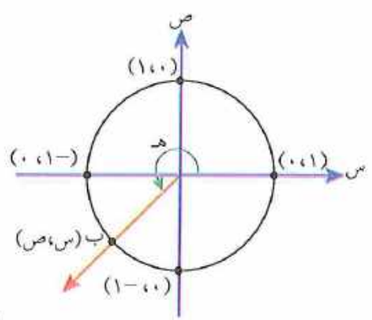
دائرةُ الوحدةِ

هيَ الدائرةُ التي نصفُ قطرِها وحدةٌ واحدةٌ ، ومركزُها نقطةُ الأصلِ.

إذا رسمْنا زاويةً قياسُها (هـ) في الوضعِ القياسيِّ، فإنَّ ضلعَ انتهاءِ هذهِ الزاويةِ، يقطعُ دائرةَ الوحدةِ في نقطةٍ وحيدةٍ: ب (س ، ص)، انظرِ الشكلَ (٥−٩).







الشكلُ (٥−٩)

فكّرْ

ما هيَ معادلةُ دائرةِ الوحدةِ ؟

تعريفٌ

في الوضعِ القياسيِّ، إذا قطعَ ضلعُ انتهاءِ زاويةٍ قياسُها (هـ)، دائرةَ الوحدةِ في نقطةٍ إحداثيَّاها (س ، ص)، فإنّ النسبَ المثلثيةَ للزاويةِ (هـ) هيَ:

جتا هـ = س، وتُقرأُ: جيبَ تمامِ الزاويةِ هـ (Cosine)

جا هـ = ص، وتُقرأُ: جيبَ الزاويةِ هـ (Sine)

ظا هـ = $\frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ، س ≠ ٠ ، وتُقرأُ: ظلَّ الزاويةِ هـ (Tangent)

ظتا هـ = $\frac{١}{\text{ظاهـ}} = \frac{\text{جتاهـ}}{\text{جاهـ}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$ ، ص ≠ ٠ ، وتُقرأُ: ظلَّ تمامِ الزاويةِ هـ (Cotangent)

قا هـ = $\frac{١}{\text{جتاهـ}} = \frac{١}{\text{س}}$، س ≠ ٠ ، وتُقرأُ: قاطعَ الزاويةِ هـ (Secant)

قتا هـ = $\frac{١}{\text{جاهـ}} = \frac{١}{\text{ص}}$، ص ≠ ٠ ، وتُقرأُ: قاطعَ تمامِ الزاويةِ هـ (Cosecant)

بما أنَّ معادلةَ دائرةِ الوحدةِ هيَ س^{٢} + ص^{٢} = ١ فإنَّ جتا^{٢}هـ + جا^{٢}هـ = ١

وحيثُ إنَّ −١ ≤ س ≤ ١ ، −١ ≤ ص ≤ ١ فإنَّ −١ ≤ جتا هـ ≤ ١ ، −١ ≤ جا هـ ≤ ١

مثالٌ (٥-٣)

في الوضعِ القياسيِّ، إذا قَطعَ ضلعُ انتهاءِ زاويةٍ قياسُها (هـ)، دائرةَ الوحدةِ في نقطةٍ إحداثيَّاها (−٠,٨ ، ٠,٦) ، فجِدْ:

١) جا هـ ٢) جتا هـ ٣) ظا هـ ٤) ظتا هـ ٥) قا هـ ٦) قتا هـ

الحلُّ

ضلعُ الانتهاءِ يقطعُ دائرةَ الوحدة في النقطةِ (−٠,٨ ، ٠,٦) ، لذلكَ س = −٠,٨ ، ص = ٠,٦

١) جاهـ = ص = ٠,٦

٢) جتاهـ = س = −٠,٨

٣) ظاهـ = $\frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{٠,٦}{-٠,٨} = \frac{-٣}{٤}$

٤) ظتاهـ = $\frac{\text{جتاهـ}}{\text{جاهـ}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{-٠,٨}{٠,٦} = \frac{-٤}{٣}$

٥) قاهـ = $\frac{١}{\text{جتاهـ}} = \frac{١}{\text{س}} = \frac{١}{-٠,٨} = \frac{-١٠}{٨} = \frac{-٥}{٤}$

٦) قتاهـ = $\frac{١}{\text{جاهـ}} = \frac{١}{\text{ص}} = \frac{١}{٠,٦} = \frac{١٠}{٦} = \frac{٥}{٣}$

فكِّرْ

في أيِّ رُبعٍ تقعُ الزاويةُ التي قياسُها (هـ)، في مثالِ (٥−٣)؟ ولِماذا؟

تدريبُ (٥−٣)

في الوضعِ القياسيِّ إذا قطعَ ضلعُ انتهاءِ زاويةٍ قياسُها (هـ)، دائرةَ الوحدةِ في نقطةٍ إحداثيَّاها $(\frac{٥}{١٣}، \frac{-١٢}{١٣})$، فجِدْ:

١) جاهـ ٢) جتاهـ ٣) ظاهـ ٤) ظتاهـ ٥) قاهـ ٦) قتاهـ

٧) في أيِّ ربع تقعُ الزاويةُ التي قياسُها (هـ)؟ ولماذا ؟

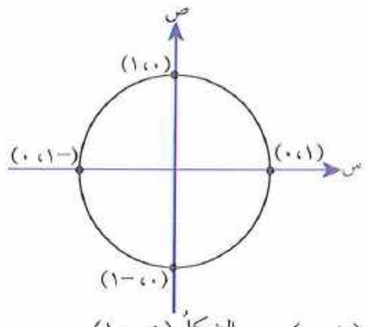
مثالُ (٥−٤)

جدِ النسبَ المثلثيةَ للزوايا الرُّبعيةِ الآتيةِ:

١) ٠° ٢) ٩٠°

الحلُّ

الشكلُ (٥−١٠)، يبيِّنُ تقاطعَ ضلعِ الانتهاءِ للزوايا الرُّبعيةِ، معَ دائرةِ الوحدةِ:



الشكلُ (٥−١٠)

١) يتقاطعُ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ (٠°) معَ دائرةِ الوحدةِ في النقطةِ (١،٠)

إذن: جتا ٠° = ١ ، جا ٠° = ٠

ظا ٠° = $\frac{ص}{س} = \frac{٠}{١} = ٠$

ظتا ٠° = $\frac{س}{ص} = \frac{١}{٠}$ قيمةٌ غيرُ مُعرَّفة.

قا ٠° = $\frac{١}{س} = \frac{١}{١} = ١$

قتا ٠° قيمةٌ غيرُ معرّفةٍ، لماذا ؟

٢) يتقاطعُ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ (٩٠°)، معَ دائرةِ الوحدةِ في النقطةِ (٠، ١)

إذن: جتا ٩٠° = ٠ ، جا ٩٠° = ١ ، ظا ٩٠° قيمةٌ غيرُ معرّفةٍ

ظتا ٩٠° = ٠ ، قا ٩٠° = قيمةٌ غيرُ مُعرّفةٍ ، قتا ٩٠° = ١

تدريبُ ٥-٤

جِدِ النسبَ المثلثيةَ للزوايا الرُّبعيةِ الآتيةِ:

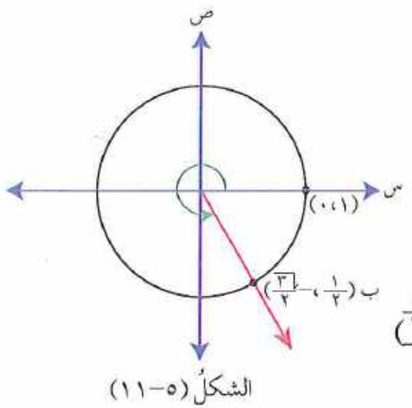
١) ١٨٠° ٢) ٢٧٠° ٣) ٣٦٠°

مثالٌ (٥-٥)

معتمدًا على الشكلِ (٥-١١)، جدْ كلًّا مِنْ :

١) جا هـ ٢) جتا هـ ٣) ظا هـ

٤) ظتا هـ ٥) قا هـ ٦) قتا هـ



الشكلُ (٥-١١)

الحلُّ

ضلعُ الانتهاءِ يقطعُ دائرةَ الوحدةِ في النقطةِ $(\frac{١}{٢} ، \frac{-\sqrt{٣}}{٢})$

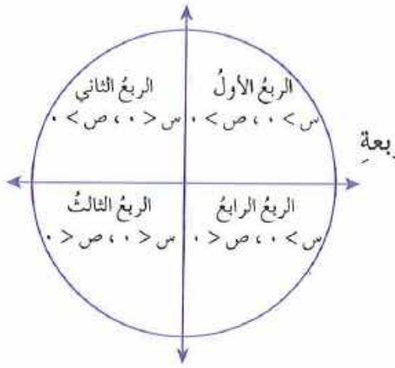
لذلكَ س = $\frac{١}{٢}$ ، ص = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$

وبالتالي:

١) جاهـ = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ ٢) جتاهـ = $\frac{١}{٢}$ ٣) ظاهـ = $-\sqrt{٣}$ لماذا؟

٤) ظتاهـ = $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$ ٥) قاهـ = ٢ ٦) قتاهـ = $\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$

فكّرْ وناقشْ



الشكلُ (٥-١٢)

ناقِشْ إشاراتِ النسبِ المثلثيةِ، في كلٍّ منَ الأرباعِ الأربعةِ الموضحةِ في الشكلِ (٥-١٢)

تدريبُ ٥-٥

حددِ الربعَ (الأرباعَ)، الذي يقعُ فيهِ ضلعُ انتهاءِ زاوية قياسُها (هـ)، في الوضعِ القياسيِّ، في كلِّ حالةٍ ممّا يأتي:

١) جاهـ > ٠ ، جتا هـ < ٠

٢) جتا هـ > ٠

٣) ظا هـ = ٣

مثالُ (٥-٦)

إذا كانتْ ٩٠° < هـ < ١٨٠° ، جا هـ = $\frac{٣}{\sqrt{١٠}}$ ، فجِدْ كلاً منْ : جتا هـ ، ظا هـ ، قا هـ.

الحلُّ

جتا٢هـ + جا٢هـ = ١

جتا٢ هـ + $\left(\frac{٣}{\sqrt{١٠}}\right)^{٢}$ = ١ ومنهُ: جتا٢هـ + $\frac{٩}{١٠}$ = ١ ومنهُ: جتا٢هـ = $\frac{١}{١٠}$

جتاهـ = ± $\frac{١}{\sqrt{١٠}}$ ، لكنْ في الربعِ الثاني جتاهـ < ٠ ،إذن: جتاهـ = $\frac{-١}{\sqrt{١٠}}$

ظا هـ = $\frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}}$ = −٣ ، قاهـ = $\frac{١}{\text{جتاهـ}}$ = $-\sqrt{١٠}$

تدريبُ ٥-٦

في الوضعِ القياسيِّ، إذا وقَعَ ضلعُ انتهاءِ زاويةٍ قياسُها (هـ) في الربعِ الثالثِ، وكانَ جتاهـ = $\frac{-١}{٢}$ ، فجِدْ:

١) جاهـ ٢) ظاهـ ٣) ظتاهـ ٤) قاهـ ٥) قتاهـ

الأسئلةُ ؟

١) حددِ الربعَ (الأرباعَ) أوْ على أيِّ محورٍ يقعُ ضلعُ انتهاءِ زاويةٍ قياسُها (هـ)، في الوضعِ القياسيِّ، في كلٍّ منَ الحالاتِ الآتيةِ :

أ) جاهـ = ٠,٧ ب) جاهـ = −٠,٤ جـ) جاهـ = ١

د) جتاهـ = ٠,٣ هـ) جتاهـ = −٠,٥ و) جتاهـ = −١

ز) ظاهـ = $\frac{-١}{٢}$ ح) جاهـ = − جتاهـ

ي) جاهـ = −٠,٨ ، جتاهـ = ٠,٦

٢) جِدْ كلاً منْ جاهـ ، جتاهـ ، ظاهـ ، ظتاهـ ، قاهـ ، قتاهـ ، إذا قطعَ ضلعُ انتهاءِ زاويةٍ قياسُها (هـ)، في الوضعِ القياسيِّ، دائرةَ الوحدةِ عندَ النقطةِ:

أ) (٠، −١) ب) $\left(\frac{٣}{٥}، \frac{-٤}{٥}\right)$ جـ) $\left(\frac{-٢}{٣}، \frac{-\sqrt{٥}}{٣}\right)$

٣) جدْ باقيَ النسبِ المثلثيةِ للزاويةِ التي قياسُها (هـ)، في كلٍّ منَ الحالاتِ الآتيةِ:

أ) جاهـ = $\frac{-٣}{٥}$ ، ٢٧٠° < هـ < ٣٦٠°

ب) جتاهـ = −٠,٨ ، ٩٠° < هـ < ١٨٠°

جـ) ظاهـ = ٣ ، ١٨٠° < هـ < ٢٧٠°

د) قاهـ = $\frac{٣}{٢}$ ، ٢٧٠° < هـ < ٣٦٠°

هـ) قتاهـ = −٢ ، ١٨٠° < هـ < ٢٧٠°

٤) حدِّدْ إشارةَ كلٍّ منَ النسبِ المثلثيةِ الآتيةِ:

أ) جا ٧٠° ب) قا ١٢٠° جـ) ظتا ٢٠٠° د) قتا ٣٠٠°

٥) تقولُ سارةُ :"لا يمكنُ لأيةِ نسبةٍ مثلثيةٍ أنْ تكونَ عددًا أكبَر منْ واحدٍ". ناقشْ هذهِ العبارةَ.

ثالثًا السببُ المثلثيةُ للزوايا ضمنَ دورةٍ كاملةٍ
Trigonometric Ratios for Angles between 0° and 360°

إذا علمتَ أنَّ جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ ، فجدْ كلاًّ ممّا يأتي دونَ استخدام الآلةِ الحاسبةِ:

١) جتا ٣٠° ٢) ظتا ٣٣٠°

٣) جا ١٥٠° ٤) قا ٢١٠°

تعرّفْنا في الدرسِ السابقِ كيفيةَ إيجادِ النسبِ المثلثيةِ للزاويةِ التي قياسُها (هـ)، إذا عُلِمَتْ نقطةُ تقاطعِ ضلعِ الانتهاءِ معَ دائرةِ الوحدةِ، والآنَ سنتعرّفُ كيفيةَ إيجادِ النسبِ المثلثيةِ إذا عُلمتْ قيمةُ (هـ).

١- إذا وقعَ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ في الوضعِ القياسيِّ ، في الربعِ الأولِ (٠° < هـ < ٩٠°)، فإنّنا نجدُ النسبَ المثلثيةَ للزوايا ٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠° مباشرةً، كما تعلمْنا في الصفِّ التاسعِ، ونجدُهُ لبقيّةِ الزوايا باستخدامِ الآلةِ الحاسبةِ .

٢- إذا وقعَ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ ، في الوضعِ القياسيِّ ، في الربعِ الثاني ، فإنّ قياسَ الزاويةِ يمكنُ أنْ يُكتبَ على الصورةِ (١٨٠° - هـ) ، حَيثُ ٠° < هـ < ٩٠° ، كما في الشكلِ (٥-١٣)، حيثُ بَ (-س ، ص) انعكاسُ ب (س ، ص) ، في محورِ الصاداتِ، ومنهُ نستنتجُ:

جتا (١٨٠° - هـ) = - س = - جتاهـ

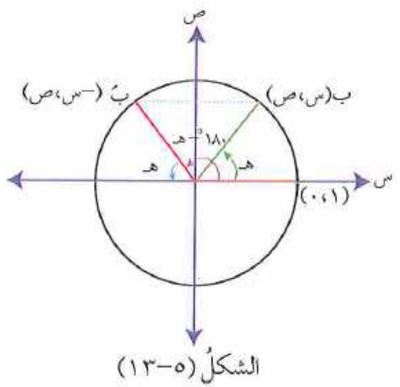
جا (١٨٠° - هـ) = ص = جاهـ

ظا (١٨٠° - هـ) = - ظاهـ، لماذا ؟

ظتا (١٨٠° - هـ) = - ظتاهـ

قا (١٨٠° - هـ) = - قاهـ

قتا (١٨٠° - هـ) = قتاهـ



الشكلُ (٥-١٣)

تُسمّى الزاويةُ الحادةُ التي قياسُها (هـ)، المحصورةُ بينَ ضلعِ الانتهاءِ ومحورِ السيناتِ، **زاويةَ المرجعِ** للزاويةِ التي قياسُها ١٨٠° – هـ.

مثالُ (٥–٧)

جدْ قيمةَ كلٍّ مِنْ: جا ١٤٠°، جتا ١٥٠°، ظا ١٢٠°، قا ١٣٥°

الحلُّ

جا ١٤٠° = جا (١٨٠° – ٤٠°) = جا ٤٠° = ٠,٦٤٢٨

جتا ١٥٠° = جتا (١٨٠° – ٣٠°) = – جتا ٣٠° = $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

ظا ١٢٠° = ظا (١٨٠° – ٦٠°) = – ظا ٦٠° = $-\sqrt{3}$

قا ١٣٥° = $\frac{1}{\text{جتاهـ } ١٣٥°}$ = $\frac{1}{-\text{جتاهـ } ٤٥°}$ = $-\sqrt{2}$

تذكَّرْ

هـ	جاهـ	جتاهـ	ظاهـ
٣٠°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
٤٥°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	١
٦٠°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

تدريبُ ٥–٧

جِدْ قيمةَ كلٍّ مِنْ: جا ١٥٠°، قتا ١٢٠°، ظتا ١١٠°

٣– إذا وقعَ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ في الوضعِ القياسيِّ في الربعِ الثالثِ، فإنَّ قياسَ الزاويةِ يمكنُ أنْ يُكتبَ على الصورةِ (١٨٠° + هـ)، حيثُ ٠° < هـ < ٩٠° (**هـ زاويةُ المرجعِ**)، كما في الشكلِ (٥ – ١٤)، حيثُ بَ (– س، – ص) انعكاسُ ب (س، ص) في نقطةِ الأصلِ، ومنهُ نستنتجُ:

جتا (١٨٠° + هـ) = – س = – جتاهـ

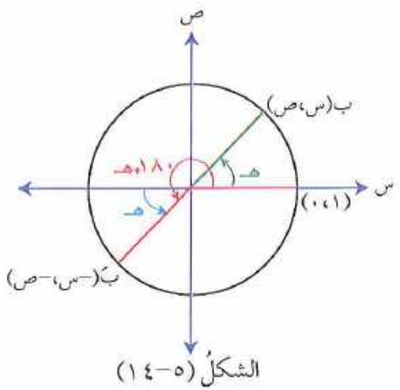
جا (١٨٠° + هـ) = – ص = – جاهـ

ظا (١٨٠° + هـ) = ظاهـ، لماذا؟

ظتا (١٨٠° + هـ) = ظتاهـ

قا (١٨٠° + هـ) = – قاهـ

قتا (١٨٠° + هـ) = – قتاهـ



الشكلُ (٥–١٤)

مثالُ (٥-٨)

جدْ قيمةَ كلٍّ مِنْ : جتا ٢٢٥° ، قتا ٢١٠° ، ظتا ٢٦٠° معَ التبريرِ.

الحلُّ

جتا ٢٢٥° = جتا (١٨٠° + ٤٥°) = − جتا ٤٥° = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ التبريرُ : .....

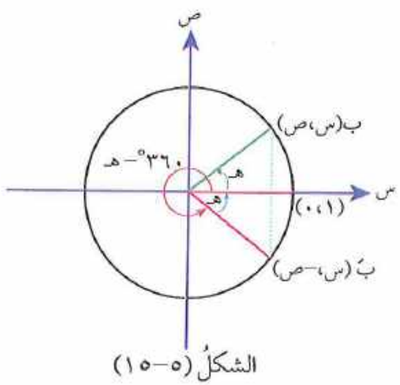
قتا ٢١٠° = $\frac{١}{\text{جا } ٢١٠°}$ = $\frac{١}{-\text{جا } ٣٠°}$ = −٢ التبريرُ : .....

ظتا ٢٦٠° = ظتا ٨٠° = $\frac{١}{\text{ظا } ٨٠°}$ = $\frac{١}{٥,٦٧١٣}$ = ٠,١٧٦٣ التبريرُ : .....

تدريبُ ٥-٨

جِدْ قيمةَ كلٍّ مِنْ: جا ٢٤٠° ، ظا ٢٠٠° ، قا ٢١٠°

٤- إذا وقعَ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ، في الوضعِ القياسيِّ، في الربعِ الرابعِ، فإنَّ قياسَ الزاويةِ يمكنُ أنْ يُكتبَ على الصورةِ (٣٦٠° − هـ) ، حيثُ ٠° < هـ < ٩٠° (هـ زاويةُ المرجعِ)، كما في الشكلِ (٥ - ١٥)، حيثُ بَ (س ، − ص) انعكاسُ ب (س،ص) في محورِ السيناتِ، ومنهُ نستنتجُ :



الشكلُ (٥-١٥)

جتا (٣٦٠° − هـ) = س = جتاهـ

جا (٣٦٠° − هـ) = − ص = − جاهـ

ظا (٣٦٠° − هـ) = −ظاهـ ، لماذا؟

ظتا (٣٦٠° − هـ) = −ظتاهـ

قا (٣٦٠° − هـ) = قاهـ

قتا (٣٦٠° − هـ) = − قتاهـ

مثالُ (٥-٩)

جدْ قيمةَ كلٍّ مِنْ: جتا ٣٣٠° ، ظا ٣١٠° ، قتا ٣٠٠°

الحلُّ

جتا ٣٣٠° = جتا (٣٦٠° − ٣٠°) = جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ظا ٣١٠° = − ظا ٥٠° = − ١,١٩١٨

قتا ٣٠٠° = − قتا ٦٠° = ...

تدريبُ ٥-٩

جِدْ قيمةَ كلٍّ مِنْ: جا ٣١٥° ، قتا ٣٢٠° معَ التبريرِ.

فكّرْ وناقشْ

قِيَمُ النسبِ المثلثيةِ لأيِّ زاويةٍ، تساوي عدديًا قيمَ النسبِ المثلثيةِ لزاويةِ المرجعِ، معَ مراعاةِ الإشاراتِ، حسبَ الربعِ الذي يقعُ فيهِ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ.

٥- يمكنُ استخدامُ الآلةِ الحاسبةِ لإيجادِ النسبِ المثلثيةِ مباشرةً بغضِّ النظرِ عنِ الربعِ الذي تقعُ فيهِ، ودونَ استخدامِ زاويةِ المرجعِ، كما هوَ موضحٌ في الأمثلةِ الآتيةِ:

مثالُ (٥-١٠)

جدْ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي باستخدامِ الآلةِ الحاسبةِ:

١) جا ١٣٣° ٢) جتا ٢٤٥° ٣) ظا ٣٥٠° ٤) قا ٢٠٠°

الحلُّ

١) نفتحُ الآلةَ الحاسبةَ في جهازِ الحاسوبِ، ونُدخِلُ قياسَ الزاويةِ ١٣٣°، ثمَّ نضغطُ على المفتاحِ "sin" فيكونُ الناتجُ:

جا ١٣٣° = ٠,٧٣١٣٥٣٧٠١٦١٩١٧٠٤٨٣٢٨٧٥٤٣٦٠٨٢٧٥٦٢ ≈ ٠,٧٣١٤

انظرِ الشكلَ (٥- ١٦).

مثالٌ (٥-٨)

جدْ قيمةَ كلٍّ مِنْ : جتا ٢٢٥° ، قتا ٢١٠° ، ظتا ٢٦٠° معَ التبريرِ.

الحلُّ

جتا ٢٢٥° = جتا (١٨٠° + ٤٥°) = − جتا ٤٥° = $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ التبريرُ : .....

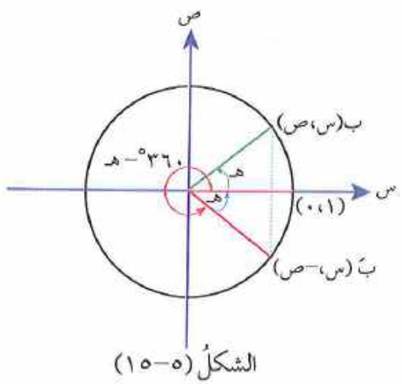
قتا ٢١٠° = $\frac{١}{\text{جا ٢١٠°}} = \frac{١}{-\text{جا ٣٠°}}$ = −٢ التبريرُ : .....

ظتا ٢٦٠° = ظتا ٨٠° = $\frac{١}{\text{ظا ٨٠°}} = \frac{١}{٥,٦٧١٣}$ = ٠,١٧٦٣ التبريرُ : .....

تدريبُ ٥-٨

جِدْ قيمةَ كلٍّ مِنْ: جا ٢٤٠° ، ظا ٢٠٠° ، قا ٢١٠°

٤- إذا وقعَ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ، في الوضعِ القياسيِّ، في الربعِ الرابعِ، فإنَّ قياسَ الزاويةِ يمكنُ أنْ يُكتبَ على الصورةِ (٣٦٠° − هـ) ، حيثُ ٠° < هـ < ٩٠° **(هـ زاويةُ المرجعِ)**، كما في الشكلِ (٥ - ١٥)، حيثُ بَ (س ، − ص) انعكاسُ ب (س،ص) في محورِ السيناتِ، ومنهُ نستنتجُ :



الشكلُ (٥-١٥)

جتا (٣٦٠° − هـ) = س = جتاهـ

جا (٣٦٠° − هـ) = − ص = − جاهـ

ظا (٣٦٠° − هـ) = −ظاهـ ، لماذا؟

ظتا (٣٦٠° − هـ) = −ظتاهـ

قا (٣٦٠° − هـ) = قاهـ

قتا (٣٦٠° − هـ) = − قتاهـ

مثالٌ (٥-٩)

جدْ قيمةَ كلٍّ مِنْ: جتا ٣٣٠° ، ظا ٣١٠° ، قتا ٣٠٠°

الحلُّ

جتا ٣٣٠° = جتا (٣٦٠° − ٣٠°) = جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ظا ٣١٠° = − ظا ٥٠° = − ١,١٩١٨

قتا ٣٠٠° = − قتا ٦٠° = ...

تدريبُ ٥-٩

جِدْ قيمةَ كلٍّ مِنْ: جا ٣١٥° ، قتا ٣٢٠° معَ التبريرِ.

فكِّرْ وناقشْ

قِيَمُ النسبِ المثلثيةِ لأيِّ زاويةٍ، تساوي عدديًا قيمَ النسبِ المثلثيةِ لزاويةِ المرجعِ، معَ مراعاةِ الإشاراتِ، حسبَ الربعِ الذي يقعُ فيهِ ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ.

٥- يمكنُ استخدامُ الآلةِ الحاسبةِ لإيجادِ النسبِ المثلثيةِ مباشرةً بغضِّ النظرِ عنِ الربعِ الذي تقعُ فيهِ، ودونَ استخدامِ زاويةِ المرجعِ، كما هوَ موضحٌ في الأمثلةِ الآتيةِ:

مثالُ (٥-١٠)

جدْ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي باستخدامِ الآلةِ الحاسبةِ:

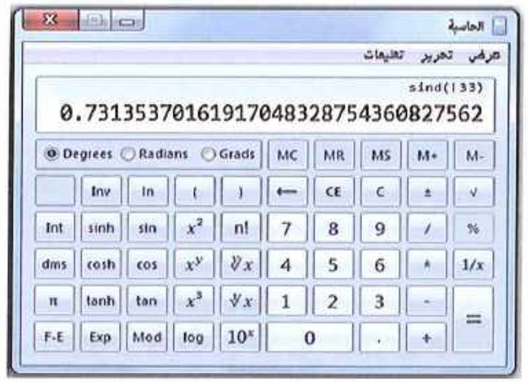
١) جا ١٣٣° ٢) جتا ٢٤٥° ٣) ظا ٣٥٠° ٤) قا ٢٠٠°

الحلُّ

١) نفتحُ الآلةَ الحاسبةَ في جهازِ الحاسوبِ، ونُدخِلُ قياسَ الزاويةِ ١٣٣°، ثمَّ نضغطُ على المفتاحِ "sin" فيكونُ الناتجُ:

جا ١٣٣° = ٠,٧٣١٣٥٣٧٠١٦١٩١٧٠٤٨٣٢٨٧٥٤٣٦٠٨٢٧٥٦٢ ≈ ٠,٧٣١٤

انظرِ الشكلَ (٥- ١٦).



الشكلُ (٥-١٦)

٢) نُشغّل الآلةَ الحاسبةَ في جهازِ الحاسوبِ، ونُدخِلُ قياسَ الزاويةِ ٢٤٥°، ثمَّ نضغطُ على المفتاحِ "cos" فيكونُ الناتجُ:

جتا ٢٤٥° = −٠,٤٢٢٦١٨٢٦١٧٤٠٦٩٩٤٣٦١٨٦٩٧٨٤ ≈ −٠,٤٢٢٦

٣) نفتحُ الآلةَ الحاسبةَ في جهازِ الحاسوبِ، ونُدخِلُ قياسَ الزاويةِ ٣٥٠° ١٢′، فنكتبُ الدقائقَ وكأنَّها أجزاءٌ عشريةٌ، ثمَّ نضغطُ على المفتاحِ "Inv" ثمَّ "deg" الذي يحوِّلُ الدقائقَ إلى أجزاءٍ عشريةٍ، ثمَّ "tan" فيكونُ الناتجُ:

ظا (٣٥٠° ١٢′) = −٠,١٧٢٧٢٩٩٩٢٧٥٥٢٦٣٣٧٧٤٢٨٦٧٠٦٠٢٢٠٨٧

≈ −٠,١٧٢٧

٤) قا ٢٠٠° = $\frac{١}{\text{جتا } ٢٠٠°}$

نفتحُ الآلةَ الحاسبةَ في جهازِ الحاسوبِ، ونُدخِلُ قياسَ الزاويةِ ٢٠٠°، ثمَّ نضغطُ على المفتاحِ "cos" فيكونُ الناتجُ:

جتا ٢٠٠° = −٠,٩٣٩٦٩٢٦٢٠٧٨٥٩٠٨٣٨٤٠٥٤١٠٩٢٧٧٣٢٤٧٣ ≈ −٠,٩٣٩٧

قا ٢٠٠° = $\frac{١}{\text{جتا } ٢٠٠°}$ ≈ $\frac{١}{-٠,٩٣٩٧}$ ≈ −١,٠٦٤٢

تدريبُ (٥-١٠)

جِدْ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي، باستخدامِ الآلةِ الحاسبةِ:

١) جا ١٣٣° ٢) ظتا ٣٤٥° ٣) جا(٥ أ ١١٧°) ٤) قتا ٢٣٠°

مثالٌ (٥-١١)

جدْ قيمةَ (قِيَمَ) الزاويةِ (هـ)، لأقربِ دقيقةٍ في كلٍّ منَ الحالاتِ الآتيةِ:

١) جا هـ = ٠,٤٧٧١ ، ٩٠° < هـ < ١٨٠°

٢) جتا هـ = −٠,٥٦٩٢ ، ١٨٠° < هـ < ٢٧٠°

٣) ظا هـ = −١ ، ٠° < هـ < ٣٦٠°

الحلُّ

لإيجادِ قيمةِ الزاويةِ هـ، فإنّ الآلةَ الحاسبةَ تُعطي زاويةَ المرجعِ؛ لذلكَ علينا مراعاةُ الربعِ الذي تقعُ فيهِ الزاويةُ.

١) نُدخِلُ ٠,٤٧٧١ في الآلةِ الحاسبةِ في جهازِ الحاسوبِ ثمَّ "Inv" ثم "sin" فيكونُ الناتجُ :
٢٨,٤٩٦١٦٩١٠٧٦٣٠٠٧٠١٩٤٠٩١٨٧٢٣٦٩١٤٦ وهذا يعني أن هـ ≈ ٢٨,٥°
ولتحويلِها إلى النظامِ الستينيِّ، نضغطُ على "dms" فيكونُ الناتجُ:
٢٨,٢٩٤٦٢٠٨٧٨٧٤٦٨٢٥٢٦٩٨٧٣٠٧٤٠٥٢٨٩٢
أيْ أنّ قيمةَ هـ تُساوي تقريبًا ٤٦″ ٢٩′ ٢٨°، وتُساوي ٣٠′ ٢٨° لأقربِ دقيقةٍ
لكنّ هـ واقعةٌ في الربعِ الثاني، لذلكَ هـ = ١٨٠° − ٣٠′ ٢٨° = ٣٠′ ١٥١°

٢) نُدخِلُ ٠,٥٦٩٢ في الآلةِ الحاسبةِ في جهازِ الحاسوبِ ثمَّ "Inv" ثمَّ " cos" فيكونُ الناتجُ:
٥٥,٣٠٥٥٤١٨٥٦٦١٤٤٧٠٠٦١٥١٥٣٤٩٩٠٢٢٦٩ وهذا يَعنِي أنَّ هـ ≈ ٥٥,٣١°
ولتحويلِها إلى النظامِ الستينيِّ، نضغطُ على "dms" فيكونُ الناتجُ :
٥٥,١٨١٩٩٥٠٦٨٣٨١٢٠٩٢٢٢١٤٥٥٢٥٩٦٤٨١٧

أيْ أنَّ قيمةَ هـ تُساوِي تقريبًا ١٩ً ١٨ٔ ٥٥°، وتُساوي ١٨ٔ ٥٥° لأقربِ دقيقةٍ

لكنَّ هـ واقعةٌ في الربعِ الثالثِ، لذلكَ : هـ = ١٨٠° + ١٨ٔ ٥٥° = ١٨ٔ ٢٣٥°

٣) نُدخِلُ −١ في الآلةِ الحاسبةِ في جهازِ الحاسوبِ ثمَّ "Inv" ثمَّ "tan" فيكونُ الناتجُ : ٤٥°

لكنّ الظلَّ يكونُ سالبًا في الربعيْنِ الثاني والرابعِ، لذلكَ فإنَّ:

هـ = ١٨٠° − ٤٥° = ١٣٥° في الربعِ الثاني.

أو هـ = ٣٦٠° − ٤٥° = ٣١٥° في الربعِ الرابعِ.

تدريبُ ٥-١١

جِدْ قيمةَ (قِيَمَ) الزاويةِ (هـ) لأقربِ دقيقةٍ في كلٍّ منَ الحالاتِ الآتيةِ:

جا هـ = −٠,٣٨١٦ ، ١٨٠° < هـ < ٣٦٠°

قا هـ = −٢ ، ٩٠° < هـ < ٢٧٠°

الأسئلةُ ؟

١) جِدِ النسبَ المثلثيةَ لكلٍّ منَ الزوايا الآتيةِ:

أ) هـ = ٥٥°　　ب) هـ = ١٣٥°　　جـ) هـ = ٢٦٠°

د) هـ = ٢٨٠°　　هـ) هـ = ٣٥° ٤٠′　　و) هـ = ٢٢٥° ١٥′

٢) جِدْ قياسَ زاويةِ المرجعِ للزوايا التي قياسُ كلٍّ منها: هـ = ١٠٠°، هـ = ٢٠٥°، ثمَّ استخدِمْها لإيجادِ النسبِ المثلثيةِ لهذهِ الزوايا.

٣) جِدْ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي دونَ استخدامِ الآلةِ الحاسبةِ:

أ) جتا ٢٤٠° جتا ٣٠° + جا ١٢٠° جا ١٥٠°

ب) قا^{٢} ١٣٥° − ظا^{٢} ١٣٥°

جـ) جا^{٢} ١٢٠° + جا^{٢} ٣٣٠°

٤) جِدْ قيمةَ (قيمَ) الزاويةِ (هـ) لأقربِ دقيقةٍ، في كلٍّ منَ الحالاتِ الآتيةِ:

أ) جا هـ = −٠,٣٨١٦ ، ١٨٠° < هـ < ٣٦٠°

ب) قتا هـ = ٢ ، ٠° < هـ < ٣٦٠°

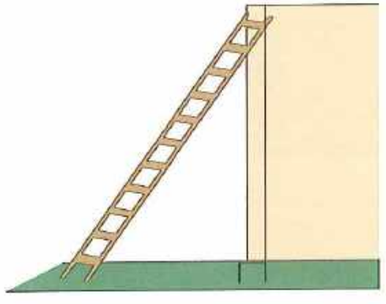
جـ) ظتا هـ = ١,٣٢١٢ ، ٠° < هـ < ٣٦٠°

٥) إذا كانتْ (هـ) قياسَ زاويةٍ حادةٍ، وكانَ جا هـ + جا (١٨٠° − هـ) = ١,٤٤٤٤ ، فجِدْ قياسَ الزاويةِ هـ.

٦) أ) جِدْ مجموعَ جيوبِ كلِّ الزوايا س، بحيثُ ٠° ≤ س < ٣٦٠°

ب) جِدْ مجموعَ جيوبِ تمامِ كلِّ الزوايا س ، بحيثُ ٠° ≤ س ≤ ٣٦٠°

٧) سلّمٌ طولهُ ٨ أمتارٍ، يرتكزُ على أرضٍ أفقيةٍ وحائطٍ رأسيٍّ، كما في الشّكلِ (٥−١٧)
فإذا كان ارتفاعُ رأسِ السلَّمِ عنِ الأرضِ ٦ أمتارٍ، جد قياسَ الزاويةِ بينَ السلَّمِ والحائطِ لأقربِ دقيقةٍ.



الشكلُ (٥−١٧)

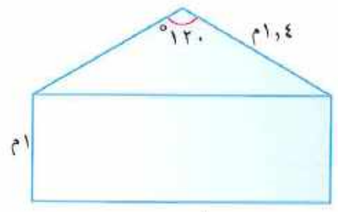
تطبيقاتُ المثلثِ
Triangle Applications

النتاجاتُ

- تجدُ مساحةَ مثلثٍ، عُلِمَ منهُ طولا ضلعيْنِ وزاويةٌ محصورةٌ بينَهما.
- تستخدمُ قانونَي الجيوبِ وجيوبِ التمامِ في حلِّ المثلثِ.
- تحلُّ مسائلَ عمليةً على قانونَي الجيوبِ وجيوبِ التمامِ.

أولًا مساحةُ المثلثِ بدلالةِ طولَيْ ضلعيْنِ فيهِ، والزاويةِ المحصورةِ بينَهُمَا
The Area of Triangle Using Two Sides and the Angle between them

يمثلُ الشكلُ (٥–١٨) نافذةً على شكلِ مستطيلٍ، يَعلوهُ مثلثٌ متطابقُ الضلعيْنِ، إذا كانَ طولُ كلٍّ مِنْ ضلعَيِ المثلثِ ١,٤ مترًا، وقياسُ الزاويةِ بينَهُمَا ١٢٠°، وعرضُ المستطيلِ ١ مترًا، فاحسبْ تكاليفَ هذهِ النافذةِ، إذا كانَ المترُ المربّعُ الواحدُ يكلّفُ ٤٥ دينارًا.



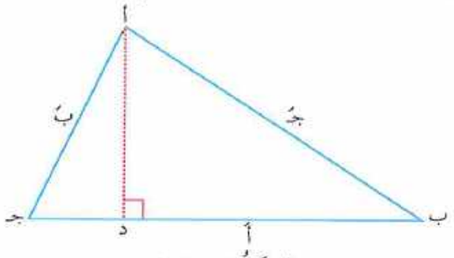
الشكلُ (٥–١٨)

مرَّ معنا سابقًا، أنَّ مساحةَ المثلثِ، تساوي نصفَ حاصلِ ضربِ طولِ قاعدتِهِ في ارتفاعِهِ، وسنتعرّفُ في هذا الدرسِ طريقةً جديدةً لإيجادِ مساحةِ المثلثِ، وذلكَ إذا عُلِمَ منْهُ طولا ضلعيْنِ، وقياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَهُمَا.

إذا رمزْنا لأطوالِ أضلاعِ المثلثِ أ ب جـ التي تقابلُ الزوايا، أ ، ب ، جـ ، بالرموزِ أَ ،بَ،جَ، على التوالي، انظرِ الشكلَ (٥–١٩)، فإنَّ:

مساحةَ المثلثِ أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ × أ د

لكنَّ جا جـ = $\frac{\text{أ د}}{\text{بَ}}$ ، ومنهُ: أ د = بَ جا جـ



الشكلُ (٥–١٩)

مساحةُ المثلثِ أ ب جـ $= \frac{١}{٢}$ ب جـ × بَ جا جـ

$= \frac{١}{٢}$ أَ × بَ جا جـ

مساحةُ المثلثِ، تساوي نصفَ حاصلِ ضربِ طولَيْ أيِّ ضلعيْنِ فيهِ، مضروبًا في جيبِ الزاويةِ المحصورةِ بينَهُما.

اكتبْ مساحةَ المثلثِ أ ب جـ بدلالةِ أَ، جَ والزاويةِ المحصورةِ بينَهُما.

مثالُ (٥-١٢)

جِدْ مساحةَ المثلثِ أ ب جـ إذا كانَ أَ = ٨ سم ، بَ = ١٢سم ، وقياسُ ∡جـ = ١٣٥°.

الحلُّ

مساحةُ المثلثِ أ ب جـ $= \frac{١}{٢}$ أَ × بَ جا جـ

$= \frac{١}{٢}$ (٨ × ١٢ جا ١٣٥°)

$= \frac{١}{٢}$ (٨ × ١٢ × ٠,٧٠٧١)

= ٣٣,٩٤ سم^٢

تدريبٌ ٥-١٢

جِدْ مساحةَ المثلثِ س ص ع إذا كانَ صَ = ٦ سم ، عَ = ٩ سم، وقياسُ ∡ س = ٧٥°.

مثالُ (٥-١٣)

جِدْ مساحةَ قطعةِ أرضٍ مثلثةِ الشكلِ، طولا ضلعيْنِ فيها ٧٠م، ٤٠م، وقياسُ الزاويةِ المحصورةِ بينَهُما ٨٠°.

الحلُّ

مساحةُ قطعةِ الأرضِ = نصفَ حاصلِ ضربِ طولَيِ الضلعيْنِ ، مضروبًا بجيبِ الزاويةِ المحصورةِ بينَهُما . (لماذا) ؟

مساحةُ قطعةِ الأرضِ $= \frac{١}{٢} (٧٠ \times ٤٠ \text{ جا } ٨٠^\circ)$

$= \frac{١}{٢} (٧٠ \times ٤٠ \times ٠,٩٨٤٨)$

$= ١٣٧٨,٧٢ \text{ م}^٢$

تدريبُ ٥-١٣

حُلَّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ.

مثالٌ (٥-١٤)

ل م ن مثلثٌ فيهِ لَ = ٤سم ، مَ = ٧سم ، ومساحتُهُ تساوي $\sqrt{٩٨}$ سم^٢، جِدْ ق ∠ ن.

الحلُّ

مساحةُ المثلثِ ل م ن $= \frac{١}{٢}$ لَ × مَ جا ن

$\sqrt{٩٨} = \frac{١}{٢} (٤ \times ٧ \text{ جا ن})$

$\sqrt{٩٨} = ١٤ \text{ جا ن}$

جا ن $= \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ومنه ، ق ∠ ن = ٤٥°.

ويمكنُ أنْ يكونَ ق ∠ ن = ١٨٠° − ٤٥° = ١٣٥°.

تدريبُ ٥-١٤

أ ب جـ ، مثلثٌ فيهِ بَ = $٢\sqrt{٣}$سم ، جَ = ٢سم، ومساحتُهُ تساوي ٣ سم^٢، جِدْ قياسَ ∠ أ.

الأسئلةُ ؟

١) جدْ مساحةَ المثلثِ أ ب جـ إذا كانَ بَ = ٤سم ، جَ = ١٠سم ، قياس ∢ أ = ٣٥°.

٢) س ص ع، مثلثٌ مساحتُهُ ٢٧سم٢، وفيهِ: صَ = ٦سم ، عَ = ٩ سم ، جِدْ قياسَ ∢ س.

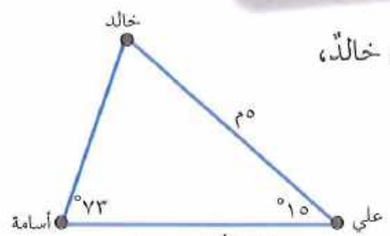
٣) جـدْ مساحةَ متوازِي الأضلاعِ أ ب جـ د الـذي فيهِ: أ ب = ١٠سم ، ب جـ = ٥سم، قياسُ ∢ب = ١٣٥°.

٤) أ ب جـ، مثلثٌ متطابقُ الضلعيْنِ، طولُ كلٍّ منَ الضلعيْنِ المتطابقيْنِ ⌈٢، إذا كانتْ مساحتُهُ تساوي $\frac{١}{٢}$ سم٢، فجِدْ قياسَ الزاويةِ المحصورةِ بينَ الضلعيْنِ المتطابقيْنِ.

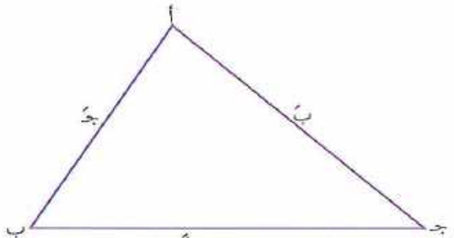
٥) شاخصةٌ مروريةٌ على شكلِ مثلثٍ متطابقِ الأضلاعِ، طولُ ضلعِهِ ٥٠سم، جِدْ مساحةَ هذهِ الشاخصةِ بأكثرَ منْ طريقةٍ.

ثانيًا قانونُ الجيوبِ Law of Sines

أثناءَ مباراةٍ لكرةِ القدمِ شكّلَ اللاعبونَ : أسامةُ ، عليّ ، خالدٌ، في لحظةٍ ما مثلثًا، كما في الشكلِ (٥–٢٠).
جِدِ المسافةَ بينَ أسامةَ وخالدٍ في تلكَ اللحظةِ.



الشكلُ (٥–٢٠)



الشكلُ (٥–٢١)

مرَّ معَنا أنَّ مساحةَ المثلثِ (م)، تساوي نصفَ حاصلِ ضربِ طولَيْ أيِّ ضلعيْنِ فيهِ، مضروبًا بجيبِ الزاويةِ المحصورةِ بينَهُما:

$م = \frac{١}{٢} ب \times جـ \text{ جا } أ = \frac{١}{٢} أ \times جـ \text{ جا } ب$

$= \frac{١}{٢} أ \times ب \text{ جا } جـ$

$ب \times جـ \text{ جا } أ = أ \times جـ \text{ جا } ب = أ \times ب \text{ جا } جـ$ (الضربُ بالعددِ ٢)

$\frac{\text{جا } أ}{أ} = \frac{\text{جا } ب}{ب} = \frac{\text{جا } جـ}{جـ}$ (بالقسمةِ على أ × ب × جـ)

$\frac{أ}{\text{جا } أ} = \frac{ب}{\text{جا } ب} = \frac{جـ}{\text{جا } جـ}$ (منْ خواصِّ التناسبِ)

قانونُ الجيوبِ

في أيِّ مثلثٍ، تتناسبُ أطوالُ الأضلاعِ معَ جيوبِ الزوايا المقابلةِ لها، ففي المثلثِ أ ب جـ يكونُ:

$\frac{أ}{\text{جا } أ} = \frac{ب}{\text{جا } ب} = \frac{جـ}{\text{جا } جـ}$

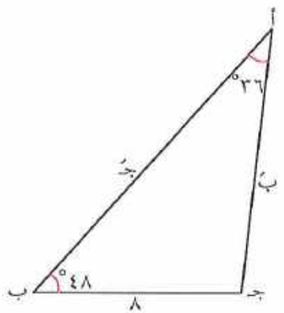
تذكَّرْ

حلُّ المثلثِ: يعني إيجادَ أطوالِ أضلاعِهِ، وقياساتِ زواياهُ.

مثالٌ (٥-١٥)

أ ب جـ ، مثلثٌ فيه أَ = ٨سم ، قياسُ ∡ أ = ٣٦°، وقياسُ ∡ ب = ٤٨°، جِدْ:

١) بَ　　٢) قياسَ ∡ جـ　　٣) جَ



الشكلُ (٥-٢٢)

الحلُّ

١) $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}}$　　(منْ قانونِ الجيوبِ)

$\frac{٨}{\text{جا}٣٦^\circ} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا}٤٨^\circ}$

$\text{بَ} = \frac{(٨ \times \text{جا}٤٨^\circ)}{\text{جا}٣٦^\circ}$

بَ = ١٠,١١ سم تقريبًا.

٢) قياسُ ∡ جـ = ١٨٠° − (٣٦° + ٤٨°) = ٩٦°　　(مجموعُ قياساتِ زوايا المثلثِ = ١٨٠°)

٣) لحسابِ جَ ، نستخدمُ قانونَ الجيوبِ مرةً أُخرى:

$\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{جَ}}{\text{جا جـ}}$

$\frac{٨}{\text{جا}٣٦^\circ} = \frac{\text{جَ}}{\text{جا}٩٦^\circ}$

$\text{جَ} = \frac{(٨ \times \text{جا}٩٦^\circ)}{\text{جا}٣٦^\circ}$

جَ = ١٣,٥٤ سم تقريبًا.

تدريبُ ٥-١٥

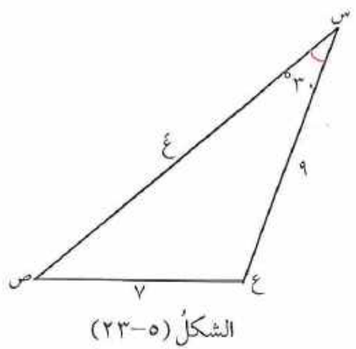
ل م ن ، مثلثٌ فيهِ لَ = ٣سم ، قياسُ ∡ ل = ٦٠° ، وقياسُ ∡ م = ٤٥°، جِدْ:

١) قياسَ ∡ ن　　٢) نَ

مثالٌ (٥-١٦)

س ص ع ، مثلثٌ فيهِ سَ = ٧سم ، صَ = ٩سم ، ق ∡ س = ٣٠°، جِدْ:

١) ق ∡ ص　　٢) ق ∡ ع　　٣) عَ



الشكلُ (٥-٢٣)

الحلُّ

١) $\frac{\text{سَ}}{\text{جا س}} = \frac{\text{صَ}}{\text{جا ص}}$　(منْ قانونِ الجيوبِ)

$\frac{٧}{\text{جا}٣٠^\circ} = \frac{٩}{\text{جا ص}}$

$\text{جا ص} = \frac{(٩ \times \text{جا}٣٠^\circ)}{٧}$

جا ص = ٠,٦٤٢٩ تقريبًا.

ق ∡ ص = ٤٠° تقريبًا.　(باستخدامِ الآلةِ الحاسبةِ)

٢) ق ∡ ع = ١١٠° تقريبًا.　(لماذا؟)

٣) $\frac{\text{سَ}}{\text{جا س}} = \frac{\text{عَ}}{\text{جا ع}}$

$\frac{٧}{\text{جا}٣٠^\circ} = \frac{\text{عَ}}{\text{جا}١١٠^\circ}$

$\text{عَ} = \frac{(٧ \times \text{جا}١١٠^\circ)}{\text{جا}٣٠^\circ}$

عَ = ١٣,١٦ سم تقريبًا.

تدريبُ (٥-١٦)

حُلَّ المثلثَ س ص ع ، إذا علمتَ أنَّ قياسَ ∡ س = ٧٥° ، سَ = ٦,٥ سم ، صَ = ٥,٨ سم .

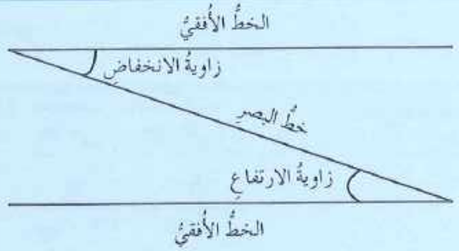
فكّرْ وناقشْ

ما هيَ عناصرُ المثلثِ الضروريةِ، التي يجبُ أنْ تُعطَى؛ لنتمكنَ منِ استخدامِ قانونِ الجيوبِ؟

تذكّرْ

زاويةُ الارتفاعِ: الزاويةُ المحصورةُ بينَ خطِّ البصرِ، والخطِّ الأفقيِّ، عندَ رصدِ جسمٍ مرتفعٍ.

زاويةُ الانخفاضِ: الزاويةُ المحصورةُ بينَ خطِّ البصرِ والخطِّ الأفقيِّ، عندَ رصدِ جسمٍ منخفضٍ.

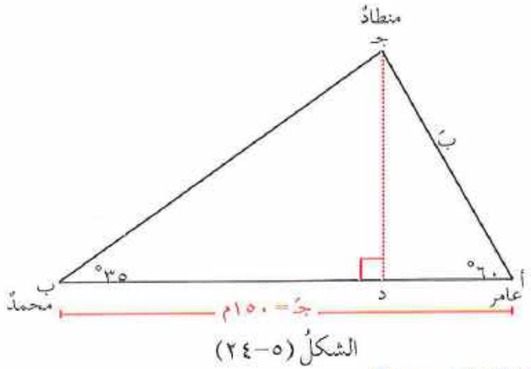


مثالٌ (٥-١٧)

يقفُ عامرٌ ومحمدٌ على أرضٍ أفقيةٍ، والمسافةُ بينَهُما ١٥٠ مترًا، ورَصَدا منطادًا في اللحظةِ نفسِها، وجدَ محمدٌ أنَّ قياسَ زاويةِ ارتفاعِ المنطادِ ٣٥°، بينَما وجدَ عامرٌ أنَّ قياسَ زاويةِ ارتفاعِ المنطادِ ٦٠° ، إذا كانَ المسقطُ العموديُّ للمنطادِ على سطحِ الأرضِ، يقعُ على القطعةِ المستقيمةِ، الواصلةِ بينَ عامرٍ ومحمدٍ، فَجِدْ:

١) البعدَ بينَ عامرٍ والمنطادِ.

٢) ارتفاعَ المنطادِ عنْ سطحِ الأرضِ.



الشكلُ (٥-٢٤)

الحلُّ

١) منَ المثلثِ أ ب جـ في الشكلِ (٥-٢٤)

البعدُ بينَ عامرٍ والمنطادِ = بَ

ق ∡ أ جـ ب = ٨٥° (مجموعُ زوايا المثلثِ ١٨٠°)

$$\frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جَ}}{\text{جا جـ}}$$

$$\frac{\text{بَ}}{\text{جا ٣٥°}} = \frac{١٥٠}{\text{جا ٨٥°}}$$

$$ب = \frac{(١٥٠ \times جا٣٥°)}{جا٨٥°}$$

$$ب = \frac{(٠,٥٧٣٦ \times ١٥٠)}{٠,٩٩٦٢}$$

ب = ٨٦,٣٧م تقريبًا.

٢) ننزلُ عمودًا منْ جـ على أ ب في د ، فيكونُ ارتفاعُ المنطادِ عنْ سطحِ الأرضِ هوَ: جـ د ، ومنَ المثلثِ أ د جـ، قائمِ الزاويةِ في د:

$$جا أ = \frac{جـ د}{أ جـ}$$ (لماذا؟)

$$جا ٦٠° = \frac{جـ د}{٨٦,٣٧}$$

جـ د = جا ٦٠° × ٨٦,٣٧ = ٠,٨٦٦ × ٨٦,٣٧ = ٧٤,٨ تقريبًا.

تدريبُ ٥-١٧

حُلَّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ.

مثالٌ (٥-١٨)

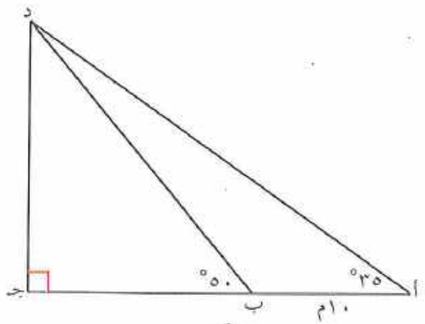
رصدتْ آيةُ قمةَ ساريةِ العلمِ منَ النقطةِ (أ) على سطحِ الأرضِ، بزاويةِ ارتفاعٍ قياسِها ٣٥°، ثمَّ تقدمتْ ١٠ م بخطٍّ مستقيمٍ نحوَ قاعدةِ الساريةِ، ورصدتْ قمةَ الساريةِ مرةً أُخرى، بزاويةِ ارتفاعٍ قياسُها ٥٠° ، جِدِ ارتفاعَ الساريةِ.

الحلُّ

في الشكلِ (٥-٢٥):

قياسُ ∡ أ ب د = ١٣٠° (∡ أ ب جـ زاويةٌ مستقيمةٌ)

قياسُ ∡ أ د ب = ١٥° (لماذا؟)



الشكلُ (٥-٢٥)

منَ المثلثِ أ ب د:

$$\frac{\text{ب د}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{جا د}}$$ (لماذا؟)

$$\frac{\text{ب د}}{\text{جا ٣٥°}} = \frac{١٠}{\text{جا ١٥°}}$$

$$\text{ب د} = \frac{(١٠ \times \text{جا ٣٥°})}{\text{جا ١٥°}}$$

$$\text{ب د} = \frac{(١٠ \times ٠,٥٧٣٦)}{٠,٢٥٨٨}$$

ب د = ٢٢,١٦ م تقريبًا.

ومنَ المثلثِ ب جـ د، قائمِ الزاويةِ في جـ:

$$\text{جا ب} = \frac{\text{جـ د}}{\text{ب د}}$$ (لماذا؟)

جـ د = جا ب × ب د

= جا ٥٠° × ٢٢,١٦ = ٠,٧٦٦٠ × ٢٢,١٦ = ١٦,٩٧ م تقريبًا.

تدريبُ ٥-١٨

س ، ص ، نقطتانِ على شاطئ نهرٍ مستقيمٍ، المسافةُ بينَهُما ١٥٠ مترًا، ع نقطةٌ على الشاطئ الآخرِ، قياسُ ∢ س ص ع = ٧٠°، وقياسُ ∢ ع س ص = ٥٠°، جِدْ عرضَ النهرِ.

الأسئلةُ ؟

١) س ص ع، مثلثٌ فيه سَ = ٥سم ، صَ = ٤سم ، وقياسُ ∡ س = ٦٤°، جِدْ:

أ) قياسَ ∡ ص　　ب) قياسَ ∡ ع　　جـ) عَ

٢) أ ب جـ، مثلثٌ فيهِ أَ = ١٠سم ، قياسُ ∡ أ = ٣٠°، وقياسُ ∡ ب = ٤٥°، جِدْ:

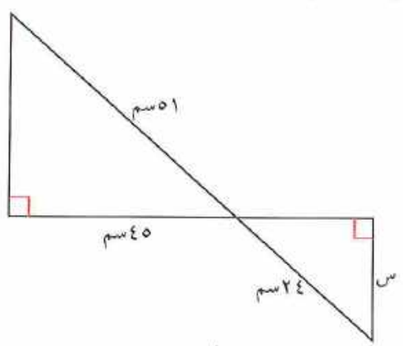
أ) بَ　　ب) جَ　　جـ) مساحةَ المثلثِ أ ب جـ.

٣) يقعُ عمودٌ بينَ نقطتيْنِ تبعدانِ عن بعضِهما ١٢٠م، منَ النقطةِ الأولى وُجِدَ أنَّ قياسَ زاويةِ ارتفاعِ قمةِ العمودِ ١٥°، ومنَ النقطةِ الثانيةِ وُجِدَ أنَّ قياسَ زاويةِ ارتفاعِ قمةِ العمودِ ٥٠°، جِدِ ارتفاعَ العمودِ.

٤) بيِّنْ أنهُ لا يمكنُ رسمُ المثلثِ س ص ع بحيثُ: سَ = ٥سم ، صَ = ٨سم ، وقياسُ ∡ س = ٤٣°.

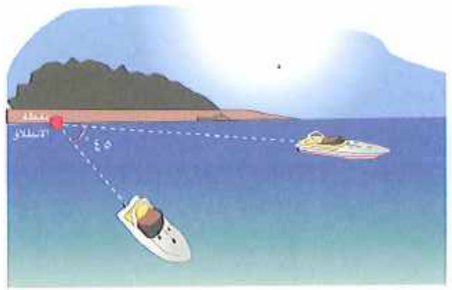
٥) س ، ص ، ع ، ثلاثُ مدنٍ ، تقعُ (س) جنوبَ (ص) وتبعدُ عنْها ٦٠كم ، وتقعُ (ع) باتجاهِ ٣٥° شمالَ الشرقِ للمدينةِ (س)، وباتجاهِ ٥١° جنوبَ الشرقِ للمدينةِ (ص)، جِدِ البعدَ بينَ المدينتيْنِ (س) ، (ع) .

٦) جِدْ قيمةَ س في الشكلِ (٥-٢٦).



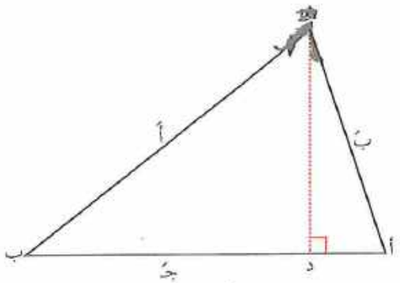
الشكلُ (٥-٢٦)

ثالثًا قانونُ جيوبِ التمام Law of Cosines



انطلقَ زورقانِ بخطيْنِ مستقيميْنِ منْ مكانٍ واحدٍ، إذا كانتْ سرعةُ الأولِ ٤٠ كم/ساعةٍ، وسرعةُ الثاني ٥٠ كم/ساعةٍ، وكانَ قياسُ الزاويةِ بينَ اتجاهيْ حركتيْهما ٤٥°، فجِدِ البعدَ بينَهُما، بعدَ ساعتيْنِ منِ انطلاقِهما.

استخدمْنا قانونَ الجيوبِ لحلِّ المثلثِ، إذا عُلِمَ منهُ زاويتانِ وضلعٌ، أو ضلعانِ وزاويةٌ تقابلُ أحدَ الضلعيْنِ، وفي هذا الدرسِ سنتعلمُ: كيفَ نحلُّ المثلثَ، إذا عُلِمَ أطوالُ أضلاعِهِ، أو ضِلعانِ وزاويةٌ محصورةٌ بينَهُما.



الشكلُ (٥-٢٧)

منَ الشكلِ (٥-٢٧):

جـ د = بَ جا أ (لماذا؟)

أ د = بَ جتا أ

ب د = أ ب - أ د = جَ - أ د

وفي المثلثِ ب جـ د:

$أَ^{٢} = (جـ د)^{٢} + (ب د)^{٢}$ (نظريةُ فيثاغورسَ)

$= (بَ جا أ)^{٢} + (جَ - أ د)^{٢}$

$= (بَ جا أ)^{٢} + (جَ - بَ جتا أ)^{٢}$

$= بَ^{٢} جا^{٢}أ + جَ^{٢} - ٢ بَ جَ جتا أ + بَ^{٢} جتا^{٢} أ$

$= بَ^{٢} (جا^{٢}أ + جتا^{٢}أ) + جَ^{٢} - ٢ بَ جَ جتا أ$

$= بَ^{٢} \times (١) + جَ^{٢} - ٢ بَ جَ جتا أ$ (لماذا؟)

$أَ^{٢} = بَ^{٢} + جَ^{٢} - ٢ بَ جَ جتا أ$

قانونُ جيوبِ التمامِ

في أيِّ مثلثٍ أ ب جـ يكونُ: أ^{٢} = ب^{٢} + جـ^{٢} − ٢ ب جـ × جتا أ

تحدَّثْ

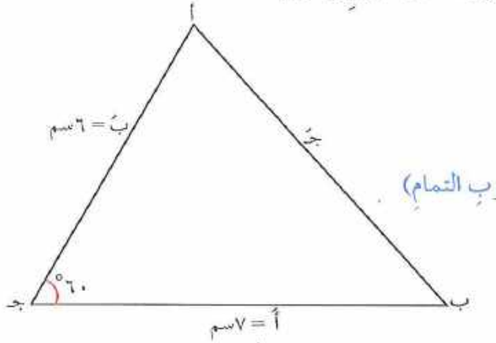
تحدّثْ معَ زميلكَ عنْ حالاتِ استخدامِ قانونِ جيوبِ التمامِ.

فكِّرْ

لأيِّ مثلثٍ أ ب جـ ، اكتبْ جتا أ بدلالةِ أطوالِ أضلاعِ المثلثِ.

مثالُ (٥-١٩)

أ ب جـ مثلثٌ، فيهِ أ = ٧سم ، ب = ٦سم ، ق ∡ جـ = ٦٠°، جِدْ جـ:



الشكلُ (٥-٢٨)

الحلُّ

منَ الشكلِ (٥-٢٨):

جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢} − ٢ أ × ب جتا جـ (قانونُ جيوبِ التمامِ)

= ٤٩ + ٣٦ − ٢ × ٧ × ٦ × جتا ٦٠°

جـ^{٢} = ٤٣

جـ ≈ ٦,٥٦ سم

مثالُ (٥-٢٠)

س ص ع مثلثٌ، فيهِ سَ = ٥سم ، صَ = ٧سم ، و عَ = ٨سم ، جِدْ ق ∡ص

الحلُّ

$$\text{جتا ص} = \frac{\text{س}^{٢} + \text{ع}^{٢} - \text{ص}^{٢}}{٢\text{س} \times \text{ع}}$$

جتا ص $= \frac{٢٥ + ٦٤ - ٤٩}{٢ \times ٥ \times ٨} = ٠,٥$

ومِنْها، ق ∡ ص $= ٦٠°$

تدريبُ (٥-١٩)

في مثالِ (٥ – ٢٠)، جِدْ ق ∡ع

مثالٌ (٥-٢١)

يلتقي شارعانِ مستقيمانِ في النقطةِ (جـ)، ويصنعانِ عندَها زاويةً قياسُها ٤٠°، انطلقتْ سيارتانِ (أ)، (ب) معًا منْ نقطةِ التقاطعِ بسرعةٍ منتظمةٍ ، كلٌّ منهُما على شارعٍ ، إذا كانتْ سرعةُ السيارةِ (أ) ٨٠ كم/ساعةٍ، وسرعةُ السيارةِ (ب) ١٠٠كم/ساعةٍ، فما المسافةُ بينَهُما بعدَ مرورِ نصفِ ساعةٍ منَ انطلاقِهِما.

الحلُّ

منَ الشكلِ (٥-٢٩)، البعدُ بينَ السيارتيْنِ هوَ طولُ القطعةِ $\overline{أ ب}$

أ جـ $= ٨٠ \times ٠,٥ = ٤٠$ كم (لماذا؟)

ب جـ $= ١٠٠ \times ٠,٥ = ٥٠$ كم

ومنْ قانونِ جيوبِ التمامِ:

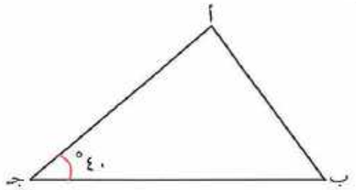
$(أ ب)^٢ = (أ جـ)^٢ + (ب جـ)^٢ - ٢ (أ جـ) \times (ب جـ)$ جتا جـ

$= (٤٠)^٢ + (٥٠)^٢ - ٢ (٤٠) (٥٠)$ جتا ٤٠°

$= ١٦٠٠ + ٢٥٠٠ - ٤٠٠٠ \times ٠,٧٦٦٠$

$(أ ب)^٢ = ١٠٣٦$ تقريبًا.

أ ب $= ٣٢,١٩$ كم تقريبًا.



الشكلُ (٥-٢٩)

تدريبُ (٥-٢٠)

حُلَّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ .

تدريبُ (٥-٢١)

كتبتْ ملاكُ قانونَ جيوبِ التمامِ بالكلماتِ كالآتي:

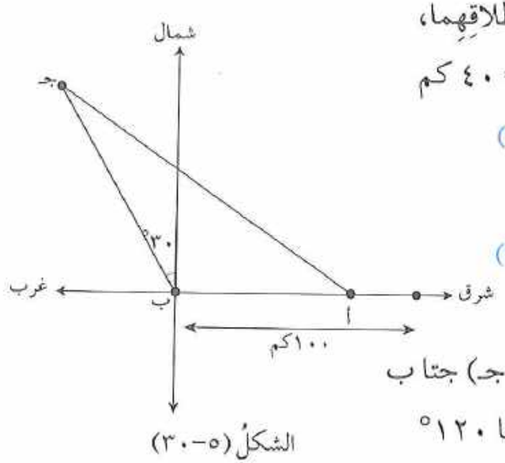
في أيِّ مثلثٍ، مربعُ أيِّ ضلعٍ يساوي مجموعَ مربعَيِ الضلعيْنِ الآخريْنِ، مضافًا إليهِ مِثليْ حاصلِ ضربِ الضلعيْنِ الآخريْنِ، مضروبًا في جيبِ تمامِ الزاويةِ المحصورةِ بينَهما. ما رأيُكَ؟ هل توافقُ ملاكَ؟ برِّرْ إجابتَكَ.

مثالُ (٥-٢٢)

سفينتانِ، البعدُ بينَهما ١٠٠ كم، تقعُ الأولى شرقَ الثانيةِ، انطلقَتا معًا، فإذا سارتِ الأُولَى نحوَ الغربِ بسرعةِ ٢٠ كم/ساعةٍ، وسارتِ الثانيةُ باتجاهِ ٣٠° غربَ الشمالِ بسرعةِ ٤٠ كم/ساعةٍ، فجِدِ البعدَ بينَهُما، بعدَ ساعتيْنِ منَ انطلاقِهما.

الحلُّ

يمثلُ الشكلُ (٥-٣٠) رسمًا توضيحيًّا للمسألةِ، حيثُ تمثلُ النقطتانِ أ ، جـ موقعَ السفينتيْنِ: الأُولَى والثانيةِ (على التوالي)، بعد ساعتيْنِ منَ انطلاقِهما،



الشكلُ (٥-٣٠)

المسافةُ التي قطعتْها السفينةُ الأُولَى = ٢ × ٢٠ = ٤٠ كم

أ ب = ١٠٠ − ٢ × ٢٠ = ٦٠ كم (لماذا؟)

ب جـ = ٤٠ × ٢ = ٨٠ كم

قياسُ ∡ أ ب جـ = ١٢٠° (لماذا؟)

ومن قانونِ جيوبِ التمامِ:

(أ جـ)^{٢} = (أب)^{٢} + (ب جـ)^{٢} − ٢ (أب) × (ب جـ) جتا ب

= (٦٠)^{٢} + (٨٠)^{٢} − ٢ (٦٠)(٨٠) جتا ١٢٠°

= ٣٦٠٠ + ٦٤٠٠ − ٩٦٠٠ × −٠,٥

(أ جـ)^{٢} = ١٤٨٠٠

أ جـ = ١٢١,٦٥٥ كم تقريبًا.

تدريبُ ٥-٢٢

بدأَ بالونٌ الحركةَ رأسيًا لأعلى، بسرعةٍ منتظمةٍ تساوي ٢م/ث، وبعدَ ١٠ ثوانٍ، انحرفَ باتجاهِ اليمينِ عنْ مسارِهِ الرأسيِّ بزاويةٍ قياسُها ٣٠°، وأكملَ حركتَهُ بخطٍ مستقيمٍ، جدِ المسافةَ بينَ البالونِ ونقطةِ انطلاقِهِ ، بعدَ ١٣ ثانيةً منْ بدءِ حركتِهِ .

الأسئلةُ ؟

١) حُلَّ المثلثَ أ ب جـ ، الذي فيه أ = ٥√ سم ، بَ = ٢سم ، جـَ٢ = ٣سم

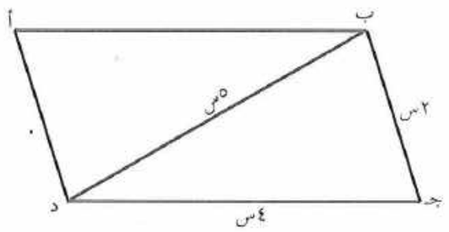
٢) جِدْ قياسَ الزاويةِ المنفرجةِ في المثلثِ س ص ع، الذي فيه سَ= ٣سم ، صَ = ٥سم و عَ = ٧سم.

٣) س ص ع، مثلثٌ فيه سَ = ٨سم ، صَ = ٧سم ، عَ = ٥سم، جِدْ مساحتَهُ.

٤) رصدتْ طائرةٌ تسيرُ باتجاهِ الجنوبِ في خطٍّ مستقيمٍ رأسيٍّ، فقطعتْ مسافةَ ٨٠كم، وبعدَ ذلكَ غيرتْ خطَّ سيرِها، حيثُ انحرفَتْ ٣٥° جنوبَ الشرقِ، وقطعتْ مسافةَ ٥٠كم أُخرى، جِدْ بعدَ الطائرةِ عن نقطةِ رصدِها أولَ مرةٍ.

٥) أبحرتْ سفينتانِ معًا منْ ميناءٍ واحدٍ، فسارتْ الأولى بسرعةِ ٢٠كم/ساعةٍ ، باتجاهِ ٣٨° شمالَ الغربِ، والثانيةُ بسرعةِ ١٥ كم/ساعةٍ، باتجاهِ ٢٢°جنوبَ الغربِ. فما البعدُ بينَ السفينتيْنِ بعدَ ساعةٍ منْ إبحارِهما ؟

٦) معتمدًا الشكلَ (٥-٣١) والذي يمثّلُ متوازيَ الأضلاعِ أ ب جـ د ، استخدمْ قانونَ جيوبِ التمامِ ؛ لإيجادِ قياساتِ زواياهُ الداخليةِ.



الشكلُ (٥-٣١)

أسئلةُ الوحدةِ

١) إذا كانَ جاهـ = $\frac{-١}{٢}$ ، ٢٧٠° < هـ < ٣٦٠°، فجدْ كلًّا منْ جتاهـ، ظاهـ، ظتاهـ، قاهـ، قتاهـ.

٢) جدْ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي :

أ) جا ١٢٠°　　ب) جتا ٢٦٦°　　جـ) ظا ٣١١°

د) قا ١٣٥°　　هـ) قتا ٢١٠°　　و) ظتا ٣٣٠°

٣) س ص ع، مثلثٌ فيه سَ = ١٠سم ، ق ∢ س = ٦٠° ، ق ∢ ص = ٤٠°، جِدْ:

أ) صَ　　ب) عَ　　جـ) ق ∢ ع

٤) جدْ قياسَ أصغرِ زاويةٍ في المثلثِ أ ب جـ، الذي فيه أَ = ٢سم ، بَ = ٣سم ، جَ = ٤سم.

٥) قالتْ زينبُ: (لا يمكنُ رسمُ المثلثِ أ ب جـ ، بحيثُ جَ = ٥سم ، بَ = ٢سم، ق ∢ ب = ٣٠°). ناقِشْ صحةَ هذهِ العبارةِ.

٦) أرادتْ جنَى أنْ تعيّنَ عرضَ نهرٍ يمرُّ أمامَ بنايةٍ ارتفاعُها ٥٠ مترًا، فوقفتْ على سطحِ بنايةٍ، ووجدتْ أنَّ قياسَ زاويةِ انخفاضِ النقطةِ (ب)، على الحافةِ القريبةِ للنهرِ ٥٠°، وأنَّ قياسَ زاويةِ انخفاضِ النقطةِ (جـ)المقابلةِ للنقطةِ (ب)، على الحافةِ البعيدةِ ٣٠°، إذا علمتَ أنَّ (ب) ، (جـ) ، وقاعدةَ البنايةِ (أ)، على استقامةٍ واحدةٍ، فما عرضُ النهرِ؟

٧) قيسَ طولُ ظلِّ مئذنةٍ على أرضٍ أفقيةٍ ، عندَما كانتْ زاويةُ ارتفاعِ الشمسِ ٣٠°، ثمَّ قِيسَ طولُ الظلِّ، عندَما كانتْ زاويةُ ارتفاعِ الشمسِ ٦٠°، فكانَ الفرقُ بينَ طولَيِ الظليْنِ ٣٠م، جِدِ ارتفاعَ المئذنةِ.

٨) هلْ يوجدُ حلٌّ وحيدٌ لمثلثٍ، إذا عُلِمَ قياسُ زواياهُ الثلاثِ فقط؟ برِّرْ إجابَتَكَ.

٩) طولُ عقربِ الساعاتِ في ساعةِ حائطٍ ١٢سم ، وطولُ عقربِ الدقائقِ ١٦سم ، جِدِ المسافةَ بينَ رأسَيِ العقربيْنِ ، عندَما يشيرانِ إلى الساعةِ الثالثةِ تمامًا .

١٠) في الوضعِ القياسيِّ، إذا قطعَ ضلعُ انتهاءِ زاويةٍ قياسُها (هـ)، دائرةَ الوحدةِ في نقطةٍ إحداثيّاها $(\frac{١}{\sqrt{٢}}، \frac{-١}{\sqrt{٢}})$ ، فجِدْ:

أ) جاهـ　　ب) جتاهـ　　جـ) ظاهـ

د) ظتاهـ　　هـ) قاهـ　　و) قتاهـ

١١)إذا كانتْ هـ = ١٧٠°، فحدّدْ إشارةَ كلٍّ منَ النسبِ المثلثيةِ الآتيةِ:

أ) ظتاهـ　　ب) قاهـ　　جـ) قتاهـ

١٢) جِدْ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتِي:

أ) جا ٦٥°　　ب) جتا ١٥٠°　　جـ) قتا ٢٧٠°　　د) ظتا ٣٠٠°

١٣) بيّنْ أنّهُ لأيِّ زاويةٍ قياسُها هـ ، يكونُ قا٢هـ − ١ = ظا٢هـ

١٤) إذا كانتْ هـ زاويةً حادةً ، وكانَ جا هـ =٠,٨ فجِدْ كلًا ممّا يأتِي:

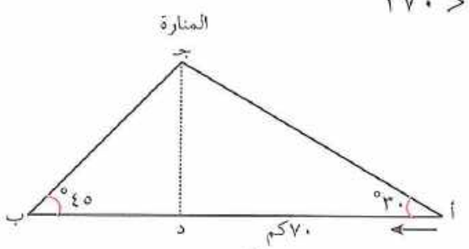
أ) جا (١٨٠° − هـ)　　ب) جا (١٨٠° + هـ)　　جـ) جا (٣٦٠° − هـ)

١٥) جِدْ قيمةَ (قِيَمَ) الزاويةِ (هـ) لأقربِ دقيقةٍ ، في كلٍّ منَ الحالاتِ الآتيةِ:

أ) جاهـ = −٠,٩٩٦٢ ، ١٨٠° < هـ < ٢٧٠°

ب) ظتاهـ = −٢ ، ٠° < هـ < ٢٧٠°

١٦) رصدَ قبطانُ سفينةٍ تسيرُ بخطٍّ مستقيمٍ نحوَ الغربِ منارةً، فوجدَها باتجاهِ ٣٠° شمالَ الغربِ، وبعدَ أنْ سارَ ٧٠ كم، وجدَ أنَّ المنارةَ أصبحتْ على اتجاهِ ٤٥° شمالَ الشرقِ، جِدْ بُعْدَ المنارةِ عَنْ خطِّ سيرِ السفينةِ.



الشكلُ (٥-٣٢)

١٧) مثلثٌ متطابقِ الضلعيْنِ، طولُ كلٍّ مِنْ ضلعيْهِ ٣٠سم ، وقياسُ زاويةِ رأسِهِ ٤٠° ، جِدْ:

أ) طولَ قاعدةِ المثلثِ.　　ب) ارتفاعَ المثلثِ.

الوحدةُ السادسةُ

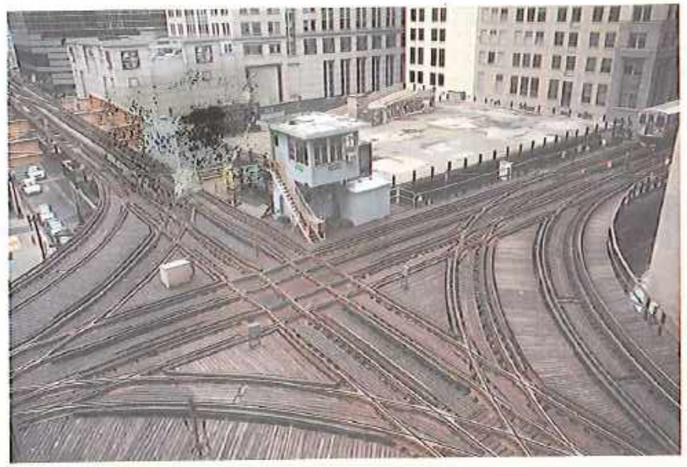
٦

الهندسةُ التحليليةُ والفضائيةُ

الهندسةُ التحليليةُ فرعٌ من فروعِ الرياضياتِ، يقومُ أساسًا على ربطِ مفاهيمِ الجبرِ بمفاهيمِ الهندسةِ، والأشكالِ الهندسيةِ وخصائصِها والعلاقاتِ بينَها، ممّا يتيحُ التعبيرَ عنِ الأعدادِ والمقاديرِ الجبريةِ هندسيًا، ويفتحُ المجالَ واسعًا أمامَ الفكرِ الإنسانيِّ؛ للإبحارِ في عالمِ المعرفةِ الرياضيّةِ، المبنيةِ على التسلسلِ المنطقيِّ للأفكارِ، والعملياتِ الرياضيةِ، وتطويرِ القدراتِ العقليةِ والمعرفيةِ. فالهندسةُ بشكلٍ عامٍّ، محلُّ اهتمامِ العلماءِ وإبداعِهم منذُ القدمِ، وحتّى يومِنا هذا، وهيَ مقدمةٌ لعلومٍ رياضيةٍ مهمةٍ، كالتفاضلِ والتكاملِ وغيرِهما.

أمّا الهندسةُ الفضائيةُ، فتُعنى بالخصائصِ، والمبرهناتِ، والتطبيقاتِ الهندسيةِ، في الفراغِ ثلاثيِّ الأبعادِ، والمجسماتِ.

Spatial and Analytical Geometry



يتوقعُ منَ الطالبِ بعدَ نهايةِ هذهِ الوحدةِ، أن يكونَ قادرًا على:

- تحديدِ المستقيماتِ المتوازيةِ والمتعامدةِ، والعلاقةِ بينَ مَيليْهِما.
- إيجادِ البعدِ بينَ نقطةٍ معلومةٍ، ومستقيمٍ معلومٍ، والبعدِ بينَ مستقيميْنِ متوازييْنِ في المُستوى.
- إثباتِ صحةِ بعضِ الخصائصِ الهندسيةِ للمثلثِ، ومتوازي الأضلاعِ، باستخدامِ الهندسةِ التحليليةِ وتطبيقاتِها.
- تعرّفِ مسلماتِ الهندسةِ الفضائيةِ.
- تعرّفِ أوضاعِ المستقيماتِ والمستوياتِ في الفضاءِ.

ميلُ $\overleftrightarrow{و\,ل} = \frac{-٣}{١٣}$

بما أنَّ م١ × م٢ =

أيْ أنَّ الزاويةَ ن و

تدريبُ ٦-٤

إذا كانتْ أ (٤،

تدريبُ ٦-٥

حُلَّ المسألةَ الوا

تدريبُ ٦-٢

يبينُ الشكلُ (٦-
برهنْ أنّ مَيليْهِما

مثالُ (٦-١)

إذا كانَ أ (١، ٥)

الحلُّ

أ(١، ٥)، ب (٤
ميلُ $\overleftrightarrow{أ ب} = \frac{ص_٢}{س_٢}$
جـ (-٤ ، -٨)،
ميلُ $\overleftrightarrow{جـ د} = \frac{ص_٤}{س_٤}$
بما أنَّ $م_١ = م_٢$ ،

تدريبُ ٦-٣

إذا كانَ أ (١، ٣)
مُتوازيُ أضلاعٍ.

مثالُ (٦-٢)

إذا كانَ ن (١، -

الحلُّ

ميلُ $\overleftrightarrow{ن و} = \frac{١ - (}{-٣}$

الأسئلةُ

١) إذا كانَ $\overleftrightarrow{ل} // \overleftrightarrow{و}$ ، $\overleftrightarrow{ك} \perp \overleftrightarrow{و}$، وكانَ المستقيمُ $\overleftrightarrow{و}$ يمرُّ بالنقطتيْنِ أ (١، -٢)،ب (٤، -١٤)، فجدْ ميلَ كلٍّ منَ المستقيميْنِ : $\overleftrightarrow{ل}$، $\overleftrightarrow{ك}$.

٢) إذا كانَ أ (٢، ٢)، ب (٤، ٦)، جـ (ع، ٥)، د (-١، ٢)، فجدْ قيمةَ الثابتِ ع في كلٍّ منَ الحالتيْنِ الآتيتيْنِ:

أ) $\overleftrightarrow{أ ب} // \overleftrightarrow{جـ د}$ ب) $\overleftrightarrow{أ ب} \perp \overleftrightarrow{جـ د}$

٣) أ) جدْ قياسَ زاويةِ ميلِ المستقيمِ $\overleftrightarrow{ل}$، المارِّ بالنقطتيْنِ أ (٤ ، -٥)، ب (٧، -٨).

ب) جدْ قياسَ زاويةِ ميلِ المستقيمِ $\overleftrightarrow{ك}$، الذي يعامدُ المستقيمَ $\overleftrightarrow{ل}$.

٤) أ) بيّنْ أنَّ المستقيمَ الذي معادلتُهُ: ص= ٢س + ٥، يوازي المستقيمَ الذي معادلتُهُ: ٣ص - ٦س = ٠

ب) بيّنْ أنَّ المستقيمَ الذي معادلتُهُ : ص + ٣س =٥، يعامدُ المستقيمَ الذي معادلتُهُ: ٦ص = ٢س -١

٥) إذا كانتِ النقاطُ هـ (٢، -١)، و (٤، -٣)، ن (ف، ٥) رؤوسَ مثلثٍ قائمِ الزاويةِ في و، فما قيمةُ الثابتِ ف؟

٦) إذا كانتْ أ (٤، ٣)، ب (١، ٢)، جـ (٠، -١)، د (٣، ٠) نقاطًا في المُستوى الإحداثيِّ:

أ) بيّنْ أنَّ الشكلَ الرباعيَّ أ ب جـ د متوازي أضلاعٍ.

ب) بيّنْ أنَّ قُطْرَيِ الشكلِ الرباعيِّ أ ب جـ د متعامدانِ.

جـ) هلْ أ ب جـ د معينٌ؟ برّرْ إجابَتَكَ.

٧) أ) جِدْ ميلَ المستقيمِ الذي معادلتُهُ : ص = ٥س + ٧

ب) جِدْ ميلَ المستقيمِ الذي معادلتُهُ : ٣س - ٢ص + ٥ = ٠

جـ) جِدْ ميلَ المستقيمِ الذي معادلتُهُ : ص = -٥ .

د) جِدْ ميلَ المستقيمِ الذي معادلتُهُ : س = ٧ .

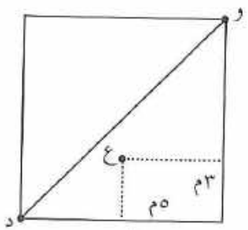
٨) هلِ المستقيمانِ اللذانِ معادلتاهُما : ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٢ ، ص = ٢س + $\frac{١}{٢}$ متوازيانِ؟ متعامدانِ؟ برّرْ إجابَتَكَ.

٩) جِدْ معادلةَ المستقيمِ الذي يمرُّ بالنقطةِ (١، ٤)، ويُوازي المستقيمَ الذي معادلتُهُ: ص = ٣س - ٢ .

١٠) إذا كانتْ أ(٠ ،٠)، ب(١، ٣)، جِدْ معادلةَ المستقيمِ الذي يعامدُ $\overleftrightarrow{أ ب}$، ومقطعُهُ الصاديُّ يُساوي ٥.

ثانيًا البعدُ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ The Distance between a Point and a Line

الشكلُ (٦–٥) يبينُ حديقةً مربعةَ الشكلِ، طولُ ضلعِها ١٠م، يتوسطُها أنبوبُ المياهِ الواصلِ بينَ الرأسيْنِ د، و، الموقعُ (ع) يمثلُ موقعَ صنبورِ ماءٍ، جِدْ أقصرَ أنبوبٍ نصلُ بوساطتِهِ صنبورَ الماءِ ع بالأنبوبِ (د و).



الشكلُ (٦–٥).

تذكَّرْ

– إذا كانتِ النقطتانِ أ (س١ ، ص١)، ب (س٢ ، ص٢)، فإنَّ:

أ) المسافةَ بينَ النقطتيْنِ أ(س١ ، ص١)، ب(س٢ ، ص٢) تُعطَى بالقاعدةِ:

$$أ ب = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

ب) نقطةَ منتصفِ القطعةِ المستقيمةِ $\overline{أ ب}$ هيَ $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$

– الصورةُ العامةُ لمعادلةِ المستقيمِ هيَ: أس + ب ص + جـ = صفرًا

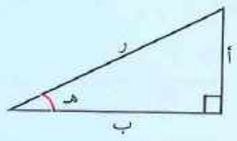
حيثُ أ، ب ≠ صفرًا في آنٍ معًا.

– بعدُ نقطةٍ عنْ مستقيمٍ، هيَ أقصرُ مسافةٍ بينَ النقطةِ والمستقيمِ، وهيَ المسافةُ العموديةُ بينَ النقطةِ والمستقيمِ.

– في المثلثِ القائمِ الزاويةِ في الشكلِ (٦–٦):

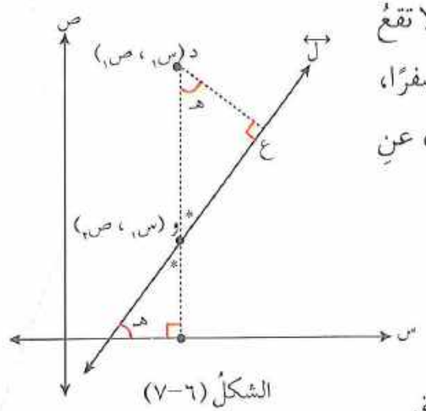
$$جا هـ = \frac{أ}{ر} ، جتا هـ = \frac{ب}{ر} ، ظا هـ = \frac{أ}{ب}$$

$$ر = \sqrt{أ^٢ + ب^٢}$$



الشكلُ (٦–٦).

لتكنِ النقطةُ د (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) نقطةً في المستوى الإحداثيِّ، لا تقعُ على المستقيمِ $\overleftrightarrow{ل}$ الذي معادلتُهُ: أس + ب ص + جـ = صفرًا، (أ، ب ≠ صفرًا في آنٍ معًا)، نُريدُ إيجادَ بُعدِ النقطةِ د، عنِ المستقيمِ $\overleftrightarrow{ل}$ ، كما في الشكلِ (٦–٧).



الشكلُ (٦–٧)

يمكنُ كتابةُ معادلةِ المستقيمِ $\overleftrightarrow{ل}$ على الصورةِ

ص = $\frac{-أ}{ب}$ س – $\frac{جـ}{ب}$

ميلُ المستقيمِ ل ، يساوي معاملَ س في المعادلةِ السابقةِ.

ميلُ المستقيمِ $\overleftrightarrow{ل}$ = $\frac{-أ}{ب}$

$\overleftrightarrow{د ع} \perp \overleftrightarrow{ل}$

بُعدُ النقطةِ د عنْ $\overleftrightarrow{ل}$ = د ع

النقطةُ (و) نقطةُ تقاطعِ العمودِ النازلِ مِنْ د على محورِ السيناتِ معَ ل، فتكونُ و(س$_{١}$، ص$_{٢}$) لماذا؟

النقطةُ و ، تقعُ على المستقيمِ $\overleftrightarrow{ل}$ ، فتحققُ معادلتَهُ.

فيكونُ: أ س$_{١}$ + ب ص$_{٢}$ + جـ = ٠

ومنهُ: ص$_{٢}$ = $\frac{-أس_{١} - جـ}{ب}$

لكنّ: د و = ص$_{١}$ – ص$_{٢}$ التبريرُ:.....

إذنْ: د و = ص$_{١}$ – $\frac{-أس_{١} - جـ}{ب}$

د و = ص$_{١}$ + $\frac{أس_{١} + جـ}{ب}$

منَ المثلثِ د ع و القائمِ الزاويةِ في ع:

د ع = |دو × جتاهـ|، حيثُ (هـ) زاويةُ ميلِ المستقيمِ $\overleftrightarrow{ل}$. التبريرُ:.....

لكنَّ ميلَ المستقيمِ ل = ظا هـ = $\frac{-أ}{ب}$ التبريرُ:.....

فيكونُ |جاهـ| = $\left|\frac{أ}{\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}}}\right|$ ، |جتاهـ| = $\left|\frac{ب}{\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}}}\right|$ التبريرُ:.....

إذنْ: د ع = $\left|(ص_١ + \frac{أس_١ + جـ}{ب}) \times \frac{ب}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}\right|$ التبريرُ: .....

د ع = $\left|\frac{ب ص_١ + أس_١ + جـ}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}\right|$

نتيجةٌ

بُعْدُ النقطةِ د (س$_١$ ، ص$_١$) عنِ المستقيمِ $\overleftrightarrow{ل}$ ، الذي معادلتُهُ : أس + ب ص + جـ = ٠ يساوي $\left|\frac{أس_١ + ب ص_١ + جـ}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}\right|$ حيثُ أ ، ب ≠ صفرًا في آن معًا.

مثالُ (٦-٣)

جِدْ بُعدَ النقطةِ (٢، −٤)، عنِ المستقيمِ الذي معادلتُهُ: ٣س + ٤ص −٥ = ٠

الحلُّ

النقطةُ (٢، −٤): س$_١$ = ٢، ص$_١$ = −٤

معادلةُ المستقيمِ ٣س + ٤ص −٥ = ٠ : أ = ٣ ، ب = ٤ ، جـ = −٥

بتطبيقِ القاعدةِ، بُعدُ النقطةِ عنِ المستقيمِ = $\left|\frac{أس_١ + ب ص_١ + جـ}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}\right|$

$= \left|\frac{٣(٢) + ٤(-٤) - ٥}{\sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢}}\right|$

$= \left|\frac{-١٥}{\sqrt{٢٥}}\right|$ = ٣ وحداتٍ .

تدريبُ ٦-٦

جِدْ بُعدَ النقطةِ د (−١ ، ٤)، عنِ المستقيمِ الذي معادلتُهُ: ٥ص = ١٢س + ٧

مثالٌ (٦-٤)

جِدِ البعدَ بينَ المستقيمَيْنِ اللذيْنِ معادلتاهُما: ص = ٢س + ٥، ٤س - ٢ص = ٧

الحلُّ

معادلةُ المستقيمِ الأولِ: ص = ٢س + ٥ ، وميلُهُ = (معاملُ س) ويُساوي ٢

معادلةُ المستقيمِ الثاني: ص = ٢س $-\frac{٧}{٢}$ ، وميلُهُ = (معاملُ س) ويُساوي ٢ أيضًا.

إذنْ: المستقيمانِ متوازيانِ، لماذا؟

لإيجادِ البعدِ بينَ المستقيمَيْنِ المتوازيَيْنِ، نجدُ إحداثيَّيْ نقطةٍ على أَحدِهِما، ثُمَّ نجدُ بُعدَ هذهِ النقطةِ عنِ المستقيمِ الآخرِ.

في معادلةِ المستقيمِ الأولِ: ص = ٢س + ٥، خُذْ س = ٠ (مثلًا)، فتكونُ: ص = ٥

النقطةُ(٠، ٥) تقعُ على المستقيمِ الأولِ.

بُعدُ النقطةِ (٠، ٥) عنِ المستقيمِ الثاني الذي معادلتُهُ: (٤س - ٢ص - ٧ = ٠) يُساوي

$$\frac{|٤(٠) - ٢(٥) - ٧|}{\sqrt{(٤)^٢ + (-٢)^٢}} = \frac{١٧}{\sqrt{٢٠}}$$

فيكونُ البعدُ بينَ المستقيمَيْنِ = $\frac{١٧}{\sqrt{٢٠}}$ وحدة.

تدريبٌ ٦-٧

جِدِ البعدَ بينَ المستقيمَيْنِ المتوازيَيْنِ $\overleftrightarrow{ل}$، $\overleftrightarrow{ك}$ حيث:

$\overleftrightarrow{ل}$: ٣س - ٤ص = ١٢

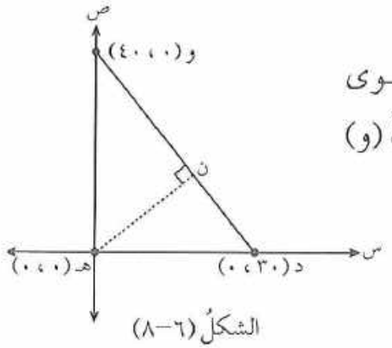
$\overleftrightarrow{ك}$: ٨ص - ٦س = ١٥

مثالٌ (٦-٥)

بلدةُ (د)، تقعُ على بُعدِ ٣٠كم، شرقَ محطةِ البترولِ (هـ)، بينَما تقعُ بلدةُ (و) على بعدِ ٤٠كم، شمالَ محطةِ البترولِ (هـ). يصلُ بينَ البلدتينِ طريقٌ مستقيمٌ، جِدْ أقصرَ مسافةٍ بينَ محطةِ البترولِ وهذهِ الطريقِ.

الحلُّ

يمكنُ افتراضُ محطةِ البترولِ (هـ) نقطةَ الأصلِ في المستوى الإحداثيِّ، فتكونُ البلدةُ (د) عندَ النقطةِ (٣٠ ، ٠)، والبلدةُ (و) عندَ النقطةِ (٠ ، ٤٠)، كما في الشكلِ (٦–٨)



الشكلُ (٦–٨)

تمثلُ الطريقُ بالقطعةِ المستقيمةِ $\overline{\text{د و}}$.

أقصرُ مسافةٍ بينَ محطةِ البترولِ والطريقِ، هيَ بُعدُ نقطةِ الأصلِ (٠ ، ٠) عنِ المستقيمِ $\overleftrightarrow{\text{د و}}$.

نجدُ معادلةَ المستقيمِ $\overleftrightarrow{\text{د و}}$:

د (٣٠ ، ٠)، و (٠ ، ٤٠)

ميلُ $\overleftrightarrow{\text{د و}}$ = م = $\frac{٠ - ٤٠}{٣٠ - ٠} = \frac{-٤}{٣}$ التبريرُ:.....

معادلةُ $\overleftrightarrow{\text{د و}}$ هيَ: ص − ٠ = $\frac{-٤}{٣}$ (س − ٣٠) التبريرُ:.....

٤س + ٣ص − ١٢٠ = ٠

بعدُ النقطةِ هـ (٠ ، ٠) عنِ المستقيمِ $\overleftrightarrow{\text{د و}}$ يُساوي $\left|\frac{٤(٠) + ٣(٠) - ١٢٠}{\sqrt{(٤)^٢ + (٣)^٢}}\right| = \frac{١٢٠}{٥} = ٢٤$

إذن : أقصرُ مسافةٍ بينَ محطةِ البترولِ والطريقِ = هـ ن = ٢٤ كم.

تدريبُ ٦–٨

حُلَّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ.

فكّرْ وناقشْ

جدْ بعدَ النقطةِ (٥،–٤) عن محورِ السِّيناتِ.

الأسئلةُ ؟

١) جِدْ بُعدَ النقطةِ (−٥ ، ٤)، عنِ المستقيمِ الذي معادلتُهُ : ص = ١٢

٢) جِدْ بُعدَ النقطةِ (٣ ، −٧)، عنِ المستقيمِ الذي معادلتُهُ : س = −٩

٣) جِدْ بُعدَ النقطةِ (−٥ ، ٤)، عنِ المستقيمِ الذي معادلتُهُ : ٨ص + ١ = −١٥س

٤) جِدْ بُعدَ النقطةِ (٣ ، ٠)، عنِ المستقيمِ الذي معادلتُهُ : ٣س + ٥ص = ٩

٥) جِدْ بُعدَ النقطةِ (٦ ، −١)، عنِ المستقيمِ المارِّ بالنقطةِ (١ ، −٢)، وميلُهُ يساوي $\frac{٣}{٥}$

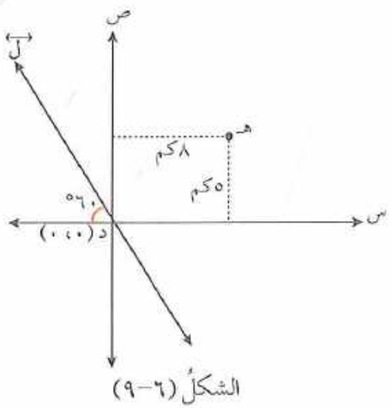
٦) جِدْ بُعدَ النقطةِ (٥ ، ١) عنِ المستقيمِ المارِّ بالنقطتيْنِ (٢ ، ٠)، (٤ ، −٦)

٧) جِدْ البُعدَ بينَ المستقيمَيْنِ المتوازييْنِ $\overleftrightarrow{ل}$: ٦س = ٨ص + ٣ ، $\overleftrightarrow{ك}$: ٤ص = ٣س − ٥

٨) إذا كانتْ أ (٤ ، ٠)، ب (٥ ، −٣)، جـ (−١ ، −٢)، فجِدْ مساحةَ المثلثِ أ ب جـ

٩) جِدْ جميعَ قِيَمِ الثابتِ ن ، التي تجعلُ بُعدَ النقطةِ (٣ ، ن) عنِ المستقيمِ الذي معادلتُهُ:
٥س + ١٢ص = −٣٥ يساوي ٢ وحدة.

١٠) يبينُ الشكلُ (٦−٩) المستقيمَ ل، الذي يمثلُ سكةَ حديدٍ، والنقطةَ هـ ، التي تمثلُ محطةَ حافلاتٍ، جِدْ بُعدَ المحطةِ هـ عنْ سكةِ الحديدِ.



الشكلُ (٦−٩)

١١) استخدمِ الهندسةَ التحليليةَ ، في إثباتِ أنَّ مركزَ الدائرةِ التي تمرُّ برؤوسِ مثلثٍ قائمِ الزاويةِ، يقعُ في منتصفِ الوترِ.

١٢) استخدمِ الهندسةَ التحليليةَ، في إثباتِ أنَّ قياسَ الزاويةِ المحيطيةِ المقابلةِ لقطرِ الدائرةِ، يساوي ٩٠°.

١٣) أثبتْ أنَّ منتصفاتِ أضلاعِ الشكلِ الرباعيِّ، تمثلُ رؤوسَ مُتوازي أضلاعٍ .

١٤) إذا كانتْ أ(٠ ، ٠)، ب(٣ ، ٥)، جـ(٩ ، −٥)، أثبتْ أنَّ المستقيماتِ المتوسطةِ للمثلثِ أ ب جـ، تتقاطعُ في نقطةٍ وحيدةٍ.

الفصلُ الثّاني

خصائصُ الأشكالِ الهندسيةِ

Figures Properties

النتاجاتُ

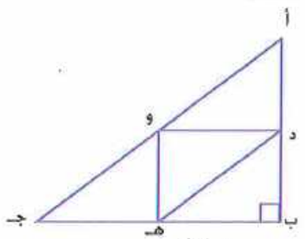
- تثبتُ مبرهناتٍ تتعلقُ بالمثلثِ.
- تحلُّ مسائلَ هندسيةً تتعلقُ بالمثلثِ.
- تحلُّ مسائلَ حياتيةً على المثلثِ.
- تثبتُ خصائصَ تتعلقُ بكلٍّ منْ متوازي الأضلاعِ وشبهِ المنحرفِ.
- تحلُّ مسائلَ على متوازي الأضلاعِ.

أولًا خصائصُ المثلثِ (١) Triangle Properties (1)

الشكلُ (٦–١٠) يبينُ المثلثَ أ ب جـ، قائمَ الزاويةِ في ب، فيهِ أب = ١٢سم، أجـ = ٢٠سم، النقاطُ د، هـ، و، منتصفاتُ الأضلاعِ $\overline{أب}$ ، $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{أجـ}$ على التّوالي .

١) جدْ محيطَ المثلثِ د هـ و.

٢) ما نوعُ المثلثِ د هـ و منْ حيثُ زواياهُ؟ برّرْ إجابَتَكَ .



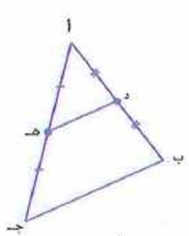
الشكلُ (٦–١٠)

مبرهنةٌ

طولُ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ منتَصفيْ ضلعيْنِ في المثلثِ، يُساوي نصفَ طولِ الضلعِ الثالثِ.

يبينُ الشكلُ (٦–١١)، المثلثَ أ ب جـ، فيهِ د، هـ منتصَفا الضلعيْنِ $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ على التوالي، يكونُ طولُ القطعةِ المستقيمةِ $\overline{دهـ}$ = نصفَ طولِ الضلعِ $\overline{ب جـ}$

أيْ أنَّ: د هـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ



الشكلُ (٦–١١)

١- المعطياتُ

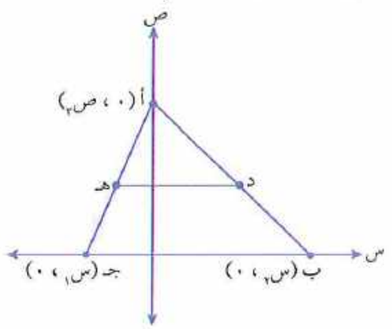
أ ب جـ مثلثٌ، فيهِ النقطتانِ د، هـ منتصفا الضلعيْنِ $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ على التوالِي.

٢- المطلوبُ

إثباتُ أنَّ دهـ $= \frac{١}{٢}$ ب جـ

٣- البرهانُ

يمكنُ اختيارُ نظامِ الإحداثياتِ في المستوى، بحيثُ ينطبقُ أحدُ أضلاعِ المثلثِ (وليكنْ ب جـ)، على محورِ السيناتِ، ويقعُ الرأسُ (أ) على محورِ الصاداتِ، كما في الشكلِ(٦-١٢).



الشكلُ (٦-١٢)

د $\left(\frac{س_٢}{٢} ، \frac{ص_٣}{٢}\right)$ التبريرُ:.....

هـ $\left(\frac{س_١}{٢} ، \frac{ص_٣}{٢}\right)$ التبريرُ:.....

ب جـ $= \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (٠ - ٠)^٢}$

$= |س_٢ - س_١| = س_٢ - س_١$

د هـ $= \sqrt{\left(\frac{س_٢}{٢} - \frac{س_١}{٢}\right)^٢ + \left(\frac{ص_٣}{٢} - \frac{ص_٣}{٢}\right)^٢}$

$= \sqrt{\frac{(س_٢ - س_١)^٢}{٤}}$

$= \frac{١}{٢} |س_٢ - س_١| = \frac{١}{٢} (س_٢ - س_١) = \frac{١}{٢}$ ب جـ (وهو المطلوب)

مثالُ (٦-٦)

أ ب جـ مثلثٌ، فيهِ ب (٢ ، ٥)، جـ (-٦ ، ١١)، جِدْ طولَ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ منتصفَيِ الضلعيْنِ $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$.

الحلُّ

طولُ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ منتصفَيِ الضلعيْنِ $\overline{أب}$، $\overline{أجـ}$ = نصفَ ب جـ

$= \frac{١}{٢} \sqrt{(-٦ - ٢)^٢ + (١١ - ٥)^٢}$

$= \frac{١}{٢} \times ١٠ = ٥$ وحداتٍ.

تدريبُ ٦-٩

برهنْ أنَّ القطعةَ المستقيمةَ الواصلةَ بينَ منتصفَيْ ضلعيْنِ في المثلثِ، توازي الضلعَ الثالثَ.

تدريبُ ٦-١٠

م ن ل مثلثٌ، فيهِ م (٣ ، ٥)، ن(٧ ، ٣)، ل(−١، −٢)

١) جِدْ طولَ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ منتصفَيْ $\overline{\text{م ل}}$ ، $\overline{\text{ن ل}}$.

٢) بيّنْ أنَّ القطعةَ الواصلةَ بينَ منتصفَيْ $\overline{\text{م ن}}$ ، $\overline{\text{م ل}}$ توازِي $\overline{\text{ن ل}}$.

تدريبُ ٦-١١

أ ب جـ، مثلثٌ متطابقُ الأضلاعِ، د منتصفُ $\overline{\text{أب}}$، هـ منتصفُ $\overline{\text{أجـ}}$، أثبتْ أنَّ مساحةَ المثلثِ أ د هـ، تساوي مساحةَ المثلثِ جـ د هـ .

الأسئلة ؟

١) هـ و ع مثلثٌ فيهِ هـ(٠، −٥)، و(−٤، ٧)، جدْ طولَ القطعةِ الواصلةِ بينَ منتصفَيْ $\overline{ع هـ}$، $\overline{ع و}$.

٢) أ ب جـ مثلثٌ فيهِ د، هـ منتصفُ $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ على التوالي، حيثُ د (٩، ٥)، هـ (−١، ٢)، جِدْ ميلَ $\overleftrightarrow{ب جـ}$.

٣) حلَّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ.

٤) أ ب جـ، مثلثٌ قائمُ الزاويةِ في ب، د منتصفُ $\overline{أب}$، هـ منتصفُ $\overline{ب جـ}$، إذا كانَ ب هـ =٢ د ب، وكانَ أجـ = $\sqrt{٥}$،٦ ، فجدْ كلًّا منْ أب، ب جـ.

٥) في المثلثِ المتطابقِ الضلعيْنِ، أثبتْ أنَّ القطعةَ المستقيمةَ الواصلةَ بينَ رأسِ المثلثِ ومنتصفِ القاعدةِ تُعامِدُها.

٦) أ ب جـ مثلثٌ، م، ن، ل منتصفاتُ أضلاعِهِ، أثبتْ أنَّ $\overline{م ن}$، $\overline{ن ل}$، $\overline{م ل}$ تقسمُ المثلثَ أ ب جـ إلى أربعةِ مثلثاتٍ متطابقةٍ.

٧) أ ب جـ مثلثٌ ، م، ن، ل منتصفاتُ أضلاعِهِ، د ، و ، هـ منتصفاتُ أضلاعِ المثلثِ م ن ل ،إذا كانتْ مساحةُ المثلثِ د و هـ تُساوي ٥ سم^{٢}، فما مساحةُ المثلثِ أ ب جـ؟

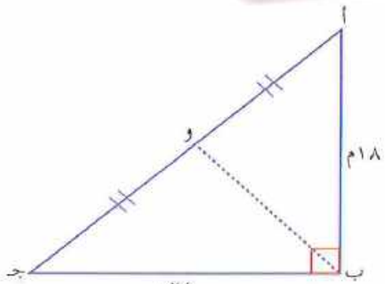
٨) أ ب جـ مثلثٌ قائمُ الزاويةِ في ب ، النقطةُ د منتصفُ $\overline{أب}$، النقطةُ هـ منتصفُ $\overline{أجـ}$:

أ) أثبتْ أنَّ الشكلَ د ب جـ هـ شبهُ منحرفٍ.

ب) إذا كانتْ ب جـ =١٠سم، ومساحةُ د ب جـ هـ =٢٤ سم^{٢}، فجِدْ مساحةَ المثلثِ أ ب جـ .

ثانيًا خصائصُ المثلثِ (٢) Triangle Properties (2)

الشكلُ (٦–١٣) يبيّنُ حديقةً مثلثةَ الشكلِ، فيها الزاويةُ أ ب جـ قائمةٌ،يريدُ صاحبُها أنْ يزرعَ شجرةً، في منتصفِ الضلعِ أجـ، ويصلَها بأنبوبٍ مستقيمٍ بالصنبورِ الموجودِ عندَ النقطةِ ب، ما طولُ هذا الأنبوبِ؟



الشكلُ (٦–١٣)

نشاطُ (٦ – ٢)

١) ارسمِ المستوى الإحداثيَّ، وحددْ عليهِ النقاطَ أ (٢، –٢)، ب (٦، –٢)، جـ (٦، ١).

٢) ارسمِ المثلثَ أ ب جـ، ما نوعُ المثلثِ أ ب جـ منْ حيثُ زواياهُ؟

٣) جدْ إحداثيّيْ نقطةِ منتصفِ $\overline{\text{أجـ}}$، وحدّدْهَا على المستوى الإحداثيِّ، ولتكنِ النقطةُ د.

٤) ارسمْ $\overline{\text{ب د}}$.

٥) جدْ كلًّا منْ أجـ ، ب د، ماذا تلاحظُ؟

مبرهنةٌ

في المثلثِ القائمِ الزاويةِ، طولُ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ رأسِ الزاويةِ القائمةِ ومنتصفِ الوترِ يساوي نصفَ طولِ الوترِ.

١– المعطياتُ

أ ب جـ، مثلثٌ قائمُ الزاويةِ في ب، النقطةُ د منتصفُ الوترِ أجـ.

٢– المطلوبُ

إثباتُ أنَّ: ب د $= \frac{١}{٢}$ أجـ

٣- البرهانُ

يمكنُ اختيارُ نظامِ الإحداثياتِ في المُستوى، بحيثُ ينطبقُ الرأسُ ب على نقطةِ الأصلِ، وضلعا الزاويةِ القائمةِ ب أ، ب جـ ، على محورَيِ السيناتِ والصاداتِ على التوالي، كما في الشكلِ (٦-١٤).

إحداثياتُ النقطةِ د (.....، .....)

أجـ =.....

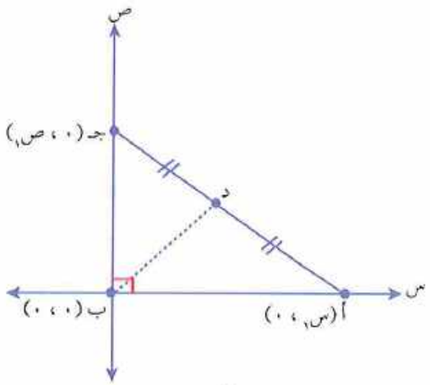
أجـ =.....

ب د =.....

ب د =.....

ب د = ... × √.....

ب د = $\frac{١}{٢}$ × أجـ .



الشكلُ (٦-١٤)

تدريبُ ٦-١٢

قالتْ حنانُ: "في الشكلِ (٦-١٤)، النقطةُ د هيَ مركزُ الدائرةِ المارةِ برؤوسِ المثلثِ أ ب جـ" هلْ تتفقُ معَ حنانَ في ذلكَ؟ برِّرْ إجابَتَكَ .

مثالٌ (٦-٧)

أ ب جـ، مثلثٌ قائمُ الزاويةِ في ب، د منتصفُ أجـ ، إذا كانتْ ب (٢، ٦)، د (-١، ١٠)، فجدْ طولَ أ جـ.

الحلُّ

ب د = نصفُ طولِ الوترِ أجـ ،إذنْ:

أجـ = ٢ ب د

= ٢√(-١ - ٢)^{٢} + (١٠ - ٦)^{٢}

= ٢ (٥) = ١٠ وحداتٍ.

تدريبٌ ٦-١٣

م ن ل، مثلثٌ قائمُ الزاويةِ في ن، ب منتصفُ $\overline{\text{م ل}}$، حيثُ ن (−٣، ٤)، ب(٩، −١)، جِدْ طولَ $\overline{\text{م ل}}$.

الأسئلةُ ؟

١) ك ل و، مثلثٌ قائمُ الزاويةِ في ل، ك ل= ٥سم، ول= ٧سم، س منتصفُ الوترِ $\overline{ك و}$، جدْ طولَ س ل .

٢) إذا كانتْ أ (٥، ٣)، ب (٣، ٢)، جـ (٤، ٠):

أ) أثبتْ أنَّ المثلثَ أب جـ، مثلثٌ قائمُ الزاويةِ (بأكثرَ منْ طريقةٍ).

ب) جدْ طولَ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ رأسِ الزاويةِ القائمةِ، ومنتصفِ الوترِ.

٣) حلَّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ.

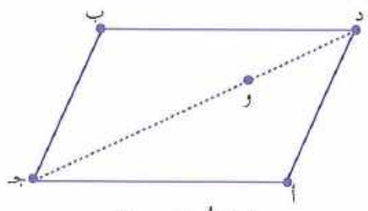
٤) أ ب جـ مثلثٌ، فيهِ $\overline{أد}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ في النقطةِ د، هـ منتصفُ أب، حيثُ د (٢، ٥)، هـ (٣، ٩)، جدْ طولَ أب.

٥) أ ب جـ، مثلثٌ قائمُ الزاويةِ في ب، د منتصفُ $\overline{أجـ}$، إذا كانَ طولُ $\overline{ب د}$، يساوي مثلَيْ طولِ $\overline{أب}$، جِدْ جيبَ تمامِ الزاويةِ أ جـ ب.

٦) استخدمِ الهندسةَ التحليليةَ، في إثباتِ أنَّهُ إذا تعامدَ قطرا مستطيلٍ، فإنهُ يكونُ مربّعًا.

ثالثًا خصائصُ متوازي الأضلاعِ Parallelogram Properties

الشكلُ (٦– ١٥) يبينُ ورقةً على شكلِ مُتوازي أضلاعٍ، نريدُ تحديدَ نقطةٍ (مثلِ و) على القطرِ دجـ، بحيثُ يكونُ بُعداها عنْ كلٍّ منَ الرأسيْنِ ب، أ متساويينِ.
كيفَ يمكنُنا القيامُ بذلِكَ؟



الشكلُ (٦–١٥)

نشاطُ (٦ –٣)

١) ارسمِ المُستوى الإحداثيَّ، وحددْ عليهِ النقاطَ أ(٣، –١)، ب(–٢، –٣)، جـ(٠، ١)، د(٥، ٣)
٢) ارسمِ الشكلَ الرباعيَّ أ ب جـ د.
٣) استخدمِ الميلَ، في بيانِ أنَّ كلَّ ضلعيْنِ متقابليْنِ في الشكلِ أ ب جـ د متوازيانِ.
٤) هل يوجدُ في الشكلِ أ ب جـ د أضلاعٌ متعامدةٌ؟
٥) ماذا نُسمِّي الشكلَ أ ب جـ د؟
٦) ارسمِ القطريْنِ أجـ ، ب د، ثمَّ حددْ نقطةَ تقاطعِهما.
٧) جِدْ إحداثياتِ منتصفِ كلٍّ منَ القطريْنِ أجـ ، ب د، ماذا تلاحظُ؟

مبرهنةٌ

قُطرا مُتوازِي الأضلاعِ ينصفُ كلٌّ منهُما الآخرَ.

١– المعطياتُ

أ ب جـ د متوازي أضلاعٍ، يتقاطعُ قُطراهُ أجـ ، ب د في النقطةِ و.

٢– المطلوبُ

إثباتُ أنَّ النقطةَ و، منتصفُ كلٍّ منَ القُطريْنِ أجـ ، ب د.

٣- البرهانُ

يمكنُ اختيارُ نظامِ الإحداثياتِ في المُستوى، بحيثُ ينطبقُ الرأسُ ب، على نقطةِ الأصلِ، والضلعُ أب على محورِ السيناتِ الموجبِ، كما في الشكلِ (٦-١٦).

الإحداثيُّ السينيُّ للنقطةِ د هوَ:

..... التبريرُ:.....

الإحداثيُّ الصاديُّ للنقطةِ د هوَ:

..... التبريرُ:.....

إذنْ: إحداثيًا النقطةِ د(س١ + س٢ ، ص٢)

إحداثيًا نقطةِ منتصفِ القُطرِ $\overline{ب د}$ هُما:

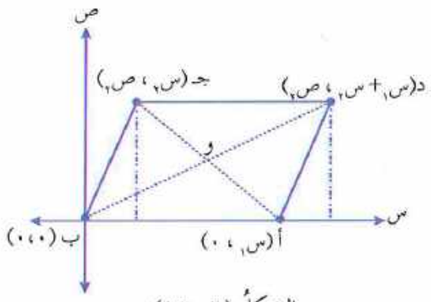
(.....، .....) التبريرُ:.....

إحداثيًا نقطةِ منتصفِ القُطرِ $\overline{أجـ}$ هُما:

(.....، .....) التبريرُ:.....

إذنْ: نقطةُ منتصفِ القُطرِ $\overline{ب د}$، هيَ نفسُها نقطةُ منتصفِ القطرِ $\overline{أجـ}$، وهيَ النقطةُ د .

إذنْ: قُطرا مُتوازي الأضلاعِ ينصّفُ كلٌّ منهُما الآخرَ (وهو المطلوبُ).



الشكلُ (٦-١٦)

مثالٌ (٦-٨)

إذا كانَ أ ب جـ د مُتوازيَ أضلاعٍ، وكانتْ أ (٦، ٥)، ب (٢، -١)، جـ (١٠، ٧):

١) جِدْ إحداثيًا نقطةِ تقاطعِ القُطريْنِ

٢) جِدْ طولَ القُطرِ $\overline{ب د}$.

٣) جِدْ إحداثيًا الرأسِ د.

الحلُّ

١) نقطةُ تقاطعِ القُطريْنِ هيَ نقطةُ منتصفِ $\overline{أجـ}$، وهيَ:

$$و = (٦، ٨) = (\frac{٥ + ٧}{٢} ، \frac{٦ + ١٠}{٢})$$

الأسئلة

١) جدْ نقطةَ تقاطعِ قُطرَيْ مُتوازي الأضلاعِ أ ب ج

٢) ك ل هـ و مُتوازيُ أضلاعٍ، فيهِ ك (−٢، ٤)، ل (

قُطرَيْهِ عنِ المستقيمِ ك ل.

٣) أ ب جـ د مُتوازيُ أضلاعٍ، فيهِ أ (٥، ٣)، د (

منتصفِ د جـ ، جِدْ هـ ل .

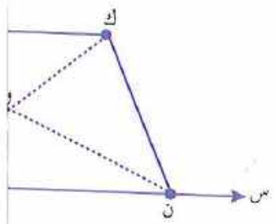
٤) يبينُ الشكلُ (٦− ١٧) ساحةَ ألعابٍ على شك

ساريةٍ للعلمِ عندَ النقطةِ و:

أ) حددْ إحداثيّي النقطةِ و.

ب) جدْ بُعدَ موقعِ الساريةِ عنْ كلٍّ منَ الرؤوس

جـ) جِدْ أقصرَ مسافةٍ بينَ موقعِ الساريةِ والض



الشكلُ

٥) حلَّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ.

٢) و ب = $\sqrt{(٨ - ٢)^{٢} + (٦ - (-١))^{٢}}$

= $\sqrt{٣٦ + ٤٩}$ = $\sqrt{٨٥}$ وحدة

ب د = ٢ و ب = ٢ $\sqrt{٨٥}$ وحدة.

٣) ب (٢، −١)، و(٨، ٦)، النقطةُ (و) هيَ نقطةُ منتصفِ $\overline{ب د}$. لتكنْ النقطةُ د (س١ ، ص١)

الإحداثيُّ السينيُّ للنقطةِ و $= ٨ = \frac{س_١ + ٢}{٢}$

ومنهُ: س١ $= ١٤$

الإحداثيُّ الصاديُّ للنقطةِ و $= ٦ = \frac{ص_١ + (-١)}{٢}$

ومنهُ: ص١ $= ١٣$

النقطةُ د (١٤، ١٣)

تدريبُ (٦−١٤)

إذا كانَ م ن ك ل متوازيَ أضلاعٍ، يتقاطعُ قُطراهُ في النقطةِ ع(٢، −٣)، وكانتْ م(٥، ٢)، ن(٠، ٣):

١) جِدْ طولَ كلٍّ مِنْ قُطريْهِ.

٢) جِدْ إحداثيّيْ كلٍّ منَ النقطتيْنِ ك، ل.

مثالُ (٦−٩)

أ ب د ع مُتوازيُ أضلاعٍ، فيهِ أ(−٢، −١)، ب(٢، ٢)، د(٤، ٥)، يتقاطعُ قُطراهُ في النقطةِ ك، جِدْ بُعدَ النقطةِ ك عنِ المستقيمِ $\overleftrightarrow{أب}$.

الحلُّ

النقطةُ ك هيَ منتصفُ القُطرِ $\overline{أ د}$ = (١، ٢) التبريرُ:.....

نجدُ معادلةَ المستقيمِ $\overleftrightarrow{أب}$: ميلُ المستقيمِ $\overleftrightarrow{أب}$ = م $= \frac{٢ - (-١)}{٢ - (-٢)} = \frac{٣}{٤}$ التبريرُ:.....

معادلةُ المستقيمِ $\overleftrightarrow{أب}$ هيَ: ص − ٢ $= \frac{٣}{٤}$ (س − ٢) التبريرُ:.....

ومنهُ: ٣س − ٤ص + ٢ = ٠

بُعدُ النقطةِ ك(١، ٢) عنِ المستقيمِ $\overleftrightarrow{أب} = \left| \frac{٣(١) - ٤(٢) + ٢}{\sqrt{(٣)^{٢} + (٤)^{٢}}} \right| = \frac{٣}{٥}$ وحدةٍ.

الفصلُ الثالثُ

الهندسةُ الفضائيةُ
Spatial Geometry

النتاجاتُ

- تتعرفُ مُسلَّماتِ الهندسةِ الفضائيةِ.
- تحكمُ على صحةِ عباراتٍ رياضيةٍ أو خطئِها.
- تتعرفُ أوضاعَ المستقيماتِ والمستوياتِ في الفضاءِ.

أولًا مُسلَّماتُ الهندسةِ الفضائيةِ Axioms of Space Geometry

درستَ في السنواتِ السابقةِ المفاهيمَ الأساسيةَ للهندسةِ المستويةِ، مثلَ: النقطةِ، المستقيمِ، المُستوى، وستتعرفُ في هذا الدرسِ مسلماتِ الهندسةِ الفضائيةِ، وأهمَّ مفاهيمِها الأساسيةِ.

بدأَ علمُ الهندسةِ الفضائيةِ منذُ آلافِ السنينِ، عندَما احتاجَ الإنسانُ فهمَ الأشكالِ والمجسماتِ المحيطةِ به، ويرجعُ تاريخُها إلى الإغريقِ والمصريينَ القدماءِ والبابليينَ، ثمَّ العصرِ الإسلاميِّ. ومنْ أقدمِ الكتبِ في هذا المجالِ، كتابُ إقليدسَ المُسمَّى بالأصولِ، الذي كتبَهُ في أوائلِ القرنِ الثالثِ قبلَ الميلادِ.

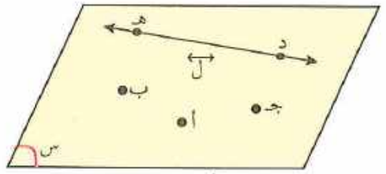
يبدأُ علمُ الهندسةِ **بمفرداتٍ غيرِ معرفةٍ** مثلِ: النقطةِ، والمستقيمِ، والمستوى، وتُستخدمُ هذهِ المفرداتُ لتعريفِ مفاهيمَ هندسيةٍ أُخرى، ولتكوينِ عباراتٍ توضّحُ العلاقةَ بينَها، ونقبلَ بصحتِها دونَ برهانٍ، وتُسمّى هذهِ العباراتُ **بالمُسَلّماتِ**، وباستخدامِ قوانينِ المنطقِ في الرياضياتِ، نجدُ معلوماتٍ أُخرى تُسمّى **بالمبرهناتِ**، وهيَ عباراتٌ لا بدّ منْ إثباتِ صحتِها.

نرمزُ **للنقطةِ** بأحدِ الحروفِ الهجائيةِ مثلِ: أ، ب، جـ، ...، ويمكنُ تمثيلُها بذرّةِ ملحٍ، أو موقعِ مدينةٍ على خريطةٍ، أو رأسِ دبوسٍ، أو أثرِ القلمِ على الورقةِ، إلى غيرِ ذلكَ.

أمّا **المستقيمُ** فنرمزُ له بأحدِ الحروفِ مثلِ: $\overleftrightarrow{ل}$، $\overleftrightarrow{م}$، $\overleftrightarrow{ن}$، ...، أوْ بحرفيْنِ، يمثلانِ نقطتيْنِ عليه، مثلِ $\overleftrightarrow{أب}$، $\overleftrightarrow{أجـ}$. المستقيمُ يمتدُّ إلى مالانهايةٍ منْ طرفيْهِ. ومنَ الأمثلةِ على المستقيمِ، حافةُ المسطرةِ، حرفُ الصندوقِ، حافةُ البابِ، ... .

أمّا **المُستوى**، فيمثَّلُ بالسطحِ المُستوي الممتدِّ من جميعِ أطرافهِ إلى مالانهايةٍ، ويمثَّلُ هندسيًا بشكلٍ رباعيٍّ، أو أيِّ منحنًى مغلَقٍ، ويُرمزُ لهُ بأحدِ الحروفِ الأبجديةِ مثلِ: س، ص، ع، ... ، أو بثلاثةِ حروفِ لثلاثِ نقاطٍ فيهِ، ليستْ على استقامةٍ واحدةٍ، مثلِ أ ب جـ ، ومنَ الأمثلةِ على المستوياتِ: سطحُ الطاولةِ، جدارُ الغرفةِ، ... .

الشكلُ(٦– ١٨) يمثلُ المُستوى س(أو المُستوى أ ب جـ)، تقعُ فيهِ النقاطُ أ، ب، جـ، والمستقيمُ $\overleftrightarrow{ل}$ (أوِ المستقيمُ $\overleftrightarrow{د هـ}$).



الشكلُ(٦–١٨)

تدريبُ (٦–١٧)

اعتمدْ على الشكلِ(٦– ١٩) للإجابةِ عمّا يأتي:

١) سَمِّ أربعَ نقاطٍ.

٢) سَمِّ ثلاثةَ مستقيماتٍ.

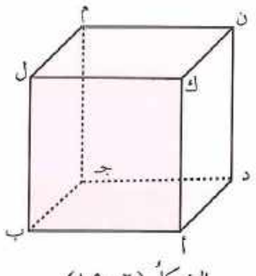
٣) سَمِّ ثلاثةَ مستوياتٍ.

٤) سَمِّ مستقيمَيْنِ يقعانِ في مستويَيْنِ مختلفيْنِ، واذكرِ اسمَيِ المستويَيْنِ.

٥) سَمِّ مستقيمَيْنِ يتقاطعانِ في النقطةِ م.

٦) سَمِّ مستويَيْنِ يتقاطعانِ في المستقيمِ $\overleftrightarrow{أد}$.

٧) هلْ يمكنكَ تسميةُ مستوىً ثالثٍ يحتَوي المستقيمَ $\overleftrightarrow{أد}$ ؟



الشكلُ(٦–١٩)

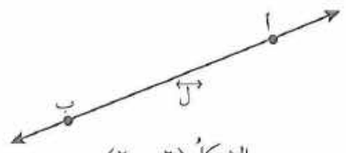
تعريفٌ

- النقاطُ المستقيمةُ هيَ النقاطُ الواقعةُ على مستقيمٍ واحدٍ.
- النقاطُ المستويةُ هيَ النقاطُ الواقعةُ في مستوىً واحدٍ.

مسلمةٌ (١)

لأيَّةِ نقطتيْنِ مختلفتيْنِ، يوجدُ مستقيمٌ واحدٌ فقطْ يحويهما.

في الشكلِ(٦– ٢٠)، المستقيمُ $\overleftrightarrow{ل}$ هوَ المستقيمُ الوحيدُ الذي يمرُّ بالنقطتيْنِ أ، ب.

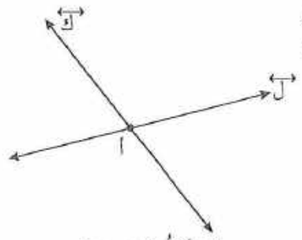


الشكلُ (٦–٢٠)

مسلمةٌ (٢)

إذا تقاطَعَ مستقيمانِ مختلفانِ، فإنهُما يتقاطعانِ في نقطةٍ واحدةٍ.

في الشكلِ (٦– ٢١)، النقطةُ أ هيَ نقطةُ تقاطعِ المستقيميْنِ $\overleftrightarrow{ل}$، $\overleftrightarrow{ك}$.

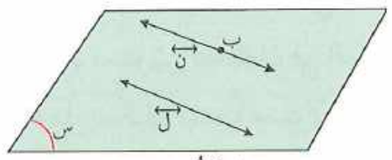


الشكلُ (٦–٢١)

مسلمةٌ (٣)

لأيةِ نقطةٍ خارجِ مستقيمٍ معلومٍ، يوجدُ مستقيمٌ واحدٌ فقطْ يمرُّ بها، ويوازيهِ.

في الشكلِ (٦– ٢٢) المستقيمُ $\overleftrightarrow{ل}$، والنقطةُ ب تقعُ خارجَهُ في المُستوى س، المستقيمُ الوحيدُ الذي يمرُّ بالنقطةِ ب موازيًا للمستقيمِ $\overleftrightarrow{ل}$ هوَ المستقيمُ $\overleftrightarrow{ن}$.

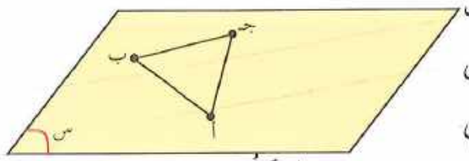


الشكلُ (٦–٢٢)

مسلمةٌ (٤)

لأيةِ ثلاثِ نقاطٍ ليستْ على استقامةٍ واحدةٍ، يوجدُ مستوىً واحدٌ فقطْ يحويْها جميعَها.

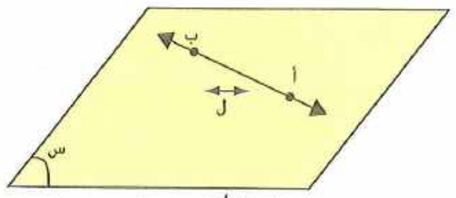
في الشكلِ (٦– ٢٣) أ، ب، جـ ثلاثُ نقاطٍ ليستْ على استقامةٍ واحدةٍ، المُستوى س هوَ المستوى الوحيدُ الذي يحويها، وهوَ المستوى الذي يَحوي المثلثَ أب جـ.



الشكلُ (٦–٢٣)

مسلمةٌ (٥)

إذا وقعتْ نقطتانِ في مستوىً، فإنّ المستقيمَ الذي يحويهِما يقعُ بأكملِهِ في المستوى.

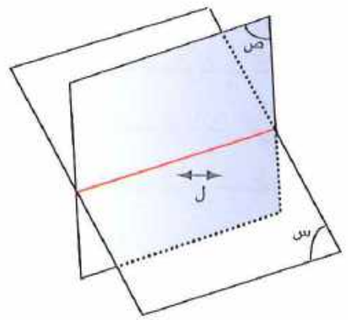


الشكلُ (٦-٢٤)

في الشكلِ (٦- ٢٤) النقطتانِ أ، ب تقعانِ في المُستوى س، المستقيمُ $\overleftrightarrow{ل}$، هوَ المستقيمُ الذي يحويهِما، فالمستقيمُ $\overleftrightarrow{ل}$ يقعُ بأكملِهِ في المُستوى س.

مسلمةٌ (٦)

إذا تقاطعَ مستويانِ مختلفانِ، فإنَّهُما يتقاطعانِ في مستقيمٍ.



الشكلُ (٦-٢٥)

في الشكلِ(٦- ٢٥)، المستويانِ س، ص يتقاطعانِ في المستقيمِ $\overleftrightarrow{ل}$.

فكّرْ

يتحددُ المُستوى في الفضاءِ بأربعةِ طرقٍ مختلفةٍ هيَ:

١) بثلاثِ نقاطٍ لا تقعُ على استقامةٍ واحدةٍ.

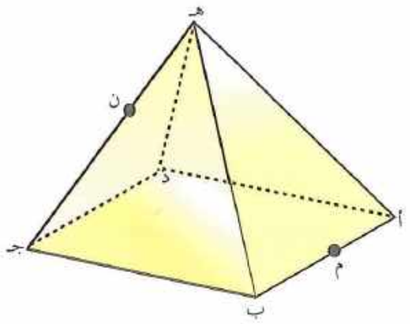
٢) .....

٣) .....

٤) .....

الأسئلةُ ؟

١) اعتمادًا على الشكلِ(٦– ٢٦)، الذي يمثلُ هرمًا رباعيًّا قائمًا، أعطِ مثالًا لكلٍّ ممّا يأتي:



الشكلُ (٦–٢٦)

أ) ثلاثِ نقاطٍ مستقيمةٍ.

ب) ثلاثِ نقاطٍ ليستْ مستقيمةً.

جـ) خمسِ نقاطٍ مستويةٍ.

د) أربعِ نقاطٍ غيرِ مستويةٍ.

هـ) مستويَيْنِ متقاطعَيْنِ، سمِّ مستقيمَ تقاطعِهما.

و) مستقيمٍ يقطعُ المُستوى ب جـ هـ.

ز) مستقيمٍ لا يقطعُ المُستوى أد هـ.

ح) مستويَيْنِ يحويانِ المستقيمَ $\overleftrightarrow{د\ جـ}$.

ط) ثلاثةِ مستوياتٍ تتقاطعُ في نقطةٍ واحدةٍ.

٢) ما عددُ المستوياتِ التي يمكنُ رسمُها، بحيثُ يمرُّ كلٌّ منْها:

أ) بثلاثِ نقاطٍ مستقيمةٍ؟

ب) برؤوسِ متوازي أضلاعٍ؟

جـ) برؤوسِ هرمٍ ثلاثيٍّ؟

د) بثلاثةٍ منْ رؤوسِ هرمٍ ثلاثيٍّ؟

٣) أيُّ العباراتِ الآتيةِ صحيحةٌ وأيُّها غيرُ صحيحةٍ؟ صحِّحِ العباراتِ غيرِ الصحيحةِ.

أ) يوجدُ أكثرُ منْ مستوىً يمرُّ بمستقيمَيْنِ متوازيَيْنِ.

ب) يوجدُ مستوىً واحدٌ فقطْ يمرُّ بمستقيمٍ معلومٍ.

جـ) يقعُ المربعُ بأكملِهِ في مستوىً واحدٍ.

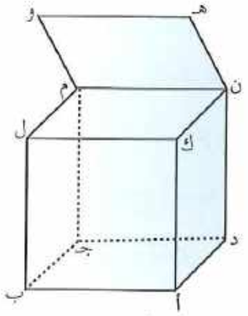
د) لا يوجدُ مستويانِ غيرُ متقاطعَيْنِ.

ثانيًا أوضاعُ المستقيماتِ والمستويات في الفضاء
Lines and Planes in Space

ستتعرفُ في هذا البندِ العلاقةَ بينَ مستقيمَيْنِ، مستقيمٍ ومستوىً، ومستويَيْنِ في الفضاءِ.

١- العلاقةُ بينَ مستقيمَيْنِ في الفضاءِ

تأملِ الشكلَ (٦- ٢٧):



الشكلُ (٦- ٢٧)

أ) سمِّ أربعةَ أزواجٍ منَ المستقيماتِ المتقاطعةِ، واذكرْ نقطةَ تقاطعِ كلٍّ منهُما.

ب) سمِّ أربعةَ أزواجٍ منَ المستقيماتِ المتوازيةِ واذكرِ المستوى الذي يحوي كلًّا منهُما.

جـ) سَمِّ أربعةَ أزواجٍ منَ المستقيماتِ، التي لا يوجدُ مستوى واحدٌ يحويهما معًا. اقترِحِ اسمًا للعلاقةِ بينهما.

تعريفٌ

- **المستقيمانِ المتقاطعانِ:** هُمَا المستقيمانِ اللذانِ يشتركانِ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ.
- **المستقيمانِ المتوازيانِ:** هُمَا المستقيمانِ اللذانِ يقعانِ في مستوىً واحدٍ ولا يتقاطعانِ.
- **المستقيمانِ المتخالفانِ:** هُمَا المستقيمانِ اللذانِ لا يوجدُ مستوىً واحدٌ يحويهِما.

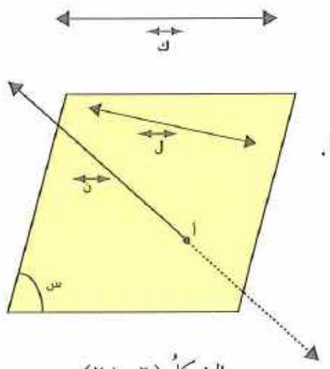
في الشكلِ(٦- ٢٧):

$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{ب جـ}$ مستقيمانِ متقاطعانِ في النقطةِ ب .

$\overleftrightarrow{أ د}$ ، $\overleftrightarrow{ب جـ}$ مستقيمانِ متوازيانِ، وكذلكَ $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{هـ و}$.

$\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{ن ك}$ مستقيمانِ متخالفانِ، وكذلكَ $\overleftrightarrow{د ن}$، $\overleftrightarrow{هـ و}$.

٢- العلاقةُ بينَ مستقيمٍ و مستوى في الفضاء



الشكلُ (٦-٢٨)

تأمل الشكل (٦- ٢٨):

أ) سمِّ مستقيمًا يقطعُ المستوى س، واذكرْ نقطةَ تقاطعِهما.

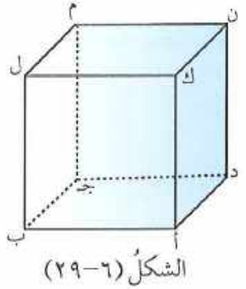
ب) سمِّ مستقيمًا يقعُ في المستوى س.

جـ) سمِّ مستقيمًا لا يشتركُ معَ المستوى س في أيةِ نقطةٍ، اقترحِ اسمًا لهذهِ الحالةِ.

من خلال إجابتك عمَّا سبقَ، يمكنُك استنتاجُ أنَّ المستقيمَ في الفضاءِ:

- يقطعُ المستوى المعلومَ في نقطةٍ واحدةٍ.
- أوْ يقعُ بأكملهِ في المستوى المعلومِ.
- أوْ لا يشتركُ معَ المستوى المعلومِ في أيةِ نقطةٍ، وعندها يكونُ المستقيمُ موازيًا للمستوى.

٣- العلاقةُ بينَ مستويَيْنِ في الفضاءِ:



الشكلُ (٦-٢٩)

تأملِ الشكلَ (٦- ٢٩):

أ) سَمِّ مستويَيْنِ يقطعُ كلٌّ منهُما المُستوى أ ب ل، واذكرْ مستقيمَ التقاطعِ في كلِّ حالةٍ .

ب) سَمِّ مستوىً لا يقطعُ المُستوى أ ب جـ، اقترحِ اسمًا لهذهِ الحالةِ.

منْ خلالِ إجابتِكَ عمّا سبقَ، يمكنكُ استنتاجُ أنَّ المستويَيْنِ في الفضاءِ:

- يتقاطعانِ في مستقيمٍ.
- أو لا يتقاطعانِ، وعندَها يكونُ المستويانِ متوازيَيْنِ.

الأسئلةُ ؟

١) اعتمادًا على الشكلِ (٦– ٣٠)، أجبْ عمّا يأتي:

أ) سَمِّ أربعةَ مستقيماتٍ، كلٌّ مِنْها يوازِي $\overleftrightarrow{ك\ ل}$.

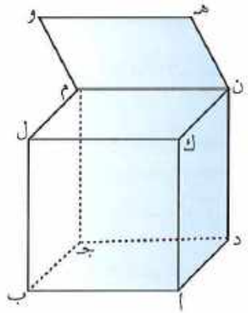
ب) سَمِّ خمسةَ مستوياتٍ يتقاطعُ كلٌّ مِنْها معَ المُستوى ك ل م.

جـ) سَمِّ ثلاثةَ أزواجٍ منَ المستوياتِ المتوازيةِ.

د) سَمِّ ستةَ مستقيماتٍ، يقطعُ كلٌّ مِنْها المُستوى أ ب جـ.

هـ) سَمِّ خمسةَ مستقيماتٍ، يوازي كلٌّ مِنْها المُستوى أ ب جـ .

و) هلِ المستويانِ أب جـ، م ن هـ متوازيانِ؟ برّرْ إجابَتَكَ.



الشكلُ (٦– ٣٠)

٢) تحدثْ عنِ العلاقةِ بينَ مستقيمَيْنِ في الهندسةِ المستويةِ، ومستقيمَيْنِ في الهندسةِ الفضائيةِ.

أسئلةُ الوحدةِ

١) جِدْ معادلةَ المستقيمِ $\overleftrightarrow{ل}$ الذي يمرُّ بالنقطةِ (٦، −٣)، ويوازي مستقيمًا ميلُهُ (−٤).

٢) جِدْ معادلةَ المستقيمِ $\overleftrightarrow{ل}$ الذي يعامدُ المستقيمَ ك: ٣س+ ٢ص −٥ = ٠، ويمرُّ بنقطةِ الأصلِ.

٣) أ ب جـ د متوازيُ أضلاعٍ، فيهِ أ(−٥، ٣)، جـ(١، −٩)، جِدْ معادلةَ المستقيمِ $\overleftrightarrow{ك}$، المارِّ بنقطةِ تقاطعِ قُطْرَيْ متوازيِ الأضلاعِ أب جـ د، ويعامدُ القُطرَ $\overline{أجـ}$.

٤) جِدْ بُعدَ النقطةِ د(−٥، ٢) عنِ المستقيمِ الذي معادلتُهُ: ص = $\frac{٣}{٤}$ س + ٢

٥) إذا كانَ بُعدُ النقطةِ (٢، −١) عن المستقيمِ الذي معادلتُهُ: ٤س + ب ص = ١ يساوي ٢ ، فَجِدْ جميعَ قِيَمِ الثابتِ ب.

٦) إذا كانتْ أ (٣، −١)، ب (−٣، ١)، جـ (−٨، −٥)، د (−٢، −٧):

أ) بينْ أنَّ الشكلَ الرباعيَّ أ ب جـ د متوازي أضلاعٍ.

ب) جِدْ إحداثيّْ نقطةِ تقاطعِ قُطريْهِ $\overline{أجـ}$ ، $\overline{ب د}$.

جـ) جِدْ بُعدَ النقطةِ ب عنِ القُطرِ $\overline{أجـ}$.

د) جِدْ البُعدَ بينَ الضلعيْنِ المتوازييْنِ $\overline{أ ب}$ ، $\overline{د جـ}$.

٧) م ن ل ،مثلثٌ رؤوسُهُ م (١، ٤)، ن(٤، ٠)، ل (−٤، ٠):

أ) جِدْ طولَ القطعةِ الواصلةِ بينَ منتصفَيْ $\overline{م ن}$، $\overline{م ل}$.

ب) جِدْ مساحةَ المثلثِ م ن ل .

٨) أ ب جـ مثلثٌ فيهِ د ، هـ مُنتصفا $\overline{أ ب}$، $\overline{أ جـ}$ على التوالي، م منتصفُ $\overline{د ب}$ ،ن منتصفُ $\overline{هـ جـ}$. أثبتْ أنَّ طولَ $\overline{م ن}$، يساوي ثلاثةَ أرباعِ طولِ $\overline{ب جـ}$.

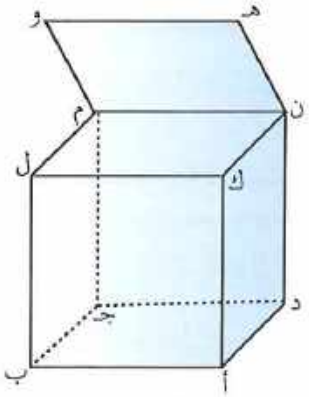
٩) أ ب جـ مثلثٌ، فيهِ أ (٥، ٦)، ب (−١، −٢)، جـ (٧، −٨):

أ) بيّنْ أنَّ المثلثَ أ ب جـ قائمُ الزاويةِ في ب .

ب) جِدْ طولَ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ منتصفَيْ $\overline{أ ب}$، $\overline{ب جـ}$.

جـ) جِدْ طولَ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ ب، ومنتصفِ $\overline{أ جـ}$.

الأسئلةُ



الشكلُ (٦– ٣٠)

١) اعتمادًا على الشكلِ (٦– ٣٠)، أجبْ عمّا يأتي:

أ) سَمِّ أربعةَ مستقيماتٍ، كلٌّ مِنْها يوازِي $\overleftrightarrow{ك\ ل}$.

ب) سَمِّ خمسةَ مستوياتٍ يتقاطعُ كلٌّ مِنْها معَ المُستوى ك ل م.

جـ) سَمِّ ثلاثةَ أزواجٍ منَ المستوياتِ المتوازيةِ.

د) سَمِّ ستةَ مستقيماتٍ، يقطعُ كلٌّ مِنْها المُستوى أ ب جـ.

هـ) سَمِّ خمسةَ مستقيماتٍ، يوازي كلٌّ مِنْها المُستوى أ ب جـ .

و) هلِ المستويانِ أب جـ، م ن هـ متوازيانِ؟ برّرْ إجابَتَكَ.

٢) تحدثْ عنِ العلاقةِ بينَ مستقيمَيْنِ في الهندسةِ المستويةِ، ومستقيمَيْنِ في الهندسةِ الفضائيةِ.

أسئلةُ الوحدةِ

١) جِدْ معادلةَ المستقيمِ $\overleftrightarrow{ل}$ الذي يمرُّ بالنقطةِ (٦، −٣)، ويوازي مستقيمًا ميلُهُ (−٤).

٢) جِدْ معادلةَ المستقيمِ $\overleftrightarrow{ل}$ الذي يعامدُ المستقيمَ ك: ٣س + ٢ص − ٥ = ٠، ويمرُّ بنقطةِ الأصلِ.

٣) أ ب جـ د متوازيُ أضلاعٍ، فيهِ أ(−٥، ٣)، جـ(١، −٩)، جِدْ معادلةَ المستقيمِ $\overleftrightarrow{ك}$، المارِّ بنقطةِ تقاطعِ قُطْرَيْ متوازي الأضلاعِ أب جـ د، ويعامدُ القُطرَ $\overline{أجـ}$.

٤) جِدْ بُعدَ النقطةِ د(−٥، ٢) عنِ المستقيمِ الذي معادلتُهُ: ص = $\frac{٣}{٤}$ س + ٢

٥) إذا كانَ بُعدُ النقطةِ (٢، −١) عن المستقيمِ الذي معادلتُهُ: ٤س + ب ص = ١ يساوي ٢ ، فَجِدْ جميعَ قِيَمِ الثابتِ ب.

٦) إذا كانتْ أ (٣، −١)، ب (−٣، ١)، جـ (−٨، −٥)، د (−٢، −٧):

أ) بينْ أنَّ الشكلَ الرباعيَّ أ ب جـ د متوازي أضلاعٍ.

ب) جِدْ إحداثيّيْ نقطةِ تقاطعِ قُطريْهِ $\overline{أجـ}$ ، $\overline{ب د}$.

جـ) جِدْ بُعدَ النقطةِ ب عنِ القُطرِ $\overline{أجـ}$.

د) جِدْ البُعدَ بينَ الضلعيْنِ المتوازييْنِ $\overline{أ ب}$ ، $\overline{د جـ}$.

٧) م ن ل ،مثلثٌ رؤوسُهُ م (١، ٤)، ن(٤، ٠)، ل (−٤، ٠):

أ) جِدْ طولَ القطعةِ الواصلةِ بينَ منتصفَيْ $\overline{م ن}$، $\overline{م ل}$.

ب) جِدْ مساحةَ المثلثِ م ن ل .

٨) أ ب جـ مثلثٌ فيهِ د ، هـ مُنتصفا $\overline{أ ب}$، $\overline{أ جـ}$ على التوالي، م منتصفُ $\overline{د ب}$ ،ن منتصفُ $\overline{هـ جـ}$. أثبتْ أنَّ طولَ $\overline{م ن}$، يساوي ثلاثةَ أرباعِ طولِ $\overline{ب جـ}$.

٩) أ ب جـ مثلثٌ، فيهِ أ (٥، ٦)، ب (−١، −٢)، جـ (٧، −٨):

أ) بيّنْ أنَّ المثلثَ أ ب جـ قائمُ الزاويةِ في ب .

ب) جِدْ طولَ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ منتصفَيْ $\overline{أ ب}$، $\overline{ب جـ}$.

جـ) جِدْ طولَ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ ب، ومنتصفِ $\overline{أ جـ}$.

١٠) إذا كانَ م ن ك ل متوازي أضلاعٍ، فيهِ م(٤، ٠)، ن(١، ٥)، وكانتْ هـ(٥، ٤) نقطةُ تقاطعِ قُطريْهِ:

أ) جِدْ م ك، ن ل . ب) جِدْ إحداثيّيْ كلٍّ منَ النقطتيْنِ ك، ل.

١١) جِدِ البُعدَ بينَ المستقيميْنِ المتوازييْنِ:

ل: ٣ص = ٢س − ٥

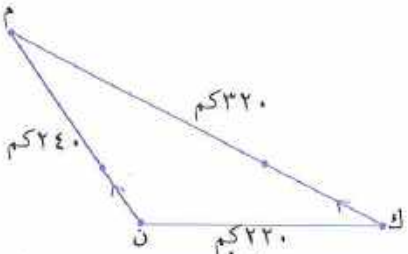
ك: ٤س − ٦ص = ٥

١٢) ارسمِ الشكلَ الرباعيَّ أ ب جـ د، على المستوى الإحداثيِّ في كلٍّ ممَّا يأتي، ثمّ ادرسْ خصائصَهُ، وصنِّفْ كلاًّ مِنْها إلى: متوازي أضلاعٍ، أو مستطيلٍ،أو مربعٍ، أو شبهِ منحرفٍ، أومعينٍ، معتمدًا على خصائصِهِ:

أ) أ(٠، ٧)، ب(٦، ٧)، جـ(٤، ٥)، د(−٢، ٥)

ب) أ(٠، −١)، ب(٥، −٢)، جـ(٠، −٧)، د(−٣، −٤)

١٣) الشكلُ (٦−٣١) يبينُ محطّتيْنِ للحافلاتِ ك، ن، والمطارَ م. عندَ الساعةِ الثامنةِ صباحًا، انطلقتْ حافلةٌ منَ المحطةِ ك، باتجاهِ المطارِ، بسرعةٍ ٨٠ كم/ساعةٍ، وفي اللحظةِ نفسِها انطلقتْ حافلةٌ أخرى منَ المحطةِ ن، باتجاهِ المطارِ بسرعةِ ٦٠ كم/ساعةٍ. جِدِ البعدَ بينَ الحافلتيْنِ عندَ الساعةِ العاشرةِ صباحًا.



الشكلُ (٦− ٣١)

١٤) أيُّ العباراتِ الآتيةِ صحيحةٌ وأيُّها خطأٌ؟ برّرْ إجابَتَكَ:

أ) إذا لمْ يشتركِ المستقيمُ $\overleftrightarrow{ل}$ معَ المستوى س في أيةِ نقطةٍ، فإنَّ $\overleftrightarrow{ل}$ // س.

ب) منْ نقطةٍ خارجَ مستوىً، يمكنُ رسمُ مستقيمٍ واحدٍ فقطْ، يُوازي هذا المُستوى.

جـ) منْ نقطةٍ خارجَ مستقيمٍ، يمكنُ رسمُ مستقيمٍ واحدٍ فقطْ، يوازي هذا المستقيمِ.

د) منْ نقطةٍ خارجَ مستوىً، يمكنُ رسمُ مستوىً واحدٍ فقطْ، يُوازي هذا المُستوى.

هـ) إذا تَوازى مستقيمانِ في الفضاءِ، فإنَّ أيَّ مستقيمٍ يقطعُ أحدَهُما يجبُ أَنْ يقطعَ الآخرَ.

و) يمكنُ رسمُ ثلاثِ نقاطٍ غيرِ مستويةٍ.

ز) المستقيمانِ غيرُ المتقاطعيْنِ في الفضاءِ، متوازيانِ دائمًا.

الوحدةُ السابعةُ

الإحصاءُ والاحتمالاتُ

الإحصاءُ هوَ أحدُ فروعِ الرياضياتِ المهمّةِ وذاتِ تطبيقاتٍ واسعةٍ، حيثُ يهتمُّ بجمعِ البياناتِ وتحليلِها، وتلخيصِها وتمثيلِها واستنتاجِ معلوماتٍ للتغلبِ على مشكلاتٍ، مثلِ: عدمِ تجانسِ البياناتِ وتباعدِها. ويُعدُّ الإحصاءُ منَ العلومِ القديمةِ المعروفةِ لدى المجتمعاتِ، حيثُ تحرصُ الحكوماتُ على إحصاءِ عددِ الجنودِ مثلًا، من أجلِ تأمينِ المؤنِ، والرواتبِ، والسلاحِ اللازمِ للدفاعِ عنْ بلدانِهم.

أمّا الاحتمالاتُ، فهي فرعٌ حديثٌ نسبيًا من فروعِ الرياضياتِ، ظهرَ في القرنِ السادسِ عشرَ الميلاديِّ في أوروبا، وكانَ العالمانِ بليز باسكال (Blaise Pascal) وبيير فيرما (Pierre Fermat)، أولَ منْ وضعَ نظريةً رياضيةً في الاحتمالاتِ. حيثُ تهتمُّ الاحتمالاتُ بحسابِ احتمالِ حادثٍ ما أو فرصةِ وقوعِهِ، في تجاربَ عشوائيةٍ معينةٍ.

Statistics and Probability

يتوقعُ منَ الطالبِ بعدَ نهايةِ هذه الوحدة، أن يكونَ قادرًا على:

- حسابِ مقاييسِ التشتتِ مِنْ جداولَ تكراريةٍ، وتفسيرِها يدويًا، وباستخدامِ تطبيقاتِ الحاسوبِ.
- تفسيرِ العلاقاتِ بينَ مقاييسِ التشتتِ، وأشكالِ التوزيعِ.
- تحديدِ مقياسِ التشتتِ المناسبِ، واستخدامِه في مواقفَ عمليةٍ.
- استقصاءِ أثرِ تعديلِ البياناتِ في مقاييسِ التشتتِ.
- استكشافِ قوانينِ الاحتمالاتِ، واستخدامِها لحسابِ احتمالاتِ حوادثَ مُعينةٍ.
- حسابِ احتمالاتِ الحوادثِ المستقلةِ والمشروطةِ.
- تطبيقِ مفاهيمِ الحوادثِ المستقلةِ والمشروطةِ في مواقفَ حياتيةٍ.

الفصلُ الأولُ

الإحصـــاءُ

Statistics

النتاجاتُ

- تحسبُ مقاييسَ التشتتِ لجداولَ تكراريةٍ وتُفسرُ دلالاتِها.
- تتعرفُ أثرَ تعديلِ البياناتِ على مقاييسِ التشتتِ.
- تحسبُ مقاييسَ التشتتِ بعدَ دمجِ مجموعتيْنِ.

أولًا مقاييسُ التشتتِ Measures of Variation

قامَ فؤادٌ بعملِ اختبارٍ في مادةِ الرياضياتِ لشعبتَيْ أ، ب منْ شعبِ الصفِّ العاشرِ الأساسيِّ، وأرادَ معرفةَ أيِّ الشعبتيْنِ كانَ تحصيلُ الطلاب فيها أكثرَ تقاربًا أو تجانسًا؛ فقامَ بعملِ تحليلٍ لنتائجِ الاختبارِ للشعبتيْنِ. حيثُ كانتْ علاماتُ الطلابِ في الشعبتيْنِ أ، ب ممثلةً في الجدولِ(٧– ١)، والجدولِ(٧– ٢):

الجدول (٧–١)

فئاتُ العلاماتِ	١٥–١١	٢٠–١٦	٢٥–٢١	٣٠–٢٦	٣٥–٣١	٤٠–٣٦
عددُ الطلابِ	٥	٨	١٢	٩	٤	٢

الجدول (٧–٢)

فئاتُ العلاماتِ	١٩–١٥	٢٤–٢٠	٢٩–٢٥	٣٤–٣٠	٣٩–٣٥
عددُ الطلابِ	٨	٥	٦	٨	١

أيُّ الشعبتيْنِ أكثرُ تجانسًا في علاماتِ الطلابِ؟

تعلمتَ سابقًا بعضَ المقاييسِ الإحصائيةِ، مثلِ: مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ (المتوسطِ الحسابيِّ، المنوالِ، الوسيطِ)، وسُميتْ بهذا الاسمِ؛ لأنَّها تصفُ البياناتِ الإحصائيةَ عن طريقِ قيمةٍ عدديةٍ،

Statistics and Probability

يتوقعُ منَ الطالبِ بعدَ نهايةِ هذه الوحدةِ، أن يكونَ قادرًا على:

- حسابِ مقاييسِ التشتتِ مِنْ جداولَ تكراريةٍ، وتفسيرِها يدويًا، وباستخدامِ تطبيقاتِ الحاسوبِ.
- تفسيرِ العلاقاتِ بينَ مقاييسِ التشتتِ، وأشكالِ التوزيعِ.
- تحديدِ مقياسِ التشتتِ المناسبِ، واستخدامِهِ في مواقفَ عمليةٍ.
- استقصاءِ أثرِ تعديلِ البياناتِ في مقاييسِ التشتتِ.
- استكشافِ قوانينِ الاحتمالاتِ، واستخدامِها لحسابِ احتمالاتِ حوادثَ مُعينةٍ.
- حسابِ احتمالاتِ الحوادثِ المستقلةِ والمشروطةِ.
- تطبيقِ مفاهيمِ الحوادثِ المستقلةِ والمشروطةِ في مواقفَ حياتيةٍ.

الإحصـــاءُ
Statistics

النتاجاتُ

- تحسبُ مقاييسَ التشتتِ لجداولَ تكراريةٍ وتُفسرُ دلالاتِها.
- تتعرفُ أثرَ تعديلِ البياناتِ على مقاييسِ التشتتِ.
- تحسبُ مقاييسَ التشتتِ بعدَ دمجِ مجموعتيْنِ.

أولًا مقاييسُ التشتتِ Measures of Variation

قامَ فؤادٌ بعملِ اختبارٍ في مادةِ الرياضياتِ لشعبتَيْ أ، ب منْ شعبِ الصفِّ العاشرِ الأساسيِّ، وأرادَ معرفةَ أيِّ الشعبتيْنِ كانَ تحصيلُ الطلاب فيها أكثرَ تقاربًا أو تجانسًا؛ فقامَ بعملِ تحليلٍ لنتائجِ الاختبارِ للشعبتيْنِ. حيثُ كانتْ علاماتُ الطلابِ في الشعبتيْنِ أ، ب ممثلةً في الجدولِ(٧– ١)، والجدولِ(٧– ٢):

الجدول (٧–١)

فئاتُ العلاماتِ	١١–١٥	١٦–٢٠	٢١–٢٥	٢٦–٣٠	٣١–٣٥	٣٦–٤٠
عددُ الطلابِ	٥	٨	١٢	٩	٤	٢

الجدول (٧–٢)

فئاتُ العلاماتِ	١٥–١٩	٢٠–٢٤	٢٥–٢٩	٣٠–٣٤	٣٥–٣٩
عددُ الطلابِ	٨	٥	٦	٨	١

أيُّ الشعبتيْنِ أكثرُ تجانسًا في علاماتِ الطلابِ؟

تعلمتَ سابقًا بعضَ المقاييسِ الإحصائيةِ، مثلِ: مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ (المتوسطِ الحسابيِّ، المنوالِ، الوسيطِ)، وسُميتْ بهذا الاسمِ؛ لأنَّها تصفُ البياناتِ الإحصائيةَ عن طريقِ قيمةٍ عدديةٍ،

تتجمعُ حولَها باقي القيمِ أو المشاهداتِ، سواءٌ كانتْ البياناتُ مفردةً، أو في جدولٍ تكراريٍّ، أو في جدولٍ ذي فئاتٍ. وتعلمتَ أيضًا أنّها ليستْ الوحيدةَ المستخدمةَ في وصفِ تصوّرٍ واضحٍ عنِ البياناتِ، بلْ هناكَ مقاييسُ أخرى تُسمى **مقاييسَ التشتتِ** (المَدَى، الانحرافَ المعياريَّ، التباينَ)، وسُمّيتْ بِهذا الاسمِ؛ لأنّها تصفُ مَدَى تباعدِ القيمِ عنْ بعضِها، أو تقارُبِها.

تذكَّرْ

- المتوسطُ الحسابيُّ: هوَ مجموعُ القيمِ مقسومًا على عددِها.

$$\text{المتوسطُ الحسابيُّ} = \overline{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} س_ر}{ن}$$

- المَدَى: هوَ الفرقُ بينَ أكبرِ مشاهدةٍ وأصغرِ مشاهدةٍ.

المَدَى = أكبرُ مشاهدةٍ − أصغرُ مشاهدةٍ.

- الانحرافُ المعياريُّ: هوَ الجذرُ التربيعيُّ للوسطِ الحسابيِّ لمربعاتِ انحرافاتِ القيمِ عنْ وسطِها الحسابيِّ.

- الانحرافُ المعياريُّ للمشاهداتِ $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، .... ، $س_ن$ يُساوي:

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^٢}{ن - ١}} \quad \text{أو} \quad ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} س_ر^٢ - ن \times (\overline{س})^٢}{ن - ١}}$$

حيثُ ن هوَ عددُ المشاهداتِ، $\overline{س}$ هوَ المتوسطُ الحسابيُّ لهذهِ المشاهداتِ.

- التباينُ = مربعُ الانحرافِ المعياريِّ = $ع^٢$

نشاطُ (٧ − ١)

إذا كانتْ المجموعتانِ الآتيتانِ تُمثلانِ أعمارَ ١٠ موظفينَ منْ شركتيْنِ مختلفتيْنِ لأقربِ سنةٍ:

أعمارُ موظفِي الشركةِ أ: ٢٤، ٢٧، ٢٨، ٣٢، ٣٢، ٣٥، ٣٦، ٣٨، ٤٠، ٤٠

أعمارُ موظفِي الشركةِ ب: ٢٤، ٢٥، ٣٢، ٢٥، ٣٢، ٣٥، ٣٩، ٤٠، ٤٠، ٤٠

احسبْ:

- المتوسِطَ الحسابيَّ لأعمارِ موظفِيْ كلٍّ منَ الشركتيْنِ.
- المدى لأعمارِموظفِيْ كلٍّ منَ الشركتيْنِ.
- الانحرافَ المعياريَّ لأعمارِ موظّفيْ كلٍّ منَ الشركتيْنِ .

هلْ تتوزعُ القيمُ في الشركتيْنِ حولَ متوسطِهما الحسابيِّ بالطريقةِ نفسِها؟

تذكّرْ

المتوسطُ الحسابيُّ (Mean)

المتوسطُ الحسابيُّ لجدولٍ تكراريٍّ دونَ فئاتٍ هوَ:

$$\overline{س} = \frac{\text{مجموعَ نواتجِ ضربِ القيمِ في تكراراتِها}}{\text{مجموعِ التكراراتِ}}$$

المتوسطُ الحسابيُّ لجدولِ تكراريٍّ ذي فئاتٍ هوَ:

$$\overline{س} = \frac{\text{مجموعَ نواتجِ ضربِ مراكزِ الفئاتِ في تكراراتِها}}{\text{مجموعِ التكراراتِ}}$$

أيْ أنَّهُ إذا كانتِ المشاهداتُ $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، .... ، $س_ن$ تُمثلُ مشاهداتٍ في جدولٍ تكراريٍّ أو مراكزِ فئاتِ التوزيعِ التكراريِّ للبياناتِ، وكانتِ التكراراتُ المقابلةُ لها هيَ: $ت_1$، $ت_2$، $ت_3$ ، ... ، $ت_ن$ على التوالي، فإنَّ:

$$\overline{س} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر \times ت_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ت_ر}$$

وفي هذا الدرسِ سنقومُ بحسابِ مقاييسِ التشتتِ لبياناتٍ في جدولٍ تكراريٍّ ذي فئاتٍ.

١- المَدَى (Range)

يُحسبُ المَدَى في حالةِ الجداولِ التكراريةِ وفقَ العلاقةِ الآتيةِ:

المَدَى = الحدَّ الفعليَّ الأعلَى للفئةِ العُليا – الحدُّ الفعليَّ الأدنى للفئةِ الدُّنيا.

٢- الانحرافُ المعياريُّ (Standard Deviation)

يُحسبُ الانحرافُ المعياريُّ في حالةِ الجداولِ التكراريةِ وفقَ العلاقةِ الآتيةِ:

إذا كانتِ المشاهداتُ $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، .... ، $س_ن$ تُمثلُ مشاهداتٍ في جدولٍ تكراريٍّ، أو مراكزِ فئاتِ التوزيعِ التكراريِّ للبياناتِ، وكانتِ التكراراتُ المقابلةُ لَها هيَ: $ت_١$ ، $ت_٢$ ، $ت_٣$ ، ...، $ت_ن$ على التوالي، فإنَّ:

$$\text{الانحرافَ المعياريَّ ع} = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^٢ \times ت_ر}{ن - ١}}$$

حيثُ ن هوَ مجموعُ التكراراتِ، $\overline{س}$ هوَ المتوسطُ الحسابيُّ.

وتوجدُ علاقةٌ رياضيةٌ تُمكّنكَ منْ حسابِ الانحرافِ المعياريِّ ، دونَ الحاجةِ إلى حسابِ انحرافاتِ القيمِ عن متوسطِها الحسابيِّ. وهذهِ العلاقةُ هيَ:

إذا كانتِ المشاهداتُ $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، .... ، $س_ن$ تُمثلُ مشاهداتٍ في جدولٍ تكراريٍّ أو مراكزِ فئاتِ التوزيعِ التكراريِّ للبياناتِ، وكانتِ التكراراتُ المقابلةُ لها هيَ: $ت_١$ ، $ت_٢$ ، $ت_٣$ ، ...، $ت_ن$ على التوالي، فإنَّ :

$$\text{الانحرافَ المعياريَّ ع} = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر^٢ \times ت) - ن \times (\overline{س})^٢}{ن - ١}}$$

حيثُ ن هوَ مجموعُ التكراراتِ، $\overline{س}$ هوَ المتوسطُ الحسابيُّ.

٣- التباينُ (Variance)

يُعرفُ التباينُ بأنهُ: المتوسطُ الحسابيُّ لمربعاتِ انحرافاتِ القيمِ عنْ متوسطِها الحسابي، فالتباينُ = مربعَ الانحرافِ المعياريِّ. حيثُ إنهُ كلّما زادتْ قيمةُ التباينِ، زادَ تباعدُ (تشتتُ) القيمِ عنْ متوسطِها الحسابيِّ.

مثالُ (٧-١)

يُمثلُ الجدولُ (٧-٣)، أعمارَ ٥٠ طالبًا منْ حَفَظَةِ القرآنِ الكريمِ في مدرسةٍ أساسيةٍ لأقربِ سنةٍ:

الجدولُ (٧-٣)

فئاتُ الأعمارِ	٦-٨	٩-١١	١٢-١٤
عددُ الطلابِ	١٥	١٠	٢٥

احسبْ:

١) المَدَى. ٢) الانحرافَ المعياريَّ. ٣) التباينَ.

الحلُّ

١) المَدَى = الحدَّ الفعليَّ الأعلى للفئةِ العُليَا - الحدَّ الفعليَّ الأدنى للفئةِ الدُّنْيا.

= ١٤,٥ - ٥,٥ = ٩ سنواتٍ.

٢) لحسابِ الانحرافِ المعياريِّ نُكوّنُ جدولًا على النحوِ الآتي:

الفئاتُ	عددُ الطلابِ	مراكزُ الفئاتِ	س × ت	س - $\bar{س}$	(س - $\bar{س}$)^{٢}	(س - $\bar{س}$)^{٢} × ت
٦ - ٨	١٥	٧	١٠٥	-٣,٦	١٢,٩٦	١٩٤,٤
٩ - ١١	١٠	١٠	١٠٠	-٠,٦	٠,٣٦	٣,٦
١٢ - ١٤	٢٥	١٣	٣٢٥	٢,٤	٥,٧٦	١٤٤
المجموع	**٥٠**		**٥٣٠**			**٣٤٢**

نجدُ المتوسطَ الحسابيَّ:

$$\bar{س} = \frac{\sum س \times ت}{\sum ت} = \frac{٥٣٠}{٥٠} = ١٠,٦$$

نجدُ الانحرافَ المعياريَّ:

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^٢ \times ت_ر}{ن - ١}} = \sqrt{\frac{٣٤٢}{٤٩}} \approx \sqrt{٦,٩٨} \approx ٢,٦٤$$

٣) التباينُ = $ع^٢ \approx ٦,٩٨$

فكّرْ

هلْ مجموعُ انحرافاتِ جميعِ القيمِ عن متوسطِها الحسابيِّ يُساوي صفرًا؟ برّرْ إجابتَكَ.

نشاطُ (٧ - ٢)

يُمثّلُ كلُّ جدولٍ منَ الجدوليْنِ (٧–٤) و (٧–٥)، كُتَلَ عددٍ منْ موظّفِيْ شركةٍ تجاريةٍ لأقربِ كيلو غرامٍ.

قسمُ شؤونِ الموظفينِ:

الجدولُ (٧–٤)

الكتلةُ	٥٠	٥٥	٦٠	٦٥	٧٥
التكرارُ	٢	١	٤	٢	١

قسمُ المحاسبةِ:

الجدولُ (٧–٥)

الكتلةُ	٥٠	٥٥	٦٠	٦٥	٧٥
التكرارُ	٣	١	٣	١	٢

اعتمادًا على الجدوليْن، أجبْ عنِ الأسئلةِ الآتيةِ:

- جِدِ المتوسطَ الحسابيَّ لكتلِ موظفيْ كلٍّ منَ القسميْنِ.
- جِدِ المَدَى لكتلِ موظفِيْ كلٍّ منَ القسميْنِ.
- جِدِ الانحرافَ المعياريَّ لكتلِ موظفيْ كلٍّ منَ القسميْنِ.
- صفْ مَدَى تجانسِ كُتَلِ موظفِيْ كلِّ قسمٍ.

تدريبُ (٧-١)

الجدولُ (٧-٦)، يُمثّلُ درجاتِ الحرارةِ في ٣٠ يومًا منْ أيامِ السنةِ في إحدى مناطقِ المملكةِ، لأقربِ درجةٍ سلسيوسيةٍ:

الجدول (٧-٦)

الفئاتُ	٢٠ – ٢٤	٢٥ – ٢٩	٣٠ – ٣٤	٣٥ – ٣٩
التكرارُ	٧	٧	١٠	٦

استخدمِ العلاقةَ الآتيةَ في حسابِ الانحرافِ المعياريِّ لدرجاتِ الحرارةِ المسجلةِ:

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر^{٢} \times ت) - ن \times (\overline{س})^{٢}}{ن - ١}}$$

مثالُ (٧-٢)

الجدولُ (٧-٧) يُمثلُ درجاتِ الحرارةِ في مدينةٍ ما، في سبعةِ أيامٍ متتاليةٍ، لأقربِ درجةٍ سلسيوسية:

الجدول (٧-٧)

اليومُ	السبتُ	الأحدُ	الاثنينُ	الثلاثاءُ	الأربعاءُ	الخميسُ	الجمعةُ
درجةُ الحرارةِ	٣٢	٤٣	٣٤	٤٤	٣٢	٣٨	٤٣

احسبِ المتوسط الحسابيَّ والتباينَ لدرجاتِ الحرارةِ باستخدامِ برمجيةِ إكسل.

الحلُّ

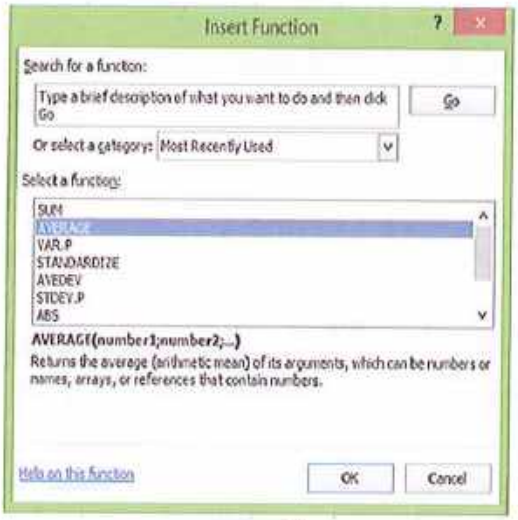
١) قُمْ بِفتحِ صفحةٍ في برمجيةِ إكسل Excel

٢) ضعِ البياناتِ في الخلايا، كما هوَ مبيّنٌ في الشكلِ (٧-١).

	A	B	C	D	E	F	G
1	32	43	34	44	32	38	43
2							
3							

الشكلُ (٧-١)

٣) حدّدِ الخليةَ التي تُريدُ أنْ تضعَ فيها الناتجَ، ومنْ قائمةِ (إدراج) اخترْ دالةَ (Function)،ومنْ مربعِ حوارِ (دالة) اخترْ دالةَ (AVERAGE)،كما في الشكلِ(٧–٢).



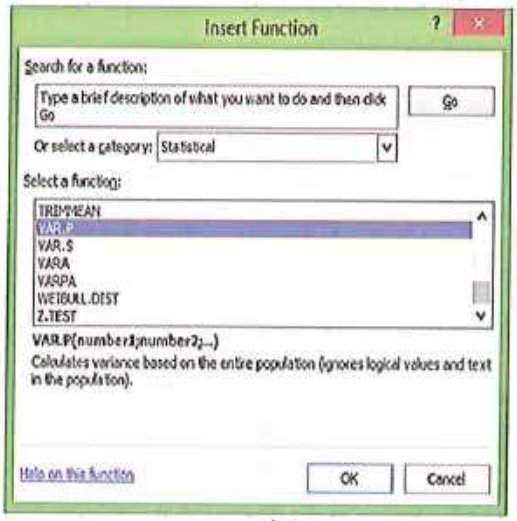
الشكلُ (٧–٢)

٤) ظلّلِ الخلايا المُرادَ إيجادُ المتوسطِ الحسابيِّ لها، ثمَّ انقرْ(موافق Ok). فيكونُ الناتجُ (٣٨). كما في الشكلِ(٧–٣).

G	F	E	D	C	B	A	
43	38	32	44	34	43	32	1
						38	2

الشكلُ (٧–٣).

٥) أمّا عندَ حسابِ التباينِ: حدِّدْ الخليةَ التي تريدُ أنْ تضعَ فيها الناتجَ، ومنْ قائمةِ (إدراج) اخترْ دالةَ (Function)، ومنْ مربعِ حوار (دالة) اخترْ (دالةَ VAR.P). كما في الشكلِ (٧–٤).



الشكلُ (٧–٤)

٦) ظلِّلِ الخلايا المُرادَ إيجادُ التباينِ لها، ثمَّ انقرْ (موافق Ok). فيكونُ الناتجُ (٢٤,٨٥٧١٤). كما في الشكلِ (٧–٥).

	A	B	C	D	E	F	G
1	32	43	34	44	32	38	43
2	38						
3	24.85714						

الشكلُ (٧–٥)

وفي حالةِ الجداولِ التكراريةِ، يُمكنكَ إيجادُ المتوسطِ الحسابيِّ والتباينِ، كما يُوضّح المثالُ الآتي:

مثالُ (٧–٣)

أُجريتْ إحصائيةٌ على (٥٠) شخصًا أُصيبوا بمرضِ السرطانِ جرّاءَ التّدخينِ، وسُجلتْ عددُ عُلبِ السجائرِ التي يستهلكُها كلُّ شخصٍ لمدةِ أسبوعٍ، فكانتْ كما يُبيّنُ الجدولُ (٧–٨):

الجدول (٧–٨)

فئاتُ علبِ السجائرِ	٣ – ٥	٦ – ٨	٩ – ١١	١٢ – ١٤
عددُ المدخنينَ	٥	١٢	١٣	٢٠

احسبِ المتوسطَ الحسابيَّ، والتباينَ، لعددِ علبِ السجائرِ، التي يستخدمُها المدخنونَ أسبوعيًا، باستخدامِ برمجيةِ إكسل.

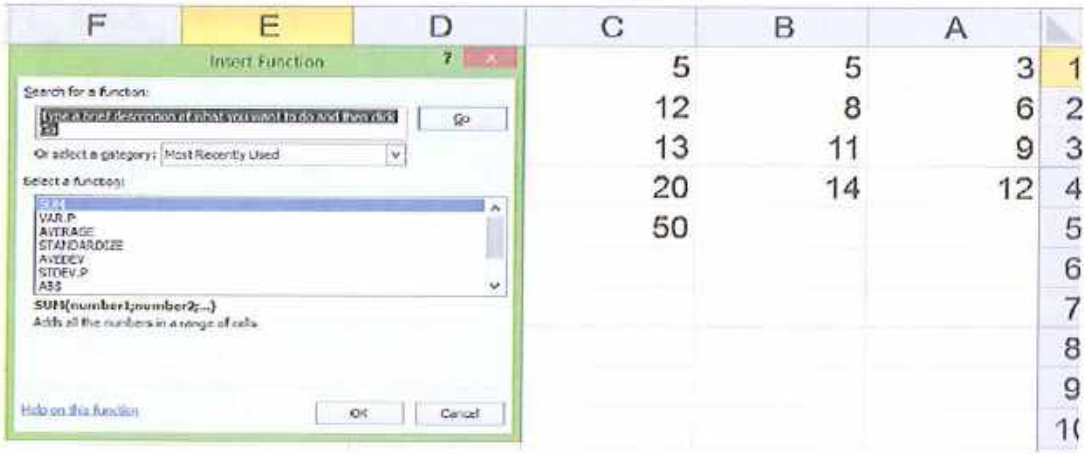
الحلُّ

١) قُم بفتحِ صفحةٍ في برمجيةِ إكسل Excel، أدخلِ الجدولَ بوضعِ الحدِّ الأدْنَى للفئاتِ في العمودِ A، ووضعِ الحدِّ الأعلى للفئاتِ في العمودِ B، ووضعِ التكراراتِ في العمودِ C. كما في الشكلِ (٧–٦).

	A	B	C
1	3	5	5
2	6	8	12
3	9	11	13
4	12	14	20
5			
6			

الشكلُ (٧–٦)

٢) احسبْ مجموعَ التكراراتِ، باستخدامِ دالةِ (SUM) في الخليةِ (C5) كما في الشكلِ (٧-٧)



A	B	C	D	E	F	
3	5	5				1
6	8	12				2
9	11	13				3
12	14	20				4
		50				5
						6
						7
						8
						9
						10

الشكلُ (٧-٧)

٣) احسبْ مركزَ الفئةِ الأولى، باستخدامِ الصيغةِ (A1 + B1)/2 في الخليةِ (D1)، ثمَّ كرّرِ الصيغةَ لبقيةِ الفئاتِ، باستخدامِ مقبضِ التعبئةِ التلقائيِّ. كما في الشكلِ(٧-٨).

A	B	C	D	
3	5	5	4	1
6	8	12	7	2
9	11	13	10	3
12	14	20	13	4
		50		5
				6

الشكلُ (٧-٨)

٤) اضربْ مركزَ الفئةِ في تكرارِها للفئةِ الأولى، باستخدامِ الصيغةِ (C1*D1) في الخليةِ E1،ثمَّ كرّرِ الصيغةَ لبقيةِ الفئاتِ باستخدامِ مقبضِ التعبئةِ التلقائيِّ. كما في الشكلِ (٧-٩).

A	B	C	D	E	
3	5	5	4	20	1
6	8	12	7	84	2
9	11	13	10	130	3
12	14	20	13	260	4
		50			5

الشكلُ (٧-٩)

٥) احسبْ مجموعَ حاصلِ ضربِ مركزِ الفئةِ في تكرارِها باستخدامِ دالةِ (SUM) في الخليةِ E5. كما في الشكلِ (٧–١٠).

	A	B	C	D	E
1	3	5	5	4	20
2	6	8	12	7	84
3	9	11	13	10	130
4	12	14	20	13	260
5			50		494
6					

الشكلُ (٧–١٠)

٦) في الخليةِ F5 اقسمْ E5 على C5 وفقَ الصيغةِ E5/C5، لتحصلَ على المتوسطِ الحسابيِّ. كما في الشكلِ (٧–١١).

	A	C	D	E	F
1	3	5	5	20	
2	6	8	12	84	
3	9	11	13	130	
4	12	14	20	260	
5			50	494	9.88
6					

الشكلُ (٧–١١)

٧) لحسابِ التباينِ، نستخدمُ الصيغةَ (D1-9.88) في الخليةِ G1. ونستخدمُ الصيغةَ (G1*G1) في الخليةِ H1. ونستخدمُ الصيغةَ (H1*C1) في الخليةِ I1. وللحصولِ على الجدولِ كاملًا في كلِّ مرةٍ، نستخدمُ مقبضَ التعبئةِ التلقائيِّ. ثمَّ نستخدمُ دالةَ (SUM) في الخلية I5 للحصولِ على مجموعِ حواصلِ ضربِ مُربعاتِ انحرافاتِ القيمِ عن متوسطِها الحسابيِّ في التكرارِ المقابلِ لكلٍّ مِنْها، كما في الشكلِ (٧–١٢).

	B	C	D	E	F	G	H	I
1	5	5	4	20		-5.88	34.5744	172.872
2	8	12	7	84		-2.88	8.2944	99.5328
3	11	13	10	130		0.12	0.0144	0.1872
4	14	20	13	260		3.12	9.7344	194.688
5		50		494	9.88			467.28
6								

الشكلُ (٧–١٢)

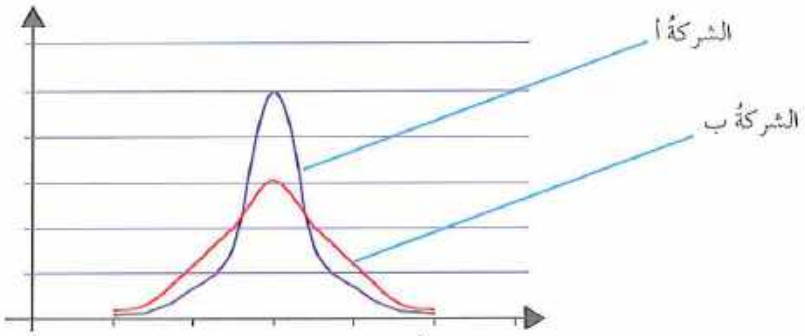
٨) في الخليةِ J5، اقسمْ I5 على 49،(وهوَ مجموعُ التكراراتِ – ١) للحصولِ على التباينِ . كما في الشكلِ (٧–١٣).

J	I	H	G	F	E	D	C	
	172.872	34.5744	-5.88		20	4	5	1
	99.5328	8.2944	-2.88		84	7	12	2
	0.1872	0.0144	0.12		130	10	13	3
	194.688	9.7344	3.12		260	13	20	4
9.536327	467.28			9.88	494		50	5
								6

الشكلُ (٧–١٣)

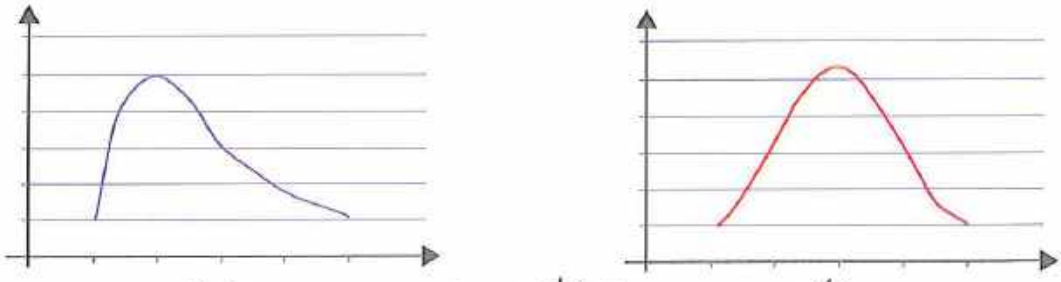
تدريبُ ٧–٢

١) الشكلُ (٧–١٤)، يُمثلُ مُنحنييْنِ تكراريْنِ طبيعييْنِ، لرواتبِ الموظفينَ الشهريةِ في شركتيْنِ مختلفتينِ، (أ) و (ب)، بالدينارِ الأردنيِّ. نلاحظُ منَ المنحنى التكراريِّ، أنَّ رواتبَ موظّفي الشركةِ (ب)، أكثرُ تباعدًا عنِ المتوسطِ الحسابيِّ منْ رواتبِ موظّفيْ الشركةِ (أ).
ماذا تستنتجُ بالنسبةِ لتباينِ رواتبِ موظّفي الشركتيْنِ (أ) و (ب)؟



الشكلُ (٧–١٤)

٢) في الشكلِ (٧–١٥)، أيُّ المنحنييْنِ التكراريْنِ أ ، ب، يُمثّلُ التوزيعَ الأكثرَ تشتُّتًا؟ وأيّهُما تتساوَى فيهِ مقاييسُ النزعةِ المركزيةِ؟ وضّحْ إجابَتَكَ.



(ب) الشكلُ (٧–١٥) (أ)

مثالُ (٧–٤)

الجدولُ (٧–٩)، يُمثلُ توزيعَ الأجورِ اليوميةِ لِـ ٢٠ عاملًا، منْ عمالِ قسمِ التجميعِ، في مصنعٍ لألعابِ الأطفالِ، والجدولُ (٧–١٠)، يُمثّلُ توزيعَ الأجورِ اليوميةِ لِـ ٢٠ عاملًا، منْ عمالِ قسمِ التغليفِ، في المصنعِ نفسِهِ لأقربِ دينارٍ:

الجدولُ (٧–٩)

فئاتُ الأجورِ بالدينارِ	٧ – ٩	١٠ – ١٢	١٣ – ١٥	١٦ – ١٨
أعدادُ العمالِ/قسمُ التجميعِ	٤	٨	٦	٢

الجدولُ (٧–١٠)

فئاتُ الأجورِ بالدينارِ	٦ – ٨	٩ – ١١	١٢ – ١٤	١٥ – ١٧
أعدادُ العمالِ/قسمُ التغليفِ	٥	٤	٧	٤

١) جدِ الانحرافَ المعياريَّ لأجورِ عمالِ كلِّ قسمٍ.

٢) أيُّ القسمينِ تُعدُّ أجورُ العمالِ فيهِ أكثرَ تشتتًا منَ الآخرِ؟

الحلُّ

١) نُكوِّنُ جدولًا لقسمِ التجميعِ وجدولًا لقسمِ التغليفِ على النحوِ الآتي:

قسمُ التجميعِ

الفئاتُ	عددُ العمالِ	مراكزُ الفئاتِ	س × ت	س – $\bar{س}$	$(س – \bar{س})^{٢}$	$(س – \bar{س})^{٢} \times ت$
٧ – ٩	٤	٨	٣٢	٣,٩–	١٥,٢١	٦٠,٨٤
١٠ – ١٢	٨	١١	٨٨	٠,٩–	٠,٨١	٦,٤٨
١٣ – ١٥	٦	١٤	٨٤	٢,١	٤,٤١	٢٦,٤٦
١٦ – ١٨	٢	١٧	٣٤	٥,١	٢٦,٠١	٥٢,٠٢
المجموعُ	٢٠		٢٣٨			١٤٥,٨

نجدُ المتوسطَ الحسابيَّ لأجورِ عمالِ قسمِ التجميعِ:

$$\bar{س} = \frac{\sum س \times ت}{\sum ت} = \frac{٢٣٨}{٢٠} = ١١,٩$$

نجدُ الانحرافَ المعياريَّ لأجورِ عمالِ قسمِ التجميعِ:

$$ع_{\text{قسم التجميع}} = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^{٢} \times ت_ر}{ن - ١}} = \sqrt{\frac{١٤٥,٨}{١٩}} \approx \sqrt{٧,٦٧} \approx ٢,٧$$

قسمُ التغليفِ

الفئاتُ	عددُ العمالِ	مراكزُ الفئاتِ	س × ت	س − $\overline{س}$	(س − $\overline{س}$)^{٢}	(س − $\overline{س}$)^{٢} × ت
٦ − ٨	٥	٧	٣٥	−٤,٥	٢٠,٢٥	١٠١,٢٥
٩ − ١١	٤	١٠	٤٠	−١,٥	٢,٢٥	٩
١٢ − ١٤	٧	١٣	٩١	١,٥	٢,٢٥	١٥,٧٥
١٥ − ١٧	٤	١٦	٦٤	٤,٥	٢٠,٢٥	٨١
المجموعُ	٢٠		٢٣٠			٢٠٧

نجدُ المتوسطَ الحسابيَّ لأجورِ عمالِ قسمِ التغليفِ:

$$\overline{س} = \frac{\sum س \times ت}{\sum ت} = \frac{٢٣٠}{٢٠} = ١١,٥$$

نجدُ الانحرافَ المعياريَّ لأجورِ عمالِ قسمِ التغليفِ:

$$ع_{\text{قسم التغليف}} = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^{٢} \times ت_ر}{ن - ١}} = \sqrt{\frac{٢٠٧}{١٩}} \approx \sqrt{١٠,٨٩} \approx ٣,٣$$

٢) أجورُ العمالِ في قسمِ التغليفِ أكثرُ تباعدًا وتشتتًا، منْ أجورِ العمالِ في قسمِ التجميعِ. لماذا؟

تدريبُ ٧-٣

١) حلَّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ. باستخدامِ العلاقةِ:

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر^{٢} \times ت) - ن \times (\overline{س})^{٢}}{ن - ١}}$$

٢) استخدمْ برمجيةَ اكسل Excel في حلِّ المسألةِ الواردةِ بدايةَ الدرسِ.

الأسئلةُ ؟

١) يُمثّلُ الجدولُ (٧–١١) أعدادَ الطلبةِ في إحدى المدارسِ:

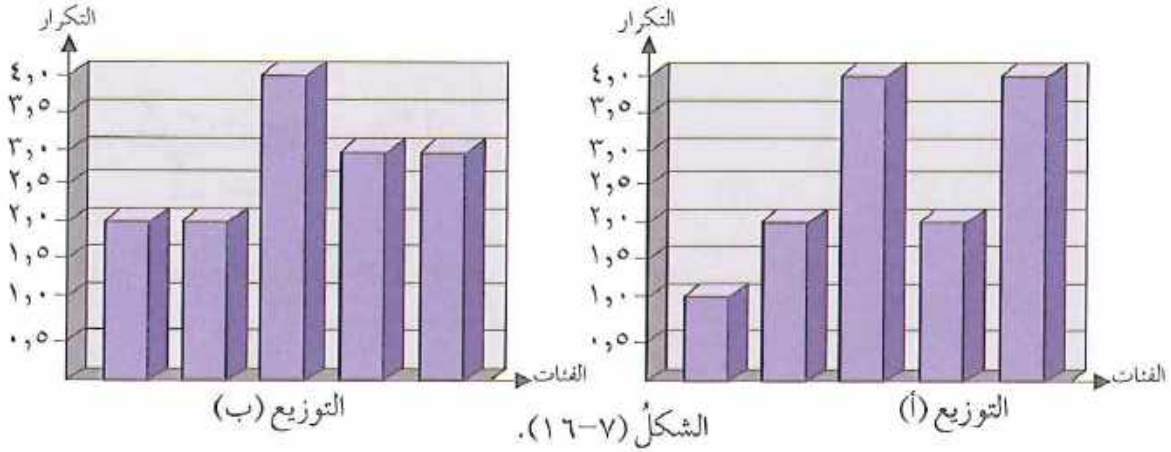
الجدولُ (٧–١١)

فئاتُ الأعمارِ	١١ – ١٣	١٤ – ١٦	١٧ – ١٩
أعدادُ الطلابِ	٥٦٠	٤٤٠	٢٠٠

احسبِ:

أ) المَدَى لأعمارِ الطلابِ. ب) الانحرافَ المعياريَّ لأعمارِ الطلابِ.

٢) الشكلُ (٧–١٦) يُمثّلُ بياناتٍ للتوزيعيْنِ أ، ب:



الشكلُ (٧–١٦).

اعتمادًا على الشكلِ:

أ) احسبِ:

- المَدَى لكلٍّ منَ التوزيعيْنِ.
- المتوسطَ الحسابيَّ لكلٍّ منَ التوزيعيْنِ.
- الانحرافَ المعياريَّ لكلٍّ منَ التوزيعيْنِ.

ب) أيُّ التوزيعيْنِ أكثرُ تجانسًا؟

جـ) يقولُ خالدٌ: "لا داعيَ لحسابِ الانحرافِ المعياريِّ لمعرفةِ أيِّ التوزيعيْنِ أكثرَ تجانسًا، يمكنُ معرفةُ ذلكَ من خلالِ ملاحظةِ البياناتِ". هل توافقُهُ الرأي؟ برِّرْ إجابَتَكَ.

٣) يتكونُ فريقُ كرةِ الطائرةِ من ١٢ لاعبًا. ويُمثّلُ الجدولُ (٧-١٢) توزيعًا لأطوالِ لاعبِي الفريقيْنِ أ، ب لأقربِ سنتيمرٍ:

الجدولُ (٧-١٢)

فئاتُ أطوالِ اللاعبينَ	١٧٠ - ١٧٨	١٧٩ - ١٨٧	١٨٨ - ١٩٦	١٩٧ - ٢٠٥
أعدادُ لاعبِيْ الفريقِ أ	٣	٥	١	٣
أعدادُ لاعبِيْ الفريقِ ب	٢	٤	٤	٢

أيُّ الفريقيْنِ أ أو ب أطوالُ لاعبيه أكثرُ تجانسًا منَ الآخرَ؟ ولماذا؟

٤) أيُّ العباراتِ الآتيةِ صحيحةٌ وأيّها خطأ معَ توضيحِ السببِ؟

أ) شركتانِ، معدلُ بيعِ الشركةِ الأُولى يُساوي ٤٥٠ دينارًا أسبوعيًا، ومعدلُ بيعِ الشركةِ الثانيةِ يُساوي ٦٠٠ دينارًا أسبوعيًا، لذلكَ تكونُ مبيعاتُ الشركةِ الثانيةِ أكثرَ تباعدًا عن متوسطِها الحسابيِّ منْ مبيعاتِ الشركةِ الأولى.

ب) إذا كانَ مدَى علاماتِ شعبةِ أ في أحدِ الاختباراتِ هو ١٢، ومَدَى علاماتِ شعبةِ ب في الاختبارِ نفسهِ هو ١٥، فإنَّ علاماتِ الشعبةِ ب أكثرُ تشتتًا منْ علاماتِ الشعبةِ أ. (علمًا بأنَّ عددَ الطلبةِ في الشعبتيْنِ متساوٍ).

جـ) إذا كانَ مجموعُ مُربعاتِ انحرافاتِ قيمِ توزيعٍ ما عنْ متوسطِها الحسابيِّ يُساوي صفرًا، فإنّ ذلكَ يعني أنَّ الانحرافَ المعياريَّ يُساوي صفرًا.

د) إذا كانَ الانحرافُ المعياريُّ لمجموعةٍ مِنَ القيمِ = ٢,٣، والانحرافُ المعياريُّ لمجموعةٍ أُخرى منَ القيمِ = ١,٤ ،فإنَّ قيمَ التوزيعِ الأولِ أكثرُ تباعدًا وتشتتًا من قيمِ التوزيعِ الثاني.

هـ) كلَّما زادتْ قيمةُ المتوسطِ الحسابيِّ، زادتْ قيمةُ الانحرافِ المعياريِّ.

ثانيًا أثرُ تعديلِ البياناتِ على مقاييسِ التشتت
The Effect of Modefying Data on Measures of Variation

قامتْ ولاءُ بتطبيقِ اختبارٍ في مادةِ اللغةِ العربيةِ، لطالباتِ الصفِّ العاشرِ الأساسيِّ، البالغِ عددُهنَّ ٤٠ طالبةً،نهايتهُ العُظمى ٢٠. وكانَ المتوسطُ الحسابيُّ للعلاماتِ ١٢، والمَدَى لها ١٥ . فإذا قامتْ ولاءُ بإضافةِ علامتيْنِ لكلِّ طالبةٍ منْ طالباتِ الصفِّ:

١) هلْ يتغيّرُ كلٌّ منَ المتوسطِ الحسابيِّ والمَدَى لهذهِ العلاماتِ؟

٢) هل تتأثرُ مقاييسُ النزعةِ المركزيةِ بعمليتي الجمعِ والضربِ؟

تعلمتَ سابقًا أثرَ تعديلِ البياناتِ على مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ (المتوسطِ الحسابيِّ، المنوالِ، الوسيطِ). حيثُ إنّ مقاييسَ النزعةِ المركزيةِ تتأثرُ بالعملياتِ الحسابيةِ الأربعِ (الجمعِ، والطرحِ، والضربِ، والقسمةِ).

مثالُ (٧-٥)

إذا كانتْ علاماتُ (٧) طلابٍ في أحدِ الاختباراتِ كالآتي:

٧، ٦، ٨، ٥، ٤، ٦، ٦ . وعُدّلتِ العلاماتُ بضربِ كلِّ علامةٍ في العددِ ٢ وإضافةِ ثلاثِ علاماتٍ على ناتجِ الضربِ لكلٍ منْهَا.

١) اكتبِ العلاقةَ التي تُعبّرُ عن هذا التعديلِ.

٢) احسبِ المتوسطَ الحسابيَّ قبلَ التعديلِ وبعدَهُ.

الحلُّ

١) العلاقةُ التي تعبرُ عنِ التعديلِ هيَ:

ص = ٢س + ٣، حيثُ س: العلامةُ قبلَ التعديلِ ، ص: العلامةُ بعدَ التعديلِ.

٢) المتوسطُ الحسابيُّ قبلَ $= \overline{س}_{قبل} = \frac{\sum س}{ن} = \frac{٤٢}{٧} = ٦$

المتوسطُ الحسابيُّ بعدَ $= \overline{س}_{بعد} = \overline{س}_{بعد} = ٢ \times \overline{س}_{قبل} + ٣$

$= ٢ \times ٦ + ٣$

$= ١٢ + ٣ = ١٥$

نشاطُ (٧ – ٣)

إذا كانتْ كُتَلُ (٥) طلابٍ في سنةٍ ما كالآتي: ٣٨، ٤٠، ٤٥، ٥٢، ٥٥ لأقربِ كيلوغرام . وزادتْ كُتَلُهم في السنةِ التاليةِ بمقدارِ خمسةِ كيلوغراماتٍ لكلِّ طالبٍ.

احسبْ:

- المتوسطَ الحسابيَّ قبلَ الزيادةِ وبعدَها .
- المَدَى قبلَ الزيادةِ وبعدَها .
- الانحرافَ المعياريَّ قبلَ الزيادةِ وبعدَها .
- ماذا تلاحظُ؟

نستنتجُ ممّا سبقَ أنَّ:

مقاييسَ التشتتِ لا تتأثرُ بعمليتَيْ جمعِ مقدارٍ ثابتٍ أو طرحِهِ لكلِّ مشاهدةٍ.

تدريبُ ٧–٤

قامتْ فاطمةُ بتوفيرِ مبلغٍ منَ القروشِ منْ مصروفِها اليوميِّ لمدةِ أسبوعٍ، فكانتِ القيمُ كالآتي: ١٠، ١٥، ٢٠، ١٠، ٢٠، ١٥، ١٠. ولكنّها لمْ توفّرِ المبلغَ الكافيَ لشراءِ علبةِ الألوانِ التي رأتْها في المكتبةِ، ورغبتْ بشرائِها. فقامتْ بزيادةِ التوفيرِ بمقدارِ خمسةِ قروشٍ يوميًا، لمدةِ أسبوعٍ آخرَ. احسبِ:

١) المَدَى للمبلغِ الذي وفرتْهُ فاطمةُ، خلالَ الأسبوعِ الأولِ.

٢) الانحرافَ المعياريَّ للمبلغِ الذي وفرتْهُ فاطمةُ، خلالَ الأسبوعِ الأولِ.

٣) المَدَى للمبلغِ الذي وفرتْهُ فاطمةُ، خلالَ الأسبوعِ الثاني.

٤) الانحرافَ المعياريَّ للمبلغِ الذي وفرتْهُ فاطمةُ، خلالَ الأسبوعِ الثاني.

نشاطُ (٧ – ٤)

تقدمَ (٨) أشخاصٍ لاختبارٍ في اللغةِ الإنجليزيةِ، نهايتُهُ العُظمى (٢٥)، فكانتْ نتائجُهم كالآتي:
١١، ١٠، ١٤، ١٦، ١٩، ٢٠، ٢٢، ٢٤. ولكيْ تُصبحَ النهايةُ العُظمى (١٠٠)، قامَ المعلمُ بتعديلِ العلاماتِ للأشخاصِ الثمانيةِ، بضربِ كلِّ علامةٍ بالعددِ (٤)، احسبْ:

- المدى قبلَ التعديلِ وبعدَهُ.
- الانحرافَ المعياريَّ قبلَ التعديلِ وبعدَهُ .
- التباينَ قبل التعديلِ وبعدَهُ.
- ماذا تلاحظُ؟

تدريبُ ٧-٥

إذا عُدّلتِ القيمُ: ٦، ٤، ٣، ٢، ٥، بضربِ كلِّ قيمةٍ بالعددِ (–٢)، احسبِ:

١) المَدَى للقيمِ قبل التعديلِ وبعدَهُ.

٢) الانحرافَ المعياريَّ للقيمِ قبل التعديلِ وبعدَهُ.

٣) التباينَ للقيمِ قبلَ التعديلِ وبعدَهُ.

إذا ضُربتْ كلُّ مشاهدةٍ من توزيعٍ ما بعددٍ ثابتٍ (أ)، فإنَّ قيمَ كلٍّ منَ المَدَى والانحرافِ المعياريِّ تُضربُ بالقيمةِ المطلقةِ للثابتِ (أ). أمّا التباينُ، فإنّهُ يُضربُ بمربّعِ الثابتِ (أ).

مثالُ (٧ – ٦)

إذا كانَ المتوسطُ الحسابيُّ لمجموعةٍ منَ المشاهداتِ يُساوي (٥)، ومَدَاها يُساوي (٧)، وانحرافُها المعياريُّ يُساوي (٢,٥). عُدّلتْ جميعُ القيمِ حسبَ العلاقةِ:

ص = ٨ – ٤س ، حيثُ، س: القيمةُ قبلَ التعديلِ، ص: القيمةُ بعدَ التعديلِ.

احسبِ:

١) المتوسطَ الحسابيَّ بعدَ التعديلِ.
٢) المدى بعدَ التعديلِ .
٣) الانحرافَ المعياريَّ بعدَ التعديلِ.
٤) التباينَ بعدَ التعديلِ .

الحلُّ

١) $\overline{س}_{\text{بعدَ}} = ٤ \times \overline{س}_{\text{قبلَ}} - ٨$

$\overline{س}_{\text{بعدَ}} = ٤ \times ٥ - ٨ = ٢٠ - ٨ = -١٢$

٢) المدى$_{\text{بعدَ}}$ = $|-٤|$ × المدى$_{\text{قبلَ}}$ (لماذا القيمة المطلقة؟)

= ٤ × ٧ = ٢٨

٣) ع$_{\text{بعدَ}}$ = $|-٤|$ × ع$_{\text{قبلَ}}$ (لماذا القيمة المطلقة؟)

= ٤ × ٢,٥ = ١٠

٤) التبايُنُ قبلَ التعديلِ = ع$^{٢}_{\text{قبلَ}}$ = $(٢,٥)^{٢}$ = ٦,٢٥

التبايُنُ بعدَ التعديلِ = ع$^{٢}_{\text{بعدَ}}$ = $(٤)^{٢}$ × ع$^{٢}_{\text{قبلَ}}$ = ١٦ × ٦,٢٥ = ١٠٠

تدريبُ ٦-٧

إذا كانَ المدى لمجموعةٍ منَ المشاهداتِ يُساوي (٦)، والتبايُنُ لها يُساوي (١,٦٩). وعُدّلتِ المشاهداتُ حسبَ العلاقةِ:

ص = ٥س −٣. حيثُ س: المشاهدةُ قبلَ التعديلِ، ص: المشاهدةُ بعدَ التعديلِ. احسبِ:

١) المدَى بعدَ التعديلِ.

٢) الانحرافَ المعياريَّ بعدَ التعديلِ.

٣) التباينَ بعدَ التعديلِ.

تدريبُ ٧-٧

قامَ راصدٌ جويٌّ بتسجيلِ درجاتِ الحرارةِ، بمقياسِ سلسيوسَ عندَ الساعةِ (١٢) ظهرًا ، في سبعةِ أيامٍ متتاليةٍ من شهرِ آبَ، وحصلَ على القيمِ الآتيةِ:

٤٢، ٣٨، ٤٢، ٤٥، ٤٠، ٤٢، ٣٨.

وعندَما حسبَ المَدَى والانحرافَ المعياريَّ لهذهِ القيمِ، وجدَ أنَّ : المدَى= ٧، ع ≈ ٢,٥٢

أرادَ الراصدُ الجويُّ تحويلَ درجاتِ الحرارةِ التي قاسَها من مقياسِ سلسيوسَ إلى مقياسِ فَهرنهايت. فما قيمةُ كلٍ منَ المَدَى والانحرافِ المعياريِّ لدرجاتِ الحرارةِ بعدَ تحويلِها إلى مقياسِ فِهرنهايت؟ علمًا بأنّ تحويلَ درجاتِ الحرارةِ منْ مقياسِ سلسيوس إلى مقياسِ فِهرنهايت، يُحسبُ وفقَ العلاقةِ الآتيةِ:

ف $= \frac{٩}{٥}$ س + ٣٢ . حيثُ س : درجةُ الحرارةِ بمقياسِ سلسيوس.

ف : درجةُ الحرارةُ بمقياسِ فِهرنهايت.

مثالُ (٧-٧)

يُمثلُ الجدولُ (٤-١٣) نتائجَ علاماتِ طلابِ شعبتَيْ أ، ب مِنْ شعبِ الصفِّ العاشرِ الأساسيِّ في مادةِ اللغةِ الإنجليزيةِ، الذي كانتْ نهايتُه العُظمى ٤٠.

الجدولُ (٤-١٣)

	عددُ الطلابِ	المتوسطُ الحسابيُّ للعلاماتِ	الانحرافُ المعياريُّ للعلاماتِ
الشُعبةُ أ	$ن_١ = ٢٥$	$\overline{س}_١ = ٢٧$	$ع_١ = ٣$
الشعبةُ ب	$ن_٢ = ٢٠$	$\overline{س}_٢ = ٣٦$	$ع_٢ = ٦$

إذا قامتْ إدارةُ المدرسةِ بدمجِ الشعبتيْنِ أ و ب معًا ، في شعبةٍ واحدةٍ. احسبِ:

١) المتوسطَ الحسابيَّ لعلاماتِ الطلابِ، بعدَ دمجِ الشعبتيْنِ.

٢) الانحرافَ المعياريَّ لعلاماتِ الطلابِ، بعدَ دمجِ الشعبتيْنِ.

الحلُّ

١) المتوسطُ الحسابيُّ لعلاماتِ الطلابِ بعدَ دمجِ الشعبتيْنِ هوَ:

$$\overline{س}_{\text{بعدَ الدمجِ}} = \frac{ن_١ \times \overline{س}_١ + ن_٢ \times \overline{س}_٢}{ن_١ + ن_٢}$$

$$= \frac{٢٥ \times ٢٧ + ٢٠ \times ٣٦}{٢٥ + ٢٠} = \frac{٦٧٥ + ٧٢٠}{٤٥} = \frac{١٣٩٥}{٤٥} = ٣١$$

٢) ولحسابِ الانحرافِ المعياريِّ لعلاماتِ الطلابِ بعدَ الدمجِ، نقومُ بالخطواتِ الآتيةِ:

نستخدمُ قانونَ التباينِ لحسابِ مجموعِ مربعاتِ علاماتِ طلابِ كلِّ شعبةٍ على حدةٍ.

$$ع^{٢} = \frac{\sum س^{٢} - ن \times (\overline{س})^{٢}}{ن - ١}$$ ومنهُ يكونُ: $\sum س^{٢} = (ن - ١) \times ع^{٢} + ن \times (\overline{س})^{٢}$

أيْ أنَّ مجموعَ مربعاتِ علاماتِ الطلابِ في الشعبةِ أ هوَ:

$$م_{١} = \sum س^{٢} = (ن_{١} - ١) \times ع_{١}^{٢} + ن_{١} \times (\overline{س}_{١})^{٢}$$

$$م_{١} = \sum س^{٢} = (٢٥ - ١) \times (٣)^{٢} + ٢٥ \times (٢٧)^{٢}$$

$$= ٢١٦ + ١٨٢٢٥ = ١٨٤٤١$$

وبالطريقةِ نفسِها تجدُ أنّ مجموعَ مربعاتِ علاماتِ الطلابِ في الشعبةِ ب هوَ:

$$م_{٢} = \sum س^{٢} = (ن_{٢} - ١) \times ع_{٢}^{٢} + ن_{٢} \times (\overline{س}_{٢})^{٢}$$

$$م_{٢} = \sum س^{٢} = (٢٠ - ١) \times (٦)^{٢} + ٢٠ \times (٣٦)^{٢}$$

$$= ٦٨٤ + ٢٥٩٢٠ = ٢٦٦٠٤$$

فيكونُ تباينُ العلاماتِ للطلابِ بعدَ دمجِ الشعبتيْنِ أ، ب هوَ:

$$ع^{٢}_{\text{بعدَ الدمجِ}} = \frac{(م_{١} + م_{٢}) - (ن_{١} + ن_{٢}) \times (\overline{س})^{٢}}{ن_{١} + ن_{٢} - ١}$$

$$= \frac{١٨٤٤١ + ٢٦٦٠٤ - (٤٥)(٣١)^{٢}}{٤٤}$$

$$= \frac{٤٣٢٤٥ - ٤٥٠٤٥}{٤٤} = \frac{١٨٠٠}{٤٤} \approx ٤٠,٩$$

وعليهِ فإنَّ الانحرافَ المعياريَّ لعلاماتِ الطلابِ بعدَ دمجِ الشعبتيْنِ أ ، ب هوَ:

$$ع \approx \sqrt{٤٠,٩} \approx ٦,٤$$

ويُمكنُ استخدامُ العلاقاتِ الآتيةِ عندَ دمجِ البياناتِ:

المتوسطُ الحسابيُّ بعدَ الدمجِ:

$$\overline{س}_{\text{بعدَ الدمجِ}} = \frac{ن_{١} \times \overline{س}_{١} + ن_{٢} \times \overline{س}_{٢}}{ن_{١} + ن_{٢}}$$

التباينُ بعدَ الدمجِ:

$$ع^{٢}_{\text{بعدَ الدمجِ}} = \frac{(م_{١} + م_{٢}) - (ن_{١} + ن_{٢}) \times (\overline{س})^{٢}}{ن_{١} + ن_{٢} - ١}$$

حيثُ: م$_{١}$ مجموعُ مربعاتِ قيمِ المجموعةِ الأولى، م$_{٢}$ مجموعُ مربعاتِ قيمِ المجموعةِ الثانيةِ.

أيْ أنّ: م$_{١}$ = $\sum س^{٢}$ = (ن$_{١}$ − ١) × ع$_{١}^{٢}$ + ن$_{١}$ × ($\overline{س}_{١}$)^{٢}

م$_{٢}$ = $\sum س^{٢}$ = (ن$_{٢}$ − ١) × ع$_{٢}^{٢}$ + ن$_{٢}$ × ($\overline{س}_{٢}$)^{٢}

ن$_{١}$ عددُ القيمِ في المجموعةِ الأولى، ن$_{٢}$ عددُ القيمِ في المجموعةِ الثانيةِ.

$\overline{س}_{١}$ المتوسطُ الحسابيُّ للمجموعةِ الأُولى، $\overline{س}_{٢}$ المتوسطُ الحسابيُّ للمجموعةِ الثانيةِ.

$\overline{س}$ المتوسطُ الحسابيُّ للمجموعتينِ بعدَ الدمجِ.

تدريبُ (٧-٨)

يُبيّنُ الجدولُ (٧-١٤) نتائجَ مجموعةٍ منَ البياناتِ الإحصائيةِ التي استخلَصَها محاسبُ إحدى الشركاتِ لرواتبِ موظفيها في فرعَي أ ، ب ، من فروعِ الشركةِ، بالدينارِ الأردنيِّ:

الجدولُ (٧-١٤)

	عددُ الموظفينَ	المتوسطُ الحسابيُّ للرواتبِ	الانحرافُ المعياريُّ للرواتبِ
الفرعُ أ	ن$_{١}$ = ٨	$\overline{س}_{١}$ = ٤٠٠	ع$_{١}$ = ٤
الفرعُ ب	ن$_{٢}$ = ١١	$\overline{س}_{٢}$ = ٤٨٠	ع$_{٢}$ = ٦

إذا قامتْ إدارةُ الشركةِ بدمجِ فرعيْها أ، ب . فما قيمةُ الانحرافِ المعياريِّ لرواتبِ الموظفينَ في هذهِ الشركةِ بعدَ دمجِ الفرعينِ معًا؟

أحيانًا نحتاجُ إضافةَ بعضِ القيمِ على قيمٍ معطاةٍ، أو حذفَ بعضِ القيمِ، فهلْ تتأثرُمقاييسُ التشتتِ بهذهِ الإضافةِ أو الحذفِ؟

مثالُ (٧-٨)

الجدولُ (٧-١٥) يُمثلُ رواتبَ سبعةِ موظفينَ، في شركةٍ ما، بالدينارِ الأردنيِّ.

الجدولُ (٧-١٥)

الموظفُ	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
الراتبُ	٢٢٠	٢٠٠	٢٥٠	١٨٠	٤٠٠	٣٥٠	٥٠٠

إذا قامتِ الشركةُ بتعيينِ موظفٍ آخرَ براتبِ ٣٨٠ دينارًا. فما قيمةُ الانحرافِ المعياريِّ لرواتبِ الموظفينَ ، قبلَ تعيينِ الموظفِ، وبعدَ تعيينِهِ؟

الحلُّ

نجدُ المتوسطَ الحسابيَّ لرواتبِ الموظفينَ قبلَ تعيينِ الموظفِ:

	س	$س^2$		س	$س^2$
قبلَ تعيينِ الموظفِ	٢٢٠	٤٨٤٠٠	بعدَ تعيينِ الموظفِ	٢٢٠	٤٨٤٠٠
	٢٠٠	٤٠٠٠٠		٢٠٠	٤٠٠٠٠
	٢٥٠	٦٢٥٠٠		٢٥٠	٦٢٥٠٠
	١٨٠	٣٢٤٠٠		١٨٠	٣٢٤٠٠
	٤٠٠	١٦٠٠٠٠		٤٠٠	١٦٠٠٠٠
	٣٥٠	١٢٢٥٠٠		٣٥٠	١٢٢٥٠٠
	٥٠٠	٢٥٠٠٠٠		٥٠٠	٢٥٠٠٠٠
ـــــ	ـــــ	ـــــ		٣٨٠	١٤٤٤٠٠
المجموعُ	٢١٠٠	٧١٥٨٠٠	المجموعُ	٢٤٨٠	٨٦٠٢٠٠

$$\overline{س}_{\text{قبل}} = \frac{\sum س}{ن} = \frac{٢١٠٠}{٧} = ٣٠٠$$

نجدُ الانحرافَ المعياريَّ لرواتبِ الموظفينَ قبلَ تعيينِ الموظفِ:

$$ع_{\text{قبل}} = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر^2 \times ت) - ن \times (\overline{س})^2}{ن - ١}} = \sqrt{\frac{٧١٥٨٠٠ - ٧ \times (٣٠٠)^2}{٦}}$$

$$ع_{\text{قبل}} = \sqrt{\frac{٧١٥٨٠٠ - ٦٣٠٠٠٠}{٦}} = \sqrt{\frac{٨٥٨٠٠}{٦}} = \sqrt{١٤٣٠٠} \approx ١١٩,٥٨$$

نجدُ المتوسطِ الحسابيِّ لرواتبِ الموظفينَ بعدَ تعيينِ الموظفِ:

$$\overline{س}_{\text{بعد}} = \frac{\sum س}{ن} = \frac{٢٤٨٠}{٨} = ٣١٠$$

نجدُ الانحرافَ المعياريَّ لرواتبِ الموظفينَ بعدَ تعيينِ الموظفِ:

$$ع_{\text{بعد}} = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر^{٢} \times ت) - ن \times (\overline{س})^{٢}}{ن - ١}} = \sqrt{\frac{٨٦٠٢٠٠ - ٨ \times (٣١٠)^{٢}}{٧}}$$

$$ع_{\text{بعد}} = \sqrt{\frac{٧٦٨٨٠٠ - ٨٦٠٢٠٠}{٧}} = \sqrt{\frac{٩١٤٠٠}{٧}} = \sqrt{١٣٠٥٧,١٤} \approx ١١٤,٢٧$$

مثالُ (٧-٩)

في المثالِ السابقِ (٧-٨)، إذا استقالَ الموظفانِ ذَوَا الراتبيْنِ ٢٠٠، ٢٥٠ دينارًا. فكمْ يكونُ الانحرافُ المعياريُّ الجديدُ؟

الحلُّ

نجدُ المتوسطَ الحسابيَّ لرواتبِ الموظفينَ بعدَ الاستقالةِ:

	س	س^{٢}
بعدَ استقالةِ الموظفينَ	٢٢٠	٤٨٤٠٠
	١٨٠	٣٢٤٠٠
	٤٠٠	١٦٠٠٠٠
	٣٥٠	١٢٢٥٠٠
	٥٠٠	٢٥٠٠٠٠
المجموعُ	١٦٥٠	٦١٣٣٠٠

$$\overline{س}_{\text{بعد}} = \frac{\sum س}{ن} = \frac{١٦٥٠}{٥} = ٣٣٠$$

نجدُ الانحرافَ المعياريَّ لرواتبِ الموظفينَ بعدَ الاستقالةِ :

$$ع_{\text{بعد}} = \sqrt{\frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر^{٢} \times ت) - ن \times (\overline{س})^{٢}}{ن - ١}} = \sqrt{\frac{٦١٣٣٠٠ - ٥ \times (٣٣٠)^{٢}}{٤}}$$

$$ع_{\text{بعد}} = \sqrt{\frac{٥٤٤٥٠٠ - ٦١٣٣٠٠}{٤}} = \sqrt{\frac{٦٨٨٠٠}{٤}} = \sqrt{١٧٢٠٠} \approx ١٣١,١٥$$

يمكنُنا ملاحظةُ أنَّ قيمةَ الانحرافِ المعياريِّ تتغيرُ إذا حُذفتْ أيٌّ منَ القيمِ، أو أُضيفَ إليها قِيمٌ أخرى، أو أُجريَ تغيير على هذِه القيمِ. والسببُ في ذلكَ، هوَ أنَّ قيمةَ الانحرافِ المعياريِّ تعتمدُ على القيمِ جميعِها.

تدريبُ ٧-٩

يعملُ محمدٌ مندوبَ مبيعاتٍ لشركةٍ ما .قامَ ببيعِ منتجاتٍ للشركةِ لمدةِ ثمانيةِ أيامٍ بالدينارِ الأردنيِّ، على النحوِ الآتِي:

٩٢، ١٠٠، ٩٥، ٩٧، ٨٨، ٩٣، ٩٠، ٩٥. احسبِ:

١) التباينَ لمبيعاتِ محمدٍ.

٢) التباينَ الجديدَ، إذا حُذِفَ أكبرُ مبلغٍ وأقلُّ مبلغٍ.

الأسئلةُ ؟

١) إذا كانَ الانحرافُ المعياريُّ لمجموعةٍ منَ المشاهداتِ (٤)، ومداها (١٠)، وعُدّلتْ جميعُ المشاهداتِ وفقَ العلاقةِ الآتيةِ: ص = ٤س – ١٠ ، حيثُ س: المشاهدةَ قبلَ التعديلِ، ص: المشاهدةُ بعدَ التعديلِ. احسبِ:

أ) المشاهدةَ قبلَ التعديلِ، التي أصبحتْ قيمتُها بعدَ التعديلِ ٢٢؟

ب)المدَى، والانحرافَ المعياريَّ، والتباينَ، للمشاهداتِ بعدَ التعديلِ؟

٢) إذا كانَ التباينُ لعلاماتِ (٣٠) طالبًا منْ طلابِ أحدِ شعبِ الصفِّ العاشرِ الأساسيِّ، في اختبارِ اللغةِ العربيةِ، في إحدى المدارسِ يُساوي (٣٦). وقامَ معلمُ اللغةِ العربيةِ بتعديلِ علاماتِ الطلابِ، بضربِ كلِّ علامةٍ بمعاملٍ ثابتٍ قيمتُهُ (٢)، ثمَّ إضافةِ (٥) علاماتٍ لكلِّ طالبٍ. ما قيمةُ الانحرافِ المعياريِّ لعلاماتِ الطلابِ بعدَ التعديلِ؟

٣) قامَ خالدٌ بقياسِ كتلِ زملائِهِ في الصفِّ، البالغِ عددُهم (٢٥) طالبًا، فكانَ المتوسطُ الحسابيُّ لكتلِهِمْ (٤٥) كيلوغرام، والانحرافَ المعياريَّ لهذهِ الكُتَلِ (٨) كيلوغرام . إذا انتقلَ منَ الصفِّ أحدُ الطلابِ، وكانتْ كُتلتُهُ (٥٣) كيلوغرام. احسبِ:

أ) المتوسطَ الحسابيَّ لكتلِ الطلابِ بعدَ انتقالِ الطالبِ.

ب) التباينَ لكتلِ الطلابِ بعدَ انتقالِ الطالبِ.

٤) مدرسةٌ فيها ثلاثُ شُعبٍ للصفِّ العاشرِ الأساسيِّ، تَقَدّمَ طلابُها لاختبارٍ في الرياضياتِ نهايتُه العُظمى (٢٠)، وحصلَ المعلمُ على النتائجِ الموضحةِ في الجدولِ (٧–١٦).

الجدولُ (٧–١٦)

الشعبُ	عددُ الطلابِ	المتوسطُ الحسابيُّ	الانحرافُ المعياريُّ
الشعبةُ أ	٤٢	١٣	٦
الشعبةُ ب	٤١	١٢	٤

الشعبةُ جـ	٤٠	١٥	٥

احسبْ كلًّا منَ المتوسطِ الحسابيِّ، والانحرافِ المعياريِّ لعلاماتِ طلابِ الصفِّ العاشرِ في المدرسةِ.

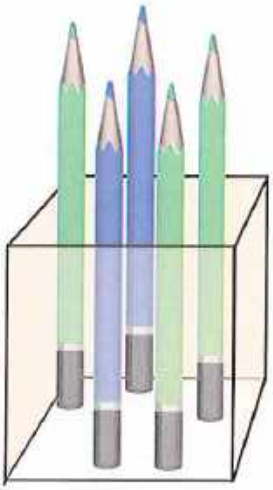
٥) إذا كانَ المتوسطُ الحسابيُّ لمجموعةٍ منَ المشاهداتِ (٣٠)، والانحرافُ المعياريُّ لها (٣). عُدلتِ المشاهداتُ وفقَ العلاقةِ الآتيةِ: ص= ٨س + ٣ ، حيثُ س: المشاهدةُ قبلَ التعديلِ، ص: المشاهدةُ بعدَ التعديلِ. احسبِ التباين بعدَ التعديلِ.

الاحتمالاتُ
The Probability

النتاجاتُ

- تتعرفُ قوانينَ الاحتمالاتِ.
- تُطبّقُ قوانينَ الاحتمالاتِ في مسائلَ حياتيةٍ.
- تتعرفُ الاحتمالَ المشروطَ والحوادثَ المستقلةَ.
- تستخدمُ الاحتمالَ المشروطَ والحوادثَ المستقلةَ في حلِّ مسائلَ حياتيةٍ.

أولًا قوانينُ الاحتمالاتِ Rules of Probability



أحمدُ وحامدٌ وسارةُ ثلاثةُ أخوةٍ، لديهم صُندوقٌ، وُضعَ فيهِ خمسةُ أقلامٍ متماثلةٍ: ثلاثةُ أقلامٍ لونُها أخضرُ، وقلمانِ لونُهُما أزرقُ. سُحبَ منَ الصندوقِ قلمانِ على التوالي، ودونَ إرجاعٍ، فإذا كانَا منَ اللونِ الأخضرِ، يأخذُهمَا أحمدُ، وإذا كانا منَ اللونِ الأزرقِ، يأخذُهما حامدٌ، وإذا كانا مختلفَي اللونِ، تأخذُهما سارةُ. أيُّ الأخوةِ الثلاثةِ لهُ فرصةٌ أكبرُ في الحصولِ على القلميْنِ؟

١ – التجربةُ العشوائيةُ

هي التجربةُ التي يمكنُ معرفةُ جميعِ نواتِجِها الممكنةِ قبلَ إجرائِها، ولكنْ لا يمكنُ تحديدُ أيٍّ منْ هذهِ النواتجِ سيتحققُ فعلًا إلّا بعد إجراءِ التجربةِ. مثلُ: إلقاءِ حجرِ النردِ، إلقاءِ قطعةِ نقدٍ، سحبُ كرةٍ من كيسٍ فيهِ مجموعةٌ منَ الكراتِ المتماثلةِ والمختلفةِ في اللونِ.

والتجاربُ العشوائيةُ مرتبطةٌ بمفهومٍ يستخدمُ في معظمِ الحالاتِ، هوَ: مفهومُ **الاحتمالِ**، وإليكَ بعضُ المفاهيمِ التي تحتاجُها في هذا الدرسِ:

أ) **الفضاءُ العَيِّنيُّ**: هوَ مجموعةُ جميعِ النواتجِ الممكنةِ لتجربةٍ عشوائيةٍ. ويُرمزُ لهُ بالرمزِ (Ω).

ب) **الحادثُ**: هوَ مجموعةٌ جزئيةٌ منَ الفضاءِ العينيِّ لتجربةٍ عشوائيةٍ. ويُرمزُ لَهُ بالرمزِ (ح).

جـ) **احتمالُ وقوعِ حادثٍ ما**: هوَ فرصةُ وقوعِ ذلكَ الحادثِ، ويُرمزُ لهُ بالرمزِ ل (ح). وتكونُ قيمتُهُ محصورةً بينَ الصفرِ والواحدِالصحيحِ (٠ ≤ ل (ح) ≤ ١)

٢- أنواعُ الحوادثِ:

أ) **الحادثُ البسيطُ**: هوَ الحادثُ الذي يحتَوي عنصرًا واحدًا منَ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ Ω.

ب) **الحادثُ المركَّبُ**: هوَ الحادثُ الذي يحتوي عنصريْنِ أو أكثرَ، منْ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ Ω.

جـ) **الحادثُ المستحيلُ**: هوَ الحادثُ الذي لا يحتوي أيّ عنصرٍ منْ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ Ω، ويُساوي ∅. ويكونُ احتمالُه يُساوي صفرًا.

د) **الحادثُ الأكيدُ**: هوَ الحادثُ الذي يحتوي جميعَ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ Ω، ويُساوي Ω. ويكونُ احتمالُه يُساوي ١ .

وقد تعلمْنا سابقًا أنَّهُ:

إذا كانَ Ω الفضاءَ العينيَّ لتجربةٍ عشوائيةٍ، وكانَ ح ⊂ Ω. فإنَّ احتمالَ وقوعِ الحادثِ ح هوَ:

$$\text{ل}(ح) = \frac{\text{عددَ عناصر الحادثِ ح}}{\text{عددِ عناصر الفضاءِ العينيِّ}} = \frac{\text{عددَ عناصرِ ح}}{\text{عددِ عناصرِ } \Omega} = \frac{\text{ع}(ح)}{\text{ع}(\Omega)}$$

مثالُ (٧- ١٠)

في تجربةِ إلقاءِ قطعةِ نقدٍ معدنيةٍ مرتيْنِ، وتسجيلِ النواتجِ الظاهرةِ على الوجهِ العلويِّ في كلِّ مرةٍ.

١) مثِّلِ الفضاءَ العينيَّ للتجربةِ بطريقةِ الشجرةِ، ثمّ اكتبْ عناصرَ الفضاءِ العينيِّ.

٢) ما عددُ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ لهذهِ التجربةِ؟

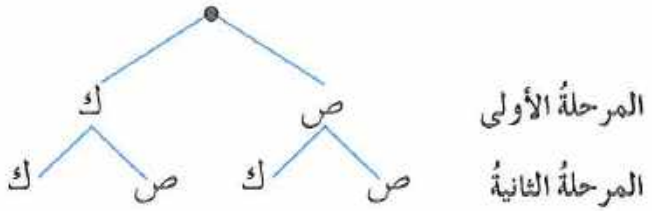
٣) ما احتمالُ ظهورِ كتابةٍ على الوجهِ العلويِّ في كلِّ مرةٍ؟

٤) ما احتمالُ ظهورِ صورةٍ على أحدِ الوجهيْنِ، وكتابةٍ على الوجهِ الآخرِ؟

الحلُّ

نرمزُ للصورةِ بالرمزِ ص، وللكتابةِ بالرمزِ ك.

١) تمثيلُ النواتجِ الممكنةِ بطريقةِ الشجرةِ:



النواتجُ الممكنةُ = {(ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك)}

٢) عددُ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ = ٢ × ٢ = $٢^{٢}$ = ٤

٣) ليكنْ $ح_{١}$ = ظهورَ كتابةٍ على الوجهِ العلويِّ في كلِّ مرةٍ،

أيْ أنَّ: $ح_{١}$ = {(ك، ك)} حادثٌ بسيطٌ

$$ل(ح_{١}) = \frac{ع(ح_{١})}{ع(\Omega)} = \frac{١}{٤}$$

٤) ليكنْ $ح_{٢}$: ظهورُ صورةٍ على أحدِ الوجهيْنِ، وكتابةٍ على الوجهِ الآخرِ،

أيْ أنَّ: $ح_{٢}$ = {(ص ، ك) ، (ك ، ص)} حادثٌ مركبٌ

$$ل(ح_{٢}) = \frac{ع(ح_{٢})}{ع(\Omega)} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$$

تدريبُ ٧-١٠

في تجربةِ إلقاءِ ثلاثِ قطعِ نقدٍ معدنيةٍ مختلفةٍ مرةً واحدةً، وتسجيلِ النواتجِ الظاهرةِ على الأوجهِ العلويةِ لقطعِ النقدِ:

١) مثّلِ الفضاءَ العينيَّ للتجربةِ بطريقةِ الشجرةِ، ثمّ اكتبْ عناصرَ الفضاءِ العينيِّ.

٢) ما عددُ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ لهذهِ التجربةِ؟

٣) ما احتمالُ ظهورِ ثلاثِ صورٍ، على الأوجُهِ العلويةِ لقطعِ النقدِ؟

٤) ما احتمالُ ظهورِ كتابتيْنِ على الأقلِّ، على الأوجُهِ العلويةِ لقطعِ النقدِ؟

فكّرْ

هلْ يوجدُ فرقٌ بينَ تجربةِ إلقاءِ ثلاثِ قطعٍ مختلفةٍ منَ النقدِ المعدنيِّ، وتسجيلِ الأوجُهِ العلويةِ لها، وتجربةِ إلقاءِ قطعةِ نقدٍ معدنيةٍ ثلاثَ مراتٍ، وتسجيلِ النواتجِ الظاهرةِ على الوجهِ العلويِّ في كلِّ مرةٍ؟

تدريبُ ٧-١١

صندوقٌ يحتوي عشرَ بطاقاتٍ متماثلةٍ مرقمةٍ منْ ٠ إلى ٩، أختيرتْ بطاقةٌ واحدةٌ بشكلٍ عشوائيٍّ. ما احتمالُ:

١) ظهورِ الرقمِ ٩؟ ٢) عدمِ ظهورِ الرقمِ ٩؟

نشاطُ (٧-٥)

في تجربةِ إلقاءِ حجَريْ نردٍ مختلفينِ مرةً واحدةً، وتسجيلِ عددِ النقاطِ الظاهرةِ على الوجهِ العلويِّ لكلٍ منْهُما. أكملِ الجدولَ (٧-١٧) الآتِي:

الجدولُ (٧-١٧)

	١	٢	٣	٤	٥	٦
١	(١، ١)	(٢، ١)	(٣، ١)	(٤، ١)	(٥، ١)	(٦، ١)
٢	(١، ٢)					
٣	(١، ٣)					
٤	(١، ٤)					
٥	(١، ٥)					
٦	(١، ٦)					

- ما عددُ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ لهذهِ التجربةِ؟
- ما احتمالُ الحصولِ على عددينِ مجموعُهُما ٧؟

◄ ما احتمالُ الحصولِ على عددَيْنِ زوجيَيْنِ؟

◄ ما احتمالُ الحصولِ على عددَيْنِ مجموعُهُما أقلُّ مِنْ أو مساوٍ للعددِ ٥؟

تدريبُ ٧-١٢

في نشاطِ (٧-٥). احسبِ:

١) احتمالَ الحصولِ على عددَيْنِ مجموعُهُما ١٥ . ما نوعُ الحادثِ؟

٢) احتمالُ الحصولِ على عددَيْنِ مجموعُهُما أقلُّ من ١٣ . ما نوعُ الحادثِ؟

مثالُ (٧-١١)

ذهبَ محمدٌ إلى مطعمٍ يُقدمُ ثلاثةَ أنواعٍ منَ الدجاجِ: المشويِّ، والمقليِّ، والمحشيِّ. ونوعينِ من المقبلاتِ: السلطةِ، واللبنِ. وثلاثةَ أنواعٍ منَ العصيرِ: البرتقالِ، والليمونِ، والمانْجا. وأرادَ محمدٌ تناولَ وجبةٍ كاملةٍ تحوِي نوعًا واحدًا منْ كلٍّ منَ الأصنافِ الثلاثةِ: الدجاجِ والمقبلاتِ والعصيرِ:

١) اكتبْ عناصرَ الفضاءِ العينيِّ.

٢) ما عددُ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ؟

الحلُّ

١) Ω = {(المشويَّ، السلطةَ، البرتقالَ) ، (المشويَّ، السلطةَ، الليمونَ) ، (المشويَّ، السلطةَ، المانْجَا)، .....، (المحشيَّ، اللبنَ، المانجا)}

٢) عددُ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ = ٣ × ٢ × ٣ = ١٨ اختيارًا مبدأُ العدِّ

تدريبُ ٧-١٣

احسبْ عددَ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ في كلٍّ منَ التجاربِ الآتيةِ:

١) إلقاءِ قطعةِ نقدٍ مَعدنيةٍ خمسَ مراتٍ متتاليةٍ.

٢) إلقاءِ أربعةِ أحجارِ نردٍ مختلفةٍ مرةً واحدةً.

٣) إلقاءِ حجرَيْ نردٍ مختلفيْنِ، وثلاثِ قطعٍ نقديّةٍ مَعدنيةٍ مختلفةٍ مرةً واحدةً.

تحدَّثْ

ماذا تعنِي العباراتُ الآتيةُ:

- السحبُ على التوالي معَ الإرجاعِ.
- السحبُ على التوالي دونَ إرجاعٍ.
- السحبُ معًا.

مثالٌ (٧-١٢)

يحتوي صُندوقٌ ثلاثَ بطاقاتٍ متماثلةٍ، كُتِبَ عليها الأرقامُ: ١، ٢، ٣. سُحبتْ منَ الصندوقِ بطاقتانِ على التوالي معَ الإرجاعِ:

١) ما عددُ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ لهذهِ التجربةِ؟

٢) اكتبِ الفضاءَ العينيَّ لهذهِ التجربةِ؟

٣) ما احتمالُ أن يكونَ العددانِ الظاهرانِ على البطاقتيْنِ عدديْنِ فرديْنِ؟

٤) ما احتمالُ أنْ يكونَ مجموعُ العددينِ الظاهريْنِ على البطاقتيْنِ أكبرَ مِنْ ٣؟

الحلُّ

١) عددُ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ $= ٣ \times ٣ = ٩$

٢) $\Omega = \{(١، ١)، (١، ٢)، (١، ٣)، (٢، ١)، (٢، ٢)، (٢، ٣)، (٣، ١)، (٣، ٢)، (٣، ٣)\}$

٣) ليكنْ $ح_١$: العددانِ الظاهرانِ على البطاقتيْنِ عددانِ فرديّانِ.

أيْ أنَّ: $ح_١ = \{(١، ١)، (١، ٣)، (٣، ١)، (٣، ٣)\}$

$$ل(ح_١) = \frac{ع(ح_١)}{ع(\Omega)} = \frac{٤}{٩}$$

٤) ليكنْ $ح_٢$: مجموعُ العددينِ الظاهريْنِ على البطاقتيْنِ أكبرُ من ٣،

أيْ أنَّ: $ح_٢ = \{(١، ٣)، (٢، ٢)، (٢، ٣)، (٣، ١)، (٣، ٢)، (٣، ٣)\}$

$$ل(ح_٢) = \frac{ع(ح_٢)}{ع(\Omega)} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$$

◄ ما احتمالُ الحصولِ على عددَيْنِ زوجيَيْنِ؟

◄ ما احتمالُ الحصولِ على عددَيْنِ مجموعُهُما أقلُّ مِنْ أو مساوٍ للعددِ ٥؟

تدريبُ ٧-١٢

في نشاطِ (٧-٥). احسبِ:

١) احتمالَ الحصولِ على عددَيْنِ مجموعُهُما ١٥ . ما نوعُ الحادثِ؟

٢) احتمالُ الحصولِ على عددَيْنِ مجموعُهُما أقلُّ من ١٣ . ما نوعُ الحادثِ؟

مثالُ (٧-١١)

ذهبَ محمدٌ إلى مطعمٍ يُقدمُ ثلاثةَ أنواعٍ منَ الدجاجِ: المشويِّ، والمقليِّ، والمحشيِّ. ونوعينِ من المقبلاتِ: السلطةِ، واللبنِ. وثلاثةَ أنواعٍ منَ العصيرِ: البرتقالِ، والليمونِ، والمانْجا. وأرادَ محمدٌ تناولَ وجبةٍ كاملةٍ تحوي نوعًا واحدًا منْ كلٍّ منَ الأصنافِ الثلاثةِ: الدجاجِ والمقبلاتِ والعصيرِ:

١) اكتبْ عناصرَ الفضاءِ العينيِّ.

٢) ما عددُ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ؟

الحلُّ

١) Ω = {(المشويِّ، السلطةَ، البرتقالَ) ، (المشويِّ، السلطةَ، الليمونَ) ، (المشويِّ، السلطةَ، المانْجَا)، .....، (المحشيِّ، اللبنَ، المانجا)}

٢) عددُ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ = ٣ × ٢ × ٣ = ١٨ اختيارًا

مبدأُ العدِّ

تدريبُ ٧-١٣

احسبْ عددَ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ في كلٍّ منَ التجاربِ الآتيةِ:

١) إلقاءِ قطعةِ نقدٍ مَعدنيةٍ خمسَ مراتٍ متتاليةٍ.

٢) إلقاءِ أربعةِ أحجارِ نردٍ مختلفةٍ مرةً واحدةً.

٣) إلقاءِ حجرَيْ نردٍ مختلفيْنِ، وثلاثِ قطعٍ نقديّةٍ مَعدنيةٍ مختلفةٍ مرةً واحدةً.

تحدَّثْ

ماذا تعنِي العباراتُ الآتيةُ:

- السحبُ على التوالي معَ الإرجاعِ.
- السحبُ على التوالي دونَ إرجاعٍ.
- السحبُ معًا.

مثالٌ (٧-١٢)

يحتوي صُندوقٌ ثلاثَ بطاقاتٍ متماثلةٍ، كُتِبَ عليها الأرقامُ: ١، ٢، ٣. سُحبتْ منَ الصندوقِ بطاقتانِ على التوالي معَ الإرجاعِ:

١) ما عددُ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ لهذهِ التجربةِ؟

٢) اكتبِ الفضاءَ العينيَّ لهذهِ التجربةِ؟

٣) ما احتمالُ أن يكونَ العددانِ الظاهرانِ على البطاقتيْنِ عدديْنِ فردييْنِ؟

٤) ما احتمالُ أنْ يكونَ مجموعُ العددينِ الظاهريْنِ على البطاقتيْنِ أكبرَ مِنْ ٣؟

الحلُّ

١) عددُ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ $= ٣ \times ٣ = ٩$

٢) $\Omega = \{(١، ١)، (١، ٢)، (١، ٣)، (٢، ١)، (٢، ٢)، (٢، ٣)، (٣، ١)، (٣، ٢)، (٣، ٣)\}$

٣) ليكنْ $ح_١$: العددانِ الظاهرانِ على البطاقتيْنِ عددانِ فرديّانِ.

أيْ أنَّ: $ح_١ = \{(١، ١)، (١، ٣)، (٣، ١)، (٣، ٣)\}$

$$ل(ح_١) = \frac{ع(ح_١)}{ع(\Omega)} = \frac{٤}{٩}$$

٤) ليكنْ $ح_٢$: مجموعُ العددينِ الظاهريْنِ على البطاقتيْنِ أكبرُ من ٣،

أيْ أنَّ: $ح_٢ = \{(١، ٣)، (٢، ٢)، (٢، ٣)، (٣، ١)، (٣، ٢)، (٣، ٣)\}$

$$ل(ح_٢) = \frac{ع(ح_٢)}{ع(\Omega)} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$$

تدريبُ (٧-١٤)

حلَّ مثالَ (٧-١٢)، إذا كانَ:

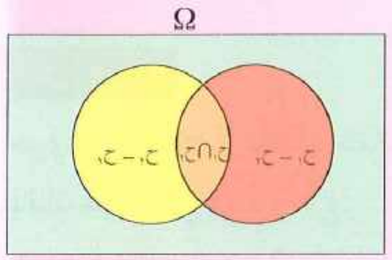
١) السحبُ للبطاقتيْنِ على التوالي دونَ إرجاعٍ.

٢) السحبُ للبطاقتيْنِ معًا.

تعريفٌ

ليكنْ ل اقترانًا يربطُ كلَّ حادثٍ ح في الفضاءِ العينيِّ Ω لتجربةٍ عشوائيةٍ ما بعددٍ حقيقيٍّ، فإنَّ ل يُسمى اقترانَ احتمالٍ، إذا حققَ الفرضياتِ الآتيةِ:

- لكلِّ حادثٍ ح ⊆ Ω، يكونُ ٠ ≤ ل(ح) ≤ ١
- ل(Ω) = ١



ح١ ، ح٢ حادثان في الفضاءِ العينيِّ Ω

إذا كانَ ح١ ، ح٢ حادثيْنِ في Ω، فإنَّ:

- ل (ح١ ∪ ح٢) = ل (ح١) + ل (ح٢) - ل (ح١ ∩ ح٢)
- ل (ح١ - ح٢) = ل (ح١) - ل (ح١ ∩ ح٢)
- ل (ح٢ - ح١) = ل (ح٢) - ل (ح١ ∩ ح٢)

حيثُ:

- ح١ ∩ ح٢ تعني وقوعَ الحادثيْنِ ح١ ، ح٢ معًا.
- ح١ ∪ ح٢ تعني وقوعَ أحدِ الحادثيْنِ ح١ أو ح٢ على الأقلِّ.
- ح١ - ح٢ = ح١ ∩ $\overline{ح_٢}$ وتعني وقوعَ الحادثِ ح١ ، وَعدمَ وقوعِ الحادثِ ح٢.

مثالُ (٧-١٣)

في تجربةِ إلقاءِ حجرَيْ نردٍ مختلفيْنِ مرةً واحدةً، وتسجيلِ عددِ النقاطِ الظاهرةِ على الوجهِ العلويِّ لكلٍّ منهُما، إذا كانَ:

ح١ : ظهورَ عددَيْنِ زوجييْنِ مُتَساوييْنِ.

ح٢ : ظهورَ عددَيْنِ مجموعُهما أكبرُ من أو يساوي ٨.

احسبْ:

١) ل(ح٢ – ح١)

٢) ل(ح١ ∪ ح٢)

الحلُّ

ح١ = {(٢، ٢)، (٤، ٤)، (٦، ٦)}

ح٢ = {(٢، ٦)، (٣، ٥)، (٣، ٦)، (٤، ٤)، (٤، ٥)، (٤، ٦)، (٥، ٣)، (٥، ٤)، (٥، ٥)، (٥، ٦)، (٦، ٢)، (٦، ٣)، (٦، ٤)، (٦، ٥)، (٦، ٦)}

ح١ ∩ ح٢ = {(٤، ٤)، (٦، ٦)}.

وعليهِ يكونُ:

١) ل(ح٢ – ح١) = ل(ح٢) – ل(ح١ ∩ ح٢) = $\frac{١٥}{٣٦} - \frac{٢}{٣٦} = \frac{١٣}{٣٦}$

٢) ل(ح١ ∪ ح٢) = ل(ح١) + ل(ح٢) – ل(ح١ ∩ ح٢)

= $\frac{٣}{٣٦} + \frac{١٥}{٣٦} - \frac{٢}{٣٦} = \frac{١٦}{٣٦} = \frac{٤}{٩}$

تدريبُ ٧–١٥

في تجربةِ إلقاءِ حجرِ نردٍ مرتيْنِ، وتسجيلِ عددِ النقاطِ الظاهرةِ على الوجهِ العلويِّ في كلِّ مرةٍ، إذا كانَ:

ح١: ظهورَ عدديْنِ مجموعُهما أقلُّ من أو يساوي ٦.

ح٢: ظهورَ عدديْنِ مجموعُهما أكبرُ من أو يساوي ٩، احسبِ:

١) ل(ح٢ ∩ ح١)　　٢) ل(ح١ ∪ ح٢)　　٣) ل(ح١ – ح٢)

منْ تدريبِ (٧–١٥)، لاحظْ أنَّ:

ح١ ∩ ح٢ = ∅، وفي هذهِ الحالةِ يُسمَّى ح١ ، ح٢ حادثيْنِ منفصليْنِ، وعليهِ:

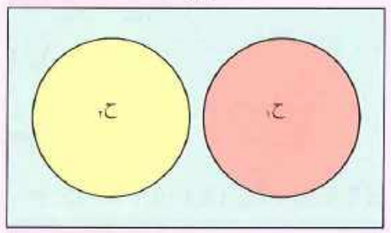
إذا كانَ ح١ ، ح٢ حادثيْنِ منفصليْنِ في الفضاءِ العينيِّ Ω، فإنَّ:

١) ل (ح١ ∩ ح٢) = صفرًا

٢) ل (ح١ ∪ ح٢) = ل(ح١) + ل(ح٢)

٣) ل (ح١ – ح٢) = ل(ح١)

٤) ل (ح٢ – ح١) = ل(ح٢)



ح١ ، ح٢ حادثان منفصلانِ في Ω

مثالٌ (٧-٤ ١)

إذا كانَ ل(ح١) = ٠,٧٥ ، ل(ح٢) = ٠,٦٢ ، ل (ح١ ∪ ح٢) = ٠,٨٤ أجبْ عنْ كلٍّ ممّا يأتِي:

١) هلْ ح١ ، ح٢ حادثانِ منفصلانِ؟ لماذا؟

٢) احسبْ: ل (ح١ – ح٢).

الحلُّ

١) بما أنَّ: ل (ح١ ∪ ح٢) ≠ ل(ح ١) + ل(ح٢)

٠,٨٤ ≠ ٠,٧٥ + ٠,٦٢

٠,٨٤ ≠ ١,٣٧ يكونُ: ح١ ، ح٢ حادثيْنِ غيرَ منفصليْنِ

٢) ل (ح١ ∩ ح٢) = ل(ح١) + ل(ح٢) – ل(ح١ ∪ ح٢)

ل (ح١ ∩ ح٢) = ٠,٧٥ + ٠,٦٢ – ٠,٨٤

ل (ح١ ∩ ح٢) = ١,٣٧ – ٠,٨٤ = ٠,٥٣

ويكونُ: ل (ح١ – ح٢) = ل(ح١) – ل (ح١ ∩ ح٢)

ل (ح١ – ح٢) = ٠,٧٥ – ٠,٥٣ = ٠,٢٢

تدريبُ ٧-١٦

إذا كانَ ح١ ، ح٢ حادثيْنِ في الفضاءِ العينيِّ Ω لتجربةٍ عشوائيةٍ ما، وكانَ: ح١ ⊂ ح٢
حيثُ: ل(ح١) = ٠,٣٥ ، ل(ح٢) = ٠,٩ ، احسبْ:

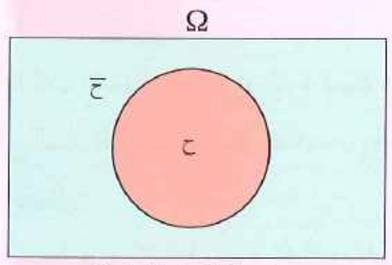
١) ل (ح١ – ح٢)　　٢) ل (ح٢ – ح١)

يوجدُ لكلِّ حادثٍ ح، متممةٌ $\overline{ح}$ في الفضاءِ العينيِّ Ω،
حيثُ:

$$ل(ح) + ل(\overline{ح}) = ١$$

ويكونُ:

$$ل(ح) + ل(\overline{ح}) = ل(ح \cup \overline{ح}) = ل(\Omega) = ١$$



ح ، $\overline{ح}$ حادثان منفصلانِ في Ω

مثالٌ (٧-١٥)

إذا كانَ احتمالُ نجاحِ فؤادٍ في امتحاناتِ الدراسةِ الثانويةِ العامةِ يُساوي خمسةَ أمثالِ احتمالِ عدمِ نجاحِهِ. فما احتمالُ أنْ ينجحَ فؤادٌ في امتحاناتِ الدراسةِ الثانويةِ العامةِ؟

الحلُّ

ليكنْ ح: نجاحُ فؤادٍ في امتحاناتِ الدراسةِ الثانويةِ العامةِ،
وبالتالي $\overline{ح}$: عدمُ نجاحِ فؤادٍ في امتحاناتِ الدراسةِ الثانويةِ العامةِ، ويكونُ:

$$ل(ح) = ٥ل(\overline{ح})$$

وبما أنَّ: $ل(ح) + ل(\overline{ح}) = ١$، فإنَّ:

$$٥ل(\overline{ح}) + ل(\overline{ح}) = ١$$

$$٦ ل(\overline{ح}) = ١$$

$$ل(\overline{ح}) = \frac{١}{٦}$$

ويكونُ احتمالُ أنْ ينجحَ فؤادٌ في امتحاناتِ الدراسةِ الثانويةِ العامةِ هوَ:

$$ل(ح) = ٥ل(\overline{ح}) = ٥ \times \frac{١}{٦} = \frac{٥}{٦}$$

تدريبُ (٧-١٧)

في تجربةٍ عشوائيةٍ فضاؤها العينيُّ Ω. إذا كانَ: $ل(ح) = \frac{٢}{٣} ل(\overline{ح})$، احسبْ:

١) $ل(ح)$ ٢) $ل(\overline{ح})$

مثالُ (٧-١٦)

إذا كانَ احتمالُ فوزِ فريقِ كرةِ السلةِ في إحدى المبارياتِ المحليةِ يُساوي ٠,٦ ، واحتمالُ فوزِهِ في المباراةِ الثانيةِ يُساوي ٠,٧٥ ، واحتمالُ فوزِ الفريقِ في المباراتيْنِ معًا يُساوِي ٠,٤ ، احسبِ احتمالَ:

١) فوزِ فريقِ كرةِ السلةِ في إحدى المباراتيْنِ على الأقلِّ.

٢) فوزِ فريقِ كرةِ السلةِ في المباراةِ الأولى فقطْ.

٣) عدمِ فوزِ فريقِ كرةِ السلةِ في أيٍّ منَ المباراتيْنِ.

٤) عدمِ فوزِ فريقِ كرةِ السلةِ في المباراةِ الأُولى.

الحلُّ

١) ليكنْ: $ح_١$: فوزَ فريقِ كرةِ السلةِ في المباراةِ الأُولى ⟵ $ل(ح_١) = ٠,٦$

$ح_٢$: فوزَ فريقِ كرةِ السلةِ في المباراةِ الثانيةِ ⟵ $ل(ح_٢) = ٠,٧٥$

$ح_١ \cap ح_٢$: فوزَ فريقِ كرةِ السلةِ، في المباراتيْنِ معًا ⟵ $ل(ح_١ \cap ح_٢) = ٠,٤$

وعليهِ يكونُ: احتمالُ فوزِ فريقِ كرةِ السلةِ، في إحدى المباراتيْنِ على الأقلِّ، هوَ:

$$ل(ح_١ \cup ح_٢) = ل(ح_١) + ل(ح_٢) - ل(ح_١ \cap ح_٢)$$

$$= ٠,٦ + ٠,٧٥ - ٠,٤ = ٠,٩٥$$

٢) احتمالُ فوزِ فريقِ كرةِ السلةِ في المباراةِ الأُولى فقطْ، هوَ:

$$ل(ح_١ - ح_٢) = ل(ح_١) - ل(ح_١ \cap ح_٢)$$

$$= ٠,٦ - ٠,٤ = ٠,٢$$

٣) احتمالُ عدمِ فوزِ فريقِ كرةِ السلةِ في أيٍّ منَ المبارتيْنِ، هوَ:

$$ل(\overline{ح_١ \cup ح_٢}) = ١ - ل(ح_١ \cup ح_٢) = ١ - ٠,٩٥ = ٠,٠٥$$

٤) أجابَ أحمدُ عنْ هذا الفرعِ كما يأتي: احتمالُ عدمِ فوزِ فريقِ كرةِ السلةِ في المباراةِ الأُولى، يعني احتمالَ فوزِهِ في المباراةِ الثانيةِ، أيْ أنَّ: احتمالَ عدمِ فوزِ الفريقِ في المباراةِ الأولى = $ل(ح_٢) = ٠,٧٥$. ما رأيكَ في إجابةِ أحمدَ؟

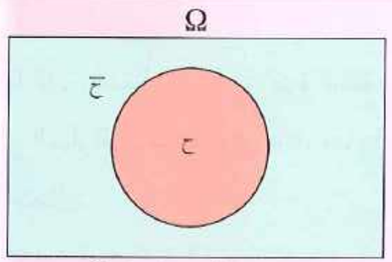
(إرشاد: يمكن الاستعانة بأشكال ڤن).

يوجدُ لكلِّ حادثٍ ح، متممةٌ $\overline{ح}$ في الفضاءِ العينيِّ Ω،
حيثُ:

$$ل(ح) + ل(\overline{ح}) = ١$$

ويكونُ:

$$ل(ح) + ل(\overline{ح}) = ل(ح \cup \overline{ح}) = ل(\Omega) = ١$$



ح ، $\overline{ح}$ حادثان منفصلانِ في Ω

مثالٌ (٧-١٥)

إذا كانَ احتمالُ نجاحِ فؤادٍ في امتحاناتِ الدراسةِ الثانويةِ العامةِ يُساوي خمسةَ أمثالِ احتمالِ عدمِ نجاحِهِ. فما احتمالُ أنْ ينجحَ فؤادٌ في امتحاناتِ الدراسةِ الثانويةِ العامةِ؟

الحلُّ

ليكنْ ح: نجاحُ فؤادٍ في امتحاناتِ الدراسةِ الثانويةِ العامةِ،
وبالتالي $\overline{ح}$: عدمُ نجاحِ فؤادٍ في امتحاناتِ الدراسةِ الثانويةِ العامةِ، ويكونُ:

$$ل(ح) = ٥ل(\overline{ح})$$

وبما أنَّ: $ل(ح) + ل(\overline{ح}) = ١$، فإنَّ:

$$٥ل(\overline{ح}) + ل(\overline{ح}) = ١$$

$$٦ ل(\overline{ح}) = ١$$

$$ل(\overline{ح}) = \frac{١}{٦}$$

ويكونُ احتمالُ أنْ ينجحَ فؤادٌ في امتحاناتِ الدراسةِ الثانويةِ العامةِ هوَ:

$$ل(ح) = ٥ل(\overline{ح}) = ٥ \times \frac{١}{٦} = \frac{٥}{٦}$$

تدريبُ (٧-١٧)

في تجربةٍ عشوائيةٍ فضاؤها العينيُّ Ω. إذا كانَ: $ل(ح) = \frac{٢}{٣} ل(\overline{ح})$، احسبْ:

١) $ل(ح)$ ٢) $ل(\overline{ح})$

مثالُ (٧-١٦)

إذا كانَ احتمالُ فوزِ فريقِ كرةِ السلةِ في إحدى المبارياتِ المحليةِ يُساوي ٠,٦ ، واحتمالُ فوزِهِ في المباراةِ الثانيةِ يُساوي ٠,٧٥ ، واحتمالُ فوزِ الفريقِ في المباراتيْنِ معًا يُساوِي ٠,٤ ، احسبِ احتمالَ:

١) فوزِ فريقِ كرةِ السلةِ في إحدى المباراتيْنِ على الأقلِّ.

٢) فوزِ فريقِ كرةِ السلةِ في المباراةِ الأولى فقطْ.

٣) عدمِ فوزِ فريقِ كرةِ السلةِ في أيٍّ منَ المباراتيْنِ.

٤) عدمِ فوزِ فريقِ كرةِ السلةِ في المباراةِ الأُولى.

الحلُّ

١) ليكنْ: $ح_١$: فوزَ فريقِ كرةِ السلةِ في المباراةِ الأُولى ⟵ $ل(ح_١) = ٠,٦$

$ح_٢$: فوزَ فريقِ كرةِ السلةِ في المباراةِ الثانيةِ ⟵ $ل(ح_٢) = ٠,٧٥$

$ح_١ \cap ح_٢$: فوزَ فريقِ كرةِ السلةِ، في المباراتيْنِ معًا ⟵ $ل(ح_١ \cap ح_٢) = ٠,٤$

وعليهِ يكونُ: احتمالُ فوزِ فريقِ كرةِ السلةِ، في إحدى المباراتيْنِ على الأقلِّ، هوَ:

$$ل(ح_١ \cup ح_٢) = ل(ح_١) + ل(ح_٢) - ل(ح_١ \cap ح_٢)$$

$$= ٠,٦ + ٠,٧٥ - ٠,٤ = ٠,٩٥$$

٢) احتمالُ فوزِ فريقِ كرةِ السلةِ في المباراةِ الأُولى فقطْ، هوَ:

$$ل(ح_١ - ح_٢) = ل(ح_١) - ل(ح_١ \cap ح_٢)$$

$$= ٠,٦ - ٠,٤ = ٠,٢$$

٣) احتمالُ عدمِ فوزِ فريقِ كرةِ السلةِ في أيٍّ منَ المبارتيْنِ، هوَ:

$$ل(\overline{ح_١ \cup ح_٢}) = ١ - ل(ح_١ \cup ح_٢) = ١ - ٠,٩٥ = ٠,٠٥$$

٤) أجابَ أحمدُ عنْ هذا الفرعِ كما يأتي: احتمالُ عدمِ فوزِ فريقِ كرةِ السلةِ في المباراةِ الأُولى، يعني احتمالَ فوزِهِ في المباراةِ الثانيةِ، أيْ أنَّ: احتمالَ عدمِ فوزِ الفريقِ في المباراةِ الأولى = $ل(ح_٢) = ٠,٧٥$. ما رأيكَ في إجابةِ أحمدَ؟

(إرشاد: يمكن الاستعانة بأشكال ڤن).

تدريبُ ٧-١٨

في شركةٍ لصيانةِ أجهزةِ الحاسوبِ، يوجدُ (٥٠) موظفًا. (٢٥) منْهُم يفضلونَ شربَ الشايِ، و(٣٠) منْهُم يُفضلونَ شُربَ القهوةِ، و(١٥) منْهُم يُفضلونَ شُربَ الشايِ والقهوةِ معًا.

١) إذا اختيرَ موظفٌ منَ الموظفينَ عشوائيًا لقضاءِ إجازةٍ في البتراءِ، فما احتمالُ أنْ يكونَ ممنْ يُفضلونَ شُربَ القهوةِ فقط؟

٢) وإذا اختيرَ موظفٌ منَ الموظفينَ عشوائيًا لقضاءِ إجازةٍ في جرشَ، فما احتمالُ أنْ يكونَ ممَّنْ يُفضلونَ شُربَ الشايِ فقطْ؟

٣) وإذا اختيرَ موظفٌ منَ الموظفينَ عشوائيًا ليُمثلَ الشركةَ في إحدى المؤتمراتِ العلميّةِ، فما احتمالُ أنْ يكونَ ممَّنْ يُفضلونَ شُربَ أحدِ المشروبيْنِ على الأقلِّ؟

تدريبُ ٧-١٩

حُلَّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ.

الأسئلةُ ؟

١) أيُّ العباراتِ الآتيةِ صحيحةٌ وأيُّها خطأٌ معَ توضيحِ السببِ؟

أ) عددُ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ ≤ ١.

ب) ٠ ≤ احتمالُ الفضاءِ العينيِّ ≤ ١.

جـ) عددُ عناصرِ أيِّ حادثٍ ح: ٠ ≤ ع(ح) ≤ ع (Ω)

د) إذا كانَ ح١ ، ح٢ حادثيْنِ في Ω، فإنَّ: ل(ح١ ∩ ح٢) > ٠

هـ) إذا كانَ ح١ ، ح٢ حادثيْنِ غيرَ منفصليْنِ في Ω، فإنَّ:

ل(ح١ ∪ ح٢) = ل(ح١) + ل(ح٢)

و) ل(ح١ ∩ $\overline{ح_1}$) = ١

ز) ل(ح١ ∪ $\overline{ح_1}$) = ١

٢) في تجربةِ لاختيارِ عائلةٍ لديْها أربعةُ أطفالٍ عشوائيًا، مسجلينِ حسبَ الجنسِ وتسلسلِ الولادةِ، ما احتمالُ:

أ) أنْ يكونَ للعائلةِ ولدٌ واحدٌ فقطْ منَ الذكورِ؟

ب) أنْ يكونَ للعائلةِ أربعُ بناتٍ فقطْ؟

جـ) أنْ يكونَ للعائلةِ ثلاثةُ أولادٍ من الذكورِ على الأقلِّ؟

د) أنْ يكونَ للعائلةِ بنتانِ على الأكثرِ؟

٣) إذا كانَ احتمالُ نجاحِ طالبٍ في اختبارِ الرياضياتِ يُساوي ٠,٨٥ ، واحتمالُ نجاحِهِ في اختبارِ الفيزياءِ يُساوي ٠,٧ ، واحتمالُ نجاحِهِ في الاختباريْنِ معًا يُساوي ٠,٦ ، فما احتمالُ:

أ) نجاحِ الطالبِ في اختبارِ الفيزياءِ فقطْ؟

ب) نجاحِ الطالبِ في أحدِ الاختباريْنِ على الأقلِّ؟

جـ) عدمِ نجاحِ الطالبِ في أيٍّ منَ الاختباريْنِ؟

٤) صرّحَ مدرّبُ أحدِ الأنديةِ الرياضيةِ أثناءَ مؤتمرٍ صحفيٍّ بأنَّ احتمالَ فوزِ النادي في أولى مبارياتِهِ العربيةِ التي سيخوضُها يُساوي ٠,٩ ، واحتمالَ فوزِ النّادِي في المباراةِ الثانيةِ ٠,٦٥ ،

واحتمالَ فوزِ النادي في المباراتيْنِ معًا يُساوي ٠,٥٥ . هل يتفقُ ما صرّحَ بهِ المدرّبُ معَ قوانينِ الاحتمالاتِ؟ وضّحِ السببَ.

٥) تقدّمَ رائدٌ لاختباريْنِ: نظريٍّ وعمليٍّ، للحصولِ على شهادةِ التخرجِ منَ الجامعةِ.

إذا كانَ احتمالُ نجاحِهِ في الاختبارِ النظريِّ ٠,٨٨ ، واحتمالُ نجاحِهِ في الاختبارِ العمليِّ ٠,٧٢ ، واحتمالُ نجاحِهِ في الاختباريْنِ معًا ٠,٧ ، فما احتمالُ:

أ) نجاحِهِ في الاختبارِ النظريِّ فقطْ ؟

أجابَ عمرُ عنْ هذا الفرعِ كما يأتي:

إنَّ نجاحَهُ في الاختبارِ النظريِّ فقطْ يعني:

ل (ح١ – ح٢) = ل(ح١) – ل(ح٢)

= ٠,٨٨ – ٠,٧٢ = ٠,١٦

فما رأيُكَ في حلِّ عُمرَ؟ برّرْ إجابَتَكَ.

ب) نجاحُهُ في أحدِ الاختباريْنِ على الأقلِّ؟

٦) في صفٍ ما (٤٠) طالبةً: (٢٤) منهنّ يُفضلنَ لعبَ كرةِ الطاولةِ، و(١٢) منهنَّ يُفضّلْنَ لعبَ كرةِ الطائرةِ، ولا يُفضلْنَ لعبَ كرةِ الطاولةِ، و(١٤) منهنَّ يُفضلْنَ لعبَ كرةِ الطاولةِ، ولا يُفضلْنَ لعبَ كرةِ الطائرةِ.

إذا اختيرتْ إحدى الطالباتِ منْ هذا الصفِّ عشوائيًا، فما احتمالُ أنْ تكونَ طالبةً ممَنْ يُفضلْنَ إحدى اللعبتيْنِ على الأقلِّ؟

٧) في القرصِ الظاهرِ أمامَكَ، إذا لُفَّ المؤشرُ، ما احتمالُ أنْ يتوقفَ المؤشرُ عندَ:

أ) حرف F؟

ب) حرفِ B؟

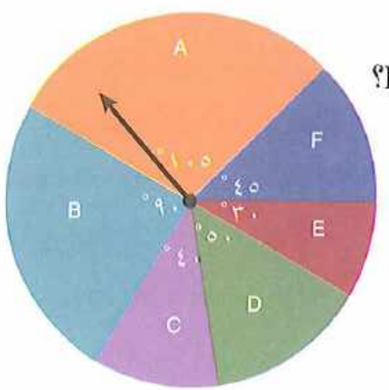
جـ) حرفِ C؟

د) حرفِ A أو D؟

هـ) حرفِ E أو F ؟

و) أيِّ حرفٍ ما عدا حرفِ A؟

ز) الأحرفِ B أو C أو D؟



ثانيًا الاحتمالُ المشروطُ والحوادثُ المستقلةُ
Conditional Probability and Independent Event

أُجريتْ إحصائيةٌ في إحدى المدارسِ، حولَ عددِ الساعاتِ التي يقضيها الطلابُ، في مشاهدةِ التلفازِ في المنزلِ منْ عمرِ ٦ سنوات، حتى عمرِ ١٥ سنةً. والجدولُ (٧–١٨) يُمثلُ نتائجَ هذهِ الإحصائيةِ.

الجدولُ (٧–١٨)

العمرُ / عددُ الساعات	(٦ – ١٠)	(١١ – ١٥)
ساعتانِ وأقلُّ	٥٥	٦٠
أكثرُ من ساعتينِ	٩٥	٣٠

إذا اختيرَ طالبٌ عشوائيًا منْ هذهِ المدرسةِ؛

- مَا احتمالُ أنْ يكونَ ممنْ يُشاهدونَ التلفازَ أكثرَ منْ ساعتيْنِ، ومن الفئةِ العمريةِ (١١–١٥) سنةً ؟
- مَا احتمالُ أنْ يكونَ ممنْ يُشاهدونَ التلفازَ أكثرَ منْ ساعتيْنِ، علماً بأنه منَ الفئةِ العمريةِ (١١–١٥) سنةً ؟

الاحتمالُ المشروطُ: هوَ احتمالُ وقوعِ حادثٍ ما، معَ توافرِ معلوماتٍ جُزئيةٍ عنْ نتيجةِ التجربةِ العشوائيةِ. ويوظفُ لحسابِ بعضِ الاحتمالاتِ للحوادثِ في التجاربِ العشوائيةِ.

مثال (٧–١٧)

في تجربةِ إلقاءِ حجرِ نردٍ منتظمٍ مرةً واحدةً، وتسجيلِ العددِ الظاهرِ على الوجهِ العلويِّ . إذا كانَ الحادثُ ح١: ظهورَ عددٍ أوليٍّ، والحادثُ ح٢: ظهورَ عددٍ أكبرَ منْ ٣ ، جِدْ:
احتمالَ ظهورِ عددٍ أوليٍّ، علمًا بأنَّ العددَ الظاهرَ أكبرَ منْ ٣ .

الحلُّ

$\Omega = \{١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦\}$

$ح_١ = \{٢، ٣، ٥\}$

$ح_٢ = \{٤، ٥، ٦\}$

ويكونُ الحادثُ: ظهورَ عددٍ أوليٍّ، علمًا بأنَّ العددَ الظاهرَ أكبرُ مِنْ ٣ هوَ {٥} من بينِ الإمكاناتِ المتاحةِ {٤، ٥، ٦}، واحتمالُه يُساوي $\frac{١}{٣}$

ويُرمزُ لاحتمالِ وقوعِ الحادثِ ح١، علمًا بأنَّ الحادثَ ح٢ قدْ وقعَ، بالرمزِ:

ل(ح١ / ح٢). ويُقرأُ: احتمالُ وقوعِ ح١ بشرطِ وقوعِ ح٢.

وبالتالي يكونُ: ل(ح١ / ح٢) = $\frac{١}{٣}$

ونلاحظُ أنَّ:

$$ل(ح_١ / ح_٢) = \frac{١}{٣} = \frac{\text{عددَ النواتجِ الممكنةِ التي تحققُ كلًّا منَ ح١، ح٢ معًا}}{\text{عددِ النواتجِ الممكنةِ التي تُحققُ ح٢}}$$

$$ل(ح_١ / ح_٢) = \frac{ع(ح_١ \cap ح_٢)}{ع(ح_٢)} = \frac{\frac{ع(ح_١ \cap ح_٢)}{ع(\Omega)}}{\frac{ع(ح_٢)}{ع(\Omega)}} = \frac{ل(ح_١ \cap ح_٢)}{ل(ح_٢)}$$

أيْ أنَّهُ: إذا كانَ ح١ ، ح٢ حادثيْنِ في الفضاءِ العينيِّ Ω لتجربةٍ عشوائيةٍ ما، وكانَ ل(ح٢) ≠ صفرًا، فإنَّ:

$$ل(ح_١ / ح_٢) = \frac{ل(ح_١ \cap ح_٢)}{ل(ح_٢)}$$

ونستنتجُ ممّا سبقَ أنَّ:

ل(ح١ ∩ ح٢) = ل(ح٢) × ل(ح١/ح٢)

مثالٌ (٧-١٨)

إذا كانَ ح١ ، ح٢ حادثيْن في الفضاءِ العينيِّ Ω لتجربةٍ عشوائيةٍ ما، وكانَ:

ل(ح١) = ٠,٦ ، ل(ح٢) = ٠,٥ ، ل(ح١ ∩ ح٢) = ٠,٢ ، احسبْ:

١) ل(ح١/ح٢)　　٢) ل(ح٢/ح١)

الحلُّ

١) $ل(ح_٢ / ح_١) = \frac{ل(ح_١ \cap ح_٢)}{ل(ح_١)} = \frac{٠,٢}{٠,٥} = \frac{٢}{٥}$

٢) $ل(ح_٢ / ح_١) = \frac{ل(ح_٢ \cap ح_١)}{ل(ح_١)} = \frac{٠,٢}{٠,٦} = \frac{١}{٣}$

تدريبُ (٧-٢٠)

في تجربةٍ عشوائيةٍ إذا كانَ: $ل(ح_١) = \frac{١}{٣}$ ، $ل(ح_٢) = \frac{٥}{١٢}$ ، $ل(ح_١ \cap ح_٢) = \frac{١}{٩}$،
احسبْ:

١) $ل(ح_٢ / ح_١)$ ٢) $ل(ح_١ / \overline{ح}_٢)$

مثالُ (٧-١٩)

صندوقٌ فيهِ (٧) كراتٍ بيضاءَ، و(٥) كراتٍ حمراءَ، وجميعُ الكراتِ متماثلةٌ. سُحبتْ منَ الصندوقِ كرتانِ عشوائيًا على التوالِي دونَ إرجاعٍ، احسبِ:

١) احتمالَ الحصولِ على كرتيْنِ حمراويْنِ.

٢) احتمالَ الحصولِ على كرتيْنِ مختلفتَيِ اللونِ.

الحلُّ

١) ليكنْ $ح_١$: الكرةُ المسحوبةُ الأُولى حمراءُ، $ح_٢$: الكرةُ المسحوبةُ الثانيةُ حمراءُ، فيكونُ
$ل(ح_٢ / ح_١) = \frac{٤}{١١}$
المطلوبُ: $ل(ح_١ \cap ح_٢) = ل(ح_١) \times ل(ح_٢ / ح_١)$
$= \frac{٥}{١٢} \times \frac{٤}{١١} = \frac{٥}{٣٣}$

٢) تواجهُنا حالتانِ:
الحالةُ الأُولى:
ليكنْ $ح_٣$: الكرةُ المسحوبةُ الأولى حمراءُ، $ح_٤$: الكرةُ المسحوبةُ الثانيةُ بيضاءُ، فيكونُ
$ل(ح_٤ / ح_٣) = \frac{٧}{١١}$

ويكونُ الحادثُ: ظهورَ عددٍ أوليٍّ، علمًا بأنَّ العددَ الظاهرَ أكبرُ مِنْ ٣ هوَ {٥} من بينِ الإمكاناتِ المتاحةِ {٤، ٥، ٦}، واحتمالُه يُساوي $\frac{١}{٣}$

ويُرمزُ لاحتمالِ وقوعِ الحادثِ ح١، علمًا بأنَّ الحادثَ ح٢ قدْ وقعَ، بالرمزِ:

ل(ح١ / ح٢). ويُقرأُ: احتمالُ وقوعِ ح١ بشرطِ وقوعِ ح٢.

وبالتالي يكونُ: ل(ح١ / ح٢) = $\frac{١}{٣}$

ونلاحظُ أنَّ:

$$ل(ح_١ / ح_٢) = \frac{١}{٣} = \frac{\text{عددَ النواتجِ الممكنةِ التي تحققُ كلًّا منَ ح١، ح٢ معًا}}{\text{عددِ النواتجِ الممكنةِ التي تُحققُ ح٢}}$$

$$ل(ح_١ / ح_٢) = \frac{ع(ح_١ \cap ح_٢)}{ع(ح_٢)} = \frac{\frac{ع(ح_١ \cap ح_٢)}{ع(\Omega)}}{\frac{ع(ح_٢)}{ع(\Omega)}} = \frac{ل(ح_١ \cap ح_٢)}{ل(ح_٢)}$$

أيْ أنَّهُ: إذا كانَ ح١ ، ح٢ حادثيْنِ في الفضاءِ العينيِّ Ω لتجربةٍ عشوائيةٍ ما، وكانَ ل(ح٢) ≠ صفرًا، فإنَّ:

$$ل(ح_١ / ح_٢) = \frac{ل(ح_١ \cap ح_٢)}{ل(ح_٢)}$$

ونستنتجُ ممّا سبقَ أنَّ:

ل(ح١ ∩ ح٢) = ل(ح٢) × ل(ح١ / ح٢)

مثالُ (٧-١٨)

إذا كانَ ح١ ، ح٢ حادثيْن في الفضاءِ العينيِّ Ω لتجربةٍ عشوائيةٍ ما، وكانَ:

ل(ح١) = ٠,٦ ، ل(ح٢) = ٠,٥ ، ل(ح١ ∩ ح٢) = ٠,٢ ، احسبْ:

١) ل(ح١ / ح٢)　　٢) ل(ح٢ / ح١)

الحلُّ

١) $ل(ح_٢/ح_١) = \frac{ل(ح_١ \cap ح_٢)}{ل(ح_١)} = \frac{٠,٢}{٠,٥} = \frac{٢}{٥}$

٢) $ل(ح_٢/ح_١) = \frac{ل(ح_٢ \cap ح_١)}{ل(ح_١)} = \frac{٠,٢}{٠,٦} = \frac{١}{٣}$

تدريبُ ٧-٢٠

في تجربةٍ عشوائيةٍ إذا كانَ: $ل(ح_١) = \frac{١}{٣}$ ، $ل(ح_٢) = \frac{٥}{١٢}$ ، $ل(ح_١ \cap ح_٢) = \frac{١}{٩}$، احسبْ:

١) $ل(ح_٢/ح_١)$ ٢) $ل(ح_١/\overline{ح}_٢)$

مثالٌ (٧-١٩)

صندوقٌ فيهِ (٧) كراتٍ بيضاءَ، و(٥) كراتٍ حمراءَ، وجميعُ الكراتِ متماثلةٌ. سُحبتْ منَ الصندوقِ كرتانِ عشوائيًا على التوالِي دونَ إرجاعٍ، احسبِ:

١) احتمالَ الحصولِ على كرتيْنِ حمراويْنِ.

٢) احتمالَ الحصولِ على كرتيْنِ مختلفتَيِ اللونِ.

الحلُّ

١) ليكنْ $ح_١$: الكرةُ المسحوبةُ الأُولى حمراءُ، $ح_٢$: الكرةُ المسحوبةُ الثانيةُ حمراءُ، فيكونُ

$ل(ح_٢ / ح_١) = \frac{٤}{١١}$

المطلوبُ: $ل(ح_١ \cap ح_٢) = ل(ح_١) \times ل(ح_٢/ح_١)$

$= \frac{٥}{١٢} \times \frac{٤}{١١} = \frac{٥}{٣٣}$

٢) تواجهُنا حالتانِ:

الحالةُ الأُولى:

ليكنْ $ح_٣$: الكرةُ المسحوبةُ الأولى حمراءُ، $ح_٤$: الكرةُ المسحوبةُ الثانيةُ بيضاءُ، فيكونُ

$ل(ح_٤ / ح_٣) = \frac{٧}{١١}$

$$ل(ح_٣ \cap ح_٤) = ل(ح_٣) \times ل(ح_٤/ح_٣) = \frac{٥}{١٢} \times \frac{٧}{١١} = \frac{٣٥}{١٣٢}$$

أمّا الحالةُ الثانيةُ:

ليكنْ $ح_٥$: الكرةُ المسحوبةُ الأُولى بيضاءُ، $ح_٦$: الكرةُ المسحوبةُ الثانيةُ حمراءُ فيكونُ

$$ل(ح_٦ / ح_٥) = \frac{٥}{١١}$$

$$ل(ح_٥ \cap ح_٦) = ل(ح_٥) \times ل(ح_٦/ح_٥) = \frac{٧}{١٢} \times \frac{٥}{١١} = \frac{٣٥}{١٣٢}$$

فيكونُ احتمالُ الحصولِ على كرتيْنِ مختلفتَيِ اللونِ هوَ:

$$ل(ح_٣ \cap ح_٤) + ل(ح_٥ \cap ح_٦) = \frac{٣٥}{١٣٢} + \frac{٣٥}{١٣٢} = \frac{٧٠}{١٣٢} = \frac{٣٥}{٦٦}$$

تدريبُ ٧-٢١

في المثالِ (٧-١٩)، إذا سُحبتْ كرتانِ منَ الصندوقِ على التوالي، معَ الارجاعِ، احسبِ:

١) احتمالَ الحصولِ على كرتيْنِ حمراويْنِ.

٢) احتمالَ الحصولِ على كرتيْنِ مختلفتَيِ اللونِ.

استقلالُ الحوادثِ

في بعضِ التجاربِ العشوائيةِ، تجدُ أنَّ احتمالَ وقوعِ حادثٍ ما (مثل $ح_١$)، لا يُؤثرُ في احتمالِ وقوعِ أو احتمالِ عدمِ وقوعِ حادثٍ آخرَ (مثلِ $ح_٢$)، وتُسمّى الحوادثُ في مثلِ هذهِ الحالةِ **حوادثَ مستقلةً**. فمثلًا: عندَ إلقاءِ قطعةِ نقدٍ معدنيةٍ مرةً واحدةً، وإلقاءِ حجرِ نردٍ مرةً واحدةً، فإنّ احتمالَ ظهورِ الكتابةِ على قطعةِ النقدِ، لا يُؤثرُ على احتمالِ ظهورِ العددِ (٣) مثلًا على الوجهِ العلويِّ لحجرِ النردِ.

إذا كان $ح_١$ ، $ح_٢$ حادثيْنِ مستقليْنِ في الفضاءِ العينيِّ Ω لتجربةٍ عشوائيةٍ ما، فإنَّ:

$ل(ح_١/ح_٢) = ل(ح_١)$ وكذلكَ $ل(ح_٢ / ح_١) = ل(ح_٢)$

فكّرْ وناقشْ

إذا كانَ ح١ ، ح٢ حادثيْنِ مستقليْنِ، فإنَّ: ل(ح١ ∩ ح٢) = ل(ح١) × ل(ح٢).

مثالٌ (٧-٢٠)

قامَ معلمُ الرياضياتِ بإعطاءِ مسألةٍ رياضيةٍ للطالبيْنِ: مهندٍ و رائدٍ. إذا كانَ احتمالُ أنْ يحلَّ مهندٌ المسألةَ بطريقةٍ صحيحةٍ يُساوي $\frac{٢}{٥}$ ، واحتمالُ أنْ يحلَّ رائدٌ المسألةَ بطريقةٍ صحيحةٍ يُساوي $\frac{١}{٦}$ ، فما احتمالُ أنْ يحلَّ الطالبانِ المسألةَ بطريقةٍ صحيحةٍ؟

الحلُّ

نلاحظُ هنا أنَّ حلَّ مهندٍ للمسألةِ الرياضيةِ لا يُؤثرُ على حلِّ رائدٍ للمسألةِ نفسِها، فإذا كانَ:

ح١: أنْ يحلَّ مهندٌ المسألةَ الرياضيةَ بطريقةٍ صحيحةٍ،

ح٢: أنْ يحلَّ رائدٌ المسالةَ الرياضيةَ بطريقةٍ صحيحةٍ، فإنَّ ح١ ، ح٢ حادثانِ مستقلانِ، ويكونُ: احتمالُ أنْ يحلَّ الطالبانِ المسألةَ بطريقةٍ صحيحةٍ يساوي:

ل(ح١ ∩ ح٢) = ل(ح١) × ل(ح٢)

$= \frac{٢}{٥} \times \frac{١}{٦} = \frac{١}{١٥}$

فكّرْ وناقشْ

هلْ يوجدُ فرقٌ بينَ الحادثيْنِ المستقليْنِ والحادثيْنِ المنفصليْنِ؟ برّرْ إجابَتَكَ.

تدريبٌ ٧-٢٢

صيّادانِ أطلقَ كلٌّ منهما طلقةً واحدةً نحوَ هدفٍ معينٍ. إذا كانَ احتمالُ إصابةِ الصيّادِ الأولِ للهدفِ ٠,٧ ، واحتمالُ إصابةِ الصيّادِ الثاني للهدفِ ٠,٦٥ ، فما احتمالُ:

١) إصابةِ الهدفِ منَ الصيّاديْنِ معًا.

٢) إصابةِ الهدفِ منْ أحدِ الصيّاديْنِ على الأقلِّ.

٣) إصابةِ الهدفِ منَ الصيّادِ الأولِ فقطْ.

مثالٌ (٧-٢١)

صُندوقانِ، الأولُ فيهِ: (٥) كراتٍ حمراءَ، و(٣) كراتٍ خضراءَ، والثاني فيهِ: (٤) كراتٍ حمراءَ، و(٦) كراتٍ خضراءَ، وجميعُ الكراتِ في الصُندوقيْنِ متماثلةٌ:

١) سُحبتْ كرةٌ واحدةٌ من كلِّ صُندوقٍ، فما احتمالُ:

أ) أنْ تكونَ الكرتانِ المسحوبتانِ خضراويْنِ؟

ب) أنْ تكونَ الكرتانِ المسحوبتانِ مختلفتَي اللونِ؟

٢) سُحبتْ كرتانِ منَ الصُندوقِ الأولِ الواحدةُ تلوَ الأُخرى دونَ إرجاعٍ، فما احتمالُ أن تَكونَا حمراويْنِ؟

الحلُّ

١) أ) ليكنْ $ح_١$: سحبَ كرةٍ خضراءَ من الصُندوقِ الأولِ، فإنَّ: $ل(ح_١) = \frac{٣}{٨}$

$ح_٢$: سحبَ كرةٍ خضراءَ منَ الصُندوقِ الثاني، فإنَّ: $ل(ح_٢) = \frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$

وبما أنَّ سحبَ كرةٍ خضراءَ منَ الصُندوقِ الأولِ لا يُؤثرُ في سحبِ كرةٍ خضراءَ منَ الصُندوقِ الثاني، وبالعكسِ، فإنَّ $ح_١$ ، $ح_٢$ حادثانِ مستقلانِ، ويكونُ:

احتمالُ أنْ تكونَ الكرتانِ المسحوبتانِ خضراويْنِ يُساوي:

$$ل(ح_١ \cap ح_٢) = ل(ح_١) \times ل(ح_٢)$$

$$= \frac{٣}{٨} \times \frac{٣}{٥} = \frac{٩}{٤٠}$$

ب) $ح_٣$: سحبُ كرةٍ خضراءَ منَ الصُندوقِ الأولِ، فإنَّ: $ل(ح_٣) = \frac{٣}{٨}$

$ح_٤$: سحبُ كرةٍ حمراءَ منَ الصُندوقِ الثاني، فإنَّ: $ل(ح_٤) = \frac{٤}{١٠} = \frac{٢}{٥}$

أو $ح_٥$: سحبُ كرةٍ حمراءَ منَ الصُندوقِ الأولِ، فإنَّ : $ل(ح_٥) = \frac{٥}{٨}$

$ح_٦$: سحبُ كرةٍ خضراءَ منَ الصُندوقِ الثاني، فإنَّ : $ل(ح_٦) = \frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$

$$ل(ح_٣ \cap ح_٤) + ل(ح_٥ \cap ح_٦) = ل(ح_٣) \times ل(ح_٤) + ل(ح_٥) \times ل(ح_٦)$$

$$= \frac{٣}{٥} \times \frac{٥}{٨} + \frac{٢}{٥} \times \frac{٣}{٨}$$

$$= \frac{٦}{٤٠} + \frac{١٥}{٤٠} = \frac{٢١}{٤٠}$$

٢) ليكنْ $ح_٧$: سحبَ الكرةِ الأولى حمراء منَ الصُندوقِ الأولِ، فإنَّ: $ل(ح_٧) = \frac{٥}{٨}$

$ح_٨$: سحبَ الكرةِ الثانيةِ حمراء منَ الصُندوقِ الأولِ، فيكونُ $ل(ح_٨ / ح_٧) = \frac{٤}{٧}$

ويكونُ احتمالُ أنْ تكونَ الكرتانِ المسحوبتانِ حمراوينِ يُساوي:

$$ل(ح_٧ \cap ح_٨) = ل(ح_٧) \times ل(ح_٨/ح_٧) = \frac{٥}{٨} \times \frac{٤}{٧} = \frac{٥}{١٤}$$

تدريبُ ٧-٢٣

عُلبتانِ تحتويانِ أقلامًا متماثلةً، الأُولى فيها: (٧) أقلامٍ زرقاءَ، و(٣) أقلامٍ سوداءَ، والثانيةُ فيها: (٤) أقلامٍ زرقاءَ، و(٥) أقلامٍ حمراءَ:

١) اختارتْ سهادُ قلمًا واحدًا من كلِّ عُلبةٍ، ما احتمالُ:

أ) أنْ يكونَ القلمانِ أزرقيْنِ؟

ب) أنْ يكونَ القلمانِ مختلفَي اللونِ؟

٢) اختارَ وائلٌ قلميْنِ منَ العُلبةِ الثانيةِ، الواحدَ تلوَ الآخرِ معَ الإرجاعِ، ما احتمالُ:

أ) أنْ يكونَ القلمانِ أحمريْنِ؟

ب) أنْ يكونَ القلمانِ مختلفي اللونِ؟

٣) لإيجادِ احتمالِ اختيارِ قلميْنِ مختلفَي اللونِ منَ العلبةِ الثانيةِ بحيثُ يكونُ السحبُ على التوالي دونَ إرجاعٍ، قامتْ وفاء بكتابةِ الحلِّ الآتِي:

ليكنْ $ح_١$: اختيارَ قلمٍ أزرقَ منَ العُلبةِ الثانيةِ.

$ح_٢$: اختيارَ قلمٍ أحمرَ منَ العُلبةِ الثانيةِ، وعليهِ يكونُ:

$$ل(ح_١ \cap ح_٢) = ل(ح_١) \times ل(ح_٢)$$

$$= \frac{٤}{٩} \times \frac{٥}{٩} = \frac{٢٠}{٨١}$$

هلْ توافقُ وفاءَ في الحلِّ؟ برّرْ إجابَتَكَ.

تدريبٌ (٧-٢٤)

حلَّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ.

نشاطُ (٧-٦)

تحدّث لزميلِكَ عنِ الفرقِ بينَ الحوادثِ المستقلةِ والحوادثِ المنفصلةِ، معَ تقديمِ أمثلةٍ حياتيةٍ على كلٍّ منها.

الأسئلةُ

١) إذا كانَ ح١ ، ح٢ حادثيْنِ فِي الفضاءِ العينيِّ Ω لتجربةٍ عشوائيةٍ ما، وكانَ:

ل(ح١) = $\frac{٢}{٣}$ ، ل(ح٢) = $\frac{١}{٢}$ ، ل(ح٢/ح١) = $\frac{١}{٤}$ ، فاحسبْ قيمةَ كلٍ منْ:

أ) ل (ح١ − ح٢) ب) ل(ح١/ح٢)

٢) في مدينةٍ ما، إطفائيتانِ تعملانِ مستقلتيْنِ عنْ بعضِهما، احتمالُ وصولِ الأُولى إلى مكانِ حريقٍ ضمنَ حدودِ المدينةِ، خِلالَ عشرِ دقائقَ هوَ (٠,٧٥)، واحتمالُ وصولِ الثانيةِ إلى المكانِ نفسِهِ خلالَ المدةِ نفسِها هوَ (٠,٦). ما احتمالُ وصولِ الإطفائيتيْنِ إلى مكانِ الحريقِ معًا خلالَ عشرِ دقائقَ؟

٣) أرادَ مهندٌ الحصولَ على رخصةِ قيادةِ السيارةِ، فكانَ عليهِ التقدُّم لاختباريْنِ أحدهُما نظريٌّ والآخرُ عمليٌّ. إذا كانَ احتمالُ نجاحِ مهندٍ في الاختبارِ النظريِّ (٠,٩٣)، واحتمالُ نجاحِهِ في الاختبارِ العمليِّ، إذا كانَ ناجحًا في الاختبارِ النظريِّ (٠,٨)، فما احتمالُ حصولِهِ على رخصةِ قيادةِ السيارةِ؟

٤) إذا كانَ ح١ ، ح٢ حادثيْنِ في الفضاءِ العينيِّ Ω لتجربةٍ عشوائيةٍ ما، وكانَ: ل(ح١) = ٠,٦ ، ل(ح٢) = ٠,٥ ، ل(ح١ ∪ ح٢) = ٠,٨ ، فهلْ ح١ ، ح٢ حادثانِ مستقلانِ؟

٥) صُندوقانِ، الأولُ فيه: (٤) بالوناتٍ صفراءَ، و(٨) بالوناتٍ برتقاليةِ اللونِ، والثاني فيهِ: (٥) بالوناتٍ برتقاليةِ اللونِ، و(٦) بالوناتٍ خضراءَ، وجميعُ البالوناتِ في الصُندوقينِ متماثلةٌ:

أ) سُحبَ بالونانِ منَ الصُندوقِ الثاني، الواحدُ تلوَ الآخرِ دونَ إرجاعٍ، ما احتمالُ أنْ يكونَا خضراويْنِ؟

ب) سُحبَ بالونانِ منَ الصُندوقِ الأولِ، الواحدُ تلوَ الآخرِ، معَ الإرجاعِ، ما احتمالُ أنْ يكونَا مختلفَي اللونِ؟

جـ) سُحبَ بالونٌ واحدٌ منْ كلِّ صُندوقٍ، ما احتمالُ:

• أنْ يكونا برتُقَاليَّي اللونِ؟

• أنْ يكونا مختلفَي اللونِ؟

٦) أيُّ العباراتِ الآتيةِ صحيحةٌ وأيُّها خطأٌ، معَ توضيحِ السببِ؟:

أ) الاحتمالُ المشروطُ هوَ احتمالٌ لا يتأثرُ فيهِ وقوعُ الحادثِ بوقوعِ حادثٍ آخرِ.

ب) احتمالُ اتحادِ الحادثيْنِ المستقليْنِ يساوي مجموعَ احتماليْهما.

جـ) الحوادثُ المنفصلةُ يكونُ تقاطعُها ∅ دائمًا.

د) عندَ سحبِ كرتيْنِ كلُّ كرةٍ منْ صُندوقٍ، فإنّ الحوادثَ هنا تكونُ حوادثَ مستقلةً.

هـ) الحوادثُ المستقلةُ هيَ نفسُها الحوادثُ المنفصلةُ.

٧) صندوقٌ يحتوي أربعَ بطاقاتٍ متماثلةٍ مرقمةٍ بالأرقامِ: ٦، ٧، ٨، ٩ . سُحبَتْ بطاقتانِ على التوالي دونَ إرجاعٍ، لتكوينِ عددٍ منْ منزلتيْنِ:

أ) ما عددُ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ لهذهِ التجربةِ؟

ب) ما احتمالُ تكوينِ العددِ ٧٨ ؟

جـ) إذا سُحبَتْ البطاقتانِ على التوالي معَ الإرجاعِ، ما احتمالُ تكوينِ العددِ ٩٦؟

أسئلةُ الوحدةِ

١) يتكونُ هذا السؤالِ من ٥ فقراتٍ منْ نوعِ الاختيارِ من متعددٍ، ولكلٍّ منها أربعةُ بدائلَ، واحدٌ منها فقطْ صحيحٌ، اخترْ رمزَ البديلِ الصحيحِ لكلٍّ منها:

(١) ألقتْ ولاءُ قطعةَ نقدٍ (٩) مراتٍ متتاليةٍ، وظهرتْ الكتابةُ على الوجهِ العلويِّ لقطعةِ النقدِ في الرمياتِ جميعِها، إذا ألقتْ ولاءُ قطعةَ النقدِ للمرةِ العاشرةِ، فإنَّ احتمالَ ظهورِ الكتابةِ في الرميةِ العاشرةِ يُساوِي:

أ) ١ ب) $\frac{١}{٢}$ جـ) $\frac{٩}{١٠}$ د) صفر

(٢) إذا كانَ ل(ح$_١$) = ٠,٨ ، ل(ح$_٢$) = ٠,٥ ، ل(ح$_٢$ − ح$_١$) = ٠,٣ ، فإنَّ ل(ح$_٢$/ح$_١$) يُساوي:

أ) ٠,٣ ب) ٠,٥ جـ) ٠,٢٥ د) ٠,٢

(٣) إذا كانَ ح$_١$ ، ح$_٢$ حادثيْنِ منفصليْنِ فِي الفضاءِ العينيِّ Ω لتجربةٍ عشوائيةٍ ما، وكانَ ل(ح$_١$) = $\frac{٢}{٥}$ ، ل(ح$_٢$) = $\frac{١}{٣}$ ، فإنَّ ل(ح$_١$ ∩ ح$_٢$) يُساوي:

أ) صفر ب) $\frac{٢}{١٥}$ جـ) $\frac{١١}{١٥}$ د) $\frac{١}{١٥}$

(٤) إذا كانَ ح$_١$ ، ح$_٢$ حادثيْنِ مستقليْنِ فِي الفضاءِ العينيِّ Ω لتجربةٍ عشوائيةٍ ما، وكانَ ل(ح١) = ٠,٣ ، ل(ح$_٢$) = ٠,٤ ، فإنَّ ل(ح$_١$ ∪ ح$_٢$) يُساوي:

أ) ٠,٨٨ ب) ٠,٧ جـ) ٠,١٢ د) ٠,٥٨

(٥) إذا كانَ ح$_١$ ، ح$_٢$ حادثيْنِ مستقليْنِ فِي الفضاءِ العينيِّ Ω لتجربةٍ عشوائيةٍ ما، وكانَ ل(ح$_١$) = ٠,٥ ، ل($\overline{ح_٢}$) = ٠,٦ ، فإنَّ ل(ح$_١$ − ح$_٢$) يُساوي:

أ) ٠,٢ ب) ٠,٩ جـ) ٠,٣ د) ٠,١

٢) أُخذتْ عينةٌ مُكونةٌ منْ (١٠٠) موظفٍ، وكانتْ رواتبهُم الشهريةُ بالدينارِ الأردنيِّ. كما في الجدولِ (٧−١٩):

الجدولُ (٧−١٩)

الدخلُ	٤٠٠	٥٥٠	٧٠٠	٨٥٠	١٠٠٠
التكرارُ	٣٠	٢٥	١٥	٢٠	١٠

احسبِ الانحرافَ المعياريَّ لرواتبِ هؤلاءِ الموظفينَ.

٣) في تجربةِ إلقاءِ (٤) قطعٍ نقديةٍ معدنيةٍ مختلفةٍ مرةً واحدةً، وتسجيلِ النواتجِ الظاهرةِ على الوجهِ العلويِّ لكلٍ منْها:

أ) ما عددُ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ Ω في هذهِ التجربةِ؟

ب) ما احتمالُ ظهورِ كتابةٍ على الوجهيْنِ العلوييْنِ لقطعتَيْ نقدٍ وصورةٍ على الوجهينِ العلوييْنِ للقطعتيْنِ الأُخرييْنِ؟

جـ) ما احتمالُ ظهورِ الصورةِ على الأوجهِ العلويةِ لقطعِ النقدِ الأربعةِ؟

٤) المتوسطُ الحسابيُّ لعلاماتِ (٣٠) طالبًا في الصفِّ العاشرِ (أ) يُساوي ٨٥، والانحرافُ المعياريُّ لها يُساوي ٧، والمتوسطُ الحسابيُّ لعلاماتِ (٢٥) طالبًا في الصفِّ العاشرِ (ب) يُساوي ٩٠، والانحرافُ المعياريُّ لها يُساوي ٦. إذا دُمجتِ الشعبتانِ معًا، احسبِ المتوسطَ الحسابيَّ، والانحرافَ المعياريَّ لعلاماتِ الطلابِ، بعدَ الدمجِ.

٥) مازنٌ مقاولُ بناءٍ، قامَ بالتخطيطِ لعملِ مشروعَيْ إسكانٍ بشكلٍ مستقلٍ. إذا كانَ احتمالُ أنْ يُنجزَ المشروعَ الأولَ في الموعدِ المحدّدِ يُساوي $\frac{٢}{٣}$، واحتمالَ أنْ يُنجزَ المشروعيْنِ معًا في الموعدِ المحدّدِ يُساوي $\frac{١}{٥}$، فما احتمالُ:

أ) أنْ يُنجزَ مازنٌ المشروعَ الثاني فقطْ في الموعدِ المحددِ؟

ب) أن يُنجزَ مازنٌ أحدَ المشروعيْنِ على الأقلِّ في الموعدِ المحددِ؟

٦) إذا كانَ $ل(ح_١) = ٠,٥$ ، $ل(ح_١/ح_٢) = ٠,٣$ ، هل $ح_١$ ، $ح_٢$ مستقلانِ؟ برّرْ إجابَتَكَ.

٧) اشترَتْ فدوى (٤) كُتبٍ للثقافةِ العلميةِ، و (٣) كُتبٍ للتربيةِ الدينيةِ، و (٣) كُتبٍ للثقافةِ الأدبيةِ. إذا قرأتْ فدوى كتابيْنِ اختارتْهما بطريقةٍ عشوائيةٍ منْ بينِ الكُتبِ التي اشترتْها، فما احتمالُ:

أ) أن يكونَ الكتابانِ في الثقافةِ الأدبيةِ؟

ب) أن يكون الكتابانِ ليسا ثقافةً علميةً؟

جـ) أن يكونَ أحدُهُما في التربيةِ الدينيةِ، والآخرُ في الثقافةِ الأدبيةِ؟

*٨) يحتوي صُندوقانِ لُعبًا للأطفالِ، وفي كلِّ صُندوقٍ (١٠) لُعبٍ جميعُها متماثلةٌ. إذا كانتْ (٤) لُعبٍ غيرَ صالحةٍ في الصُندوقِ الأولِ، و(٣) غيرَ صالحةٍ في الصُندوقِ الثاني، واختارَ أحدُ الأطفالِ عشوائيًا لُعبةً واحدةً منْ كلِّ صُندوقٍ:

أ) ما احتمالُ أنْ تكونَ اللُعبتانِ صالحتيْنِ؟

ب) إذا اختارَ الطفلُ اللُعبتيْنِ منَ الصُندوقِ الثاني على التوالي، ودونَ إرجاعٍ، فما احتمالُ أن تكونا غيرَ صالحتيْنِ؟

٩) يُمثلُ الجدولُ (٧–٢٠)، كميّاتِ الأمطارِ المسجلةِ في إحدى مناطقِ المملكةِ على مدى ٢٠ عامًا لأقربِ مليمترٍ.

الجدولُ (٧–٢٠)

كميةُ الأمطارِ	٤٥٠–٤٩٩	٤٠٠–٤٤٩	٣٥٠–٣٩٩	٣٠٠–٣٤٩	٢٥٠–٢٩٩	٢٠٠–٢٤٩
عددُ السنواتِ	٢	٤	٣	٦	٣	٢

احسبِ:

أ) المتوسطَ الحسابيَّ لكميّاتِ الأمطارِ.

ب) الانحرافَ المعياريَّ لكميّاتِ الأمطارِ.

١٠) إذا كانَ المتوسطُ الحسابيُّ لمجموعةٍ منَ المشاهداتِ يُساوي ٦٠، والانحرافَ المعياريَّ لها يُساوي ٤، وعُدّلتِ المشاهداتُ حسبَ العلاقةِ: ص = ٥ – ٣س،

حيثُ س: المشاهدةُ قبلَ التعديلِ، ص: المشاهدةُ بعدَ التعديلِ، جِدْ:

السؤالُ منْ أسئلةِ الاختباراتِ الدوليةِ.

احسبِ الانحرافَ المعياريَّ لرواتبِ هؤلاءِ الموظفينَ.

٣) في تجربةِ إلقاءِ (٤) قطعٍ نقديةٍ معدنيةٍ مختلفةٍ مرةً واحدةً، وتسجيلِ النواتجِ الظاهرةِ على الوجهِ العلويِّ لكلٍ منْها:

أ) ما عددُ عناصرِ الفضاءِ العينيِّ Ω في هذهِ التجربةِ؟

ب) ما احتمالُ ظهورِ كتابةٍ على الوجهيْنِ العلوييْنِ لقطعتَيْ نقدٍ وصورةٍ على الوجهينِ العلوييْنِ للقطعتيْنِ الأُخرييْنِ؟

جـ) ما احتمالُ ظهورِ الصورةِ على الأوجهِ العلويةِ لقطعِ النقدِ الأربعةِ؟

٤) المتوسطُ الحسابيُّ لعلاماتِ (٣٠) طالبًا في الصفِّ العاشرِ (أ) يُساوي ٨٥، والانحرافُ المعياريُّ لها يُساوي ٧، والمتوسطُ الحسابيُّ لعلاماتِ (٢٥) طالبًا في الصفِّ العاشرِ (ب) يُساوي ٩٠، والانحرافُ المعياريُّ لها يُساوي ٦. إذا دُمجتِ الشعبتانِ معًا، احسبِ المتوسطَ الحسابيَّ، والانحرافَ المعياريَّ لعلاماتِ الطلابِ، بعدَ الدمجِ.

٥) مازنٌ مقاولُ بناءٍ، قامَ بالتخطيطِ لعملِ مشروعَيْ إسكانٍ بشكلٍ مستقلٍ. إذا كانَ احتمالُ أنْ يُنجزَ المشروعَ الأولَ في الموعدِ المحدّدِ يُساوي $\frac{٢}{٣}$، واحتمالَ أنْ يُنجزَ المشروعيْنِ معًا في الموعدِ المحدّدِ يُساوي $\frac{١}{٥}$، فما احتمالُ:

أ) أنْ يُنجزَ مازنٌ المشروعَ الثاني فقطْ في الموعدِ المحددِ؟

ب) أن يُنجزَ مازنٌ أحدَ المشروعيْنِ على الأقلِّ في الموعدِ المحددِ؟

٦) إذا كانَ ل(ح$_١$) = ٠,٥ ، ل(ح$_١$/ح$_٢$) = ٠,٣ ، هل ح$_١$ ، ح$_٢$ مستقلانِ؟ برّرْ إجابَتَكَ.

٧) اشترَتْ فدوى (٤) كُتبٍ للثقافةِ العلميةِ، و (٣) كُتبٍ للتربيةِ الدينيةِ، و (٣) كُتبٍ للثقافةِ الأدبيةِ. إذا قرأتْ فدوى كتابيْنِ اختارتْهما بطريقةٍ عشوائيةٍ منْ بينِ الكُتبِ التي اشترتْها، فما احتمالُ:

أ) أن يكونَ الكتابانِ في الثقافةِ الأدبيةِ؟

ب) أن يكون الكتابانِ ليسا ثقافةً علميةً؟

جـ) أن يكونَ أحدُهُما في التربيةِ الدينيةِ، والآخرُ في الثقافةِ الأدبيةِ؟

*٨) يحتوي صُندوقانِ لُعبًا للأطفالِ، وفي كلِّ صُندوقٍ (١٠) لُعبٍ جميعُها متماثلةٌ. إذا كانتْ (٤) لُعبٍ غيرَ صالحةٍ في الصُندوقِ الأولِ، و(٣) غيرَ صالحةٍ في الصُندوقِ الثاني، واختارَ أحدُ الأطفالِ عشوائيًا لُعبةً واحدةً منْ كلِّ صُندوقٍ:

أ) ما احتمالُ أنْ تكونَ اللُعبتانِ صالحتيْنِ؟

ب) إذا اختارَ الطفلُ اللُعبتيْنِ منَ الصُندوقِ الثاني على التوالي، ودونَ إرجاعٍ، فما احتمالُ أن تكونا غيرَ صالحتيْنِ؟

٩) يُمثلُ الجدولُ (٧–٢٠)، كميّاتِ الأمطارِ المسجلةِ في إحدى مناطقِ المملكةِ على مدى ٢٠ عامًا لأقربِ مليمترٍ.

الجدولُ (٧–٢٠)

كميةُ الأمطارِ	٤٥٠–٤٩٩	٤٠٠–٤٤٩	٣٥٠–٣٩٩	٣٠٠–٣٤٩	٢٥٠–٢٩٩	٢٠٠–٢٤٩
عددُ السنواتِ	٢	٤	٣	٦	٣	٢

احسبِ:

أ) المتوسطَ الحسابيَّ لكميّاتِ الأمطارِ.

ب) الانحرافَ المعياريَّ لكميّاتِ الأمطارِ.

١٠) إذا كانَ المتوسطُ الحسابيُّ لمجموعةٍ منَ المشاهداتِ يُساوي ٦٠، والانحرافَ المعياريَّ لها يُساوي ٤، وعُدّلتِ المشاهداتُ حسبَ العلاقةِ: ص = ٥ – ٣س،

حيثُ س: المشاهدةُ قبلَ التعديلِ، ص: المشاهدةُ بعدَ التعديلِ، جِدْ:

* السؤالُ منْ أسئلةِ الاختباراتِ الدوليةِ.

أ) المشاهدةَ قبلَ التعديلِ التي أصبحتْ بعدَ التعديلِ –١٥١.

ب) المتوسطَ الحسابيَّ، والانحرافَ المعياريَّ، والتباينَ للمشاهداتِ بعدَ التعديلِ.

١١) إذا كانَ احتمالُ حضورِ مديرِ شركةٍ ما قبل بدءِ الدوامِ (٠,٨٥)، واحتمالُ حضورِ نائبِهِ قبلَ بدءِ الدوام (٠,٩)، واحتمالُ حضورِ واحدٍ منهُما على الأقلِّ قبلَ بدءِ الدوامِ (٠,٩٣)، فما احتمالُ:

أ)حضورِ المديرِ ونائبِهِ قبلَ بدءِ الدوامِ معًا؟

ب) حضورِ نائبِ المديرِ وحدَهُ قبلَ بدءِ الدوامِ؟

١٢) صُندوقانِ، الأولُ فيهِ: (٥) كُراتٍ سوداءَ، و(٣) كُراتٍ بيضاءَ، والثاني فيهِ: (٤) كُراتٍ بيضاءَ، و (٤) كُراتٍ سوداءَ، وجميعُ الكُراتِ في الصُندوقيْنِ متماثلةٌ:

أ) إذا سُحبتْ كُرةٌ واحدةٌ منْ كلِّ صُندوقٍ، فما احتمالُ أنْ تكونَ الكُرتانِ المسحوبتانِ بيضاويْنِ؟

ب) إذا سُحبتْ كُرتانِ منَ الصُندوقِ الأولِ على التوالي، ودونَ إرجاعٍ، فما احتمالُ أنْ تكونا مختلفتَيِ اللونِ؟

الوحدةُ الثامنةُ

٨

الرياضياتُ الماليةُ

تعلمنا في الصفوفِ السابقةِ مجالاتٍ متعددةً منَ الرياضياتِ، واستخدمْنا العلاقاتِ الرياضيةَ الخاصةَ في إيجادِ الحلولِ التي نحتاجُها في موضوعِ الدرسِ. أمّا في هذهِ الوحدةِ فيوجدُ اختلافٌ.... ليسَ في كيفيةِ تطبيقِ القوانينِ، بلْ في المفاهيمِ الجديدةِ التي تختصُّ بالمفاهيمِ الاقتصاديةِ. فهذهِ الوحدةُ تتحدثُ عنْ مواضيعَ مهمةٍ، ستواجهُنا في حياتِنا اليوميةِ، إذْ نفهمُ كيفيةَ التعاملِ معَها وكيفيةَ الوصولِ لحلٍّ جذريٍّ لها. حيثُ سندرسُ مواضيعَ تجاريةً مثلَ: الربحِ البسيطِ، والربحِ المركّبِ، ومنها ما يتعلقُ بالبضائعِ مثلُ: التغيرِ والعمولةِ والتخفيضاتِ ومنها ما يتعلقُ بأعمالِ الصرافةِ مثلُ: تبديلِ العملاتِ .

أ) المشاهدةَ قبلَ التعديلِ التي أصبحتْ بعدَ التعديلِ –١٥١.

ب) المتوسطَ الحسابيَّ، والانحرافَ المعياريَّ، والتباينَ للمشاهداتِ بعدَ التعديلِ.

١١) إذا كانَ احتمالُ حضورِ مديرِ شركةٍ ما قبل بدءِ الدوامِ (٠,٨٥)، واحتمالُ حضورِ نائبِهِ قبلَ بدءِ الدوام (٠,٩)، واحتمالُ حضورِ واحدٍ منهُما على الأقلِّ قبلَ بدءِ الدوامِ (٠,٩٣)، فما احتمالُ:

أ)حضورِ المديرِ ونائبِهِ قبلَ بدءِ الدوامِ معًا؟

ب) حضورِ نائبِ المديرِ وحدَهُ قبلَ بدءِ الدوامِ؟

١٢) صُندوقانِ، الأولُ فيهِ: (٥) كُراتٍ سوداءَ، و(٣) كُراتٍ بيضاءَ، والثاني فيهِ: (٤) كُراتٍ بيضاءَ، و (٤) كُراتٍ سوداءَ، وجميعُ الكُراتِ في الصُندوقيْنِ متماثلةٌ:

أ) إذا سُحبتْ كُرةٌ واحدةٌ منْ كلِّ صُندوقٍ، فما احتمالُ أنْ تكونَ الكُرتانِ المسحوبتانِ بيضاويْنِ؟

ب) إذا سُحبتْ كُرتانِ منَ الصُندوقِ الأولِ على التوالي، ودونَ إرجاعٍ، فما احتمالُ أنْ تكونا مختلفتَيِ اللونِ؟

الوحدةُ الثامنةُ

٨

الرياضياتُ الماليةُ

تعلمنا في الصفوفِ السابقةِ مجالاتٍ متعددةً منَ الرياضياتِ، واستخدمْنا العلاقاتِ الرياضيةَ الخاصةَ في إيجادِ الحلولِ التي نحتاجُها في موضوعِ الدرسِ. أمّا في هذهِ الوحدةِ فيوجدُ اختلافٌ.... ليسَ في كيفيةِ تطبيقِ القوانينِ، بلْ في المفاهيمِ الجديدةِ التي تختصُّ بالمفاهيمِ الاقتصاديةِ. فهذهِ الوحدةُ تتحدثُ عنْ مواضيعَ مهمةٍ، ستواجهُنا في حياتِنا اليوميةِ، إذْ نفهمُ كيفيةَ التعاملِ معَها وكيفيةَ الوصولِ لحلٍّ جذريٍّ لها. حيثُ سندرسُ مواضيعَ تجاريةً مثلَ: الربحِ البسيطِ، والربحِ المركّبِ، ومنها ما يتعلقُ بالبضائعِ مثلُ: التغيرِ والعمولةِ والتخفيضاتِ ومنها ما يتعلقُ بأعمالِ الصرافةِ مثلُ: تبديلِ العملاتِ .

Financial Mathematics

يتوقعُ منَ الطالبِ بعدَ نهايةِ هذهِ الوحدةِ، أن يكونَ قادرًا على:

- التحويلِ منَ الدينارِ الأردنيِّ إلى العملاتِ العربيَّةِ والأجنبيَّةِ وبالعكسِ.
- حسابِ التغيّرِ، قيمةِ العمولةِ، مقدارِ التخفيضِ.
- إيجادِ الربحِ البسيطِ والربحِ المركبِ لمبلغٍ منَ المالِ.

الفصلُ الأولُ

تبديلُ العملة

Currency Exchange

النتاجاتُ

- تحلُّ مسائلَ تتعلقُ بالتبديلِ بين العملاتِ .

قـررَ فؤادٌ الذهابَ لزيارةِ ابنِ عمّهِ الذي يعيشُ في دولةِ الأماراتِ العربيةِ المتحدةِ، وأخذَ معَـهُ مبلـغَ ٣٠٠٠ دينارٍ أردنيٍّ، وعندمَا وصـلَ دبيَّ قامَ بتبديلِ ١٠٠٠ دينـارٍ أردنيٍّ بدراهمَ إماراتيـةٍ. وبعدَ الاطمئنانِ على ابنِ عمهِ قررَ زيارةَ أخيهِ الذي يعيشُ في لبنانَ، وعندَ وصـولهِ قامَ بتبديلِ ما تبقّى لديهِ منْ دنانيرَ أردنيةٍ بليراتٍ لبنانيةٍ. في ضـوءِ المعلوماتِ السـابقةِ، أجبْ عنِ الأسئلةِ الآتيةِ:

١) جدْ عددَ الدراهمِ الإماراتيةِ التي حصلَ عليها فؤادٌ؟

٢) ما عددُ الليراتِ اللبنانيةِ التي حصلَ عليها فؤادٌ ؟

تبديلُ العملةِ

هوَ تبادلٌ ماليٌ تجاريٌ يتمُّ بينَ الشخصِ المالكِ للعملةِ المرادِ تبديلُها، ومكتبِ الصرافةِ أو البنكِ أو البورصةِ (السوقِ المالي).

يبينُ الجدولُ (٨–١) النشرةَ اليوميةَ لأسعارِ تبادلِ العملاتِ المختلفةِ(بيعًا وشراءً) مقابلَ الدينارِ الأردنيِّ. كما أعلَنَها البنكُ المركزيُّ الأردنيُّ، وهذهِ الأسعارُ متغيرةٌ، وسنعتمدُ هذا الجدولَ للتبديلِ بينَ العملاتِ في جميعِ أمثلةِ هذا الدرسِ وتدريباتهِ وتمارينهِ ومسائلهِ.

الجدولُ (٨–١)

العملةُ	سعرُ الشراءِ	سعرُ البيعِ
ريالٌ سعوديٌّ	٠,١٨٨٨٨	٠,١٨٩٣
جنيهٌ مصريٌّ	٠,١٢٠٠	٠,١٢١٨
ريالٌ قطريٌّ	٠,١٩٤٦	٠,١٩٥١
دينارٌ بحرينيٌّ	١,٨٧٧٨	١,٨٨٣٣
دينارٌ كويتيٌّ	٢,٤٢٥٤	٢,٤٣٢٣
درهمٌ إماراتيٌّ	٠,١٩٢٨	٠,١٩٣٣
ليرةٌ لبنانيةٌ (١٠٠٠)	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥
دولارٌ أمريكيٌّ	٠,٧٠٨٠	٠,٧١٠٠
يورو	٠,٩٣٥٥	٠,٩٤١٩
ينٌّ يابانيٌّ (١٠٠)	٠,٦٨٨٥	٠,٦٩٤٣

١– التحويلُ منَ الدينارِ الأردنيِّ إلى العملاتِ العربيةِ أو الأجنبيةِ

سعرُ شراءِ العملةِ العربيةِ أو الأجنبيةِ منْ قبلِ مكتبِ الصرافةِ: هوَ سعرُ بيعِ الدينارِ الأردنيِّ منْ قبلِ الشخصِ الراغبِ بالبيعِ لهذا المكتبِ.

مثالُ (٨–١)

معَ خالدٍ مبلغُ ٧٥٠ دينارٍ أردنيٍّ، أرادَ تحويلَها إلى والدِهِ الذي يعيشُ في مصرَ، فكم جنيهًا مصريًا يحصلُ عليهِ والدُهُ؟

الحلُّ

خالدٌ يبيع ما لديه من دنانيرَ أردنيَّةٍ.

المبلغُ بالجنيهِ المصريِّ $= \frac{٧٥٠}{٠,١٢١٨} =$ ٦١٥٧,٦٤ جنيهًا مصريًا

تدريبُ (٨-١)

إذا علمتَ أنّ : سعرَ (شراءِ–بيعِ) الينِّ الياباني هوَ(٠,٦٨٨٥ –٠,٦٩٤٣) دينارًا أردنيًا، فكم ينًّا يابانيًا يستطيعُ فراسُ أنْ يشتريَ بألفِ دينارٍ أردنيٍّ؟

٢ – التحويلُ منَ العملاتِ العربيةِ أو الأجنبيةِ إلى عملةِ الدينارِ الأردنيِّ

سعرُ بيعِ العملةِ العربيةِ أو الأجنبيةِ منْ قِبَلِ مكتبِ الصرافةِ: هوَ سعرُ شراءِ الدينارِ الأردنيِّ، منْ قبلِ الشخصِ الراغبِ بالبيعِ لهذا المكتبِ.

مثالُ (٨-٢)

عادَ محمدٌ منْ دولةِ الكويتِ بعد حضورِهِ لمؤتمرٍ طبيٍّ، ومعهُ مبلغُ ٢٥٠ دينارًا كويتيًا، وأرادَ تحويلَ المبلغِ إلى دنانيرَ أردنيةٍ، فكْم دينارًا أردنيًا يصبحُ مَعَهُ؟

الحلُّ

محمدٌ يشتري الدينارَ الأردنيَّ.

المبلغُ بالدينارِ الأردنيِّ = ٢٥٠ × ٢,٤٢٥٤ = ٦٠٦,٣٥ دينارًا أردنيًا

تدريبُ (٨-٢)

بعدَ عودةِ عمادٍ منْ أداءِ العمرةِ تبقّى لديهِ ٦٠٠ ريالٍ سعوديٍّ، فكمْ دينارًا أردنيًا يستطيعُ أنْ يشتري بهذا البلغِ؟

تدريبُ (٨-٣)

حلَّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ.

الأسئلةُ ؟

١) معَ مها مبلغُ ١٠٠ دينارٍ أردنيٍّ، أرادتْ تبديلَها بريالاتٍ قطريةٍ، إذا علمتَ أنَّ سعرَ (شراءِ–بيعِ) الريالِ القطريِّ (٠,١٩٤٦ – ٠,١٩٥١) دينارًا أردنيًا، فكم ريالًا قطريًا تستطيعُ أنْ تشتريَ بهذا المبلغِ؟

٢) إذا كانَ لدى عمرَ ٢٠٠ دولارٍ أمريكيٍّ ، فكمْ دينارًا أردنيًا يستطيعُ أنْ يشتريَ بهذا المبلغِ، إذا كانَ سعرُ (شراءِ – بيعِ) الدولارِ الأمريكيِّ (٠,٧٠٨٠ – ٠,٧١٠٠) دينارًا أردنيًا؟

٣) قامَ بلالٌ بإرسالِ مبلغِ ١٠٠٠دينارٍ بحرينيٍّ إلى أهلهِ في الأردنِّ، وكانَ سعرُ (شراءِ – بيعِ) الدينارِ البحرينيِّ (١,٨٧٧٨ – ١,٨٨٣٣) دينارًا أردنيًا، إذا قامَ ابنُهُ بالذهابِ إلى أحدِ البنوكِ لتبديلِ المبلغِ بالدينارِ الأردنيِّ، فكمْ دينارًا أردنيًا قبضَ؟

٤) أرادتْ ياسمينُ شراءَ محضرةِ طعامٍ لوالدتِها سعرُها ٧٥٠ دولارًا أمريكيًّا، وقدْ شاهدتْ عرضًا لمحضرةِ طعامٍ فرنسيةٍ بسعرِ ٨٠٠ يورو، إذا علمتَ أن سعرَ (شراءِ – بيعِ) الدولارِ الأمريكيِّ (٠,٧٠٨٠ –٠,٧١٠٠) دينارًا أردنيًا، سعرُ (شراءِ – بيعِ) اليورو (٠,٩٣٥٥– ٠,٩٤١٩) دينارًا أردنيًا، فأيُّ العرضيْنِ أفضلُ لَها ؟

الفصلُ الثاني

العمولةُ والربحُ والتَخفيضُ

Commission, Profit and Discount

النتاجاتُ

- تحسبُ قيمةَ العمولةِ .
- تحلُّ مسائلَ حياتيةً تتعلقُ بالعمولةِ.
- تحسبُ هامشَ الربحِ بالدينارِ ونسبتَهُ.
- تحسبُ مقدارَ التخفيضِ على سلعةٍ ما .
- تحلُّ مسائلَ حياتيةً تتعلقُ بالربحِ والتخفيضِ.

أوّلًا العمولةُ Commission

استطاعَ فراسٌ الحصولَ على وظيفةِ مندوبِ مبيعاتٍ في شركةٍ قدمتْ لهُ عرضًا: راتبًا شهريًا مقدارُهُ ٢٠٠ دينارٍ ، وعمولةً تبلغُ ٥٪ شهريًا منْ صافي المبيعاتِ التي تزيدُ عنْ ١٠٠٠ دينارٍ:

١) إذا بلغَ صافي المبيعاتِ ٣٠٠٠ دينارٍ، فكمْ يكونُ دخلُهُ الشهريُّ الإجماليُّ ؟

٢) إذا بلغَ صافي المبيعاتِ ٩٠٠ دينارٍ ، فكمْ يكونُ دخلُهُ الشهريُّ الإجماليُّ ؟

العمولةُ: هيَ نظامٌ منَ المكافآتِ الماليةِ تُعطى للقائمينَ على عملياتِ البيعِ والشراءِ، أو تسهيلِ الخدماتِ،أو تسهيلِ حركةِ الاستيرادِ والتصديرِ، مثلِ مندوبِي المبيعاتِ، أو مندوبِي الدعايةِ أو السماسرةِ .

تُحسبُ العمولةُ كالآتِي :

قيمةُ العمولةِ = صافيَ المبيعاتِ × النسبةِ المئويةِ للعمولةِ

صافي المبيعاتِ = جملةَ المبيعاتِ − المبيعاتُ المرتجعةُ

الأسئلةُ ؟

١) معَ مها مبلغُ ١٠٠ دينارٍ أردنيٍّ، أرادتْ تبديلَها بريالاتٍ قطريةٍ، إذا علمتَ أنَّ سعرَ (شراءِ–بيعِ) الريالِ القطريِّ (٠,١٩٤٦ – ٠,١٩٥١) دينارًا أردنيًا، فكم ريالًا قطريًا تستطيعُ أنْ تشتريَ بهذا المبلغِ؟

٢) إذا كانَ لدى عمرَ ٢٠٠ دولارٍ أمريكيٍّ ، فكمْ دينارًا أردنيًا يستطيعُ أنْ يشتريَ بهذا المبلغِ، إذا كانَ سعرُ (شراءِ – بيعِ) الدولارِ الأمريكيِّ (٠,٧٠٨٠ – ٠,٧١٠٠) دينارًا أردنيًا؟

٣) قامَ بلالُ بإرسالِ مبلغِ ١٠٠٠ دينارٍ بحرينيٍّ إلى أهلهِ في الأردنِّ، وكانَ سعرُ (شراءِ – بيعِ) الدينارِ البحرينيِّ (١,٨٧٧٨ – ١,٨٨٣٣) دينارًا أردنيًا، إذا قامَ ابنُهُ بالذهابِ إلى أحدِ البنوكِ لتبديلِ المبلغِ بالدينارِ الأردنيِّ، فكمْ دينارًا أردنيًا قبضَ؟

٤) أرادتْ ياسمينُ شراءَ محضرةِ طعامٍ لوالدتِها سعرُها ٧٥٠ دولارًا أمريكيًّا، وقدْ شاهدتْ عرضًا لمحضرةِ طعامٍ فرنسيةٍ بسعرِ ٨٠٠ يورو، إذا علمتَ أن سعرَ (شراءِ – بيعِ) الدولارِ الأمريكيِّ (٠,٧٠٨٠ – ٠,٧١٠٠) دينارًا أردنيًا، سعرُ (شراءِ – بيعِ) اليورو (٠,٩٣٥٥ – ٠,٩٤١٩) دينارًا أردنيًا، فأيُّ العرضيْنِ أفضلُ لَها ؟

الفصلُ الثاني

العمولةُ والربحُ والتَخفيضُ

Commission, Profit and Discount

النتاجاتُ

- تحسبُ قيمةَ العمولةِ .
- تحلُّ مسائلَ حياتيةً تتعلقُ بالعمولةِ.
- تحسبُ هامشَ الربحِ بالدينارِ ونسبتَهُ.
- تحسبُ مقدارَ التخفيضِ على سلعةٍ ما .
- تحلُ مسائلَ حياتيةً تتعلقُ بالربحِ والتخفيضِ.

أوّلًا العمولةُ Commission

استطاعَ فراسٌ الحصولَ على وظيفةِ مندوبِ مبيعاتٍ في شركةٍ قدمتْ لهُ عرضًا: راتبًا شهريًا مقدارُهُ ٢٠٠ دينارٍ ، وعمولةً تبلغُ ٥٪ شهريًا منْ صافي المبيعاتِ التي تزيدُ عنْ ١٠٠٠ دينارٍ:

١) إذا بلغَ صافي المبيعاتِ ٣٠٠٠ دينارٍ، فكمْ يكونُ دخلُهُ الشهريُّ الإجماليُّ ؟

٢) إذا بلغَ صافي المبيعاتِ ٩٠٠ دينارٍ ، فكمْ يكونُ دخلُهُ الشهريُّ الإجماليُّ ؟

العمولةُ: هيَ نظامٌ منَ المكافآتِ الماليةِ تُعطى للقائمينَ على عملياتِ البيعِ والشراءِ، أو تسهيلِ الخدماتِ،أو تسهيلِ حركةِ الاستيرادِ والتصديرِ، مثلِ مندوبِي المبيعاتِ، أو مندوبِي الدعايةِ أو السماسرةِ .

تُحسبُ العمولةُ كالآتِي :

قيمةُ العمولةِ = صافيَ المبيعاتِ × النسبةِ المئويةِ للعمولةِ

صافي المبيعاتِ = جملةَ المبيعاتِ − المبيعاتُ المرتجعةُ

والمبيعاتُ المرتجعةُ هيَ: قيمةُ السلعِ التي تعادُ إلى البائعِ لأسبابٍ مختلفةٍ .

مثالٌ (٨-٣)

مندوبُ مبيعاتٍ في شركةٍ ما يتقاضَى ٦٪ منْ قيمةِ مبيعاتِهِ الشهريةِ، إذا قبضَ في أحدِ الأشهرِ مبلغَ ١٦٢ دينارًا ، كمْ كانَ إجماليُّ مبيعاتِهِ؟ علمًا بأنَّ قيمةَ المبيعاتِ المرتجعةِ كانتْ ٣٠٠ دينارٍ .

الحلُّ

قيمةُ العمولةِ = صافيَ المبيعاتِ × النسبةِ المئويةِ للعمولةِ

١٦٢ = صافيَ المبيعاتِ × ٦ ٪

$$١٦٢ = \text{صافيَ المبيعاتِ} \times \frac{٦}{١٠٠}$$

صافي المبيعاتِ= ٢٧٠٠ دينارٍ

جملةُ المبيعاتِ = صافيَ المبيعاتِ + المبيعاتُ المرتجعةُ

= ٢٧٠٠ + ٣٠٠ = ٣٠٠٠ دينارٍ

تدريبُ (٨-٤)

إذا كانتْ جملةُ المبيعاتِ لمندوبِ مبيعاتٍ في شركةٍ ألبسةٍ هيَ ٤٥٠٠ دينارٍ، وكانتِ البضاعةُ المرتجعةُ منها بقيمةِ ٣٠٠ دينارٍ، إذا كانتْ نسبةُ عمولتِهِ ٥٪ منْ قيمةِ المبيعاتِ، فجدْ قيمةَ عمولتِهِ؟

تدريبُ (٨-٥)

تدفعُ شركةٌ عمولةً لمندوبِيْ المبيعاتِ العاملينَ فيها حسبَ النظامِ الآتِي:

- ٦٪ عنْ أولِ ١٠٠٠ دينارِ مبيعاتٍ.
- ٨٪ عنِ المبلغِ الذي يزيدُ على ١٠٠٠ دينارٍ ولا يتجاوزُ ٣٠٠٠ دينارٍ.
- ١٠٪ عنِ المبلغِ الذي يزيدُ على ٣٠٠٠ دينارٍ.

كمْ تبلغُ عمولةُ كلٍّ منْ:

١) مندوبِ المبيعاتِ محمودٍ ، إذا كانتْ مبيعاتُهُ ٥٤٠٠ دينارٍ؟

٢) إذا بلغتْ عمولةُ مندوبِ المبيعاتِ كاملٍ ٣٥٠ دينارًا، فكم كانتْ قيمةُ المبيعاتِ التي سجّلَها؟

الأسئلة ؟

١) وظفتْ شركةٌ مندوبَ مبيعاتٍ براتبٍ شهريٍّ مقدارُه ٢٥٠ دينارًا، على أنْ يُمنحَ في نهايةِ العامِ عمولةً مقدارُها ٥٪ منْ قيمةِ المبيعاتِ السنويةِ، إذا بلغتِ المبيعاتُ في ذلكَ العامِ ٢٤٠٠٠ دينارٍ، احسبْ:

أ) قيمةَ عمولةِ المندوبِ ؟

ب) قيمةَ الدخلِ السنويِّ للمندوبِ ؟

٢) اشترتْ شركةٌ قطعةَ أرضٍ بمبلغِ ٢٠٠٠٠٠٠ دينارٍ، ودفعتْ مقابلَ ذلكَ عمولةً للسمسارِ مقدارُها ٣٪، إذا قبضَ السمسارُ منَ البائعِ أيضًا عمولةً مقدارُها ٢٪، احسبْ كلًّا ممّا يأتي:

أ) تكلفةَ قطعةِ الأرضِ على الشركةِ ؟

ب) المبلغَ الذي قبضهُ البائعُ ؟

جـ) المبلغَ الإجماليَّ الذي قبضهُ السمسارُ ؟

٣) قدمتْ شركةٌ لمندوبِ مبيعاتِها وائلٍ عرضيْنِ للعملِ، وطلبتْ منهُ أنْ يختارَ أحدهَمُا:

العرضُ الأولُ: أنْ يتقاضَى راتبًا شهريًا مقدارُهُ ٥٠٠ دينارٍ، دونَ أيِّ عمولةٍ .

العرضُ الثاني: أنْ يتقاضَى راتبًا شهريًا مقدارُهُ ٤٢٠ دينارًا، وعمولةً مقدارُها ٢٪ منَ المبيعاتِ الشهريةِ .

إذا كانَ منَ المتوقعِ أنْ يكونَ متوسطُ المبيعاتِ الشهريةِ ٥٠٠٠ دينارٍ، فهلْ تنصحُ وائلًا أنْ يقبلَ بالعرضِ الأولِ أمِ العرضِ الثاني؟ ولماذا؟

٤) اتفقَ حامدٌ معَ مهندسٍ ليُشرفَ له على إنشاءِ بيتٍ، لقاءَ نسبةِ عمولةٍ مقدارُها ٨٪ منْ تكاليفِ البناءِ، فإذا بلغَتْ تكاليفُ إنشاءِ المترِ المربعِ الواحدِ ٢٠٠ دينارٍ، وكانتْ مساحةُ مسطحِ البيتِ ٤٥٠ مترًا مربعًا، فكمْ كانتْ قيمةُ عمولةِ المهندسِ المشرفِ؟

٥) حلَّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ.

ثانيًا هامشُ الربحِ، والتخفيضُ Profit Margin and Discount

ذهبتْ نجلاءُ معَ والدتِها إلى السوقِ لشراءِ حقيبةِ يدٍ، واختارتْ حقيبةً ثمنُها ١٠ دنانيرَ، وقدْ طلبتْ والدتُها منَ البائعِ التخفيضَ منْ ثمنِها، فقالَ: تكلفةُ هذهِ الحقيبةِ ٨ دنانيرَ، وأنا لمْ أربحْ منكِ سِوَى دينارَيْنِ، فقامتْ الوالدةُ بشرائِها، وعندَ عودةِ نجلاءَ إلى البيتِ، سألتْ والدَها: ماذا نُسمّي كلاًّ منْ مبلغِ الدنانيرِ الثمانيةِ، ومبلغِ الدينارَيْنِ التي تحدّثَ عنْها البائعُ؟ فقالَ: "عزيزَتِي، الدنانيرُ الثمانيةُ هيَ التكلفةُ الحقيقيةُ للحقيبةِ، وتُسمّى أيضًا عندَ البائعِ بثمنِ الشراءِ، أمّا الدينارانِ فتُسمى هامشَ الربحِ"، فقالتْ: ماذا تقصدُ بهامشِ الربحِ ؟ فأجابها:

" هامشُ الربحِ عبارةٌ عنْ مقدارِ المصاريفِ التي احتاجَها البائعُ ، إمّا لنقلِ البضاعةِ أو احتياجاتٍ أخرى أضيفتْ إلى ثمنِ البضاعةِ مضافًا إليها الربحُ الذي يأملُ البائعُ في تحقيقِهِ ليحصلَ على سعرِ بيعٍ مناسبٍ، ويُحسبُ كالآتي:

هامشُ الربحِ = المصاريفَ + الربحُ الصافي

سعرُ البيعِ = التكلفةَ + هامشُ الربحِ

وكثيرًا ما يهتمُّ المحاسبونَ بحسابِ النسبةِ المئويةِ لهامشِ الربحِ ، بالنسبةِ إلى التكلفةِ ، ولحسابِ ذلكَ تُستخدمُ العلاقةُ الآتيةُ :

$$\text{نسبةُ هامشِ الربحِ إلى التكلفةِ} = \frac{\text{هامشَ الربحِ}}{\text{التكلفةِ}} \times ١٠٠٪$$

مثالُ (٨ - ٤)

اشترى تاجرٌ أثاثًا بمبلغِ ١٠٠٠٠ دينارٍ، ودفَعَ أجورَ نقلٍ وتحميلٍ وتنزيلٍ ومصاريفَ أُخرى بمبلغِ ٥٠٠ دينارٍ. إذا باعَ التاجرُ الأثاثَ بمبلغِ ١٢٦٠٠ دينارٍ، فما مقدارُ هامشِ ربحِهِ؟

الحلُّ

لإيجادِ مقدارِ الربحِ، يجبُ الإجابةُ عنِ الأسئلةِ الآتيةِ:

– ما التكلفةُ؟

– ما هامشُ الربحِ؟

التكلفةُ = سعرَ الأثاث + المصاريفُ

= ١٠٠٠٠ + ٥٠٠ = ١٠٥٠٠ دينارٍ

هامشُ الربحِ = سعرَ البيعِ – التكلفةُ

= ١٢٦٠٠ – ١٠٥٠٠ = ٢١٠٠ دينارٍ

تدريبُ ٨-٦

اشترتْ شركةٌ بضاعةً بمبلغِ ٤٠٠٠٠ دينارٍ، ودفعتْ مصاريفَ بنسبةِ ١٢,٥ ٪ منْ ثمنِ الشراءِ، إذا رغبتِ الشركةُ في تحقيقِ ربحٍ صافٍ بنسبةِ ١٠٪ منَ التكلفةِ، جِدْ:

١) سعرَ بيعِ البضاعةِ.

٢) نسبةَ هامشِ الربحِ بالنسبةِ إلى التكلفةِ.

التخفيضُ

هوَ المبلغُ الذي ينقصُ منْ سعرِ البضاعةِ المكتوبِ عليها (سعرِ البيعِ) والذي يُتفقُ عليهِ بينَ البائعِ والمُشترِي . ويُحسبُ وفقَ العلاقةِ الآتيةِ:

مقدارُ التخفيضِ = سعرَ البيعِ × النسبةِ المئويةِ للتخفيضِ

السعرُ بعدَ التخفيضِ = سعرَ البيعِ – مقدارُ التخفيضِ

مثالُ (٨-٥)

أعلَنَتْ شركةُ سياراتٍ في نهايةِ العامِ، عنْ تخفيضٍ على سعرِ إحدى السياراتِ المعروضةِ للبيعِ، بنسبةِ ٣٠٪، فإذا كانتِ السيارةُ معروضةً للبيعِ بسعرٍ يشملُ نسبةَ هامشِ ربحٍ ٤٠٪ منَ التكلفةِ، حيثُ كانتْ تكلفتُها ١٥٠٠٠ دينارٍ، جدْ:

١) سعرَ بيعِ السيارةِ قبلَ التخفيضاتِ.

٢) مقدارَ التخفيضِ.

٣) سعرَ بيعِ السيارةِ خلالَ التنزيلاتِ .

الحلُّ

١) هامشُ الربحِ = التكلفةَ × نسبةِ هامشِ الربحِ

$= ١٥٠٠٠ \times ٤٠٪$

$= ١٥٠٠٠ \times \frac{٤٠}{١٠٠} = ٦٠٠٠$ دينارٍ

سعرُ بيعِ السيارةِ قبلَ التخفيضاتِ = التكلفةَ + هامشُ الربحِ

$= ١٥٠٠٠ + ٦٠٠٠ = ٢١٠٠٠$ دينارٍ

٢) مقدارُ التخفيضِ = سعرَ البيعِ × النسبةِ المئويةِ للتخفيضِ

$= ٢١٠٠٠ \times ٣٠٪$

$= ٢١٠٠٠ \times \frac{٣٠}{١٠٠} = ٦٣٠٠$ دينارٍ

٣) سعرُ البيعِ خلالَ التنزيلاتِ = سعرَ البيعِ قبلَ التخفيضاتِ – مقدارُ التخفيضِ

$= ٢١٠٠٠ - ٦٣٠٠ = ١٤٧٠٠$ دينارٍ

تدريبٌ ٨-٧

أعلنتْ شركةٌ لقطعِ السياراتِ عنْ تخفيضٍ مقدارُه ٢٠٪ منْ سعرِ بيعِ القطعِ التي تبيعُها للزبائنِ، فإذا حصلَ زبونٌ على خصمٍ مقدارُه ١٠٠ دينارٍ، جِدْ:

١) سعرَ القطعِ قبلَ التخفيضِ.

٢) سعرَ القطعِ التي اشتراها.

فكّرْ وناقشْ

اشترتْ أمينةُ أدواتٍ كهربائيةً لمنزلِها منْ شركةٍ للأدواتِ الكهربائيةِ كانتْ قدْ أعلنتْ عنْ خصمِ ٢٥٪ منْ سعرِها. إذا كانَ مقدارُ التخفيضِ ١٢٥ دينارًا، فكمْ كانَ سعرُ الأدواتِ التي اشترتْها أمينُة قبلَ التخفيضِ؟

قامتْ أمينةُ بحلِّ السؤالِ كما يأتِي:

مقدارُ التخفيضِ = سعرَ البيعِ × النسبةِ المئويةِ للتخفيضِ

$$١٢٥ = س \times \frac{٢٥}{١٠٠}$$

$$٢٥ \times ١٢٥ = ١٠٠س$$

س= ٣١,٢٥ دينارًا السعرُ قبلَ التخفيضِ، ما رأيُكِ بالحلِّ؟

الأسئلةُ ؟

١) إذا كانتْ تكلفةُ شراءِ شقةٍ ٤٠٠٠٠ دينارٍ، وصُرفَ عليها مصاريفُ بنسبةِ ١٥٪ منَ التكلفةِ، ويريدُ صاحبُها أنْ يربحَ فيها ٣٠٪ منَ التكلفةِ، فكمْ يكونُ سعرُ بيعِها ؟

٢) في موسمِ التنزيلاتِ دفعَ مازنٌ مبلغَ ٩٠٠ دينارٍ، ثمنًا لغرفةِ نومٍ، فإذا كانَ مقدارُ التخفيضِ الذي حصلَ عليهِ مازنٌ ٣٠٠ دينارٍ، احسبْ:

أ) سعرَ بيعِ الغرفةِ، قبلَ موسمِ التنزيلاتِ.

ب) النسبةَ المئويةَ للتخفيضِ، التي حددّها البائعُ للغرفةِ.

٣) إذا كانتْ تكلفةُ شراءِ سيارةٍ على شركةِ سياراتٍ ١٢٠٠٠ دينارٍ، وبلغتْ المصاريفُ التي دُفعتْ عليْها ٥٠٪ منَ التكلفةِ، إذا كانتْ الشركةُ ترغبُ في تحقيقِ ربحٍ صافٍ مقدارُه ٣٠٪ منَ التكلفةِ، احسبْ:

أ) سعرَ بيعِ السيارةِ .

ب) سعرَ السيارةِ في نهايةِ العامِ، إذا أعلنتِ الشركةُ عنْ نسبةِ تخفيضٍ مقدارُها ١٥٪.

جـ) الربحَ الصافي للشركةِ منْ بيعِ ٢٠ سيارةً في فترةِ التنزيلاتِ.

٤) إذا كانَ سعرُ بيعِ بضاعةٍ ٤٠٠٠٠ دينارٍ، وكانتْ نسبةُ هامشِ الربحِ ٢٥٪ منَ التكلفةِ، فكم تكلفةُ شراءِ البضاعةِ ؟

٥) اشترى رجلٌ سيارةً منْ مكتبٍ لبيعِ السياراتِ مكتوبًا عليها ٦٥٠٠ دينارٍ، وعندَ الشراءِ خصمَ لهُ المكتبُ مبلغًا، فدفعَ ٦١١٠ دنانيرَ ثمنًا لها. احسبْ :

أ) مقدارَ التخفيضِ الذي حصلَ عليهِ الرجلُ .

ب) النسبةَ المئويةَ للتخفيضِ.

٦) يريدُ حسّانٌ أنْ يشتريَ لعبةً مكتوبًا عليها ٥٠ دينارًا. ما نسبةُ التخفيضِ التي يجبُ أنْ يمنَحها التاجرُ لحسّانٍ حتى يتمكنَ حسّانٌ مِنْ شراءِ هذهِ اللعبةِ بمبلغِ ٤٠ دينارًا فقطْ ؟

ثالثًا الربحُ Profit

أرادَ فؤادٌ إيداعَ مبلغٍ من المالِ مقدارُهُ ٥٠٠ دينارٍ لمدةِ ٣ سنواتٍ، فذهبَ إلى أحدِ البنوكِ وأودعَ المبلغَ بفائدةٍ مركبةٍ نسبتُها ٥٪ سنويًا :

١) كم يُصبحُ المبلغُ بعدَ مضيِّ ٣ سنواتٍ؟

٢) لَوْ قامَ فؤادٌ بإيداعِ المبلغِ مدةَ ٦ شهورٍ، كمْ يصبحُ معَهُ منَ المالِ بعدَ انقضاءِ المدةِ ؟

الربحُ البسيطُ: هوَ مبلغٌ منَ المالِ، يحصلُ عليهِ الشخصُ المودِعُ للمالِ، لمدةٍ محددةٍ تُحسبُ بالسنواتِ، ويحصلُ عليهِ بعدَ مضيِّ المدةِ المحددةِ.

نشاطُ (٨ - ١)

أودعَ سامرٌ مبلغَ ١٠٠ دينارٍ في حسابِ التوفيرِ بفائدةٍ سنويةٍ مقدارُها ٦٪ . أجبْ عنِ الأسئلةِ الآتيةِ:

- كمْ يُصبحُ المبلغُ بعدَ مضيِّ ١٠ سنواتٍ منْ إيداعِهِ؟
- هلْ سيتضاعفُ المبلغُ إذا :

  أ) تمتْ مضاعفةُ قيمةِ الفائدةِ ؟

  ب) إذا أصبحتْ المدةُ ٢٠ سنةً؟
- ما هيِ الفترةُ التي سيتضاعفُ فيها المبلغُ المودَعُ، عندَما تكونُ الفائدةُ : ٧٪ ، ١٠٪ ، ٢٠٪؟
- ما المبلغُ الذي يجبُ أنْ يودِعَهُ سامرٌ الآنَ؛ حتى يحصلَ على مبلغِ ١٠٠٠٠ دينارٍ بعدَ ٢٠ سنةً وبفائدةٍ سنويةٍ مقدارُها ٤٪؟

منَ النشاطِ السابقِ نلاحظُ أنَّ :

الربحُ البسيطُ = المبلغَ × نسبةِ الفائدةِ × عددِ السنواتِ

ويُكتبُ بالرموزِ: ر = م × ف × ن

حيثُ ر : الربحُ البسيطُ، م: المبلغُ، ف: نسبةُ الفائدةِ، ن: عددُ السنواتِ

وتكونُ: جملةُ المبلغِ = المبلغَ + الربحُ البسيطُ

وتكتبُ بالرموزِ: جـ = م + ر

تدريبُ (٨-٨)

قامَ فراسٌ بإيداعِ مبلغِ ١٠٠٠٠ دينارٍ بفائدةٍ بسيطةٍ نسبتُها ٦٪ سنويًا، إذا كانَ ربحُهُ بعدَ فترةٍ منَ الزمنِ ٢٠٠ دينارٍ، فاحسبْ طولَ الفترةِ الزمنيةِ بالسنواتِ، التي أودعَ فيها المبلغَ في البنكِ.

لاحظتَ في الربحِ البسيطِ أنّ الأرباحَ تحسبُ في نهايةِ كل سنةٍ، ويُحسبُ الربحُ عنِ المبلغِ الأصليِّ، وتُعدُّ الفائدةُ ربحًا بسيطًا. إذا أضيفَتْ الأرباحُ كلَّ سنةٍ إلى المبلغِ الأصليِّ، فإنَّ الأرباحَ تسمّى **ربحًا مركبًا (تراكميًا)**، ويُسمّى رأسُ المالِ والربحُ **جملةَ المبلغِ الجديدِ**. ولا يُحسبُ الربحُ نهايةَ كلِّ سنةٍ .

لِذا **فالربحُ المركبُ**: هوَ مبلغٌ منَ المالِ يحصلُ عليهِ الشخصُ المودِعُ سنويًا، حيثُ يُضافُ الربحُ السنويُّ إلى جملةِ المبلغِ العامِّ، ويُحسبُ عليهِ الربحُ في العامِ القادمِ، تكونُ فيهِ الأرباحُ تراكميّةً.

نشاطُ (٨-٢)

أودعتْ نداءُ مبلغَ ١٠٠ دينارٍ لمدةِ ١٠ سنواتٍ بفائدةٍ مركبةٍ قيمتُها ٦٪ سنويًا . كمْ يُصبحُ المبلغُ بعدَ مضيِّ العشرِ سنواتٍ ؟

أكملِ الجدولَ (٨-٢) الآتِي:

الزمنُ بالسنواتِ	الربحُ	جملةُ المبلغِ
١	٦	١٠٦
٢	٠,٠٦ × ١٠٦	١٠٦ + ٠,٠٦ × ١٠٦ = ١٠٠(١+٠,٠٦)^{٢}
٣	.....	١٠٠(١ + ٠,٠٦)^{٣}
ن	.....	.....
١٠	.....	.....

منَ النشاطِ (٨–٢)، نستنتجُ أنَّ:

جملةُ المبلغِ في حالةِ الربحِ المركبِ (بعدَ ن سنةٍ) = المبلغَ (١ + نسبةُ الربحِ)^{ن}

وبالرموزِ جـ = م (١ + ف)^{ن}

ويكونُ الربحُ المركبُ = جملةَ المبلغِ – المبلغُ

تدريبُ ٨–٩

أودعتْ ولاءُ مبلغَ ٦٠٠٠ دينارٍ في أحدِ البنوكِ، بحسابِ الربحِ المركبِ، وبفائدةٍ نسبتُها ٤٪ سنويًا، ولمدةِ ٣ سنواتٍ، جِدِ الآتي:

١) مقدارَ ربحِ ولاءَ.

٢)جملةَ المبلغِ الذي تقبضُهُ ولاءُ في نهايةِ المدةِ.

تدريبُ ٨–١٠

حلَّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ.

مثالٌ (٨-٦)

اشترى وائلٌ سيارةً بمبلغ ٦٥٠٠ دينارٍ، وبعدَ مضيِّ سنةٍ كاملةٍ على استخدامِها، باعَها بمبلغِ ٥٥٠٠ دينارٍ، جدْ كلاًّ ممّا يأتي:

١) قيمةَ التغيرِ في سعرِ السيارة .

٢) نسبةَ التغيرِ في سعرِ السيارةِ .

الحلُّ

١) قيمةُ التغير = القيمةَ الحاليةَ – القيمةُ السابقةُ

= ٥٥٠٠ – ٦٥٠٠ = −١٠٠٠ دينارٍ

٢) نسبةُ التغيرِ = $\frac{\text{قيمةَ التغيرِ}}{\text{القيمةِ السابقةِ}} \times ١٠٠٪$

$= \frac{-١٠٠٠}{٦٥٠٠} \times ١٠٠٪ = -١٥,٣٨٪$

تدريبٌ (٨-١١)

أرادَ عادلٌ بيعَ أرضِهِ التي قامَ بشرائها منذُ خمسِ سنواتٍ بمبلغِ ٨٠٠٠٠ دينارٍ، وقدْ عرضَها للبيعِ في مكتبٍ عقاريٍّ وباعَها بمبلغِ ٩٥٠٠٠ دينارٍ، جدْ كلاًّ ممَّا يأتي:

١) قيمةَ التغيرِ في سعرِ الأرضِ.

٢) نسبةَ التغيرِ في سعرِ الأرضِ.

الأسئلةُ ؟

١) اقترضَ سامي مبلغًا منَ المالِ منْ أحدِ البنوكِ، بفائدةٍ بسيطةٍ نسبتُها ٥٪ سنويًا، لمدةِ خمسِ سنواتٍ، إذا كانَ ربحُ البنكِ في نهايةِ المدةِ ٥٠٠ دينارٍ، فكمْ يكونَ المبلغُ الذي اقترضَهُ سامي منَ البنكِ؟

٢) أودعتْ سميرةُ مبلغَ ١٢٠٠ دينارٍ في بنكٍ ما، بربحٍ بسيطٍ نسبتهُ ٩٪ سنويًا، لمدةَ سنتيْنَ، كمْ دينارًا يُصبحُ معَ سميرةَ بعدَ انتهاءِ المدةِ؟

٣) أودعَ أنسٌ مبلغَ ٢٥٠٠ دينارٍ في أحدِ البنوكِ بفائدةٍ بسيطةٍ مدةَ ٤ سنواتٍ، إذا كانتْ أرباحُهُ في نهايةِ المدةِ ٣٠٠ دينارٍ، فجِدْ نسبةَ الفائدةِ التي يدفعُها البنكُ؟

٤) أيهما أفضلُ أنْ تُودعَ مبلغَ ١٢٠٠٠ دينارٍ مدةَ ٣ سنواتٍ بحسابِ ربحٍ بسيطٍ بنسبةِ ٨٪ سنويًا، أمْ بحسابِ الربحِ المركّبِ بنسبةِ ٧٪ سنويًا؟

٥) أودعَ شخصٌ مبلغَ ١٥٠٠ دينارٍ في أحدِ البنوكِ بحسابِ الربحِ المركّبِ بفائدةٍ نسبتُها ١٠٪ سنويًا، وأصبحتْ جملتُه ١٨١٥ دينارًا، جِدْ:

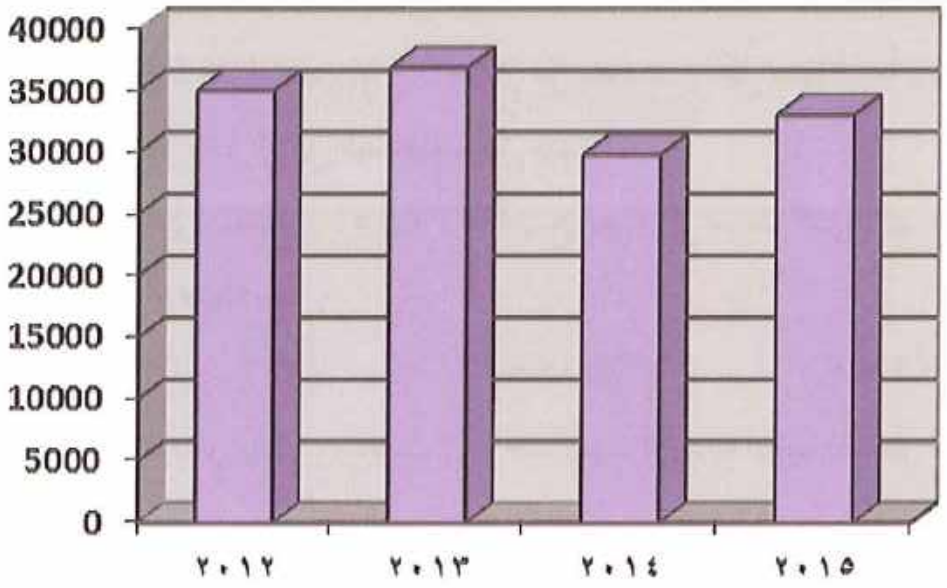
أ) عددَ السنواتِ التي أودعَ فيها هذا المبلغَ .

ب) الربحَ الذي يأخذُهُ هذا الشخصُ بعدَ مضيِّ المدةِ.

٦) قالَ خليلٌ إنهُ منَ الأفضلِ لهُ أنْ يُودعَ ٤٠٠٠ دينارٍ في أحدِ البنوكِ لمدةِ ٤ سنواتٍ بربحٍ بسيطٍ نسبتُه ١٠٪ منْ أن يُودِعَها بحسابٍ مركبٍ نسبتُهُ ٨٪.

هلْ تُوافِقَ خليلًا أم تُعارضُهُ في قرارِهِ؟ برّرْ إجابتَكَ.

٧) يبينُ الشكلُ (٨–١) رسمًا بيانيًا لأعدادِ الطلبةِ المقبولينَ في الجامعاتِ الحكوميةِ الأردنيةِ خلالَ أربعِ سنواتٍ متتاليةٍ، بالاستعانةِ بالرسمِ أجبْ عمّا يأتي:



الشكل (٨–١)

أ) ما نسبةُ التغيرِ في أعدادِ الطلبةِ المقبولينَ في عام ٢٠١٤ مقارنةً معَ عامِ ٢٠١٢ ؟

ب) هلْ يوجدُ تزايدٌ في أعدادِ الطلبةِ المقبولينَ بينَ عامَيْ ٢٠١٣ و ٢٠١٤

أسئلةُ الوحدةِ

١) يتكونُ هذا السؤالُ منْ ٤ فقراتٍ من نوعِ الاختيارِ منْ متعددٍ، ولكلٍّ منها أربعةُ بدائلَ، واحدٌ منها فقطْ صحيحٌ، اخترْ رمزَ البديلِ الصحيحِ لكلٍّ منْها:

(١) اشترَى محمدٌ آلةَ تصويرٍ بمبلغِ ٥٠٠ دينارٍ، إذا أصبحَ سعرُها في موسمِ التنزيلاتِ ٣٥٠ دينارًا، فإنَّ نسبةَ التغيُّرِ في سعرِها:

أ) ٢٠٪ ب) ٣٠٪ جـ) ٤٠٪ د) ٢٥٪

(٢) إذا كانَ لديكَ ٥٠٠٠ ينٍ يابانيٍّ، وذهبتَ إلى أحدِ البنوكِ الأردنيةِ لبيعِها بالدينارِ الأردنيِّ. إذا علمتَ أنَّ سعرِ (شراءِ – بيعِ) الينِّ الياباني (٠,٦٨٨٦٥ – ٠,٦٩٤٣) دينارًا أردنيًا. فإنَّكَ تكونُ قدْ قبضتَ منَ البنكِ:

أ) ٣٤٤,٢٥ ب) ٣٤٧,١٥ جـ) ٧٢٦,٢٢ د) ٧٢٠,١٥

(٣) إذا بلغَ صافي مبيعاتِ موظّفٍ ١٠٠٠ دينارٍ، وكانتْ نسبةُ العمولةِ ١٠٪ فإنّ قيمةَ العمولةِ:

أ) ٩٠٠ ب) ١١٠٠ جـ) ١٠٠ د) ٩٠

(٤) إذا أودعَ فادي مبلغَ ١٥٠٠ دينارٍ في بنكٍ، بربحٍ بسيطٍ بنسبةِ ٦٪ لمدةِ ٥ سنواتٍ. فإنَّ الربحَ الذي يقبضُهُ فادي في نهايةِ المدةِ بالدينارِ:

أ) ٩٠ ب) ٤٥ جـ) ٧٥ د) ٤٥٠

٢) إذا كانَ سعرُ جهازِ حاسوبٍ حسبَ العرضيْن الآتييْنِ:

أ) ٦٠٠ دولارٍ، علمًا بأنَّ سعرَ (شراءِ – بيعِ) الدولارِ (٠,٧٠٨٠ – ٠,٧١٠٠) دينارٍ أردنيٍّ.

ب) ٧٥٠ يورو، علمًا بأنّ سعرَ (شراءِ – بيعِ) اليورو (٠,٩٣٥٥ – ٠,٩٤١٩) دينارٍ أردنيٍّ.

فأيُّ العرضيْنِ أفضلُ؟ (علمًا بأنَّ لَهُ المواصفاتِ نفسَها).

٣) يحصلُ مندوبُ مبيعاتٍ على راتبٍ أساسيٍ شهريٍ مقدارُه ٢٥٠ دينارًا، بالإضافةِ إلى عمولةٍ مقدارُها ٧٪ منْ صافي مبيعاتِهِ الشهريةِ، التي تزيدُ على الحدِّ الأدنى المخصصِ وهوَ ٤٠٠ دينارٍ . احسبِ:

أ) الأجرَ الكليَّ لهذا المندوبِ في شهرٍ بلغَتْ جملةُ مبيعاتِهِ ٩٠٠ دينارًا.

ب) الأجرَ الكليَّ لهذا المندوبِ في شهرٍ بلغَتْ جملةُ مبيعاتِهِ ٦٥٠ دينارًا، وكانتْ المبيعاتُ المرتجعةُ ٢٥٠ دينارًا.

٤) إذا كانَ سعرُ طقمٍ رجاليٍّ قبلَ التنزيلاتِ ١٢٠ دينارًا، وخُصِمَ عليهِ في موسمِ التنزيلاتِ نسبةٌ مقدارُها ٦٠٪، فكمْ دينارًا يدفعُ المُشتري ثمنًا للطقمِ، في موسمِ التنزيلاتِ؟

٥) إذا كانَ معدلُ إنتاجِ قطرَ منَ البترولِ في شهرِ نيسانَ في إحدى السنواتِ ٠,٦٨ مليونَ برميلٍ يوميًا، بينَما كانَ معدلُ إنتاجِها في شهرِ أيارَ في السنةِ نفسِها ٠,٧٣ مليونَ برميلٍ يوميًا. احسبْ نسبةَ التغيرُ في الإنتاجِ في شهرِ أيارَ مقارنةً معَ شهرِ نيسانَ .

٦) اشترى تاجرُ قطعِ سياراتٍ بضاعةً بمبلغِ ٤٠٠٠٠ دينارٍ مِنْ إحدى الشركاتِ إذا أعطتْ هذه الشركةُ للتاجرِ خصمًا بلغتْ نسبتُهُ ٣٥٪، احسبْ:

أ) مقدارَ التخفيضِ.

ب) سعرَ البضاعةِ قبلَ التخفيضِ.

٧) سعرُ سيارةٍ ١٢٠٠٠ دينارٍ نقدًا، أرادَ شخصٌ شراءَ السيارةِ، على أنْ يدفعَ ١٥٪ منْ قيمتِها دفعةً أُوْلى، والباقي على أقساطٍ شهريةٍ لمدةِ ٤ سنواتٍ .إذا علمتَ أنَّ نسبةَ فائدةِ قروضِ السياراتِ في السوقِ ٦٪. جدْ مقدارَ القسطِ الشهريِّ.

٨) إذا كانتْ تكلفةُ صناعةِ طيارةٍ ٢٥٠٠٠٠ دينارٍ، وبيعَتْ بسعرِ ٤٠٠٠٠٠ دينارٍ:

أ) جِدِ النسبةَ المئويةَ لهامشِ الربحِ، بالنسبةِ إلى سعرِ البيعِ.

ب) إذا خُفضَ سعرُ هذهِ الطيارةِ بنسبةِ ٢٠٪، جِدْ سعرَ البيعِ بعدَ التخفيضِ.

أسئلةُ الوحدةِ

١) يتكونُ هذا السؤالُ منْ ٤ فقراتٍ من نوعِ الاختيارِ منْ متعددٍ، ولكلٍّ منها أربعةُ بدائلَ، واحدٌ منها فقطْ صحيحٌ، اخترْ رمزَ البديلِ الصحيحِ لكلٍّ مِنْها:

(١) اشترَى محمدٌ آلةَ تصويرٍ بمبلغِ ٥٠٠ دينارٍ، إذا أصبحَ سعرُها في موسمِ التنزيلاتِ ٣٥٠ دينارًا، فإنَّ نسبةَ التغيُّرِ في سعرِها:

أ) ٢٠٪ ب) ٣٠٪ جـ) ٤٠٪ د) ٢٥٪

(٢) إذا كانَ لديكَ ٥٠٠٠ ينٍ يابانيٍّ، وذهبتَ إلى أحدِ البنوكِ الأردنيةِ لبيعِها بالدينارِ الأردنيِّ. إذا علمتَ أنَّ سعرِ (شراءِ – بيعِ) الينِّ الياباني (٠,٦٨٨٦٥ – ٠,٦٩٤٣) دينارًا أردنيًا. فإنَّكَ تكونُ قدْ قبضتَ منَ البنكِ:

أ) ٣٤٤,٢٥ ب) ٣٤٧,١٥ جـ) ٧٢٦,٢٢ د) ٧٢٠,١٥

(٣) إذا بلغَ صافي مبيعاتِ موظّفٍ ١٠٠٠ دينارٍ، وكانتْ نسبةُ العمولةِ ١٠٪ فإنّ قيمةَ العمولةِ:

أ) ٩٠٠ ب) ١١٠٠ جـ) ١٠٠ د) ٩٠

(٤) إذا أودعَ فادي مبلغَ ١٥٠٠ دينارٍ في بنكٍ، بربحٍ بسيطٍ بنسبةِ ٦٪ لمدةِ ٥ سنواتٍ. فإنَّ الربحَ الذي يقبضُهُ فادي في نهايةِ المدةِ بالدينارِ:

أ) ٩٠ ب) ٤٥ جـ) ٧٥ د) ٤٥٠

٢) إذا كانَ سعرُ جهازِ حاسوبٍ حسبَ العرضيْن الآتييْن:

أ) ٦٠٠ دولارٍ، علمًا بأنَّ سعرَ (شراءِ – بيعِ) الدولارِ (٠,٧٠٨٠ – ٠,٧١٠٠) دينارٍ أردنيٍّ.

ب) ٧٥٠ يورو، علمًا بأنّ سعرَ (شراءِ – بيعِ) اليورو (٠,٩٣٥٥ – ٠,٩٤١٩) دينارٍ أردنيٍّ.

فأيُّ العرضيْنِ أفضلُ؟ (علمًا بأنَّ لَهُ المواصفاتِ نفسَها).

٣) يحصلُ مندوبُ مبيعاتٍ على راتبٍ أساسيٍ شهريٍ مقدارُه ٢٥٠ دينارًا، بالإضافةِ إلى عمولةٍ مقدارُها ٧٪ منْ صافي مبيعاتِهِ الشهريةِ، التي تزيدُ على الحدِّ الأدنى المخصصِ وهوَ ٤٠٠ دينارٍ . احسبِ:

أ) الأجرَ الكليَّ لهذا المندوبِ في شهرٍ بلغَتْ جملةُ مبيعاتِهِ ٩٠٠ دينارًا.

ب) الأجرَ الكليَّ لهذا المندوبِ في شهرٍ بلغَتْ جملةُ مبيعاتِهِ ٦٥٠ دينارًا، وكانتْ المبيعاتُ المرتجعةُ ٢٥٠ دينارًا.

٤) إذا كانَ سعرُ طقمٍ رجاليٍّ قبلَ التنزيلاتِ ١٢٠دينارًا، وخُصمَ عليهِ في موسمِ التنزيلاتِ نسبةٌ مقدارُها ٦٠٪، فكمْ دينارًا يدفعُ المُشتري ثمنًا للطقمِ، في موسمِ التنزيلاتِ؟

٥) إذا كانَ معدلُ إنتاجِ قطرَ منَ البترولِ في شهرِ نيسانَ في إحدى السنواتِ ٠,٦٨ مليونَ برميلٍ يوميًا، بينَما كانَ معدلُ إنتاجِها في شهرِ أيارَ في السنةِ نفسِها ٠,٧٣ مليونَ برميلٍ يوميًا. احسبْ نسبةَ التغيرُ في الإنتاجِ في شهرِ أيارَ مقارنةً معَ شهرِ نيسانَ .

٦) اشترى تاجرُ قطعِ سياراتٍ بضاعةً بمبلغِ ٤٠٠٠٠ دينارٍ مِنْ إحدى الشركاتِ إذا أعطتْ هذه الشركةُ للتاجرِ خصمًا بلغتْ نسبتُهُ ٣٥٪، احسبْ:

أ) مقدارَ التخفيضِ.

ب) سعرَ البضاعةِ قبلَ التخفيضِ.

٧) سعرُ سيارةٍ ١٢٠٠٠ دينارٍ نقدًا، أرادَ شخصٌ شراءَ السيارةِ، على أنْ يدفعَ ١٥٪ منْ قيمتِها دفعةً أُوْلى، والباقي على أقساطٍ شهريةٍ لمدةِ ٤ سنواتٍ .إذا علمتَ أنَّ نسبةَ فائدةِ قروضِ السياراتِ في السوقِ ٦٪. جدْ مقدارَ القسطِ الشهريِّ.

٨) إذا كانتْ تكلفةُ صناعةِ طيارةٍ ٢٥٠٠٠٠ دينارٍ، وبيعَتْ بسعرِ ٤٠٠٠٠٠ دينارٍ:

أ) جدِ النسبةَ المئويةَ لهامشِ الربحِ، بالنسبةِ إلى سعرِ البيعِ.

ب) إذا خُفضَ سعرُ هذهِ الطيارةِ بنسبةِ ٢٠٪، جدْ سعرَ البيعِ بعدَ التخفيضِ.

تمَّ بحمدِ اللهِ تعالَى