

الحبر

الوحدة الأولى (الأعداد الحقيقية)

- ✓ الجذر التكعيبي للعدد النسبي
- ✓ مجموعة الأعداد غير النسبية
- ✓ مجموعة الأعداد الحقيقية
- ✓ الفترات
- ✓ العمليات علي الفترات
- ✓ العمليات علي الأعداد الحقيقية
- ✓ العمليات علي الجذور التربيعية
- ✓ العدان المترافقان
- ✓ العمليات علي الجذور التكعيبية
- ✓ تطبيقات علي الأعداد الحقيقية
- ✓ حل المعادلات من الدرجة الأولى
- ✓ حل المتباينات من الدرجة الأولى

الجزر التكعيبي للعدد النسبي



تعريف

الجزر التربيعي للعدد النسبي p هو العدد الذي مكعبه يساوي p ويرمز للجزر التكعيبي بالرمز $(\sqrt[3]{})$ والجزر التكعيبي له قيمة وحيدة.

أمثلة على الجزر التكعيبي للعدد النسبي :-

$$\begin{aligned} 2 &= \sqrt[3]{8} \quad (\text{لأن : } 8 = 2 \times 2 \times 2) \\ 10 &= \sqrt[3]{1000} \quad (\text{لأن : } 1000 = 10 \times 10 \times 10) \\ 8- &= \sqrt[3]{512-} \quad (\text{لأن : } 8- = 8- \times 8- \times 8-) \end{aligned}$$

أي أن الجزر التكعيبي لعدد نسبي ما هو حاصل ضرب عدد ما في نفسه ٢ مرات ليكون الناتج هذا العدد النسبي

ملاحظات هامة

- ١ الجزر التكعيبي للعدد النسبي الموجب يكون موجبا
- ٢ الجزر الكعيبي للعدد النسبي السالب يكون سالبا

(أي أن الجزر التكعيبي يأخذ نفس إشارة العدد)

$$\text{الجزر التكعيبي للعدد النسبي صفر هو الصفر} \quad \text{٣} \quad \text{٤} \quad p = \sqrt[3]{p^3} \quad , \quad p- = \sqrt[3]{(p-)^3} \quad (\text{لأن التكعيب لا يغير الإشارة السالبة})$$

- ٥ المعادلة التي على صورة : $p = s^3$ لها حل وحيد في n هو : $s = \sqrt[3]{p}$
- أي أن : للتخلص من التكعيب نأخذ الجزر التكعيبي للطرفين وللتخلص من الجزر التكعيبي يجب تكعيب الطرفين وذلك في المعادلات.

$$\text{٦} \quad \sqrt[3]{p^2} = \sqrt[3]{p^2} \quad \Leftarrow \text{أي أنه عند التخلص من الجزر التكعيبي نقسم الأس على ٣}$$

$$\sqrt[3]{p^2} = \sqrt[3]{p^2} \quad \text{أو} \quad \sqrt[3]{p^4} = \sqrt[3]{p^4}$$

$$\text{٧} \quad p = \sqrt[3]{p} \times \sqrt[3]{p} \times \sqrt[3]{p}$$

طرق إيجاد الجذر التكعيبي للعدد النسبي المكعب الكامل :-

بتحليل العدد لعوامله الأولية

باستخدام الآلة الحاسبة

فمثلاً :

$$3 = \sqrt[3]{27} \quad \bullet$$

$$5 = \sqrt[3]{125} \quad \bullet$$

$$2 = \sqrt[3]{8} \quad \bullet$$

أوجد الجذر التكعيبي للأعداد التالية باستخدام التحليل ثم تأكد من أجابتك باستخدام الآلة الحاسبة :-

$$\begin{array}{l} 2 \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 216 \\ 108 \\ 54 \end{array} \\ 3 \left\{ \begin{array}{l} 3 \\ 3 \\ 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 27 \\ 9 \\ 3 \end{array} \\ 7 \left\{ \begin{array}{l} 7 \\ 7 \\ 7 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 343 \\ 49 \\ 7 \end{array} \\ 1 \end{array}$$

$$6 = 3 \times 2 = \sqrt[3]{216} \quad \textcircled{1}$$

$$\frac{4}{7} = \sqrt[3]{\frac{64}{343}} \quad \textcircled{2}$$

$$4 = 2 \times 2$$

$$\frac{3}{2} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \sqrt[3]{\frac{3^3}{2^3}} \quad \textcircled{3}$$

$$5 = \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{-128} \quad \textcircled{4}$$

$$4 = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4 + 60} \quad \textcircled{5}$$

في حالة وجود عملية جمع أو طرح تحت الجذر يجب إنهاء عملية الجمع أو الطرح أولاً ثم نوجد الجذر لناتج العملية.

أجب بنفسك

$$\dots\dots\dots = \sqrt[3]{\frac{125}{27}} \quad \textcircled{3}$$

$$\dots\dots\dots = \sqrt[3]{0,001} \quad \textcircled{2}$$

$$\dots\dots\dots = \sqrt[3]{729} \quad \textcircled{1}$$

$$\dots\dots\dots = \sqrt[3]{\frac{10}{27}} \quad \textcircled{6}$$

$$\dots\dots\dots = \sqrt[3]{\frac{64}{1728}} \quad \textcircled{5}$$

$$\dots\dots\dots = \sqrt[3]{\frac{343}{2744}} \quad \textcircled{4}$$

حل معادلات الدرجة الثالثة في نـ

مثال (١) : أوجد مجموعة حل كلا من المعادلات الآتية في نـ :

② $\frac{1}{4} \text{ س}^3 - 9 = 7$ $\frac{1}{4} \text{ س}^3 - 9 = 7$ $\frac{1}{4} \text{ س}^3 = 16$ $\frac{1}{4} \times 16 = \frac{1}{4} \times \text{س}^3$ $4 = \frac{1}{4} \times \text{س}^3$ $4 \times 4 = \frac{1}{4} \times \text{س}^3 \times 4$ $16 = \text{س}^3$ $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{\text{س}^3}$ $\sqrt[3]{16} = \text{س}$ ح.م = { 2 }	② $5 \text{ س}^3 + 13 = 8$ $5 \text{ س}^3 = 8 - 13$ $5 \text{ س}^3 = -5$ $\frac{5 \text{ س}^3}{5} = \frac{-5}{5}$ $\text{س}^3 = -1$ $\sqrt[3]{\text{س}^3} = \sqrt[3]{-1}$ $\text{س} = -1$ ح.م = { -1 }	① $15 = 12 - \text{س}^3$ $12 + 15 = \text{س}^3$ $27 = \text{س}^3$ $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{\text{س}^3}$ $3 = \text{س}$ ح.م = { 3 }
⑥ $18 = 10 + (2 - \text{س}^5)$ $10 - 18 = (2 - \text{س}^5)$ $-8 = (2 - \text{س}^5)$ وبأخذ الجذر التكعيبي للطرفين $\sqrt[5]{-8} = \sqrt[5]{(2 - \text{س}^5)}$ $-2 = 2 - \text{س}^5$ $-2 + 2 = 2 - \text{س}^5 + 2$ $0 = 4 - \text{س}^5$ $\frac{4}{5} = \frac{\text{س}^5}{5}$ ح.م = { 2 }	⑤ $\sqrt[3]{4} - \text{س} = \sqrt[3]{4}$ $\sqrt[3]{4} - \text{س} = \sqrt[3]{4}$ $-\text{س} = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{4}$ $-\text{س} = 0$ $\text{س} = 0$ ح.م = { 0 }	④ $125 = (2 - \text{س})^3$ بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{(2 - \text{س})^3}$ $5 = 2 - \text{س}$ $5 - 2 = 2 - \text{س} - 2$ $3 = -\text{س}$ $\text{س} = -3$ ح.م = { -3 }

أجب بنفسك

أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية :-

② $20 = 18 - (1 - \text{س}^3)$

① $12 = 13 + \text{س}^3$

④ $3 + \text{س}^3 = 5 - \text{س}^3$

③ $343 = (3 + \text{س})^3$

تطبيقات علي الجذر التكعيبي لعدد نسبي

هذه التطبيقات سيتم دراستها فيما بعد تفصيلاً ومنها :

حجم المكعب = طول الحرف $\times$ نفسه $\times$ نفسه = $ل^3$

حجم الكرة = $\frac{4}{3} \pi$ نو 2 (نو طول نصف قطرها)

مثال (١) :- مكعب حجمه $\frac{512}{27}$ سم 3 . أوجد طول حرفه ؟

الحل

∴ حجم المكعب = $ل^3$

∴ طول حرف مكعب = $\sqrt[3]{\frac{512}{27}} = \frac{8}{3}$ سم

مثال (٢) :- كرة حجمها ٢٨٨٠٨ سم 3 . أوجد طول قطر هذه الكرة حيث $\frac{22}{7} = \pi$ ؟

الحل

∴ حجم الكرة = $\frac{4}{3} \pi$ نو 2

∴ $\frac{22}{7} \times \frac{4}{3} \text{ نو}^2 = 28808$

$\frac{88}{21} \text{ نو}^2 = 28808$

نو $= \sqrt[3]{9261} = 21$ ∴ نو = ٢١ سم

أجب بنفسك

① مكعب حجمته ١٠٠٠ سم 3 أوجد طول حرفه ؟

② كرة حجمها $\frac{1372}{81}$ أوجد طول قطر هذه الكرة ؟

مجموعة الأعداد غير النسبية $\bar{\mathbb{N}}$ 

العدد غير النسبي

هو العدد الذي لا يمكن وضعه على صورة $\frac{a}{b}$ حيث $a, b \in \mathbb{N}$ ، $b \neq 0$ ، ويرمز لمجموعة الأعداد غير النسبية بالرمز $\bar{\mathbb{N}}$

الأعداد غير النسبية

(١) الجذور التربيعية للأعداد الموجبة التي ليست مربعات كاملة

مثل: $\sqrt{11}$ ، $\sqrt{10}$ ، $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{15}$ ، (أي الجذور التربيعية التي ليس لها جذر)
حيث أنها تعطي قيم غير مضبوطة ولا يمكن وضعها على صورة عدد نسبي

(٢) الجذور التكعيبية للأعداد الموجبة أو السالبة التي ليست مكعبات كاملة

مثل: $\sqrt[3]{10}$ ، $\sqrt[3]{-5}$ ، $\sqrt[3]{16}$ ، (أي الجذور التكعيبية التي ليس لها جذر)
حيث أنها تعطي قيم غير مضبوطة ولا يمكن وضعها على صورة عدد نسبي

(٣) النسبة التقريبية π أو (ط)

النسبة التقريبية π عدد غير نسبي لأن π كسر عشري غير منته وغير دائر
بينما $\frac{22}{7}$ ، 3.14 أعداد نسبية لأنها قيمة تقريبية للعدد π

أمثلة أخرى للأعداد غير النسبية

$$\sqrt[3]{\frac{9}{5}} - 1 ، \sqrt[3]{16} - 1 ، \sqrt[3]{2} ، \sqrt[3]{9} - 5$$

لاحظ أن :

$$\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} - \mathbb{N} ، \quad \mathbb{N} = \bar{\mathbb{N}} - \bar{\mathbb{N}} ، \quad \emptyset = \bar{\mathbb{N}} \cap \mathbb{N}$$

مثال (١) : بين أيًا من الأعداد التالية ينتمي إلى $\sqrt[3]{}$ وأيها ينتمي إلى $\sqrt{}$:-

- ① ٥ ② $\sqrt[3]{\frac{25}{49}}$ ③ $\sqrt[3]{-0.64}$ ④ $\sqrt{16}$
 ⑤ $\sqrt[3]{16} + \sqrt{25}$ ⑥ 0.25 ⑦ 1.2 ⑧ $\sqrt{7}$

الحل

- ① $\sqrt[3]{5}$ ② $\sqrt[3]{\frac{25}{49}}$ ③ $\sqrt[3]{-0.64}$ ④ $\sqrt{16}$
 ⑤ $\sqrt[3]{16} + \sqrt{25}$ ⑥ 0.25 ⑦ 1.2 ⑧ $\sqrt{7}$

أجب بنفسك

أكمل باستخدام أحد الرمزین $\sqrt[3]{}$ أو $\sqrt{}$:-

- ① $\sqrt[3]{3}$ ② $\sqrt[3]{13}$ ③ $\frac{1}{2}$
 ④ $\sqrt{9}$ ⑤ $\sqrt[3]{125}$ ⑥ $\sqrt[3]{35}$
 ⑦ 0.6 ⑧ $9 -$ ⑨ $\sqrt{49}$

مثال (٢) : أوجد مجموعة حل كلا من المعادلات الآتية في $\sqrt[3]{}$:

② $64\sqrt[3]{x} - 2 = 29$

$64\sqrt[3]{x} = 29 + 2$

$64\sqrt[3]{x} = 31$

$\sqrt[3]{x} = \frac{31}{64}$

$\sqrt[3]{x} = \frac{31}{64}$

$\emptyset = \text{ح.م}$

① $4\sqrt[3]{x} - 25 = 0$

$4\sqrt[3]{x} = 25$ بالقسمه على ٤

$\sqrt[3]{x} = \frac{25}{4}$

$\sqrt[3]{x} = \frac{25}{4}$

$\left\{ \frac{25}{4} \right\} = \text{ح.م}$

أجب بنفسك

أوجد مجموعة حل كلا من المعادلات الآتية في $\sqrt[3]{}$:-

② $\frac{1}{2}\sqrt[3]{x} - 5 = 3$

① $2\sqrt[3]{x} - 29 = 3$

مما سبق نستنتج أن الأعداد غير النسبية هي :

- ✓ كل عدد غير نسبي تنحصر قيمته بين عددين نسبيين.
- ✓ كل كسر عشري غير منته وغير دائر.
- ✓ كل عدد لا يمكن وضعه على صورة $\frac{p}{q}$ حيث $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$.
- ✓ كل عدد لا ينتمي إلى مجموعة الأعداد النسبية ويمكن تمثيله على خط الأعداد.

إيجاد قيمة تقريبية للعدد غير النسبي**مثال (١) أوجد قيمة تقريبية لكل من الأعداد الآتية :**

$$\sqrt[3]{12} \quad ②$$

$$\sqrt{11} \quad ①$$

لإيجاد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{11}$ نتبع الآتي :

- * نبحث عن عددين كل منهما مربع كامل يحصران العدد ١١ فنجد أنهما ٩، ١٦
 - * نرتب هذه الأعداد ويفضل تصاعدياً : $9 < 11 < 16$
 - * نأخذ الجذر التربيعي للأطراف : $\sqrt{9} < \sqrt{11} < \sqrt{16}$
 - أي أن : $3 < \sqrt{11} < 4$ أي أن العدد $\sqrt{11}$ ينحصر بين العددين الصحيحين ٣، ٤
 - * ولإيجاد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt{11}$ نفحص قيم الأعداد التالية :
- | | |
|-----------------|-----------------|
| $10,24 = 3,2^2$ | $9,61 = 3,1^2$ |
| $11,56 = 3,4^2$ | $10,89 = 3,3^2$ |
- * نرتب الأعداد التي تحصر العدد ١١ : $10,89 < 11 < 11,56$
 - * نأخذ الجذر التربيعي للأطراف : $\sqrt{10,89} < \sqrt{11} < \sqrt{11,56}$
 - أي أن : $3,3 < \sqrt{11} < 3,4$
- أي أن : ٣,٣، ٣,٤ تعتبر قيم تقريبية للعدد $\sqrt{11}$

إيجاد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt[3]{12}$ تتبع الآتي :

- * نبحث عن عددين كل منها مكعب كامل يحصران العدد ١٢ فنجد أنهما ٨ ، ٢٧
- * نرتب هذه الأعداد ويفضل تصاعديا : $٨ < ١٢ < ٢٧$
- * نأخذ الجذر التكعيبي للأطراف : $\sqrt[3]{٨} < \sqrt[3]{١٢} < \sqrt[3]{٢٧}$
- أي أن : $٢ < \sqrt[3]{١٢} < ٣$ أي أن : $\sqrt[3]{١٢}$ ينحصر بين العددين الصحيحين ٢ ، ٣
- * ولإيجاد قيمة تقريبية للعدد $\sqrt[3]{١٢}$ نفحص قيم الأعداد التالية :

$$١٠,٦٤٨ = (٢,٢)^3 \quad ٩,٢٦١ = (٢,١)^3$$

$$١٢,١٦٧ = (٢,٣)^3$$
- * نرتب الأعداد التي تحصر العدد ١٢ : $١٠,٦٤٨ < ١٢ < ١٢,١٦٧$
- * نأخذ الجذر التربيعي للأطراف : $\sqrt[3]{١٠,٦٤٨} < \sqrt[3]{١٢} < \sqrt[3]{١٢,١٦٧}$
- أي أن : $٢,٢ < \sqrt[3]{١٢} < ٢,٣$
- أي أن : $٢,٢ ، ٢,٣$ تعتبر قيم تقريبية للعدد $\sqrt[3]{١٢}$

مثال (٢) أثبت أن :

② $\sqrt[3]{١٥}$ ينحصر بين العددين ٢,٤ ، ٢,٥

$$١٥,٦٢٥ = (٢,٥)^3 \quad ١٣,٨٢٤ = (٢,٤)^3$$

$$١٥ = (\sqrt[3]{١٥})^3$$

$١٥,٦٢٥ > ١٥ > ١٣,٨٢٤$
بأخذ الجذر التكعيبي للأطراف

$$٢,٥ > \sqrt[3]{١٥} > ٢,٤$$

∴ $\sqrt[3]{١٥}$ ينحصر بين العددين ٢,٤ ، ٢,٥

① $\sqrt[3]{٣}$ ينحصر بين ١,٧ ، ١,٨

$$٣,٢٤ = (١,٨)^3 \quad ٢,٨٩ = (١,٧)^3$$

$$٣ = (\sqrt[3]{٣})^3$$

$٣,٢٤ > ٣ > ٢,٨٩$
بأخذ الجذر التربيعي للأطراف

$$١,٨ > \sqrt[3]{٣} > ١,٧$$

∴ $\sqrt[3]{٣}$ ينحصر بين العددين ١,٧ ، ١,٨

مثال (٣): أثبت أن: $\sqrt{5} + 1$ ينحصر بين ٣,٢ ، ٣,٣

بطرح (١) من كل من الأعداد فيكون: $\sqrt{5}$ ، ٢,٢ ، ٢,٣

$$\therefore (2,2)^2 = 4,84 \quad \therefore (2,3)^2 = 5,29$$

$\therefore 4,84 > 5 > 5,29$ بأخذ الجذر التربيعي للأطراف الثلاثة

$$\therefore 2,2 < \sqrt{5} < 2,3 \text{ بإضافة (١)}$$

$$\therefore 3,2 < \sqrt{5} + 1 < 3,3$$

مثال (٤) : أوجد عددين صحيحين متتاليين ينحصر بينهما كلا من:

② العدد $\sqrt[3]{20}$

① العدد $\sqrt{12}$

الحل

① نختار عددين صحيحين كلا منهما مربع كامل وينحصر بينهما العدد المطلوب

$\therefore 9 > 12 > 16$ بأخذ الجذر التربيعي للأطراف الثلاثة

$$\therefore \sqrt{9} < \sqrt{12} < \sqrt{16}$$

$$\therefore 3 < \sqrt{12} < 4 \quad \therefore \text{العددان هما } 3, 4$$

② نختار عددين صحيحين كلا منهما مربع كامل وينحصر بينهما العدد المطلوب

$\therefore 27 > 20 > 8$ بأخذ الجذر التكعيبي للأطراف الثلاثة

$$\therefore \sqrt[3]{27} > \sqrt[3]{20} > \sqrt[3]{8}$$

$$\therefore 3 > \sqrt[3]{20} > 2 \quad \therefore \text{العددان هما } 2, 3$$

أجب بنفسك

① أثبت أن: $\sqrt{6}$ ينحصر بين ٢,٤ ، ٢,٥

② أثبت أن: $\sqrt[3]{12}$ ينحصر بين ٢,٢ ، ٢,٣

③ أثبت أن: $\sqrt{3} + 2$ ينحصر بين ٣,٧ ، ٣,٨

④ أوجد عددين صحيحين ينحصر بينهما ٢,٦ ، ٢,٧

تمثيل العدد غير النسبي علي خط الأعداد

الطريقة:

$$\text{أولاً: نوجد الوتر} = \frac{\text{العدد الذي تحت الجذر} + 1}{2}$$

$$\text{ثانياً: الضلع الآخر} = \frac{\text{العدد الذي تحت الجذر} - 1}{2}$$

فيكون الضلع الثالث = قيمة العدد غير نسبي

ويتم رسم الضلع الآخر بحيث يكون عمودياً على خط الأعداد ثم من نهايته نركز بسن الفرجار بعد فتحه بفتحه تساوي طول الوتر ونرسم قوس يقطع خط الأعداد عند قيمة العدد غير نسبي لأنه بذلك يمثل طول أحد ضلعي القائمة في مثل قائم

ملحوظة مهمة جداً:

✓ إذا كان العدد موجب نرسم على اليمين

✓ إذا كان العدد سالب فإن اتجاه الرسم يكون على اليسار

مثال (١): مثل على خط الأعداد العدد غير نسبي $\sqrt{5}$

الحل

$$\text{أولاً: نوجد الوتر} = \frac{\text{العدد الذي تحت الجذر} + 1}{2} = \frac{1 + 5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

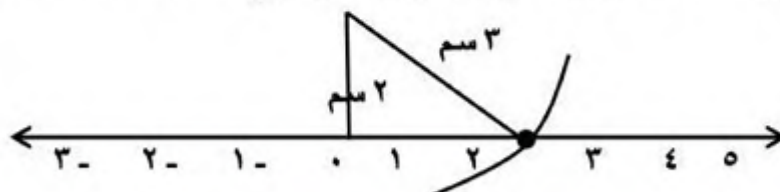
$$\text{ثانياً: نوجد ضلع القائمة} = \frac{\text{العدد الذي تحت الجذر} - 1}{2} = \frac{1 - 5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\sqrt{5} = \sqrt{3^2 - 2^2}$$

$$\sqrt{5} = \sqrt{9 - 4}$$

∴ نقيم عموداً على خط الأعداد عند الصفر طوله يساوي ٢ سم

ثم نفتح الفرجار فتحة تساوي ٣ سم ونرسم قوساً يقطع خط الأعداد عند القيمة $\sqrt{5}$

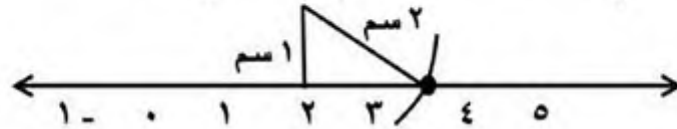


مثال (٢) : مثل على خط الأعداد العدد الغير نسبي $\sqrt{3} + 2$

نفس طريقة الرسم السابقة ولكن نقيم عمودا عند العدد ٢ وليس العدد صفر

$$\text{الوتر} = \frac{\text{العدد الذي تحت الجذر} + 1}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{ضلع القائمة} = \frac{\text{العدد الذي تحت الجذر} - 1}{2} = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$



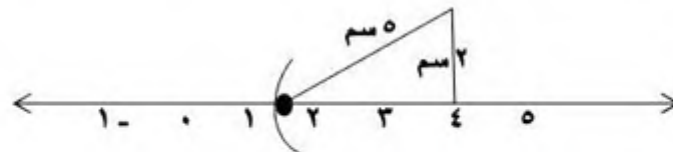
مثال (٢) : مثل على خط الأعداد العدد الغير نسبي $\sqrt{5} - 4$

في هذا المثال نركز عند العدد ٤ ثم يتم الرسم على يساره

$$\text{الوتر} = \frac{\text{العدد الذي تحت الجذر} + 1}{2} = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\text{ضلع القائمة} = \frac{\text{العدد الذي تحت الجذر} - 1}{2} = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

يكون الضلع الآخر هو واحد أضلاع القائمة $\sqrt{5} - 4 = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} - 4 = 3 - 4 = -1$



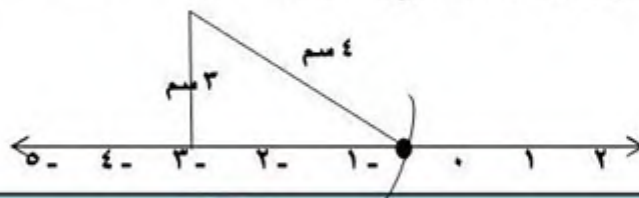
مثال (٤) : مثل على خط الأعداد العدد الغير نسبي $\sqrt{7} + 3$

نركز في هذه المسألة عند العدد ٣ ثم نرسم العدد $\sqrt{5}$ على يمينه

$$\text{الوتر} = \frac{\text{العدد الذي تحت الجذر} + 1}{2} = \frac{1+7}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\text{ضلع القائمة} = \frac{\text{العدد الذي تحت الجذر} - 1}{2} = \frac{1-7}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

يكون الضلع الآخر هو واحد أضلاع القائمة $\sqrt{7} + 3 = \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58} = \sqrt{36 + 22} = 6 + \sqrt{22}$



تطبيقات

مثال (١): دائرة مساحتها 11π سم^٢. أوجد طول نصف قطرها ؟

مساحة الدائرة = π نوه^٢

$$11\pi = \pi \text{ نوه}^2 \iff 11 = \text{نوه}^2 \quad \text{وياخذ الجذر التربيعي للطرفين}$$

$$\sqrt{11} = \text{نوه} \iff \sqrt{11} = \text{نوه} \quad \text{نجد أن :}$$

مثال (٢) : مربع مساحته ١٠ سم^٢. أوجد طول كلا من ضلعه وقطره ؟

مساحة المربع = ل^2 (بمعلومية طول ضلعه)

$$10 = \text{ل}^2 \iff \text{وياخذ الجذر التربيعي للطرفين}$$

$$\sqrt{10} = \text{ل} \iff \sqrt{10} = \pm \text{ل} \quad \text{سم}$$

ولكن ل طول ضلع يجب ان يكون عدد موجب

$$\therefore \sqrt{10} = \text{ل} \quad \text{سم}$$

مساحة المربع = $\frac{\text{ر}^2}{2}$ (بمعلومية طول قطره)

$$\frac{\text{ر}^2}{2} = 10$$

وياخذ الجذر التربيعي للطرفين نجد أن :

$$\sqrt{20} = \text{ر} \iff \sqrt{20} = \text{ر} \quad \text{سم}$$

$$\therefore \sqrt{20} = \text{طول قطر المربع} \quad \text{سم}$$

أجب بنفسك

① دائرة مساحتها 5π أوجد طول نصف قطرها وكذلك أوجد المحيط ؟

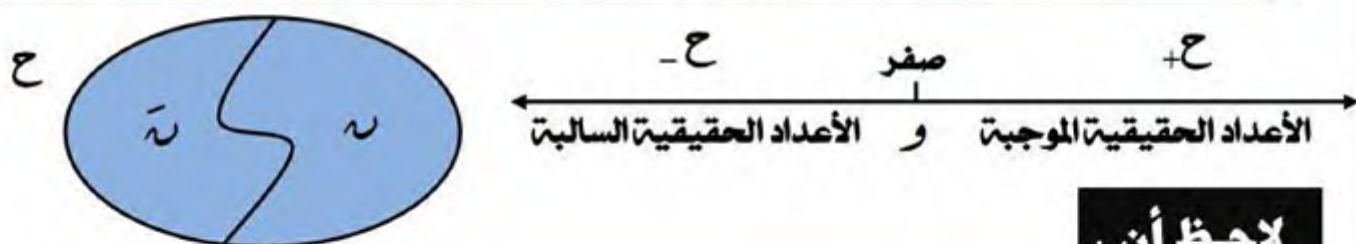
② مربع مساحته 28 سم^٢ أوجد طول كلا من ضلعه وقطره ؟

مجموعة الأعداد الحقيقية (ح)



تعريف

مجموعة الأعداد الحقيقية هي المجموعة الناتجة من اتحاد مجموعة الأعداد النسبية والأعداد غير النسبية ويرمز لها بالرمز $\mathbb{R}$.



لاحظ أن :-

$$\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}$$

$$\emptyset = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}$$

$$-\mathbb{R} \cup \{0\} \cup +\mathbb{R} = \mathbb{R}$$

٤ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $+\mathbb{R}$ هي التي تكون أكبر من الصفر وتقع على يمين العدد صفر (أي تلي الصفر) $\Leftarrow +\mathbb{R} = \{s : s > 0, s \in \mathbb{R}\}$

٥ مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة $-\mathbb{R}$ هي التي تكون أصغر من الصفر وتقع على يسار العدد صفر (أي تسبق الصفر) $\Leftarrow -\mathbb{R} = \{s : s < 0, s \in \mathbb{R}\}$

$$\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \Leftarrow \mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}$$

٧ مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة

$$\mathbb{R} = \{0\} \cup +\mathbb{R} \Leftarrow \mathbb{R} = \{0\} \cup +\mathbb{R}$$

٨ مجموعة الأعداد الحقيقية غير الموجبة

$$\mathbb{R} = \{0\} \cup -\mathbb{R} \Leftarrow \mathbb{R} = \{0\} \cup -\mathbb{R}$$

٩ كل عدد حقيقي تمثله نقطة وحيدة على خط الأعداد .

١٠ الأعداد الحقيقية المتساوية تمثلها نقطة وحيدة على خط الأعداد .

١١ كل عدد غير نسبي تنحصر قيمته بين عددين نسبيين .

١٢ الصفر عددا حقيقيا ليس موجبا أو سالبا .

مثال (١): رتب الأعداد الآتية ترتيباً تصاعدياً :-

$$\sqrt{27}, -\sqrt{45}, \sqrt{20}, 6, 0, \sqrt{1}, -\sqrt{1}$$

لترتيب الأعداد الآتية يجب المقارنة بينهما وللمقارنة بينهما يجب أن تكون لهم نفس رتبة الجذور

$$\sqrt{36} = 6, \quad \sqrt{1} - \sqrt{1} = 0, \quad \sqrt{0} = 0$$

الأعداد هي: $\sqrt{27}, -\sqrt{45}, \sqrt{20}, \sqrt{36}, \sqrt{0}, \sqrt{1} - \sqrt{1}$
نرتب الأعداد السالبة أولاً ثم الصفر ثم الأعداد الموجبة.

فيكون الترتيب هو: $-\sqrt{45}, -\sqrt{1}, 0, \sqrt{1}, \sqrt{0}, \sqrt{36}, \sqrt{20}, \sqrt{27}$

مثال (٢) :- أوجد أربعة أعداد غير نسبية تنحصر بين ٤ ، ٥

أوجد مربع العددين ٤ ، ٥ كما يلي $4^2 = 16$ ، $5^2 = 25$
أختر أربعة أعداد تكون بين ١٦ ، ٢٥ ولتكن ١٧ ، ١٨ ، ١٩ ، ٢٠

$$\therefore \sqrt{16} < \sqrt{17} < \sqrt{18} < \sqrt{19} < \sqrt{20} < \sqrt{25}$$

∴ الأعداد غير النسبية المطلوبة هي: $\sqrt{17}, \sqrt{18}, \sqrt{19}, \sqrt{20}$

أجب بنفسك

① رتب تصاعدياً: $-\sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{45}, \sqrt{8}, 3, -\sqrt{14}$

② أوجد أربعة أعداد غير نسبية تنحصر بين: ٥ ، ٦ .

مثال (٣): أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية في ح :-

③ $4 = 6 + x^2$ س ٢

س ٢ $6 - 4 = x^2$

س ٢ $2 = x^2$ (٢ ÷)

س ٢ $1 = x^2$

س $1 - \sqrt{1} \pm = x$

س $1 - \sqrt{1} \pm = x$

∴ ح.م = ∅

④ $9 = \frac{x^3}{5}$ س ٣

س ٣ $\frac{5}{3} \times 9 = \frac{x^3}{5}$

س ٣ $15 = x^3$

س $\sqrt[3]{15} = x$

∴ ح.م = $\{\sqrt[3]{15}\}$

① $9 = 1 - x^2$ س ٢

س ٢ $1 + 9 = x^2$

س ٢ $10 = x^2$

س $\pm \sqrt{10} = x$

∴ ح.م = $\{\pm \sqrt{10}\}$

الفترات



تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية على خط الأعداد عن طريق الفترات ولكن لماذا ؟

لأنه يوجد بين كل عددين نسبيين عدد لا نهائي من الأعداد النسبية وغير النسبية التي يستحيل سردها في مجموعة وبالتالي لا يمكن تمثيلها على خط الأعداد لذلك نستخدم طريقه أخرى للتعبير عن المجموعات الجزئية من الأعداد الحقيقية وهي الفترات .

الفترة : هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية

أنواع الفترات

٢ الفترات غير المحدودة

١ الفترات المحدودة

إذا كان $a < b$ ، $a \leq b$ ، $a > b$ ، $a \geq b$

أولاً : الفترات المحدودة :-

الفترة	التعبير الرياضي	التمثيل بالصفة المميزة	التمثيل على خط الأعداد
الفترة المغلقة	$[a, b]$	$\{x : a \leq x \leq b, x \in \mathbb{R}\}$	
الفترة المفتوحة	$]a, b[$	$\{x : a < x < b, x \in \mathbb{R}\}$	
الفترة نصف المفتوحة / المغلقة	$]a, b]$	$\{x : a < x \leq b, x \in \mathbb{R}\}$	
	$[a, b[$	$\{x : a \leq x < b, x \in \mathbb{R}\}$	

ملاحظات على الفترات المحدودة :-

١ $a, b \in [a, b]$

٢ $a, b \in]a, b[$

٣ $a \in [a, b]$ ، $b \in]a, b[$

٤ $a \in [a, b]$ ، $b \in [a, b]$

لاحظ أن

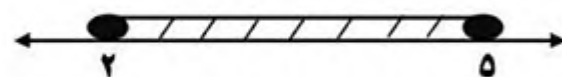
عند كتابة الفترة يجب كتابة العدد الأصغر أولاً

مثال (١) : عبر عن الفترات الآتية بالصفة المميزة ومثلها على خط الأعداد :-

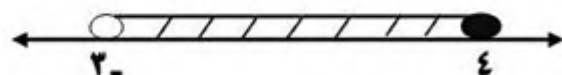
$$\begin{aligned} & \textcircled{٧} [٤, ٣- \\ & \textcircled{٤}]٣, ١[\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \textcircled{١} [٥, ٢] \\ & \textcircled{٣}]٥, ٠[\end{aligned}$$

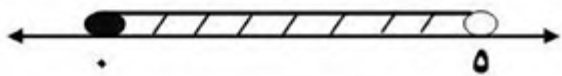
الحل



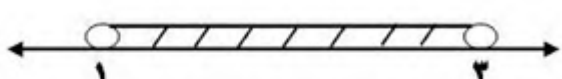
$$\textcircled{١} [٥, ٢] = \{s : s \geq ٢, s \leq ٥\}$$



$$\textcircled{٢} [٤, ٣- = \{s : s > ٣, s \leq ٤\}$$



$$\textcircled{٣}]٥, ٠[= \{s : s \geq ٠, s < ٥\}$$



$$\textcircled{٤}]٣, ١[= \{s : s > ١, s < ٣\}$$

أجب بنفسك

تدريب ١ : عبر عن الفترات الآتية بالصفة المميزة ومثلها على خط الأعداد :-

$$\begin{aligned} & \textcircled{٢}]٩, ٠[\\ & \textcircled{٤}]١-, ٥- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \textcircled{١} [٧, ١] \\ & \textcircled{٢}]٨, ٣[\end{aligned}$$

تدريب ٢ : عبر عن المجموعات الآتية بالفترات ومثلها على خط الأعداد :-

$$\textcircled{٣} \{s : s \geq ٢, s \leq ٥\}$$

$$\textcircled{١} \{s : s \geq ٢, s < ٧\}$$

$$\textcircled{٤} \{s : s > ١, s < ٣\}$$

$$\textcircled{٧} \{s : s \geq ٣, s \geq ٠\}$$

ثانياً: الفترات غير المحدودة :-

الرمزان $-\infty$ ، $+\infty$

الرمز $+\infty$ يقرأ ما لا نهائه وهو أكبر من أي عدد حقيقي يمكن تصوره
الرمز $-\infty$ يقرأ سالب ما لا نهائه وهو أصغر من أي عدد حقيقي يمكن تصوره

الفترة	التمثيل بالصفة المميزة	التمثيل على خط الأعداد
$] \infty, p]$	$\{s : s \in \mathbb{R}, s \leq p\}$	
$] \infty, p [$	$\{s : s \in \mathbb{R}, s < p\}$	
$[p, \infty - [$	$\{s : s \in \mathbb{R}, s \geq p\}$	
$[p, \infty - [$	$\{s : s \in \mathbb{R}, s > p\}$	

ملاحظات على الفترات غير المحدودة :

$$] \infty, p [\nexists p \text{ ②}$$

$$] \infty, p] \ni p \text{ ①}$$

$$[p, \infty - [\nexists p \text{ ④}$$

$$[p, \infty - [\ni p \text{ ③}$$

$$] \infty, \infty - [= \emptyset \text{ ⑥}$$

$$] \infty, \infty - [= \emptyset \text{ ⑤}$$

$$[\infty, \infty - [= \emptyset \text{ ⑦}$$

$$\text{⑧ مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة }] \infty, \infty - [= \emptyset$$

$$\text{⑨ مجموعة الأعداد الحقيقية غير الموجبة } [\infty, \infty - [= \emptyset$$

$$\text{⑩ الرمزان } \infty - , \infty \text{ ليسا عددين حقيقيين .}$$

لاحظ أن

① ∞ تكتب في الآخر

② $\infty -$ تكتب في الأول

مثال (1) : عبر عن الفترات الآتية بالصفة المميزة ومثلها على خط الأعداد :-

$$] \infty, \infty - [\text{ ②}$$

$$] \infty, 1] \text{ ①}$$

$$[1, \infty - [\text{ ④}$$

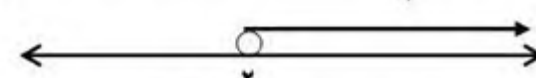
$$] \infty, 2 [\text{ ③}$$



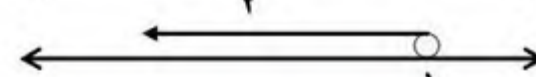
$$\{s : s \in \mathbb{R}, s \leq 1\} =] \infty, 1] \text{ ①}$$



$$\{s : s \in \mathbb{R}, s \geq 0\} = [0, \infty - [\text{ ②}$$



$$\{s : s \in \mathbb{R}, s < 2\} =] \infty, 2 [\text{ ③}$$



$$\{s : s \in \mathbb{R}, s > 1\} = [1, \infty - [\text{ ④}$$

أجب بنفسك

تدريب 1 : عبر عن الفترات الآتية بالصفة المميزة ومثلها على خط الأعداد :-

$$] \infty, \infty - [\text{ ②}$$

$$] \infty, 1] \text{ ①}$$

$$[1, \infty - [\text{ ④}$$

$$[8, \infty - [\text{ ②}$$

العمليات على الفترات



العمليات على الفترات أربع عمليات هما :-

- الإتحاد والتقاطع والفرق والمكملة ورموزها على الترتيب هي :
 ١ الإتحاد (U) ٢ التقاطع (∩) ٣ الفرق (-) ٤ المكملة (c)

أولاً : الإتحاد (U) :-

الإتحاد بين فترتين هو كل ما بداخل الفترتين فهو ما في الفترة الأولى وما في الفترة الثانية ولكن لا يمكن تكرار العناصر

ثانياً : التقاطع (∩) :-

هو العناصر المشتركة في كلا من الفترتين أي أن فترة التقاطع هي الفترة التي تكون مشتركة في الفترتين

ثالثاً : الفرق (-) :-

الفرق بين فترتين هو كل ما هو موجود في الفترة الأولى وغير موجود في الفترة الثانية

رابعاً : المكملة (c) :-

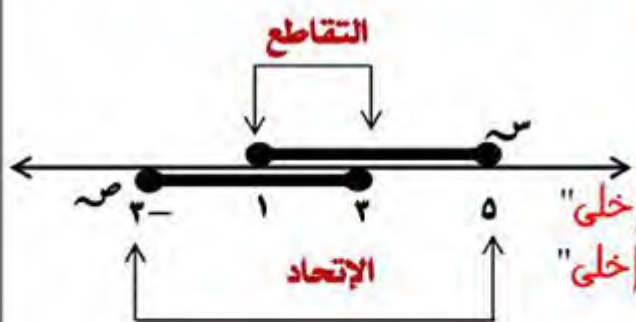
مكملة فترة هو كل ما هو خارج الفترة من أعداد حقيقية فالمكملة هو الفرق بين مجموعة الأعداد الحقيقية والفترة نفسها

القواعد التي ذكرناها لإيجاد التقاطع أو الإتحاد أو الفرق أو المكملة لا تصلح مع الفترات لأن الفترات لا يمكن حصر الأعداد الحقيقية التي بها لذا سنستعين بخط الأعداد وتمثيل الفترتين على خط واحد كما سنرى في الأمثلة الآتية :-

مثال (١) : أوجد التقاطع والإتحاد والفرق والمكملة لكلا من الفترات الآتية :-

٢) $[2, 3] = \sim$ ، $[6, 0] = \sim$
 ٤) $[2, 1] = \sim$ ، $[5, 3] = \sim$

١) $[3, 3] = \sim$ ، $[5, 1] = \sim$
 ٣) $[5, 3] = \sim$ ، $[8, 0] = \sim$



١) $[3, 3] = \sim$ ، $[5, 1] = \sim$ ويكون
 "الرقمان بالداخل"
 "أول رقم وآخر رقم"
 "نعكس قوس العدد الداخلي"
 "نعكس قوس العدد الداخلي"
 $[3, 3] = \sim$ ، $[5, 1] = \sim$
 $[3, 1] = \sim \cap \sim$
 $[5, 3] = \sim \cup \sim$
 $[5, 3] = \sim - \sim$
 $[1, 3] = \sim - \sim$
 $\sim = \sim - [5, 1] = [0, 5] \cup [1, \infty)$
 $\sim = \sim - [5, 3] = [0, 5] \cup [3, \infty)$



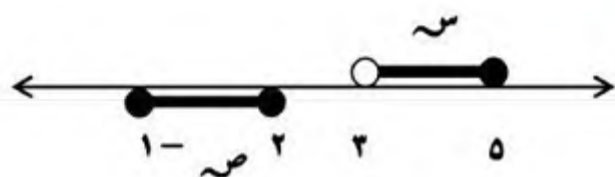
٢) س = $[-2, 6]$ ، س = $[-2, 3]$ ويكون :

$$\begin{aligned} \text{س} \cap \text{س} &= [-2, 0] \\ \text{س} \cup \text{س} &= [-2, 6] \\ \text{س} - \text{س} &= [-2, 3] \\ \text{س} - \text{س} &= [0, 6] \\ \text{س} - \text{س} &= [-2, 6] \cup [0, \infty) \\ \text{س} - \text{س} &= [-2, 6] \cup [3, \infty) \end{aligned}$$



٣) س = $[0, 8]$ ، س = $[2, 5]$ ويكون :

$$\begin{aligned} \text{س} \cap \text{س} &= [2, 5] \\ \text{س} \cup \text{س} &= [0, 8] \\ \text{س} - \text{س} &= [0, 2] \cup [5, 8] \\ \text{س} - \text{س} &= \emptyset \\ \text{س} - \text{س} &= [0, 8] \cup [2, \infty) \\ \text{س} - \text{س} &= [0, 5] \cup [3, \infty) \end{aligned}$$



٤) س = $[-1, 3]$ ، س = $[2, 5]$ ويكون :

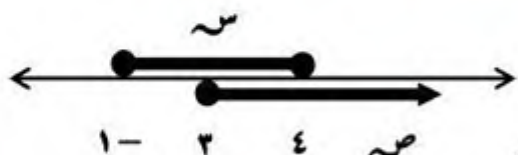
$$\begin{aligned} \text{س} \cap \text{س} &= [2, 3] \\ \text{س} \cup \text{س} &= [-1, 5] \\ \text{س} - \text{س} &= [-1, 2] \\ \text{س} - \text{س} &= [3, 5] \\ \text{س} - \text{س} &= [-1, 5] \cup [2, \infty) \\ \text{س} - \text{س} &= [-1, 2] \cup [3, \infty) \end{aligned}$$

مثال (٢) : إذا كانت : س = $[-1, 4]$ ، س = $[3, \infty)$ ، ع = $\{4, 3\}$

مستعينا بغط الأعداد أوجد كلا مما يأتي :-

$$\begin{aligned} \text{٢) س} - \text{س} & \\ \text{٦) س} - \text{س} & \\ \text{٧) س} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{١) س} \cap \text{س} & \\ \text{٤) س} - \text{ع} & \\ \text{٥) ع} \cap \text{س} & \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{١) س} \cap \text{س} &= [-1, 3] \\ \text{٢) س} \cup \text{س} &= [-1, 5] \\ \text{٣) س} - \text{س} &= [2, 4] \\ \text{٤) س} - \text{ع} &= [-1, 4] - \{4, 3\} = [-1, 2] \\ \text{٥) ع} \cap \text{س} &= \{4, 3\} \cap [-1, 3] = \{3\} \\ \text{٦) س} - \text{س} &= [-1, 4] \\ \text{٧) س} - \text{س} &= [-1, 4] \cup [2, \infty) \end{aligned}$$

$$\{7, 3\} = \text{ب} , [7, 3] = \text{ب}$$

مثال (٣) : إذا كانت:

$$\text{ب} \cap \text{ب} = \text{ب} \quad \text{ب} \cup \text{ب} = \text{ب} \quad \text{ب} - \text{ب} = \text{ب} \quad \text{ب} - \text{ب} = \text{ب}$$

أوجد كلا مما يأتي:

$$\begin{aligned} 1) \text{ب} \cup \text{ب} &= \{7, 3\} \cap [7, 3] = \{7, 3\} \\ 2) \text{ب} \cup \text{ب} &= [7, 3] \cup \{7, 3\} = [7, 3] \\ 3) \text{ب} - \text{ب} &= \{7, 3\} - [7, 3] = \emptyset \\ 4) \text{ب} - \text{ب} &= [7, 3] - \{7, 3\} = \emptyset \end{aligned}$$

مثال (٤) : أكمل ما يأتي:-

$$\begin{aligned} 1) \{8, 5, 2\} &= \{9, 8, 5, 2, 1\} \cap [8, 2] \\ 2) \{5\} &= \{7, 6, 5, 3\} \cap [6, 3] \\ 3) \emptyset &= \{4, 1\} \cap [4, 1] \\ 4) \{5, 0\} &= \{5, 0\} \cap [5, 0] \\ 5) [4, 2] &= \{4, 2\} - [4, 2] \\ 6) [9, 0] &= \{0\} - [9, 0] \\ 7) [11, 3] &= \{11, 3\} - [11, 3] \\ 8) \{3\} - [8, 2] &= \{8, 3, 2\} - [8, 2] \\ 9) [5, 1] &= \{5, 1\} \cup [5, 1] \\ 10) [7, 2] &= \{7, 4, 2\} \cup [7, 2] \\ 11) \{6\} \cup [5, 0] &= \{6, 5, 0\} \cup [5, 0] \\ 12) [9, 3] &= \{3\} \cup [9, 3] \end{aligned}$$

لاحظ أن

١) في الفرق نفتح الفترة
٢) في الإتحاد نقفل الفترة

أجب بنفسك

(١) إذا كانت: س = [7, 1] ، ص = [5, 3] فأوجد مستعينا بخط الأعداد:

$$\begin{aligned} 1) \text{س} \cap \text{ص} &= \text{س} \cup \text{ص} \\ 2) \text{س} - \text{ص} &= \text{ص} - \text{س} \\ 3) \text{س} \cup \text{ص} &= \text{س} - \text{ص} \\ 4) \text{ص} - \text{س} &= \text{س} \cup \text{ص} \end{aligned}$$

(٢) إذا كانت: س = [3, 0] ، ص = [7, 00] فأوجد مستعينا بخط الأعداد:

$$\begin{aligned} 1) \text{س} \cap \text{ص} &= \text{س} \cup \text{ص} \\ 2) \text{س} - \text{ص} &= \text{ص} - \text{س} \\ 3) \text{س} \cup \text{ص} &= \text{س} - \text{ص} \\ 4) \text{ص} - \text{س} &= \text{س} \cup \text{ص} \end{aligned}$$

أكمل ما يأتي:-

..... = {7, 2} ∪ [7, 2] ٢	 = {7, 2} ∪ [7, 2] ١
..... = {7, 2} ∩ [7, 2] ٤	 = {7, 2} ∩ [7, 2] ٣
..... = {7, 2} - [7, 2] ٦	 = {7, 2} - [7, 2] ٥
..... = [7, 2] - {7, 2} ٨	 = [7, 2] - {7, 2} ٧
..... = {2} - [7, 2] ١٠	 = {2} ∪ [7, 2] ٩
..... = {4, 3, 2-} ∪ [5, 3-] ١٢	 = {7} ∩ [7, 2] ١١

العمليات علي الأعداد الحقيقية



أولاً : عملية الجمع

يتم جمع واختصار الجذور المتشابهة فقط أما الجذور الغير متشابهة لا يمكن جمعها .
عند جمع وطرح الجذور المتشابهة نكتب الجذر مرة واحدة ثم نجمع ونطرح المعاملات (الأرقام) .

مثال (١) : أوجد ناتج :-

$$\begin{aligned} ① \quad 5\sqrt{1} (1+2) &= 5\sqrt{1} + 5\sqrt{2} \\ ② \quad 5\sqrt{1} (1+2) &= 5\sqrt{1} + 5\sqrt{2} \\ ③ \quad 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} &= 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \\ ④ \quad 3\sqrt{5} &= 3\sqrt{1} (2+3-6) = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{6} \end{aligned}$$

خواص جمع الأعداد الحقيقية :-

① خاصية الانغلاق :

إذا كان a, b عددين حقيقيين فإن $(a+b) \in \mathbb{R}$
أي أن : مجموع أي عددين حقيقيين هو عدد حقيقي فيكون $\mathbb{R}$ مغلقة تحت عملية الجمع .
فمثلاً : $\mathbb{R} \ni 3\sqrt{2}, \mathbb{R} \ni 3\sqrt{5}$ فيكون : $3\sqrt{7} = 3\sqrt{5} + 3\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

② خاصية الإبدال :

إذا كان a, b عددين حقيقيين فإن $a+b = b+a$
فمثلاً : $2\sqrt{8} = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{5}, 2\sqrt{8} = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$
أي أن : $2\sqrt{3} + 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$

③ خاصية الدمج :

إذا كان a, b, c اعداد حقيقية فإن $(a+b)+c = a+(b+c)$
فمثلاً : $5\sqrt{7} = 5\sqrt{4} + 5\sqrt{3} = 5\sqrt{4} + (5\sqrt{1} + 5\sqrt{2})$
 $5\sqrt{7} = 5\sqrt{5} + 5\sqrt{2} = (5\sqrt{4} + 5\sqrt{1}) + 5\sqrt{2}$
أي أن : $(5\sqrt{4} + 5\sqrt{1}) + 5\sqrt{2} = 5\sqrt{4} + (5\sqrt{1} + 5\sqrt{2})$

④ خاصية المحايد الجمعي :

إذا كان a عددا حقيقيا فإن $a = a + 0 = 0 + a$
أي أن : المحايد الجمعي في $\mathbb{R}$ هو الصفر
فمثلاً : $7\sqrt{2} = 7\sqrt{2} + 0 = 0 + 7\sqrt{2}$

⑤ خاصية المعكوس الجمعي :

لكل عدد حقيقي p يوجد معكوس جمعي $-p$ ويكون $p + (-p) = 0$ ويسمى كلا من العددين p ، $-p$ معكوس جمعي للآخر.

فمثلاً : المعكوس الجمعي للعدد : $\sqrt{4}$ هو $-\sqrt{4}$

المعكوس الجمعي للعدد : $\sqrt{4} + 2$ هو $-\sqrt{4} - 2$

المعكوس الجمعي للعدد : $\sqrt{4} - 3$ هو $-\sqrt{4} + 3$

المعكوس الجمعي للعدد صفر هو نفسه الصفر

لاحظ أن

المعكوس الجمعي للعدد $\sqrt{p}$ هو $-\sqrt{p}$

أو $\sqrt{-p}$

المعكوس الجمعي للعدد $-\sqrt{p}$ هو $\sqrt{p}$

مثال (٢) : اختصر لأبسط صورة :

$$\sqrt{49} = \sqrt{49(1+3+2-5)} = \sqrt{49} \cdot 1 + \sqrt{49} \cdot 3 + \sqrt{49} \cdot 2 - \sqrt{49} \cdot 5 \quad (1)$$

$$\sqrt{25} \cdot 7 = \sqrt{25} (4-3+7) = \sqrt{25} \cdot 4 - \sqrt{25} \cdot 3 + \sqrt{25} \cdot 7 \quad (2)$$

$$\sqrt{2} + 3 = (\sqrt{2} \cdot 2 - \sqrt{2} \cdot 3) + (1+5) = \sqrt{2} \cdot 2 - 1 + 5 - \sqrt{2} \cdot 3 \quad (3)$$

$$\sqrt{11} \cdot 5 - 7 = (\sqrt{11} \cdot 6 - \sqrt{11} \cdot 7) + (7-14) = 7 - \sqrt{11} \cdot 6 - 14 + \sqrt{11} \cdot 7 \quad (4)$$

$$\sqrt{2} \cdot 3 + \sqrt{4} \cdot 4 - \sqrt{2} \cdot 2 + \sqrt{2} \cdot 3 + \sqrt{5} \cdot 5 + \sqrt{2} \cdot 9 \quad (5)$$

$$\sqrt{4} - \sqrt{5} \cdot 7 + \sqrt{2} \cdot 12 = \sqrt{4} (4-3) + \sqrt{5} (2+5) + \sqrt{2} (3+9) =$$

عند جمع أكثر من جذر نجمع الجذور المتشابهة معا لتبسيط حل المسألة

ثانياً : عملية الطرح

عملية الطرح ممكنة دائماً في ح وتعرف كما يلي

لكل $p \in \mathbb{R}$ ، $b \in \mathbb{R}$ يكون : $p - b = p + (-b)$

أي أن : عملية الطرح $(p - b)$ تعني جمع العدد p مع المعكوس الجمعي للعدد b .
وعملية الطرح ليست إبدالیه وليست دامتجة .

أجب بنفسك

(١) : أكتب المعكوس الجمعي لكل من الأعداد التالية :-

$$\sqrt{4} - 6, \quad 3 - \sqrt{5}, \quad \sqrt{4} + 2, \quad \sqrt{5} - 3, \quad 2\sqrt{4}$$

(٢) : اختصر لأبسط صورة :-

$$\sqrt{4} \cdot 5 + \sqrt{5} \cdot 3 - \sqrt{4} - \sqrt{5} \cdot 3 \quad (2) \quad \sqrt{4} \cdot 5 - 2 + 1 - \sqrt{4} \cdot 2 \quad (1)$$

ثالثاً : عملية الضرب

عند ضرب الجذور نضرب المعامل × المعامل و الجذر × الجذر

كالتالي : $30 = 3 \times 10 = (\sqrt{3} \times \sqrt{10}) = \sqrt{3} \times \sqrt{10} = \sqrt{30}$

مثال (١) : أوجد ناتج ما يأتي :

تذكر أن

$$1 = \sqrt[3]{1^3}$$

$$1 = \sqrt[2]{1^2}$$

$$\sqrt{6} = \sqrt{3 \times 2} = \sqrt{3} \times \sqrt{2} \quad (1)$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{3 \times 4} = \sqrt{3} \times \sqrt{4} = 2\sqrt{3} \quad (2)$$

$$\sqrt{15} = \sqrt{5 \times 3} = \sqrt{5} \times \sqrt{3} \quad (3)$$

خواص ضرب الأعداد الحقيقية :-

① خاصية الانغلاق :

إذا كان a, b عددين حقيقيين فإن : $(a \times b) \in \mathbb{R}$

أي أن : حاصل ضرب أي عددين حقيقيين هو عدد حقيقي فيكون $\mathbb{R}$ مغلقة تحت عملية الضرب .

فمثلاً : $\sqrt{2} \in \mathbb{R}, \sqrt{5} \in \mathbb{R}$ فيكون : $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10} \in \mathbb{R}$

② خاصية الإبدال :

إذا كان a, b عددين حقيقيين فإن : $a \times b = b \times a$

فمثلاً : $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6}$ ، $\sqrt{5} \times \sqrt{6} = \sqrt{6} \times \sqrt{5} = \sqrt{30}$

أي أن : $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{3} \times \sqrt{2}$

③ خاصية الدمج :

إذا كان a, b, c أعداد حقيقية فإن : $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

فمثلاً : $\sqrt{7} \times (\sqrt{4} \times \sqrt{2}) = (\sqrt{7} \times \sqrt{4}) \times \sqrt{2}$

$$\sqrt{7} \times \sqrt{8} = 2\sqrt{14} = (\sqrt{7} \times \sqrt{4}) \times \sqrt{2}$$

أي أن : $(\sqrt{7} \times \sqrt{4}) \times \sqrt{2} = \sqrt{7} \times (\sqrt{4} \times \sqrt{2})$

④ خاصية المحايد الضربي :

إذا كان a عددا حقيقيا فإن : $a \times 1 = 1 \times a = a$

أي أن : المحايد الضربي في $\mathbb{R}$ هو الواحد

فمثلاً : $\sqrt{2} \times 1 = 1 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$

⑤ خاصية المعكوس الضربي :

لكل عدد حقيقي $p \neq 0$ صفري يوجد معكوس ضربي له هو $\frac{1}{p}$ ويسمى كلا من العددين p ، $\frac{1}{p}$ معكوس ضربي للآخر.

فمثلاً : المعكوس الضربي للعدد : $\sqrt[3]{2}$ هو $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
المعكوس الضربي للعدد : $-\sqrt[2]{3}$ هو $-\frac{1}{\sqrt[2]{3}}$
المعكوس الضربي للعدد (١) هو نفسه الواحد
المعكوس الضربي للعدد (-١) هو نفسه الواحد

لاحظ أن
كل عدد حقيقي له
معكوس ضربي عدا الصفر

رابعاً : عملية القسمة

عملية القسمة ممكنة دائماً في ح على أي عدد خلاف الصفر وتعرف كما يلي

لكل $p \in \mathbb{R}$ ، $b \in \mathbb{R}$ يكون : $p \div b = \frac{p}{b} \times \frac{1}{b}$
أي أن : عملية القسمة ($p \div b$) تعني ضرب العدد p في المعكوس الضربي للعدد b بشرط ($b \neq 0$)
وعملية القسمة ليست إبدالية وليست دمجية ..

مثال (١) : أوجد ناتج ما يأتي :

$$\frac{4}{5} = \frac{\sqrt[2]{2}}{2} \times \frac{8}{\sqrt[2]{10}} = \frac{2}{\sqrt[2]{2}} \div \frac{8}{\sqrt[2]{10}}$$

ملاحظة هامة جداً :

نجعل مقام العدد الحقيقي " $\frac{p}{\sqrt[n]{a}}$ " عدداً صحيحاً بضرب حدي العدد في " $\sqrt[n]{a}$ "

$$\sqrt[3]{2} = \frac{\sqrt[3]{2}}{1} = \frac{\sqrt[3]{2}}{1} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\frac{5}{\sqrt[2]{3}} = \frac{5}{\sqrt[2]{3}} \times \frac{\sqrt[2]{3}}{\sqrt[2]{3}} = \frac{5\sqrt[2]{3}}{3}$$

تذكر أن

$$(*) (س - ص) (س + ص) = س^2 - ص^2$$

$$(*) (س + ص) (س + ص) = س^2 + ٢سص + ص^2$$

$$(*) (س - ص) (س - ص) = س^2 - ٢سص + ص^2$$

مثال (1) : اجعل المقام مددا صحيحا في كل مما يأتي :

$$\begin{aligned} & \textcircled{1} \quad \frac{4}{\sqrt{2}} \quad \textcircled{2} \quad \frac{2}{\sqrt{5}} - \quad \textcircled{3} \quad \frac{6}{\sqrt{15}} \\ & \textcircled{1} \quad \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot 4}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times \frac{4}{\sqrt{2}} \\ & \textcircled{2} \quad \frac{2}{\sqrt{5}} - = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \times \frac{2}{\sqrt{5}} - = \frac{2}{\sqrt{5}} - \\ & \textcircled{3} \quad \frac{6}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15} \cdot 6}{\sqrt{15} \cdot \sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} \times \frac{6}{\sqrt{15}} = \frac{6}{\sqrt{15}} \end{aligned}$$

(بضرب البسط والمقام $\times \sqrt{2}$)
(بضرب البسط والمقام $\times \sqrt{5}$)
(بضرب البسط والمقام $\times \sqrt{15}$)

أجب بنفسك

(1) : أوجد كلا مما يأتي :-

$$\begin{aligned} & \textcircled{1} \quad \sqrt{2} \times \sqrt{5} \quad \textcircled{2} \quad \sqrt{2} \times \sqrt{5} - \quad \textcircled{3} \quad \sqrt{5} \times \frac{1}{\sqrt{5}} \times \sqrt{5} \end{aligned}$$

(2) : اجعل المقام عددا صحيحا :-

$$\begin{aligned} & \textcircled{1} \quad \frac{14}{\sqrt{7}} \quad \textcircled{2} \quad \frac{9}{\sqrt{3}} \quad \textcircled{3} \quad \frac{2}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

* خاصية توزيع الضرب علي الجمع والطرح

إذا كان a, b, c أعداد حقيقية فإن :

$$a \times b \pm c \times b = (a \pm c) \times b \quad \checkmark$$

$$a \times b \pm a \times c = a \times (b \pm c) \quad \checkmark$$

مثال (١) : أوجد ناتج ما يأتي :

$$(7 + 3\sqrt{2})(3\sqrt{2} + 2) \quad ②$$

$$\begin{aligned} (7 + 3\sqrt{2})3\sqrt{2} + (7 + 3\sqrt{2})2 &= \\ 7 \times 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} + 7 \times 2 + 3\sqrt{2} \times 2 &= \\ 21\sqrt{2} + 18 + 14 + 6\sqrt{2} &= \\ 31 + 27\sqrt{2} &= \end{aligned}$$

$$(1 + 2\sqrt{3})2\sqrt{3} \quad ①$$

$$\begin{aligned} 1 \times 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} &= \\ 2\sqrt{3} + 2 \times 2 \times 3 &= \\ 2\sqrt{3} + 12 &= \end{aligned}$$

$$2(2 + 3\sqrt{3}) \quad ④$$

$$\begin{aligned} 2(2) + 3\sqrt{3} \times 2 \times 2 + 2(3\sqrt{3}) &= \\ 4 + 3\sqrt{3} \times 12 + 12\sqrt{3} &= \\ 31 + 36\sqrt{3} &= \end{aligned}$$

$$(3 - 5\sqrt{2})(3 + 5\sqrt{2}) \quad ③$$

$$\begin{aligned} 2(3) - 2(5\sqrt{2}) &= \\ 9 - 5 \times 4 &= \\ 11 = 9 - 20 &= \end{aligned}$$

مثال (٢) :

$$2 - = (1 + 2\sqrt{3}) - 1 - 2\sqrt{3} = \text{س - ص} \quad ③$$

$$2(1 - 2\sqrt{3}) = \text{س} \quad ④$$

$$\begin{aligned} 2(1) + 1 \times 2\sqrt{3} \times 2 - 2(2\sqrt{3}) &= \\ 2\sqrt{6} + 19 = 1 + 2\sqrt{6} - 18 &= \end{aligned}$$

$$1 + 2\sqrt{3} = \text{ص}, 1 - 2\sqrt{3} = \text{س} \quad \text{إذا كانت :}$$

$$\text{أوجد قيمة المقدار : } ① \text{س} + 2 \text{س ص} + \text{ص} \quad ②$$

$$\text{س} + 2 \text{س ص} + \text{ص} - \text{ص} - (\text{س} + \text{ص}) = 2 \text{س ص}$$

$$2(1 + 2\sqrt{3} + 1 - 2\sqrt{3}) = 2(2) = 4$$

$$72 = 2 \times 36 = 2(2\sqrt{6}) = 4\sqrt{6}$$

$$2\sqrt{6} = 1 + 2\sqrt{3} + 1 - 2\sqrt{3} = \text{س} + \text{ص} \quad ②$$

✳️ أجب بنفسك ✳️

(١) أوجد ناتج كل مما يأتي في أبسط صورة :

$$(5 - 2\sqrt{7})(5 + 2\sqrt{7}) \quad ③$$

$$2(2 - 3\sqrt{5}) \quad ②$$

$$(2 - 2\sqrt{3})2\sqrt{5} \quad ①$$

(٢) إذا كانت : $1 + 2\sqrt{3} = \text{ص}$, $1 - 2\sqrt{3} = \text{س}$ أوجد قيمة كل من :

$$\text{س} \quad ③$$

$$\text{س} + \text{ص} \quad ②$$

$$\text{س} + 2 \text{س ص} + \text{ص} \quad ①$$

العمليات علي الجذور التربيعية



إذا كان a, b عددين حقيقيين غير سالبين فإن:

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad \text{وايضا} \quad \sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad (1)$$

$$\sqrt{750} = \sqrt{3 \times 250} = \sqrt{750} \quad \text{فمثلا:} \quad \sqrt{10} = \sqrt{5} \times \sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad \text{وايضا} \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (2)$$

$$\frac{5}{9} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{81}} = \frac{\sqrt{25}}{9} \quad \text{فمثلا:} \quad 2 = \sqrt{4} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{12}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b}} \quad (3) \quad \text{تستخدم هذه الخاصية لجعل المقام عددا صحيحا (حيث } b \neq 0 \text{)}$$

$$\frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{\sqrt{7}}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \quad \text{فمثلا:}$$

مثال (1): ضع كلاما يأتي في صورة $\sqrt{a}$ (في أبسط صورة):

$$\frac{\sqrt{48}}{3} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{4} \quad (3)$$

$$\sqrt{54} \quad (2)$$

$$\sqrt{24} \quad (1)$$

$$\sqrt{24} = \sqrt{6 \times 4} = \sqrt{6} \times \sqrt{4} = 2\sqrt{6} \quad (1)$$

$$\sqrt{540} = \sqrt{6 \times 9 \times 10} = \sqrt{6} \times \sqrt{9} \times \sqrt{10} = 3\sqrt{60} = 3\sqrt{4 \times 15} = 6\sqrt{15} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{4} = \frac{1}{2} \times 2 = 1 \quad (3)$$

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3} \quad (4)$$

أي أن: نبحث عن عددين حاصل ضربهما يساوي العدد الموجود تحت الجذر ويكون أحدهما له جذر تربيعي.

مثال (٢) : أوجد نتائج ما يأتي :

$$\sqrt{2} + 50\sqrt{3} - 98\sqrt{1} \quad (٢)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} + \sqrt{2 \times 25} \sqrt{3} - \sqrt{2 \times 49} \sqrt{1} = \\ & \sqrt{2} + \sqrt{2} \times \sqrt{25} \sqrt{3} - \sqrt{2} \times \sqrt{49} \sqrt{1} = \\ & \sqrt{2} + \sqrt{2} \times 5 \times \sqrt{3} - \sqrt{2} \times 7 = \\ & \sqrt{2} \times 7 = \sqrt{2} + \sqrt{2} \times 15 - \sqrt{2} \times 7 = \end{aligned}$$

$$5\sqrt{2} + 20\sqrt{2} - 45\sqrt{1} \quad (١)$$

$$\begin{aligned} & 5\sqrt{2} + 5 \times 4 \sqrt{2} - 5 \times 9 \sqrt{1} = \\ & 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} \times 4 - 5\sqrt{2} \times 9 = \\ & 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} \times 2 - 5\sqrt{2} \times 3 = \\ & 5\sqrt{2} = 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} \times 4 - 5\sqrt{2} \times 3 = \end{aligned}$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{6} + 3\sqrt{3} - 27\sqrt{2} \quad (٤)$$

$$\begin{aligned} & \frac{3\sqrt{6}}{3\sqrt{6}} \times \frac{1}{3}\sqrt{6} + 3\sqrt{3} - \sqrt{3 \times 9} \sqrt{2} = \\ & \frac{3\sqrt{6}}{3} + 3\sqrt{3} - \sqrt{2} \times 9 \sqrt{2} = \\ & 3\sqrt{6} = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{6} = \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{6} - 8\sqrt{3} + 18\sqrt{1} \quad (٣)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} \times 6 - \sqrt{2 \times 4} \sqrt{3} + \sqrt{2 \times 9} \sqrt{1} = \\ & \frac{1\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} \times \frac{1\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} \times 6 - \sqrt{2} \times \sqrt{4} \sqrt{3} + \sqrt{2} \times \sqrt{9} \sqrt{1} = \\ & \frac{1\sqrt{6}}{2} \times 6 - \sqrt{2} \times 2 + \sqrt{2} \times 3 = \\ & \sqrt{2} \times 6 = \sqrt{2} \times 3 - \sqrt{2} \times 2 + \sqrt{2} \times 3 = \end{aligned}$$

ملاحظات هامة

$$\begin{aligned} & \sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b} \\ & \text{فمثلا: } \sqrt{8+6} \neq \sqrt{8} + \sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b} \\ & \text{فمثلا: } \sqrt{8+6} \neq \sqrt{8} + \sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \sqrt{b} \quad (٢)$$

$$\sqrt{15} = \frac{1}{3} \times \sqrt{9 \times 3} \times 5 = \frac{1}{3} \sqrt{15} \quad , \quad \sqrt{2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{4} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad \text{فمثلا:}$$

* أجب بنفسك *

ضع كلاما مما يأتي في صورة $\sqrt{a} \sqrt{b}$ (في أبسط صورة) :-

$$\frac{2}{3}\sqrt{3} \quad (٣)$$

$$48\sqrt{2} \quad (٢)$$

$$32\sqrt{1} \quad (١)$$

اختصر لأبسط صورة :-

$$\frac{1}{8}\sqrt{4} - 2\sqrt{3} - 50\sqrt{2} \quad (٢)$$

$$3\sqrt{1} + 27\sqrt{2} - 75\sqrt{1} \quad (١)$$

العددان المترافقان



إذا كان a, b عددين نسبين موجبين فإن:

العدد $a + b\sqrt{c}$ هو مرافق العدد $a - b\sqrt{c}$ والعكس صحيح ويكون:

① مجموعهما $(a + b\sqrt{c}) + (a - b\sqrt{c}) = 2a$ (ضعف الحد الأول)

② حاصل ضربيهما $(a + b\sqrt{c})(a - b\sqrt{c}) = a^2 - b^2c$

(مربع الحد الأول - مربع الحد الثاني) $a^2 - b^2c = (a + b\sqrt{c})^2 - (a - b\sqrt{c})^2$

أي أنه: للحصول على المرافق نغير الإشارة بين العددين إن كانت + نجعلها - وإن كانت - نجعلها +

العدد	العدد المرافق	مجموعهما	حاصل ضربيهما
$2\sqrt{5} + 5\sqrt{2}$	$2\sqrt{5} - 5\sqrt{2}$	$2\sqrt{5} + 5\sqrt{2}$	$2^2(5) - 5^2(2) = 20 - 50 = -30$
$3\sqrt{3} - 5$	$3\sqrt{3} + 5$	10	$3^2(3) - 5^2 = 27 - 25 = 2$
$2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$	$2\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$	$3\sqrt{2} + 4$	$2^2(2) - 3^2(2) = 8 - 18 = -10$
$4 - 7\sqrt{7}$	$4 + 7\sqrt{7}$	$7\sqrt{2}$	$4^2 - 7^2(7) = 16 - 343 = -327$

ملاحظة هامة

إذا كان لدينا عدد مقامه: $(a + b\sqrt{c})$ أو $(a - b\sqrt{c})$

فإننا نضعه في أبسط صورة بضرب حديه في مرافق المقام.

أي أن: إذا كان لدينا عدداً على صورة كسر مقامه يحتوي على جذراً مجموعاً معه أو مطروحاً منه عدداً أو جذراً آخر فإننا نضرب في مرافق المقام بسطاً ومقاماً لجعل العدد في أبسط صورة.

مثال (٢) : أوجد ناتج ما يأتي :

$$\begin{aligned} & \frac{2}{1 - \sqrt{5}} \quad (٢) \\ & \frac{1 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \times \frac{2}{1 - \sqrt{5}} \\ & \frac{(1 + \sqrt{5})^2}{(1 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})} = \frac{1 - 5}{1 - 5} = \frac{1 - 5}{-4} = \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2\sqrt{2} - \sqrt{5}} \quad (١) \\ & \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{5}}{2\sqrt{2} + \sqrt{5}} \times \frac{3}{2\sqrt{2} - \sqrt{5}} \\ & \frac{(2\sqrt{2} + \sqrt{5})^3}{(2\sqrt{2} + \sqrt{5})(2\sqrt{2} - \sqrt{5})} = \frac{2^3(\sqrt{2})^3 - (\sqrt{5})^3}{2 - 5} = \frac{2^3(\sqrt{2})^3 - (\sqrt{5})^3}{-3} \\ & \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{5}}{2\sqrt{2} + \sqrt{5}} = \frac{(2\sqrt{2} + \sqrt{5})^3}{-3} = \frac{3}{-3} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1 + \sqrt[3]{2}}{1 - \sqrt[3]{2}} \quad (٤) \\ & \frac{1 + \sqrt[3]{2}}{1 + \sqrt[3]{2}} \times \frac{1 + \sqrt[3]{2}}{1 - \sqrt[3]{2}} \\ & \frac{(1 + \sqrt[3]{2})^3}{(1 + \sqrt[3]{2})(1 - \sqrt[3]{2})} = \frac{1^3 - (\sqrt[3]{2})^3}{1 - 2} = \frac{1 - 2}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{7}} \quad (٣) \\ & \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{7}} \times \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{7}} \\ & \frac{(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{7})^3}{(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{7})(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{7})} = \frac{2 + 7}{2 - 7} = \frac{9}{-5} = -\frac{9}{5} \end{aligned}$$

٦ إذا كان : $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}$ ، ب + م = ؟
حيث م ، ب عدنان صحيحان . أوجد : م ، ب ؟

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} \\ & \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} \\ & \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} \\ & \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} \\ & \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} \\ & \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} \\ & \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} \\ & \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} \end{aligned}$$

٥ إذا كان : $\sqrt{2} + \sqrt{5} = \sqrt{2} - \sqrt{5}$ ، س = ٢
أوجد قيمة المقدار : س + س ؟

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} \leftarrow \frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} \\ & \frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} \times \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} \\ & \frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} \\ & \frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} \\ & \frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} \\ & \frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} \\ & \frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} \end{aligned}$$

قوانين هامة

$\textcircled{*} \text{س}^2 + \text{س}^2 = \text{س}^2 (\text{س} + \text{س})$	$\textcircled{*} \text{س}^2 + 2 \text{س} \text{س} + \text{س}^2 = \text{س}^2 (\text{س} + \text{س})$
$\textcircled{*} \text{س}^2 + \text{س}^2 = \text{س}^2 (\text{س} - \text{س})$	$\textcircled{*} \text{س}^2 - 2 \text{س} \text{س} + \text{س}^2 = \text{س}^2 (\text{س} - \text{س})$
$\textcircled{*} \text{س}^2 \text{س} = \text{س}^2 (\text{س} \text{س})$	$\textcircled{*} \text{س}^2 - \text{س}^2 = \text{س}^2 (\text{س} + \text{س}) (\text{س} - \text{س})$
$\textcircled{*} \text{س}^3 + \text{س}^3 = \text{س}^3 (\text{س} + \text{س})$	$\textcircled{*} \text{س}^3 - \text{س}^3 = \text{س}^3 (\text{س} + \text{س}) (\text{س} - \text{س})$
$\textcircled{*} \text{س}^3 + \text{س}^3 = \text{س}^3 (\text{س} - \text{س})$	$\textcircled{*} \text{س}^3 - \text{س}^3 = \text{س}^3 (\text{س} - \text{س}) (\text{س} + \text{س})$

ومكذا

مثال (٢) :: إذا كان: $\text{س} = \sqrt{2} - \sqrt{5}$ ، $\text{ص} = \frac{3}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}$

اثبت أن: س ، ص مترافقان ثم أوجد قيمه كلا من:

١ $\text{س}^2 - 2 \text{س} \text{ص} + \text{ص}^2$ ٢ $\text{س}^2 - \text{ص}^2$ ٣ $\text{س}^4 \text{ص}^4$

$$\text{ص} = \frac{3}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} = \frac{3(\sqrt{2} + \sqrt{5})}{2 - 5}$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{5} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{5})^3}{3} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{5})^3}{-3} \times \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{5})^3}{(\sqrt{2} - \sqrt{5})^3}$$

∴ س ، ص مترافقان

١ $\text{س}^2 - 2 \text{س} \text{ص} + \text{ص}^2 = \text{س}^2 (\text{س} - \text{س})$

$$\text{س}^2 (\sqrt{2} - \sqrt{5} - \sqrt{2} - \sqrt{5}) =$$

$$8 = \text{س}^2 (-2\sqrt{2} - 2\sqrt{5}) =$$

٢ $\text{س}^2 - \text{ص}^2 = \text{س}^2 (\text{س} + \text{ص}) (\text{س} - \text{ص})$

$$(\sqrt{2} - \sqrt{5} - \sqrt{2} - \sqrt{5}) (\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{2} - \sqrt{5}) =$$

$$10\sqrt{2} - 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5} - 2\sqrt{2} =$$

٣ $\text{س}^4 \text{ص}^4 = \text{س}^4 (\text{س} \text{ص})$

$$81 = \text{س}^4 (3) = \text{س}^4 (2 - 5) = \text{س}^4 [(\sqrt{2} + \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{5})] =$$

العمليات على الجذور التكعيبية



إذا كان a, b عددين حقيقيين فإن:

$$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab} \quad \text{وايضا} \quad \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{a \times 1}$$

فمثلا:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{6} &= \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{2} \\ \sqrt[3]{-64} &= \sqrt[3]{-16 \times 4} = \sqrt[3]{-16} \times \sqrt[3]{-4} \\ \sqrt[3]{2} &= \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{3 \times 8} = \sqrt[3]{24} \\ \sqrt[3]{-27} &= \sqrt[3]{-2} \times \sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{2 \times 27} = \sqrt[3]{54} \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \quad \text{وايضا} \quad \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

فمثلا:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{4}{10}} &= \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{10}} \\ \sqrt[3]{\frac{5}{64}} &= \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{64}} \\ \sqrt[3]{2} &= \sqrt[3]{\frac{16}{8}} = \frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{8}} \\ \sqrt[3]{\frac{2}{5}} &= \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{125}} \end{aligned}$$

تستخدم هذه الخاصية
لجعل المقام عددا صحيحا

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b} \times \frac{c}{c}} = \sqrt[3]{\frac{ac}{bc}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

فمثلا:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{1}{2}} &= \sqrt[3]{\frac{4}{8}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} \\ \sqrt[3]{\frac{1}{5}} &= \sqrt[3]{\frac{20}{100}} = \frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{100}} = \frac{\sqrt[3]{20}}{10} \end{aligned}$$

مثال (١) : ضع كلا مما يأتي في صورة $\sqrt[3]{\quad}$ (في أبسط صورة) :-

$$\frac{250}{8} \sqrt[3]{\quad} \quad (٢)$$

$$81 \sqrt[3]{\quad} \quad (١)$$

اي ان : نبحث عن عددين حاصل ضربهما يساوى العدد الموجود تحت الجذر ويكون أحدهما له جذر تكعيبي .

$$\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3 \times 27} = \sqrt[3]{3 \times 3^3} = 3 \sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt[3]{\frac{250}{8}} = \frac{\sqrt[3]{2 \times 125}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{2 \sqrt[3]{125}}{2} = \sqrt[3]{125} = 5$$

مثال (٢) أختصر تبسط صورة :

$$4 \sqrt[3]{\quad} + 108 \sqrt[3]{\quad} - 500 \sqrt[3]{\quad} \quad (٢)$$

$$\begin{aligned} 4 \sqrt[3]{\quad} + 108 \sqrt[3]{\quad} - 500 \sqrt[3]{\quad} &= \\ 4 \sqrt[3]{\quad} + 4 \times 27 \sqrt[3]{\quad} - 4 \times 125 \sqrt[3]{\quad} &= \\ 4 \sqrt[3]{\quad} + 4 \sqrt[3]{\quad} \times 27 \sqrt[3]{\quad} - 4 \sqrt[3]{\quad} \times 125 \sqrt[3]{\quad} &= \\ 4 \sqrt[3]{\quad} + 4 \sqrt[3]{\quad}^3 - 4 \sqrt[3]{\quad}^3 &= \\ 4 \sqrt[3]{\quad}^3 &= \end{aligned}$$

$$16 \sqrt[3]{\quad} - 2 \sqrt[3]{\quad} + 54 \sqrt[3]{\quad} \quad (١)$$

$$\begin{aligned} 16 \sqrt[3]{\quad} - 2 \sqrt[3]{\quad} + 54 \sqrt[3]{\quad} &= \\ 2 \times 8 \sqrt[3]{\quad} - 2 \sqrt[3]{\quad} + 2 \times 27 \sqrt[3]{\quad} &= \\ 2 \sqrt[3]{\quad} \times 8 \sqrt[3]{\quad} - 2 \sqrt[3]{\quad} + 2 \sqrt[3]{\quad} \times 27 \sqrt[3]{\quad} &= \\ 2 \sqrt[3]{\quad}^3 - 2 \sqrt[3]{\quad} + 2 \sqrt[3]{\quad}^3 &= \\ 2 \sqrt[3]{\quad}^3 &= \end{aligned}$$

$$\frac{1}{25} \sqrt[3]{\quad} 10 - 5 \sqrt[3]{\quad} 2 + 40 \sqrt[3]{\quad} 2 \quad (٤)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{25} \sqrt[3]{\quad} 10 - 5 \sqrt[3]{\quad} 2 + 40 \sqrt[3]{\quad} 2 &= \\ \frac{1}{25} \sqrt[3]{\quad} 10 - 5 \sqrt[3]{\quad} 2 - 5 \sqrt[3]{\quad} 4 &= \\ \frac{1}{25} \sqrt[3]{\quad} 10 - 5 \sqrt[3]{\quad} 2 - 3 \sqrt[3]{\quad} 4 &= \\ 5 \sqrt[3]{\quad} 2 - 5 \sqrt[3]{\quad} 2 - 5 \sqrt[3]{\quad} 4 &= \text{صفر} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{9} \sqrt[3]{\quad} 12 - 81 \sqrt[3]{\quad} + 24 \sqrt[3]{\quad} \quad (٣)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} \sqrt[3]{\quad} 12 - 81 \sqrt[3]{\quad} + 24 \sqrt[3]{\quad} &= \\ \frac{1}{9} \sqrt[3]{\quad} 12 - 3 \sqrt[3]{\quad} \times 27 \sqrt[3]{\quad} + 3 \sqrt[3]{\quad} \times 8 \sqrt[3]{\quad} &= \\ \frac{1}{9} \sqrt[3]{\quad} 12 - 3 \sqrt[3]{\quad}^3 + 3 \sqrt[3]{\quad}^3 &= \\ \frac{1}{9} \sqrt[3]{\quad} 12 - 3 \sqrt[3]{\quad}^3 + 3 \sqrt[3]{\quad}^3 &= \\ 3 \sqrt[3]{\quad} = 3 \sqrt[3]{\quad}^3 - 3 \sqrt[3]{\quad}^3 + 3 \sqrt[3]{\quad}^3 &= \end{aligned}$$

مثال (٣) أختصر تبسط صورة : $3 \sqrt[3]{\quad}^2 - 3 \sqrt[3]{\quad}^2 - 12 \sqrt[3]{\quad} + 81 \sqrt[3]{\quad}$

$$\begin{aligned} 3 \sqrt[3]{\quad}^2 - 3 \sqrt[3]{\quad}^2 - 12 \sqrt[3]{\quad} + 81 \sqrt[3]{\quad} &= \\ 3 \sqrt[3]{\quad}^2 - 3 \sqrt[3]{\quad}^2 - 3 \sqrt[3]{\quad} \times 4 \sqrt[3]{\quad} - 3 \sqrt[3]{\quad} \times 27 \sqrt[3]{\quad} &= \\ 3 \sqrt[3]{\quad}^2 - 3 \sqrt[3]{\quad}^2 - 3 \sqrt[3]{\quad}^3 + 3 \sqrt[3]{\quad}^3 &= \\ 3 \sqrt[3]{\quad}^2 &= \end{aligned}$$

مثال (٤)

إذا كانت $1 + \sqrt[3]{5} = \text{ب}$ ، $1 - \sqrt[3]{5} = \text{ب}$ ، أحسب قيمة كل من:

$$\textcircled{1} (1 - \text{ب})^0 \quad \textcircled{2} (\text{ب} + 1)^3$$

$$\textcircled{1} (1 - \text{ب})^0 = (1 - \sqrt[3]{5} - 1 + \sqrt[3]{5})^0 = (0)^0 = 1$$

$$\textcircled{2} (\text{ب} + 1)^3 = (\sqrt[3]{5} + 1)^3 = (\sqrt[3]{5} + 1)(\sqrt[3]{5} + 1)(\sqrt[3]{5} + 1) = 5 + 3\sqrt[3]{5} + 3\sqrt[3]{5} + 1 = 6 + 6\sqrt[3]{5}$$

مثال (٥)

إثبت أن: $1 = (\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{4}) \div (\sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{54})$

$$1 = \frac{\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{54}} = \frac{\sqrt[3]{6 \times 4}}{\sqrt[3]{16 \times 54}} = \frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{864}} = \frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{24 \times 36}} = \frac{1}{\sqrt[3]{36}} \times \sqrt[3]{36} = 1$$

أجب بنفسك

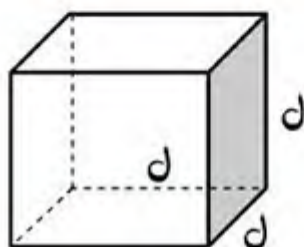
(١) : أختصر لأبسط صورة :-

$$\sqrt[3]{9} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{72} \quad \textcircled{2}$$

$$\sqrt[3]{250} \times 4 + \sqrt[3]{54} \times 2 - \sqrt[3]{16} \quad \textcircled{1}$$

تطبيقات علي الأعداد الحقيقية

الدرس العاشر



أولاً : المكعب

هو مجسم جميع أوجهه الستة مربعات متطابقة ،
جميع أحرفه متساوية الطول .

إذا كان طول حرف المكعب $ل$ فإن :

* مساحته الجانبية = $ل^2 \times 4$

* حجمه = $ل^3$

* مساحته الكلية = $ل^2 \times 6$

* مساحة الوجه الواحد = $ل^2$

مثال (١) : مكعب حجمه ٢١٥ سم^٣ . أوجد مساحته الجانبية ومساحته الكلية ؟

حجم المكعب = $ل^3 = ٢١٥$ $ل = \sqrt[3]{٢١٥} = ٨$ سم

المساحة الجانبية = $ل^2 \times 4 = ٨^2 \times 4 = ٦٤ \times 4 = ٢٥٦$ سم^٢

المساحة الكلية = $ل^2 \times 6 = ٨^2 \times 6 = ٦٤ \times 6 = ٣٨٤$ سم^٢

مثال (٢) : مكعب مساحته الكلية ١٥٠ سم^٢ . أوجد طول حرفه وحجمه ؟

المساحة الجانبية = $ل^2 \times 4$

المساحة الكلية = $ل^2 \times 6 = ١٥٠$ سم^٢

$١٠٠ = ٤ \times (٥)^2$ سم^٢

$١٥٠ = ٦ \times (٥)^2$ سم^٢

الحجم = $ل^3 = (٥)^3 = ١٢٥$ سم^٣

$١٥٠ = ٦ \times (٥)^2$

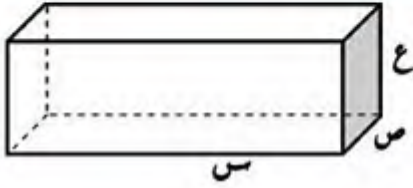
$٢٥ = ٥^2$ $٥ = ل$ سم

* أجب بنفسك *

١ مكعب حجمه ١٢٥ سم^٣ . أحسب مساحته الجانبية ومساحته الكلية ؟

٢ مكعب مساحته الكلية ٢٩٤ سم^٢ . أحسب حجمه ؟

٣ مكعب مجموع أطوال أحرفه ٦٠ سم . أحسب حجمه ومساحته الجانبية ؟



ثانياً: متوازي المستطيلات

هو مجسم يحتوي على ستة أوجه مستطيلة
كل وجهين متقابلين منها متطابقان .

إذا كان بعدا القاعدة = س ، ص والارتفاع ع فإن :

$$\textcircled{*} \text{المساحة الجانبية} = ٢ (س + ص) \times ع$$

$$\textcircled{*} \text{المساحة الكلية} = ٢ (س + ص) \times ع + ٢ س ص = ٢ (س ص + ع ص + ع س)$$

$$\textcircled{*} \text{الحجم} = س \times ص \times ع$$

مثال (١): متوازي مستطيلات ٤ سم ، ٥ سم ، ٧ سم . أوجد :

٣ حجمه

٢ مساحته الكلية

١ مساحته الجانبية

$$\text{المساحة الجانبية} = ٢ (س + ص) \times ع = ٧ \times (٥ + ٤) \times ٢ = ٧ \times ٩ \times ٢ = ١٢٦ \text{ سم}^٢$$

$$\text{المساحة الكلية} = ٢ (س + ص) \times ع + ٢ س ص$$

$$= ١٢٦ + ٥ \times ٤ \times ٢ = ١٢٦ + ٤٠ = ١٦٦ \text{ سم}^٢$$

$$\text{الحجم} = س \times ص \times ع = ٧ \times ٥ \times ٤ = ١٤٠ \text{ سم}^٣$$

مثال (٢): متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل ، فإذا كان حجمه ١٨٠ سم^٣ ، وارتفاعه ٥ سم . أجد مساحته الكلية ؟

$$\text{المساحة الكلية} = ٢ (س ص + ع ص + ع س)$$

$$= ٢ (٦ \times ٥ + ٥ \times ٦ + ٦ \times ٦)$$

$$= ٢ (٣٠ + ٣٠ + ٣٦)$$

$$= ٩٦ \times ٢ =$$

$$= ١٩٢ \text{ سم}^٢$$

$$\text{الحجم} = س \times ص \times ع = ١٨٠ \text{ سم}^٣$$

$$\text{ولكن } س = ص ، ع = ٥ \text{ سم}$$

$$١٨٠ = ٥ \times س \times س$$

$$١٨٠ = ٥ س^٢$$

$$س^٢ = \frac{١٨٠}{٥} = ٣٦$$

$$س = ص = ٦ \text{ سم}$$

*** أجب بنفسك ***

- ١ متوازي مستطيلات أبعاده ٣ سم ، ٤ سم ، ٥ سم احسب حجمه ومساحته الكلية ؟
- ٢ حوض بدون غطاء علي شكل متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل ، طول ضلعها ٥ $\sqrt{٢}$ سم وارتفاعه ٢ $\sqrt{٢}$ سم . أوجد مساحته الكلية وحجمه ؟

ثانياً: الدائرة

إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها = نوه فإن : $(\frac{٢٢}{٧} = \pi$ او ٣,١٤)

- ① محيط الدائرة = $\pi \times \text{نوه}$ ② محيط نصف الدائرة = $\pi \times \text{نوه} + \text{نوه}$
- ③ نصف محيط الدائرة = $\pi \times \text{نوه}$ ④ مساحة الدائرة = $\pi \times \text{نوه}^2$

مثال (١): دائرة طول نصف قطرها ٣ سم . أوجد محيطها ومساحتها ؟ $(\pi = ٣,١٤)$

$$\text{محيط الدائرة} = \pi \times \text{نوه} = ٣,١٤ \times ٢ \times ٣ = ١٨,٨٤ \text{ سم}$$

$$\text{مساحة الدائرة} = \pi \times \text{نوه}^2 = ٣,١٤ \times (٣)^2 = ٢٨,٢٦ \text{ سم}^2$$

مثال (٢): دائرة مساحتها ١٥٤ سم^٢ . أوجد طول نصف قطرها ومحيطها ؟ $(\frac{٢٢}{٧} = \pi)$

محيط الدائرة = $\pi \times \text{نوه}$

$$\text{المحيط} = ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times \text{نوه} = ٤٤ \text{ سم}$$

مساحة الدائرة = $\pi \times \text{نوه}^2$

$$\pi \times \text{نوه}^2 = ١٥٤$$

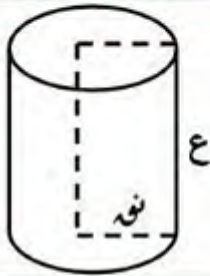
$$\frac{٢٢}{٧} \times \text{نوه}^2 = ١٥٤$$

$$\text{نوه}^2 = \frac{١٥٤ \times ٧}{٢٢}$$

$$\text{نوه}^2 = ٤٩ \Rightarrow \text{نوه} = ٧ \text{ سم}$$

*** أجب بنفسك ***

- ١ دائرة محيطها ٨٨ سم أوجد مساحتها ؟
- ٢ دائرة مساحة سطحها ١٦ π سم^٢ ، أوجد طول نصف قطرها ومحيطها ؟



رابعاً: الأسطوانة الدائرية القائمة

هو مجسم له قاعدتان متوازيتان ومتطابقتان وكل منهما على شكل دائرة، أما السطح الجانبي فهو سطح منحنى يسمى سطح أسطواني.

إذا كان طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة = r ، والارتفاع = h فإن :

① المساحة الجانبية = $2\pi r \times h$

($\pi = \frac{22}{7}$ أو 3.14)

② المساحة الكلية = $2\pi r \times h + 2\pi r^2$

③ الحجم = $\pi r^2 \times h$

مثال (١): أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ١٠ سم وطول نصف قطر قاعدتها ١٤ سم . أوجد:

③ الحجم ($\pi = \frac{22}{7}$)

② المساحة الكلية

① المساحة الجانبية

الحجم = $\pi r^2 \times h$
 $10 \times (14)^2 \times \frac{22}{7} =$
 6160 سم^3

المساحة الكلية = $2\pi r \times h + 2\pi r^2$
 $1232 + 880 = (14) \times \frac{22}{7} \times 2 + 880 =$
 2112 سم^2

المساحة الجانبية = $2\pi r \times h$
 $880 = 10 \times 14 \times \frac{22}{7} \times 2 =$

مثال (٢): أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ١٠ سم وحجمها ١٥٤٠ سم^٣ . أوجد مساحتها الكلية ؟

($\pi = \frac{22}{7}$)

المساحة الكلية = $2\pi r \times h + 2\pi r^2$
 $(7) \times \frac{22}{7} \times 2 + 10 \times 7 \times \frac{22}{7} \times 2 =$
 $748 = 308 + 440 =$

حجم الأسطوانة = $\pi r^2 \times h$

$10 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 1540$ $\Rightarrow$ $\frac{22}{7} \times r^2 = 154$

$r^2 = \frac{7}{22} \times 1540 = 49$

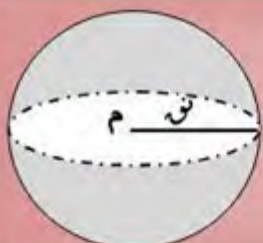
$r = \sqrt{49} = 7 \text{ سم}$

✪ أجب بنفسك ✪

- ١) أسطوانة دائرية حجمها 64π سم^٣ وارتفاعها ٤ سم . أوجد مساحتها الكلية ؟
- ٢) أسطوانة دائرية حجمها 90π سم^٣ أوجد طول نصف قطرها ومساحتها الجانبية ؟

خامسا: الكرة

هو مجسم سطحه منحنى وجميع نقاط سطحه تقع على أبعاد متساوية من نقطة ثابتة داخل الدائرة ، تسمى النقطة الثابتة مركز الكرة (٢) .



إذا كانت r دائرة طول نصف قطرها = r فإن :

$$① \text{ مساحة الكرة} = \pi r^2$$

$$② \text{ حجم الكرة} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

مثال (١): كرة طول نصف قطرها ٢ سم . أوجد حجمها ومساحتها سطحها ؟

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi (2)^3 = \frac{4}{3} \pi \times 8 = \frac{32}{3} \pi \text{ سم}^3$$

$$\text{مساحة سطح الكرة} = \pi r^2 = \pi (2)^2 = 4\pi \text{ سم}^2$$

مثال (٢): كرة حجمها 288π سم^٣ . أوجد طول نصف قطرها ومساحتها بدلالة π ؟

$$\text{مساحة الكرة} = \pi r^2$$

$$4\pi \times \pi \times r^2 =$$

$$4\pi \times \pi \times 144 =$$

$$\text{حجم الكرة} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$288\pi = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$288 = \frac{4}{3} r^3$$

$$216 = r^3$$

$$r = 6 \text{ سم}$$

أجب بنفسك *

١ كرة من المعدن طول قطرها ٦ سم . صهرت وحولت إلى أسطوانة دائرية طول نصف قطر قاعدتها ٣ سم أوجد ارتفاع الأسطوانة ؟

٢ متوازي مستطيلات مصنوع من الرصاص أطوال أحرفه ٧٧ ، ٢٤ ، ٢١ سم . شكلت منه مادة لتكوين كرة أوجد طول نصف قطرها ؟

حل المعادلات والمتباينات من الدرجة الأولى في متغير واحد في ح



أولاً : حل معادلات الدرجة الأولى في ح

الفكرة الرئيسية في حل المعادلات :

هو ايجاد العدد الحقيقي الذي يحقق هذه المعادلة وذلك من خلال عدة طرق منها :

الإضافة * تحريك الحدود مع تغيير الإشارات *

والأمثلة التالية سوف توضح كيفية حل معادلة الدرجة الأولى في متغير واحد

مثال (١) : أوجد في ح مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية ومثلها على خط الأعداد :

$$11 = 3 - 2\sqrt{x} \quad (٣)$$

$$5 = 2 + 3\sqrt{x} \quad (٢)$$

$$1 = 3 - 2\sqrt{x} \quad (١)$$

$$11 = 3 - 2\sqrt{x}$$

$$3 + 11 = 7 \times 2\sqrt{x}$$

$$14 = 2\sqrt{x} \times 7$$

$$\frac{14}{7} = \frac{2\sqrt{x} \times 7}{7}$$

$$2 = 2\sqrt{x}$$

$$\sqrt{x} = 1$$

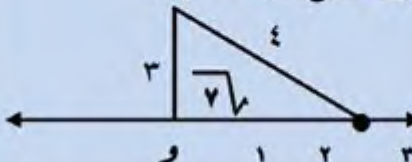
$$\{1\} = \text{ح.م}$$

لتمثيل العدد $\sqrt{x}$ نرسم مثلث قائم الزاوية فيه :

$$3 = \frac{1-7}{2} = \text{طول احط ضلعي القائمة}$$

$$4 = \frac{1+7}{2} = \text{طول الوتر}$$

$$2\sqrt{x} = \text{طول الضلع الثالث}$$



$$5 = 2 + 3\sqrt{x}$$

$$2 - 5 = 3\sqrt{x}$$

$$3 = 3\sqrt{x}$$

$$\frac{3}{3} = \frac{3\sqrt{x}}{3}$$

$$1 = \sqrt{x}$$

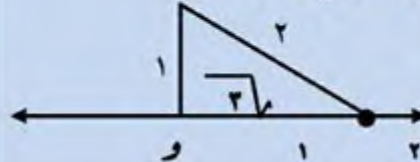
$$\{1\} = \text{ح.م}$$

لتمثيل العدد $\sqrt{x}$ نرسم مثلث قائم الزاوية فيه :

$$1 = \frac{1-3}{2} = \text{طول احط ضلعي القائمة}$$

$$2 = \frac{1+3}{2} = \text{طول الوتر}$$

$$3\sqrt{x} = \text{طول الضلع الثالث}$$



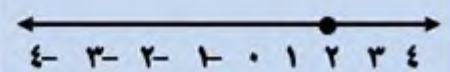
$$1 = 3 - 2\sqrt{x}$$

$$3 + 1 = 2\sqrt{x}$$

$$4 = 2\sqrt{x}$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$\{2\} = \text{ح.م}$$



* أجب بنفسك *

أوجد في ح مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية ومثل الحل على خط الأعداد :-

$$2 = 3 - 2\sqrt{x} \quad (٣)$$

$$4 = 1 - 5\sqrt{x} \quad (٢)$$

$$4 = 5 + 2\sqrt{x} \quad (١)$$

ثانياً : حل متباينات الدرجة الأولى في ح

حل المتباينة معناه إيجاد جميع قيم المتغير (س) التي تحقق المتباينة .

مجموعة حل المتباينات في ح سوف نكتبها على صورة فترة .

وطرق حل المتباينات في ح تعتمد على خواص علاقة التباين وهي كالآتي :-

يفرض أن : ١ ، ب ، ج ثلاثة أعداد حقيقية فإنه :

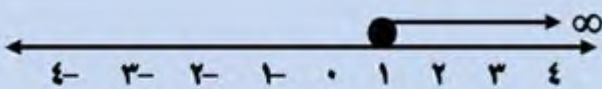
فإن : $١ + ج > ب + ج$ (خاصية الإضافة)	✓ إذا كان : $١ > ب$
فإن : $١ - ج > ب - ج$ (خاصية الحذف)	✓ إذا كان : $١ > ب$
فإن : $١ ج > ب ج$ (خاصية الضرب في عدد موجب)	✓ إذا كان : $١ > ب$
فإن : $١ ج < ب ج$ (خاصية الضرب في عدد سالب)	✓ إذا كان : $١ > ب$
فإن : $\frac{١}{ج} > \frac{ب}{ج}$ (خاصية القسمة على عدد موجب)	✓ إذا كان : $١ > ب$
فإن : $\frac{١}{ج} < \frac{ب}{ج}$ (خاصية القسمة على عدد سالب)	✓ إذا كان : $١ > ب$

لاحظ أن : عند ضرب أو قسمة طرفي المتباينة في أو علي عدد سالب يتغير اتجاه علامة التباين

مثال (١) : أوجد في ح مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية ومثلها على خط الأعداد :

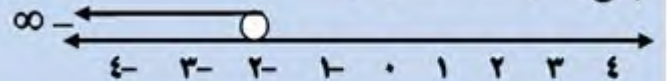
٢) $٣س - ١ \geq ٢$

$٣س - ١ \geq ٢$
 $٣س \geq ٣$ بالقسمة على ٣
 $س \geq ١$
 ح.م = $[١, \infty)$



١) $٢س + ٦ > ٢$

$٢س + ٦ > ٢$
 $٢س > -٤$ بالقسمة على ٢
 $س > -٢$
 ح.م = $(-٢, \infty)$



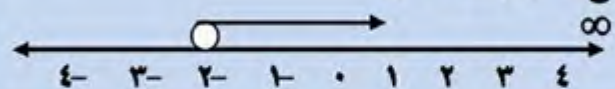
٤) $٥س - ٢ < ٧ + ٢س$

$٥س - ٢ < ٧ + ٢س$
 $٣س < ٩$ بالقسمة على ٣
 $س < ٣$
 ح.م = $(-\infty, ٣)$



٣) $٨ > ٣ - ٢س$

$٨ > ٣ - ٢س$
 $٥ > -٢س$ بالقسمة على -٢
 $س < -٢.٥$
 ح.م = $(-\infty, -٢.٥)$



مثال (٢): أوجد في ح مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية ومثلها على خط الأعداد:

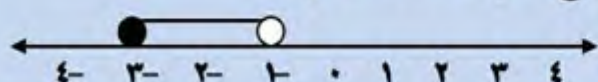
١) $5 > 3 - 2س \geq 9$

$3 - 5 > 3 - 2س \geq 3 - 9$

$2 > 3 - 2س \geq 6$ بالقسمة على -٢

$1 - 3 \leq س < 3$

ح.م = $]-3, 1[$



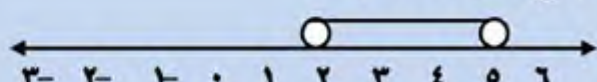
٢) $3 > 2س - 1 > 9$

$1 + 3 > 2س - 1 + 3 > 1 + 9$

$4 > 2س - 1 > 10$ بالقسمة على ٢

$2 > س > 5$

ح.م = $]2, 5[$



٣) $1 - س \geq 3س - 1 > 1 + س$

$1 - 3س > 1 - س - 1 \geq 1$

$1 > 1 - س \geq 1$

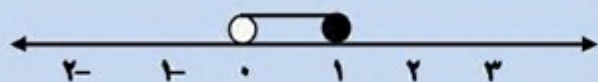
$1 + 1 > 1 - س \geq 1 + 1$

$2 > 1 - س \geq 2$

$2 > 1 - س \geq 2$ بالقسمة على -٢

$1 > س > 0$

ح.م = $]0, 1[$



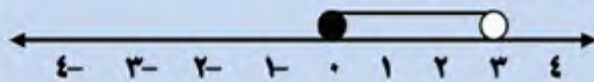
٤) $3 + س > 2 + س \geq 4س + 3$

(بطرح ٤س)

$3 > س - ٥س \geq ٠$

$3 > س \geq ٠$

ح.م = $]٠, ٣[$



* أجب بنفسك *

أوجد في ح مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية ومثل الحل على خط الأعداد:-

١) $٦ \leq ٢ - ٢س$

٢) $٨ < ١ - ٣س$

٣) $١١ - ٢س < ٣ - ٤س$

٤) $٩ \geq ٤ + ٥س$