إعداد: تلاخيص منهاج أردني -
من المكتبة الرقمية للمناهج

وزارة التربية والتعليم والتعليم العالي

الرياضيات

الجزء الأول

الصف الثامن ٨

الرياضيات
الجزء الأول
الصف الثامن

١٤٣٩هـ/ ٢٠١٨م

الرياضيات

الجزء الأول

الصف الثامن

الناشر
وزارة التربية والتعليم
إدارة المناهج والكتب المدرسية

يسر إدارة المناهج والكتب المدرسية استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب من طريق العناوين الآتية:
هاتف: ٨-٤٦١٧٣٠٤/٥، فاكس: ٤٦٣٧٥٦٩، ص.ب: ١٩٣٠ الرمز البريدي: ١١١١٨
أو بواسطة البريد الإلكتروني: E-mail: Scientific.Unit.edu@moe.gov.jo

قررت وزارة التربية والتعليم تدريس هذا الكتاب في مدارس المملكة الأردنية الهاشمية جميعها، بناءً على قرار مجلس التربية والتعليم رقم (٢٠١٦/٥٨)، تاريخ ٢٠١٦/٣/٦م، بدءًا من العام الدراسي ٢٠١٦م/٢٠١٧م.

الحقوق جميعها محفوظة لوزارة التربية والتعليم

عمّان - الأردن / ص.ب: ١٩٣٠

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(٢٠١٦/٣/١١٩٩)
ISBN: 978-9957-84-685-5

أشرف على تأليف هذا الكتاب كل من:
أ.د. حسن زارع هديب (رئيسًا)
أ.د. أحمد عبد الله رحيل
أ. د. عبد الله محمد زايدة
أ. د. زيني محمد مقدادي
د. معاذ محمود الشباب

وقام بتأليفه كل من:
د. عمر سليمان العلي
روى سعود الحمادي

التحرير العلمي: د. لانا كمال عرفة، نلين أحمد جوهر
التصميم: عمر أحمد أبو عليان
الرسم: فايزة فايز حداد
التحرير اللغوي: مياء عمر الساريسي
المصور: أديب عطوان
التحرير الفني: نداء فؤاد أبو شنب
الإنتاج: علي محمد العويدات

دقق الطباعة وراجعها: نلين أحمد جوهر

الطبعة الأولى ١٤٣٧هـ/٢٠١٦م
أعيدت طباعته ٢٠١٧-٢٠١٨م

قائمةُ المحتوياتِ

الموضوعُ	الصفحةُ
المقدمةُ	٥
الوحدةُ الأولى: الأعدادُ الحقيقيةُ	٦
الدرسُ الأولُ : العددُ الحقيقيُّ	٨
الدرسُ الثاني : خصائصُ العملياتِ على الأعدادِ الحقيقيةِ	١٣
الدرسُ الثالثُ : قوانينُ الأسسِ	٢٠
الدرسُ الرابعُ : الصيغةُ العلميةُ	٢٧
الدرسُ الخامسُ : تبسيطُ المقاديرِ الجبريةِ	٣٠
مراجعةٌ	٣٥
اختبارٌ ذاتيٌّ	٣٧
الوحدةُ الثانيةُ: الجبرُ	٣٨
الدرسُ الأولُ : الأنماطُ	٤٠
الدرسُ الثاني : المقاديرُ الجبريةُ	٤٩
الدرسُ الثالثُ : ضربُ حدٍّ جبريٍّ في مقدارٍ جبريٍّ	٥٦
الدرسُ الرابعُ : ضربُ مقدارٍ جبريٍّ في مقدارٍ جبريٍّ آخرَ	٦١
الدرسُ الخامسُ : تحليلُ المقاديرِ الجبريةِ بإخراجِ عاملٍ مشتركٍ	٦٧
الدرسُ السادسُ : تحليلُ المقاديرِ الجبريةِ بالتجميعِ	٧٢
مراجعةٌ	٧٧
اختبارٌ ذاتيٌّ	٧٩

الموضوع	الصفحة
الوحدة الثالثة: الاقترانات	٨٢
الدرس الأول : الاقتران	٨٤
الدرس الثاني : الاقترانُ الخطيّ	٩٢
الدرس الثالث : تمثيلُ الاقترانِ الخطيّ بيانيًا	٩٧
الدرس الرابع : خصائص الاقتران الخطيّ	١٠٣
مراجعة	١٠٩
اختبارٌ ذاتيٌّ	١١١
الوحدة الرابعة: الإحصاء	١١٤
الدرس الأول : المتوسطُ الحسابيُّ	١١٦
الدرس الثاني : الوسيطُ	١٢٣
الدرس الثالث : المنوالُ	١٢٧
الدرس الرابع : العلاقاتُ بينَ مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ	١٣٣
الدرس الخامس : أثرُ تعديلِ البياناتِ في مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ	١٣٩
مراجعة	١٤٤
اختبارٌ ذاتيٌّ	١٤٨

بسمِ اللهِ الرحمنِ الرحيمِ

المقدمةُ

يسعدُنا أنْ نقدمَ كتابَ الرياضياتِ للصفِّ الثامنِ الأساسيِّ، الذي تم إعدادهُ بعونِ اللهِ انسجامًا مع التوجهاتِ العالميةِ نحوَ التطويرِ والتحديثِ، وبما أنَّ الرياضياتِ لغةُ العقلِ والتفكيرِ، فقدِ اعتمدْنا أثناءَ تأليفِ الكتابِ وإعدادِ محتوياتِهِ معاييرَ عالميةً، منها: حلُّ المسألةِ، والتبريرُ والبرهانُ، والربطُ، والتواصلُ، والتمثيلُ، والنمذجةُ.

يتكونُ الكتابُ من جزأينِ: الأولُ منهُ يتضمنُ أربعَ وحداتٍ دراسيةٍ هي: الأعدادُ الحقيقيةُ، والجبرُ، والاقترانُ، والإحصاءُ. أما الجزءُ الثاني فيتضمنُ أربعَ وحداتٍ دراسيةٍ هي: أنظمةُ المعادلاتِ الخطيةِ في متغيرينِ، والإنشاءاتُ الهندسيةُ، والمثلثاتُ، والمجسماتُ.

هذا وقدروعي في هذا الكتابِ وجودُ قدرٍ كافٍ منَ التمارينِ والتدريباتِ والأنشطةِ التي تنمي مهاراتِ التفكيرِ الناقدِ والإبداعيِّ، والقدرةَ على حلِّ المشكلاتِ ومراعاةَ إحداثِ التكاملِ الأفقيِّ والرأسيِّ بينَ موضوعاتِ المحتوى.

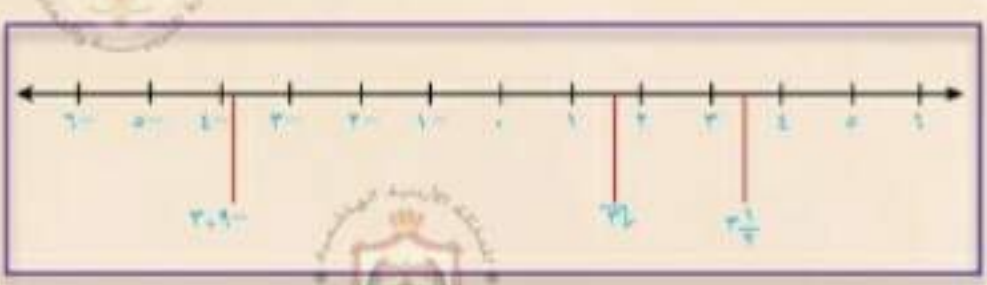
وانتهتْ كلُّ وحدةٍ بأسئلةٍ للمراجعةِ واختبارٍ ذاتيٍّ.

ونرجو أن نكون قد وفقنا في عرض مادة هذا الكتاب ليكون نافعًا ومفيدًا ومحققًا للأهداف المرجوة.

١ الوحدةُ الأولى

الأعدادُ الحقيقيةُ

ستتعلمُ في هذهِ الوحدةِ الأعدادَ الحقيقيةَ التي نشأتْ فكرتُها بسببِ وجودِ نواتجَ حسابيةٍ لا يمكنُ وصفُها بأنّها أعدادٌ صحيحةٌ أوْ أعدادٌ نسبيّةٌ مثل $\sqrt{٣}$، لهذا كانَ يجبُ علينا توسعةُ نظامِ الأعدادِ المتعارفِ عليهِ إلى نظامٍ جديدٍ يشملُ مثلَ هذهِ الأعدادِ، فكانَ نظامُ الأعدادِ الحقيقيةِ الذي ستتعرّفُ إليهِ في هذهِ الوحدةِ، كما ستتعرّفُ العملياتِ على الأعدادِ الحقيقيّةِ وخصائصَها وتطبيقاتِها الحياتيةِ مثلَ حسابِ الكمياتِ والأطوالِ.



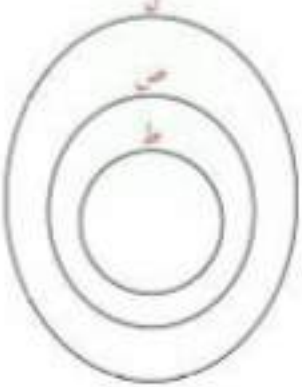
يتوقعُ منَ الطالبِ في نهايةِ هذهِ الوحدةِ أن يكونَ قادرًا على:

- تصنيفِ الأعدادِ الحقيقيةِ على أنّها مجموعاتُ أعدادٍ طبيعيةٍ، وصحيحةٍ، ونسبيةٍ، وغيرِ نسبيةٍ، وتوضيحِ أنّها مجموعاتٌ متداخلةٌ ضمنَ نظامِ الأعدادِ الحقيقيةِ.
- التعرفِ إلى خصائصِ العملياتِ على الأعدادِ الحقيقيةِ.
- توضيحِ قوانينِ الأسسِ الصحيحةِ المتعلقةِ بالأعدادِ وتطبيقاتِها.
- حلِّ مسائلَ حياتيةٍ على الأسسِ الصحيحةِ للأعدادِ، والحكمِ على الحلِّ.
- تطويرِ فهمٍ واضحٍ للأعدادِ الكبيرةِ جدًّا والصغيرةِ جدًّا، والتعبيرِ عنها باستخدامِ الأسسِ، والصيغِ العلميةِ، والآلةِ الحاسبةِ.
- تبسيطِ التعابيرِ الجذريةِ التي تتضمنُ أعدادًا حقيقيةً.

الدرس الأول: العددُ الحقيقيُّ

النتاجات
- تتعرفُ الأعدادَ الحقيقية.
- تصنفُ الأعدادَ الحقيقية.

نشاط (١)



١) ارسم المخططَ المجاورَ في دفترِكَ ثمّ اعتمدْ عليهِ لتصنيفِ الأعدادِ الآتية إلى طبيعية (ط)، صحيحة (ص)، نسبية (ن):

$١٧ ، -٨ ، \frac{٣}{١١} ، ٠ ، ٦ ، \frac{-٥}{١٩} ، ٤,١ ، ٢,٠ ،$

$-٠,٠١ ، ٠ ، ١٤,٦ .$

٢) ما العلاقةُ بينَ مجموعةِ الأعدادِ الصحيحةِ وكلٍّ منْ مجموعةِ الأعدادِ الطبيعيةِ، والنسبيةِ؟

مجموعةُ الأعدادِ الطبيعيةِ هيَ مجموعةُ الأعدادِ {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ...} ونرمزُ لها بالرمزِ ط، وتُسمّى أيضًا بالأعدادِ الصحيحةِ الموجبةِ ص+ .

أما مجموعةُ الأعدادِ الصحيحةِ ص = {... ، -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ...} فتضمنُ:
- الأعدادَ الصحيحةَ الموجبةَ ص+ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ...}
- الأعدادَ الصحيحةَ السالبةَ ص- = {-١ ، -٢ ، -٣ ، -٤ ، ...}
- الصفرَ.

والأعدادُ النسبيةُ ن = {س: س = $\frac{أ}{ب}$ ، أ ، ب عددانِ صحيحانِ و ب ≠ ٠}

لهذا فهيَ تتضمنُ:

- الأعدادَ الطبيعيةَ.
- الأعدادَ الصحيحةَ.
- الكسورَ والأعدادَ الكسريةَ.
- الأعدادَ العشريةَ المنتهيةَ والأعدادَ العشريةَ الدوريه.

نشاطُ (٢)

١) باستخدامِ الآلةِ الحاسبةِ، املأُ الجدولَ الآتيَ:

العدد	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٤٥}{٦}$	$\frac{٢٠}{٩}$	$\frac{٧}{١١}$	$\sqrt{١٦}$	$\sqrt{٥}$	$\sqrt{٣٧}$	$\sqrt{٨}$	$\sqrt{١٠}$
قيمتهُ باستخدام الآلةِ الحاسبة	٠,٣٧٥			٠,٦٣	٤,٠		٦,٠٨٢٧٦٢٥٣_		
تصنيفهُ	عددٌ عشريٌّ منتهٍ			عددٌ عشريٌّ دوريٌّ	عددٌ عشريٌّ منتهٍ		عددٌ عشريٌّ غيرُ منتهٍ		

٢) ماذا تلاحظُ؟

لا بدَّ أنَّكَ لاحظتَ أنَّ الأعدادَ $\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٣٧}$ ، $\sqrt{١٠}$ هي أعدادٌ عشريةٌ غيرُ منتهيةٍ وغيرُ دوريةٍ، وتُسمى هذهِ الأعدادُ، **أعدادًا غيرَ نسبيةٍ**.

العددُ غيرُ النسبيِّ هوَ كلُّ عددٍ **لا** يمكنُ كتابتُهُ على صورةِ $\frac{أ}{ب}$، حيثُ أ، ب ∈ ص، ب ≠ ٠.

الأعدادُ غيرُ النسبيةِ تتضمنُ:

- الأعدادَ العشريةَ غيرَ المنتهيةِ وغيرَ الدوريةِ.
- جذورَ المربعاتِ غيرِ الكاملةِ والمكعباتِ غيرَ الكاملةِ.
- هل هناكَ أعدادٌ أخرى؟

مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيةِ هيَ اتحادُ مجموعتَيْ الأعدادِ النسبيةِ وغيرِ النسبيةِ، ونرمزُ لها بالرمزِ ح.

والشكلُ الآتي يوضحُ مجموعةَ الأعدادِ الحقيقيةِ:

لهذا؛ كلُّ عددٍ على خطِّ الأعدادِ هوَ عددٌ حقيقيٌّ.

تدريب ١

صنِّفِ الأعدادَ الآتيةَ إلى طبيعيةٍ وصحيحةٍ ونسبيةٍ وغيرِ نسبيةٍ:

٦٥ ، $\frac{-١٣}{٢٢}$ ، $-\sqrt{١}$ ، $-١٣,٨$ ،

$٠,٠٤٣$ ، $٢٣,٦٤٦٩٦٨\ldots$ ، ٠ ، $\sqrt{٧}$.

(إرشادٌ: يمكنكَ رسمُ جدولٍ)

تدريب ٢

١) أيُّ العددينِ $\sqrt{٢٧}$ ، $\sqrt{٥}$ غيرُ نسبيٍّ، مبررًا إجابتَكَ؟

٢) بيّنْ أيُّ العددينِ ...١٥٧١٥٧١٥٧,٠ ، ...١٢١٢٣١٢٣٤,٠ عددٌ غيرُ نسبيٍّ، مبررًا إجابتَكَ.

ما الفرقُ بينَ العددِ النسبيِّ والعددِ غيرِ النسبيِّ؟

هلْ π عددٌ نسبيٌّ أمْ غيرُ نسبيٍّ؟

١) صنِّفِ الأعدادَ الآتيةَ إلى أعدادٍ نسبيةٍ وغيرِ نسبيةٍ، مع ذكرِ السببِ:

أ) -٢٥٤ ب) $\frac{١١}{٦٩}$ جـ) $\sqrt{٤٩}$

د) $٢,١٣١٥١٨\ldots$ هـ) $١٦,٩٠\overline{٢}$ و) ٧٠٠

ز) $\sqrt[٣]{-١٠٠٠}$ ح) $\frac{\sqrt{٣٦}}{-٨}$ ط) $\frac{١}{\sqrt[٥]{}}$

٢) أيُّ العباراتِ الآتيةِ صحيحةٌ، وأيُّها خاطئةٌ مع التبرير:

أ) كلُّ عددٍ طبيعيٍّ هوَ عددٌ صحيحٌ.

ب) كلُّ عددٍ حقيقيٍّ هوَ عددٌ صحيحٌ.

جـ) كلُّ عددٍ نسبيٍّ هوَ عددٌ صحيحٌ.

د) كلُّ عددٍ نسبيٍّ هوَ عددٌ حقيقيٌّ.

هـ) كلُّ عددٍ طبيعيٍّ هوَ عددٌ حقيقيٌّ.

٣) أعطِ مثالًا على الحالاتِ الآتيةِ:

أ) عددٌ حقيقيٌّ صحيحٌ.

ب) عددٌ حقيقيٌّ نسبيٌّ.

جـ) عددٌ حقيقيٌّ غيرُ نسبيٍّ.

د) عددٌ حقيقيٌّ طبيعيٌّ.

الدرسُ الثاني: خصائصُ العملياتِ على الأعدادِ الحقيقيةِ

النتاجاتُ
- تتعرفُ خصائصَ العملياتِ على الأعدادِ الحقيقيةِ.

غرفتانِ متجاورتانِ كلٌّ منهُما على شكلِ مستطيلٍ، وأبعادُهما كما هوَ موضحٌ في الشكلِ المجاورِ. احسبْ مجموعَ مساحتَي الغرفتينِ بطريقتينِ مختلفتينِ.

نشاطٌ (١)

١) احسبْ قيمةَ كلٍّ مما يأتي: ٥ + ٧ ، ٧ + (−٥)
ماذا تلاحظُ على ناتجِ كلٍّ منهُما؟

٢) كرّرِ الفرعَ (١) باختيارِ عددينِ حقيقيينِ آخرينِ، ماذا تلاحظُ على ناتجِ كلٍّ منهُما؟
ماذا تسمي الخاصيةَ السابقةَ لعمليةِ الجمعِ؟

٣) كرّرِ الفرعَ (١) على عمليةِ الطرحِ بحسابِ قيمةِ كلٍّ منْ:
−٩ − (١١) ، ١١ − (−٩)
هلْ تتحققُ هذهِ الخاصيةُ على عمليةِ الطرحِ؟

٤) تحققْ منْ خلالِ الأمثلةِ، إنْ كانتِ الخاصيةُ السابقةُ تتحققُ على عمليتَي الضربِ والقسمةِ.

الخاصيةُ (١)

إذا كانَ أ ، ب عددينِ حقيقيينِ فإنَّ:
- أ + ب = ب + أ
- أ × ب = ب × أ

تُسمّى هذهِ الخاصيةُ **الخاصيةَ التبديليةَ** على عمليتَي الجمعِ والضربِ.

مثال (١)

اكتبِ العددَ المناسبَ في ☐ لكلٍّ ممّا يأتي:

١) $\overline{٢١} + (-٥) = ☐ + \overline{٢١}$

٢) $\frac{١}{٣} + ☐ = ٧ + ☐$

الحلُّ

١) $\overline{٢١} + (-٥) = \boxed{-٥} + \overline{٢١}$

٢) $\frac{١}{٣} + \boxed{٧} = ٧ + \boxed{\frac{١}{٣}}$

تدريبٌ (١)

اكتبِ العددَ المناسبَ في ☐ لكلٍّ ممّا يأتي:

١) $٦,٢٥ + ☐ = ٩ + ☐$

٢) $☐ + \overline{١٥} = ☐ + ٠,٢$

نشاطٌ (٢)

١) احسبْ قيمةَ كلٍّ ممّا يأتي:

$٢ + (-٣ + ١)$

$(-٢ + (-٣)) + ١$

ماذا تلاحظُ على ناتجِ كلٍّ منهما؟

٢) كرّرِ الخطواتِ في الفرعِ (١) باختيارِ أعدادٍ حقيقيةٍ أخرى، ماذا تلاحظُ على الناتجينِ؟ ماذا نسمي الخاصيةَ السابقةَ لعمليةِ الجمعِ؟

٣) كرّرِ الخطواتِ في الفرعِ (١) على عمليةِ الطرحِ بحسابِ قيمةِ كلٍّ منْ:

$-٢ - ((-٣) - ١)$

$(-٢ - (-٣)) - ١$

هلْ تتحققُ هذهِ الخاصيةُ على عمليةِ الطرحِ؟

٤) تحققْ منْ خلالِ الأمثلةِ؛ إنْ كانتِ الخاصيةُ السابقةُ تتحققُ على عمليتَيِ الضربِ والقسمةِ. (إرشاد: يمكنك استعمالُ الآلةِ الحاسبةِ).

الخاصيةُ (٢)

إذا كانتْ أ، ب، جـ أعدادًا حقيقيةً فإنَّ:

- $(أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ)$ وتُسمّى **الخاصيةَ التجميعيةَ** على عمليةِ الجمعِ.
- $(أ \times ب) \times جـ = أ \times (ب \times جـ)$ وتُسمّى **الخاصيةَ التجميعيةَ** على عمليةِ الضربِ.

مثالٌ (٢)

اكتبِ العددَ المناسبَ في ☐ لكلٍّ ممّا يأتي:

١) $(٥ + ٠,٢) + ☐ = ☐ + (٠,٢ + \overline{٣٦})$

٢) $(☐ \times ١,٧) \times \frac{١١}{٤} = ٨ \times (١,٧ \times ☐)$

الحلُّ

١) $(٥ + ٠,٢) + \boxed{٥} = \boxed{\overline{٣٦}} + (٠,٢ + \overline{٣٦})$

٢) $(\boxed{\frac{٢٢}{٤}} \times ١,٧) \times \frac{١١}{٤} = ٨ \times (١,٧ \times \boxed{٨})$

نشاطٌ (٣)

١) املأُ الجدولَ الآتيَ:

	أ×ب	أ×جـ	ب+جـ	أ×(ب+جـ)	أ×ب+أ×جـ
أ = ٢ ب = ٣ جـ = ٧					
أ = ٥ ب = −٨ جـ = ٢					
أ = −١١ ب = −١٥ جـ = ٩					

٢) ماذا تلاحظُ؟

الخاصيةُ (٣)

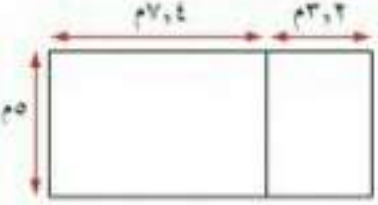
إذا كانَ أ، ب، جـ، أعدادًا حقيقيّةً فإنَّ:

$$أ \times (ب + جـ) = (أ \times ب) + (أ \times جـ)$$

تُسمّى هذهِ الخاصيةُ خاصيةَ **توزيعِ الضربِ على الجمعِ**.

تدريب (٢)

احسبْ مساحةَ الشكلِ المجاورِ بطريقتينِ.



الخاصية (٤)

إذا كانَ أ عددًا حقيقيًّا، فإنَّ:

أ + ٠ = أ ، نسمي **الصفرَ عنصرًا محايدًا** لعمليةِ الجمعِ.

أ × ١ = أ ، نسمي العددَ ١ **عنصرًا محايدًا** لعمليةِ الضربِ.

الخاصية (٥)

إذا كانَ أ عددًا حقيقيًّا، أ ≠ ٠ ، فإنَّ:

- أ + (−أ) = ٠ ، نسمي − أ **نظيرًا جمعيًّا** للعددِ أ، أو (معكوسَ العددِ أ).
- أ × $\frac{١}{أ}$ = ١ ، نسمي $\frac{١}{أ}$ **نظيرًا ضربيًّا** للعددِ أ، أو (مقلوبَ العددِ أ).

الخاصية (٦)

خاصيةُ الضربِ بالصفرِ:

إذا كانَ أ عددًا حقيقيًّا فإنَّ أ × ٠ = ٠ × أ = ٠ .

مثال (٣)

حُلَّ المعادلاتِ الآتيةَ:

١) $\sqrt{٢}$ + س = صفرًا

٢) $\frac{\sqrt{٣}}{٥}$ س = ١

الحلُّ

١) $\sqrt{٢}$ + س = ٠

$\sqrt{٢}$ + − $\sqrt{٢}$ + س = صفرًا + − $\sqrt{٢}$ حلُّ المعادلةِ بإضافةِ النظيرِ الجمعيِّ.

س = − $\sqrt{٢}$ تطبيقُ الخاصيةِ ٤

٢) $\frac{\sqrt{٣}}{٥}$ س = ١

$\frac{\sqrt{٣}}{٥} \times \frac{٥}{\sqrt{٣}} \times$ س = ١ × $\frac{٥}{\sqrt{٣}}$

حلّ المعادلة بالضرب بالنظير الضربي ثم التعويض.

تطبيق الخاصية ٤

س = $\frac{٥}{\sqrt{٣}}$

تدريب ٣

حلّ المعادلاتِ الآتية:

١) $\frac{\sqrt{٣٩}}{٢-}$ × س = ١

٢) ٢,٣٢٤٥... + س = ... ٢,٣٢٤٥

٣) $-\sqrt{٥١}$ + س = ٠

فكّرْ وناقشْ

اكتشفِ الخطأَ في العباراتِ الآتيةِ، مبرّرًا إجابتكَ.

١) النظيرُ الجمعيُّ للعددِ $\sqrt{٤٢}-$ هوَ $-\sqrt{٤٢}$

٢) النظيرُ الضربيُّ للعددِ $\sqrt{٤}$ هوَ $\frac{١}{٤}$.

تمارينُ ومسائلُ

١) جدْ قيمةَ س في كلٍّ مما يأتي:

أ) $(-٦ + س) + ٢,٦ = -٦ + (٤,٧ + ٢,٦)$

ب) $\frac{\sqrt{١٧}}{٤٢} \times س = ٠$

جـ) $\frac{١}{\sqrt{١١}} \times س = ٢$

د) $٤ \times ٩٢ = ٨ + (٤ \times س)$

٢) اكتبِ النظيرَ الجمعيَّ لكلٍّ منَ الآتي:

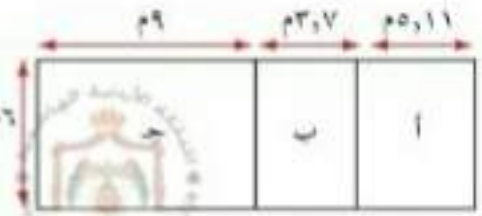
أ) $\sqrt{١٩}$ ب) $-\frac{٤}{٢٧}$ جـ) ١٢٣ د) $\sqrt{-٤١}$

٣) اكتبِ النظيرَ الضربيَّ لكلٍّ منَ الآتي:

أ) ٦٧ ب) $-\sqrt{١١}$ جـ) $٢\frac{٤}{١٥}$ د) $\sqrt{\frac{-٢}{١٣}}$

٤) صندوقانِ في كلٍّ منهُما ٨ مغلفاتٍ، وفي كلِّ مغلفٍ ٢٠٠ ورقةٍ، ما عددُ الأوراقِ في الصندوقينِ؟

٥) احسبْ مساحةَ الشكلِ الموضحِ جانبًا بطريقتينِ.



٦) بائعُ جملةٍ يبيعُ صناديقَ منْ أقلامِ الحبرِ، كلُّ صندوقٍ فيهِ ١٠ دزيناتٍ منَ الأقلامِ، اشترى عامرٌ ٧ صناديقَ منها. جدْ عددَ الأقلامِ التي اشتراها، علمًا بأنَّ الدزينةَ الواحدةَ تحوي ١٢ قلمًا.

الدرسُ الثالثُ

قوانينُ الأسسِ

النتاجاتُ

- تتعرفُ قوانينَ الأسسِ.
- تطبقُ قوانينَ الأسسِ الصحيحةِ.
- تحلُّ مسائلَ على قوانينِ الأسسِ.

الأميبا كائنٌ حيٌّ يتكونُ منْ خليةٍ واحدةٍ، ويُرى بالمجهرِ. يتكاثرُ الأميبا بالانقسامِ إلى خليتينِ كلَّ مرةٍ. ما عددُ الأميبا بعدَ ثلاثِ انقساماتٍ؟ بعدَ كمِ انقسامٍ يُصبحُ لديكَ ٦٤ خليةً؟

تذكّرْ

$س^{ن} = س \times س \times س \times ... \times س$ (ن منَ المراتِ)

مثالُ (١)

اكتبْ كلًّا مما يأتي باستخدامِ الأسسِ:

١) ٢١٦ ٢) -٣٢

الحلُ

١) يمكنُ تحليلُ ٢١٦ باستخدامِ طريقةِ القسمةِ المتكررةِ كما هوَ موضّحٌ جانبًا

$٢١٦ = ٦ \times \square \times \square = \square \times \square \times \square$

٢١٦	٢
١٠٨	٢
٥٤	٢
٢٧	٣
٩	٣
٣	٣
١	

٢) يمكنُ تحليلُ −٣٢ باستخدامِ طريقةِ القسمةِ المتكررةِ كما هوَ موضّحٌ جانبًا.

٣٢	٢
١٦	٢
٨	٢
٤	٢
٢	٢
١	

□ □ − = ٣٢−

تدريبٌ ١

اكتبْ كلًّا مما يأتي باستخدامِ الأسسِ:

١) ٨١ ٢) ٨٠٠٠٠ ٣) −٣١٢٥

نشاطٌ (١)

املأْ □ للحصولِ على عبارةٍ صحيحةٍ:

١) س٣ × س٤ = (□ × □ × □) × (□ × □ × □ × □)

= □ × □ × □ × □ × □ × □ × □

= س٧

٢) كرّرِ الخطواتِ المتبعةَ في الفرعِ (١) لوضعِ كلٍّ مما يأتي بصورةِ س٥:

س٦ × س٢ ، ص٣ × ص٥ ، ع٤ × ع٢

٣) لا بدَّ أنكَ لاحظتَ أنَّ س٥ × س٥ = س١٠

٤) ضعْ كُلًّا مما يأتي على صورةِ س٥ اعتمادًا على القاعدةِ التي توصلتَ إليها في الفرعِ (٣): م٩ × م٧ ، ع٦ × ع١١ ، ص٤ × ص٣ × ص١٢

قاعدةٌ

س٥ × س٥ = س٥+٥، حيثُ ن، م ∈ ص.

مثال (٢)

بيّنْ أنّ $(س ص)^{٢} = س^{٢} \times ص^{٢}$

الحلُّ

$(س ص)^{٢} = (س ص) \times (س ص) \times (س ص)$ تعريفُ الأسّ

$= س \times ص \times س \times ص \times س \times ص$

$= (س \times س \times س) \times (ص \times ص \times ص)$ عمليةُ الضربِ تبديليةٌ وتجميعيةٌ

$= س^{٣} \times ص^{٣}$ تعريفُ الأسّ.

تدريبٌ ٢

بيّنْ أنّ $(س^{٣})^{٢} = س^{١٠}$

قاعدةٌ

- $(س ص)^{ن} = س^{ن} \times ص^{ن}$
- $(س^{ن})^{م} = س^{ن \times م}$ ، حيثُ ن، م ∈ ص.

فكّرْ وناقشْ

بيّنِ الخطأَ في العبارةِ الآتيةِ: $٢^{٣} \times ٢^{٣} = ٢^{٦}$ واكتبِ الصوابَ.

تدريبٌ ٣

اكتبْ كلًّا مما يأتي كقوةٍ واحدةٍ:

١) $ب^{٣} \times ب^{٨}$ ٢) $ع^{٣} \times س^{٣}$ ٣) $(\overline{١١ب})^{١} \times (\overline{١٣ب})^{١}$

نشاطٌ (٢)

املأُ الفراغَ بما هوَ مناسبٌ:

١) $س^{٥} \div س^{٣} = \frac{\cdots\cdots}{س^{٣}} = \frac{\cdots\cdots \times \cdots\cdots \times \cdots\cdots \times \cdots\cdots \times \cdots\cdots}{س \times س \times س}$

$س^{٥} \div س^{٣} = \frac{س \times س \times س \times س \times س}{س \times س \times س}$

$س^{٥} \div س^{٣} = س^{\cdots}$

٢) كرّرِ الخطواتِ السابقةَ لإيجادِ ناتجِ كلٍّ مما يلي:

$س^{٤} \div س^{٣}$

$س^{٢} \div س^{٣}$

$س^{٣} \div س^{٣}$

$س^{٢} \div س^{٦}$

٣) لا بدَّ أنَّكَ لاحظتَ أنَّ:

أ) $س^{ن} \div س^{م} = س^{ن-م}$

ب) $س^{ن} \div س^{ن} = س^{٠} = \cdots\cdots$

جـ) $س^{-ن} = \frac{١}{س^{ن}}$

٤) جدْ ناتجَ كلٍّ مما يأتي اعتمادًا على ما توصلتَ إليهِ:

أ) $م^{١١} \div م^{١٠}$ ب) $ع^{١٥} \div ع^{١٥}$ جـ) $ص^{١٩} \div ص^{٢٠}$

قاعدة

١) $س^{ن} \div س^{م} = س^{ن-م}$ ، حيث ن ، م ∈ ص ، س ≠ ٠

٢) $س^{٠} = ١$

٣) $س^{-ن} = \frac{١}{س^{ن}}$ ، حيث ن ∈ ص ، س ≠ ٠

مثال (٣)

بيّن أنّ $(\frac{س}{ل})^{٢} = \frac{س^{٢}}{ل^{٢}}$

الحلّ

$(\frac{س}{ل})^{٢} = \frac{س}{ل} \times \frac{س}{ل} \times \frac{س}{ل}$ ثم بضرب الأس

$= \frac{س \times س \times س}{\square \times \square \times \square}$ بضرب البسط * البسط * البسط كذلك المقام

$= \frac{\square}{ل^{٢}}$

قاعدة

١) $(\frac{س}{ل})^{ن} = \frac{س^{ن}}{ل^{ن}}$ ، حيث ن ∈ ص ، ل ≠ ٠

٢) $(\frac{س}{ل})^{-ن} = (\frac{ل}{س})^{ن}$ ، حيث ن ∈ ص ، ل ≠ ٠ ، س ≠ ٠

تدريب ٤

اكتب كلًّا مما يأتي كقوّة واحدة:

١) $ص^{٢٠} \div ص^{٦}$ ٢) $ع^{١٩} \div ع^{١٩}$ ٣) $\frac{ص^{٧}}{ص^{٨}}$ ٤) $\frac{ن^{١٢}}{ق^{١٢}}$

مثالٌ (٤)

حُلَّ المعادلاتِ الآتيةَ:

١) $س^{-١} = \frac{٣}{٨}$ ٢) $٨^{س-١} \times ٨^{٢} = ٨^{٧}$

الحلُّ

١) $س^{-١} = \frac{٣}{٨}$

$س^{-١} = (\frac{٨}{٣})^{-١}$ نطبّقُ القاعدةَ $س^{-ن} = \frac{١}{س^{ن}}$ ، ونساوي بينَ أسسِ الطرفينِ

إذنْ $س = \frac{٨}{٣}$ إذا تساوتْ أسسُ طرفَيْ معادلةٍ فإنَّ الأساسَ متساوٍ.

٢) $٨^{س-١} \times ٨^{٢} = ٨^{٧}$

$٨^{س+١} = ٨^{٧}$ نطبّقُ القاعدةَ $س^{ن} \times س^{م} = س^{ن+م}$

$س + ٢ = ٧$ وإذا تساوى أساسَا طرفَيْ معادلةٍ فإنَّ الأسسَ متساويةٌ

$س = ٥$

تدريبٌ ٥

حُلَّ المعادلاتِ الآتيةَ:

١) $س^{٢} = ٧^{٢}$ ٢) $(١٣-س)^{٣} = ١٣^{٨}$

فكِّرْ وناقشْ

ناقشِ العباراتِ الآتيةَ معَ زملائِكَ:

إذا كانتْ $س \in ح$، فإنَّ:

١) $\sqrt{س^{٢}} = |س|$ (إرشادٌ: وضّحْ باستخدامِ الأمثلةِ)

٢) $\sqrt[٣]{س^{٣}} = س$

١) جدْ قيمةَ كلٍّ مما يأتي:

أ) $(\frac{1}{3})^{-1}$ ب) $(-0,1)^{0}$ جـ) $(-1000)^{0}$

د) $(9)^{-\frac{1}{2}}$ هـ) $(5)^{3}$ و) $(\frac{1}{21})^{2} \times (7)^{4}$

ز) $\sqrt{(-7)^{2}}$ ح) $\sqrt[3]{(-2)^{3}}$

٢) اكتبْ كلًّا مما يأتي باستخدامِ الأسسِ:

أ) ٠,٠٠٠١ ب) $\frac{-1}{8}$ جـ) ٢٧٤٤

٣) اكتبْ كلًّا مما يأتي كقوةٍ واحدةٍ:

أ) $ف^{10} \times ف^{20}$ ب) $س^{-9} \times س^{8}$ جـ) $(\sqrt{5})^{10} \times (\sqrt{2})^{10}$

د) $ن^{12} \div ن^{3}$ هـ) $ع^{19} \div ع^{19}$ و) $ص^{-14} \times ص^{14}$

ز) $\frac{س^{8}}{ص^{2}}$ ح) $\frac{ص^{17}}{س^{20}}$ ط) $(ل^{-5})^{2}$

٤) حُلَّ المعادلاتِ الآتيةَ:

أ) $س^{4} = 16$ ب) $(11-)^{ص} = 11^{30}$

جـ) $14^{س} \div 14^{2} = 14^{8}$ د) $\sqrt{س^{2}} = 17$

٥) حُلَّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

الدرسُ الرابعُ

الصيغةُ العلميةُ

الحاجاتُ

- تتعرفُ الصيغةَ العلميةَ للأعدادِ.
- تكتبُ الأعدادَ الكبيرةَ جدًّا والصغيرةَ جدًّا باستخدامِ الصيغةِ العلميةِ.

متوسطُ بُعْدِ الأرضِ عنِ الشمسِ ١,٥ × ١٠^{٨} كيلو مترًا. اكتبِ المسافةَ دونَ استعمالِ الأُسسِ.

متوسطُ بُعْدِ كوكبِ المريخِ عنِ الشمسِ ٥,٧ × ١٠^{٧} كم، وهذا يساوي ٥٧٠٠٠٠٠٠ كم، نسمي الصيغةَ ٥,٧ × ١٠^{٧} **بالصيغةِ العلميةِ** للعددِ ٥٧٠٠٠٠٠٠ بينما نسمي الصيغةَ ٥٧٠٠٠٠٠٠ **بالصيغةِ القياسيةِ** لهُ.

الصيغةُ العلميةُ للعددِ النسبيِّ هيَ (أ × ١٠^{ن}) حيثُ |أ| ∈ [١ ، ١٠)، ن عددٌ صحيحٌ.

مثالٌ (١)

اكتبْ كلًّا منَ العددينِ الآتيينِ بالصيغةِ العلميةِ:

١) ٩٣١٠٠٠ ٢) −٠,٠٠٠٨

الحلُّ

١) ٩٣١٠٠٠ = ٩,٣١٠٠٠ × ١٠^{٥}

$١٠٠٠٠٠ \times \frac{١}{١٠٠٠٠٠} \times ٩٣١٠٠٠$

$١٠٠٠٠٠ \times \frac{٩٣١٠٠٠}{١٠٠٠٠٠}$

٢) $-٠,٠٠٠٨ = -٨ \times ١٠^{-٤}$

$٠,٠٠٠٨ = \frac{٨}{١٠٠٠٠} = \frac{١}{١٠٠٠٠} \times ٨$

تحدَّث

عندَ التحويلِ منَ الصيغةِ القياسيةِ إلى الصيغةِ العلميةِ، ما العلاقةُ بينَ أُسِّ العددِ ١٠ وعددِ المنازلِ التي تتحرَّكُها الفاصلةُ العشريةُ، واتجاهها؟

تدريب ١

اكتبْ كلًّا منَ الأعدادِ الآتيةِ بالصيغةِ العلميةِ:

١) ٨٥٠١ ٢) ٠,٠٠٠٧٤ ٣) -٣٦٠٠٠٠٠

مثال (٢)

اكتبْ كلًّا منَ العددينِ الآتيينِ بالصيغةِ القياسيةِ:

١) $٦,٠٩ \times ١٠^{٤}$ ٢) ٢×١٠^{-٥}

الحلُّ

١) $٦,٠٩ \times ١٠^{٤} = ٦,٠٩ \times ١٠٠٠٠$

$= ٦٠٩٠٠$

٢) $٢ \times ١٠^{-٥} = ٢ \times \frac{١}{١٠٠٠٠٠}$

$= \frac{٢}{١٠٠٠٠٠} = ٠,٠٠٠٠٠٢$

تدريب ٢

اكتبْ كلًّا منَ العددينِ الآتيينِ بالصيغةِ القياسيةِ:

١) $٦,٩٨٧٢ \times ١٠^{٢}$ ٢) $١,٣ \times ١٠^{-٢}$

تمارينُ ومسائلُ

١) اكتبْ كلًّا مما يأتي بالصيغةِ العلميةِ:

أ) ٤٠٠٥٦ ب) −٩٠٠٨٠٠٠ جـ) ٦٥٢,٣

د) ٠,٧٨٩ هـ) −٠,٠٠٠١٢ و) $\frac{٣}{١٠٠٠}$

٢) اكتبْ كلًّا مما يأتي بالصيغةِ القياسيةِ:

أ) $٢,٠٠٨ \times ١٠^{٦}$

ب) $-١,٥٠٣٣ \times ١٠^{٤}$

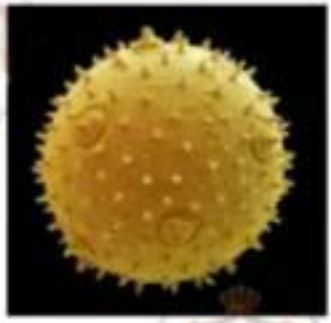
جـ) $٥,٩ \times ١٠^{٨}$

٣) اكتشفِ الخطأَ في العبارتينِ الآتيتينِ واكتبِ الصوابَ.

أ) الصورةُ العلميةُ للعددِ ٧٦١٠٠ هيَ $٧,٦١ \times ١٠^{٣}$

ب) الصورةُ القياسيةُ للعددِ $٣,٣٩١٦ \times ١٠^{٣}$ هيَ ٣٣٩١٦

٤) أطولُ حبةِ لقاحٍ في العالمِ هيَ حبةُ لقاحِ زهرةِ الكوسا؛ إذْ يبلغُ طولُها $\frac{١}{١٠}$ ملم، بينما يبلغُ طولُ حبةِ لقاحِ زهرةِ شقائقِ النعمانِ ٠,٠١٨ ملم. اكتبْ هذهِ الأطوالَ بالصيغةِ العلميةِ.



الدرس الخامس

تبسيطُ التعابيرِ الجذريةِ

النتاجاتُ

- تُبسّطُ تعابيرَ جذريةً لأعدادٍ حقيقيةٍ.

إذا كانَ حجمُ المكعبِ في الشكلِ المجاورِ ٢٧٠سم^{٣}، فما طولُ ضلعِهِ؟

نشاطٌ (١)

أكملِ الجدولَ الآتيَ:

$\sqrt{٩} \times \sqrt{٤} = \sqrt{\quad} = \sqrt{٩ \times ٤}$ $\quad \times \quad = \quad$	$\sqrt{٨} \times \sqrt{-٨} = \sqrt{\quad}$ $\quad \times \quad = \quad$
$\sqrt{٤} \times \sqrt{٢٥} = \sqrt{\quad}$ $\quad \times \quad = \quad$	$\sqrt{٨} \times \sqrt{-٨} = \sqrt{٨ \times -٨}$ $\quad = \quad$
$\sqrt{٣٦} = \frac{\sqrt{\quad}}{\sqrt{٩}} = ٢$	$\sqrt{٤} \times \sqrt{٢٥} = \sqrt{٤ \times ٢٥}$ $\quad = \quad$
$\sqrt{١٠٠٠} = \frac{\sqrt{\quad}}{\sqrt{٨}} = ٥$	$\sqrt{٣٦} = \frac{\sqrt{٣٦}}{\sqrt{٩}} = \frac{\sqrt{\quad}}{\sqrt{١}} = \quad$
	$\sqrt{١٠٠٠} = \frac{\sqrt{١٠٠٠}}{\sqrt{٨}} = \frac{\sqrt{\quad}}{\sqrt{١}} = \sqrt{١٢٥} = \quad$

ماذا تلاحظُ؟

اكتبْ قاعدةً عامةً تلخصُ ما سبقَ.

قاعدة (١)

إذا كانتْ أ، ب، هـ، ف، أعدادًا حقيقيةً، حيثُ أ > ٠ ، ب > ٠، فإنَّ:

$\sqrt{أ} \times \sqrt{ب} = \sqrt{أ \times ب}$

$\sqrt{هـ} \times \sqrt{ف} = \sqrt{هـ \times ف}$

قاعدة (٢)

إذا كانتْ أ، ب، هـ، ف، أعدادًا حقيقيةً، حيثُ أ > ٠ ، ب > ٠، ف ≠ ٠ ، فإنَّ:

$\frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}} = \sqrt{\frac{أ}{ب}}$

$\frac{\sqrt{هـ}}{\sqrt{ف}} = \sqrt{\frac{هـ}{ف}}$

فكّرْ وناقشْ

بيّنْ لماذا لا تنطبقُ القاعدةُ ١ على عمليتي الجمعِ والطرحِ؟ موضحًا إجابتكَ بإعطاءِ أمثلةٍ.

تستعملُ القاعدتينِ السابقتينِ في تبسيطِ العباراتِ الجبريةِ.

مثال (١)

حلّ المسألةَ الواردةَ في مقدمةِ الدرسِ.

الحل

طولُ الضلعِ = $\sqrt{٢٧٠}$

$= \sqrt{١٠ \times ٢٧}$

$= \sqrt{٢٧} \times \sqrt{١٠}$

$= ٣ \times \sqrt{١٠}$

$= ٣\sqrt{١٠}$ سم.

مثالٌ (٢)

جدِ القيمةَ العدديةَ للتعبيرِ العدديِّ الآتي:

$\sqrt{٢٥} \times \sqrt{٥٠}$

الحلُّ

$\sqrt{٥٠} \times \sqrt{٢٥} = \sqrt{٥٠ \times ٢}$

$= \sqrt{١٠٠}$

$= ١٠$

حلَّ المثالِ (٢) بطريقةٍ أخرى؟

تدريبٌ ١

اكتبِ القيمةَ العدديةَ في كلٍّ ممّا يأتي:

١) $\sqrt{٤٩} \times \sqrt{٤}$

٢) $\sqrt{٢٤} \times \sqrt{٩}$

٣) $\sqrt{\frac{١٦}{٢٥}}$

٤) $\sqrt{\frac{٥٤}{٢}}$

مثالٌ (٣)

ما ناتجُ: $\sqrt{٣} + ١١\sqrt{١٢} + \sqrt{٣٢} - ٩\sqrt{٢}$

الحلُّ

$\sqrt{٣} + ١١\sqrt{١٢} + \sqrt{٣٢} - ٩\sqrt{٢}$

$= \sqrt{٣} + ١١\sqrt{٤ \times ٣} + \sqrt{٢ \times ١٦} - ٩\sqrt{٢}$

$= \sqrt{٣} + ١١ \times ٢\sqrt{٣} + ٤\sqrt{٢} - ٩\sqrt{٢}$

$= \sqrt{٣} + ٢٢\sqrt{٣} + ٤\sqrt{٢} - ٩\sqrt{٢}$

$= ٢٣\sqrt{٣} - ٥\sqrt{٢}$

تدريب ٢

ما ناتج: $-٨\sqrt{٧} + \sqrt{٦٣} + \sqrt{٥٠} - ٣\sqrt{٨}$ ؟

تحدَّث

كيفَ تجدُ قيمةَ جذرٍ تربيعيٍّ لعددٍ ليسَ مربعًا كاملًا؟

فكِّرْ وناقشْ

جِدْ قيمةَ كُلٍّ من:

١) $\sqrt{٦٤} \times ٠,٠٠١$

٢) $\sqrt{٠,٠٠٠٠٠٧}$

تمارينُ ومسائلُ

١) ما قيمةُ كلٍّ مما يأتي:

أ) $\sqrt{١٠٠} \times \sqrt{٣٦}$

ب) $\sqrt{١٦٠٠٠}$

جـ) $\sqrt{\frac{٨١}{٦٤}}$

د) $\frac{\sqrt{١٩٢}}{\sqrt{٣}}$

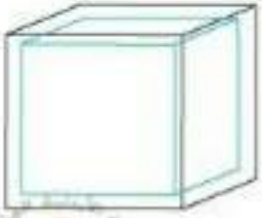
هـ) $\sqrt{-٩} \times \sqrt{٣}$

و) $\sqrt{٠,١٢٥} \times \sqrt{٢}$

ز) $٦\sqrt{٢٠} + \sqrt{٦٣} - \sqrt{٤٨} - \sqrt{٥٨}$

ح) $\sqrt{٢}(\sqrt{٤} - \sqrt{-٣٢})$

٢) صندوقٌ لحفظِ الموادِّ المشعةِ مكعّبُ الشكلِ. إذا كانَ الحجمُ الخارجيُّ للصندوقِ ٠,٠٢٧م^٣، أما الحجمُ الداخليُّ لهُ فيبلغُ ٠,٠٠٨م^٣. احسبْ سمكَ الصندوقِ.



٣) اكتشفِ الخطأَ واكتبِ الصوابَ في ما يأتي:

$\sqrt{٩٨} \times \sqrt{٢} = \sqrt{٢ \times ٤٩} \times \sqrt{٢} = ٧ \times \sqrt{٢}$

١) صنّف الأعداد الآتية إلى نسبية وغير نسبية:

أ) $1\frac{3}{8}$ ب) $\sqrt{11}$ جـ) ٣٥,٧

د) $-\sqrt{0,001}$ هـ) $56,102030\ldots$ و) -1968

ز) $\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{10}}$ ح) $\frac{\sqrt{125}}{5}$

٢) أيُّ العباراتِ الآتية صحيحةٌ وأيُّها خاطئةٌ مع التبرير:

أ) كلُّ عددٍ صحيحٍ موجبٍ هوَ عددٌ طبيعيٌّ.

ب) الأعدادُ الحقيقيةُ هيَ الأعدادُ غيرُ النسبيةِ.

جـ) الكسرُ العشريُّ الدوريُّ هوَ عددٌ نسبيٌّ.

د) العددُ $\sqrt{121}$ هوَ عددٌ غيرُ نسبيٍّ.

هـ) النظيرُ الضربيُّ للعددِ $\sqrt{5}$ هو $\frac{-1}{\sqrt{5}}$

٣) جدْ قيمةَ س في كلٍّ مما يأتي:

أ) $\sqrt{7} + -11 = -11 + س$ ب) $\frac{-\sqrt{13}}{5} + س = 0$

جـ) $\frac{1}{\sqrt{6}} \times س = 1$

٤) خزانتانِ في كلٍّ منهُما ٤ رفوفٍ، وفي كلِّ رفٍّ ١٢ كتابًا، ما عددُ الكتبِ في الخزانتينِ؟

٥) اكتبْ كلًّا مما يأتي كقوةٍ واحدةٍ:

أ) $س \div س^{٤}$ ب) $(ع^{٣} \times ع^{٣})^{٢}$

جـ) $(\frac{١}{٩})^{٢} \times (-٩)^{٢}$ د) $ص^{١٣} \div ص^{١٥}$

هـ) $(د^{٣})^{٠}$ و) $(\frac{ف^{٦}}{ق^{٦}})^{١}$

٦) اكتبْ كلًّا مما يأتي بالصيغةِ العلميةِ:

أ) ٧٨٩ ب) $-٠,٠٠٠٨٩$ جـ) $\frac{٧}{٥٠}$

٧) اكتبْ $١,٠٢ \times ١٠^{٤}$ بالصيغةِ القياسيةِ.

٨) جدْ قيمةَ كلٍّ مما يأتي:

أ) $\sqrt{٣}^{٤}$ ب) $\sqrt{-٣٤٣}$ جـ) $\sqrt{\frac{١٢١}{١٤٤}}$

د) $\sqrt{\frac{١٢٨}{١٢٥}}$ هـ) $\sqrt{-١٠} \times \sqrt{٠,٠٠٠١}$

و) $٧\sqrt{٥٤} + \sqrt{٣٠٠} - ٥\sqrt{٤٨} - \sqrt{٢٤}$

٩) حلَّ المعادلاتِ الآتيةَ:

أ) $١٢٥ = ٥^{-س}$ ب) $(\frac{٢}{٣})^{-ص} = \frac{٢٧}{٨}$

جـ) $(٨١)^{-ع} = ٣^{٣}$ د) $١٠^{-ن} \times ١٠٠ = ١٠^{١١}$

هـ) $س^{٦} + ١ = ٦٥$ و) $س^{-٣} = \frac{٢}{٦٨٦}$

اختبارٌ ذاتيٌّ

١) اكتبْ مثالًا على عددٍ نسبيٍّ وآخرَ على عددٍ غيرِ نسبيٍّ.

٢) وضّحْ بماذا تختلفُ مجموعةُ الأعدادِ غيرِ النسبيةِ عنْ مجموعةِ الأعدادِ النسبيةِ.

٣) وظّفْ خاصيةَ التوزيعِ لإيجادِ ناتجِ: ٥٤ × ١٠٠١

٤) ادّعى سامرٌ وهوَ طالبٌ في الصفِّ الثامنِ، أنّ لديهِ القدرةَ على إجراءِ عملياتِ الضربِ بسرعةٍ أكبرَ من زملائِهِ، فقالَ:

(إنّ حاصلَ ضربِ ٥ × ٢١١ = ٥٥ + ١٠٠٠)

ناقشْ ادعاءَ سامرٍ معَ زملائِكَ.

٥) اكتبْ كلًّا مما يأتي كقوّةٍ واحدةٍ:

أ) $ع^{٣} \times ع^{٤}$ ب) $\frac{س^{٥}}{س^{٦}}$ جـ) $(\frac{ف^{٣}}{ف^{٢}})^{٥}$

٦) اكتبْ ٠,٠٠٠٠٠٨٩٧٦ بالصيغةِ العلميةِ.

٧) اكتبْ $٨,٠٠٩ \times ١٠^{٣}$ بالصيغةِ القياسيةِ.

٨) جدْ قيمةَ كلٍّ مما يأتي:

أ) $(\sqrt{٧})^{٢}$ ب) $\sqrt{\frac{٤٩}{١٩٦}}$ جـ) $\sqrt{\frac{٣٢}{٤}}$

د) $\sqrt{٠,٠٥٤}$ هـ) $\sqrt{-٢٠} \times \sqrt{٠,٠٠٠٤}$

و) $-٧\sqrt{٣٢} - \sqrt{٥٠٠} - ٥\sqrt{٤٥} + \sqrt{٨}$

٩) حُلّ المعادلاتِ الآتيةَ:

أ) $س^{٤} = ٨١$ ب) $(٦٤)^{ص} = ٤^{١١}$ جـ) $٧^{ص} \times ٤٩ = ٧^{١٠}$

٢ الوحدةُ الثانيةُ

الجبرُ

تصادفُنا في حياتِنا العديدُ من التطبيقاتِ التي تسيرُ وفقَ نَسَقٍ (نمطٍ) معينٍ؛ لذا، تعدُّ الأنماطُ منَ الموضوعاتِ المهمّةِ في الرياضياتِ، التي نستطيعُ من خلالِها اكتشافَ العلاقاتِ بينَ المتغيراتِ، وفهمَها، وتفسيرَها.

وفي هذهِ الوحدةِ نناقشُ العديدَ منَ الأنماطِ، ونعبرُ عنها باستخدامِ المقاديرِ الجبريةِ. وهذا يجعلُنا بحاجةٍ إلى تعلُّمِ بعضِ المهاراتِ الأساسيةِ والمهمّةِ في علمِ الجبرِ، مثلَ ضربِ المقاديرِ الجبريةِ وتحليلِها.

يتوقعُ منَ الطالبِ في نهايةِ هذهِ الوحدةِ أن يكونَ قادرًا على:

- كتابةِ قاعدةِ النمطِ وإيجادِ الحدِّ المجهولِ فيهِ.
- تحويلِ التعابيرِ العدديةِ إلى مقاديرَ جبريةٍ، والعكسِ.
- إيجادِ ناتجِ ضربِ مقدارينِ جبريينِ.
- حلِّ مسائلَ حياتيةٍ على ضربِ المقاديرِ الجبريةِ.
- تحليلِ مقدارٍ جبريٍّ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ، أوْ بتجميعِ الحدودِ.
- حلِّ مسائلَ حياتيةٍ على تحليلِ المقاديرِ الجبريةِ.

الدرسُ الأولُ: الأنماطُ

النتاجاتُ

- تستقصي قاعدةَ النمطِ وتجدُ الحدَّ الناقصَ فيهِ.

يحتاجُ قيسٌ إلى ٦ أعوادٍ خشبيةٍ لتكوينِ شكلٍ سداسيٍّ شبيهٍ بخليةِ النحلِ، ويحتاجُ إلى ١١ عودًا لتكوينِ شكلينِ متلاصقينِ، وَ ١٦ عودًا لتكوينِ ثلاثةِ أشكالٍ متلاصقةٍ وعلى استقامةٍ.

١) كم عودًا يحتاجُ قيسٌ لتكوينِ كلٍّ منْ:

أ) خمسةِ أشكالٍ متلاصقةٍ وعلى استقامةٍ.

ب) سبعةِ أشكالٍ متلاصقةٍ وعلى استقامةٍ.

جـ) ن منَ الأشكالِ المتلاصقةِ وعلى استقامةٍ.

٢) كمْ عددُ الأشكالِ المتلاصقةِ التي يمكنُ تكوينُها منْ ٤٦ عودًا؟

هلْ تعلمُ أنَّ :

الشكلَ السداسيَّ الذي تتخذُهُ خليةُ النحلِ يعطي أعلى قدرةٍ تخزينٍ لأدنى طاقةِ عملٍ؟

لمعرفةِ عددِ الأعوادِ الخشبيةِ التي يحتاجُها قيسٌ لتكوينِ الأشكالِ، نرسمُ نموذجًا يساعدُنا في البحثِ عنْ نمطٍ.

ثمّ نكوّنُ جدولاً يوضحُ العلاقةَ بينَ عددِ الأشكالِ المتلاصقةِ وَعددِ الأعوادِ:

عددُ الأشكالِ	عددُ الأعوادِ الخشبيةِ	التبريرُ بالبحثِ عنْ نمطٍ
①	٦	١ + ① × ٥
②	١١	١ + ② × ٥
٣	١٦	
٤		
٥		
٦		
٧		
س		
؟	٤٦	

بعدَ إكمالِ الجدولِ أعلاهُ، أجبْ عما يأتي:

١) عددُ الأعوادِ التي يحتاجُ إليها قيسٌ لتكوينِ خمسةِ أشكالٍ متلاصقةٍ وعلى استقامةٍ هوَ:.....

٢) عددُ الأعوادِ التي يحتاجُ إليها لتكوينِ سبعةِ أشكالٍ هوَ:.....

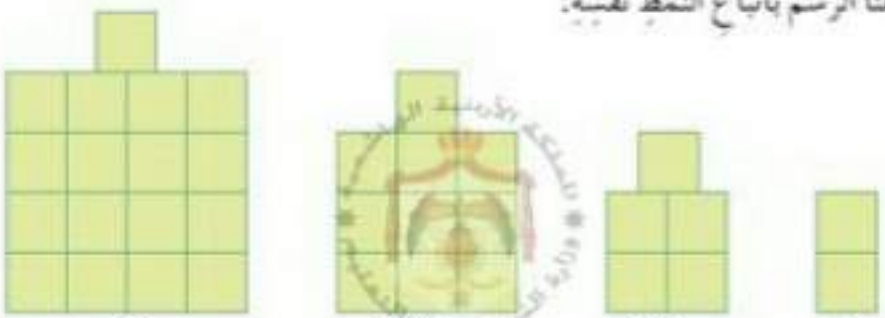
٣) عددُ الأعوادِ التي يحتاجُ إليها لتكوينِ س منَ الأشكالِ هوَ:.....، وَتسمّى هذهِ العبارةُ الجبريّةُ قاعدةَ النمطِ.

فكّرْ وناقشْ

في المسألةِ السابقةِ؛ هلْ يوجدُ قاعدةٌ أخرى للنمطِ؟ اكتبْها إنْ وُجِدَتْ.

تدريبٌ ١

اكتشفْ قاعدةَ النمطِ الآتي، ثمَّ جدْ عددَ المربعاتِ في الشَّكلينِ الخامسِ والسَّادسِ؛ إنْ أكملْنا الرسمَ باتباعِ النمطِ نفسِهِ:



تدريبٌ ٢

تتبعتْ براءةُ النمطَ الآتي:

وأكملتِ الشكلينِ الخامسَ والسادسَ كما يأتي:

ما رأيكَ بحلِّ براءةَ؟ مبررًا إجابتَكَ.

مثالٌ (١)

أكملِ النمطَ الآتي إلى العددِ السادسِ، ثمّ اكتبْ قاعدَتَهُ:

٢ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٠ ، ..... ، .....

الحلُّ

٤+ ٦+ ٨+

لاحظِ العلاقةَ بينَ كلِّ حدٍّ والتالي لهُ ٢ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٠ ، ..... ، .....

وبذلكَ يكونُ العددانِ الخامسُ والسادسُ على التوالي هُما ..... ، ..... .

ولمعرفةِ قاعدةِ النمطِ نُكوّنُ الجدولَ الآتي :

ترتيبُ العددِ	العددُ في النمطِ	التبريرُ بكتابةِ نمطٍ
١	٢	١ × ٢ حاصلُ ضربِ الترتيبِ ١ في ٢ يعطي العددَ ٢
٢	٦	٢ × ٣ حاصلُ ضربِ الترتيبِ ٢ في ٣ يعطي العددَ ٦
٣	١٢	٣ × ٤
٤	٢٠	.....
٥	.....	٥ × ٦
٦	.....	.....
س	.....	.....

ومنهُ قاعدةُ النمطِ هيَ .....

تدريب ٣

١) اكتشفْ قاعدةَ كلِّ نمطٍ مما يأتي، ثمّ اكتبِ الحدَّ الناقصَ:

أ) ١ ، ٨ ، ٢٧ ، ٦٤ ، ١٢٥ ، .....

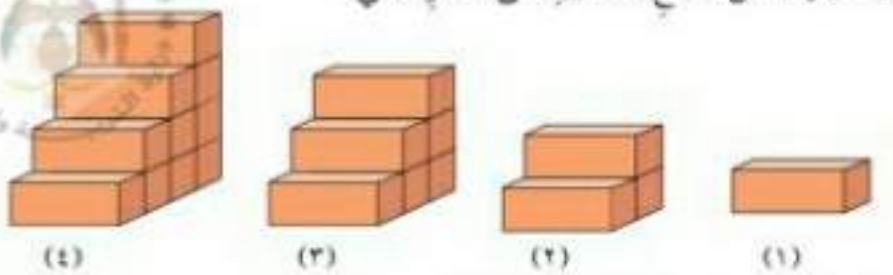
ب) ٣ ، ٧ ، ١١ ، ١٥ ، ١٩ ، ٢٣ ، .....

جـ) $\frac{٥}{٢}$ ، ٥ ، $\frac{١٥}{٢}$ ، ١٠ ، $\frac{٢٥}{٢}$ ، .....

٢) اكتبْ نمطًا يعبّرُ عنِ القاعدةِ ٢ك − ١ ، ثمّ قارنْ إجابتَكَ معَ إجاباتِ زملائِكَ.

فكّرْ وناقشْ

رتّبتْ بارا بعضَ القطعِ الخشبيةِ على النحوِ الآتي:



إذا استمرّتْ بترتيبِ القطعِ على النمطِ نفسِه، فجدْ:

١) عددَ القطعِ اللّازمةِ لتكوينِ الشكلِ السادسِ.

٢) اكتبْ قاعدةَ النمطِ التي تعبّرُ عنْ عددِ القطعِ في الشكلِ س .

نشاطٌ

كوّنْ نمطًا باستخدامِ أشياءَ مادّيّةٍ (محسوساتٍ) منْ بيتِكَ، ثمّ اكتبْ قاعدتَهُ.

مثالٌ (٢)

اشترى سعدٌ سيارةً بمبلغِ ١٢٠٠٠ دينارٍ، ودفعَ منْ ثمنِها ٥٠٠٠ دينارٍ دُفعةً أولى على أنْ يدفعَ الباقيَ على أقساطٍ شهريةٍ، إذا كانتْ قيمةُ القسطِ الشهريِّ ١٤٠ دينارًا، فأجبْ عمّا يأتي:

١) ما مجموعُ ما يدفعُهُ منْ ثمنِ السيارةِ بعدَ خمسةِ أشهرٍ؟

٢) اكتبْ قاعدةَ النمطِ التي تعبرُ عنْ مجموعِ ما يدفعُ منْ ثمنِ السيارةِ بعدَ عددٍ منَ الأشهرِ.

٣) ما مجموعُ ما يدفعُهُ بعدَ سنتينِ؟

٤) ما عددُ الأشهرِ التي يحتاجُها لتسديدِ ثمنِ السيارةِ إذْ التزمَ بدفعِ الأقساطِ الشهريةِ؟

الحلُّ

لمعرفةِ المبلغِ الذي سيدفعُهُ من ثمنِ السيارةِ بعدَ خمسةِ أشهرٍ، نبحثُ عنْ نمطٍ وذلكَ بإكمالِ الجدولِ الآتي:

الشهرُ	المبلغُ الذي سدّدَهُ من ثمنِ السيارةِ (ص)	التبريرُ
١	ص = ٥٠٠٠ + ١٤٠	مجموعُ الدفعةِ الأولى مع قسطِ شهرٍ
٢	ص = ٥٠٠٠ + (٢×١٤٠)	مجموعُ الدفعةِ الأولى مع قسطِ شهرينِ
٣	.....	.....
٤	.....	.....
٥	.....	.....
س	.....	.....
.....	١٢٠٠٠ = ٥٠٠٠ + ...	.....

١) مجموعُ ما يدفعُهُ من ثمنِ السيارةِ بعدَ خمسةِ أشهرٍ هوَ .....

٢) قاعدةُ النمطِ التي تعبّرُ عنْ مجموعِ ما يُدفَعُ من ثمنِ السيارةِ بعدَ عددٍ منَ الأشهرِ هيَ .....

٣) مجموعُ ما يدفعُهُ بعدَ سنتينِ هوَ مجموعُ ما يدفعُهُ بعدَ ٢٤ شهرًا؛ لهذا نعوضُ في القاعدةِ: ص = ٥٠٠٠ + ... ، ومنه ص = ...

٤) عددُ الأشهرِ التي يحتاجُها لتسديدِ ثمنِ السيارةِ:

١٢٠٠٠ = ٥٠٠٠ + ١٤٠ س — نعوضُ ص بالعددِ ١٢٠٠٠ لنحلَّ المعادلةَ

ومنهُ س = ...

تدريبٌ ٤

البكتيريا كائناتٌ حيّةٌ وحيدةُ الخليةِ، إذا علمتَ أنّ أحدَ أنواعِها يتكاثرُ بانقسامِ الخليةِ إلى أربعِ خلايا في الثانيةِ الواحدةِ، جدْ:

١) عددَ الخلايا الناتجةِ عنِ الانقسامِ بعدَ مرورِ ثانيتينِ، ثلاثِ ثوانٍ، أربعِ ثوانٍ.

(إرشادٌ: يمكنكَ رسمُ نموذجٍ يوضحُ نواتجَ عمليّاتِ الانقسامِ خلالَ الثواني المطلوبةِ).

٢) اكتبْ قاعدةَ النمطِ التي تُعبّرُ عنْ عددِ الخلايا الناتجةِ عنِ الانقسامِ بعدَ عددٍ من الثواني. (إرشادٌ: يمكنكَ رسمُ جدولٍ).

٣) ما عددُ الخلايا الناتجةِ عنِ الانقسامِ بعدَ دقيقةٍ؟

فكّرْ وناقشْ

في تدريبِ (٤)، ما الزمنُ الذي تستغرقُهُ الخليةُ الواحدةُ ليصبحَ عددُ الخلايا الناتجةِ عنِ الانقسامِ ٤٠٩٦ خليةً؟

١) * رُتِّبَتْ أعوادُ ثقابٍ في الشكلِ الآتي، وفق نمطٍ معينٍ، اكتبْ قاعدةَ النمطِ.

(١) (٢) (٣)

٢) اكتبْ قاعدةَ النمطِ في كلٍّ مما يأتي:

أ) ٠، ٩، ١٨، ٢٧، ٣٦، ...

ب) ٠، ٧، ٢٦، ٦٣، ١٢٤، ...

٣) عددُ صفحاتِ إحدى القصصِ ٢١٧ صفحةً، قرأتْ جنى في اليومِ الأولِ ٩ صفحاتٍ، ثمَّ قررتْ قراءةَ ٨ صفحاتٍ يوميًّا. إذا استمرتْ جنى على هذا النمطِ في القراءةِ، أجبْ عنْ كلٍّ مما يأتي:

أ) ما قاعدةُ النمطِ التي تُعبِّرُ عنْ ص منَ الصفحاتِ التي تُنهي جنى قراءتَها بعدَ س منَ الأيامِ؟

ب) كمْ يومًا يلزمُها لتُنهيَ قراءةَ الروايةَ؟

٤) مسابقةٌ فنيةٌ اشتركَ فيها ١٢٨ متسابقًا، وبعدَ نهايةِ كلِّ جولةٍ منَ المسابقةِ يتمُّ الإبقاءُ على $\frac{1}{2}$ عددِ المشاركينَ:

أ) ما عددُ المشاركينَ في الجولتينِ الثالثةِ، والخامسةِ؟

ب) اكتبْ قاعدةَ النمطِ.

جـ) بعدَ كمْ جولةٍ تنتهي المسابقةُ؟

* السؤالُ منْ أسئلةِ الاختباراتِ الدوليةِ.

٥) تتبّعِ النمطَ ثمّ أكملِ الفراغاتِ بالأعدادِ المناسبةِ:

$١٥٨٧٣ \times ٧ = ١١١١١١$

$١٥٨٧٣ \times ١٤ = ٢٢٢٢٢٢$

$١٥٨٧٣ \times ٢١ = ٣٣٣٣٣٣$

$١٥٨٧٣ \times ٢٨ = ٤٤٤٤٤٤$

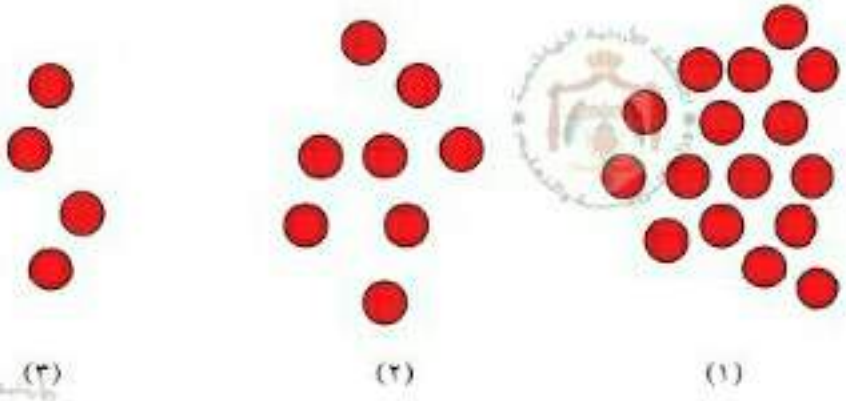
$١٥٨٧٣ \times \ldots = ٥٥٥٥٥٥$

$١٥٨٧٣ \times ٤٢ = \ldots\ldots\ldots$

$\vdots$

$١٥٨٧٣ \times \ldots = \ldots \times ٩$

٦) اكتبِ الأعدادَ الثمانيةَ الأولى التي تُعبّرُ عنِ النمطِ الآتي، ثمّ أجبْ عمّا يليهِ:



(١) (٢) (٣)

أ) ما قاعدةُ النمطِ؟

ب) إذا استمرّ رسمُ الأشكالِ اعتمادًا على النمطِ نفسِهِ، هل سيتوقفُ رسمُها في مرحلةٍ ما؟ وهل سيتوقفُ النمطُ بصورتِهِ العدديّةِ؟ برّرْ إجابتَكَ.

الدرس التالي

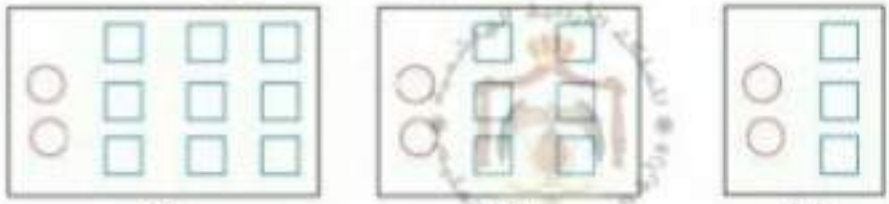
المقاديرُ الجبريةُ

النتاجاتُ

- تحولُ العباراتِ اللفظيةِ إلى مقاديرَ جبريةٍ، والعكسَ.

نشاطٌ

رتّبَ زيدٌ مجموعةً منَ المربعاتِ والدوائرِ متّبعًا النمطَ الآتيَ:



١) كمْ عددُ المربعاتِ والدوائرِ في الشكلينِ الخامسِ والثامنِ في هذا النمطِ؟

٢) اكتبْ قاعدةَ النمطِ الذي كوّنَهُ زيدٌ.

توصلتَ منْ خلالِ دراستِكَ للأنماطِ في الدرسِ السابقِ إلى أنَّ زيدًا يُرتّبُ المربعاتِ والدوائرَ وفقَ القاعدةِ (٣س + ٢)، وتعلّمْتَ سابقًا أنَّ (٣س + ٢) يُسمى مقدارًا جبريًا ذا حدّين: حيثُ الحدُّ الأولُ هوَ ٣س معاملُهُ ٣ وقسمهُ الرمزيُّ س، والحدُّ الثاني هوَ العددُ الثابتُ ٢.

فائدةٌ

الجبرُ: أحدُ فروعِ الرياضياتِ الذي يتعاملُ مع عباراتٍ تحتوي متغيراتٍ. وأوّلُ منْ جاءَ بهِ ووضعَ أساساتِهِ هوَ العالمُ المسلمُ محمدُ بنُ موسى الخوارزميُّ في كتابِهِ (الجبرُ والمقابلةُ).

تذكّرْ

- الحدُّ الجبريُّ إما أنْ يكونَ ثابتًا أوْ أنْ يكونَ متغيرًا أوْ حاصلَ ضربِ عددٍ ثابتٍ بمتغيرٍ أوْ بأكثرَ من متغيرٍ، يُسمى العددُ الثابتُ معاملَ الحدِّ الجبريِّ والمتغيراتُ بأسسها القسمَ الرمزيَّ.
- المقدارُ الجبريُّ يمكنُ أنْ يتكونَ منْ حدٍّ جبريٍّ أوْ أكثرَ يربطُها عملياتُ جمعٍ أو طرحٍ؛ مثلَ (١٠ص)، (٥س + ٤ل)، (٢ع − ٨س + ١١م + ٩).

مثالٌ (١)

اشترى أبو خالدٍ لأولادِهِ في بدايةِ العامِ الدراسيِّ ١٨ دفترًا منَ النوعِ نفسِهِ، و٣٠ قلمَ حبرٍ منَ النوعِ نفسِهِ .

١) اكتبِ المقدارَ الجبريَّ الذي يعبرُ عنِ المبلغِ الذي دفعَهُ أبو خالدٍ ثمنًا للدفاترِ والأقلامِ.

٢) احسبْ مقدارَ ما يدفعُهُ أبو خالدٍ إذا كانَ ثمنُ الدفترِ ٢٠ قرشًا، وثمنُ القلمِ ١٥ قرشًا.

الحلُّ

نفرضُ أنَّ ثمنَ الدفترِ الواحدِ = س، فيكونُ ثمنُ ١٨ دفترًا هوَ ١٨ س .

ونفرضُ أنَّ ثمنَ القلمِ الواحدِ = ص، فيكونُ ثمنُ ٣٠ قلمًا هوَ ٣٠ص.

١) المقدارُ الجبريُّ الذي يعبرُ عنِ المبلغِ الذي دفعَهُ أبو خالدٍ ثمنًا للدفاترِ والأقلامِ هوَ

(..... + ...).

٢) المبلغُ الذي يدفعُهُ = ١٨ × ٢٠ + ... تعويضُ قيمِ س = ٢٠ ، ص = ١٥

= ..... + ٤٥٠ إجراءُ الضربِ أولاً

= ..... قرشًا.

تذكّرْ

لحسابِ القيمةِ العدديةِ لمقدارٍ جبريٍّ؛ تُستبدَلُ المتغيراتُ بالقيمةِ العدديةِ المعطاةِ لكلٍّ منها، ثمّ تُجرى العملياتُ الحسابيةُ مع مراعاةِ الأولوياتِ.

مثالٌ (٢)

يعملُ عمرُ موظفَ مبيعاتٍ لدى شركةٍ للأجهزةِ الإلكترونيةِ، ويتقاضى راتبَ ٣٠٠ دينارٍ شهريًا، بالإضافةِ إلى عمولةٍ مقدارُها ٢٠ دينارًا عنْ كلِّ جهازٍ يبيعُهُ.

١) اكتبِ المقدارَ الجبريَّ الذي يعبرُ عنْ دخلِ عمرَ الشهريِّ .

٢) كمْ دينارًا يصبحُ دخلُ عمرَ الشهريُّ؛ إذا باعَ أربعةَ أجهزةٍ، سبعةَ أجهزةٍ؟

الحلُّ

١) نفرضُ أنَّ عددَ الأجهزةِ التي باعها عمرُ = س .

المقدارُ الجبريُّ الذي يعبرُ عنْ دخلِ عمرَ الشهريِّ ٣٠٠ + ٢٠س. لماذا؟

ويمكنُ كتابتُهُ على الصورةِ ٢٠س + ٣٠٠. لماذا؟

٢) دخلُ عمرَ الشهريُّ إذا باعَ أربعةَ أجهزةٍ = ٣٠٠ + ٢٠ × ٤ الضربُ أولاً

= ..... + ... = ٣٨٠ دينارًا .

أما دخلُهُ إذا باعَ سبعةَ أجهزةٍ = ... = ... دينارًا.

فكّرْ وناقشْ

اعتمادًا على مثالِ (٢):

إذا أرادَ عمرُ أنْ يتقاضى دخلاً قيمتُهُ ٥٠٠ دينارٍ في شهرٍ ما، فكمْ عددُ الأجهزةِ التي عليهِ أنْ يبيعَها في ذلكَ الشهرِ؟ مبررًا إجابتَكَ.

تدريب ١

يبلغُ سعرُ سيارةٍ ١٢٠٠٠ دينارٍ، ينقصُ سعرُها بنسبةِ ٣٪ سنويًّا منْ سعرِها الأصليِّ.

١) اكتبِ المقدارَ الجبريَّ الذي يعبّرُ عنْ سعرِ السيارةِ ع بعدَ مرورِ ك منَ السنواتِ.

٢) كمْ يصبحُ سعرُها بعدَ مرورِ سنتينِ، ثلاثِ سنواتٍ، خمسِ سنواتٍ؟

مثالٌ (٣)

الشكلُ المجاورُ يتكونُ من شكلٍ دائريٍّ نصفُ قطرِه نق، وشكلٍ مستطيلٍ طولُهُ ٩سم. اكتبِ المقدارَ الجبريَّ الذي يعبّرُ عنْ كلٍّ منْ:

١) محيطِ الشكلِ.

٢) مساحةِ الشكلِ.

الحلُّ

١) محيطُ الدائرةِ ٢πنق، ومحيطُ المستطيلِ ٤نق + ١٨. فكّرْ هذهِ المقاديرُ.

ومنْهُ محيطُ الشكلِ = ٢πنق + ٤نق + ١٨

٢) مساحةُ الدائرةِ πنق٢، ومساحةُ المستطيلِ ٩ × ٢نق لماذا؟

إذنْ مساحةُ الشكلِ = πنق٢ + ١٨نق .

فكّرْ وناقشْ

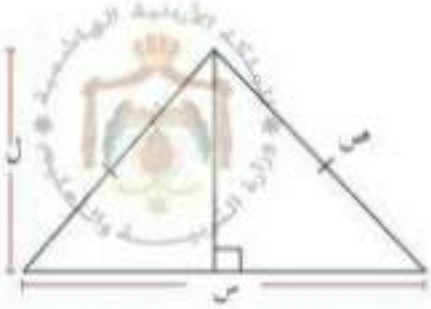
ادّعتْ سلمى أنَّ:

٢ ٤نق مقدارٌ جبريٌّ يتكونُ من حدٍّ واحدٍ، معاملُهُ ٢ وقسمهُ الرمزيُّ ٤نق.

ناقشْ ادّعاءَها مبرّرًا إجابتَكَ.

تدريب ٢

مثلثٌ متطـابقُ الضلعينِ، قاعدتُهُ س، ارتفاعُهُ ل، وطـولُ ضلعِهِ ص. كما في الشكلِ المجاورِ. اكتبِ التعبيرَ الجبريَّ الذي يعبرُ عنْ:



١) محيطِ المثلثِ.

٢) مساحةِ المثلثِ.

فكّرْ وناقشْ

(مع رُبا مبلغٌ منَ المالِ. تبرّعتْ بمبلغِ خمسةِ دَنانيرَ).

ترجمَ كلٌّ منْ أحمدَ وعليٍّ العبارةَ اللفظيةَ السابقةَ كما يأتي:

أحمدُ: س ـ ٥

عليٌّ : ص ـ ٥

ناقشْ مدى صحةِ حلِّ كلٍّ منها.

١) حوّل العباراتِ اللفظيةَ الآتيةَ إلى تعابيرَ جبريةٍ:

أ) ثلاثةُ أمثالِ عددٍ ما، مضافاً إليهِ خمسةُ أمثالِ عددٍ آخرَ.

ب) قُسِّمَ عددٌ طبيعيٌّ على العددِ ٧ ثمَّ أُضيفَ إليهِ ٤.

جـ) ناتجُ طرحِ ٦س منْ ٤ أمثالِ ك مضافًا إليهِ ١.

د) صرفتْ هدى ١٥ دينارًا منْ مبلغٍ كانتْ قد ادخرتْهُ سابقًا.

هـ) المبلغُ الذي دفعَهُ وليدٌ عندَ شرائِهِ ٧ كغ منَ البندورةِ، و٣كغ منَ البطاطا، و٥كغ من البصلِ.

٢) إذا كانتْ سكرتيرةٌ تطبعُ ٥٥ كلمةً في الدقيقةِ، فأجبْ عنْ كلٍّ مما يأتي:

أ) اكتبِ المقدارَ الجبريَّ الذي يعبرُ عنْ عددِ الكلماتِ التي تطبعُها في ن دقيقةً.

ب) جدْ عددَ الكلماتِ التي تطبعُها في ٢٠ دقيقةً.

٣) حديقةُ منزلٍ مستطيلةُ الشكلِ طولُها يساوي ثلاثةَ أمثالِ عرضِها، يُرادُ إحاطتُها بسياجٍ، إذا علمتَ أنَّ تكلفةَ المترِ الطوليِّ الواحدِ ٧ دنانيرَ.

أ) اكتبِ المقدارَ الجبريَّ الذي يعبرُ عنْ تكلفةِ السياجِ الذي يحيطُ بالحديقةِ.

ب) احسبْ تكلفةَ السياجِ الذي يحيطُ بالحديقةِ إذا علمتَ أنَّ عرضَ الحديقةِ ٣٠ مترًا.

٤) عبّرْ أسماءُ عنِ العبارةِ (ناتجُ طرحِ ٥ أمثالِ عددٍ منْ ٩٣) بالمقدارِ الجبريِّ التالي:

٥س – ٩٣. هلْ توافقُها على ذلكَ؟ برّرْ إجابتَكَ.

٥) مشفىً به بئرٌ مملوءةٌ بالماءِ سعتُها ٤٠٠ م٣، إذا كانَ معدلُ الاستهلاكِ اليوميّ ٦٠ م٣، فأجبْ عن كلٍّ مما يأتي:

أ) ما كميةُ الماءِ المتبقيةُ في البئرِ بعدَ مرورِ يومٍ واحدٍ؟

ب) ما كميةُ الماءِ المتبقيةُ في البئرِ بعدَ مرورِ ١٢ ساعةً؟

جـ) بعد كمْ يومٍ تنفدُ كميةُ الماءِ في البئرِ، إذا استمرّ استهلاكُ الماءِ بهذا المعدلِ؟

٦) اكتبْ مسألةً لفظيةً تعبرُ عنِ المقدارِ الجبريّ ٢ ع − ٣.

٧) يُؤجرُ رجلٌ منزلَهُ بأجرةٍ سنويةٍ، قدّرتْ دائرةُ الضرائبِ الأجرةَ السنويةَ بقيمةٍ ما، والتي تُسمى القيمةَ التخمينيةَ للإيجارِ، ثمّ فرضتْ مجموعةَ ضرائبَ أخرى بنسبٍ محددةٍ منَ القيمةِ التخمينيةِ كما هوَ موضحٌ في الجدولِ الآتي:

الضريبةُ	نسبةُ الضريبةِ منَ القيمةِ التخمينيةِ للإيجارِ	قيمةُ الضريبةِ (بالدينارِ)
المعارفُ	٢٪	٥٠
المُسقفاتُ	١٠٪	
الصرفُ الصحيُّ	٣٪	

اعتمادًا على الجدولِ، أجبْ عنْ كلٍّ مما يأتي:

أ) ما القيمةُ التخمينيةُ لأجرةِ المنزلِ؟

ب) أكملِ الجدولَ.

٨) * يملكُ أحمدُ مِثْلَيْ ما يملكُهُ سعيدٌ منَ الكتبِ، ويملكُ خليلٌ ٦ كتبٍ زيادةً عما يملكُهُ سعيدٌ. إذا كانتْ س تمثلُ الكتبَ التي يملكُها سعيدٌ، اكتبِ المقدارَ الجبريّ الذي يمثلُ مجموعَ الكتبِ التي يملكُها الأولادُ الثلاثةُ.

* السؤالُ منْ أسئلةِ الاختباراتِ الدوليةِ.

الدرسُ الثالثُ: ضربُ حدٍّ جبريٍّ في مقدارٍ جبريٍّ

النتاجات

- نجدُ ناتجَ ضربِ حدّين جبريين.
- نجدُ ناتجَ ضربِ حدٍّ جبريٍّ في مقدارٍ جبريٍّ.
- نحلُّ مسائلَ على ضربِ حدٍّ جبريٍّ في مقدارٍ جبريٍّ.

زارتْ عائلةٌ مكونةٌ من خمسةِ أفرادٍ مدينةَ الملاهي، إذا كانَ رسمُ الدخولِ ديناريْنِ عنْ كلِّ شخصٍ بالإضافةِ إلى ٠,٥ دينارٍ، ثمنَ كلِّ لعبةٍ يلعبُها الشخصُ. فما المبلغُ الذي دفعتْهُ الأسرةُ كاملةً، علمًا أنَّ عددَ الألعابِ التي لعبَها كلُّ أفرادِها متساوٍ؟

١) اكتبِ المبلغَ الذي يدفعُهُ الشخصُ الواحدُ.

٢) اكتبِ المبلغَ الذي تدفعُهُ الأسرةُ بأبسطِ صورةٍ.

أولاً: ضربُ حدٍّ جبريٍّ في حدٍّ آخرَ

معتمدًا الشكلَ المجاورَ الذي يمثلُ مربعًا طولُ ضلعِهِ ٢س يمكنُ حسابُ محيطِ المربعِ الموضحِ جانبًا عنْ طريقِ إيجادِ ناتجِ جمعِ أضلاعِهِ الأربعةِ.

٢س + ٢س + ٢س + ٢س = ٨س وحدةَ طولٍ.

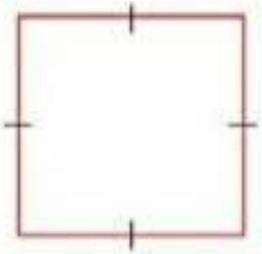
ويمكنُ حسابُهُ باستخدامِ قانونِ حسابِ محيطِ المربعِ:

محيطُ المربعِ = ٤ × طولِ الضلعِ

= ٤ × ٢س = ٨س

تذكّرْ

عند إيجادِ ناتجِ جمعِ مقاديرَ جبريةٍ أو طرحِها فإنكَ تنظرُ إلى الحدودِ الجبريةِ المتشابهةِ (التي لها القسمُ الرمزيُّ نفسُهُ)، وتقومُ بجمعِ معاملاتِ هذهِ الحدودِ وطرحِها مبقيًا على القسمِ الرمزيِّ كما هوَ، أما الحدودُ الجبريةُ غيرُ المتشابهةِ (التي تختلفُ بالقسمِ الرمزيِّ) فتبقى كما هيَ.



مساحةُ المربعِ = (طولُ الضلعِ)^{٢}

= (٢س)^{٢} = (٢)^{٢} × (س)^{٢}

= ٤س^{٢} وحدةَ مساحةٍ.

أو مساحةُ المربعِ = (٢س)^{٢} = ٢س × ٢س

= (٢ × ٢) × (س × س) = ٤س^{٢} وحدةَ مساحةٍ.

تعلّمْ

لإيجادِ حاصلِ ضربِ حدٍّ جبريٍّ في حدٍّ جبريٍّ آخرَ، يتمُّ ضربُ معاملِ الحدِّ الأولِ بمعاملِ الحدِّ الثاني، والقسمِ الرمزيِّ للحدِّ الأولِ بالقسمِ الرمزيِّ للحدِّ الثاني معَ مراعاةِ قوانينِ الأسسِ.

اكتبْ طريقةَ إيجادِ حاصلِ ضربِ حدٍّ جبريٍّ في حدٍّ جبريٍّ آخرَ.

مثالٌ (١)

جدْ ناتجَ الضربِ في كلٍّ مما يأتي:

١) ٣ × ٤ص

٢) −٧ل^{٢} × ٥ل

٣) ٣ن × ٢ن^{٢}م^{٢} × −٤م^{٥}

الحلُّ

١) ٣ × ٤ص = ١٢ص.

٢) −٧ل^{٢} × ٥ل = −٧ × ٥ × ل^{٢} × ل

= −٣٥ ل^{١} .

٣) ٣ن × ٢ن^{٢}م^{٢} × −٤م^{٢} = −٢٤ ن^{٣}م^{٢}.

(٣×٤−١٢)

إعادة الترتيب لإظهار الحدود المتشابهة

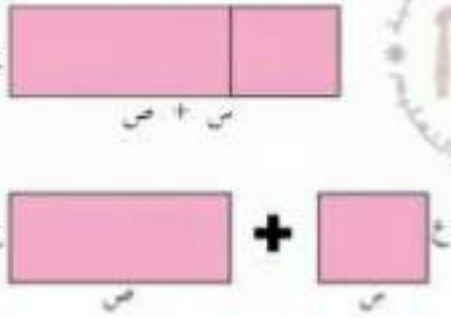
ل^{٢} × ل = ل^{١} قوانين الأسس

تدريبٌ ١

جدْ ناتجَ: −٤ أ^{٢} ب^{٢} × −٩ أ^{٢} ب^{٢} ص .

ثانيًا: ضربُ حدٍّ جبريٍّ في مقدارٍ جبريٍّ:

١) إنَّ المقدارَ الجبريَّ ع × (س + ص) يمثِّلُ مساحةَ المستطيلِ المجاورِ، نلاحظُ أنَّهُ يمكنُ تجزئةُ الشكلِ إلى المستطيلينِ كما يوضحُ الشكلُ المجاورُ.



٢) نلاحظُ أنَّ:

ع × (س + ص) = (ع × س) + (ع × ص).

وتُسمّى خاصيةَ توزيعِ الضربِ على الجمعِ في المقاديرِ الجبريةِ.

نلاحظُ أنَّ (س + ص) × ع = (س × ع) + (ص × ع).

تعلَّمْ

لإيجادِ حاصلِ ضربِ حدٍّ جبريٍّ في مقدارٍ جبريٍّ، نستخدمُ خاصيةَ توزيعِ الضربِ على الجمعِ، حيثُ يتمُّ ضربُ الحدِّ الجبريِّ بجميعِ حدودِ المقدارِ الجبريِّ.

مثالٌ (٢)

جدْ ناتجَ كلٍّ مما يأتي:

١) ٤(س − ٥)

٢) −٢س(ص − ٤س^{٢})

٣) (٣هـ + ٢ل − ٤ك ل) × ٩ك^{٢}

الحلُّ

١) ٤(س − ٥) = ٤ × س + ٤ × −٥ خاصيةُ التوزيع

= ٤س − ٢٠

لاحظْ أنَّ الحدودَ الجبريةَ ٤س و ٢٠ غيرُ متشابهةٍ؛ لذلكَ الناتجُ بصورتِهِ النهائيةِ.

٢) −٢س(ص − ٤س^{٢}) = −٢س × ص + −٢س × −٤س^{٢} خاصيةُ التوزيع

= −٢س ص + ٨س^{٣}

٣) (٣هـ + ٢ل − ٤ك ل) × ٩ك^{٢}

= ..... × ٩ك^{٢} + ... × ٩ك^{٢} + ... × ٩ك^{٢}

= ٢٧هـ ك^{٢} + ١٨ ل ك^{٢} − ٣٦ ك^{٢} ل

هلِ الناتجُ بصورتِهِ النهائيةِ ؟ برِّرْ إجابتَكَ.

تدريبٌ ٢

حلُّ المسألةِ الواردةِ في بدايةِ الدرسِ.

تمارينُ ومسائلُ

١) جدْ ناتج كلّ مما يأتي:

أ) ٧ل^{٤} (٢ل^{٢} + ٥ل − ٣).

ب) صفر (٩ل ع) (١٠ن ع^{٢})

جـ) (٦ل + ٥م) × ٢م ل

د) −٦ ع^{٣} (٣ع^{٢} + ٤ع − ٥)

هـ) ٣(−٢س^{٢} ص^{٥} م)^{٤}

٢) اكتشفِ الخطأَ في ما يأتي واكتبِ الصوابَ:

٧(−٤س^{٣} ص ك^{٢}) = −٢٨ س^{٣} + ٧ص + ٧ك^{٢}

٣) قطعةُ أرضٍ مستطيلةُ الشكلِ، طولُها (٣س) متر، وعرضُها (٢ص) متر، نحتاجُ لإحاطتِها بسورٍ، إذا كانَ سعرُ المترِ الواحدِ ٩ دنانير، فاكتبِ التعبيرَ الجبريَّ الذي يعبرُ عنْ تكلفةِ السياجِ.

٤) خزانُ ماءٍ على شكلِ متوازي مستطيلاتٍ، مساحةُ قاعدتِه (٢س^{٢} + ٥س) وحدةَ مساحةٍ، وارتفاعُهُ (٢س) وحدةَ طولٍ. جد حجمَ الخزانِ بدلالةِ س.

الدرسُ الرابعُ: ضربُ مقدارٍ جبريٍّ في مقدارٍ آخرَ

النتاجات

- تجدُ ناتجَ ضربِ مقدارينِ جبريينِ.
- تحلُّ مسائلَ على ضربِ مقدارينِ جبريينِ.

حديقةُ منزلٍ مستطيلةُ الشكلِ، يريدُ صاحبُها زراعتَها بالمحاصيلِ المبيَّنةِ في الشكلِ المجاورِ.

اكتبِ المقدارَ الجبريَّ الذي يعبِّرُ عنْ كلٍّ منْ:

١) أبعادِ الحديقةِ.

٢) مساحةِ المنطقةِ المزروعةِ بكلِّ محصولٍ.

٣) مساحةِ الحديقةِ الكليةِ بطريقتينِ.

	٢	س
ع	تفاحٌ	زيتونٌ
٣	لوزٌ	ليمونٌ

تعلَّمْ

لإيجادِ حاصلِ ضربِ مقدارٍ جبريٍّ في مقدارٍ جبريٍّ آخرَ، يتمُّ ضربُ كلِّ حدٍّ منْ حدودِ المقدارِ الجبريِّ الأولِ بجميعِ حدودِ المقدارِ الثاني، وجَمْعُ النواتجِ.

وتتمُّ عمليةُ الضربِ بطرقٍ مختلفةٍ هيَ:

١) الضربُ الأفقيُّ.

٢) الضربُ العموديُّ.

٣) التوزيعُ بالترتيبِ.

مثالٌ (١)

جدْ ناتجَ (س + ٤) (٢س + ٣)

الحلُّ

باستخدامِ طريقةِ الضربِ الأفقيِّ:

$(س + ٤)(٢س + ٣) = س(٢س + ٣) + ٤(٢س + ٣)$ توزيع كلّ حدٍّ من المقدار الأول على المقدار الثاني.

$= ٢س^{٢} + ٣س + ٨س + ١٢$ خاصيةُ التوزيعِ

$= ٢س^{٢} + ١١س + ١٢$ تجميعُ الحدودِ المتشابهةِ

يمكنُ إيجادُ ناتجِ الضربِ باستخدامِ الضربِ العموديِّ كما يأتي:

$$\begin{array}{rl} & س + ٤ \\ \times & ٢س + ٣ \\ \hline & ٢س^{٢} + ٨س \quad \text{ناتج ضرب ٢س في (س+٤)} \\ & +٣س + ١٢ \quad \text{ناتج ضرب ٣ في (س+٤)، وترتيب الحدود المتشابهة تحت بعضها} \\ \hline = & ٢س^{٢} + ١١س + ١٢ \quad \text{ناتج الجمع} \end{array}$$

قارنْ بينَ الطريقتينِ الأفقيةِ والعموديةِ، أيُّ الطريقتينِ تعتبرُها الأسهلَ؟ لماذا؟

كما يمكنُ استخدامُ طريقةِ التوزيعِ بالترتيبِ؛ كما يأتي:

	ناتج ضرب الحدين الأولين	ناتج ضرب الحدين الأوسطين	ناتج ضرب الحدين الطرفين	ناتج ضرب الحدين الأخيرين
$(س + ٤)(٢س + ٣)$	$= س \times ٢س$	$+ ٨س$	$+ ٣س$	$+ ٤ \times ٣$
الحدان الأوسطان / الحدان الطرفان	$= ٢س^{٢}$	$+ ١١س$	$+ ١٢$	جمعُ الحدودِ المتشابهةِ

تحدثْ

تحدثْ عنْ كيفيةِ إيجادِ حاصلِ ضربِ مقدارٍ جبريٍّ مكوّنٍ منْ حدّينِ في مقدارٍ آخرَ مكوّنٍ منْ حدّينِ بالطريقةِ الأفقيةِ.

مثالٌ (٢)

جدْ ناتجَ (ص^{٢} − ٥) (٣ع + ص).

الحلُّ

باستخدامِ طريقةِ الضربِ الأفقيِّ

لاحظْ أنّهُ يمكنُ كتابةُ (ص^{٢} − ٥) على الشكلِ (ص^{٢} + −٥)، لماذا؟

(ص^{٢} + −٥) (٣ع + ص) = ص^{٢} (٣ع + ص) + −٥ (٣ع + ص) توزيعُ كلِّ حدٍّ منَ المقدارِ الأولِ على المقدارِ الثاني

= ٣ص^{٣}ع + ص^{٣} + −١٥ع + −٥ص خاصيةُ التوزيعِ

= ٣ص^{٣}ع + ص^{٣} −١٥ع −٥ص الحدانِ بأبسطِ صورةٍ، لماذا؟

الحلُّ باستخدامِ الضربِ العموديِّ

ص^{٢} − ٥

× ٣ع + ص

٣ص^{٣}ع − ١٥ع ناتجُ ضربِ ٣ع في (ص^{٢} − ٥)

+ص^{٣} − ٥ص ناتجُ ضربِ ص في (ص^{٢} − ٥)

= ٣ص^{٣}ع − ١٥ع + ص^{٣} − ٥ص هلِ الناتجُ بأبسطِ صورةٍ؟ لماذا؟

الحلُّ باستخدامِ طريقةِ التوزيعِ بالترتيبِ:

(ص^{٢} − ٥) (٣ع + ص)

ناتج ضرب الحدين الأولين	ناتج ضرب الحدين الأوسطين	ناتج ضرب الحدين الطرفين	ناتج جمع الحدين الأخيرين
(ص^{٢} − ٥) (٣ع + ص)	= ٣ص^{٢}ع	− ١٥ع	+ ص^{٣}	−٥ص

تحدَّث

هلْ ستختلفُ طريقةُ الضربِ الأفقيةُ أو العموديةُ؛ إذا كانَ المقدارُ الأولُ أوِ الثاني مُكوّنًا منْ ثلاثةِ حدودٍ جبريةٍ ؟

تدريب ١

جدْ ناتجَ الضربِ في كلٍّ مما يأتي:

١) (٢ل − ٧) (ل − ٤)

٢) (٣ن + ٢) (٥ن − ن^{٢} − ٢)

٣) (س − ٤) (ص + ع)

فكّرْ وناقشْ

أعطِ مثالاً على مقدارينِ جبريينِ حاصلُ ضربِهما ٣س^{٢} +٦س ص . هلْ هناكَ إجاباتٌ أخرى؟

نشاطٌ

١) جدْ ناتجَ ما يأتي بأبسطِ صورةٍ:

أ) $(س + ص)^{٢}$

ب) $(هـ + ل)^{٢}$

جـ) $(س - ص)^{٢}$

د) $(م - ن)^{٢}$

٢) ماذا تُلاحظُ؟

• لا بدَّ أنكَ لاحظتَ أنَّ:

$(ع + ل)^{٢} = ع^{٢} + ٢ ع ل + ل^{٢}$

وتسمّى هذهِ القاعدةُ: مربعَ مجموعِ حدّين.

اكتشفِ الخطأَ واكتبِ الصوابَ في ما يأتي:

$(٩س + ٤ص)^{٢} = ٨١ س^{٢} + ١٦ ص^{٢}$

١) جدْ ناتجَ كلٍّ مما يأتي:

أ) ٧س^{٤} (٢س^{٢} − ٣س + ٥)

ب) (س + ٧) (٢س − ١)

جـ) (ع − ٣)^{٢}

د) (٢س + ٣ص − ٤) (س − ٢ص + ١)

هـ) (٣ص^{٢} + ٢ص) (٥ص − ٨)

و) (ل^{٢} − هـ^{٢}) (ل^{٢} + هـ^{٢})

ز) (س^{٢} + ٥) (٣س − س^{٣} + ٤ل − ٢)

٢) ملعبٌ مستطيلُ الشكلِ طولُهُ (س^{٢} + ٥س + ٤) مترًا، و عرضهُ (٣س + ٢) مترًا، يُرادُ زراعتُهُ بالنجيلِ، جدْ مساحةَ المنطقةِ المزروعةِ بدلالةِ س.

٣) خزّانُ ماءٍ مكعبُ الشكلِ طولُ حرفِهِ (س + ص) مترًا، جدْ حجمَ الخزانِ. بدلالةِ كلٍّ من س ، ص.

تحليلُ المقاديرِ الجبريةِ بإخراجِ عاملٍ مشتركٍ

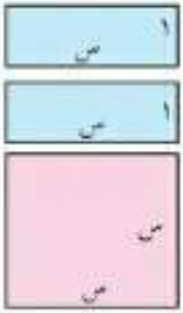
النتاجاتُ

- تعرفُ تحليلَ المقدارِ الجبريِّ.
- تحللُ مقدارًا جبريًا بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ.

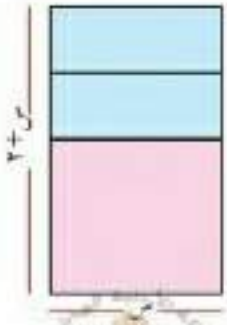
لوحةُ فسيفساءٍ مساحتُها س^{٢} + ٢س وحدةً مربعةً، عرضُها س وحدةَ طولٍ، فما طولُها ؟

س

يمكنُ إيجادُ طولِ اللوحةِ بالاستعانةِ بالأشكالِ الآتيةِ:



الشكلُ (١)



الشكلُ (٢)

١) لاحظْ أنَّ الشكلَ (١) يتكونُ منْ مربعٍ ومستطيلينِ، مساحةُ المربعِ س^{٢} ومساحةُ كلِّ مستطيلٍ س، ستلاحظُ أنَّ المقدارَ س^{٢} + ٢س يعبرُ عنْ مجموعِ مساحاتِ أجزاءِ الشكلِ.

٢) رتِّبِ القطعَ للحصولِ على شكلٍ مستطيلٍ، كما في الشكلِ(٢) لاحظْ أنَّ عرضَ المستطيلِ س، وطولَهُ س + ٢.

منْ ذلكَ نجدُ أنَّ س^{٢} + ٢س = س (س + ٢).

تُسمى هذهِ العمليةُ **التحليلَ إلى العواملِ**.

ففي العمليةِ السابقةِ: الطرفُ الأيمنُ ناتجٌ عنْ جمعِ حدينِ جبريين، والطرفُ الأيسرُ حاصلُ ضربِ مقدارينِ جبريين، وهما عاملانِ منْ عواملِ الطرفِ الأيمنِ الذي حلّلناهُ سابقًا.

تحليلُ المقدارِ الجبريّ يعني كتابتهُ على صورةِ حاصلِ ضربِ مقدارينِ جبريين أوْ أكثرَ. وكلٌّ منهما يُسمّى عاملاً منْ عواملِ المقدارِ الجبريّ الأصليّ.

هناكَ طرائقُ مختلفةٌ لتحليلِ المقاديرِ الجبريّةِ منها **التحليلُ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ (ع.م.أ).**

مثالُ (١)

جدْ ع . م . أ للمقدارين (١٢ص^{٢}، ٤٠ص)

الحلُّ

لإيجادِ ع.م.أ للمقدارين (١٢ص^{٢}، ٤٠ص)، نتبعُ الخطواتِ الآتيةَ:

١) نحلّلُ المقدارَ ١٢ص^{٢} إلى عواملِه:

١٢ ص^{٢} = ٢ × ٢ × ٣ × ص × ص

٢) نحلّلُ المقدارَ ٤٠ ص إلى عواملِه:

٤٠ص = ٢ × ٢ × ٢ × ٥ × ص لاحظْ أنّ ٢ ، ٢، ص عواملُ مشتركةٌ في المقدارين

٣) نأخذُ العواملَ المشتركةَ بينَ المقدارينِ لإيجادِ ع.م.أ.

ع.م.أ للمقدارين = ٢ × ٢ × ص = ٤ص

تدريبٌ ١

جدْ ع.م.أ للمقاديرِ الجبريةِ في كلٍّ مما يأتي:

١) ٢٧ل^{٢}م^{٢} ، ١٢ ل^{٢}م^{٣} ، ١٨ل^{٣}م ك

٢) ٨ص^{٤} ، ٣هـ ، ٢أ^{٣}ص

مثال (٢)

حلِّلِ المقدارَ ١٢س^{٢} − ٢٠س^{٣} بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ.

الحلُّ

١٢س^{٢} − ٢ × ٢ × ٣ × س^{٢} — تحليلُ كلِّ حدٍّ إلى العواملِ.

−٢٠س^{٣} = −١ × ٢ × ٢ × ٥ × س^{٢} × س — تحديدُ العواملِ المشتركةِ.

ع.م.أ = ٤س^{٢} — حاصلُ ضربِ العواملِ المشتركةِ.

١٢س^{٢} − ٢٠س^{٣} = ٤س^{٢} (٣ − ٥س) — قسمةُ كلِّ حدٍّ على العاملِ المشتركِ الأكبرِ

أيْ أنَّ $\frac{١٢س^{٢}}{٤س^{٢}} = ٣$ ، $\frac{-٢٠س^{٣}}{٤س^{٢}} = -٥س$

فكِّرْ وناقشْ

- كيفَ يمكنُ أنْ تتحققَ من صحةِ الحلِّ في المثالِ السابقِ؟
- هلْ يمكنُ إضافةُ خطواتٍ إلى الطريقةِ السابقةِ لتوضيحِها أكثرَ؟

تحدَّثْ

عنِ الاختلافِ بينَ عمليةِ توزيعِ الضربِ على الجمعِ، وعمليةِ إخراجِ عاملٍ مشتركٍ.

تقريبٌ (٢)

حلِّلْ كلًّا منَ المقاديرِ الآتيةِ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ، ثمَّ تحققْ منْ صحةِ الحلِّ:

١) ٣٠س^{١} ص^{٢} + ٤٥س^{٢} ص^{٤}

٢) −١١ع ل − ٦٦ع^{٢}

٣) ٨أ^{٢} ب − ١٢ب^{٢} + ٤ب

فكّرْ وناقشْ

- كُلِّفَ خالدٌ وزيدٌ بتحليلِ المقدارِ الجبريِّ ٢٠س^{٢} + ٥س ، فكتبَ خالدٌ ٢٠س^{٢} + ٥س = ٥س (٤س).

  بينما كتبَ زيدٌ ٢٠س^{٢} + ٥ س =٥س (٤س + ١).

  مَنْ منهُما إجابتُهُ صحيحةٌ؟

- كُلِّفَتْ حنانُ وريمُ بتحليلِ المقدارِ الجبريِّ ٨ – ٤ص، فكتبتْ حنانُ ٨ – ٤ص = – ٤ (ص – ٢).

  بينما كتبتْ ريمُ ٨ – ٤ص = ٤(٢ – ص)

  ناقشْ إجابةَ كلٍّ منهُما.

تحدَّثْ

- ماذا نعني بتحليلِ المقدارِ الجبريِّ إلى عواملِهِ؟
- هلْ يختلفُ تحليلُ المقدارِ الجبريِّ إلى عواملِهِ عنْ معنى تحليلِ العددِ إلى عواملِهِ؟

  برِّرْ إجابتَكَ.

تمارينُ ومسائلُ

١) جدْ ع.م.أ للمقاديرِ الجبريةِ الآتيةِ:

أ) ٧س^{٣}هـ ، ٤٩س^{٢}هـ ، ٦٣ س^{٥}هـ ل^{٢}

ب) ٦م(س – ص)^{٢} ، ١٥م (س – ص)^{٣}

٢) حلِّلْ كلًّا منَ المقاديرِ الآتيةِ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ:

أ) ١٦ن – ٤٠ل

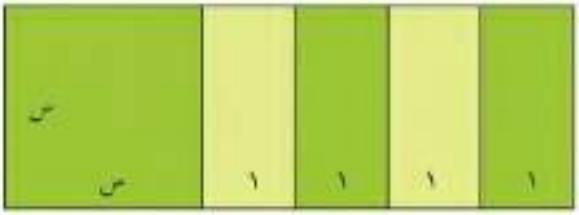
ب) ٢٠ع س^{٣} + ١٠ع^{٢}س^{٢}

جـ) – ١٢أ^{٢} ب^{٤} – ١٨ب^{٤}هـ

د) ٥س^{٢} ص^{٢} – ٢س^{٣}ص + ١٠س ص^{٢}

هـ) ٩ل^{٥} + ١٨ل^{٧} – ٢٤ل^{٤} + ٣ل^{٣}

٣) اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ:



أ) اكتبْ مقدارًا جبريًا يعبرُ عنْ مساحةِ الشكلِ.

ب) حلِّلِ المقدارَ الجبريَّ الذي حصلتَ عليهِ في الفرعِ (أ) إلى عواملِهِ.

جـ) اكتبْ مقدارًا جبريًّا يعبرُ عنْ محيطِ الشكلِ، ثمَّ حللْهُ إلى عواملِه.

٤) اكتشفِ الخطأَ واكتبِ الصوابَ في ما يأتي:

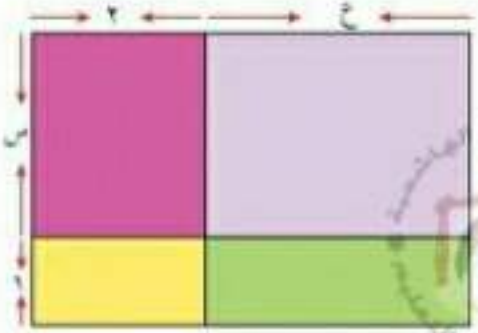
٣٢س^{٤}ص + ٢٤س^{٢}ص^{٢} = ٨س^{٢}ص (٣ص – ٤س^{٢})

الدرسُ السادسُ: تحليلُ المقاديرِ الجبريةِ بالتجميعِ

النتاجاتُ
- تحلّلُ مقدارًا جبريًا بطريقةِ تجميعِ الحدودِ.
- تحلُّ مسائلَ حياتيةً على تحليلِ المقاديرِ الجبريةِ.

نشاطٌ

يمثلُ الشكلُ المجاورُ لوحةَ إعلاناتٍ إلكترونيةً قُسّمتْ إلى أربعةِ أقسامٍ مختلفةٍ، كلٌّ منها على شكلِ مستطيلٍ.



١) اكتبْ أبعادَ المستطيلاتِ الأربعةِ، ثمَّ جدْ مساحةَ كلٍّ منها.

٢) جدْ مساحةَ لوحةِ الإعلاناتِ بطريقتينِ مختلفتينِ.

لا بدَّ أنكَ لاحظْتَ منْ خلالِ تنفيذِ النشاطِ السابقِ أنَّهُ يمكنُ إيجادُ مساحةِ اللوحةِ بطريقتينِ مختلفتينِ، وأنَّ س ع + ٢س + ع + ٢ = (س + ١)(ع + ٢). لماذا؟

ولا بدَّ أنكَ لاحظْتَ أيضًا أنَّ الطرفَ الأيمنَ مقدارٌ جبريٌّ يتكونُ منْ أربعةِ حدودٍ، لا يوجدُ عاملٌ مشتركٌ بينها. وبذلكَ نحتاجُ إلى تعلُّمِ طريقةٍ أخرى منْ طرقِ التحليلِ. وهيَ طريقةُ **التحليلِ بالتجميعِ**.

تُسمى الطريقةُ التي تُستعملُ لتحليلِ مقدارٍ جبريٍّ يتكونُ منْ أربعةِ حدودٍ أو أكثرَ **التحليلَ بتجميعِ الحدودِ**؛ حيثُ يُجمّعُ كلُّ حدينِ جبريينِ معًا، ويُحلّلانِ بإخراجِ العاملِ المشتركِ الأكبرِ مرتينِ.

مثالٌ (١)

حلِّلْ ٣س٢ ص + ٤س٢ + ٣ص٢ + ٤ص.

الحلُّ

٣س٢ ص + ٤س٢ + ٣ص٢ + ٤ص	العبارةُ الأصليةُ
= (٣س٢ ص + ٤س٢) + (٣ص٢ + ٤ص)	تجميعُ الحدودِ ذاتِ العواملِ المشتركةِ
= س٢ (٣ص + ٤) + ص (٣ص + ٤)	تحليلُ كلِّ تجميعٍ بإخراجِ ع.م.أ.
= (٣ص + ٤) (س٢ + ص)	إخراجُ (٣ص + ٤) عاملًا مشتركًا

وبذلكَ يكونُ تحليلُ المقدارِ

٣س٢ ص + ٤س٢ + ٣ص٢ + ٤ص = (٣ص + ٤) (س٢ + ص)

فكِّرْ وناقشْ

- كيفَ يمكنُ أنْ تتحققَ منْ صحةِ الحلِّ في المثالِ السابقِ؟
- هلْ يمكنُ تحليلُ المقدارِ السابقِ بطريقةٍ أخرى ؟ مبررًا إجابتَكَ.

مثالٌ (٢)

حلِّلِ المقاديرَ الجبريةَ الآتيةَ، ثمَّ تحققْ منْ صحةِ الحلِّ:

١) ٨ن٢ + ٤ل − ١٢ل ع − ٦ع.

٢) ٣هـ م − ٥م + ٢٠ − ١٢هـ.

الحلُّ

١) $٨ل^{٢} + ٤ل - ١٢ل ع - ٦ع$ — العبارةُ الأصليةُ.

$= (٨ل^{٢} + ٤ل) + (-١٢ل ع - ٦ع)$ — تجميعُ الحدودِ ذاتِ العواملِ المشتركةِ.

$= ٤ل(٢ل + ١) + -٦ع(٢ل + ١)$ — تحليلُ كلِّ تجميعٍ بإخراجِ ع.م.أ.

$= (٢ل + ١)(٤ل - ٦ع)$ — إخراجُ $(٢ل + ١)$ عاملًا مشتركًا.

التحققُ منْ صحةِ الحلِّ:

$(٢ل + ١)(٤ل - ٦ع) = ٨ل^{٢} - ١٢ل ع + ٤ل - ٦ع$. لماذا؟

٢) $٣هـ م - ٥م + ٢٠ - ١٢هـ$.

$= ٣هـ م - ١٢هـ + ٢٠ - ٥م$ — إعادةُ ترتيبِ الحدودِ الجبريةِ.

$= (٣هـ م - ١٢هـ) + (٢٠ - ٥م)$ — تجميعُ الحدودِ ذاتِ العواملِ المشتركةِ.

$= ٣هـ(م - ٤) + ٥(٤ - م)$ — تحليلُ كلِّ تجميعٍ بإخراجِ ع.م.أ.

$= ٣هـ(م - ٤) + ٥(-١(م - ٤))$ — لاحظْ $(٤ - م) = -١(م - ٤)$، لماذا؟

$= ٣هـ(م - ٤) - ٥(م - ٤)$ — $٥ \times -١ = -٥$

$= (م - ٤)(٣هـ - ٥)$ — أخذُ $(م - ٤)$ عاملًا مشتركًا.

التحققُ منْ صحةِ الحلِّ:

$(م - ٤)(٣هـ - ٥) = ٣م هـ - ٥م - ١٢هـ + ٢٠$.

تدريبٌ ١

حلِّلْ كلًّا مما يأتي باستخدامِ طريقةِ التجميعِ، وقارنْ إجابتَكَ معَ إجاباتِ زملائِكَ، ثمَّ تحققْ منْ صحةِ الحلِّ:

١) $٧س^{٣} ص^{٣} - ١٤س^{٢} + ٣ص^{٣} - ٦س$.

٢) $ع^{٢} ل^{٢} ك + ٧ك + ع^{٢} ل^{٢} + ٧$.

فكّرْ وناقشْ

- حلّلَ كلٌّ منْ خالدٍ وعادلٍ وحمزةَ المقدارَ ٨س^{٢} − ٤س + ١٢س ص − ٦ص فكانتْ إجاباتُهم على الترتيبِ:

٨س^{٢} − ٤س + ١٢س ص − ٦ص = (٢س − ١)(٤س + ٦ص)

٨س^{٢} − ٤س + ١٢س ص − ٦ص = (٢س + ٣ص)(٤س − ٢)

٨س^{٢} − ٤س + ١٢س ص − ٦ص = ٢(٢س − ١)(٢س + ٣ص)

- ناقشْ كلَّ إجابةٍ وتحققْ من صحّتِها.

تحدّثْ

متى تَستخدمُ طريقةَ التحليلِ بالتجميعِ لتحليلِ مقدارٍ جبريٍّ إلى عواملِهِ؟

١) حلِّلْ كلًّا مما يأتي إلى عواملِهِ، وتحققْ صحةَ الحلِّ:

أ) أ^{٣} − ٢أب + ١٢أب^{٢} − ٢٤ب^{٣}

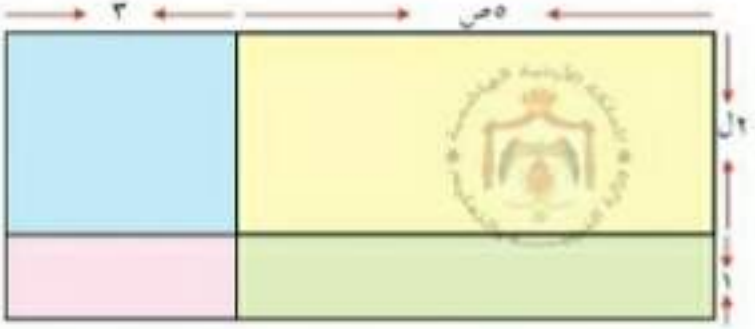
ب) ٩ن ك − ١٨ن − ٢ + ك

جـ) ٧ل ف + ٩ هـ ل + ٣٦هـ + ٢٨ف

د) س ن − ٩س − ٩ن + ٨١

هـ) س^{٢} ص + ٣س ص + ٢س + ٤س ص ل + ١٢ ص ل + ٨ ل

٢) اكتبْ مقدارًا جبريًّا يعبرُ عنْ مساحةِ الشكلِ الآتي بطريقتينِ.



٣) خزانُ ماءٍ على شكلِ متوازي مستطيلاتٍ، حجمُهُ (س ص ع + س ع + ص ع + ع) متر مكعب، وارتفاعُهُ (ع) متر. ما المقدارانِ الجبريانِ اللذانِ يعبرانِ عنْ بعديهِ الآخرينِ؟

مراجعةٌ

١) جدْ ناتجَ كلٍّ مما يأتي :

أ) (٤س^{٢} ص) (٢س ص^{٢} ع)

ب) (−٣حـ^{١} هـ)^{٢}

جـ) ٥(−٢ ك^{٢} ل^{١} ن)^{٢} (٣ن^{٢} هـ)

د) (٢ع + ٣)^{٢}

هـ) (٢س + $\sqrt{٥}$)^{٢}

و) (٥س^{٢} − ٤) (٢س + ٣ص)

ز) (−٢ل + ١) (ل + ٣) (ل − ١)

٢) حلِّل كلًّا مما يأتي إلى عواملِهِ:

أ) ص − ٦ص^{٢}

ب) ١٠س^{٣}ل − ٢٠س^{٢} + ١٥س ص^{٢}

جـ) ٢هـ و + ٩هـ ز − ٨ ب و − ٣٦ ب ز

د) ١٥س^{٥} − ٢٠س^{٢} ص + ٣س^{١} − ٤ص

٣) صندوقٌ على شكلِ متوازي مستطيلاتٍ، قاعدتُهُ مربعةُ الشكلِ، طولُ ضلعِها (٣س − ١) وحدةَ طول، وارتفاعُهُ (س^{٣}) وحدةَ طولٍ، اكتبِ المقدارَ الجبريَّ الذي يعبّرُ عن حجمِ الصندوقِ.

٤) إذا كانتْ مساحةُ مستطيلٍ (س ص + ٥س + ص + ٥) وحدةً مربعةً، وكانَ أحدُ بُعْدَيهِ (ص + ٥) وحدةَ طولٍ، فما البُعدُ الآخرُ؟

٥) معتمدًا على الشكلِ المجاورِ الذي يمثلُ مربعًا بداخلِهِ دائرةٌ تمسُّ أضلاعَهُ. أجبْ عما يأتي:

أ) اكتبِ مساحةَ المنطقةِ المظللةِ باللونِ الأصفرِ.

ب) حلِّل المقدارَ الذي حصلتَ عليهِ في الفرعِ (أ) إلى عواملِهِ.

٦) بركةُ سباحةٍ على شكلِ متوازي مستطيلاتٍ في أحدِ النوادي الرياضيةِ، طولُها (ص + ٢) متر، وعَرضُها (ص + ١) متر، وارتفاعُها $\frac{1}{2}$ ص متر، أجبْ عن كلٍّ مما يأتي:

أ) اكتبِ المقدارَ الجبريَّ الذي يعبرُ عنْ كميةِ الماءِ اللازمةِ لملءِ البركةِ.

ب) إذا قررتْ إدارةُ النادي دهنَ الجدرانِ الداخليةِ للبركةِ، وكانَ ثمنُ دهانِ المترِ المربعِ الواحدِ ١٢ دينارًا، فما تكلفةُ الدهانِ؟

١) يتكونُ هذا السؤالُ منْ ٨ فقراتٍ منْ نوعِ الاختيارِ منْ متعددٍ، لكلٍّ منها ٤ بدائلَ، واحدٌ منها فقطْ صحيحٌ، ضعْ دائرةً حولَ رمزِ البديلِ الصحيحِ:

(١) * دفعتْ كريمةُ س دينارًا ثمنًا لِـ ٣ صناديقَ منَ العصيرِ، ما ثمنُ الصندوقِ الواحدِ منَ العصيرِ بالدينارِ؟

أ) س + ٣ ب) ٣س جـ) $\frac{س}{٣}$ د) $\frac{٣}{س}$

(٢) ناتجُ ضربِ الحدين ٤ص ، −٣ص٢ ل هوَ:

أ) ص٢ ل ب) −١٢ ص٢

جـ) ١٢ص٢ ل د) −١٢ص٢ل

(٣) العاملُ المشتركُ الأكبرُ للحدين ١٢س٥ ع٣ ، ٧ل م هوَ:

أ) ١ ب) ١٢

جـ) ١٢ س٥ ع٣ ل م د) ١٩س٥ ع٣ ل م

(٤) ناتجُ −١ (ع − ٥) هوَ:

أ) ع + ٥ ب) ع − ٥ جـ) ٥ − ع د) ٥ع

(٥) ناتجُ (س + ٣)٢ هوَ:

أ) س٢ + ٩ ب) س٢ + ٦

جـ) س٢ + ٣س + ٩ د) س٢ + ٦س + ٩

* السؤالُ منْ أسئلةِ الاختباراتِ الدوليةِ.

(٦) * زرعَ محمودٌ ثلاثةَ أمثالِ ما زرعَهُ سعيدٌ منَ الشجرِ، وزرعَ رائدٌ سبعةَ أشجارٍ زيادةً عن مِثلَي ما زرعَهُ سعيدٌ.

إذا كانتْ س تمثلُ عددَ الأشجارِ التي زرعَها سعيدٌ، أيٌّ مما يأتي يمثلُ مجموعَ الأشجارِ التي زرعَها الثلاثةُ؟

أ) ٧س + ٦ ب) ٤س + ٧

جـ) ٥س + ٧ د) ٦س + ٧

(٧) أيٌّ مما يأتي يُعَدُّ عاملاً للمقدارِ الجبريِّ ٦ع٢ − ٣ع + ٢ + ٤ع:

أ) ٢ع + ١ ب) ع + ٢

جـ) ٣ع + ٢ د) ٣ع − ٢

(٨) إذا كانتْ مساحةُ مربعٍ (ص٢ + ٨ص + ١٦) وحدةً مربعةً، فإنَّ طولَ ضلعِهِ هوَ:

أ) (ص + ٤)٢ ب) ص + ٤

جـ) ص + ٨ د) ص + ١٦

٢) جدْ ناتجَ كلٍّ مما يأتي بأبسطِ صورةٍ:

أ) (٣س٢ + ٥ع) (س٢ − ٢ع)

ب) ٧ل٣م (٢ل٢ − ٣م)٢

٣) حلِّلْ كلًّا مما يأتي إلى عواملِهِ:

أ) ٢٤ ص٥ ك٣ + ٤٠ ص٢ ك٤

ب) ٣هـ س + ٥ هـ ص − ١٢ل س − ٢٠ ل ص

* السؤالُ من أسئلةِ الاختباراتِ الدوليةِ.

٤) معتمدًا على الشكلِ المجاورِ الذي يمثلُ لوحًا خشبيًّا على شكلِ شبهِ منحرفٍ، ارتفاعُهُ (ع) وحدةُ طولٍ، وطولُ قاعدتِهِ السُفلى ثلاثةُ أمثالِ ارتفاعِهِ، وطولُ قاعدتِهِ العليا يقلُّ بمقدارِ (٢) عن مثلَي ارتفاعِهِ، فأجبْ عن كلٍّ مما يأتي:

أ) اكتبْ عبارةً جبريّةً تمثلُ مساحةَ اللوحِ الخشبيِّ.

ب) إذا كانَ ارتفاعُ اللوحِ الخشبيِّ ١,٥ مترًا. فجدْ مساحتَهُ.

٥) * مصنعٌ للثلاجاتِ وَ التلفزيوناتِ، يبيعُ س تلفزيونٌ، ص ثلاجةً شهريًّا، معتمدًا على الجدولِ الآتي الذي يمثلُ التكلفةَ ومقدارَ الربحِ لكلِّ قطعةٍ بالدينارِ:

النوعُ	التكلفةُ	الربحُ
تلفزيونٌ	٢٤٠	٢٥
ثلاجةٌ	٤٥٠	٣٠

أ) اكتبِ العلاقةَ التي تعبرُ عنِ التكلفةِ التي يدفعُها المصنعُ شهريًّا بدلالةِ س ، ص.

ب) اكتبِ العلاقةَ التي تعبرُ عنْ مبلغِ البيعِ في المصنعِ شهريًّا بدلالةِ س ، ص.

* السؤالُ من أسئلةِ الاختباراتِ الدوليةِ.

٣ الوحـــدةُ الثالثةُ

الاقتـــرانـــاتُ

تقومُ حياتُنا على أسسٍ ومبادئَ رياضيةٍ مختلفةٍ، منها الاقتراناتُ التي لها تطبيقاتٌ واسعةٌ في حياتِنا ؛حيثُ نستعملُها للتعبيرِ عنْ علاقاتٍ عدةٍ، مثلَ علاقةِ المسافةِ المقطوعةِ خلالَ الزمنِ، وراتبِ موظفٍ معَ زيادةِ سنواتِ خبرتِهِ، والتغيرِ في مبيعاتِ شركةٍ خلالَ أشهرِ السنةِ، وكميةِ السعراتِ الحراريةِ المفقودةِ مع ممارسةِ الأنشطةِ البدنيةِ، وغيرُها الكثيرُ.

كما يُستفادُ منَ المخططاتِ البيانيةِ لهذهِ الاقتراناتِ لدراسةِ تلكَ العلاقاتِ وَالخروجِ بتنبؤاتٍ أوْ نصائحَ وَإرشاداتٍ، مثلَ مخططِ ضرباتِ القلبِ الذي يُستدلُّ بهِ على صحةِ قلبِ الإنسانِ.

يتوقعُ من الطالب في نهايةِ هذه الوحدةِ أن يكونَ قادرًا على:

- تمييزِ الاقترانِ منْ خلالِ العلاقةِ.
- استخدامِ اختبارِ الخطِّ الرأسيِّ لتمييزِ الاقترانِ.
- التعرفِ إلى الاقترانِ الخطيِّ.
- إيجادِ قاعدةِ الاقترانِ الخطيِّ.
- تمثيلِ الاقترانِ الخطيِّ بيانيًا.
- استقصاءِ خصائصِ الاقترانِ الخطيِّ.
- حلِّ مسائلَ حياتيةٍ على الاقترانِ الخطيِّ.

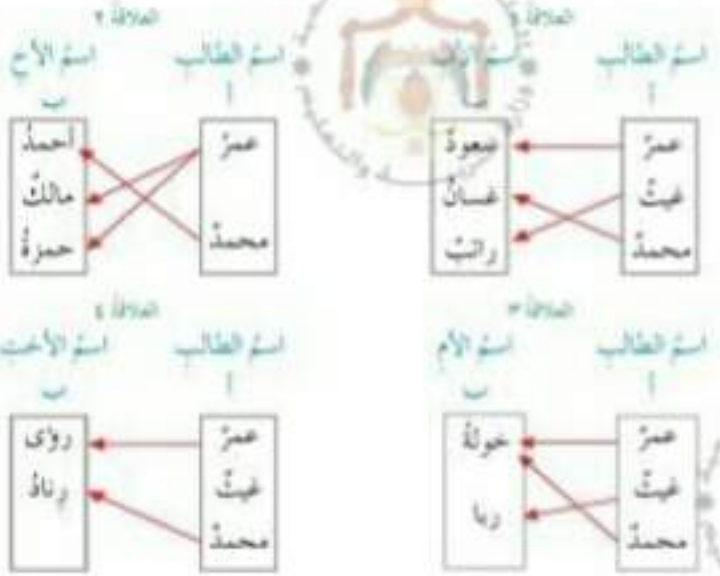
الدرس الأول: الاقترانُ

النتاجات

- تعرفُ الاقترانَ.
- تستخدمُ اختبارَ الخطِّ الرأسيِّ لتمييزِ الاقترانِ.
- تجدُ قاعدةَ الاقترانِ.

نشاطٌ (١)

ادرسِ العلاقاتِ الآتيةَ ثمَّ أجبْ عنِ الأسئلةِ التي تليها:



١) ما نوعُ التمثيلِ المستخدمِ في العلاقاتِ السابقةِ؟

٢) ما اسمُ مجموعةِ العناصرِ في المجموعةِ أ في التمثيلاتِ السابقةِ؟

٣) ما اسمُ مجموعةِ العناصرِ في المجموعةِ ب في التمثيلاتِ السابقةِ؟

تُسمى كلٌّ منَ العلاقتينِ ١ وَ ٣ اقترانًا، بينما العلاقتانِ ٢ وَ ٤ ليستا اقترانًا.

ادرسْ أوجهَ الشبهِ والاختلافِ بينَ العلاقاتِ السابقةِ ثمَّ قدمْ تعريفًا لمفهومِ الاقترانِ.

الاقترانُ هوَ: علاقةٌ تربطُ بين مسقطِها س (المجال) و ص (المدى)؛ بحيثُ يرتبطُ كل عنصرٍ في المجالِ بصورةٍ واحدةٍ فقط في المدى.

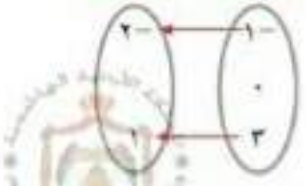
تذكّرْ

العلاقةُ منْ أ إلى ب هيَ مجموعةُ الأزواجِ المرتبةِ (س ، ص) التي مسقطُها الأولى س تنتمي إلى المجموعةِ أ، ومسقطُها الثانيةُ ص تنتمي إلى المجموعةِ ب.

مثالٌ (١)

أيُّ العلاقاتِ الآتيةِ تمثلُ اقترانًا؟ فسّرْ إجابتَكَ.

(١)



(٢)

(٣)

(٤)

الحلُّ

تمثلُ لعلاقتانِ في الفرعينِ (٢)، (٣) اقترانًا؛ لأنَّ كلَّ عنصرٍ في المجالِ ارتبطَ بعنصرٍ واحدٍ (صورةٍ واحدةٍ) فقطْ في المدى.

بينما العلاقةُ في الفرعِ (١) لا تمثلُ اقترانًا؛ لأنَّ العنصرَ (صفر) في المجالِ لمْ يرتبطْ بأيِّ عنصرٍ في المدى (ليسَ لهُ صورةٌ).

كذلكَ العلاقةُ في الفرعِ (٤) لا تمثلُ اقترانًا؛ لأنَّ العنصرَ (نبيل) في المجالِ ارتبطَ بعنصرينِ في المدى (لهُ صورتانِ).

تدريبٌ ١

اكتبْ مجالَ ومدى كلِّ علاقةٍ في ما يأتي، ثمَّ حدِّدْ أيُّها تمثلُ اقترانًا، مبررًا إجابتَكَ.

١) ق = {(٢١ ، −٣) ، (٠ ، −٣) ، (−١٤ ، −٣) ، (−٣ ، −٣)}

٢) ل = {(−١ ، ١) ، (٥ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٥ ، ٢٥)}

٣) ع = {(−١ ، −١) ، (٠ ، ٠) ، (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (١٠ ، ١٠)}

٤)

٥)

نشاطٌ (٢)

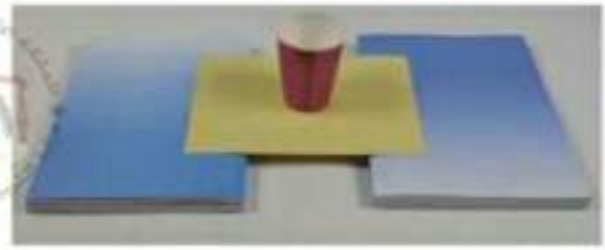
سوفَ نقومُ بتجربةٍ لفحصِ بعضِ المبادئِ التي تُستخدمُ في بناءِ الجسورِ.

المواد

مجموعةُ أوراقٍ منَ الورقِ المُقوى بُعدا كلٍّ منها ١٧سم ،٢٥سم ، أربعةُ كُتُبٍ لها السُّمكُ نفسُهُ، كوبٌ ورقيٌّ، ٥٠ قطعةً نقديةً صغيرةً منَ العملةِ نفسِها.

التعليماتُ

١) اصنعْ جسرًا ورقيًّا كما هوَ موضحٌ في الشكلِ، وَذلكَ بتثبيتِ ورقةٍ على حافتيْ الكتبِ؛ بحيثُ تكونُ الورقةُ مثبتةً على بُعدِ ٦سم على طرفِ كلِّ كتابيْنِ منها، ثمَّ ثبِّتْ كوبًا ورقيًّا في منتصفِ الجسرِ.



٢) ضعْ قطعًا نقديّةً في الكوبِ، واحدةً في كلِّ مرةٍ حتى يَسقطَ الجسرُ.

٣) سجّلْ عددَ القطعِ النقديةِ التي أسقطتَ الجسرَ.

٤) الآنَ ضعْ بدلَ الورقةِ ورقتينِ، أيْ ضاعفِ السُّمكَ وابدأْ بإعادةِ التجربةِ بوضعِ القطعِ النقديةِ داخلَ الكوبِ حتى يسقطَ الجسرُ الورقيُّ، سجّلْ عددَ القطعِ النقديةِ التي أسقطتِ الجسرَ، ثمّ أعدِ التجربةَ مع ثلاثِ ورقاتٍ، ثمّ مع أربعٍ ثمّ مع خمسٍ ثمّ مع ستٍّ، مسجلاً عددَ القطعِ التي تُسقطُ الجسرَ في كلِّ مرةٍ.

(رتّبْ بياناتِ المعلوماتِ في جدولٍ).

٥) مثّلِ العلاقةَ بينَ عددِ الورقاتِ وعددِ القطعِ النقديةِ التي تُسقطُها بيانيًّا، ثمّ بيّنْ إنْ كانتِ اقترانًا أمْ لا، مبررًا إجابتَكَ.

٦) صِفْ شكلَ الرسمِ الذي حصلْتَ عليهِ، ثمّ تنبأْ بعددِ القطعِ التي قدْ تُسقطُ سبعَ ورقاتٍ، وثماني ورقاتٍ.

٧) افترضْ بأنّكَ تستطيعُ استعمالَ ورقةٍ سمكُها نصفُ سمكِ الورقةِ التي استعملْتَها لصُنعِ الجسرِ، ما عددُ القطعِ النقديةِ التي قدْ تُسقطُ الجسرَ حسبَ توقعِكَ؟

٨) تنبأْ بعددِ القطعِ النقديةِ التي قدْ تُسقطُ الجسرَ إذا كانَ سُمكُهُ ٢,٥ طبقةً منَ الورقِ.

فكّرْ وناقشْ

أيُّ العلاقتينِ ص = س^{٢} ، ص^{٢} = س تُعدُّ اقترانًا؟ برّرْ إجابتَكَ.

تدريبٌ ٢

إذا كانَ ثمنُ قلمِ الرصاصِ الواحدِ ٢٥ قرشًا، فأكملِ الجدولَ الآتيَ الذي يمثلُ العلاقةَ بينَ عددِ الأقلامِ وثمنِها، ثمّ أجبْ عما يليه:

عددُ الأقلامِ (س)	١	٢	٣	٤	٥
ثمنُ الأقلامِ (ص) بالقروشِ	٢٥	...	٧٥	...	...

١) ما ثمنُ ٦ أقلامٍ؟

٢) وضّحْ كيفَ تجدُ ثمنَ ١٠ أقلامٍ.

٣) هلْ يتغيّرُ ثمنُ الأقلامِ بتغيّرِ عددِها؟

٤) اكتبْ قاعدةَ هذهِ العلاقةِ.

٥) هلْ تمثلُ العلاقةُ السابقةُ اقترانًا؟ برّرْ إجابتَكَ.

مثالٌ (٢)

إذا كانَ ع(س) = ٨س − ١ فجدْ كلًّا مما يأتي:

١) ع(٤)　　٢) ع(−١)

الحلُّ

١) ع(٤) = ٨(٤) − ١

= ٣٢ − ١

= ٣١

٢) ع(-١) = ٨ × (-١) - ١

= -٨ - ١

= -٩

تدريب ٣

إذا كان هـ(س) = س + ٣ فجدْ كلًّا مما يأتي:

هـ(٧) ، هـ(٠)، هـ($-\frac{١}{٢}$) ، هـ($\sqrt{٢}$)

فكّرْ وناقشْ

يمثلُ الشكلانِ الآتيانِ تمثيلَينِ للعلاقتينِ ق ، هـ

١) أيُّ العلاقتينِ تمثلُ اقترانًا؟ برّرْ إجابتَكَ.

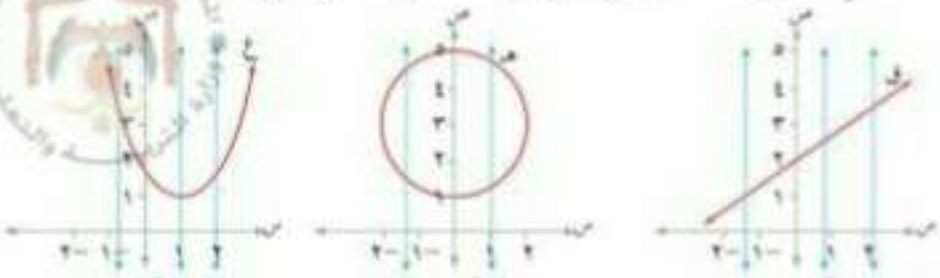
٢) كيفَ تستطيعُ معرفةَ إذا كانتِ العلاقةُ تمثّلُ اقترانًا؟

اختبارُ الخطِّ الرأسيِّ:

تكونُ العلاقةُ اقترانًا إذا قَطَعَ أيُّ خطٍّ رأسيٍّ بيانَ العلاقةِ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ .

مثالٌ (٣)

باستخدامِ اختبارِ الخطِّ الرأسيِّ، بيِّنْ أيُّ العلاقاتِ الآتيةِ تمثلُ اقترانًا في ما يأتي:



الشكل (١) الشكل (٢) الشكل (٣)

الحلُّ

العلاقتانِ ق ، ع تمثلانِ اقترانًا؛ لأنَّ كلَّ خطٍّ رأسيٍّ يقطعُ منحنى العلاقةِ في نقطةٍ واحدةٍ فقطْ.

بينما العلاقةُ هـ، لا تمثلُ اقترانًا، لوجودِ خطٍّ رأسيٍّ يقطعُ منحنى العلاقةِ في نقطتينِ مختلفتينِ.

تدريبٌ ٤

ارسمْ علاقتينِ تمثلُ إحداهُما اقترانًا، ثمَّ اطلبْ منْ زميلِكَ التأكدَ منْ صحةِ عملِكَ باستخدامِ اختبارِ الخطِّ الرأسيِّ.

مثالٌ (٤)

يعملُ رائدٌ سائقًا لحافلةٍ في شركةِ براتبٍ مقدارُهُ ٣٥٠ دينارًا شهريًا إضافةً إلى ٣ دنانيرَ عنْ كلِّ ساعةِ عملٍ إضافيٍّ.

١) اكتبْ قاعدةَ الاقترانِ الدالةَ على دخلِ رائدٍ الشهريِّ.

٢) احسبْ دخلَ رائدٍ في الشهرِ الأولِ إذا عملَ ٤ ساعاتٍ إضافيةً.

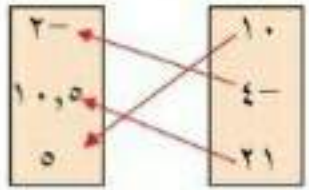
الحلُّ

١) قاعدةُ الاقترانِ هيَ: ق(س) = ٣٥٠ + ٣س

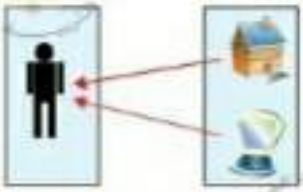
٢) ق (٤) = ٣٥٠ + ٣ × ٤ = ٣٦٢ دينارًا.

١) أيُّ العلاقاتِ الآتيةِ تُعدُّ اقترانًا؟ مبررًا إجابتَكَ:

أ)



ب)



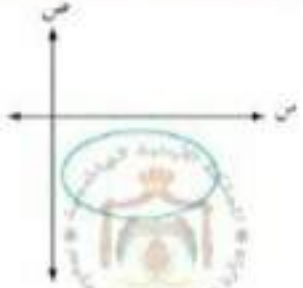
جـ)

س	٢	٤	٦	٨
ص	٣	٥	٧	٩

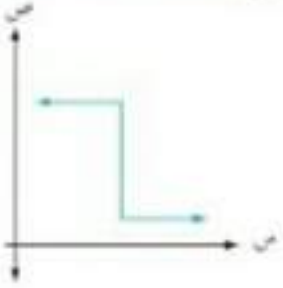
د)

س	٠,٣	٠	١
ص	٩	٩	٩

هـ)



و)



٢) إذا كانَ ق(س) = ٢س^{٣} ، هـ(س) = ٧ ، ل(س) = ٥ − س فجدْ كلًّا مما يأتي:

ق (٢) ، هـ (٥) ، ل ($\frac{٣}{٨}$) ، ق (ت٥) ، ل (−٣)

٣) هلِ العلاقةُ التي تحسبُ مساحةَ الدائرةِ بدلالةِ نصفِ قطرِها تُعدُّ اقترانًا؟ برّرْ إجابتَكَ.

٤) قدّمْ أمثلةً لعلاقاتٍ رياضيةٍ معروفةٍ تمثلُ اقتراناتٍ.

٥) يتقاضى موظفٌ راتبًا شهريًا مقدارُهُ ٤٠٠ دينارٍ، ويُخصَمُ منْ راتبِهِ ١٠ دنانيرَ عنْ كلِّ يومِ غيابٍ منْ دونِ عذرٍ مقبولٍ.

أ) اكتبْ قاعدةَ الاقترانِ الدالةَ على دخلِ الموظفِ الشهريِّ.

ب) احسبْ دخلَ الموظفِ في أحدِ الأشهرِ؛ إذا تغيبَ يومينِ منْ دونِ عذرٍ مقبولٍ في ذلكَ الشهرِ.

الدرس الثاني: الاقترانُ الخطّيُّ

النتاجات

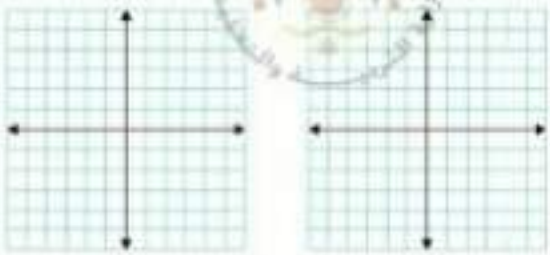
- تعرفُ الاقترانَ الخطيَّ.
- تجدُ قاعدةَ الاقترانِ الخطيِّ.

نشاطٌ (١)

مَثِّلِ الأزواجَ المرتبةَ للعلاقتينِ في الشكلَيْنِ الآتيينِ:

م = {(−٢ ، −٢)، (−١ ، −١)، (٠ ، ٠)، (١ ، ١)، (٢ ، ٢)}

ن = {(−٢ ، ٤)، (−١ ، ١)، (٠ ، ٠)، (١ ، ١)، (٢ ، ٤)}



١) هلْ تمثلُ كلُّ علاقةٍ منهُما اقترانًا؟

٢) صلْ نقاطَ كلِّ علاقةٍ، ما الشكلُ الناتجُ في كُلٍّ منهُما؟

٣) اكتبْ قاعدةَ كلٍّ منهُما.

٤) ما أكبرُ أُسٍّ في قاعدةِ كلٍّ منهُما؟

يُسمّى الاقترانُ الذي يُمثَّلُ بخطٍّ مستقيمٍ ويكونُ أكبرُ أُسٍّ فيه ١ اقترانًا خطيًّا.

الصورةُ العامةُ للاقترانِ الخطيِّ هيَ ق(س) = أ س + ب حيثُ أ ، ب ∈ ح. ويُسمّى أ معاملَ س، ب الحدَّ المطلقَ أوِ الثابتَ.

فكّرْ وناقشْ

ما الصورةُ العامةُ للاقترانِ إذا كانَ معاملُ س يساوي صفرًا؟ اقترحْ اسمًا لهذا الاقترانِ.

مثالٌ (١)

أيُّ الاقتراناتِ الآتيةِ يُعَدُّ اقترانًا خطيًّا؟ مبررًا إجابتَكَ.

١) ك(س) = ٢,٥ س ٢) م(س) = س^{٢} + ٣ ٣) هـ(س) = ١٩ − س

٤) ي(س) = $\sqrt{١٣}$ ٥) ل(س) = $\frac{١}{س}$ − ٢ ٦) ع(س) = س^{١}

الحلُّ

الاقتراناتُ ك(س) ، هـ(س) ، ي(س) اقتراناتٌ خطيّةٌ ؛ لأنها على الصورةِ العامةِ للاقترانِ الخطيِّ ق(س) = أس + ب؛

ك (س) = ٢,٥س + ٠ ، أ = ٢,٥ ، ب = ٠

هـ (س) = −١س + ١٩ ، أ = −١ ، ب = ١٩

ي (س) = ٠س + $\sqrt{١٣}$ ، أ = ٠ ، ب = $\sqrt{١٣}$ ، ويُسمّى اقترانًا ثابتًا.

بينما الاقتراناتُ م(س) ، ل(س) ، ع(س) ليستْ خطيةً؛ لأنها ليستْ على الصورةِ العامةِ ق(س) = أس + ب.

الاقترانُ الثابتُ هوَ اقترانٌ خطيٌّ قاعدتُهُ ق (س) = ب ، حيثُ ب ∈ ح.

تدريبٌ ١

أيُّ الاقتراناتِ الآتيةِ يُعدُّ اقترانًا خطيًّا؟ برّرْ إجابتَكَ.

١) ف(س) = س (١ − س) ٢) ل(س) = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ س ٣) ت(س) = −٢س + س^{٣}

٤) د(س) = −١١ − $\frac{٣}{٧}$ س ٥) ق(س) = ٩ ٦) و(س) = $\sqrt{٢١}$ س

مثالٌ (٢)

زرعتْ مريمُ نبتةً متسلقةً سريعةَ النموّ وراقبتِ ارتفاعَها خلالَ شهرِ أيارَ، فوجدتْ أنَّ ارتفاعَها ع سنتمترًا خلالَ س يومًا يتبعُ القاعدةَ ع(س) = $\frac{١}{٢}$ س.

١) لو استمرَّ نموُّ النبتةِ وفقَ هذا المعدلِ، كمْ يصبحُ ارتفاعُها بَعْدَ ١١ يومًا ؟

٢) بعدَ كمْ يومٍ يصبحُ ارتفاعُها ١٢ سنتمترًا ؟

الحلُّ

١) ع (١١) = $\frac{١}{٢}$ (١١)

= ٥,٥ سنتمترًا.

٢) ع (س) = $\frac{١}{٢}$ س

١٢ = $\frac{١}{٢}$ س

س = ٢٤ يومًا.

تمارينُ ومسائلُ

١) بيّنْ أيُّ الاقتراناتِ الآتيةُ خطيٌّ وأيُّها غيرُ ذلكَ؟ مبررًا إجابتَكَ:

أ) ن(س) = س − ٤س

ب) ق(س) = س(س − ٢)

جـ) ك(س) = −٣

د) م(س) = ٣ − ٢س + س^{٢}

هـ) و(س) = $\frac{س + ٢}{٣}$

و) ل(س) = ١٧س − س$^{-١}$

٢) إذا كان ت(س) = ٢س + ٥ ، م(س) = ٤س + ٠,٧ ، ل(س) = ١١ فجدْ كلًّا مما يأتي:

أ) ت (٢)

ب) ل (٤)

جـ) م ($\frac{١}{٤}$)

د) ل ($\sqrt{٥}$)

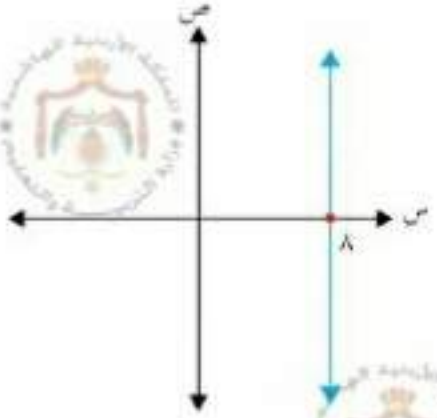
هـ) م (٠)

و) ت ($\frac{١}{٣}$)

٣) يُنسّقُ موقعٌ عبرَ (الإنترنتِ) باقاتِ الوردِ بحيثُ يحسبُ كلفةَ كلِّ وردةٍ – أيًّا كانَ نوعُها – نصفَ دينارٍ، وكُلفةُ تنسيقِ الباقةِ دينارٌ، وأجرةُ التوصيلِ ٣دنانيرَ. بيّنْ في ما إذا كانتِ الكلفةُ النهائيةُ للباقةِ تمثلُ اقترانًا في عددِ الوردات. إذا كانتْ إجابتُكَ (نعمْ) فاكتبْ قاعدةَ الاقترانِ؛ إذا علمْتَ أنَّ التنسيقَ والتوصيلَ يتمُّ في عملياتِ البيعِ جميعِها.

٤) اشترتْ عائشةُ حاسوبًا بقيمةِ ٤٠٠ دينارٍ، إذا انخفضَ سعرُ الحاسوبِ بقيمةٍ ثابتةٍ سنويًّا، فأصبحتْ قيمتُهُ بعدَ عامينِ ٣٦٠ دينارًا. اكتبِ الاقترانَ الذي يمثلُ قيمةَ انخفاضِ سعرِ الحاسوبِ في عددِ السنواتِ.

٥) ادّعتْ ولاءُ أنَّ الرسمَ الآتيَ يمثلُ اقترانًا ويُسمى اقترانًا ثابتًا، ناقشْ ادّعاءها مبررًا إجابتَكَ.

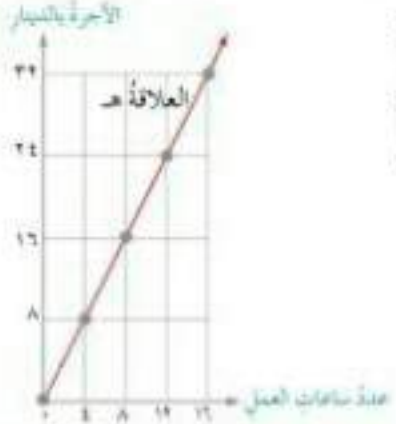


الدرس الثالث: تمثيلُ الاقترانِ الخطيّ بيانيًّا

الساعات

- تُمثِّلُ الاقترانَ الخطيَّ بيانيًّا.

يعملُ طالبٌ جامعيٌّ في مطعمٍ، ويتقاضى أجرَهُ بحسبِ عددِ ساعاتِ عملِهِ، إذا كانتْ تكاليفُ دراستِهِ خلالَ أحدِ الفصولِ ٥٠٠ دينارٍ. معتمدًا على التمثيلِ البيانيِّ الآتي؛ كمْ ساعةً عليهِ أنْ يعملَ خلالَ الفصلِ ليجمعَ تكاليفَ دراستِهِ؟



لتمثيلِ اقترانٍ خطيٍّ بيانيًّا قاعدتُهُ معطاةٌ؛ نفِّذِ الخطواتِ الآتيةَ:

١) اكتبْ قيمتينِ للمتغيرِ س.

٢) احسبْ صورَ القيمِ س تحتَ تأثيرِ قاعدةِ الاقترانِ.

٣) اكتبْ مجموعةَ الأزواجِ المرتبةِ (س، ص) التي حصلتَ عليها.

٤) عيِّنِ الأزواجَ المرتبةَ الناتجةَ في المستوى البيانيِّ.

٥) صلْ بينَ النقطتينِ الناتجتينِ في المستوى البيانيِّ بخطٍّ مستقيمٍ.

فكِّرْ وناقشْ

- ما الحدُّ الأدنى منَ النقاطِ اللازمةِ لتمثيلِ الاقترانِ الخطيِّ بيانيًّا؟
- برِّرْ عدمَ مدِّ الخطِّ في المسألةِ في مقدمةِ الدرسِ، إلى الربعِ الثالثِ.

مثال (١)

مثِّلِ الاقترانَ ل(س) = ٢س − ١ بيانيًّا.

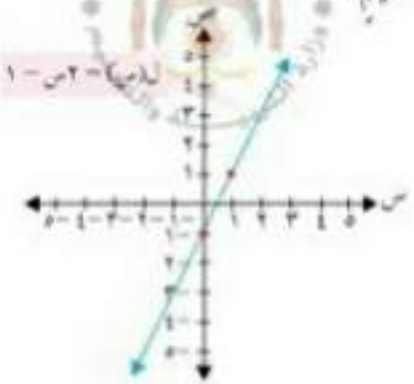
الحلُّ

١) كوِّنْ جدولًا يحتوي قيم س التي اخترتَها.

س	ل(س) = ص = ٢س − ١	(س ، ص)
١	٢ × ١ − ١ = ١	(١ ، ١)
٠	٢ × ٠ − ١ = −١	(٠ ، −١)

٢) عيِّنِ الأزواجَ المرتبةَ في المستوى البيانيِّ.

٣) صِلْ بينَها بخطٍّ مستقيمٍ.



تدرب (١)

مثِّلْ كلًّا من الاقتراناتِ الآتيةِ بيانيًّا.

١) ق(س) = س + ٤

٢) ك(س) = ٣ − $\frac{١}{٢}$ س

٣) ع(س) = ٥

(إرشاد: فكِّرْ في أفضلِ اختيارٍ لقيمِ س تساعدكَ في الحساباتِ)

مثالٌ (٢)

الياردةُ وحدةُ قياسِ طولٍ مشهورةٌ في إنجلترا وأمريكا، أنشأها هنري الأولُ ملكُ إنجلترا عندما قاسَ المسافةَ بينَ أنفِهِ وطرفِ إصبعِهِ الأوسطِ .إذا كانَ الاقترانُ م(س) = ١,٠٩ س يمثلُ العلاقةَ بينَ المترِ والياردةِ ؛ حيثُ س عددُ الياردات، أجبْ عما يأتي:

١) مثّلِ الاقترانَ بيانيًا.

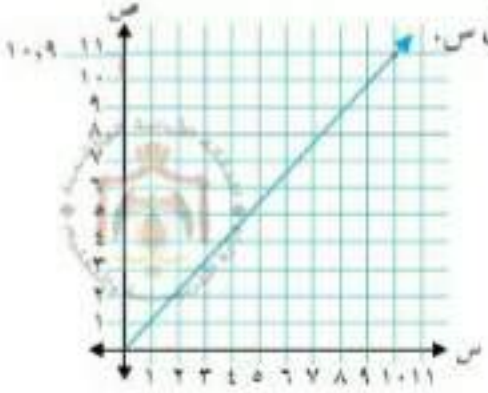
٢) كمْ ياردةً في ٢١,٨ مترًا؟

الحلُّ

١) لتمثيلِ الاقترانِ بيانيًا نكوّنُ جدولًا كما يأتي:

س	م(س) = ص	(س ، ص)
٠	١,٠٩ × ٠ = ٠	(٠ ، ٠)
١٠	١,٠٩ × ١٠ = ١٠,٩	(١٠ ، ١٠,٩)

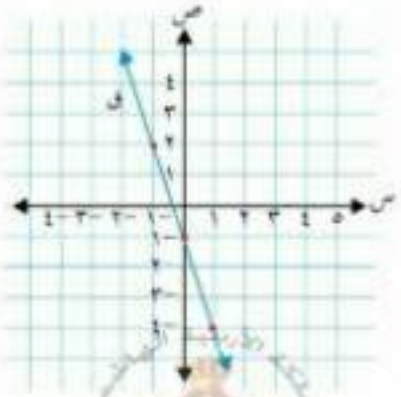
فكّرْ: برّرْ عدمَ اختيارِ قيمٍ سالبةٍ في المجالِ س.



٢) م(س) = ١,٠٩ س ← ٢١,٨ = ١,٠٩ س ← س = ٢٠ ياردةً.

تدريبٌ ٢

الشكلُ الآتي يمثّلُ منحنى الاقترانِ ق، هلْ يمرُّ المنحنى بالنقطةِ (-١٨، -٥٤)؟ برّرْ إجابتكَ.



تحدَّثْ

عنْ طريقةِ تمثيلِ الاقترانِ الخطيِّ بيانيًّا.

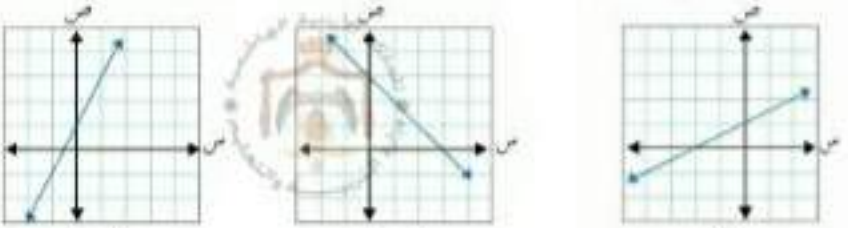
تدريبٌ ٣

حُلَّ المسألةَ الواردةَ بدايةَ الدرسِ.

١) مثّلْ كلًّا منَ الاقتراناتِ الآتيةِ بيانيًّا:

أ) ق(س) = ٤س ب) ك(س) = $\frac{س + ٢}{٣}$ جـ) ل(س) = ٩,٥ـ

٢) أيُّ المستقيماتِ الآتيةِ يُعَدُّ تمثيلًا للاقترانِ ق(س)=٢س+١؟ مبررًا إجابتكَ.



(أ) (ب) (جـ)

٣) اكتبْ قاعدةَ الاقترانِ الخطيِّ الذي يمرُّ منحناهُ بالنقاطِ الآتيةِ:

(١٠ ، ٢,٥) ، (ـ٤ ، ـ١) ، (٠ ، ٠) ، (٢٠ ، ٥)

٤) تقودُ لمياءُ سيارتَها بسرعةِ ٧٠كم/ساعةٍ، وقدْ لاحظتْ أنَّ هناكَ علاقةً تربطُ المسافةَ بالزمنِ، عبّرتْ عنها بالاقترانِ ف(س) = ٧٠س، حيثُ س الزمنَ بالساعاتِ. مثّلْ منحنى الاقترانِ ف بيانيًّا.

٥) كوّنَ أحمدُ الجدولَ الآتي، اكتشفِ الخطأَ في الجدولِ الذي كوّنَهُ أحمدُ، واكتبِ الصوابَ.

س	ص = ٤ - ٢س	(س ، ص)
١	ص = ٤ - ٢ = ٢	(١ ، ٢)
٢ـ	ص = ٤ - ٢ = ٢	(٢ ، ٢ـ)
صفر	ص = ٤ - ٠ = ٤	(٤ ، صفر)

٦) تسيرُ حافلةٌ سياحيةٌ بسرعةٍ منتظمةٍ مقدارُها ٦٠كم/ساعةٍ، إذا كانتِ الحافلةُ ستصلُ وجهتَها الأولى بعدَ مضيِّ ٤ساعاتٍ؛ حيثُ يُلْغِ سائقُ الحافلةِ عن المسافةِ التي يقطعُها كلَّ نصفِ ساعةٍ؛ تطبيقًا لإجراءاتِ الأمانِ المتبعةِ في شركةِ النقلِ.

أ) كوِّنْ جدولاً يمثلُ العلاقةَ بينَ الزمنِ وَ المسافةِ التي تقطعُها الحافلةُ كلَّ نصفِ ساعةٍ، ثمَّ مثِّلْها بيانيًا.

ب) اكتبِ القاعدةَ التي تمثلُ البياناتِ المعطاةَ.

جـ) ما المسافةُ المقطوعةُ بعدَ مضيِّ ٨ ساعاتٍ؟

د) ما الوقتُ اللازمُ حتى تسيرَ الحافلةُ مسافةَ ٣٠٠ كم؟

هـ) اختَرْ زوجًا مرتَّبًا يقعُ على منحنى العلاقةِ عدا الأزواجَ المستخدمةَ في التمثيلِ، قدِّمْ وصفًا لفظيًّا لهُ.

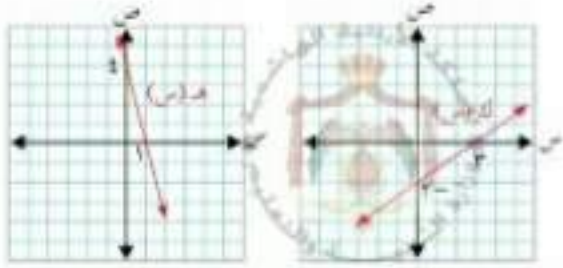
الدرس الرابع: خصائصُ الاقترانِ الخطيّ

النتاجات

- تستقصي خصائص الاقترانِ الخطيّ.

نشاط (١)

اعتمادًا على الشكلينِ الآتيينِ، أجبْ عما يليهما:



١) اكتبْ نقطةَ تقاطعِ منحنى الاقترانِ ك معَ محورِ السيناتِ.

٢) اكتبْ نقطةَ تقاطعِ منحنى الاقترانِ ك معَ محورِ الصاداتِ.

٣) إذا علمتَ أنَّ ك(س) = $\frac{٢}{٣}$ س − ٢، فجدْ كلًّا مما يأتي:

- ك (٠)
- س حيث ك (س) = ٠

ماذا تلاحظُ؟

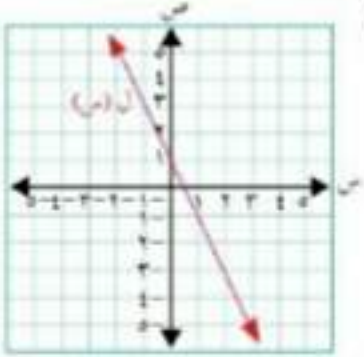
٤) كرر الخطواتِ السابقة للاقتران هـ(س) = −٤س + ٤

إذا قطعَ منحنى الاقترانِ ق(س) = أس + ب محورَ السيناتِ في النقطةِ (ر ، ٠) فإنَّ رتُسمى المقطعَ السينيَّ لمنحنى الاقترانِ ق. وإذا قطعَ محورَ الصاداتِ في النقطةِ (٠ ، ن) فإنَّ ن تُسمى المقطعَ الصاديَّ لمنحنى الاقترانِ ق ويساوي الثابتَ ب.

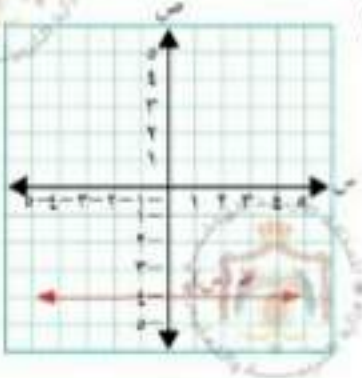
مثالٌ (١)

جدِ المقطعَ السينيَّ والمقطعَ الصاديَّ لمنحنى كلٍّ منَ الاقترانات الآتية:

١)



٢)



٣) م(س) = ٣س + ١٢

٤) هـ(س) = ١ − $\frac{٢}{٣}$س

الحلُّ

١) يقطعُ منحنى الاقترانِ ل محورَ ص في (....،....)، ومنهُ المقطعُ السينيُّ يساوي ٥،٠.
بينما يقطعُ محورَ ص في (....،....)، ومنهُ المقطعُ الصاديُّ يساوي ١.

٢) لا يقطعُ منحنى الاقترانِ ط محورَ س، ومنهُ لا يوجدُ مقطعٌ سينيٌّ للاقترانِ، بينما قطعَ منحناهُ محورَ ص في (....،....)،ومنهُ المقطعُ الصاديُّ يساوي −٤.

٣) لإيجادِ المقطعِ السينيِّ عوّضْ مكانَ م(س) صفرًا في قاعدةِ الاقترانِ:

م(س) = −٣س + ١٢

٠ = −٣س + ١٢

−١٢ = −٣س

س = −٤، إذنِ المقطعُ السينيُّ = −٤

المقطعُ الصاديُّ للاقترانِ = الحدُّ المطلقُ ب، إذنِ المقطعُ الصاديُّ = ١٢.

هلْ يوجدُ طريقةٌ أخرى لإيجادِ المقطعِ الصاديِّ؟

٤) عوّضْ هـ(س) صفرًا في الاقترانِ:

هـ(س) = ١ − $\frac{٢}{٣}$ س

٠ = ١ − $\frac{٢}{٣}$ س

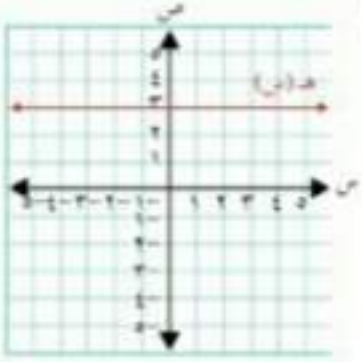
س = $\frac{٣}{٢}$ ، إذنِ المقطعُ السينيُّ = $\frac{٣}{٢}$

المقطعُ الصاديُّ للاقترانِ = الحدُّ المطلقُ ب ، إذنِ المقطعُ الصاديُّ = ١.

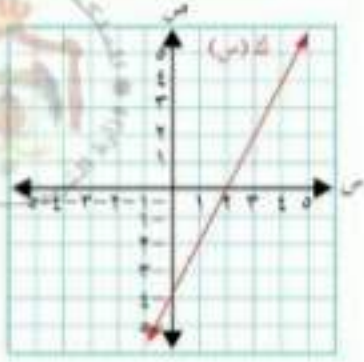
تدريبٌ ١

حددِ المقطعَ السينيَّ والمقطعَ الصاديَّ لمنحنى كلٍّ منَ الاقتراناتِ الآتيةِ:

١)



٢)



٣) م(س) = −١١س

٤) و(س) = ٦ − ٩س

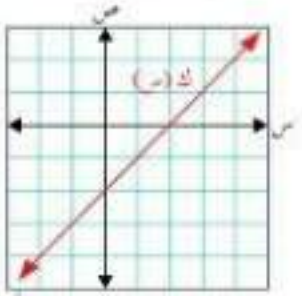
فكّرْ وناقشْ

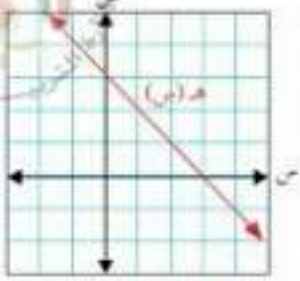
ناقشْ مدى صحّةِ كلٍّ منَ العبارتينِ الآتيتينِ؛ مبررًا إجابتكَ:

- للاقترانِ الخطيِّ مقطعٌ سينيٌّ واحدٌ على الأكثرِ ما لمْ ينطبقْ على محورِ السيناتِ، وكذلكَ مقطعٌ صاديٌّ واحدٌ على الأكثرِ ما لمْ ينطبقْ على محورِ الصاداتِ.
- يمكنُ الاكتفاءُ بالمقطعِ السينيِّ والمقطعِ الصاديِّ لرسمِ منحنى الاقترانِ الخطيِّ.

نشاطٌ (٢)

ادرسِ الشكلينِ الآتيينِ جيدًا، ثمَّ أكملِ الجدولَ الذي يليهما:





	ك(س) = س − ٢		هـ(س) = −س + ٣		
س	ص = ك (س)	(س ، ص)	س	ص = هـ (س)	(س ، ص)
−٢			−٥		
−١			−٤		
صفر			١		
١			٢		
٢			٣		

- ما إشارةُ معاملِ س؟
- هل الاقترانُ ك متزايدٌ أم متناقصٌ؟

- ما إشارةُ معاملِ س؟
- هل الاقترانُ هـ متزايدٌ أم متناقصٌ؟

ماذا نلاحظُ؟

- يكونُ الاقترانُ الخطيُّ ق(س) = أ س + ب متزايدًا إذا كانتْ قِيَمُ ق(س) تزدادُ بازديادِ قِيَمِ س، ويكونُ عندَها أ > صفرٍ .
- يكونُ الاقترانُ الخطيُّ ق(س) = أ س + ب متناقصًا إذا كانتْ قِيَمُ ق(س) تتناقصُ بازديادِ قِيَمِ س، ويكونُ عندها أ < صفرٍ.

تدريب ٢

بيّنْ أيٌّ الاقتراناتِ الآتيةِ متزايدٌ، وأيّها متناقصٌ، وأيّها ثابتٌ؛ مبررًا إجاباتكَ:

١) الاقترانُ الذي يمثلُ عددَ القمصانِ التي تنتجُها آلةٌ خلالَ العامِ، إذا كانتْ تنتجُ العددَ نفسَهُ منَ القمصانِ يوميًّا.

٢) الاقترانُ الذي يبينُ العلاقةَ بينَ محيطِ الدائرةِ ونصفِ قطرِها.

٣) الاقترانُ الذي يبينُ العلاقةَ بينَ أجرةِ (تكسي) والمسافةِ التي يقطعُها لإيصالِ راكبٍ.

٤) الاقترانُ الذي يمثلُ ارتفاعَ غرفةِ الصفِّ خلالَ أيامِ العامِ الدراسيِّ.

٥) المبلغُ المتبقي معَ طالبٍ يمتلكُ ٤ دنانيرَ، يصرفُ منها نصفَ دينارٍ يوميًّا.

تدريب ٣

بيّنْ أيٌّ الاقتراناتِ الخطيةِ الآتيةِ متزايدٌ، وأيّها متناقصٌ، وأيّها ثابتٌ؛ مبررًا إجاباتكَ:

١) ق(س) = س − ٢,٧

٢) ق(س) = −٣(٢ − س)

٣) ق(س) = −٢٤

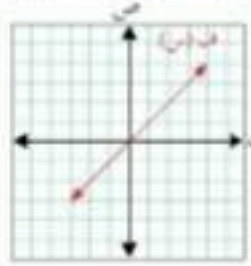
٤) ق(س) = $\frac{٤٨ + ٦س}{١٢-}$

٥) ق(م) = س

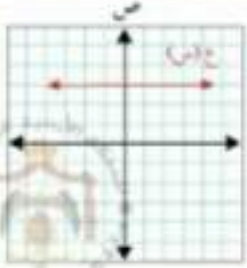
٦) ق(س) = ٨ − ٤س

١) صنّفْ كلًّا منَ الاقترانات الخطيةِ الآتيةِ إلى متزايدٍ، أوْ متناقصٍ، أوْ ثابتٍ ثمّ جدْ المقطعَ السينيَّ والمقطعَ الصاديَّ لكُلٍّ منها:

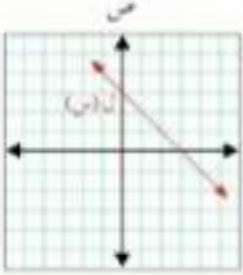
أ)



ب)

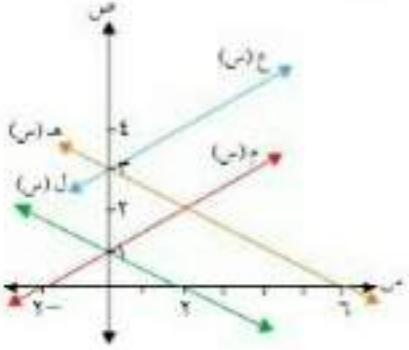


جـ)



د) ت(س) = ٢٨ هـ) ط(س) = ٨ − ٠,٤ س

٢) معتمدًا على الشكلِ المجاورِ، اكتبْ رمزَ المستقيمِ أمامَ قاعدةِ الاقترانِ الذي يمثلُهُ في ما يأتي:



أ) ص = $\frac{١}{٢}$ س + ١، المستقيم .....

ب) ص = $\frac{-١}{٢}$ س − ١، المستقيم .....

جـ) ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٣، المستقيم .....

د) ص = $\frac{-١}{٢}$ س + ٣، المستقيم .....

٣) اكتبْ قاعدةَ اقترانٍ يحققُ الخصائصَ الآتيةَ، ثمّ قارنْ إجابتكَ معَ إجابةِ زميلكَ:

أ) متزايدٌ، وَمقطعُهُ الصاديُّ = −٦

ب) ثابتٌ، وَمقطعُهُ الصاديُّ = −٦

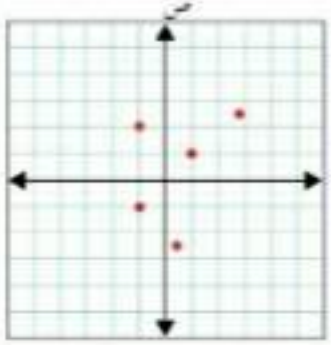
جـ) متناقصٌ، ومقطعُهُ الصاديُّ = −٦، وَمقطعُهُ السينيُّ = −٣

٤) مثّلْ ق(س) = ١ − ٣س بيانيًّا منْ خلالِ تحديدِ المقطعِ السينيِّ وَالمقطعِ الصاديِّ فقطْ.

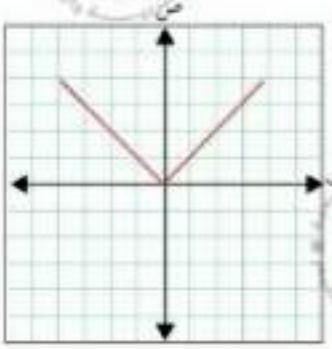
مراجعة

١) أيُّ منَ العلاقاتِ الآتيةِ تمثلُ اقترانًا، مبررًا إجابتَكَ؟

أ)



ب)



جـ) ك = {(-٤، ٥)، (٧، -٥)، (٢، ٩)، (-٩، -٢)، (٠، ٠)}

د) هـ = {(١، ٢)، (١، ٦)، (٣، ٨)، (٨، ١٠)}

٢) مثِّلِ الاقتراناتِ الآتيةَ بيانيًّا من خلالِ تحديدِ المقطعِ السينيِّ والمقطعِ الصاديِّ فقطْ:

أ) ن(س) = ٢(٣ - س)

ب) ط(س) = س - ٠,٦

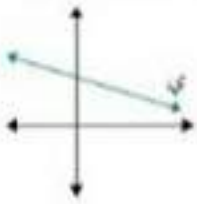
جـ) ك(س) = ٢,١

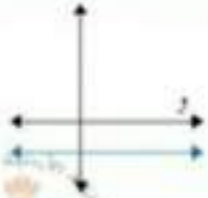
د) ل(س) = س

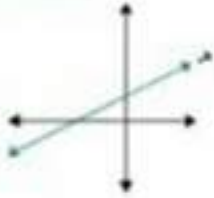
٣) هل يمرُّ منحنى الاقترانِ هـ(س) = ٤س - ٣ بالنقطةِ (-٢، ٥)؟ برِّرْ إجابتَكَ.

٤) أيُّ مستقيمٍ مما يأتي يُعدُّ أفضلَ تمثيلٍ للأزواجِ المرتبةِ الموضحةِ في الجدولِ الآتي، إذا علمتَ أنَّ أ، ب، جـ، د ∈ ح حيث د < جـ < ب < أ

س	-٢	-١	٠	١
ص	أ	ب	جـ	د







٥) طلبَ المعلمُ منْ طلابِ الصفِّ إيجادَ المقطعِ الصاديِّ للاقترانينِ ق ، هـ فكانتْ إجاباتُ ماجدٍ ومحمدٍ كالآتي:

	ق(س) = ٤س	هـ(س) = ٧س − ١
إجابةُ ماجدٍ	لا يوجدُ	−١
إجابةُ محمدٍ	صفر	−١

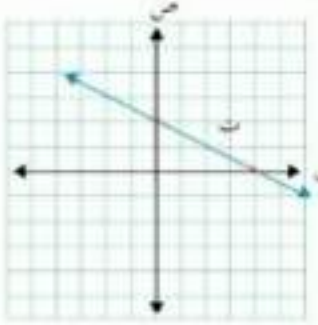
حدِّدْ أيهما أصابَ وأيهما أخطأَ؛ مبررًا إجابتَكَ.

٦) مثِّلْ منحنى الاقترانِ ل(س) في كلِّ حالةٍ من الحالاتِ الآتيةِ:

أ) متزايدٌ، ومقطعُهُ الصاديُّ = −٦ ، ومقطعُهُ السينيُّ = ٣

ب) متناقصٌ، ومقطعُهُ الصاديُّ = −٦ ، ومقطعُهُ السينيُّ = −٤

٧) اكتبْ موقفًا حياتيًا يفسّرُ التمثيلَ المجاورَ للاقترانِ ت.



٨) يودعُ ناجرٌ ١٥٠ دينارًا في حسابِ التوفيرِ كلَّ يومٍ لمدةِ عشرةِ أيامٍ متتاليةٍ. كوّنْ جدولًا يوضحُ قيمةَ الإيداعِ اليوميِّ، ورصيدَ حسابِهِ بعدَ كلِّ إيداعٍ.

أ) اكتبْ قاعدةَ العلاقةِ بينَ عددِ الأيامِ وقيمةِ الإيداعِ اليوميِّ، ثمَّ مثِّلْها بيانيًا.

ب) اكتبْ قاعدةَ العلاقةِ بينَ عددِ الأيامِ ورصيدِهِ، ثمَّ مثِّلْها بيانيًا.

جـ) ما نوعُ العلاقةِ في الفرعِ (أ) ؟ وما نوعُها في الفرعِ (ب) ؟

١) يتكونُ هذا السؤالُ مِنْ ٥ فقراتٍ منْ نوعِ الاختيارِ منْ متعددٍ، لكلِّ فقرةٍ منها ٤ بدائلَ، واحدٌ فقطْ منها صحيحٌ، ضعْ دائرةً حولَ رمزِ البديلِ الصحيحِ:

(١) الاقترانُ الخطيُّ منْ بينِ الاقتراناتِ الآتيةِ هو:

أ) ق(س) = ٢س$^{-١}$ ب) هـ(س) = ٤

جـ) و(س) = س^{٢} د) ي(س) = ٣ − س^{١}

(٢) أحدُ الاقتراناتِ الآتيةِ هوَ اقترانٌ ثابتٌ:

أ) ق(س) = س^{٣} + ٢ ب) ع(س) = π

جـ) ل(س) = ٥س + ٢س د) و(س) = $\frac{١}{س}$

(٣) أيُّ النقاطِ الآتيةِ يمرُّ بها منحنى الاقترانِ ك(س) = س^{٢}؟

أ) (٣، −٩) ب) (١، ٢)

جـ) (−٢، −٤) د) (٠,٥، ٠,٢٥)

(٤) أحدُ الاقتراناتِ الآتيةِ هوَ اقترانٌ خطيٌّ متزايدٌ:

أ) ع(س) = ٢ − ٥س ب) ل(س) = ٤س^{٢}

جـ) م(س) = −١٧ د) ن(س) = −$(\frac{٣ - س}{٢})$

(٥) المقطعُ الصاديُّ للاقترانِ ق(س) = −٧س − ٣ هوَ:

أ) $\frac{٣}{٧}$ ب) $\frac{-٣}{٧}$ جـ) ٣ د) −٣

٢) مثِّلِ الاقتراناتِ الآتيةَ بيانيًّا، ثمَّ حددِ المقطعَ السينيَّ والمقطعَ الصاديَّ لكلٍّ منها:

أ) ق(س) = −٣

ب) ك(س) = ٥س

جـ) د(س) = −س

د) ت(س) = ٣ − $\frac{٣}{٤}$ س

٣) هلْ يمرُّ منحنى الاقترانِ ط(س) = ٣س − ١٢ بالنقطةِ (−٤، ٠)؟ برِّرْ إجابتَكَ.

٤) يُخرجُ المسلمُ زكاةً نسبتُها ٢,٥٪ من مالِهِ الذي مرَّ عليهِ حولٌ (عامٌ) كاملٌ إذا بلغَ النصابَ، وهوَ ما يُعادلُ ثمنَ ٨٥غرامًا منَ الذهبِ أو ٥٩٥غرامًا منَ الفضةِ.

أ) اكتبْ قاعدةَ الاقترانِ الذي يبينُ العلاقةَ بينَ قيمةِ المالِ وقيمةِ الزكاةِ المستحقةِ عليهِ.

ب) ما مقدارُ الزكاةِ الواجبةِ على رجلٍ يملكُ ٥٠٠٠ دينارٍ بلغتْ النصابَ وحالَ عليها الحولُ؟

٥) اكتبْ قاعدتَي اقترانينِ لهما المقطعُ الصاديُّ نفسهُ، أحدُهما متزايدٌ والآخرُ متناقصٌ، ثمَّ مثِّلْهُما بيانيًّا على الرسمِ نفسهِ.

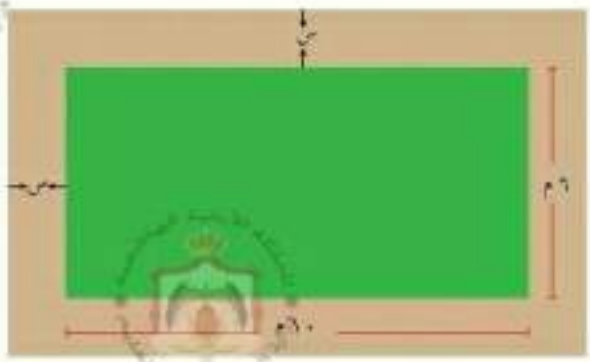
٦) قرَّرتْ ياسمينُ وصديقاتُها جمعَ تبرعاتٍ لترميمِ أحدِ المساجدِ؛ فوضعتْ خطةً تقتضي توفيرَ مبلغِ ٢٠دينارًا شهريًّا منهنَّ، وكانَ أهلُ الحيِّ قد جمعوا مبلغَ ٢٨٠ دينارًا.

أ) اكتبْ قاعدةَ الاقترانِ الذي يمثلُ قيمةَ المبلغِ المتوفرِ بعدَ عددٍ منَ الأشهرِ.

ب) احسبْ عددَ الأشهرِ الكافيةِ لتوفيرِ المبلغِ المطلوبِ؛ إذا علمتَ أنَّ الكلفةَ الكليةَ لترميمِ المسجدِ هيَ ١٠٠٠ دينارٍ.

جـ) مثِّلِ الاقترانَ بيانيًّا موضحًا عددَ الأشهرِ الكافيةِ لجمعِ المبلغِ المتبقي.

٧) حديقةٌ مستطيلةُ الشكلِ طولُها (١٠) أمتارٍ، وعرضُها (٦) أمتارٍ، يُرادُ إحا
بممرٍّ منتظمٍ عرضُهُ س مترًا كما في الشكلِ التالي:



اكتبْ قاعدةَ الاقترانِ التي تعبرُ عنْ مساحةِ الممرِّ.

٨) تبعدُ سيارةُ أطفالٍ عن النقطةِ (أ) مسافةَ ١٢٠سم، ثمَّ بدأتِ الحركةَ في خطٍّ مستقيمٍ يمرُّ من النقطةِ (أ) وبسرعةِ ٢,٥سم في الثانيةِ، اكتبْ قاعدةَ الاقترانِ التي تُعطي المسافةَ (ف) مقيسةً من النقطةِ (أ) بدلالةِ الزمنِ (ن) الذي أمضتهُ السيارةُ في مسيرِها مبتعدةً عن (أ)، وهل تمثِّلُ اقترانًا خطيًّا؟

٤ الوحدةُ الرابعةُ

الإحصاءُ

الإحصاءُ هوَ العلمُ الذي يبحثُ في طرقِ جمعِ البياناتِ الخاصةِ بمختلفِ الظواهرِ، وعرضِها وتحليلِها للوصولِ إلى نتائجَ تساعدُ في وضعِ التوصياتِ ثمَّ اتخاذِ القراراتِ.

أما الإحصائياتُ فهيَ البياناتُ العدديةُ المتعلقةُ بموضوعٍ ما، والمنظمةُ في جداولَ أوْ رسوماتٍ بيانيةٍ حولَ نشاطِ قطاعٍ معينٍ، فمثلًا نقولُ إحصائياتِ السكانِ، وإحصائياتِ التعليمِ العالي، وبالتالي فإنَّ الإحصائياتِ هيَ المادةُ الأوليةُ التي تُستَخدَمُ في علمِ الإحصاءِ.

وسوفَ نتناولُ في هذهِ الوحدةِ مقاييسَ النزعةِ المركزيةِ للبياناتِ المنظمةِ في جداولَ تكراريةٍ (أو مقاييسَ الموقعِ)، التي تحاولُ أنْ تصفَ نقطةَ تجمعِ القيمِ. وهذهِ المقاييسُ هيَ: المتوسطُ الحسابيُّ، والوسيطُ، والمنوالُ.

يتوقعُ منَ الطالبِ في نهايةِ هذهِ الوحدةِ أن يكونَ قادرًا على:

- حسابِ المتوسطِ الحسابيِّ لبياناتٍ منظمةٍ في جدولٍ تكراريٍّ، وتفسيرِها .
- شرحِ كيفَ يؤثرُ اختيارُ الفئاتِ في الجداولِ التكراريةِ في مقاييسِ الموقعِ المحسوبةِ، واستخدامِها.
- حسابِ الوسيطِ للبياناتِ المنظمةِ في جدولٍ تكراريٍّ.
- حسابِ المنوالِ للبياناتِ المنظمةِ في جدولٍ تكراريٍّ.
- تفسيرِ العلاقاتِ بينَ مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ، وأشكالِ التوزيعِ.
- استقصاءِ أثرِ تعديلِ البياناتِ في مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ (مقاييسِ الموقعِ).
- مناقشةِ النتائجِ والتوقعاتِ والاستدلالاتِ حولَ جمعِ البياناتِ لحلِّ مسائلَ واقعيةٍ.
- تحديدِ المقاييسِ الأنسبِ منْ مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ: (المتوسطِ، والوسيطِ، والمنوالِ)، واستخدامِهِ في سياقٍ معطىً.

الدرس الأول

المتوسطُ الحسابيُّ

النتاجات

- تحسبُ المتوسطَ الحسابيَّ لبياناتٍ منظمةٍ في جدولٍ تكراريٍّ.
- تفسّرُ المتوسطَ الحسابيَّ لبياناتٍ منظمةٍ في جدولٍ تكراريٍّ.
- تفسّرُ كيفَ يؤثّرُ اختيارُ الفئاتِ في الجداولِ التكراريةِ، في مقاييسِ الموقعِ المحسوبةِ.

سُئِلَتْ ٢٠ عائلةً أردنيةً، كلُّ عائلةٍ مكونةٌ منْ ٥ أفرادٍ، عنْ كميةِ الماءِ التي تشربُها يوميًّا (باللترِ)، فكانتْ كما يأتي:

١١، ١٢، ٩، ٨، ٦، ٧، ٥، ٧، ١٠، ٨، ٤، ٨، ١٢،

١٠، ١١، ٣، ٧، ١٢، ٣، ٧.

جدْ كلًّا مما يأتي:

١) المتوسطَ الحسابيَّ لكميةِ الماءِ التي تشربُها العائلةُ الواحدةُ يوميًّا.

٢) المتوسطَ الحسابيَّ لكميةِ الماءِ التي يشربُها الفردُ يوميًّا.

تعلمتَ في الصفِّ السابعِ حسابَ المتوسطِ الحسابيِّ للقيمِ المفردةِ (المشاهداتِ) وأنَّ المتوسطَ الحسابيَّ هوَ أحدُ مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ (مقاييسِ الموقعِ) ويرمزُ لهُ بالرمزِ $\bar{س}$.

ولحسابِ المتوسطِ الحسابيِّ لكميةِ الماءِ التي تشربُها العائلةُ الواحدةُ يوميًّا يمكنُ استخدامُ قانونِ المتوسطِ الحسابيِّ:

$$\bar{س} = \frac{\text{مجموعُ القيمِ}}{\text{عددُها}} = \frac{١٦٠}{٢٠} = ٨ \text{ لتراتٍ يوميًّا.}$$

إذنْ: المتوسطُ الحسابيُّ لكميةِ الماءِ التي تشربُها العائلةُ الواحدةُ يوميًّا = ٨ لتراتٍ
والمتوسطُ الحسابيُّ لكميةِ الماءِ التي يشربُها الفردُ الواحدُ يوميًّا = ٨ ÷ ٥ = ١,٦ لتر.

فكّرْ وناقشْ

هلْ يوجدُ طريقةٌ أخرى لحسابِ المتوسطِ الحسابيِّ لكميةِ الماءِ التي يشربُها الفردُ الواحدُ يوميًّا؟ مبررًا إجابتَكَ.

مثالٌ (١)

نظمِ البياناتِ الواردةَ في مقدمةِ الدرسِ في جدولٍ تكراريٍّ فئتُهُ الأولى (١–٥) ، ثمَّ احسبْ:

١) المتوسطَ الحسابيَّ لكميةِ الماءِ التي تشربُها العائلةُ الواحدةُ يوميًّا.

٢) المتوسطَ الحسابيَّ لكميةِ الماءِ التي يشربُها الفردُ الواحدُ يوميًّا.

الحلُّ

طولُ الفئةِ = الحدُّ الأعلى – الحدُّ الأدنى + ١ لماذا + ١؟

= ٥ – ١ + ١

= ٤ + ١

= ٥

يمكنُ حسابُ طولِ الفئةِ باستخدامِ الحدودِ الفعليةِ؛ حيثُ نطرحُ نصفَ وحدةٍ منَ الحدِّ الأدنى، ونضيفُ نصفَ وحدةٍ للحدِّ الأعلى فنحصلُ على الحدودِ الفعليةِ للفئةِ، مثلًا: الحدودُ الفعليةُ للفئةِ الأولى هيَ : (٠,٥ – ٥,٥) وعليهِ فإنَّ:

طولَ الفئةِ الأولى = الحدُّ الأعلى الفعليُّ – الحدُّ الأدنى الفعليُّ

= ٥,٥ – ٠,٥ لماذا لا نوحدّ + ١؟

= ٥

منَ المهمّ عندَ بناءِ الجدولِ التكراريّ أنْ يكونَ طولُ الفئةِ متساويًا لجميعِ فئاتِ الجدولِ التكراريّ. وعليهِ يمكنُ تنظيمُ البياناتِ كما في الجدولِ التكراريّ الآتي:

الفئاتُ	التكرارُ
١-٥	٤
٦-١٠	١١
١١-١٥	٥
المجموع	٢٠

لحسابِ المتوسطِ الحسابيّ نلاحظُ أنّ تكرارَ الفئةِ الثانيةِ مثلًا يساوي ١١، ويوجدُ ٥ قيمٍ ضمنَ هذهِ الفئةِ، وَهيَ: ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠ وَلا نستطيعُ تحديدَ تكرارِ كلّ قيمةٍ منْ هذهِ القيمِ إلا بالرجوعِ إلى القيمِ الأصليةِ، وَعليهِ فإننا نحتاجُ إلى عمودٍ جديدٍ بعنوانِ مركزِ الفئةِ حيثُ إنّ:

$$\text{مركزُ الفئةِ} = \frac{\text{الحدُّ الأعلى} + \text{الحدُّ الأدنى}}{٢}$$

$$\text{مثلاً مركزُ الفئةِ الثانيةِ} = \frac{٦ + ١٠}{٢} = \frac{١٦}{٢} = ٨$$

ولإيجادِ مجموعِ القيمِ نحتاجُ إلى عمودٍ جديدٍ آخرَ بعنوانِ (مركزُ الفئةِ × التكرار)، ثمّ نطبقُ قانونَ المتوسطِ الحسابيّ الذي يساوي مجموعَ القيمِ على عددِها كما يأتي:

الفئاتُ	التكرارُ	مركز الفئة س	مركز الفئة × التكرار س × ت
١-٥	٤	٣	١٢
٦-١٠	١١	٨	٨٨
١١-١٥	٥	١٣	٦٥
المجموع	٢٠	-	١٦٥

إذنْ: $\bar{س} = \frac{١٦٥}{٢٠} = ٨,٢٥$ لتر.

١) المتوسطُ الحسابيُّ لكميةِ الماءِ التي تشربُها العائلةُ الواحدةُ يوميًّا = ٨,٢٥ لتر.

٢) المتوسطُ الحسابيُّ لكميةِ الماءِ التي يشربُها الفردُ الواحدُ يوميًّا = ٨,٢٥ ÷ ٥ = ١,٦٥ لتر.

المتوسطُ الحسابيُّ للبياناتِ المبوبةِ في جدولٍ تكراريٍّ

$$= \frac{\text{مجموعُ حواصلِ ضربِ مراكزِ الفئاتِ في تكرارِها}}{\text{مجموعُ التكراراتِ}}$$

$$\text{وبالرموزِ } \bar{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر \times ت_ر)}{\sum_{ر=١}^{ن} ت_ر}$$

حيثُ: $\bar{س}$: ترمزُ للمتوسطِ الحسابيِّ.

$س_ر$: ترمزُ لمراكزِ الفئاتِ من ر = ١ إلى ن.

$ت_ر$: ترمزُ لتكرارِ الفئاتِ من ر = ١ إلى ن.

تدريب ١

نظِّمُ البياناتِ الواردةَ في مقدمةِ الدرسِ في جدولٍ تكراريٍّ فئتُهُ الأولى (١–٤)، ثمَّ أحسبُ:

١) المتوسطَ الحسابيَّ لكميةِ الماءِ التي تشربُها العائلةُ الواحدةُ يوميًّا.

٢) المتوسطَ الحسابيَّ لكميةِ الماءِ التي يشربُها الفردُ الواحدُ يوميًّا.

فكّر وناقش

ادرسِ النتائجَ التي حصلتَ عليها في مثالِ (١) وقارنْها مع النتائجِ التي توصلتَ إليها في تدريبِ (١). وبرّرْ سببَ الاختلافِ بينَها مع أنها تعودُ إلى المشاهداتِ نفسِها.

تدريبٌ ٢

أُجريَتْ دراسةٌ إحصائيةٌ للأجورِ الأسبوعيةِ لـ ١٠٠ عاملٍ بالدينارِ الأردنيِّ؛ فكانتْ كما يوضحُها الجدولُ الآتي:

الفئاتُ	٤٠ – ٤٤	٤٥ – ٤٩	٥٠ – ٥٤	٥٥ – ٥٩	٦٠ – ٦٤
التكرارُ	٢٠	٤٠	١٠	٢٠	١٠

جدِ المتوسطَ الحسابيَّ لأجورِ العمالِ الأسبوعيةِ.

تدريبٌ ٣

يمثلُ الجدولُ الآتي كتلَ ٥٠ شخصًا لأقربِ كغ:

الفئاتُ	٥٠–٥٤	٥٥ – ٥٩	٦٠ – ٦٤	٦٥ – ٦٩	٧٠ – ٧٤	٧٥ – ٧٩	٨٠ – ٨٤
التكرارُ	٤	٥	٧	١٢	٩	٥	٨

جدِ المتوسطَ الحسابيَّ لكتلِ الأشخاصِ.

تمارينُ ومسائلُ

١) يمثلُ الجدولُ الآتي كميةَ الماءِ التي تستهلكُها ٥٠ عائلةً أردنيةً خلالَ شهرٍ مقربةً إلى أقربِ مترٍ مكعبٍ:

الفئاتُ	١١-١	٢٢-١٢	٣٣-٢٣	٤٤-٣٤	٥٥-٤٥	٦٦-٥٦	٧٧-٦٧
التكرارُ	٣	٩	١٢	١٠	٧	٥	٤

احسبِ المتوسطَ الحسابيَّ لكميةِ الماءِ المستهلكةِ.

٢) يمثلُ الجدولُ الآتي علاماتِ ١٠٠ طالبٍ جامعيٍّ في مادةِ الرياضياتِ:

الفئاتُ	٣٦-٣٠	٤٣-٣٧	٥٠-٤٤	٥٧-٥١	٦٤-٥٨	٧١-٦٥	٧٨-٧٢	٨٥-٧٩	٩٢-٨٦	٩٩-٩٣
التكرارُ	٥	٧	١٠	١٢	١٥	٢٠	١٣	١٠	٦	٢

احسبِ المتوسطَ الحسابيَّ لعلاماتِ الطلبةِ.

٣) رُصِدَتْ كتلُ أمتعةِ ٤٠ مسافرًا مقربةً إلى أقربِ كغٍ، على متنِ إحدى رحلاتِ الملكيةِ الأردنيةِ، فكانتْ كما يأتي:

١٥، ٢٢، ٤٥، ٣٢، ١٩، ٢٤، ١١، ٢٥، ٤١، ١٨، ٢٢، ٣٢، ١٠، ٢١، ٣٧، ٤٠، ٣٣، ٢٨، ٤٢، ٢٦، ٣٣، ١٨، ٢٨، ٢٧، ١٥، ٣٢، ٤٠، ٢٦، ١٦، ٢٩، ٤٢، ٣٦، ١٧، ٢٢، ٢٠، ٣٠، ٤٠، ٢٤، ١٤، ٤٠.

أ) نظِّمْ هذهِ الكتلَ في جدولٍ تكراريٍّ فئتُهُ الأولى ١٠-١٦، ثمَّ احسبِ المتوسطَ الحسابيَّ لكتلِ الأمتعةِ.

ب) نظِّمْ هذهِ الكتلَ في جدولٍ تكراريٍّ فئتُهُ الأولى ١٠-٢٠، ثمَّ احسبِ المتوسطَ الحسابيَّ لكتلِ الأمتعةِ.

جـ) هلْ وُجِدَ اختلافٌ في قيمةِ المتوسطِ الحسابيِّ لكتلِ الأمتعةِ؟ برِّرْ إجابتَكَ.

٤) يمثلُ الجدولُ الآتي المتوسطَ الحسابيَّ لعلاماتِ طلبةٍ في أربعِ شعبٍ للصفِّ الثامن في مادةِ الرياضياتِ في إحدى المدارسِ، علمًا بأنَّ العلامةَ العظمى ١٠٠ وعلامةَ النجاحِ ٥٠.

الصفُّ	عددُ الطلبةِ	المتوسطُ الحسابيُّ
الثامنُ (أ)	٣٧	٦٧
الثامنُ (ب)	٣٩	٦٤
الثامنُ (جـ)	٣٨	٧٠
الثامنُ (د)	٣٦	٧٥

احسبِ المتوسطَ الحسابيَّ لعلاماتِ طلبةِ الصفِّ الثامنِ في المدرسةِ.

٥) هلْ يوجدُ تأثيرٌ لطولِ الفترةِ على المتوسطِ الحسابيِّ ؟ برِّرْ إجابتَكَ.

الوسيطُ

النتاجاتُ

- تحسبُ الوسيطَ لبياناتٍ منظَّمةٍ في جدولٍ تكراريٍّ.
- تفسرُ الوسيطَ لبياناتٍ منظَّمةٍ في جدولٍ تكراريٍّ.

يمثلُ الجدولُ الآتي الأجورَ الأسبوعيةَ لخمسينَ عاملًا في أحدِ المصانعِ بالدينارِ الأردنيِّ.

فئاتُ الأجرِ	عددُ العمالِ
٥٠ – ٥٩	٩
٦٠ – ٦٩	١٠
٧٠ – ٧٩	١٥
٨٠ – ٨٩	٨
٩٠ – ٩٩	٦
١٠٠ – ١٠٩	٢

أرادَ مديرُ المصنعِ معرفةَ قيمةِ الأجرِ الذي يكونُ عندَهُ عددُ العمالِ الذينَ يتقاضونَ أكثرَ منهُ أو يساويهِ، مساويًا لعددِ العمالِ الذينَ يتقاضونَ أقلَّ منهُ أو يساويهِ. هلْ تستطيعُ مساعدتَهُ في ذلكَ؟

لمساعدةِ مديرِ المصنعِ، لا بدَّ من حسابِ **الوسيطِ**، وهو القيمةُ التي تتوسطُ المشاهداتِ بعدَ ترتيبِها.

لحسابِ الوسيطِ لبياناتٍ منظمةٍ في جدولٍ تكراريٍّ، اتبعِ الخطواتِ الآتيةَ:

١) كوِّنْ جدولًا للحدودِ الفعليةِ العليا للفئاتِ، والتكرارِ التراكميِّ كما يأتي:

الحدودُ الفعليةُ العليا	التكرارُ التراكميُّ
٥٩,٥	٩
٦٩,٥	١٩ = ١٠ + ٩
٧٩,٥	٣٤ = ١٥ + ١٩
٨٩,٥	٤٢ = ٨ + ٣٤
٩٩,٥	٤٨ = ٦ + ٤٢
١٠٩,٥	٥٠ = ٢ + ٤٨

٢) جدْ رتبةَ الوسيطِ، وذلكَ بقسمةِ مجموعِ التكراراتِ على ٢:

$$\text{رتبةُ الوسيطِ} = \frac{\text{مجموعُ التكراراتِ}}{٢}$$

$$= \frac{٥٠}{٢} = ٢٥$$

٣) حددْ ترتيبَ الوسيطِ في عمودِ التكرارِ التراكميِّ، وبقابلِهُ قيمةُ الوسيطِ (س) في عمودِ الحدودِ الفعليةِ العليا كما يظهرُ في الجدولِ الآتي:

الحدودُ الفعليةُ العليا	التكرارُ التراكميُّ
٥٩,٥	٩
الوسيطُ س ← ٦٩,٥	١٩ = ١٠ + ٩ ← رتبةُ الوسيطِ ٢٥
٧٩,٥	٣٤ = ١٥ + ١٩
٨٩,٥	٤٢ = ٨ + ٣٤
٩٩,٥	٤٨ = ٦ + ٤٢
١٠٩,٥	٥٠ = ٢ + ٤٨

٤) استخدمِ النسبةَ والتناسبَ لإيجادِ قيمةِ الوسيطِ:

٦٩,٥	١٩
الوسيط س	(ترتيبُ الوسيطِ) − ٢٥
٧٩,٥	٣٤

$$\frac{١٩ - ٢٥}{١٩ - ٣٤} = \frac{٦٩,٥ - س}{٦٩,٥ - ٧٩,٥}$$

$$\frac{٦ \times ١٠}{١٥} = ٦٩,٥ - س$$

$$٤ = ٦٩,٥ - س$$

$$س = ٧٣,٥$$

إذنْ: الوسيطُ = ٧٣,٥ دينارًا.

أيْ أنَّ: قيمةَ الأجرِ الذي يبحثُ عنهُ مديرُ المصنعِ هوَ ٧٣,٥ دينارًا، حيثُ إنَّ عددَ العمالِ الذينَ يتقاضونَ أقلَّ منهُ أوْ يساويهِ يكونُ مساويًا لعددِ العمالِ الذينَ يتقاضونَ أكثرَ منهُ أوْ يساويهِ.

تدريب ١

احسبِ الوسيطَ في كلٍّ مما يأتي:

١)

الفئاتُ	١٢-١٦	١٧-٢١	٢٢-٢٦	٢٧-٣١	٣٢-٣٦	٣٧-٤١
التكرارُ	١٠	١٣	٧	٥	٦	٩

٢)

الفئاتُ	٤ - ٦	٧ - ٩	١٠ - ١٢	١٣ - ١٥
التكرارُ	٤	٦	٧	٣

تمارينُ ومسائلُ

١) رُصِدَتْ علاماتُ (٤٠) طالبًا منَ الصفِّ الثامنِ في التقويمِ الأولِ لمادةِ اللغةِ العربيةِ، فكانت كما يلي:

١٥، ٢٢، ٤٥، ٣٢، ١٩، ٢٤، ١١، ٢٥، ٤١، ١٨، ٢٢، ٣٢، ١٠، ٢١، ٣٧، ٤٠، ٢٨، ٣٣، ٤٢، ٢٦، ٣٣، ١٨، ٢٨، ٢٧، ١٥، ٣٢، ٤٠، ٢٦، ١٦، ٣٦، ٤٢، ١٧، ٢٢، ٣٠، ٢٠، ٤٠، ٢٤، ١٤، ٤٠، ٢٩.

أ) احسبِ الوسيطَ لعلاماتِ الطلبةِ.

ب) نظِّمْ هذهِ العلاماتِ في جدولٍ تكراريٍّ فئتُهُ الأولى ١٠–١٥، ثمَّ احسبِ الوسيطَ لعلاماتِ الطلبةِ.

جـ) نظِّمْ هذهِ العلاماتِ في جدولٍ تكراريٍّ فئتُهُ الأولى ١٠–١٩، ثمَّ احسبِ الوسيطَ لعلاماتِ الطلبةِ.

د) هلْ وجدتَ اختلافًا في قيمةِ الوسيطِ في الحالاتِ الثلاثِ؟ برِّرْ إجابتَكَ.

٢) الجدولُ الآتي يمثلُ علاماتِ ٥٠ طالبًا في اختبارِ مادةِ العلومِ نهايته العظمى منْ ٤٠.

العلاماتُ	٤–٨	٩–١٣	١٤–١٨	١٩–٢٣	٢٤–٢٨	٢٩–٣٣	٣٤–٣٨
عددُ الطلابِ	٤	١١	٦	٧	٩	٨	٥

احسبِ الوسيطَ لعلاماتِ الطلبةِ.

٣) يمثلُ الجدولُ التكراريُّ الآتي المصروفَ الشهريَّ بالدينارِ الأردنيِّ لـ ٧٠ طالبًا جامعيًّا.

الفئاتُ	٢٠–٢٣	٢٤–٢٧	٢٨–٣١	٣٢–٣٥	٣٦–٣٩	٤٠–٤٣
التكرارُ	١٨	١٥	٨	١٤	٩	٦

احسبِ الوسيطَ.

٤) هلْ يوجدُ تأثيرٌ لطولِ الفئةِ على الوسيطِ؟ برِّرْ إجابتَكَ.

الدرسُ الثالثُ: المنوالُ

الحاجات

- نحسبُ المنوالَ لبياناتٍ منظمةٍ في جدولٍ تكراريٍّ.
- نفسرُ المنوالَ لبياناتٍ منظمةٍ في جدولٍ تكراريٍّ.

استُطلعَتْ آراءُ ٢٠ طالبةً في الصفِّ الثاني عشرَ حولَ عددِ ساعاتِ الدراسةِ التي تقضيها في البيتِ يوميًا، فكانت كما يلي:

٢، ٤، ٣، ٩، ٤، ٦، ٨، ٤، ٢، ٨، ٤، ٥، ٦، ٢، ٥، ٤، ٨، ٨، ٤، ٧.

١) جدِ القيمةَ الأكثرَ تكرارًا.

٢) نظِّمِ البياناتِ في جدولٍ تكراريٍّ فئتُهُ الأولى ١ – ٣، ثمَّ جدِ القيمةَ الأكثرَ تكرارًا.

٣) ماذا تلاحظُ؟

تعلمتَ سابقًا أنَّ القيمةَ الأكثرَ تكرارًا تُسمى «المنوالَ»، لإيجادِ المنوالِ لعددِ ساعاتِ الدراسةِ التي تقضيها الطالبةُ في البيتِ يوميًا، نجدُ أنَّ القيمةَ الأكثرَ تكرارًا هي ٤ إذنْ المنوالُ = ٤.

أوْ ننظمُ عددَ الساعاتِ في الجدولِ التكراريِّ الآتي:

القيمةُ	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
التكرارُ	٣	١	٦	٢	٢	١	٤	١

القيمةُ الأكثرَ تكرارًا هيَ (٤)

إذنِ المنوالُ = ٤، ويعني أنَّ أكثرَ الطالباتِ يقضينَ ٤ ساعاتٍ يوميًا في الدراسةِ.

لاحظْ أنهُ يمكنكَ تنظيمُ عددِ ساعاتِ الدراسةِ بجدولٍ تكراريٍّ، كما في الجدولِ الآتي:

الفئاتُ	مركزُ الفئةِ	التكرارُ
١ – ٣	٢	٤
٤ – ٦	٥	١٠
٧ – ٩	٨	٦

لاحظ أيضًا أنَّ أكبرَ تكرارٍ هو ١٠ يقابلُ الفئةَ ٤ – ٦ ومركزها يُساوي ٥.

تُسمى الفئةُ ٤ – ٦ الفئةَ المنوالية ويكون المنوالُ هوَ مركزَ الفئةِ المنوالية ويساوي ٥

ويُسمى المنوالُ للبياناتِ في الجداولِ التكرارية «المنوالَ التقريبيَّ».

منَ الملاحظِ وجودُ فرقٍ في قيمةِ المنوالِ في الحالتينِ، معَ أنهُما يعودانِ إلى البياناتِ نفسها. أيُّهما يُعدُّ المنوالَ الدقيقَ؟ برِّرْ إجابتَكَ.

مثالٌ (١)

احسبِ المنوالَ للجدولِ التكراريِّ الآتي:

الفئاتُ	٧–٩	١٠–١٢	١٣–١٥	١٦–١٨	١٩–٢١	٢٢–٢٤	٢٥–٢٧
التكرارُ	٤	٨	٣	٥	٨	٦	٢

الحلُّ

الفئةُ المنوالية الأولى هيَ: ١٠–١٢، ومركزُها ١١ إذنِ المنوالُ الأولُ = ١١.

الفئةُ المنوالية الثانيةُ هيَ ١٩–٢١، ومركزُها ٢٠ إذنِ المنوالُ الثاني = ٢٠.

فكِّرْ وناقشْ

هلْ يوجدُ توزيعٌ تكراريٌّ ليسَ لهُ منوالٌ؟ برِّرْ إجابتَكَ.

تدريب ١

احسبِ المنوالَ للبياناتِ في كلٍّ مما يأتي:

١)

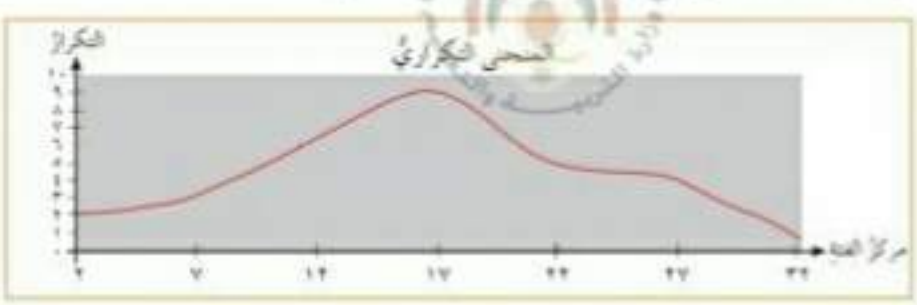
الفئاتُ	٤-٩	١٠-١٥	١٦-٢١	٢٢-٢٧	٢٨-٣٣	٣٤-٣٩	٤٠-٤٥
التكرارُ	٩	١٥	١٠	٨	٦	١٥	٧

٢)

الفئاتُ	٥٠-٥٤	٥٥-٥٩	٦٠-٦٤	٦٥-٦٩	٧٠-٧٤	٧٥-٧٩	٨٠-٨٤
التكرارُ	٤	٦	٩	٣	٧	٩	٢

مثالٌ (٢)

جدِ المنوالَ منَ الرسمِ البيانيِّ للتوزيعِ التكراريِّ الآتي:



الحل

المنوالُ ≈ ١٧

تدريب ٢

أوجدِ المنوالَ منَ الرسمِ للتوزيعِ التكراريِّ الآتي:

١) رُصِدَ الاستهلاكُ الشهريُّ منَ الخبزِ لـ ٤٠ عائلةً أردنيةً مقربةً الى أقربِ كغ، فكانتْ كما يأتي:

١٥، ٢٢، ٤٥، ٣٢، ١٩، ٢٤، ١١، ٢٥، ٤١، ١٨، ٢٢، ٣٢، ١٠، ٢١، ٣٧،
٤٠، ٣٣، ٢٨، ٤٢، ٢٦، ٣٣، ١٨، ٢٨، ٢٧، ١٥، ٣٢، ٤٠، ٢٦، ١٦، ٢٩،
٤٢، ٣٦، ١٧، ٢٢، ٢٠، ٣٠، ٤٠، ٢٤، ١٤، ٤٠.

أ) احسبِ المنوالَ للاستهلاكِ الشهريِّ من الخبزِ.

ب) نظِّمْ هذهِ البياناتِ في جدولٍ تكراريٍّ فئتُهُ الأولى ١٠–١٥، ثمَّ احسبِ المنوالَ للاستهلاكِ الشهريِّ منَ الخبزِ.

جـ) نظِّمْ هذه البياناتِ في جدولٍ تكراريٍّ فئتُهُ الأولى ١٠–١٩، ثمَّ احسبِ المنوالَ للاستهلاكِ الشهريِّ منَ الخبزِ.

د) هلْ وجدتَ اختلافًا في قيمةِ المنوالِ في الحالاتِ الثلاثِ؟ مبررًا إجابتَكَ.

٢) جدِ المنوالَ منَ الرسمِ للتوزيعِ التكراريِّ الآتي:

٣) أُجريَتْ دراسةٌ إحصائيةٌ للمصروفِ اليوميِّ لخمسينَ عائلةً أردنيةً مقربةً إلى أقربِ دينارٍ، فكانتْ كما يوضحُها الجدولُ الآتي:

الفئاتُ	٨–١١	١٢–١٥	١٦–١٩	٢٠–٢٣	٢٤–٢٧	٢٨–٣١
التكرارُ	٥	٨	١٣	١١	٧	٦

احسبِ المنوالَ للمصروفِ اليوميّ للعائلةِ.

٤) أُجريَتْ دراسةٌ إحصائيةٌ للاستهلاكِ الشهريّ لـ ١٠٠ عائلةٍ أردنيةٍ ، منَ الكهرباءِ لأقربِ كيلو واطٍ. فكانت كما يوضحُها الجدولُ الآتي:

الفئاتُ	١–١٦٠	١٦١–٣٢٠	٣٢١–٤٨٠	٤٨١–٦٤٠	٦٤١–٨٠٠	٨٠١–٩٦٠
التكرارُ	١٥	٢٠	٣٥	١٠	١٥	٥

احسبِ المنوالَ لاستهلاكِ الكهرباءِ الشهريّ.

٥) تقولُ سعادُ : «كلما قلَّ طولُ الفئةِ فإنَّ المنوالَ يقتربُ منْ قيمتِهِ الحقيقيةِ»، ما رأيكَ بقولِ سعادَ؟ مبررًا إجابتَكَ.

العلاقاتُ بينَ مقاييسِ النزعةِ المركزية

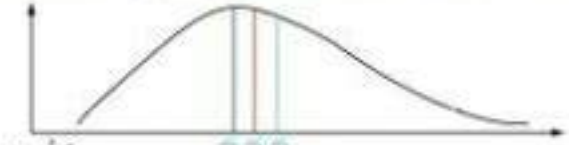
النتاجاتُ

- تفسرُ العلاقاتِ بينَ مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ، وأشكالِ التوزيعِ.

١) قارنْ بينَ الأشكالِ الثلاثةِ، الموضّحةِ جانبًا ماذا تلاحظُ؟

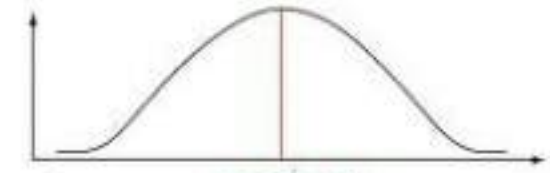
٢) يُسمى شكلُ (٣) توزيعًا متماثلًا لماذا؟

٣) ماذا نُسمّي كلًّا منَ التوزيعينِ في الشكلينِ ١، ٢؟



شكلُ (١)

شكلُ (٢)



شكلُ (٣)

نشاطٌ

احسبِ المتوسطَ الحسابيَّ، والوسيطَ، والمنوالَ (وهي مقاييسُ الموقعِ)، وعيّنْها على المنحنى المقابلِ، لكلِّ جدولٍ من الجداولِ التكراريةِ الآتيةِ، ثمّ أجبْ عن الأسئلةِ التي تليها:

الجدول (١)

الفئات	التكرار
٥–٩	٢
١٠–١٤	١٨
١٥–١٩	٩
٢٠–٢٤	٧
٢٥–٢٩	٥
٣٠–٣٤	٤
٣٥–٣٩	٣

الجدول (٢)

الفئات	التكرار
٥–٩	٣
١٠–١٤	٤
١٥–١٩	٥
٢٠–٢٤	٧
٢٥–٢٩	٩
٣٠–٣٤	١٨
٣٥–٣٩	٢

الجدول (٣)

الفئات	التكرار
٥–٩	١
١٠–١٤	٢
١٥–١٩	٩
٢٠–٢٤	١٤
٢٥–٢٩	٩
٣٠–٣٤	٢
٣٥–٣٩	١

١) أكملِ الفراغَ في الجدولِ الآتي:

الجدولُ	المتوسطُ الحسابيُّ	الوسيطُ	المنوالُ
١			١٢
٢			٣٢
٣			٢٢

٢) قارنْ بَيْنَ مقاييسِ الموقعِ لكلِّ جدولٍ منَ الجداولِ الثلاثةِ منْ حيثُ القيمةُ:

جدولُ(١): المتوسطُ الحسابيُّ .....الوسيطُ..... المنوالُ

جدولُ (٢):المتوسطُ الحسابيُّ.....الوسيطُ.....المنوالُ

جدولُ (٣): المتوسطُ الحسابيُّ.....الوسيطُ .....المنوالُ

لاحظْ مما سبقَ أنَّ:

١) التوزيعَ الذي يكونُ فيهِ (المتوسطُ الحسابيُّ > الوسيطِ > المنوالِ)، يُسمى توزيعًا ملتويًا نحوَ اليمينِ، ويكونُ شكلُ التوزيعِ كما في شكلِ (١)، في مقدمةِ الدرسِ.

٢) التوزيعَ الذي يكونُ فيهِ (المتوسطُ الحسابيُّ < الوسيطِ < المنوالِ)، يُسمى توزيعًا ملتويًا نحوَ اليسارِ، ويكونُ شكلُ التوزيعِ كما في شكلِ (٢)، في مقدمةِ الدرسِ.

٣) التوزيعَ الذي يكونُ فيهِ (المتوسطُ الحسابيُّ = الوسيطِ = المنوالِ)، يُسمى توزيعًا متماثلًا، ويكونُ شكلُ التوزيعِ كما في شكلِ (٣)، في مقدمةِ الدرسِ.

مثالُ (١)

للجدولِ التكراريِّ الآتي:

الفئاتُ	٣-٧	٨-١٢	١٣-١٧	١٨-٢٢	٢٣-٢٧	٢٨-٣٢	٣٣-٣٧
التكرارُ	١	١٥	٧	٦	٥	٤	٢

١) ارسمْ شكلَ التوزيعِ بيانيًا. ٢) ما شكلُ التوزيعِ؟

الحلُّ

١)

٢) التوزيعُ ملتوٍ نحوَ اليمينِ.

تدريب ١

للجدولِ التكراريِّ الآتي:

الفئاتُ	٣-٧	٨-١٢	١٣-١٧	١٨-٢٢	٢٣-٢٧	٢٨-٣٢	٣٣-٣٧
التكرارُ	٢	٤	٥	٦	٧	١٥	١

١) ارسمْ شكلَ التوزيعِ بيانيًا. ٢) ما شكلُ التوزيعِ؟

تدريب ٢

أكملِ الفراغَ في الجدولِ التكراريِّ الآتي بحيثُ يكونُ التوزيعُ متماثلًا:

الفئاتُ	٣-٧	٨-١٢	١٣-١٧	١٨-٢٢	٢٣-٢٧	٢٨-٣٢	٣٣-٣٧
التكرارُ				٤			

١) ارسمْ شكلَ التوزيعِ بيانيًا. ٢) ماذا تلاحظُ؟

فكّرْ وناقشْ

أيُّ مقاييسِ الموقعِ يعطي فكرةً عن شكلِ التوزيعِ منْ دونِ إجراءِ الحساباتِ؟

تمارينُ ومسائلُ

١) أكملِ الفراغَ في الجدولِ الآتي:

رقمُ التوزيعِ	المتوسطُ الحسابيُّ	الوسيطُ	المنوالُ	شكلُ التوزيعِ
١	٢٥	٢٧	٣٢	
٢			١٠٠	متماثلٌ
٣	٧٠	٦٠	٥٠	
٤	٥٠	٦٠	٧٠	
٥	٢٠	١٨	١٥	

٢) ما شكلُ التوزيعِ في كلٍّ منَ التوزيعاتِ الواردةِ في الجداولِ التكراريةِ الآتية :

أ)

الفئاتُ	١-٣	٤-٦	٧-٩	١٠-١٢	١٣-١٥	١٦-١٨
التكرارُ	٢	١٠	٦	٥	٤	٣

ب)

الفئاتُ	١-٣	٤-٦	٧-٩	١٠-١٢	١٣-١٥	١٦-١٨
التكرارُ	٣	٤	٥	٦	١٠	٢

٣) يمثلُ الجدولُ الآتي علاماتِ (١٠٠) طالبٍ جامعيٍّ في مادةِ رياضياتٍ:

الفئاتُ	٣٧-٤٣	٤٤-٥٠	٥١-٥٧	٥٨-٦٤	٦٥-٧١	٧٢-٧٨	٧٩-٨٥	٨٦-٩٢	٩٣-٩٩
التكرارُ	٤	٨	١٠	١٦	٢٤	١٦	١٠	٨	٤

أ) ارسمِ المنحنى التكراريَّ بيانيًّا.

ب) ما شكلُ التوزيعِ؟

جـ) احسبْ كلًّا منَ المتوسطِ الحسابيِّ ، والوسيطِ ،والمنوالِ .

٤) مِنَ الرسمِ، ما شكلُ التوزيعِ؟ ثمَّ قدّرْ قيمةَ كلٍّ منْ:

أ) المتوسطِ الحسابيِّ ب) الوسيطِ جـ) المنوالِ

الدرسُ الخامسُ: أثرُ تعديلِ البياناتِ في مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ

الهدف

- تستقصي أثرَ تعديلِ البياناتِ في مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ (مقاييسُ الموقعِ).

يعملُ ١٣ عاملاً في محلٍّ للحلوياتِ بأجورٍ يوميةٍ مقربةٍ إلى أقربِ دينارٍ أردنيٍّ كما يأتي:

٧، ٩، ٦، ١٢، ١٤، ٥، ٨، ١٤، ١٥، ١٠، ١٦، ١٤، ١٣.

قرّرَ صاحبُ المحلِّ زيادةَ الأجرِ اليوميِّ لكلِّ عاملٍ بمقدارِ ٣دنانيرَ.

احسبِ المتوسطَ الحسابيَّ، والوسيطَ، والمنوالَ لأجورِ العمالِ قبلَ الزيادةِ وبعدَها، ماذا تلاحظُ؟

لإيجادِ الأجرِ اليوميِّ للعمالِ بعدَ الزيادةِ، أكملِ الفراغَ في الجدولِ الآتي:

الأجرُ قبلَ الزيادةِ	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١٢	١٣	١٤	١٤	١٤	١٥	١٦
الأجرُ بعدَ الزيادةِ	٨		١٠		١٢		١٥		١٧		١٧		١٩

١) المتوسطُ الحسابيُّ = مجموعُ الأجورِ ÷ عددِ العمالِ

المتوسطُ الحسابيُّ قبلَ الزيادةِ = ١٤٣ ÷ ١٣ = ١١

المتوسطُ الحسابيُّ بعدَ الزيادةِ = ١٨٢ ÷ ١٣ = ١٤

نلاحظُ أنَّ: ١٤ = ١١ + ٣

إذنْ: المتوسطُ الحسابيُّ بعدَ الزيادةِ = المتوسطُ الحسابيُّ قبلَ الزيادةِ + ٣

٢) الوسيطُ قبلَ الزيادةِ = ١٢، الوسيطُ بعدَ الزيادةِ = ١٥

نلاحظُ أنَّ: ١٥ = ١٢ + ٣

إذنْ: الوسيطُ بعدَ الزيادةِ = الوسيطَ قبلَ الزيادةِ + ٣

المنوالُ قبلَ الزيادةِ = ١٤ ، المنوالُ بعدَ الزيادةِ = ١٧

نلاحظُ أنَّ: ١٧ = ١٤ + ٣

إذنْ: المنوالُ بعدَ الزيادةِ = المنوالَ قبلَ الزيادةِ + ٣

نستنتجُ أنَّ: مقاييسَ النزعةِ المركزيةِ تتأثرُ بعمليةِ الجمعِ.

بصورةٍ عامةٍ:

إذا عُدِّلتِ المشاهداتُ س١ ، س٢ ، س٣ ،.... ، سن حسبَ العلاقةِ الخطيةِ الآتيةِ :

صر = أ سر + ب حيثُ: صر تعني المشاهدةَ بعدَ التعديلِ

سر : المشاهدةَ قبلَ التعديلِ

أ، ب أعدادٌ حقيقيةٌ، ر = ١، ٢، ٣،.....،ن

فإنَّ:

١) المتوسطَ الحسابيَّ بعدَ التعديلِ = أ × المتوسطِ الحسابيِّ قبلَ التعديلِ + ب

٢) الوسيطَ بعدَ التعديلِ = أ × الوسيطِ قبلَ التعديلِ + ب

٣) المنوالَ بعدَ التعديلِ = أ × المنوالِ قبلَ التعديلِ + ب

مثالٌ (١)

إذا كانتْ قيمُ مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ لمجموعةٍ منَ البياناتِ كما في الجدولِ الآتي:

المقياس	المتوسطُ الحسابيُّ		الوسيطُ		المنوالُ	
	قبلَ التعديلِ	بعدَ التعديلِ	قبلَ التعديلِ	بعدَ التعديلِ	قبلَ التعديلِ	بعدَ التعديلِ
القيمةُ	٦٠		٥٠		٤٠	

أكملِ الفراغَ في الجدولِ أعلاهُ؛ إذا عُدلتِ البياناتُ حسبَ المعادلةِ الخطيةِ التاليةِ:

صر = ٢سر + ٥ حيثُ صر : القيمةُ بعدَ التعديلِ، سر : القيمةُ قبلَ التعديلِ.

الحلُّ

١) المتوسطُ الحسابيُّ بعدَ التعديلِ = ٢ × ٦٠ + ٥ = ١٢٥

٢) المتوسطُ بعدَ التعديلِ = ٢ × ٥٠ + ٥ = ١٠٥

٣) المنوالُ بعدَ التعديلِ = ٢ × ٤٠ + ٥ = ٨٥

المقياس	المتوسطُ الحسابيُّ		الوسيطُ		المنوالُ	
	قبلَ التعديلِ	بعدَ التعديلِ	قبلَ التعديلِ	بعدَ التعديلِ	قبلَ التعديلِ	بعدَ التعديلِ
القيمةُ	٦٠	١٢٥	٥٠	١٠٥	٤٠	٨٥

تدريبٌ ١

إذا كانت رواتبُ خمسةِ موظفينَ كما يأتي:

٢٢٠، ٢٠٠، ٣٠٠، ١٨٠، ٤٠٠، وعُدِّلَتِ الرواتبُ حسبَ العلاقةِ ع = ٢ل − ٥٠

حيثُ ع: الراتبُ بعدَ التعديلِ، ل: الراتبُ قبلَ التعديلِ

جدْ المتوسطَ الحسابيَّ والوسيطَ والمنوالَ لرواتبِ الموظفينَ بعدَ التعديلِ.

مثالٌ (٢)

أحسُبِ المتوسطَ الحسابيَّ لعلاماتِ طالباتِ الشعبتينِ معًا، للجدولِ الآتي:

	الصفُّ الثامنُ (أ)	الصفُّ الثامنُ (ب)
عددُ الطلبةِ	٢٢	٢٨
المتوسطُ الحسابيُّ	٣٠	٢٥

الحلُّ

مجموعُ علاماتِ الصفِّ الثامنِ (أ) = ٣٠ × ٢٢ = ٦٦٠

مجموعُ علاماتِ الصفِّ الثامنِ (ب) = ٢٥ × ٢٨ = ٧٠٠

مجموعُ علاماتِ طالباتِ الشعبتينِ معًا = ٦٦٠ + ٧٠٠ = ١٣٦٠

المتوسطُ الحسابيُّ بعدَ الدمجِ = ١٣٦٠ ÷ (٢٢ + ٢٨) = ٢٧,٢

التحققُ منْ صحةِ الحلِّ:

مركزُ الفئةِ	التكرارُ	مركزُ الفئةِ × التكرارِ
٣٠	٢٢	٦٦٠
٢٥	٢٨	٧٠٠
المجموعُ	٥٠	١٣٦٠

المتوسطُ الحسابيُّ = ١٣٦٠ ÷ ٥٠ = ٢٧,٢

فكّرْ وناقشْ

قالتْ سعادُ: المتوسطُ الحسابيُّ للشعبتينِ معًا في المثالِ السابقِ يساوي (٣٠ + ٢٥) ÷ ٢ = ٢٧,٥

ما رأيُكَ بقولِ سعادَ؟ مبرّرًا إجابتَكَ.

تدريبٌ ٢

إذا كانَ المتوسطُ الحسابيُّ لعلاماتِ ١٠ طلابٍ، يساوي ٨٥، عُدِّلَتْ علاماتُ بعضِ الطلبةِ، بحيثُ زادتْ علامةُ طالبٍ بمقدارِ ١٣ علامةً، في حينِ نقصتْ علامةُ طالبٍ آخرَ بمقدارِ ٣ علاماتٍ، احسبِ المتوسطَ الحسابيَّ للعلاماتِ بعدَ التعديلِ، ثمَّ تحققْ منْ صحةِ الحلِّ.

١) تتأثرُ مقاييسُ النزعةِ المركزيةِ بالعملياتِ الحسابيةِ التي تُجرى على البياناتِ وبالقيمةِ نفسِها؛ لأنها مقاييسُ موقعٍ. ما رأيُكَ؟ مبررًا إجابتَكَ .

٢) حُسِبَتْ مقاييسُ النزعةِ المركزيةِ لرواتبِ (٢٠) موظفًا، فكانتْ كما في الجدولِ الآتي:

المقياسُ	المتوسطُ الحسابيُّ	الوسيطُ	المنوالُ
القيمةُ	١٨٠	١٩٠	٢٠٠

إذا عُدلتِ الرواتبُ حسبَ المعادلةِ الخطيةِ الآتيةِ: ص = ٠,٨ س + ٥٠

حيثُ: ص: الراتبُ بعدَ التعديلِ، س: الراتبُ قبلَ التعديلِ أجبْ عن كلٍّ مما يأتي:

أ) احسبِ المتوسطَ الحسابيَّ، والوسيطَ، والمنوالَ لرواتبِ الموظفينَ بعدَ التعديلِ.

ب) أوجدْ مجموعَ رواتبِ الموظفينَ بعدَ التعديلِ .

جـ) موظفٌ أصبحَ راتبُهُ بعدَ التعديلِ (١٧٨) دينارًا. كمْ كانَ راتبُهُ قبلَ التعديلِ ؟

٣) إذا كانَ عددُ طالباتِ الصفِّ الثامنِ (٣٣) طالبةً، تقدَّمَ منهنَّ للتقويمِ الأولِ في مادةِ الرياضياتِ (٣٠) طالبةً. وتغيَّبَ منهنَّ (٣) طالباتٍ، إذا كانَ المتوسطُ الحسابيُّ لعلاماتِ الطالباتِ المتقدماتِ للتقويمِ الأولِ يساوي (٢٨)، وفي اليومِ التالي تقدمتِ الطالباتُ اللواتي تغيَّبنَ عنِ التقويمِ الأولِ في المادةِ نفسِها، فحصلنَ على العلاماتِ الآتيةِ: ٢١، ٣٦، ٢٧، فكمْ يصبحُ المتوسطُ الحسابيُّ لعلاماتِ طالباتِ الصفِ جميعهنَّ؟ ثمَّ تحققْ منْ صحةِ الحلِ.

٤) إذا كانَ المتوسطُ الحسابيُّ، والوسيطُ، والمنوالُ لدرجاتِ الحرارةِ بمقياسِ (سلسيوس)، خلالَ شهرِ رمضانَ المباركِ منَ العامِ (١٤٣٦) هجريٍّ. كما يأتي: ٢٥، ٣٠، ٣٥ على الترتيبِ. فاحسبِ المتوسطَ الحسابيَّ، والوسيطَ، والمنوالَ لدرجاتِ الحرارةِ بمقياسِ (فهرنهايت)؟

إرشادٌ: يُحوَّلُ منْ مقياسِ (سلسيوس) إلى مقياسِ (فهرنهايت)، حيثُ العلاقةُ الخطيةُ الآتيةُ: ف = $\frac{٩}{٥}$ س + ٣٢

١) إذا كانَ الاستهلاكُ السنويُّ لـ ٥٠ عائلةً أردنيةً منْ زيتِ الزيتونِ، مقرباً لأقربِ كغ، كما في الجدولِ التكراريِّ الآتي:

الفئاتُ	١٦-٢٠	٢١-٢٥	٢٦-٣٠	٣١-٣٥	٣٦-٤٠	٤١-٤٥	٤٦-٥٠
التكرارُ	٦	١٠	٥	٤	٧	١٠	٨

أ) احسبِ المتوسطَ الحسابيَّ ،وَالوسيطَ، وَالمنوالَ لكميةِ الزيتِ التي تستهلكُها العائلةُ الأردنيةُ من الزيتِ الأردنيِّ سنويًّا.

ب) مثّلْ كميةَ الزيتِ التي تستهلكُها العائلةُ الأردنيةُ منَ الزيتِ الأردنيِّ سنويًّا بيانيًّا، ثمّ احسبِ المتوسطَ الحسابيَّ، وَالوسيطَ، وَالمنوالَ.

٢) إذا كانَ المتوسطُ الحسابيُّ، وَالوسيطُ، وَالمنوالُ لرواتبِ موظفي شركتينِ مختلفتينِ كما يظهرُ في الجدولِ الآتي:

الشركةُ	عددُ الموظفينَ	المتوسطُ الحسابيُّ	الوسيطُ	المنوالُ
الشركةُ (أ)	٦٠	٢٢٠	٢٤٠	٢٨٠
الشركةُ (ب)	٤٠	٢٤٠	٢٦٠	٣٠٠

إذا عُدّلتْ رواتبُ موظفي الشركتينِ أ، ب وفقَ المعادلتينِ الخطيتينِ الآتيتينِ:

صر =١,٢ س ر +٢٠ ، صر = ١,١ س ر + ٥٠ على الترتيب.

أ) احسبِ المتوسطَ الحسابيَّ، وَالوسيطَ، وَالمنوالَ، لكلٍّ منْ موظفي الشركتينِ بعدَ التعديلِ.

ب) إذا دُمجَتِ الشركتانِ معًا، احسبِ المتوسطَ الحسابيَّ قبلَ التعديلِ، وبعدَهُ.

٣) للجدولِ التكراريّ الآتي:

الفئاتُ	١٢–١٤	١٥–١٧	١٨–٢٠	٢١–٢٣	٢٤–٢٦	٢٧–٢٩
التكرارُ	٨	٤	٧	٦	٢	٣

أ) ارسمِ المنحنى التكراريّ بيانيًا.

ب) ما شكلُ التوزيع؟

جـ) احسب كلًّا منَ: المتوسطِ الحسابيّ، والوسيطِ، والمنوالِ.

٤) استُطْلِعَتْ آراءُ (٥٠) طالبًا، و(٥٠) طالبةً عنْ عددِ الساعاتِ التي يقضونها للدراسةِ في اليومِ، فكانت موزعةً كما في الجدولينِ الآتيينِ.

الساعاتُ التي تقضيها الطالباتُ

عددُ الساعاتِ	عددُ الطالباتِ
١	٣
٢	٥
٣	١٢
٤	١٠
٥	٢٠
المجموعُ	٥٠

الساعاتُ التي يقضيها الطلابُ

عددُ الساعاتِ	عددُ الطلابِ
١	٥
٢	١٢
٣	١٦
٤	١١
٥	٦
المجموعُ	٥٠

أيهما يقضي وقتًا أطولَ للدراسةِ: الطلابُ أمِ الطالباتُ؟ مبررًا إجابتَكَ.

٥) مكتوبٌ على علبةِ الكبريتِ "إنَّ متوسطَ عددِ أعوادِ الكبريتِ في العلبةِ ٥٠ عودًا فإذا اشتريتَ علبةً ووجدتَ فيها ٤٩ عودًا. فهلْ يحقُّ لكَ انتقادُ ما كتبتْهُ الشركةُ على علبةِ الكبريتِ؟ مبررًا إجابتَكَ.

٦) ارسمِ المنحنى التكراريّ للتوزيعاتِ الواردةِ في كلٍّ منَ الجداولِ الآتيةِ، وصنِّفْها وفقَ الالتواءِ:

الجدولُ (١)

الفئاتُ	٤–٨	٩–١٣	١٤–١٨	١٩–٢٣	٢٤–٢٨	٢٩–٣٣	٣٤–٣٨
التكرارُ	٥	٦	٧	١٤	٧	٦	٥

الجدولُ (٢)

الفئاتُ	٤–٨	٩–١٣	١٤–١٨	١٩–٢٣	٢٤–٢٨	٢٩–٣٣	٣٤–٣٨
التكرارُ	٤	١٨	٨	٧	٣	٥	٢

الجدولُ (٣)

الفئاتُ	٤–٨	٩–١٣	١٤–١٨	١٩–٢٣	٢٤–٢٨	٢٩–٣٣	٣٤–٣٨
التكرارُ	٢	٥	٦	٧	٨	١٨	٤

٧) إذا كانَ المتوسطُ الحسابيُّ، والوسيطُ لرواتبِ عددٍ منْ أعضاءِ هيئةِ التدريسِ شهريًّا بالدينارِ الأردنيِّ في إحدى الجامعاتِ الأردنيةِ. ممثلةً في الجدولِ الآتي:

عددُ أعضاءِ هيئةِ التدريسِ	المتوسطُ الحسابيُّ للرواتبِ	الوسطُ للرواتبِ
٨٥	٨٥٠	٨٠٠
١٠٥	٩٥٠	٩٠٠
١١٠	١١٥٠	١٠٠٠

أ) ما مجموعُ الرواتبِ التي تدفعُها الجامعةُ لأعضاءِ هيئةِ التدريسِ سنويًّا؟

ب) إذا منحتِ الجامعةُ علاوةً إضافيةً مقدارُها (٣٠) دينارًا، لكلِّ عضوٍ هيئةِ التدريسِ، جدِ المتوسطَ الحسابيَّ، والوسيطَ بعدَ منحِ العلاوةِ الإضافيةِ؟

جـ) ما مجموعُ الرواتبِ التي تدفعُها الجامعةُ لأعضاءِ هيئةِ التدريسِ سنويًّا بعدَ منحِ العلاوةِ الإضافيةِ؟ ثمَّ تحققْ منْ صحةِ الحلِ.

د) ما مقياسُ النزعةِ المركزيةِ الأنسبُ الذي استُخدمَ؟ مبررًا إجابتَكَ.

٨) الجدولُ التالي يمثلُ علاماتِ (٤٠) طالبًا في مادةِ اللغةِ الانجليزية، العلامةُ العـ
(٤٠)، وعلامةُ النجاحِ (٢٠):

العلاماتُ	٤–٨	٩–١٣	١٤–١٨	١٩–٢٣	٢٤–٢٨	٢٩–٣٣	٣٤–٣٨
عددُ الطلابِ	٢	١٢	٨	٦	٥	٤	٣

أ) احسبِ المتوسطَ الحسابيَّ لعلاماتِ الطلابِ.

ب) فسّرْ قيمةَ المتوسطِ الحسابيِّ الناتجةَ.

جـ) هلْ قيمةُ المتوسطِ الحسابيِّ الناتجةُ دقيقةٌ ١٠٠٪؟ مبررًا إجابتَكَ.

د) ما شكلُ التوزيعِ؟ مبررًا إجابتَكَ.

هـ) ارسمْ شكلَ التوزيعِ بيانيًّا.

٩) يريدُ صاحبُ مصنعٍ للأحذيةِ تحديدَ مقاسِ الحذاءِ الأكثرِ مبيعًا في السوقِ؛ ليزيدَ منَ الكميةِ المنتجةِ. أيُّ مقاييسِ الموقعِ يختارُ؟ مبررًا إجابتَكَ.

١٠) أيٌّ من مقاييسِ النزعةِ المركزيةِ (المتوسطِ الحسابيِّ، الوسيطِ، المنوالِ) هوَ الأنسبُ لوصفِ الحالاتِ الآتيةِ:

أ) نوعِ الدراجاتِ الهوائيةِ الأكثرِ مبيعًا حسبَ حجمِ الإطارِ المبيعِ من قبلِ محلِّ دراجاتٍ هوائيةٍ.

ب) لونِ عيونِ الطلبةِ السائدِ في إحدى المدارسِ.

جـ) السعرِ الدارجِ للمنازلِ في أحدِ الأحياءِ السكنيةِ.

د) معرفةِ علامةِ طالبٍ في امتحانٍ ما – التي نصفُ عددِ الطلبةِ حصلوا على علامةٍ أعلى منها، والنصفُ الآخرُ حصلوا على علامةٍ أقلَّ منها.

(١) يتكونُ هذا السؤالُ من (٨) فقراتٍ، منْ نوعِ الاختيارِ منْ متعددٍ، لكلِّ فقرةٍ منها (٤) بدائلَ، واحدٌ منها فقطْ صحيحٌ . ضعْ دائرةً حولَ رمزِ البديلِ الصحيحِ:

(١) إذا كانَ المتوسطُ الحسابيُّ للقيمِ التاليةِ:٩، ١٤، ١٨،م، ٨ يساوي ١٢، فإنَّ م =

أ) ١٢ ب) ٦٠ جـ) ١١ د) ٤٩

(٢) الوسيطُ للقيمِ التاليةِ :٩، ٥، ٦، ٤، ٧، ١١ يساوي:

أ) ٦ ب) ٧ جـ) ٧,٥ د) ٦,٥

(٣) إذا كانَ تكرارُ الفئةِ المئويةِ (١٢-١٩) يساوي ٨، فإنَّ المئوالَ يساوي:

أ) ١٥,٥ ب) ٨ جـ) ١٢ د) ١٩

(٤) إذا كانَ المتوسطُ الحسابيُّ للصفِّ الثامنِ (أ)، وعددُهم (٢٩) يساوي (٢٥)، والمتوسطُ الحسابيُّ للصفِّ الثامنِ (ب)، وعددُهم (٢٩) يساوي (٣٥)، فإنَّ المتوسطَ الحسابيَّ للشعبتينِ معًا يساوي:

أ) ٣٠ ب) ٢٥ جـ) ٣٥ د) ٢٩

(٥) إذا كانتْ درجةُ الحرارةِ بمقياسِ (سلسيوسَ)، تساوي ٣٠، فإنَّ قياسَها بمقياسِ (فهرنهايتَ) يساوي:

أ) ٣٠ ب) ٦ جـ) ٥٤ د) ٨٦

(٦) المتوسطُ الحسابيُّ للبياناتِ في الجدولِ التكراريِّ الآتي يساوي:

الفئاتُ	٨-١٦	١٧-٢٥	٢٦-٣٤	٣٥-٤٣	٤٤-٥٢
التكرارُ	٦	٩	٢٠	٩	٦

أ) ١٠ ب) ٣٠ جـ) ٢٠ د) ٥٠

(٧) إذا كانتِ القيمُ الآتيةُ مرتبةً ترتيبًا تصاعديًّا ٦، ٩، ن، ١٥، ١٦، ١٧، وكانَ الوسيطُ لتلكَ القيمِ يساوي ١٤، فإنَّ قيمةَ ن هيَ:

أ) ١٤ ب) ١٤,٥ جـ) ١٣ د) ١٥,٥

(أ) إذا كانَ المنوالُ لمجموعةٍ منَ القيمِ يُساوي (١٥)، عُدِّلت القيَمُ حسبَ الـ
الخطيةِ الآتيةِ: ص=١,٢ س+ ٣، فإنَّ قيمةَ المنوالِ بعدَ التعديلِ يساوي.

أ) ١٨ ب) ١٥ جـ) ٢١ د) ٢٠

٢) للجدولِ التكراريِّ الآتي:

الفئاتُ	٥-٩	١٠-١٤	١٥-١٩	٢٠-٢٤	٢٥-٢٩	٣٠-٣٤
التكرارُ	٣	٧	٩	٤	٥	٢

احسبْ كلًّا منَ: المتوسطِ الحسابيِّ، والوسيطِ، والمنوالِ.

٣) إذا كانَ المتوسطُ الحسابيُّ لرواتبِ موظفي شركةٍ مكونةٍ منْ (٨٢) موظفًا يساوي (٢٠٠) دينارٍ شهريٍّ. قررتِ الشركةُ منحَ موظفيها علاوةً شهريةً مقدارُها (١٠) دنانيرَ. احسبْ مجموعَ الرواتبِ التي تدفعُها الشركةُ للموظفينَ شهريًّا.

٤) أُجريَتْ إحصائيةٌ على (٥٠) شخصًا أُصيبوا بمرضِ السرطانِ جراءَ التدخينِ، وَسُجِّلَتْ عددُ علبِ السجائرِ التي يستهلكُها كلُّ شخصٍ أسبوعيًّا، فكانتْ كما في الجدولِ الآتي:

عددُ علبِ السجائرِ	٣-٥	٦-٨	٩-١١	١٢-١٤
التكرارُ	٥	١٢	١٣	٢٠

أ) ارسمِ المنحنى التكراريَّ للتوزيعِ.

ب) صنفِ التوزيعَ وفقَ الالتواءِ.

٥) إذا كانَ المتوسطُ الحسابيُّ لعلاماتِ طلبةِ الصفِّ الثامنِ في مادةِ اللغةِ الإنجليزيةِ يساوي (١٢٢). عُدِّلَتِ العلاماتُ حسبَ المعادلةِ الخطيةِ الآتيةِ:

$ص = \frac{1}{2} س + ٩٠$

أ) احسبِ المتوسطَ الحسابيَّ لعلاماتِ الطلبةِ بعدَ التعديلِ.

ب) إذا أصبحتْ علامةُ أحدِ الطلبةِ بعدَ التعديلِ تساوي(١٦٥).فكمْ علامتُهُ قبلَ التعديلِ؟

تمَّ بِحَمدِ اللهِ تعالى