وزارة التربيـة والتعليم
دائرة التعــليم والمعرفة

I ❤ MATHS

الرياضيــات للعادي عشر المتقدم

الفصل الدراسي الثالث

2018 / 2019

الوحدة 10

الاحصــاء الاستقرائي

اعداد
أ. عبدالغني مصطفى زيتون
050 6171533

(2 - 10) توزيعات البيانات

وصف التوزيعات : فيم سبق وصفت التوزيعات أحادية المتغير باستخدام

مقاييس النزعة المركزية الوسط و الوسيط

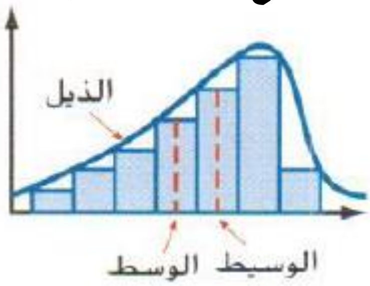
مقاييس التشتت (الانتشار) التباين والانحراف المعياري أو ملخص الأعداد الخمسة وهي

(القيمة الصغرى ، الربيع 1 ، الوسيط ، الربيع 3 ، القيمة العظمى)

ولتحديد ملخص الإحصاءات التي ينبغي استخدامها لوصف تمركز مجموعة بيانات وانتشارها بالصورة الأمثل يجب تحديد شكل التوزيع . وفيما يلي ثلاثة أشكال شائعة للتوزيع :

التوزيعـــات المتماثلة والملتوية

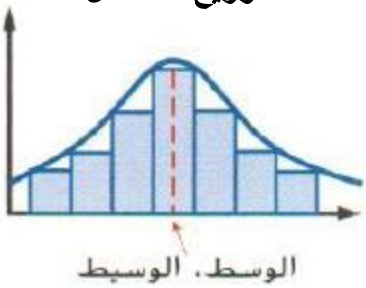
التوزيع الملتو نحو اليسار



لاحظ أن :

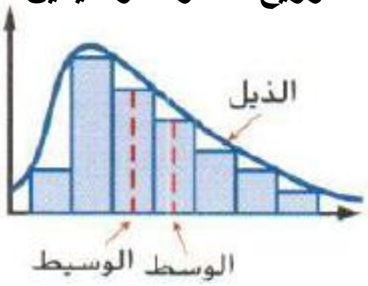
- ✓ الوسط أصغر من الوسيط
- ✓ الذيل يمتد إلى الجهة اليسرى
- ✓ معظم البيانات إلى الجهة اليمنى

التوزيع المتماثل



- ✓ الوسط والوسيط متساويين تقريباً
- ✓ البيانات تتوزع بصورة متساوية على كلا طرفي الوسط

التوزيع الملتو نحو اليمين



- ✓ الوسط أكبر من الوسيط
- ✓ الذيل يمتد إلى الجهة اليمنى
- ✓ معظم البيانات إلى الجهة اليسرى

عندما يكون التوزيع متماثلاً على نحوٍ معقول ، يكون الوسط والوسيط قريبين إلى بعضهما البعض

أما في التوزيعات الملتوية يكون الوسط أقرب للذيل من الوسيط لأن القيم المتطرفة تؤدي إلى انحراف الوسط باتجاه الذيل

بينما الوسيط يتأثر بالقيمة المتطرفة بصورة أقل لذلك يطلق على الوسيط اسم القمة الإحصائية المقاومة

وكل من الوسط والانحراف المعياري قيم احصائية غير مقاومة لتأثرهما بالقيم المتطرفة

اختيار ملخصات الاحصاء

لوصف توزيع ما ندرس أولاً شكل التوزيع

- ✓ إذا كان التوزيع متماثلاً على نحوٍ معقول وخالياً من القيم المتطرفة نستخدم الوسط والانحراف المعياري
- ✓ إذا كان التوزيع ملتوياً أو كانت له قيم متطرفة قوية نستخدم ملخص الأعداد الخمسة

(القيمة الصغرى، الربيع 1، الوسيط ، الربيع 3، القيمة العظمى) لأنها تعطي تلخيص أفضل للنمط الكلي للبيانات

مثال

يوضح الجدول المقابل توزيع التكرار الخاص بإجمالي مجموع الدرجات لـ 200 طالبة في مدرسة ثانوية

الحدود الخاصة بالفصل	التكرار
2.00 – 2.25	10
2.25 – 2.50	28
2.50 – 2.75	30
2.75 – 3.00	32

الحدود الخاصة بالفصل	التكرار
3.00 – 3.25	36
3.25 – 3.50	32
3.50 – 3.75	26
3.75 – 4.00	6

a) **أوجـد التكرارات التراكمية والنسب المئوية التراكمية**

ننشئ جدولاً كالجدول المقابل وتم توضيح طريقة إيجاد التكرارات التراكمية وطريقة إيجاد والنسب المئوية التراكمية في الصفوف الأربعة الأولى من هذا الجدول

الحدود الخاصة بالفصل	التكرار	التكرار التراكمي	النسب المئوية التراكمية
2.00 – 2.25	10	10	$10/200 = 5\%$
2.25 – 2.50	28	$10 + 28 = 38$	$38/200 = 19\%$
2.50 – 2.75	30	$38 + 30 = 68$	$68/200 = 34\%$
2.75 – 3.00	32	$68 + 32 = 100$	$100/200 = 50\%$
3.00 – 3.25	36	136	68%
3.25 – 3.50	32	168	84%
3.50 – 3.75	26	194	97%
3.75 – 4.00	6	200	100%

b) **أنشئ تمثيلاً بيـانياً للمراكز المئوية للبيانات**

نمثل البيانات بيانياً بحيث تكون :

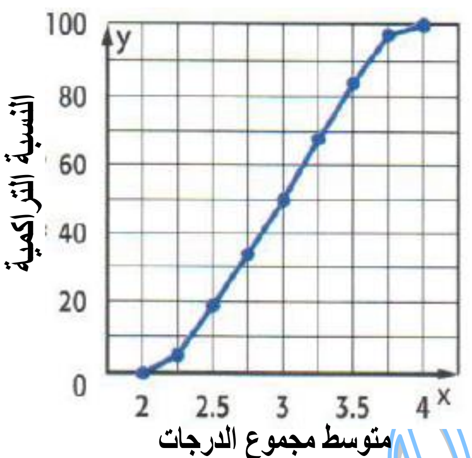
الحدود الخاصة بكل صف على المحور الأفقي x

والنسب المئوية التراكمية على المحو الرأسي y

وذلك بتعيين النقاط

$(2.25 , 5)$, $(2.5 , 19)$, $(2.75 , 34)$

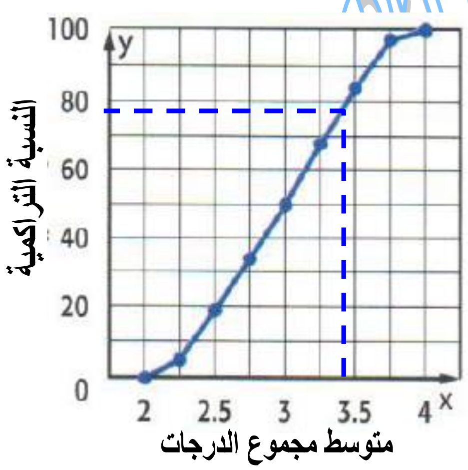
$(3.0 , 50)$ ...... وهكذا لباقي النقاط ثم نصل بينها



c) **قدّر المركز المئوي الذي يعطيه معدّل تكراري يساوي 3.4 في هذا التوزيع . فسر**

نحدد 3.4 على المحور الأفقي x ونرسم منها مستقيم رأسي يصل إلى نقطة على التمثيل البياني هذه النقطة تقابل النسبة المئوية 78 تقريباً

وهذا يعني أن الطلاب الذين متوسط مجموع درجاتهم 3.4 أفضل من 78% من طلاب المدرسة



تدريب 1

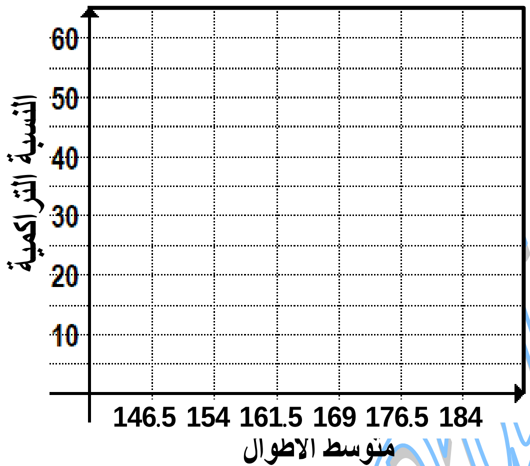
يوضح الجدول المقابل التوزيع التكراري لأطوال 60 طالب في فصول معلم الرياضيات إبراهيم

الحدود الخاصة بالفصل	التكرار
146.5–154	11
154–161.5	15
161.5–169	15
169 – 176.5	12
176.5 – 184	7

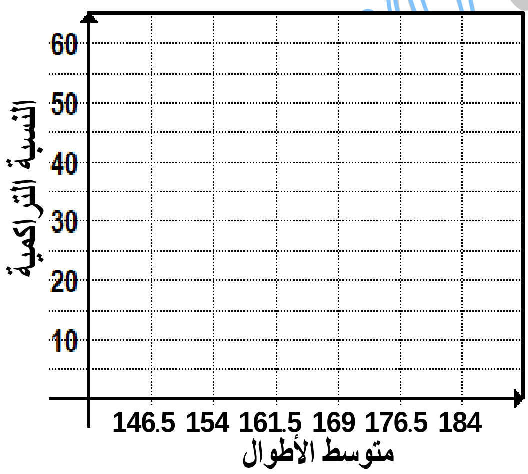
a) أوجــد التكرارات التراكمية والنسب المئوية التراكمية

الحدود الخاصة بالفصل	التكرار	التكرار التراكمي	النسب المئوية التراكمية
146.5–154	11		
154–161.5	15		
161.5–169	15		
169 – 176.5	12		
176.5 – 184	7		

b) أنشئ تمثيلاً بيـانياً للمراكز المئوية للبيانات



c) قدّر المركز المئوي الذي يعطيه معدّل تكراري يساوي 169 في هذا التوزيع . فسر

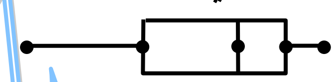


المخططات الصندوقية ذات العارضين

إن دراسة مخطط الصندوق ذي العارضين يمكننا من تحديد شكل التوزيع وتحديد التماثل أو الالتواء ولكن يجب أن نأخذ في الحسبان موقع الخط الذي يمثل الوسيط وطول كل عارضة انظر الشكل

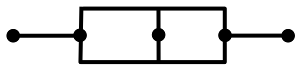
المخططات الصندوقية ذات العارضين المتماثلة والملتوية

الملتوي نحـو اليسار



العارضة اليسرى أطول من اليمنى والخط الذي يمثل الوسيط يكون أقرب لـ Q_3 من Q_1 (لجهة اليمين)

المتماثل



العارضتان لهما نفس الطول والخط الذي يمثل الوسيط يقع تماماً بين Q_1 و Q_3 (بالوسط)

الملتوي نحـو اليمين

العارضة اليمنى أطول من اليسرى والخط الذي يمثل الوسيط يكون أقرب لـ Q_1 من Q_3 (لجهة اليسار)

تدريب 2

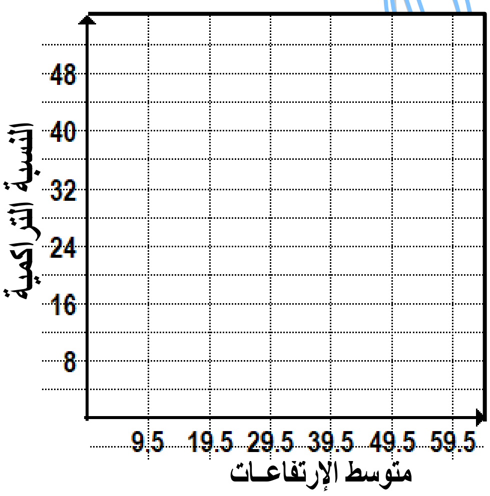
يوضح الجدول المقابل التوزيع التكراري للهطول المطري السنوي المتوسط بالسنتيمترات في 50 دولة مختلفة

الحدود الخاصة بالفصل	التكرار
$0 - 9.5$	3
$9.5 - 19.5$	8
$19.5 - 29.5$	4
$29.5 - 39.5$	14
$39.5 - 49.5$	16
$49.5 - 59.5$	5

a) أوجــد التكرارات التراكمية والنسب المئوية التراكمية

الحدود الخاصة بالفصل	التكرار	التكرار التراكمي	النسب المئوية التراكمية
$0 - 9.5$	3		
$9.5 - 19.5$	8		
$19.5 - 29.5$	4		
$29.5 - 39.5$	14		
$39.5 - 49.5$	16		
$49.5 - 59.5$	5		

b) أنشئ تمثيلاً بيـانياً للمراكز المئوية للبيانات وقدّر المركز المئوي الذي يعطيه معدّل تكراري يساوي 50 في هذا التوزيع . فسر



(10 - 3) التوزيعات الاحتمالية

المتغيرات العشوائية المتصلة والمنفصلة

إذا كان مدى المتغير العشوائي X مجموعة محدودة من القيم يمكن القول بأن X متغير عشوائي منفصل
مثال على ذلك عدد الوحدات المنتجة ، عدد أطفال الأسرة، عدد مرات ظهور الكتابة عند إلقاء قطعة نقود،....وهكذا.
أما إذا كان عدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X غير محدود (لا يمكن عده) في هذه الحالة يقال إن المتغير العشوائي X متغير عشوائي متصل. مثال على ذلك أوزان أو أطوال مجموعة من الطلاب أو درجات الحرارة ...

التوزيع الاحتمالي هو الذي يبين احتمالات حدوث القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير x ، والتي ترتبط باحتمالات النتائج الممكنة ويجب ان يحقق التوزيع الاحتمالي الشروط التالية :

✓ احتمال كل قيمة ل x يقع بين 0 و 1 أي أن $0 \le P(x) \le 1$

✓ مجموع جميع احتمالات كل قيم x تساوي 1 أي أن $\sum P(x) = 1$

مثال 1 طُلب من 50 طالب أن يقيموا شرح معلم على استمارة تقييم باستخدام مقياس درجاته بين 1 و 5 فكانت النتائج وفق الجدول التكراري الموضّح
أوجد توزيع احتمالي للمتغير x ومثله بيانياً

الدرجة x	التكرار
1	3
2	8
3	20
4	13
5	6

الحل: لإيجاد احتمال المتغير العشوائي x نقسم تكرار كل قيمة على العدد الكلي

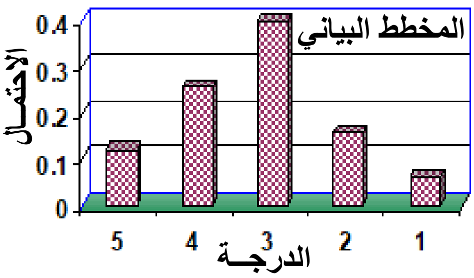
$P(2) = 8/50 = 0.16$ $\quad$ $P(1) = 3/50 = 0.06$

$P(4) = 13/50 = 0.26$ $\quad$ $P(3) = 20/50 = 0.40$

$P(5) = 6/50 = 0.12$

التوزيع الاحتمالي

الدرجة x	1	2	3	4	5
$P(x)$	0.06	0.16	0.40	0.26	0.12



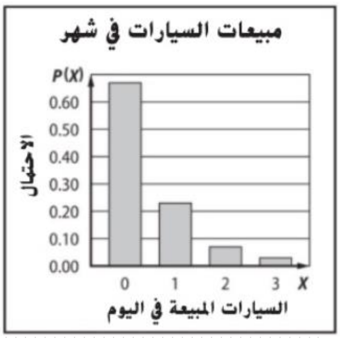
تدريب 1

يعرض الجدول التكراري عدد السيارات المباعة في أحد المعارض خلال 30 يوما ، أوجد توزيع احتمالي للمتغير x ومثله بيانياً

السيارات المباعة x	0	1	2	3
التكرار	20	7	2	1

....

السيارات المبيعة X	3	2	1	0
P(X)	0.03	0.07	0.23	0.67



....
....
....
....
....
....
....

متوسط التوزيع الاحتمالي

في المثال السابق (تقييم شرح المعلم)

لإيجاد متوسط التوزيع الاحتمالي

اضرب كل درجة في احتمالها

ثم أوجد مجموع نواتج الضرب

المتوسط μ لهذا التوزيع الاحتمالي

$$\mu=\sum x\,p(x)=3.22$$

الدرجة x	$P(x)$	$x\cdot p(x)$
1	0.06	$1\,(0.06)=0.06$
2	0.16	$2\,(0.16)=0.32$
3	0.40	$3\,(0.40)=1.20$
4	0.26	$4\,(0.26)=1.04$
5	0.12	$5\,(0.12)=0.60$
متوسط التوزيع الاحتمالي		$\sum x\,p(x)=3.22$

التباين والانحراف المعياري لتوزيع احتمالي

التباين :

$$\sigma^2\approx 1.1$$

الإنحراف المعياري :

$$\sigma\approx\sqrt{1.1}=1.05$$

الدرجة x	$P(x)$	$(x-\mu)^2$	$(x-\mu)^2\cdot p(x)$
1	0.06	$(1-3.22)^2\approx 4.93$	$4.93\,(0.06)=0.2958$
2	0.16	$(2-3.22)^2\approx 1.49$	$1.49\,(0.16)=0.2384$
3	0.40	$(3-3.22)^2\approx 0.05$	$0.05\,(0.40)=0.02$
4	0.26	$(4-3.22)^2\approx 0.61$	$0.61\,(0.26)=0.1586$
5	0.12	$(5-3.22)^2\approx 3.17$	$3.17\,(0.12)=0.3804$
المجموع			$\sum(x-\mu)^2\cdot p(x)=1.0932$

قيمة التوقع : هي مجموع حواصل ضرب قيم المتغير x في احتمال كل منها $p(x)$ $\quad E(x)=\sum x\cdot p(x)$

مثال 2 خلال حفل لجمع التبرعات . بيعت 500 بطاقة بقيمة $AED\ 1$ للبطاقة الواحدة وذلك للفوز بثلاث جوائز قيمتها $AED\ 100$ و $AED\ 50$ و $AED\ 10$ فما قيمة التوقع للربح الصافي إن اشتريت بطاقة واحدة

الحل: أنشئ توزيع احتمالي لكل من الأرباح الصافية الممكنة ثم اوجـد قيمة التوقع

الربح x	$AED\,100-1$	$AED\,50-1$	$AED\,10-1$	$AED\,0-1$
الاحتمال $P(x)$	$1/500=0.002$	$1/500=0.002$	$1/500=0.002$	$497/500=0.994$

$$E(x)=\sum x\,p(x)=99\times 0.002+49\times 0.002+9\times 0.002+(-1\times 0.994)=AED-0.68$$

قيمة التوقع هذه تعني أن متوسط خسارة شخص اشترى بطاقة يساوي $AED\ 0.68$

تدريب اوجـد قيمة التوقع عند رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة .

$E(x)=\sum x\,p(x)=3.5$

....

....

....

....

حساب المتوسط والانحراف المعياري والتباين لتوزيع احتمالي باستخدام الآلة الحاسبة

مثال أوجد المتوسط والانحراف المعياري والتباين للتوزيع

الدرجة x	1	2	3	4	5
$P(x)$	0.06	0.16	0.40	0.26	0.12

خطوات عمل الآلة الحاسبة CASIO fx-991 ES PLUS

❶ مسح الذاكرة من أي بيانات سابقة
Shift → 9 → 3 → = → AC

❷ تحويل الآلة الحاسبة إلى الوضع إحصاء (STAT)
Shift → mode → ↓ → 4 → 1
mode → 3 → AC

❸ ادخال البيانات (مثال) :
Shift → 1 → 2 تظهر الشاشة

X : 1 = 2 = 3 = 4 = 5 =

$P(x)$: 0.06 = 0.16 = 0.40 = 0.26 = 0.12 =

❹ إيجاد المتوسط (التوقع) μ :
AC Shift → 1 → 4 → 2 → = $\bar{x}=3.22$

❺ إيجاد الانحراف المعياري σ_x :
AC Shift → 1 → 4 → 3 → = $\sigma_x=1.045$

❻ إيجاد التباين : $\sigma^2 = 1.09$

تدريب 1 أوجد المتوسط والانحراف المعياري والتباين للتوزيع (باستخدام الآلة الحاسبة)

الدرجة x	2	4	6	8	10
$P(x)$	0.05	0.15	0.25	0.35	0.20

$\bar{x}=7$ $\sigma_x=2.236$ $\sigma^2=5$

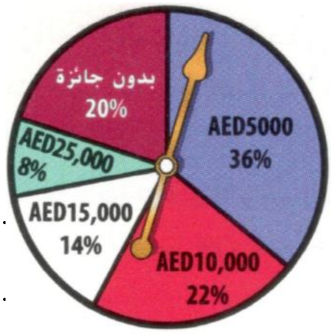
تدريب 2 أوجد المتوسط والانحراف المعياري والتباين للتوزيع (باستخدام الآلة الحاسبة)

الدرجة x	1	2	3	4	5
$P(x)$	0.02	0.16	0.40	0.32	0.10

$\bar{x}=3.32$ $\sigma_x=0.926$ $\sigma^2=0.86$

لا يوجد انسان ضعيف بل يوجد انسان يجهل موطن قوته

تمـارين



① ربح أحد المتسابقين فرصة واحدة لتدوير القرص الموضح في الشكل
أوجـد قيمة التوقع لما سيربحه هذا المتسابق

....

....

....

② يوضّح الجدول التوزيع الاحتمالي لمسابقة إذا بيعت 100 بطاقة بقيمة $AED\ 5$ للبطاقة الواحدة . توجد جائزة واحدة قيمتها $AED\ 100$ و 5 جوائز قيمة كل منها $AED\ 50$ و 10 جوائز قيمة كل منها $AED\ 25$

أوجد قيمة التوقع للربح الصافي إذا اشتريت بطاقة واحدة وفسر النتائج التي وجدتها

الجائزة	$AED\ 25$	$AED\ 50$	$AED\ 100$	$AED\ 0$
الاحتمال	0.10	0.05	0.01	0.84

....

....

....

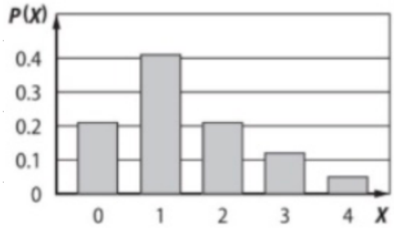
....

....

③ سئل طلاب عن عـدد مشغلات $MP3$ التي يمتلكونها فكانت الإجابات كما في الجدول التكراري

المشغلات x	0	1	2	3	4
التكرار	9	17	9	5	2

$a)$ أوجـد توزيع احتمالي للمتغير x ومثله بيـانياً
$b)$ أوجـد المتوسط والانحراف المعياري والتباين لهذا التوزيع



....

....

....

....

....

....

....

....

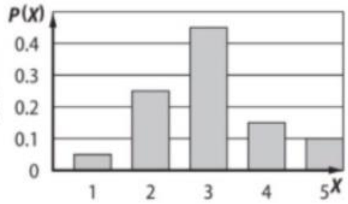
....

....

④ كان هناك 20 مشاركاً في مسابقة لتناول الشطائر ضمن معرض ريفي فكانت النتائج كما في الجدول التكراري

a) أوجد توزيع احتمالي للمتغير x ومثله بيانياً
b) أوجد المتوسط والانحراف المعياري لهذا التوزيع

عدد الشطائر x	1	2	3	4	5
التكرار	1	5	9	3	2



....

....

....

....

....

....

....

....

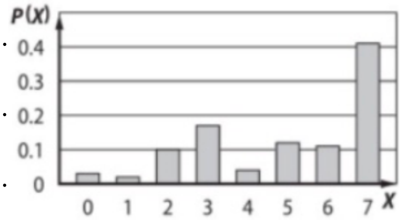
....

....

③ سئل 100 طالب من المرحلة الثانوية عن عدد الأيام التي تناولوا فيها طعام الإفطار الأسبوع المنصرم فكانت الإجابات كما في الجدول التكراري

a) أوجد توزيع احتمالي للمتغير x ومثله بيانياً
b) أوجد المتوسط والانحراف المعياري لهذا التوزيع

عدد الأيام x	0	1	2	3	4	5	6	7
التكرار	5	3	8	9	6	19	16	34



....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(4 - 10) التوزيع ذو الحدين

التجربة ذات الحدين هي تجربة عشوائية لاحتمالات تتوافق مع الشروط التالية

✓ تُكرر التجربة لعدد ثابت من المحاولات بصورة مستقلة n

✓ لكل محاولة ناتجان محتملان فقط هما **النجاح** S أو **الفشل** F

✓ يتساوى احتمال النجاح $P(S)$ أو P في كل محاولة ، واحتمال الفشل $P(F)$ أو q يساوى القيمة $q=1-p$

✓ يمثل المتغير العشوائي x عدد مرات النجاح في n محاولة

مثال 1 حـدّد ما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حـدين ، أو يمكن جعلها كذلك . وإذا كانت تجربة ذات حـدين فاكتب القيم n , p , q وقيم المتغير العشوائي الممكنة ، وإذا لم تكن كذلك فبيّن السبب

a) نتيجة مسح احصائي في إحـدى المدارس تبيّن أن 68% من الطلاب يمتلكون حاسبة بيانية ، إذا تم اختيار 6 طلاب عشوائياً ، وسؤالهم عمّا إذا كانوا يمتلكون آلة حاسبة بيانية ،

الحل: هذه التجربة تحقق شروط التجربة ذات الحـدين لأن :

✓ كل طالب تم اختياره يمثل محاولة ، وعملية اختيار الطلاب محاولات مستقلة

✓ للتجربة نتيجتان متوقعتان : الطالب يمتلك حاسبة بيانية S ، أو لا يمتلكها F

✓ احتمال النجاح نفسه لكل طالب تم اختياره $P(S)=0.68$

في هذه التجربة $p = P(S) = 0.68$, $n = 6$ ، واحتمال الفشل $q = 1 - p = 1 - 0.68 = 0.32$

✓ يمثّل X عدد الطلاب الذين يمتلكون حاسبة بيانية من الذين تم اختيارهم أي أن : $X = 0,1,2,3,4,5,6$

b) تجربة سحب 5 كرات على التوالي دون إرجاع من صندوق فيه 6 كرات بيضاء و4 كرات سوداء

الحل: ليست تجربة ذات حدين لأن : عملية السحب غير مستقلة لأن سحب أي كرة يؤثر على سحب الكرة التالية فمثلاً احتمال سحب الأولى 6/10 والثانية 5/9 وهكذا في كل مرة تنقص واحدة (**لاحظ أن السحب دون إرجاع**) احتمال النجاح في سحب الكرات غير متساوي

تدريب 1 في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم 5 مرات متتالية, وحساب عدد مرات ظهور 4 نقاط على الوجه العلوي حـدّد ما إذا كانت تجربة ذات حـدين واكتب القيم n , p , q وقيم المتغير العشوائي الممكنة ، وإذا لم تكن كذلك فبيّن السبب

....

....

....

....

....

....

....

قانون احتمال ذات الحدين

احتمال تحقيق x نجاح من أصل n محاولة مستقلة خلال تجربة ذات حدين تساوي

$$P(x) = {}_nC_x \times P^x q^{n-x} \quad \text{أو} \quad P(x) = \frac{n!}{(n-x)!\,x!} P^x q^{n-x}$$

حيث P احتمال نجاح محاولة واحدة ، و q احتمال فشلها

مثال 2 خلال استقصاء جرى مؤخراً تبيّن أن 35% من مراهقين يمارسون التمارين الرياضية بصورة دورية سُئل خمسة مراهقين اختيروا عشوائياً إن كانوا يمارسون التمارين الرياضية بصورة دورية .

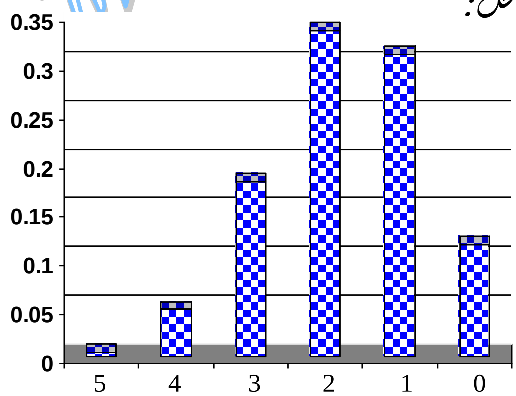
a) أنشئ توزيع احتمالي للمتغير x الذي يمثل عدد المراهقين الذين أجابوا بنعم ومثله بيانياً

b) أوجد احتمال أن ثلاثة على الأقل من أولئك المراهقين أجابوا بنعم .

الحل:

$$P(0) = {}_5C_0 \times 0.35^0 \times 0.65^5 \approx 0.116$$
$$P(1) = {}_5C_1 \times 0.35^1 \times 0.65^4 \approx 0.312$$
$$P(2) = {}_5C_2 \times 0.35^2 \times 0.65^3 \approx 0.336$$
$$P(3) = {}_5C_3 \times 0.35^3 \times 0.65^2 \approx 0.181$$
$$P(4) = {}_5C_4 \times 0.35^4 \times 0.65^1 \approx 0.049$$
$$P(5) = {}_5C_5 \times 0.35^5 \times 0.65^0 \approx 0.005$$

$P(x)$	x
0.116	0
0.312	1
0.336	2
0.181	3
0.049	4
0.005	5



b) لإيجاد احتمال أن ثلاثة على الأقل من الطلاب يمارسون التمارين الرياضية بصورة دورية

نوجد المجموع $P(x \geq 3) = P(3) + P(4) + P(5) = 0.181 + 0.049 + 0.005 = 0.235 \quad 23\%$

تدريب 2 خلال استقصاء تبيّن أن 48% من طلاب مدرسة ما درسوا لغة أجنبية سُئل سبعة منهم إن درسوا الأجنبية

a) أنشئ توزيع احتمالي للمتغير x الذي يمثل الطلاب الذين أجابوا بنعم ومثله بيانياً

b) أوجد احتمال أن يكون أقل من 4 من أولئك الطلاب قد أجابوا بنعم .

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

متوسط توزيع ذي حدّين وانحرافه المعياري

ويعطى المتوسط والتباين والانحراف المعياري لمتغيّر عشوائي X له توزيعٌ احتمالي بالصيغ التالية :

المتوسط $\mu = n\,p$ / التباين $\sigma^2 = n\cdot p\cdot q$ / الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{n\cdot p\cdot q}$

إن هذه الصيغ أبسط من الصيغ التي استخدمتها لإيجاد المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيعات الاحتمال ولكنها مكافئة لها من الناحية الجبرية.

مثال 3 تابع المثال 4 أوجد المتوسط والتباين والانحراف المعياري لهذا التوزيع ، وفسّر المتوسط في سياق حالة المسألة .

5	4	3	2	1	0	x
0.005	0.049	0.181	0.336	0.312	0.116	$P(x)$

الخطوة 1 : استخدم الصيغ التالية لإيجاد المتوسط والتباين والانحراف المعياري لتوزيع احتمالي .

$$\mu = \sum x\,p(x) = 0(0.116)+1(0.312)+2(0.336)+3(0.181)+4(0.049)+5(0.005) = 1.748$$

$$\sigma^2 = \sum (x-\mu)^2\cdot p(x)$$

$$= (0-1.0748)^2(0.116)+(1-1.0748)^2(0.312)+(2-1.0748)^2(0.336)+$$

$$(3-1.0748)^2(0.181)+(4-1.0748)^2(0.049)+(5-1.0748)^2(0.005) \approx 1.1354$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1.1345}$$

الخطوة 2 : استخدم صيغ إيجاد المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي ذي الحدين .

في هذه التجربة ذات الحدين لديك $n=5$, $p=0.35$, $q=0.65$

$$\mu = n\,p = 5(0.35) = 1.75$$

$$\sigma^2 = n\cdot p\cdot q = 5(0.35)(0.65) = 1.1375$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1.1375} = 1.0665$$

انظر مثال 4

تعطي كلتا الطريقتين النتائج نفسها تقريباً . ولذلك ، يساوي متوسط التوزيع 1.8 أو 2 تقريباً ، ما يعني أن 2 من أصل 5 طلاب في المتوسط سيقولون أنهم يمارسون الرياضة على نحوٍ دوري . ويساوي كلا من التباين والانحراف المعياري للتوزيع 1.1 تقريباً.

تدريب 3 أوجد المتوسط والانحراف المعياري والتباين للتوزيع الذي أنشأته في التدريب السابق ، وفسّر المتوسط في سياق حالة المسألة

....

....

....

....

....

....

....

تمــارين

① حدّد ما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين ، أو يمكن جعلها كذلك . وإذا كانت تجربة ذات حدين فاكتب القيم $n\ ,\ p\ ,\ q$ وقيم المتغير العشوائي الممكنة ، وإذا لم تكن كذلك فبيّن السبب

a) نتيجة مسح احصائي في إحدى المدارس تبيّن أن 20% من الطلاب أعسر ، إذا تم اختيار 10 طلاب عشوائياً ، وسؤالهم عمّا إذا كانوا من الطلاب العُسر.

....

....

....

....

b) تجربة رمي قطعة نقود معدنية 50 مرة ، وحساب عدد مرات ظهور الكتابة .

يمثل المتغير العشوائي x عدد مرات ظهور الكتابة

....

....

....

....

c) تسأل 15 شخصاً عن أعمارهم . يمثل المتغير العشوائي x عمر الشخص

....

....

....

....

d) ترمي قطعة نرد 10 مرات ، لتعرف إن كان يظهر العدد 5 .

يمثل المتغير العشوائي x عدد مرات ظهور العدد 5

....

....

....

....

② انشئ توزيع ذا حدين لكل متغير عشوائي وأوجد المتوسط وفسّره في سياق الحالة المعطاة .
ثم أوجـد التباين والانحراف المعياري.

a) خلال استقصاء تبين أن 89% من الأمريكيين يطلبون إضافات على وجبات البيتزا .
يُسأل خمسة مراهقين اختيروا عشوائياً إذا كانوا يطلبون إضافات

b) خلال استقصاء جرى مؤخراً تبين أن 20% من طلاب إحدى المدارس الثانوية يمتلكون سيارة
يُسأل أربعة طلاب اختيروا عشوائياً إذا كانوا يمتلكون سيارة

③ انشئ توزيع ذا حدين لكل متغير عشوائي وأوجد المتوسط وفسّره في سياق الحالة المعطاة .
ثم أوجـد التباين والانحراف المعياري.

a) يشير أحد استطلاعات الرأي إلى أن 26% من موظفي إحدى الشركات قد تصفحوا الإنترنيت أثناء العمل .
يُسأل ستة موظفين اختيروا عشوائياً إن كانوا قد تصفحوا الإنترنيت أثناء العمل

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

b) خلال استقصاء جرى إحـدى المدارس الثانوية تبين أن 65% من الطلاب يرتدون أحزمة الأمان أثناء القيادة .
يُسأل ثمانية طلاب اختيروا عشوائياً إن كانوا يرتدون أحزمة الأمان أثناء القيادة

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

④ انشئ التوزيع ذا الحدين الذي يقابل كلاً من التجارب التالية :

a) $n=6 \quad , \quad p=0.3$

x	0	1	2	3	4	5	6
$P(x)$							

a) $n=6 \quad , \quad p=0.5$

x	0	1	2	3	4	5	6
$P(x)$							

a) $n=6 \quad , \quad p=0.7$

x	0	1	2	3	4	5	6
$P(x)$							

⑤ خلال استقصاء جرى مؤخراً ، أشارت أن 62% من الإماراتيين إلى أنهم أفردوا بعض الوقت للتطوع لصالح جمعيات خيرية خلال العام الأخير فإذا اختيرت عينة عشوائية من 10 إماراتيين . أوجد كلاً من الاحتمالات التالية :

a) أن يكون 6 أشخاص بالضبط قد أفردوا وقتاً للجمعية الخيرية

b) أن يكون 5 أشخاص على الأقل قد أفردوا وقتاً للجمعية الخيرية

c) أن يكون 3 أشخاص على الأكثر قد أفردوا وقتاً للجمعية الخيرية

d) أن يكون أكثر من 8 أشخاص قد أفردوا وقتاً للجمعية الخيرية

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(x)$	0.00006	0.001	0.0074	0.033	0.093	0.183	0.249	0.232	0.142	0.0513	0.0084

....
....
....
....
....
....
....
....
....

(5 - 10) التوزيع الطبيعي

❖ خواص المنحنى الطبيعي :

1) التمثيل البياني للمنحنى متصل ويشبه شكل الجرس ومتماثل بالنسبة للوسط الحسابي .

2) ويكون فيه الوسط الحسابي = الوسيط = المنوال

3) يقترب المنحنى من المحور الأفقي ولكنه لا يتلامس معه.

4) محور التماثل يقسم المنطقة الواقعة تحت المنحنى إلى منطقتين متطابقتين مساحة كل منهما تساوي 0.5 وحدة مساحة ، أي أن المساحة الإجمالية تحت المنحنى تساوي 1 أو 100%.

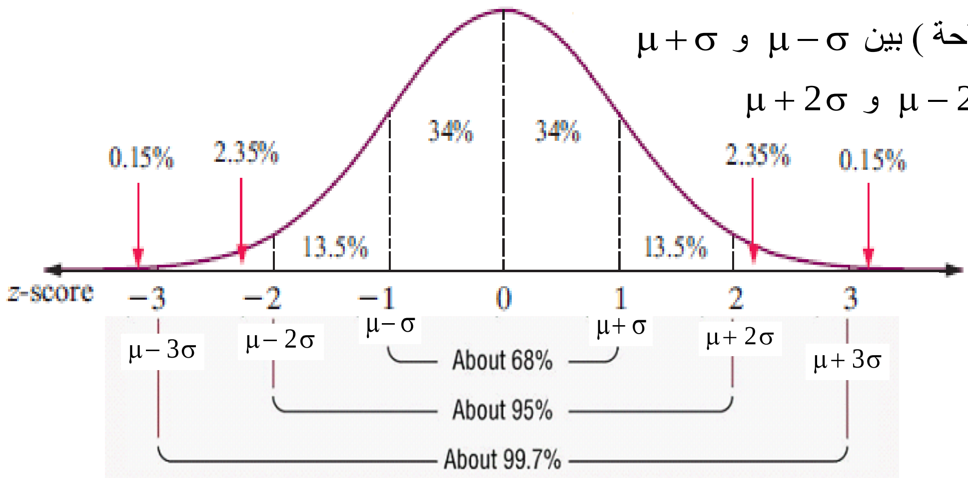
القاعدة التجريبية

في التوزيع الطبيعي المعياري ذي الوسط μ والانحراف المعياري σ

✓ تقع 68% من البيانات (المساحة) بين $\mu-\sigma$ و $\mu+\sigma$

✓ تقع 95% من البيانات بين $\mu-2\sigma$ و $\mu+2\sigma$

✓ تقع 99.7% من قيم البيانات بين $\mu-3\sigma$ و $\mu+3\sigma$

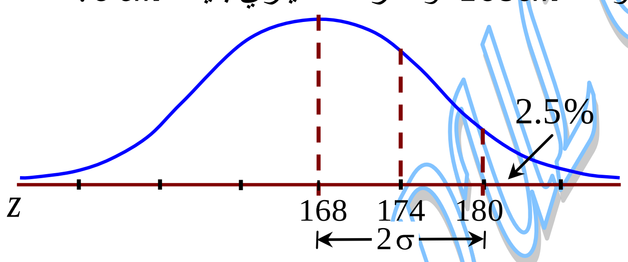


يمكنك حل مسائل تتضمن توزيعات طبيعية باستخدام القاعدة التجريبية

مثال 1 استخدام القاعدة التجريبية

يتوزع طول 880 طالباً بمدرسة الشرق الثانوية توزيعاً طبيعياً بوسط $168cm$ وانحراف معياري بقيمة $6\ cm$.

a) كم عدد الطلاب الذين يزيد طولهم عن $180\ cm$ تقريباً ؟



لتحديد عدد الطلاب الذين يزيد طولهم عن $180\ cm$.

أوجد المنطقة المقابلة أسفل المنحنى .

لاحظ في التمثيل البياني أن 180 تبعد مسافة 2σ عن الوسط . وحيث 95% من قيم البيانات تقع على بعد انحرافين معياريين عن الوسط . فإن كل ذيل يمثل 2.5% من البيانات .

وتساوي المساحة على الجهة اليمنى من العدد 180 النسبة 2.5% من 880 أو $\frac{2.5}{100}\times 880=22$

وهكذا ، فإن حوالي 22 من الطلاب أطول من $180\ cm$.

b) ما النسبة المئوية للطلاب الذين يتراوح طولهم بين $150cm$ و $174cm$

تمثل النسبة المئوية للطلاب الذين تتراوح أطوالهم بين 150 و 174 سنتيمتراً تقع بين $\mu+\sigma$ و $\mu-3\sigma$.

تساوي مجموع المساحات $68\%+13.5\%+2.35\%=83.85\%$

ولذلك 84% من الطلاب تتراوح أطوالهم بين 150 و 174 سنتيمتراً.

إذا رأيت نيوب الليث بارزةً فلا تظنن أن الليث يبتسم

صيغة قيم Z

قيمة Z الخاصة بقيمة البيانات في مجموعة بيانات محددة من خلال $Z=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$ ، $\sigma \neq 0$

حيث x هي قيم البيانات و μ هو الوسط و σ هو الانحراف المعياري .

تدريب 1 أوجد Z في كل مما يلي :

❶ $\sigma = 4.2 \;,\; \mu = 29 \;,\; x = 24$

$$Z=\frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{24-29}{4.2}\approx -1.19$$

قيمة Z التي تتطابق مع $x=24$ هي -1.19 وبالتالي فإن 24 أقل بمقدار 1.19 للإنحراف المعياري من وسط التوزيع

❷ $\sigma = 1.7 \;,\; \mu = 28 \;,\; x = 32$

....

....

تدريب 2 أوجد x في كل مما يلي :

❶ $\sigma = 2.3 \;,\; \mu = 48 \;,\; z = -1.73$

....

....

❷ $\sigma = 0.4 \;,\; \mu = 39 \;,\; z = 2.15$

....

....

❖ **خواص التوزيع الطبيعي المعياري**

✓ تقع المنطقة كلها بين $Z=-3$ و $Z=3$

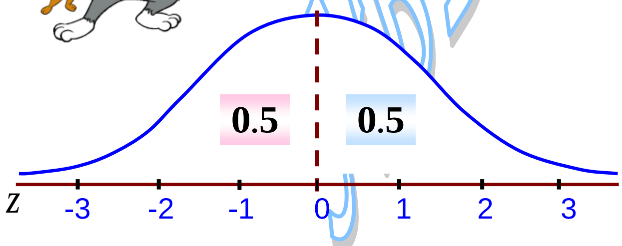
✓ متوسطه الحسابي يساوي صفراً وانحرافه المعياري يساوي 1

✓ المساحة الإجمالية أسفل المنحنى تساوي 1 أو 100%

✓ التوزيع متماثل حول الخط الرأسي المار بالوسط الحسابي

✓ الوسط يساوي 0 والانحراف المعياري يساوي 1

✓ يقترب المنحنى من المحور الأفقي ولكنه لا يتلامس معه أبداً.



المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري باستخدام الآلة الحاسبة

خطوات عمل الآلة الحاسبة CASIO fx-991 ES PLUS

❶ مسح الذاكرة من أي بيانات سابقة

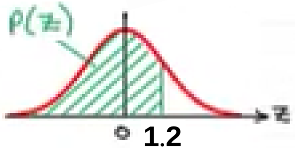
Shift → 9 → 3 → = → AC

❷ تحويل الآلة الحاسبة إلى الوضع إحصاء (STAT)

mode → 3 → AC

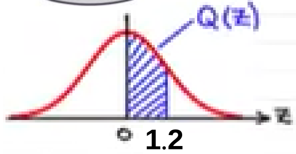
❸ ايجاد المساحة تحت المنحنى (مثال) :

Shift → 1 → 5 ظهر الشاشة



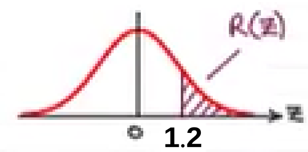
$p(z<1.2)$

→ 1 $P(1.2)=0.88493$



$P(0<z<1.2)$

2 $Q(1.2)=0.38493$



$P(z>1.2)$

3 $R(1.2)=0.11507$

❹ ايجاد المساحة تحت المنحنى بين قيمتين z_1 , z_2 :

1) القيمتين مختلفتين بالإشارة $z_1=-1.2 \ , z_2=1.5$

Shift → 1 → 5 → 2 $Q(-1.2)$ + Shift → 1 → 5 → 2 $Q(1.5)$ = 0.81812

2) القيمتين من نفس الإشارة $z_1=1.2 \ , z_2=2.7$

Shift → 1 → 5 → 2 $Q(2.7)$ − Shift → 1 → 5 → 2 $Q(1.2)$ = 0.1116

خطوات عمل الآلة الحاسبة CASIO fx-991 ES

❶ مسح الذاكرة من أي بيانات سابقة

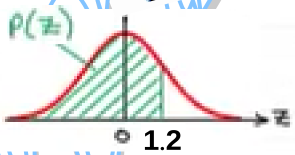
Shift → 9 → 3 → = → AC

❷ تحويل الآلة الحاسبة إلى الوضع إحصاء (STAT)

mode → 3 → AC

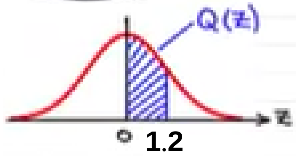
❸ ايجاد المساحة تحت المنحنى (مثال) :

Shift → 1 → 7 تظهر الشاشة



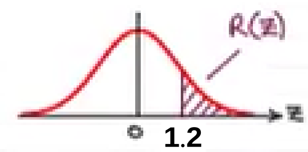
$p(z<1.2)$

→ 1 $P(1.2)=0.88493$



$P(0<z<1.2)$

2 $Q(1.2)=0.38493$



$P(z>1.2)$

3 $R(1.2)=0.11507$

❹ ايجاد المساحة تحت المنحنى بين قيمتين z_1 , z_2 :

1) القيمتين مختلفتين بالإشارة $z_1=-1.2 \ , z_2=1.5$

Shift → 1 → 7 → 2 $Q(-1.2)$ + Shift → 1 → 7 → 2 $Q(1.5)$ = 0.81812

2) القيمتين من نفس الإشارة $z_1=1.2 \ , z_2=2.7$

Shift → 1 → 7 → 2 $Q(2.7)$ − Shift → 1 → 7 → 2 $Q(1.2)$ = 0.1116

Amz.math@hotmail.com

مثال 2 بلغ متوسط المكالمات التي يستقبلها مندوب خدمة العملاء كل يوم 105 مكالمات خلال شهر 30 يوماً بانحراف معياري 12 ، بفرض أن عدد المكالمات يتم توزيعه طبيعياً أوجد عدد الأيام التي تقل فيها المكالمات عن 110

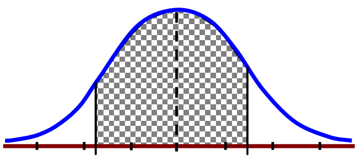
الحل: لدينا $\sigma=12$, $\mu=105$, $x=110$ نوجد z : $z=\dfrac{x-\mu}{\sigma}=\dfrac{110-105}{12}=0.42$

المطلوب عدد الأيام التي **تقل** فيها المكالمات عن 110 باستخدام الآلة الحاسبة نوجد $p(z<0.42)=0.663$

ويكون عدد الأيام التي **تقل** فيها المكالمات عن 110 هو $0.663\times 30=19.9$

أي أن 20 يوم **تقل** فيها المكالمات عن 110 مكالمات .

مثال 3 يتم توزيع درجات الحرارة لأحد الشهور في إحدى مدن الإمارات حيث $\mu=41^\circ$, $\sigma=6^\circ$



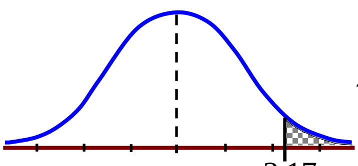
a) باستخدام الآلة الحاسبة أوجد $P(30^\circ<x<50^\circ)$

نوجد قيم z عندما $x=30$: $z=\dfrac{x-\mu}{\sigma}=\dfrac{30-41}{6}=-1.83$

نوجد قيم z عندما $x=50$: $z=\dfrac{x-\mu}{\sigma}=\dfrac{50-41}{6}=1.5$

باستخدام الآلة الحاسبة نوجد $P(-1.83<z<1.5)=0.899\approx 0.90$

وبالتالي 90% من درجات الحرارة كانت بين 30° و 50°



b) باستخدام الآلة الحاسبة أوجد $P(x>54^\circ)$

نوجد قيم z عندما $x=54$: $z=\dfrac{x-\mu}{\sigma}=\dfrac{54-41}{6}=2.17$

باستخدام الآلة الحاسبة نوجد $P(z>2.17)=0.015$

وبالتالي 1.5% من درجات الحرارة كانت على الأقل 54°

مثال 4 تتوزع درجات اختبار القبول الجامعة في قسم الرياضيات طبيعياً حيث $\mu=65$, $\sigma=8$
إذا أرادت فاطمة أن تكون ضمن الـ 20% الأوائل . فما الدرجة التي يجب عليها تحقيقها ؟

a) الـ 20% تقابل مساحة في المنحنى الطبيعي 0.20 نوجد قيمة Z المقابلة (بالحاسبة) $Q(0.84)=0.20$

فيكون لدينا $X=?$, $\sigma=8$, $\mu=65$, $Z=0.84$

$$0.84=\frac{x-65}{8}\Rightarrow x-65=6.72\Rightarrow x=71.72$$

تحتاج فاطمة إلى 72 درجة على الأقل لتكون من بين الطلاب الـ 20% الأوائل

b) تتوقع فاطمة أن تحصل على درجة ضمن النسبة الوسطى 90% في التوزيع فما مدى درجات هذه الفئة ؟

النسبة الوسطى 90% في التوزيع تقابل المساحة الممتدة من 0.05 إلى 0.95 نوجد قيمتي z المقابلتين لهما

فنجد أنهما -1.645 و 1.645 ثم نوجد قيم x لكل منهما باستخدام العلاقة كما سبق

وبالتالي تتوقع فاطمة أن تكون درجتها بين 52 و 78

تمــارين

① أوجد Z في كل مما يلي :

❶ $\sigma = 2.6 \quad , \quad \mu = 22 \quad , \quad x = 19$

....

❷ $\sigma = 3.7 \quad , \quad \mu = 43 \quad , \quad x = 52$

....

❸ $\sigma = 2.8 \quad , \quad \mu = 38 \quad , \quad x = 32$

....

② أوجد x في كل مما يلي :

❶ $\sigma = 1.3 \quad , \quad \mu = 64 \quad , \quad z = 2.3$

....

❷ $\sigma = 0.4 \quad , \quad \mu = 27 \quad , \quad z = 2.5$

....

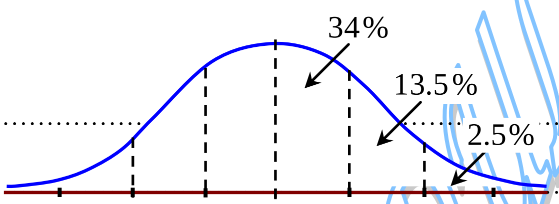
❸ $\sigma = 4.1 \quad , \quad \mu = 49 \quad , \quad z = 1.7$

....

③ تتوزع أطوال 120 لاعباً من لاعبي كرة السلة توزيعاً طبيعياً بمتوسط $180cm$ وانحراف معياري $5cm$

a) ما عدد اللاعبين الذين تزيد أطوالهم عن $185cm$

b) ما النسبة المئوية للاعبين الذين تقل أطوالهم عن $170cm$



....

....

....

....

....

....

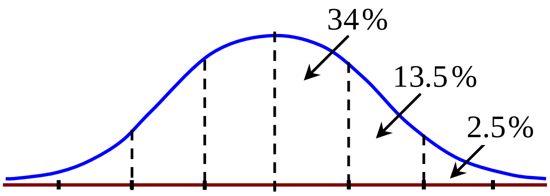
....

....

④ إذا كانت أوزان 100 موظف في شركة ما تتوزع توزيعاً طبيعياً ، بمتوسط $70kg$ وانحراف معياري $10kg$

a) ما احتمال أن يتم اختيار موظف بصورة عشوائية ويكون وزنه أقل من $90kg$

b) ما العدد التقريبي للموظفين الذين تقع أوزانهم $60kg$, $80kg$



⑤ العمر الافتراضي لنوع محدد من البطاريات موزع توزيعاً طبيعياً حيث $\mu=8$ ساعات و $\sigma=1.5$ ساعة.

أوجد احتمال كل مما يلي : a) سوف تستمر البطارية لاقل من 6 ساعات. 9%

b) ستعمل البطارية اكثر من 12 ساعة. 0.4%

c) ستعمل البطارية بين 8 و 9 ساعات. 25%

ليس المطلوب اسعاد كل الناس ، ولكن عليك أن لا تؤذي أحداً من الناس

Amz.math@hotmail.com

⑥ يسافر خميس مسافة $290\,mi$ كل اسبوع للعمل وتسير سيارته مسافة $29.6\,mi$ مقابل كل لتر تستهلكه من الوقود عند انحراف معياري يساوي $5.4\,mi$ للتر الواحد. افترض ان البيانات موزعة توزيعاً طبيعياً. 46.4

a) قدر عدد الاميال التي يمكن لسيارة خميس ان تسير ضمنها مسافة 35 مقابل كل لتر من البنزين أو أفضل من ذلك.

b) ما النسبة المئوية من سفر خميس والتي من اجلها تسير السيارة ما بين $24.2\,mi$ و $40.4\,mi$ 81.5%

....

....

....

....

....

....

....

....

....

⑦ يساوي المستوى الوسطي لكوليسترول الدم لدى الإماراتيين البالغين 203 (ميليجرام في الديسيلتر) عند انحراف معياري قيمتة 38.8، وبفرض أن البيانات موزعة توزيعاً طبيعياً . أوجـد احتمال كل مما يلي :

a) مستوى كوليسترول الدم ما دون 160 .والذي يعد منخفضا وقد يؤدي إلى خطر الإصابة بجلطة. 13%

b)مستوى كوليسترول الدم فوق 240 ويعد مرتفعا ويمكن أن يؤدي إلى خطر الإصابة بمرض القلب 17%

c) مستوى كوليسترول الدم بين 180 و 200 والذي يعد طبيعياً. 19%

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

(10 - 4) نظرية النهاية المركزية

القيمة Z لمتوسط عينة

قيمة Z لوسط عينة في مجتمع إحصائي تعطى بالعلاقة : $Z=\dfrac{\overline{x}-\mu}{\sigma_{\overline{x}}}$ حيث $\sigma_{\overline{x}}=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ويكون $\sigma_{\overline{x}}$ هو وسط التجمع الإحصائي أو الخطأ المعياري ويكون μ هو وسط المجتمع الإحصائي

مثال 1 وفقاً لدراسة حديثة ، فإن متوسط العمر الذي يغادر فيه الشخص البالغ منزل العائلة هو 26 عاماً .
افترض أن التوزيع طبيعياً بانحراف معياري 2.4 عام . فإذا حُددت عينة عشوائية من 20 بالغاً
أوجد احتمال أن وسط العمر الذي يغادر فيه المشاركون في الدراسة أكبر من 25 عاماً

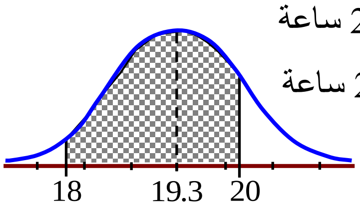
الحل: بما أن التوزيع طبيعي فإن توزيع متوسطات العينات طبيعي وفيه $\mu=105\ ,\ \sigma_{\overline{x}}=\dfrac{2.4}{\sqrt{20}}=0.537$

نوجد قيمة z $\quad z=\dfrac{x-\mu}{\sigma_{\overline{x}}}=\dfrac{25-26}{0.537}=-1.86$

باستخدام الآلة الحاسبة نوجد $p(\overline{x}>25)$ (المساحة على يمين $z=-1.86$) فتكون $Q(-1.86)=0.9685$

احتمال أن وسط عمر العينة أكبر من 25 عاماً هو $0.9685\times 100\ \% = 96.85\%$

مثال 2 تعكف شركة لإنتاج البطاريات القابلة لإعادة الشحن على تصميم بطارية تحتاج لإعادة شحن بعد متوسط
19.3 ساعة من الاستخدام . افترض أن التوزيع طبيعياً بانحراف معياري 2.4 ساعة
أوجد احتمال أن العمر المتوسط للبطاريات قبل إعادة الشحن بين 18 و 20 ساعة



الحل: نوجد الانحراف المعياري لمتوسطات العينات $\sigma_{\overline{x}}=\dfrac{2.4}{\sqrt{20}}=0.537$

نوجد قيمة z المقابلة لـ $\overline{x}=18$: $\quad z=\dfrac{x-\mu}{\sigma_{\overline{x}}}=\dfrac{18-19.3}{0.537}=-2.42$

نوجد قيمة z المقابلة لـ $\overline{x}=20$: $\quad z=\dfrac{x-\mu}{\sigma_{\overline{x}}}=\dfrac{20-19.3}{0.537}=1.30$

باستخدام الآلة الحاسبة نوجد $P(-2.42<z<1.3)=0.8954$ (المساحة بين $z=1.3$ و $z=-2.42$)

احتمال أن العمر المتوسط للبطاريات قبل إعادة الشحن بين 18 و 20 ساعة هو 89.54%

تدريب متوسط تكلفة لتر الحليب $AED\ 3.49$ عند انحراف معياري $AED\ 0.24$ ، فإذا أختيرت عينة عشوائية
من 40 عبوة سعة كل منها لتر واحد . أوجد احتمال أن يكون متوسط العينة بين $AED\ 3.40$ و $AED\ 3.60$

98.9%

....

....

....

....

....

....

مثال 3 وفقاً لدراسة حديثة ، فإن متوسط حجم الفصل في المدارس الثانوية على مستوى البلاد 24.7 طالب لكل فصل افترض أن التوزيع طبيعياً بانحراف معياري 3.6 طالب .

a) أوجـد احتمال أن يضم صف دراسي مختار عشوائياً أقل من 23 طالباً

الحل: المطلوب $p(x<23)$ نوجد قيمة z المقابلة لـ $x=23$:
$$z=\frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{23-24.7}{3.6}=-0.47$$

باستخدام الآلة الحاسبة نوجد $P(-0.47)=0.3192$ (المساحة على يسار $z=-0.47$)

فيكون احتمال أن يضم صف دراسي مختار عشوائياً أقل من 23 طالباً هو 31.9%

b) إذا اختيرت عينة عشوائية من 15 صف دراسي أوجـد احتمال أن يكون متوسط العينة أقل من 23 طالباً في الصف الدراسي الواحد

السؤال حول متوسط العينة لذلك نوجـد الانحراف المعياري لمتوسطات العينات
$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{3.6}{\sqrt{15}}=0.93$$

نوجـد قيمة z المقابلة لـ $\overline{x}=23$:
$$z=\frac{x-\mu}{\sigma_{\bar{x}}}=\frac{23-24.7}{0.93}=-1.83$$

باستخدام الآلة الحاسبة نوجد $P(-1.83)=0.0336$ (المساحة على يسار $z=-1.83$)

وبالتالي احتمال أن يكون متوسط العينة أقل من 23 طالباً في الصف الدراسي الواحد هو 3.36%

قاعدة التقريب لتوزيعات ذات الحدين

يمكن استخدام التوزيع الطبيعي لتقريب توزيع ذي حدين عندما $np\ge 5$ و $nq\ge 5$

حيث n عدد التجارب و p احتمال النجاح و q احتمال الفشل

ملاحظة : التوزيع الطبيعي لا يمكن استخدامه للتوزيعات ذات الحدين إلّا إذا كان المتغير الأصلي موزع طبيعياً و $n\ge 30$

فمثلاً إذا كان $p=0.4$, $n=5$ فإن $np=5(0.4)=2<5$ (لا يمكن استخدامه لتقريب التوزيع ذات الحدين)

مثال 4 أشارت صحيفة مدرسية إلى أن 20% من طلاب السنة الأخيرة في المدرسة سيلتحقون بجامعة خارج الإمارة فإذا اختير 25 طالب من السنة الأخيرة عشوائياً. أوجـد احتمال أن ينضم أقل من 5 طلاب لجامعة خارج الإمارة

الحل: التجربة ذات الحدين فيها $n=35$, $q=0.8$, $p=0.2$

نوجـد الوسط $\mu=np=35(0.2)=7$ و نوجـد الانحراف المعياري $\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{35(0.2)(0.8)}\approx 2.37$

اكتب المسألة بصيغة الاحتمال باستخدام x : احتمال أن يلتحق أقل من 5 طلاب يساوي $p(x<5)$

أعد كتابة المسألة متضمنة معامل الاتصال المطلوب احتمال انضمام أقل من 5 طلاب أي $p(x<5-0.5)$

نوجـد قيمة z الموافقة لـ $x=4.5$:
$$z=\frac{x-\mu}{\sigma_{\bar{x}}}=\frac{4.5-7}{2.37}=-1.05$$

باستخدام الآلة الحاسبة نوجد $P(-1.05)=0.147$ (المساحة على يسار $z=-1.05$)

إذاً احتمال أن ينضم أقل من 5 طلاب لجامعة خارج الإمارة 14.7% ضمن عينة عشوائية من 35 طالب

ما كل ما يدرسه المـرء يفهمـه تأتي الامتحانات بما لا تحتوي الكتب

تمارين

① يمضغ الفرد الأمريكي ما متوسطه 182 قطعة من اللبان في العام .افترض ان الانحراف المعياري يساوي 13 قطعة في كل سؤال مما يلي .وافترض أن المتغير موزع عشوائياً

a) أوجد احتمال في أن يكون 50 شخصا اختيروا عشوائيا يمضغون ما متوسطة 175 قطعة أو أكثر من العلكه. 99.9%

b) إذا اختيرت عينة عشوائية من 45 شخصا، أوجد الاحتمال في أن يقع العدد المتوسط من قطع العلكه التي يمضغونها في العام بين 180 و185. 78.8%

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

② يساوي متوسط زمن الشفاء لدى مرضى مصابين بفيروس محدد 4.5 ايام عند انحراف معياري يساوي يومين. افرض أن المتغير موزع عشوائيا.

a) أوجد احتمال ان يساوي زمن الشفاء المتوسط اقل من أربعة أيام لدى عينة عشوائية من 75 شخصا. 1.5%

b) إذا كانت العينة العشوائية من 80 شخصا، اوجد احتمال أن يقع زمن الشفاء المتوسط بين 4.4 و 4.8 أيام. 58.3%

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

③ يساوي متوسط عدد السياح الذين يزورون أحد المعالم الوطنية في كل شهر 55000 ، بانحراف معياري يساوي 8000 افترض أن المتغير موزع طبيعياً.

a) إذا اختير شهر عشوائيا ، فأوجد احتمال أن يكون هناك أقل من 50000 سائح زائر . 26.6%

b) إذا اختيرت عينة من 10 أشهر ، فأوجد احتمال أن يكون هناك أقل من 50000 سائح زائر. 2.4%

④ في إحدى السنوات الأخيرة ، قال 33% من المشاهدين أنهم كانوا يخططون لمشاهدة بطولة كأس العالم في كرة القدم فما احتمال أنه في عينة عشوائية من 45 شخصا ، سيخطط اقل من 14 شخصا لمشاهدة كأس العالم؟(التوزيع طبيعي) 33.4%

وَمَن يَتَوَكَّلْ عَلَى ٱللَّهِ فَهُوَ حَسْبُهُۥٓ إِنَّ ٱللَّهَ بَٰلِغُ أَمْرِهِۦ

⑤ اكتشفت إحدى شركات تصنيع السيارات عيباص في موديل جديد . ويتوقع أن يؤثر العيب في %30 من السيارات المنتجة. فما احتمال وجود 10 سيارات معيبة على الأقل و15 سيارة معيبة على الأكثر ضمن عينة عشوائية من 40 سيارة 69.2%

⑥ بناء على استطلاع وطني للأراء خلال إحدى السنوات الأخيرة فأن 27% من المشاركين شاهدوا 5 أفلام أو أكثر في دور سينما. فمن أصل عينة عشوائية من 40 شخصا ، ما احتمال أن يكون ما بين 6 و11 شخصا شاهدوا أكثر من 5 أفلام في دار السينما خلال ذلك العام؟ افترض أن المتغير موزع طبيعيا. 39.5%