المبدعون في الرياضيات

المنهاج المغربي

الفرع : الأدبي

للسنة الدراسية : ٢٠١٨ / ٢٠١٩

الفصل : الثاني

الوحدة الرابعة : التكامل و تطبيقاته

إعداد المُعلّم : خالد المقدادي

: ٠٧٨٥٧٥٤٩٤٧

قوانين التكامل الرئيسية

الثابت نضع بجانبه (س)

انتبه الحرف أ يختلف عن د س

١) $\int$ أ د س = أ س + جـ

٢) $\int$ س^{ن} د س = $\frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١}$ + جـ

٣) $\int$ (أ س + ب)^{ن} د س = $\frac{(\text{أ س} + \text{ب})^{\text{ن}+١}}{\text{أ} \times (\text{ن}+١)}$ + جـ

بشرط أن يكون ما داخل القوس اقتران خطيّ فقط

٤) الجذر نحوّله لقوّة كسرية ثمّ نُكامل

أ) $\int \sqrt[\text{ن}]{\text{س}}$ د س = $\int$ س$^{\frac{١}{\text{ن}}}$ د س = $\frac{\text{س}^{\frac{\text{ن}+١}{\text{ن}}}}{\frac{\text{ن}+١}{\text{ن}}}$ + جـ

البسط + المقام

المقام

ب) $\int \sqrt[\text{ن}]{\text{س}^{\text{م}}}$ د س = $\int$ س$^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$ د س = $\frac{\text{س}^{\frac{\text{م}+\text{ن}}{\text{ن}}}}{\frac{\text{م}+\text{ن}}{\text{ن}}}$ + جـ

٥) $\int$ جتا س د س = جـا س + جـ

الجواب بدون (ت) لا نضع سالب (ـــ)

٦) $\int$ جـا س د س = ـــ جتا س + جـ

الجواب فيه (ت) نضع سالب (ـــ)

٧) $\int$ قا^{٢} س د س = ظـا س + جـ

٨) القانون لِـ (جـا) و نطبّق نفس الطريقة على الباقي

$$\int \text{جـا} (\text{أ س} + \text{ب}) \, \text{د س} = \frac{\text{ـــ جتا} (\text{أ س} + \text{ب})}{\text{أ}} + \text{جـ}$$

بشرط أن يكون ما داخل القوس اقتران خطيّ فقط

الدرس الأوّل : التكامل غير المحدود (تكامل مُباشر بالقوانين)

١) أوجد قيمة التكاملات الآتية :

أ) $\int$ ٣ د س

الحل : = ٣ س + جـ

ب) $\int$ ـــ ٥ د س

الحل : = ـــ ٥ س + جـ

جـ) $\int \frac{٢}{٧}$ د س

الحل : = $\frac{٢}{٧}$ س + جـ

د) $\int \sqrt{٦}$ د س

الحل : = $\sqrt{٦}$ س + جـ

هـ) $\int$ د س

الحل : = س + جـ

و) $\int$ و د س

الحل : = و س + جـ

ز) $\int$ ل د س

الحل : = ل س + جـ

ح) $\int$ هـ د س

الحل : = هـ س + جـ

ط) $\int$ س د س

الحل : $= \frac{س^{٢}}{٢} + جـ$

ي) $\int$ $س^{٢}$ د س

الحل : $= \frac{س^{٣}}{٣} + جـ$

ك) $\int$ ٣ $س^{٢}$ د س

الحل : $= \frac{٣ س^{٣}}{٣} + جـ = س^{٣} + جـ$

ل) $\int$ ٨ $س^{٣}$ د س

الحل : $= \frac{٨ س^{٤}}{٤} + جـ = ٢ س^{٤} + جـ$

م) $\int \frac{س^{٤}}{٢}$ د س

الحل : $= \frac{س^{٥}}{٢ \times ٥} + جـ = \frac{س^{٥}}{١٠} + جـ$

ن) $\int \frac{٣}{٨}$ س^{٣} د س

الحل : $= \frac{٣}{٣٢}$ س^{٤} + جـ

ش) $\int \frac{١}{س^{٢}}$ د س

الحل : $= \int$ س$^{-٢}$ د س

$= \frac{س^{-١}}{-١} + جـ = \frac{-١}{س} + جـ$

ع) $\int \frac{٤}{س^{٣}}$ د س

الحل : $= \int ٤$ س$^{-٣}$ د س

$= \frac{٤ س^{-٢}}{-٢} + جـ = \frac{-٢}{س^{٢}} + جـ$

ف) $\int \frac{٦}{٥ س^{٤}}$ د س

الحل : $= \int \frac{٦ س^{-٤}}{٥}$ د س

$= \frac{٦ س^{-٣}}{-١٥} + جـ = \frac{-٦}{١٥ س^{٣}} + جـ$

ص) $\int \frac{١٢}{س^{-٣}}$ د س

الحل : $= \int ١٢ س^{٣}$ د س $= \frac{١٢ س^{٤}}{٤} +$ جـ

$= ٣ س^{٤} +$ جـ

ت) $\int \frac{٦}{٤ س^{-٥}}$ د س

الحل : $= \int \frac{٦ س^{٥}}{٤}$ د س $= \frac{٦ س^{٦}}{٢٤} +$ جـ

ث) $\int \frac{٢}{س^{\frac{٣}{٤}}}$ د س

الحل : $= \int ٢ س^{\frac{-٣}{٤}}$ د س $= \frac{٤ \times ٢ س^{\frac{١}{٤}}}{١} +$ جـ

$= ٨ \sqrt[٤]{س} +$ جـ

خ) $\int \sqrt{س}$ د س

الحل : $= \int س^{\frac{١}{٢}}$ د س

$= \frac{٢ س^{\frac{٣}{٢}}}{٣} +$ جـ $=$

$= \frac{٢ \sqrt[٣]{س^{٣}}}{٣} +$ جـ

ذ) $\int \sqrt[3]{س}$ د س

الحل : $= \int س^{\frac{1}{3}}$ د س

$= \frac{3\ س^{\frac{4}{3}}}{4} + جـ = \frac{3\ \sqrt[3]{س^4}}{4} + جـ$

ر) $\int \sqrt[3]{س^2}$ د س

الحل : $= \int س^{\frac{2}{3}}$ د س

$= \frac{3\ س^{\frac{5}{3}}}{5} + جـ = \frac{3\ \sqrt[3]{س^5}}{5} + جـ$

ض) $\int \sqrt[5]{س}$ د س

الحل : $= \int س^{\frac{5}{2}}$ د س

$= \frac{2\ س^{\frac{7}{2}}}{7} + جـ = \frac{2\ \sqrt{س^7}}{7} + جـ$

ظ) $\int \sqrt[6]{\text{س}^{3}}$ ٤ د س

الحل : $= \int$ ٤ $\text{س}^{\frac{3}{6}}$ د س

$= \frac{٦ \times ٤ \ \text{س}^{\frac{9}{6}}}{٩} + \text{جـ} = \frac{٢٤ \sqrt[6]{\text{س}^{9}}}{٩} + \text{جـ}$

غ) $\int \frac{١}{\sqrt{\text{س}}}$ د س

الحل : $= \int \frac{١}{\text{س}^{\frac{١}{٢}}}$ د س

$= \int \text{س}^{\frac{-١}{٢}}$ د س $= \frac{٢ \ \text{س}^{\frac{١}{٢}}}{١} + \text{جـ} = ٢ \sqrt{\text{س}} + \text{جـ}$

ق)
$$\int \frac{7}{\sqrt[3]{س^{2}}}\ د\ س$$

الحل :
$$= \int \frac{7}{س^{\frac{2}{3}}}\ د\ س$$

$$= \int 7\ س^{-\frac{2}{3}}\ د\ س = \frac{7 \times 3\ س^{\frac{1}{3}}}{1} + جـ$$

$$= 21\ \sqrt[3]{س} + جـ$$

أ *)
$$\int \frac{2}{\sqrt[4]{س^{6}}}\ د\ س$$

الحل :
$$= \int \frac{2}{س^{\frac{6}{4}}}\ د\ س$$

$$= \int \frac{2\ س^{-\frac{6}{4}}}{6}\ د\ س = \frac{2 \times 4\ س^{-\frac{2}{4}}}{6 \times -2} + جـ$$

$$= \frac{8\ س^{-\frac{2}{4}}}{-12} + جـ = \frac{8}{\sqrt[4]{س^{2}}} + جـ$$

$$= \frac{8}{-12\ \sqrt[4]{س^{2}}} + جـ$$

ب *) $\int$ جتا س د س

الحل : = جا س + جـ

جـ *) $\int$ ٧ جتا س د س

الحل : = ٧ جا س + جـ

د *) $\int \frac{٣ \text{ جتا س}}{٢}$ د س

الحل : = $\frac{٣ \text{ جا س}}{٢}$ + جـ

هـ *) $\int$ جا س د س

الحل : = − جتا س + جـ

و *) $\int$ ٢ جا س د س

الحل : = − ٢ جتا س + جـ

ز *) $\int \frac{٣}{٩}$ جا س د س

الحل : = $-\frac{٣}{٩}$ جتا س + جـ

ح *) $\int$ قا^{٢} س د س

الحل : = ظا س + جـ

كوكتيل

ط *) $\int$ (جـا س + ٣ س^{٢}) د س

الحل : = − جتا س + $\frac{٣ س^{٣}}{٣}$ + جـ

= − جتا س + س^{٣} + جـ

ي *) $\int$ (٨ س^{٣} − ٦ جتا س) د س

الحل : = $\frac{٨ س^{٤}}{٤}$ − ٦ جـا س + جـ

= ٢ س^{٤} − ٦ جـا س + جـ

ك *) $\int$ (٢ س + ٣ س^{٢}) د س

الحل : = $\frac{٢ س^{٢}}{٢}$ + $\frac{٣ س^{٣}}{٣}$ + جـ = س^{٢} + س^{٣} + جـ

ل *) $\int$ (٥ − ٤ س^{٢}) د س

الحل : = ٥ س − $\frac{٤ س^{٣}}{٣}$ + جـ

م *) $\int$ (قا^{٢} س − جا س) د س

الحل : = ظا س − − جتا س + جـ

= ظا س + جتا س + جـ

ن *) $\int$ ($\sqrt{\text{س}}$ − س) د س

الحل : = $\int$ (س$^{\frac{١}{٢}}$ − س) د س

= $\frac{\text{س}^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}}$ − $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ + جـ

= $\frac{٢}{٣}\sqrt{\text{س}^{٣}}$ − $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ + جـ

ش *) $\int$ (− جا س + ١) د س

الحل : = − − جتا س + س + جـ

= جتا س + س + جـ

ع *) $\int$ (قا^{٢} س − ٢ جتا س) د س

الحل : = ظا س − ٢ جا س + جـ

ف *) $\int$ ٤ س (س^{٢} + ٢) د س

الحل : = $\int$ (٤ س^{٣} + ٨ س) د س

$$= \frac{٤ \text{ س}^{٤}}{٤} + \frac{٨ \text{ س}^{٢}}{٢} + \text{جـ}$$

$$= \text{س}^{٤} + ٤ \text{ س}^{٢} + \text{جـ}$$

ص *) $\int$ (س + ١) (س + ٣) د س

الحل : = $\int$ (س^{٢} + ٣ س + س + ٣) د س

= $\int$ (س^{٢} + ٤ س + ٣) د س

$$= \frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \frac{٤ \text{ س}^{٢}}{٢} + ٣ \text{ س} + \text{جـ}$$

$$= \frac{\text{س}^{٣}}{٣} + ٢ \text{ س}^{٢} + ٣ \text{ س} + \text{جـ}$$

ظ *) $\int$ (٢ س^{٢} − ٤) (٣ س^{٤} + ٥) د س

الحل : = $\int$ (٦ س^{٦} + ١٠ س^{٢} − ١٢ س^{٤} − ٢٠) د س

$$= \frac{٦ \text{ س}^{٧}}{٧} + \frac{١٠ \text{ س}^{٣}}{٣} - \frac{١٢ \text{ س}^{٥}}{٥} - ٢٠ \text{ س} + \text{جـ}$$

غ *) $\int$ (٣ س + ٢)^{٢} د س | يُمكن حل هذا السؤال بالتكامل بالتعويض

الحل : = $\int$ (٣ س + ٢) × (٣ س + ٢) د س

= $\int$ (٩ س^{٢} + ٦ س + ٦ س + ٤) د س

= $\int$ (٩ س^{٢} + ١٢ س + ٤) د س

= $\frac{٩ \text{ س}^{٣}}{٣}$ + $\frac{١٢ \text{ س}^{٢}}{٢}$ + ٤ س + جـ

= ٣ س^{٣} + ٦ س^{٢} + ٤ س + جـ

ق *) $\int$ (٥ س^{٢} + ٣)^{٢} د س | لا يُمكن حل هذا السؤال بالتكامل بالتعويض

الحل : = $\int$ (٥ س^{٢} + ٣) × (٥ س^{٢} + ٣) د س

= $\int$ (٢٥ س^{٤} + ١٥ س^{٢} + ١٥ س^{٢} + ٩) د س

= $\int$ (٢٥ س^{٤} + ٣٠ س^{٢} + ٩) د س

= $\frac{٢٥ \text{ س}^{٥}}{٥}$ + $\frac{٣٠ \text{ س}^{٣}}{٣}$ + ٩ س + جـ

= ٥ س^{٥} + ١٠ س^{٣} + ٩ س + جـ

أ * *) $\int \frac{س^{٤} + ٦ س^{٣}}{س^{٢}}$ د س

الحل : $= \int \left(\frac{س^{٤}}{س^{٢}} + \frac{٦ س^{٣}}{س^{٢}} \right)$ د س

$= \int (س^{٢} + ٦ س)$ د س

$= \frac{س^{٣}}{٣} + \frac{٦ س^{٢}}{٢} +$ جـ

$= \frac{س^{٣}}{٣} + ٣ س^{٢} +$ جـ

ب * *) $\int \frac{٩ س^{٥} - ٨ س^{٤} + ٧ س^{٣} - ٣ س}{س^{٣}}$ د س

الحل : $= \left(\frac{٩ س^{٥}}{س^{٣}} - \frac{٨ س^{٤}}{س^{٣}} + \frac{٧ س^{٣}}{س^{٣}} - \frac{٣ س}{س^{٣}} \right)$ د س

$= \int (٩ س^{٢} - ٨ س + ٧ - ٣ س^{-٢})$ د س

$= \frac{٩ س^{٣}}{٣} - \frac{٨ س^{٢}}{٢} + ٧ س - \frac{٣ س^{-١}}{-١} +$ جـ

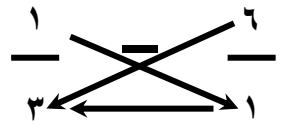
$= ٣ س^{٣} - ٤ س^{٢} + ٧ س + \frac{٣}{س} +$ جـ

جـ *) $\int \frac{س^{٦} - ٥}{\sqrt[٣]{س}}$ د س

الحل : $= \int \left(\frac{س^{٦}}{س^{\frac{١}{٣}}} - \frac{٥}{س^{\frac{١}{٣}}} \right)$ د س

$= \int (س^{\frac{١٧}{٣}} - ٥ س^{-\frac{١}{٣}})$ د س

$= \frac{١٨ - ١}{٣} = \frac{١٧}{٣}$



$= \frac{٣ س^{\frac{٢٠}{٣}}}{٢٠} - \frac{٣ \times ٥ س^{\frac{٢}{٣}}}{٢}$ + جـ

$= \frac{٣ \sqrt[٣]{س^{٢٠}}}{٢٠} - \frac{١٥ \sqrt[٣]{س^{٢}}}{٢}$ + جـ

د * *) $\int \frac{س^{٢} + ٧ س}{\sqrt[٣]{س}}$ د س

الحل : $= \int \left(\frac{س^{٢}}{س^{\frac{٣}{٢}}} + \frac{٧ س}{س^{\frac{٣}{٢}}} \right)$ د س

$= \int (س^{\frac{١}{٢}} + ٧ س^{-\frac{١}{٢}})$ د س

$= \frac{٢ س^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + \frac{٢ \times ٧ س^{\frac{١}{٢}}}{١} +$ جـ

$= \frac{٢ \sqrt{س^{٣}}}{٣} + ١٤ \sqrt{س} +$ جـ

$\frac{٣}{٢} - \frac{١}{٢}$

$= \frac{٤ - ٣}{٢} = \frac{١}{٢}$

$\frac{٣}{٢} - \frac{١}{٢}$

$= \frac{٢ - ٣}{٢} = \frac{-١}{٢}$

هـ * *) $\int \frac{س^{٢} + \sqrt{س}\ جـا\ س}{\sqrt{س}}$ د س

الحل : $= \int \left(\frac{س^{٢}}{\sqrt{س}} + \frac{\sqrt{س}\ جـا\ س}{\sqrt{س}} \right)$ د س

$= \int \left(\frac{س^{٢}}{س^{\frac{١}{٢}}} + جـا\ س \right)$ د س

$= \int (س^{\frac{٣}{٢}} + جـا\ س)$ د س

$= \frac{٤ - ١}{٢} = \frac{٣}{٢}$

$= \frac{٢\ س^{\frac{٥}{٢}}}{٥} + - جتـا\ س + جـ$

$= \frac{٢\ \sqrt[٥]{س^{٢}}}{٥} - جتـا\ س + جـ$

و * *) $\int \frac{س^{3} - \sqrt[3]{س^{2}}\ قا^{2} س + \sqrt[3]{س^{8}}}{\sqrt[3]{س^{2}}}$ د س

الحل : $= \int \left(\frac{س^{3}}{\sqrt[3]{س^{2}}} - \frac{\sqrt[3]{س^{2}}\ قا^{2} س}{\sqrt[3]{س^{2}}} + \frac{\sqrt[3]{س^{8}}}{\sqrt[3]{س^{2}}} \right)$ د س

$= \int \left(\frac{س^{3}}{س^{\frac{2}{3}}} - قا^{2} س + \frac{س^{\frac{8}{3}}}{س^{\frac{2}{3}}} \right)$ د س

$= \int (س^{\frac{7}{3}} - قا^{2} س + س^{2})$ د س

$= \frac{9 - 2}{3} = \frac{7}{3}$

$= \frac{س^{3}}{\frac{10}{3}\ 3} - ظا س + \frac{س^{3}}{3} + جـ$

$= \frac{\sqrt[3]{س^{10}}\ 3}{10} - ظا س + \frac{س^{3}}{3} + جـ$

$\frac{8}{3} - \frac{2}{3} = \frac{6}{3} = 2$

فكرتين خاصتين

الفكرة الخاصّة الأولى :

$$\frac{1}{\text{جتا}^2 س} = \text{قا}^2 س$$

ز * *) $\int \frac{1}{\text{جتا}^2 س}$ د س

الحل : $= \int \text{قا}^2 س$ د س $= \text{ظا} س + جـ$

ح * *) $\int \frac{٥}{\text{جتا}^2 س}$ د س

الحل : $= \int ٥ \, \text{قا}^2 س$ د س $= ٥ \, \text{ظا} س + جـ$

ط * *) $\int \frac{٣}{٤ \, \text{جتا}^2 س}$ د س

الحل : $= \int \frac{٣}{٤} \, \text{قا}^2 س$ د س $= \frac{٣}{٤} \, \text{ظا} س + جـ$

الفكرة الخاصّة الثانية :

$$\text{ظا س} = \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$$

ي **) $\int$ ظا س جتا س د س

الحل : $= \int \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} \times \text{جتا س}\ \text{د س}$

$= \int$ جا س د س $=$ — جتا س + جـ

ك **) $\int$ ٧ جتا س ظا س د س

الحل : $= \int$ ٧ جتا س $\times \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$ د س

$= \int$ ٧ جا س د س

$=$ — ٧ جتا س + جـ

الدرس الرابع : التكامل بالتعويض

النوع الأوّل : السينات

الحالة الأولى : القوس الذي لهُ قوّة

٢) أوجد قيمة التكاملات الآتية :

أ) $\int (س + ٣)^{٢}$ د س

الحل :

ص = س + ٣

$\frac{د ص}{د س} = ١ \Longleftarrow \frac{د ص}{١} = د س$

$= \int ص^{٢} \times \frac{د ص}{١}$

$= \int ص^{٢}$ د ص $= \frac{ص^{٣}}{٣} + ج = \frac{(س + ٣)^{٣}}{٣} + ج$

ب) $\int (٤ س + ٥)^{٣}$ د س

الحل :

ص = ٤ س + ٥

$\frac{د ص}{د س} = ٤ \Longleftarrow \frac{د ص}{٤} = د س$

$= \int ص^{٣} \times \frac{د ص}{٤}$

$= \int \frac{ص^{٣}}{٤}$ د ص $= \frac{ص^{٤}}{١٦} + ج = \frac{(٤ س + ٥)^{٤}}{١٦} + ج$

جـ) $\int$ ٢ س (س^{٢} − ٢)^{٥} د س

الحل :

ص = س^{٢} − ٢

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٢ س ⟸ $\frac{\text{د ص}}{\text{٢ س}}$ = د س

$= \int \frac{٢ \text{ س ص}^{٥}}{٢ \text{ س}} \text{ د ص} = \frac{\text{ص}^{٦}}{٦} + \text{جـ} = \frac{(\text{س}^{٢} - ٢)^{٦}}{٦} + \text{جـ}$

د) $\int$ ٦ س^{٢} (س^{٣} + ٧)^{٤} د س

الحل :

ص = س^{٣} + ٧

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٣ س^{٢} ⟸ $\frac{\text{د ص}}{\text{٣ س}^{٢}}$ = د س

$= \int \frac{٦ \text{ س}^{٢} \text{ ص}^{٤}}{٣ \text{ س}^{٢}} \text{ د ص} = \frac{٢ \text{ ص}^{٥}}{٥} + \text{جـ} = \frac{٢ (\text{س}^{٣} + ٧)^{٥}}{٥} + \text{جـ}$

هـ) $\int$ ٥ س^{٣} (٩ − س^{٤})^{٦} د س

الحل :

ص = ٩ − س^{٤}

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = − ٤ س^{٣} ⟸ $\frac{\text{د ص}}{-٤ \text{ س}^{٣}}$ = د س

$= \int \frac{٥ \text{ س}^{٣} \text{ ص}^{٦}}{-٤ \text{ س}^{٣}} \text{ د ص} = \frac{-٥ \text{ ص}^{٦}}{٤} + \text{جـ} = \frac{-٥ (٩ - \text{س}^{٤})^{٧}}{٢٨} + \text{جـ}$

و) $\int$ (٣ س^{٢} + ٦) (س^{٣} + ٦ س − ٤)^{٨} د س

الحل :

ص = س^{٣} + ٦ س − ٤

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٣ س^{٢} + ٦ ⟸ $\frac{\text{د ص}}{٣ س^{٢} + ٦}$ = د س

= $\int$ (٣ س^{٢} + ٦) ص^{٨} × $\frac{\text{د ص}}{٣ س^{٢} + ٦}$

= $\int$ ص^{٨} د ص = $\frac{ص^{٩}}{٩}$ + جـ = $\frac{(س^{٣} + ٦ س − ٤)^{٩}}{٩}$ + جـ

ز) $\int$ (٢ س − ٨ س^{٣}) (٢ س^{٤} − س^{٢} − ٤)^{٥} د س

الحل :

ص = ٢ س^{٤} − س^{٢} − ٤

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٨ س^{٣} − ٢ س ⟸ $\frac{\text{د ص}}{٨ س^{٣} − ٢ س}$ = د س

= $\int$ (٢ س − ٨ س^{٣}) ص^{٥} × $\frac{\text{د ص}}{٨ س^{٣} − ٢ س}$

٢٣

= $\int$ − ص^{٥} د ص = $\frac{-(٢ س^{٤} − س^{٢} − ٤)^{٦}}{٦}$ + جـ

ح) $\int$ (٩ س^{٢} + ١٢) (س^{٣} + ٤ س + ٩)^{٢} د س

الحل :

ص = س^{٣} + ٤ س + ٩

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٣ س^{٢} + ٤ ⟸ $\frac{\text{د ص}}{\text{٣ س}^{٢} + ٤}$ = د س

= $\int$ (٩ س^{٢} + ١٢) ص^{٢} × $\frac{\text{د ص}}{\text{٣ س}^{٢} + ٤}$

= $\int$ ٣ ص^{٢} د ص = $\frac{\text{٣ ص}^{٣}}{٣}$ + جـ = (س^{٣} + ٤ س + ٩)^{٣} + جـ

ط) $\int$ (٥ س^{٤} − ٣ س^{٢}) (٢ س^{٥} − ٢ س^{٣} + ٥)^{١٠} د س

الحل :

ص = ٢ س^{٥} − ٢ س^{٣} + ٥

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ١٠ س^{٤} − ٦ س^{٢} ⟸ $\frac{\text{د ص}}{\text{١٠ س}^{٤} - ٦ \text{ س}^{٢}}$ = د س

= $\int$ (٥ س^{٤} − ٣ س^{٢}) ص^{١٠} × $\frac{\text{د ص}}{\text{١٠ س}^{٤} - ٦ \text{ س}^{٢}}$

= $\int$ $\frac{\text{ص}^{١٠}}{٢}$ د ص = $\frac{\text{(٢ س}^{٥} - ٢ \text{ س}^{٣} + ٥)}{٢٢}^{١١}$ + جـ

ي) $\int \frac{1}{(س + ٥)^{٢}}$ د س

الحل :

ص = س + ٥

$= \int \frac{١}{ص^{٢}} \times \frac{د ص}{١}$ ، $\frac{د ص}{د س} = ١ \Longleftarrow \frac{د ص}{١} = د س$

$= \int ص^{-٢}$ د ص $= \frac{ص^{-١}}{-١} + جـ = \frac{-١}{س + ٥} + جـ$

ك) $\int \frac{-٤ س}{(س^{٢} + ٧)^{٤}}$ د س

الحل :

ص = $س^{٢}$ + ٧

$= \int \frac{-٤ س}{ص^{٤}} \times \frac{د ص}{٢ س}$ ، $\frac{د ص}{د س} = ٢ س \Longleftarrow \frac{د ص}{٢ س} = د س$

$= \int \frac{-٢}{ص^{٤}}$ د ص $= \int -٢ ص^{-٤} + جـ$

$= \frac{-٢ ص^{-٣}}{-٣} + جـ = \frac{٢}{٣ ص^{٣}} + جـ$

$= \frac{٢}{٣ (س^{٢} + ٧)^{٣}} + جـ$

ل) $\int \frac{٢ س - ١}{(س^{٢} - س)^{٦}} \, د س$

الحل :

$ص = س^{٢} - س$

$\frac{د ص}{د س} = ٢ س - ١ \Longleftrightarrow \frac{د ص}{٢ س - ١} = د س$

$= \int \frac{٢ س - ١}{ص^{٦}} \times \frac{د ص}{٢ س - ١}$

$= \int \frac{١}{ص^{٦}} د ص = \int ص^{-٦} د ص$

$= \frac{ص^{-٥}}{-٥} + جـ = \frac{-١}{٥ ص^{٥}} + جـ$

$= \frac{-١}{٥ (س^{٢} - س)^{٥}} + جـ$

م) $\int \frac{١٦ س^{٣} - ١٢ س}{(٣ س^{٢} - ٢ س^{٤})^{٣}}$ د س

الحل :

ص = ٣ $س^{٢}$ − ٢ $س^{٤}$

$\frac{د ص}{د س}$ = ٦ س − ٨ $س^{٣}$ ⟸ $\frac{د ص}{٦ س - ٨ س^{٣}}$ = د س

$= \int \frac{١٦ س^{٣} - ١٢ س}{ص^{٣}} \times \frac{د ص}{٦ س - ٨ س^{٣}}$

$= \int \frac{-٢}{ص^{٣}}$ د ص $= \int -٢ ص^{-٣}$ د ص

$= \frac{-٢ ص^{-٢}}{-٢} + جـ = \frac{١}{ص^{٢}} + جـ$

$= \frac{١}{(٣ س^{٢} - ٢ س^{٤})^{٢}} + جـ$

الحالة الثانية : الجذر

ن) $\int \sqrt{\text{س} + ٦}$ د س

الحل :

ص = س + ٦

$= \int \sqrt{\text{ص}} \times \frac{\text{د ص}}{١}$ ⟸ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ١$ ⟺ $\frac{\text{د ص}}{١} = \text{د س}$

$= \int \text{ص}^{\frac{١}{٢}}$ د ص $= \frac{\text{ص}^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ} = \frac{٢\sqrt[٣]{\text{س} + ٦}}{٣} + \text{جـ}$

ش) $\int \sqrt[٣]{٥\text{س} - ٥}$ د س

الحل :

ص = ٥ س − ٥

$= \int \sqrt[٣]{\text{ص}} \times \frac{\text{د ص}}{٥}$ ⟸ $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٥$ ⟺ $\frac{\text{د ص}}{٥} = \text{د س}$

$= \int \frac{\text{ص}^{\frac{١}{٣}}}{٥}$ د ص $= \frac{\text{ص}^{\frac{٤}{٣}}}{٥ \times \frac{٤}{٣}} + \text{جـ}$

$= \frac{٣\sqrt[٣]{٥\text{س} - ٥}^{٤}}{٢٠} + \text{جـ}$

ع) $\int ٤ \sqrt[٥]{(٤ س + ٣)^{٢}}$ د س

الحل :

$ص = ٤ س + ٣$

$\frac{د ص}{د س} = ٤ \Longleftarrow \frac{د ص}{٤} = د س$

$= \int ٤ \sqrt[٥]{ص^{٢}} \times \frac{د ص}{٤}$

$= \int ص^{\frac{٢}{٥}}$ د ص $= \frac{ص^{\frac{٧}{٥}}}{\frac{٧}{٥}} + ج = \frac{٥ \sqrt[٧]{(٤ س + ٣)^{٧}}}{٧} + ج$

ف) $\int ١٢ س^{٢} \sqrt[٤]{٢ س^{٣} - ٦}$ د س

الحل :

$ص = ٢ س^{٣} - ٦$

$\frac{د ص}{د س} = ٦ س^{٢} \Longleftarrow \frac{د ص}{٦ س^{٢}} = د س$

$= \int ١٢ س^{٢} \sqrt[٤]{ص} \times \frac{د ص}{٦ س^{٢}} = \int ٢ ص^{\frac{١}{٤}}$ د ص

$= \frac{٢ ص^{\frac{٥}{٤}}}{\frac{٥}{٤}} + ج = \frac{٨ \sqrt[٥]{٢ س^{٣} - ٦}}{٥} + ج$

$$\int (16س + 12)^{\frac{4}{3}} \sqrt[3]{2س^2 + 3س + 7}\ \ د س$$

الحل :

$$ص = 2س^2 + 3س + 7$$

$$\frac{د ص}{د س} = 4س + 3 \Longleftarrow \frac{د ص}{4س + 3} = د س$$

$$= \int (16س + 12)^{\frac{4}{3}} \sqrt[3]{ص} \times \frac{د ص}{4س + 3}$$

$$= \int 4 ص^{\frac{4}{3}}\ د ص$$

$$= \frac{4 ص^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + جـ$$

$$= \frac{12 \sqrt[3]{2س^2 + 3س + 7}^{\frac{7}{3}}}{7} + جـ$$

ت) $\int \frac{٢}{\sqrt{س + ٤}}$ د س

الحل :

ص = س + ٤

$\frac{د ص}{د س} = ١ \Longleftrightarrow \frac{د ص}{١} = د س$

$= \int \frac{٢}{\sqrt{ص}} \times \frac{د ص}{١}$

$= \int \frac{٢}{ص^{\frac{١}{٢}}}$ د ص $= \int ٢ ص^{-\frac{١}{٢}}$ د ص

$= \frac{٢ ص^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + جـ = ٤ \sqrt{ص} + جـ$

$= ٤ \sqrt{س + ٤} + جـ$

ث) $\int \frac{٢ س + ١}{\sqrt{س^{٢} + س - ١}}$ د س

الحل : ص = $س^{٢} + س - ١$

$\frac{د ص}{د س} = ٢ س + ١ \Longleftrightarrow \frac{د ص}{٢ س + ١} = د س$

$= \int \frac{٢ س + ١}{\sqrt{ص}} \times \frac{د ص}{٢ س + ١}$

$= \int \frac{١}{ص^{\frac{١}{٢}}} د ص = \int ص^{-\frac{١}{٢}} د ص$

$= \frac{ص^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + جـ = ٢ \sqrt{ص} + جـ$

$= ٢ \sqrt{س^{٢} + س - ١} + جـ$

خ) $\int \frac{٦ س - ٨}{\sqrt[٣]{٣ س^{٢} - ٨ س + ٩}} \, د س$

الحل : ص = $٣ س^{٢} - ٨ س + ٩$

$\frac{د ص}{د س} = ٦ س - ٨ \Longleftarrow \frac{د ص}{٦ س - ٨} = د س$

$= \int \frac{٦ س - ٨}{\sqrt[٣]{ص}} \times \frac{د ص}{٦ س - ٨}$

$= \int \frac{١}{\frac{١}{ص^{٣}}} د ص = \int ص^{\frac{-١}{٣}} د ص$

$= \frac{ص^{\frac{٢}{٣}}}{\frac{٢}{٣}} + جـ = \frac{٣ \sqrt[٣]{ص^{٢}}}{٢} + جـ$

$= \frac{\sqrt[٣]{٣ س^{٢} - ٨ س + ٩}^{٢}}{٢} + جـ$

النوع الثاني : جـا ، جـتـا ، قـا^{٢}

ذ) $\int$ جا (س − ٦) د س

الحل :

ص = س − ٦

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ١ ⟸ $\frac{\text{د ص}}{١}$ = د س

= $\int$ جا ص × $\frac{\text{د ص}}{١}$ = $\int$ جا ص د ص

= − جـتـا ص + جـ = − جـتـا (س − ٦) + جـ

ر) $\int$ ٢ س جـتـا (س^{٢} + ٩) د س

الحل :

ص = س^{٢} + ٩

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٢ س ⟸ $\frac{\text{د ص}}{٢ \text{ س}}$ = د س

= $\int$ ٢ س جـتـا ص × $\frac{\text{د ص}}{٢ \text{ س}}$ = $\int$ جـتـا ص د ص

= جـا ص + جـ = جـا (س^{٢} + ٩) + جـ

ض) $\int$ ٩ س^{٢} قا^{٢} (٤ − س^{٣}) د س

الحل :

ص = ٤ − س^{٣}

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = − ٣ س^{٢} ⟸ $\frac{\text{د ص}}{-\ ٣\ \text{س}^{٢}}$ = د س

= $\int$ ٩ س^{٢} قا^{٢} ص × $\frac{\text{د ص}}{-\ ٣\ \text{س}^{٢}}$ = $\int$ − ٣ قا^{٢} ص د ص

= − ٣ ظا ص + جـ = − ٣ ظا (٤ − س^{٣}) + جـ

ظ) $\int$ ٢ س^{٣} جا (٣ س^{٤} + ٥) د س

الحل :

ص = ٣ س^{٤} + ٥

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ١٢ س^{٣} ⟸ $\frac{\text{د ص}}{١٢\ \text{س}^{٣}}$ = د س

= $\int$ ٢ س^{٣} جا ص × $\frac{\text{د ص}}{١٢\ \text{س}^{٣}}$ = $\int$ $\frac{\text{جا ص}}{٦}$ د ص

= $\frac{-\ \text{جتا ص}}{٦}$ + جـ = $\frac{-\ \text{جتا (٣ س}^{٤}\ +\ ٥)}{٦}$ + جـ

غ) $\int$ س جا (س^{٢} − ٣) د س

الحل :

ص = س^{٢} − ٣

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٢ س $\Longleftarrow$ $\frac{\text{د ص}}{\text{٢ س}}$ = د س

$= \int$ س جا ص × $\frac{\text{د ص}}{\text{٢ س}} = \int \frac{\text{جا ص}}{٢}$ د ص

$= \frac{\text{− جتا ص}}{٢} + \text{جـ} = \frac{\text{− جتا (س}^{٢} - ٣)}{٢} + \text{جـ}$

ق) $\int$ (٣ س^{٢} + ٧) قا^{٢} (س^{٣} + ٧ س) د س

الحل :

ص = س^{٣} + ٧ س

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٣ س^{٢} + ٧ $\Longleftarrow$ $\frac{\text{د ص}}{\text{٣ س}^{٢} + ٧}$ = د س

$= \int$ (٣ س^{٢} + ٧) قا^{٢} ص × $\frac{\text{د ص}}{\text{٣ س}^{٢} + ٧}$

$= \int$ قا^{٢} ص د ص = ظا (س^{٣} + ٧ س) + جـ

أ *)

$$\int \frac{٦ س + ٤}{جتا^{٢} (٣ س^{٢} + ٤ س)} \, د س$$

الحل :

$$ص = ٣ س^{٢} + ٤ س$$

$$\frac{د ص}{د س} = ٦ س + ٤ \Longleftarrow \frac{د ص}{٦ س + ٤} = د س$$

$$= \int \frac{٦ س + ٤}{جتا^{٢} ص} \times \frac{د ص}{٦ س + ٤}$$

$$= \int \frac{١}{جتا^{٢} ص} \, د ص = \int قا^{٢} ص \, د ص$$

$$= ظا ص + جـ = ظا (٣ س^{٢} + ٤ س) + جـ$$

ب *)

$$\int \frac{١٢\ س^{٢} + ٤\ س}{جتا^{٢}(٢\ س^{٣} + س^{٢})}\ د\ س$$

الحل :

$$ص = ٢\ س^{٣} + س^{٢}$$

$$\frac{د\ ص}{د\ س} = ٦\ س^{٢} + ٢\ س \Longleftarrow \frac{د\ ص}{٦\ س^{٢} + ٢\ س} = د\ س$$

$$= \int \frac{١٢\ س^{٢} + ٤\ س}{جتا^{٢}\ ص} \times \frac{د\ ص}{٦\ س^{٢} + ٢\ س}$$

$$= \int \frac{٢}{جتا^{٢}\ ص}\ د\ ص = \int ٢\ قا^{٢}\ ص\ د\ ص$$

$$= ٢\ ظا\ ص + جـ = ٢\ ظا\ (٢\ س^{٣} + س^{٢}) + جـ$$

جـ *)

$$\int \frac{٣ + س}{جتا^{٢}(س^{٢} + ٦ س)} \, د س$$

الحل :

$$ص = س^{٢} + ٦ س$$

$$\frac{د ص}{د س} = ٢ س + ٦ \Longleftrightarrow \frac{د ص}{٢ س + ٦} = د س$$

$$= \int \frac{٣ + س}{جتا^{٢} ص} \times \frac{د ص}{٢ س + ٦}$$

$$= \int \frac{١}{٢ جتا^{٢} ص} د ص = \int \frac{قا^{٢} ص}{٢} د ص$$

$$= \frac{ظا ص}{٢} + جـ$$

$$= \frac{ظا (س^{٢} + ٦ س)}{٢} + جـ$$

د * *) $\int \frac{1}{(\text{قا س})^{-2}}$ د س

الحل : $= \int$ قا^{2} س د س $=$ ظا س $+$ جـ

هـ * *) $\int \frac{٤ \text{ س} + ٦}{\text{قا}^{-2} (\text{س}^{2} + ٣ \text{ س})}$ د س

الحل : $= \int (٤ \text{ س} + ٦)$ قا$^{2} (\text{س}^{2} + ٣ \text{ س})$ د س

ص $=$ س$^{2} + ٣$ س

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٢ \text{ س} + ٣ \Longleftarrow \frac{\text{د ص}}{٢ \text{ س} + ٣} = \text{د س}$

$= \int (٤ \text{ س} + ٦)$ قا^{2} ص $\times \frac{\text{د ص}}{٢ \text{ س} + ٣}$

$= \int ٢$ قا^{2} ص د ص $= ٢$ ظا $(\text{س}^{2} + ٣ \text{ س}) +$ جـ

الدرس الثاني : التكامل المحدود

٣) جد قيمة التكاملات التالية :

أوّلاً : التكامل المحدود للتكاملات المُباشرة

أ) $\int_{١}^{٣}$ ٥ د س

الحل : $= \left[٥ س \right]_{١}^{٣} = ٥ \times ٣ - ٥ \times ١ = ١٥ - ٥ = ١٠$

ب) $\int_{٠}^{٢}$ $-$ ٤ د س

الحل : $= \left[-٤ س \right]_{٠}^{٢} = -٤ \times ٢ - -٤ \times ٠ = -٨ - ٠ = -٨$

جـ) $\int_{-٨}^{٤} \frac{٣}{٤}$ د س

الحل : $= \left[\frac{٣}{٤} س \right]_{-٨}^{٤} = \frac{٣}{٤} \times ٤ - \frac{٣}{٤} \times -٨$

$= ٣ - \frac{-٢٤}{٤} = ٣ - -٦ = ٣ + ٦ = ٩$

د) $\int_{٢}^{٥} \frac{٢}{٧}$ د س

الحل : $= \frac{٢}{٧}$ س $\Big]_{٢}^{٥} = \frac{٢}{٧} \times ٥ - \frac{٢}{٧} \times ٢$

$= \frac{١٠}{٧} - \frac{٤}{٧} = \frac{٦}{٧}$

هـ) $\int_{٦}^{١} \sqrt{٨}$ د س

الحل : $= \sqrt{٨}$ س $\Big]_{٦}^{١} = \sqrt{٨} \times ١ - \sqrt{٨} \times ٦$

$= \sqrt{٨} - ٦\sqrt{٨} = -٥\sqrt{٨}$

و) $\int_{-٢}^{٣}$ د س

الحل : $=$ س $\Big]_{-٢}^{٣} = ٣ - (-٢) = ٣ + ٢ = ٥$

ز) $\int_{٧}^{١١}$ و د س

الحل : $=$ و س $\Big]_{٧}^{١١} =$ و $\times ١١ -$ و $\times ٧$

$= ١١$ و $- ٧$ و $= ٤$ و

ح) $\int_{٣}^{٦} ٢ س \, د س$

الحل : $= \left[\frac{٢ س^{٢}}{٢} \right]_{٣}^{٦} = \left[س^{٢} \right]_{٣}^{٦} = ٦^{٢} - ٣^{٢} = ٣٦ - ٩ = ٢٧$

ط) $\int_{٠}^{-٤} ٣ س^{٢} \, د س$

الحل : $= \left[\frac{٣ س^{٣}}{٣} \right]_{٠}^{-٤} = \left[س^{٣} \right]_{٠}^{-٤}$

$= (-٤)^{٣} - ٠^{٣} = -٦٤ - ٠ = -٦٤$

ي) $\int_{٢}^{٥} ٣ س \, د س$

الحل : $= \left[\frac{٣ س^{٢}}{٢} \right]_{٢}^{٥} = \frac{٣ \times ٥^{٢}}{٢} - \frac{٣ \times ٢^{٢}}{٢}$

$= \frac{٧٥}{٢} - \frac{١٢}{٢} = \frac{٦٣}{٢}$

ك) $\int_{١}^{٢} ٣ س^{٣} \, د س$

الحل : $= \left[\frac{٣ س^{٤}}{٤} \right]_{١}^{٢} = \frac{٣ \times ٢^{٤}}{٤} - \frac{٣ \times ١^{٤}}{٤}$

$= \frac{٤٨}{٤} - \frac{٣}{٤} = \frac{٤٥}{٤}$

ل) $\int_{٢}^{٥} \frac{س^{٢}}{٢}$ د س

الحل : $= \frac{س^{٣}}{٢ \times ٣} = \left[\frac{س^{٣}}{٦} \right]_{٢}^{٥}$

$= \frac{٥^{٣}}{٦} - \frac{٢^{٣}}{٦} = \frac{١٢٥}{٦} - \frac{٨}{٦} = \frac{١١٧}{٦}$

م) $\int_{٣}^{٧} \frac{٢}{٩}$ س د س

الحل : $= \frac{٢}{١٨} س^{٢} \Big]_{٣}^{٧} = \frac{٢}{١٨} \times ٧^{٢} - \frac{٢}{١٨} \times ٣^{٢}$

$= \frac{٢}{١٨} \times ٤٩ - \frac{٢}{١٨} \times ٩ = \frac{٩٨}{١٨} - \frac{١٨}{١٨} = \frac{٨٠}{١٨}$

ن) $\int_{١}^{٢} \frac{١}{س^{٢}}$ د س

الحل : $= \int_{١}^{٢} س^{-٢}$ د س

$= \left[\frac{س^{-١}}{-١} \right]_{١}^{٢} = \left[\frac{-١}{س} \right]_{١}^{٢} = \frac{-١}{٢} = \frac{-١}{١}$

$= \frac{-١ + ٢}{٢} = \frac{١}{٢}$

ش) $\int_{1}^{2} \frac{2}{3\ س^{3}}$ د س

الحل : $= \int_{1}^{2} \frac{2\ س^{-3}}{3}$ د س

$= \left[\frac{2\ س^{-2}}{-6} \right]_{1}^{2} = \left[\frac{-2}{6\ س^{2}} \right]_{1}^{2}$

$= \frac{-2}{6 \times 2^{2}} - \frac{-2}{6 \times 1^{2}} =$

$= \frac{-2}{6 \times 4} - \frac{-2}{6 \times 1}$

$= \frac{-2}{24} - \frac{-2}{6}$

$= \frac{-12 - -48}{144}$

$= \frac{36}{144}$

ع) $\int_{1}^{2} \frac{12}{س^{-3}}$ د س

الحل : $= \int_{0}^{2} 12 س^{3}$ د س $= \left[\frac{12 س^{4}}{4} \right]_{1}^{2}$

$= 3 س^{4} \Big]_{1}^{2} = 3 \times 2^{4} - 3 \times 1^{4} = 48 - 3 = 45$

ف) $\int_{9}^{4} \sqrt{س}$ د س

الحل : $= \int_{9}^{4} س^{\frac{1}{2}}$ د س $= \left[\frac{2 س^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_{9}^{4}$

$= \frac{2 \sqrt[3]{س}}{3} \Big]_{9}^{4} = \frac{2 \sqrt[3]{4}}{3} - \frac{2 \sqrt[3]{9}}{3}$

$= \frac{2 \times \sqrt[3]{2^{2}}}{3} - \frac{2 \times \sqrt[3]{3^{3}}}{3}$

$= \frac{2 \times 8}{3} - \frac{2 \times 27}{3} = \frac{16}{3} - \frac{54}{3} = \frac{-38}{3}$

ص) $\int_{1}^{8} \sqrt[3]{س^{2}}$ د س

الحل : $= \int_{1}^{8} س^{\frac{2}{3}}$ د س $= \left[\frac{3 س^{\frac{5}{3}}}{5} \right]_{1}^{8}$

$= \frac{3 \sqrt[5]{س^{3}}}{5}]_{1}^{8} = \frac{3 \sqrt[5]{8^{3}}}{5} - \frac{3 \sqrt[5]{1^{3}}}{5}$

$= \frac{3 \times \sqrt[5]{2^{3}}}{5} - \frac{3 \times \sqrt[5]{1}}{5}$

$= \frac{3 \times 32}{5} - \frac{3 \times 1}{5}$

$= \frac{96}{5} - \frac{3}{5} = \frac{93}{5}$

أ *) $\int_{27}^{64} \frac{7}{\sqrt[3]{س^2}}$ د س

الحل : $= \int_{27}^{64} \frac{7}{س^{\frac{2}{3}}}$ د س

$= \int_{27}^{64} 7 \, س^{-\frac{2}{3}}$ د س $= \frac{3 \times 7 \, س^{\frac{1}{3}}}{1}$

$= 21 \, [\sqrt[3]{س}]_{27}^{64} = 21 \sqrt[3]{64} - 21 \sqrt[3]{27}$

$= 21 \times 4 - 21 \times 3 = 84 - 63 = 21$

ب *) $\int_{0}^{1} (2 س + 8 س^3)$ د س

الحل : $= [(\frac{2 س^2}{2} + \frac{8 س^4}{4})]_{0}^{1}$

$= [(س^2 + 2 س^4)]_{0}^{1}$

$= (1^2 + 2 \times 1^4) - (0^2 + 2 \times 0^4)$

$= 1 + 2 - 0 = 3$

جـ *) $\int_{1}^{3}$ ٤ س (س^{٢} + ٢) د س

الحل : $= \int_{1}^{3}$ (٤ س^{٣} + ٨ س) د س

$$= \left[\frac{٤ \text{ س}^{٤}}{٤} + \frac{٨ \text{ س}^{٢}}{٢} \right]_{1}^{3}$$

$$= \left[\text{س}^{٤} + ٤ \text{ س}^{٢} \right)_{1}^{3}$$

$$= ٣^{٤} + ٤ \times ٣^{٢} - (١^{٤} + ٤ \times ١^{٢})$$

$$= ٨١ + ٤ \times ٩ - (١ + ٤ \times ١)$$

$$= ٨١ + ٣٦ - (١ + ٤)$$

$$= ١١٧ - ٥ = ١١٢$$

د *) $\int_{0}^{1}$ ($\sqrt{س}$ + س) د س

الحل : = $\int_{0}^{1}$ ($س^{\frac{1}{2}}$ − س) د س = [$\frac{س^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$ − $\frac{س^{2}}{2}$]$_{0}^{1}$

= [$\frac{2\sqrt{س^{3}}}{3}$ − $\frac{س^{2}}{2}$]$_{0}^{1}$

= ($\frac{2\sqrt{1^{3}}}{3}$ − $\frac{1^{2}}{2}$) − ($\frac{2\sqrt{0^{3}}}{3}$ − $\frac{0^{2}}{2}$)

= ($\frac{2 \times 1^{3}}{3}$ − $\frac{1}{2}$) − ($\frac{2 \times 0^{3}}{3}$ − $\frac{0}{2}$)

= $\frac{2}{3}$ − $\frac{1}{2}$

= $\frac{4 - 3}{6}$

= $\frac{1}{6}$

هـ *) $\int_{٣}^{٢} \frac{س^{٤} + ٦ س^{٣}}{س^{٢}}$ د س

الحل : $= \int_{٣}^{٢} \left(\frac{س^{٤}}{س^{٢}} + \frac{٦ س^{٣}}{س^{٢}} \right)$ د س

$= \int_{٣}^{٢} (س^{٢} + ٦ س)$ د س

$= \left[\left(\frac{س^{٣}}{٣} + \frac{٦ س^{٢}}{٢} \right) \right]_{٣}^{٢}$

$= \left[\left(\frac{س^{٣}}{٣} + ٣ س^{٢} \right) \right]_{٣}^{٢}$

$= \left(\frac{٢^{٣}}{٣} + ٣ \times ٢^{٢} \right) - \left(\frac{٣^{٣}}{٣} + ٣ \times ٣^{٢} \right)$

$= \left(\frac{٨}{٣} + ٣ \times ٤ \right) - \left(\frac{٢٧}{٣} + ٣ \times ٩ \right)$

$= \left(\frac{٨}{٣} + ١٢ \right) - (٩ + ٢٧)$

$= \frac{٨}{٣} + ١٢ - ٣٦ = \frac{٨}{٣} - ٢٤$

ثانياً : التكامل المحدود للتكاملات بالتعويض

$$\text{و} *) \int_{١}^{٢} (\text{س} + ٣)^{٢} \, \text{د س}$$

الحل :

ص = س + ٣

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ١ \Longleftarrow \frac{\text{د ص}}{١} = \text{د س}$$

$$= \int_{١}^{٢} \text{ص}^{٢} \times \frac{\text{د ص}}{١}$$

$$= \int_{١}^{٢} \text{ص}^{٢} \, \text{د ص} = \frac{\text{ص}^{٣}}{٣} = \left[\frac{(\text{س} + ٣)^{٣}}{٣} \right]_{١}^{٢}$$

$$= \frac{(٢ + ٣)^{٣}}{٣} - \frac{(١ + ٣)^{٣}}{٣}$$

$$= \frac{٥^{٣}}{٣} - \frac{٤^{٣}}{٣} = \frac{١٢٥}{٣} - \frac{٦٤}{٣} = \frac{٦١}{٣}$$

ز *) $\int_{0}^{1}$ ٢ س (س^{٢} + ١)^{٣} د س

الحل :

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٢ \text{ س} \Longleftarrow \frac{\text{د ص}}{٢ \text{ س}} = \text{د س}$$

ص = س^{٢} + ١

$$= \int \frac{\cancel{٢}\text{س} \text{ ص}^{٣} \times \frac{\text{د ص}}{\cancel{٢}\text{س}}}{}$$

$$= \int \text{ص}^{٣} \text{ د ص} = \frac{\text{ص}^{٤}}{٤} = \frac{(\text{س}^{٢} + ١)^{٤}}{٤} \Big]_{0}^{١}$$

$$= \frac{(١^{٢} + ١)^{٤}}{٤} - \frac{(٠^{٢} + ١)^{٤}}{٤}$$

$$= \frac{٢^{٤}}{٤} - \frac{١^{٤}}{٤} = \frac{١٦}{٤} - \frac{١}{٤} = \frac{١٥}{}$$

ح *) $\int_{٢}^{٥} \frac{١}{(س + ٥)^{٢}}$ د س

الحل :

ص = س + ٥

$= \int \frac{١}{ص^{٢}} \times \frac{د ص}{١}$ ⟸ $\frac{د ص}{د س} = ١$ ⟺ $\frac{د ص}{١} =$ د س

$= \int ص^{-٢}$ د ص $= \left[\frac{ص^{-١}}{-١} \right]_{٢}^{٥} = \left[\frac{-١}{س + ٥} \right]_{٢}^{٥}$

$= \frac{-١}{٥ + ٥} - \frac{-١}{٢ + ٥} = \frac{-١}{١٠} - \frac{-١}{٧}$

$= \frac{-١}{١٠} + \frac{١}{٧} = \frac{-٧ + ١٠}{٧٠} = \frac{٣}{٧٠}$

ط *) $\int_{1}^{5} \sqrt{٣ س + ١}$ د س

الحل :

$ص = ٣ س + ١$

$\frac{د ص}{د س} = ٣ \Longleftarrow \frac{د ص}{٣} = د س$

$= \int \sqrt{ص} \times \frac{د ص}{٣}$

$= \int \frac{ص^{\frac{١}{٢}}}{٣} د ص = \frac{٢ ص^{\frac{٣}{٢}}}{٣ \times ٣} = \frac{٢ ص^{\frac{٣}{٢}}}{٩}$

$= \frac{٢ ص^{\frac{٣}{٢}}}{٩} = \frac{\sqrt[٣]{٢ (٣ س + ١)}}{٩} \Big]_{١}^{٥}$

$= \frac{\sqrt[٣]{٢ (٣ \times ٥ + ١)}}{٩} - \frac{\sqrt[٣]{٢ (٣ \times ١ + ١)}}{٩}$

٥٥

$= \frac{\sqrt[٣]{١٦ ٢}}{٩} - \frac{\sqrt[٣]{٤ ٢}}{٩} = \frac{\sqrt[٣]{٢ \times ٤ ٢}}{٩} - \frac{\sqrt[٣]{٢ \times ٢ ٢}}{٩}$

$= \frac{٢ \times ٦٤}{٩} - \frac{٢ \times ٨}{٩} = \frac{١٢٨}{٩} - \frac{١٦}{٩} = \frac{١١٢}{٩}$

فكرة سريعة

٤) إذا كان $\int$ ل (س) د س = $س^{٢}$ + جـ

جد $\int_{٢}^{٣}$ ل (س) د س

الحل : $\int_{٢}^{٣}$ ل (س) = $[$ ($س^{٢}$ + جـ) $]_{٢}^{٣}$

= $٣^{٢}$ + جـ − ($٢^{٢}$ + جـ) = ٩ + جـ − ٤ − جـ = ٥

---

٥) إذا كان $\int$ ل (س) د س = $س^{\frac{٢}{٣}}$ + جـ

جد $\int_{-٨}^{١}$ ل (س) د س

الحل : $\int_{-٨}^{١}$ ل (س) = $[$ ($س^{\frac{٢}{٣}}$ + جـ) $]_{-٨}^{١}$

= $[$ ($\sqrt[٣]{س^{٢}}$ − + جـ) $]_{-٨}^{١}$

= $\sqrt[٣]{١^{٢}}$ + جـ − ($\sqrt[٣]{-٨^{٢}}$ + جـ)

= $١^{٢}$ + جـ − (− $٢^{٢}$ + جـ) = ١ + جـ − ٤ − جـ = − ٣

المُشتقة تُلغي التكامل

مُشتقة

$$\frac{د}{د\ س} \int ق(س)\ د\ س = ق(س)$$

المُشتقة عندما تدخل على التكامل غير المحدود تُلغيه
و تكون الإجابة ما داخل التكامل
و الإجابة ليس فيها (جـ) ، لأننا لم نُكامل

أوّلاً : التكامل غير المحدود

٦) إذا كان $ق(س) = \int (س^{٢} + س)\ د\ س$ ، أوجد $ق'(س)$

الحل : $ق'(س) = س^{٢} + س$

---

٧) إذا كان $ق(س) = \int (جا\ س - جتا\ ٣\ س)\ د\ س$

أوجد $ق'(س)$

الحل : $ق'(س) = جا\ س - جتا\ ٣\ س$

---

٨) إذا كان $ص = \int (٥\ س^{٣} - ٣\ س^{٤})\ د\ س$

أوجد $\frac{د\ ص}{د\ س}$

الحل : $\frac{د\ ص}{د\ س} = ٥\ س^{٣} - ٣\ س^{٤}$

٩) إذا كان ص = $\int$ ٩ س^{٦} د س ، أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

الحل :

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٩ س^{٦}

---

١٠) إذا كان ص = $\int$ ق (س) د س ، جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

الحل : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ق (س)

---

١١) إذا كان ص = $\int$ قً (س) د س ، جد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

الحل : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = قً (س)

---

١٢) إذا كان ق (س) = $\int \frac{\text{س}^{٢} + ٧ \text{ س}}{\sqrt{\text{س}^{٣}}}$ د س ، جد قً (س)

الحل : قً (س) = $\frac{\text{س}^{٢} + ٧ \text{ س}}{\sqrt{\text{س}^{٣}}}$

---

١٣) إذا كان ق (س) = $\int$ (س^{٣} + ٩ س) د س ، جد قً (٢)

الحل : قً (س) = س^{٣} + ٩ س

قً (٢) = ٢^{٣} + ٩ × ٢ = ٨ + ١٨ = ٢٦

١٤) إذا كان ص = $\int$ (٢ س^{٣} — ٣ س) د س

أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ عندما س = ٣

الحل : $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٢ س^{٣} — ٣ س

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ | $_{\text{س = ٣}}$ = ٢ × ٣^{٣} — ٣ × ٣

= ٢ × ٢٧ — ٩ = ٥٤ — ٩ = ٤٥

---

١٥) إذا كان ق (س) = $\int$ (س — ٦)^{٢} د س ، جد قً (٥)

الحل : قً (س) = (س — ٦)^{٢}

قً (٥) = (٥ — ٦)^{٢} = (— ١)^{٢} = ١

---

١٦) إذا كان $\int$ ق (س) د س = س^{٣} + س + جـ ، جد قً (س)

الحل : نشتق الطرفين

ق (س) = ٣ س^{٢} + ١ نشتق الطرفين مرّة ثانية

قً (س) = ٦ س

١٧) إذا كان ∫ ق (س) د س = ٢ س^{٤} + جـ ، جد قً (س)

الحل : نشتق الطرفين

ق (س) = ٨ س^{٣} نشتق الطرفين مرّة ثانية

قً (س) = ٢٤ س^{٢}

---

١٨) إذا كان ∫ ق (س) د س = ٣ س^{٣} + س^{٢} + جـ ، جد قً (٥)

الحل : نشتق الطرفين

ق (س) = ٩ س^{٢} + ٢ س نشتق الطرفين مرّة ثانية

قً (س) = ١٨ س + ٢

قً (٥) = ١٨ × ٥ + ٢ = ٩٠ + ٢ = ٩٢

---

١٩) إذا كان ∫ قً (س) د س = ٤ س^{٣} ـــ ٤ س^{٢} + ٢ ، جد قً (١)

الحل : نشتق الطرفين

قً (س) = ١٢ س^{٢} ـــ ٨ س

قً (١) = ١٢ × ١^{٢} ـــ ٨ × ١ = ١٢ ـــ ٨ = ٤

ثانياً : التكامل المحدود

مُشتقة التكامل المحدود = صفر

$$\frac{د}{د\,س}\int_{أ}^{ب} ق(س)\,د\,س = 0$$

٢٠) إذا كان $ق(س) = \int_{٤}^{٦} (س^{٥} + ٢س)\,د\,س$ ، جد $قً(س)$

الحل : $قً(س) = 0$

---

٢١) إذا كان $ص = \int_{١}^{٥} (٢س^{٧} - \frac{٣}{٨س})\,د\,س$ ، جد $\frac{د\,ص}{د\,س}$

الحل : $\frac{د\,ص}{د\,س} = 0$

٢٢) إذا كان $ق(س) = \int_{٠}^{٣} (٢س)^{٥}\,د\,س + \int_{٧}^{-٢} جا\,س\,د\,س$

جد $قً(س)$

الحل : $قً(س) = 0$

ثالثاً : جُزء غير محدود و جُزء محدود

٢٣) إذا كان ق (س) = $\int_{٤}^{٩} (٦ س^{٤} + س) د س + \int \frac{١}{٢ س} د س$

أوجد قَ (س)

الحل : قَ (س) = ٦ $س^{٤}$ + س

---

٢٤) إذا كان ق (س) = $\int_{٣}^{٦} ٣ س د س + \int \frac{٣}{٥ س} د س$

أوجد قَ (س)

الحل : قَ (س) = $\frac{٣}{٥ س}$

التكامل يُلغي المُشتقة

$$\int قَ (س) د س = ق (س) + جـ$$

تُستخدم هذه القاعدة لإيجاد الاقتران الأصلي عندما يُعطيني المُشتقة

أوّلاً : عندما يُعطيني مشتقة الاقتران قً (س)

٢٥) إذا كان قً (س) = ٣ س^{٢} ـ ١٠ س ، فجد قاعدة الاقتران (ق)

علماً بأنّ النقطة (٢ ، ٣) تقع على مُنحنى الاقتران (ق)

الحل : ق (س) = $\int$ (٣ س^{٢} ـ ١٠ س) د س

ق (س) = س^{٣} ـ ٥ س^{٢} + جـ

(٢ ، ٣) ⟸ ق (٢) = ٣

ق (٢) = $٢^{٣}$ ـ ٥ × $٢^{٢}$ + جـ = ٣

٨ ـ ٢٠ + جـ = ٣

ـ ١٢ + جـ = ٣

+ ١٢ + ١٢

جـ = ١٥

ق (س) = س^{٣} ـ ٥ س^{٢} + ١٥

٢٦) إذا كان قَ (س) = ٢ س + ٦ ، فجد قاعدة الاقتران (ق)

علماً ق (١) = ٨

الحل : ق (س) = $\int$ (٢ س + ٦) د س

ق (س) = $س^{٢}$ + ٦ س + جـ

ق (١) = ٨

ق (١) = $١^{٢}$ + ٦ × ١ + جـ = ٨

١ + ٦ + جـ = ٨

٧ + جـ = ٨

ـ ٧ ـ ٧

جـ = ١

ق (س) = $س^{٢}$ + ٦ س + ١

٢٧) إذا كان (ق) اقتراناً قابلاً للاشتقاق ، و كانت قَ (س) = ٣ س^{٢} ـ ٤ س + ١

فجد ق (ـ ١) ، علماً أنّ ق (٣) = ٢

الحل : ق (س) = $\int$ (٣ س^{٢} ـ ٤ س + ١) د س

ق (س) = س^{٣} ـ ٢ س^{٢} + س + جـ

ق (٣) = ٢

ق (٣) = ٣^{٣} ـ ٢ × ٣^{٢} + ٣ + جـ = ٢

٢٧ ـ ٢ × ٩ + ٣ + جـ = ٢

٢٧ ـ ١٨ + ٣ + جـ = ٢

١٢ + جـ = ٢

جـ = ـ ١٠

ق (س) = س^{٣} ـ ٢ س^{٢} + س ـ ١٠

ق (ـ ١) = ـ ١^{٣} ـ ٢ × (ـ ١)^{٢} + (ـ ١) ـ ١٠

= ـ ١ ـ ٢ × ١ ـ ١ ـ ١٠

= ـ ١ ـ ٢ ـ ١ ـ ١٠

= ـ ١٤

ثانياً : عندما يُعطيني ميل المماس

ميل المماس = قَ (س)

٢٨) إذا كان ميل المماس لمُنحنى الاقتران ق (س) عند النُقطة (س ، ص) يساوي (٤ $س^{٣}$ + ٦ $س^{٢}$ − ٣) ، فجد قاعدة الاقتران (ق)

علماً بأنّ مُنحنى الاقتران (ق) يمُر بالنقطة (− ٢ ، ٠)

الحل : ميل المماس = قَ (س) = ٤ $س^{٣}$ + ٦ $س^{٢}$ − ٣

ق (س) = $\int$ (٤ $س^{٣}$ + ٦ $س^{٢}$ − ٣) د س

ق (س) = $س^{٤}$ + ٢ $س^{٣}$ − ٣ س + جـ

(− ٢ ، ٠) ⟸ ق (− ٢) = ٠

ق (− ٢) = $-٢^{٤}$ + ٢ × $(-٢)^{٣}$ − ٣ × − ٢ + جـ = ٠

١٦ + ٢ × − ٨ + ٦ + جـ = ٠

١٦ + − ١٦ + ٦ + جـ = ٠

٦ + جـ = ٠

جـ = − ٦

ق (س) = $س^{٤}$ + ٢ $س^{٣}$ − ٣ س − ٦

٢٩) إذا كان ميل المماس لمُنحنى الاقتران (ق) عند أي نُقطة (س ، ص) يساوي (٣ س − ١) (س + ٥) ، فجد قاعدة الاقتران (ق) علماً بأنّ ق (٢) = − ٣

الحل : ميل المماس = قَ (س) = (٣ س − ١) (س + ٥)

$$ق (س) = \int (٣ س − ١) (س + ٥) \, د س$$

$$ق (س) = \int (٣ س^{٢} + ١٥ س − س − ٥) \, د س$$

$$ق (س) = \int (٣ س^{٢} + ١٤ س − ٥) \, د س$$

$$ق (س) = س^{٣} + ٧ س^{٢} − ٥ س + جـ$$

ق (٢) = − ٣

ق (٢) = $٢^{٣}$ + ٧ × $٢^{٢}$ − ٥ × ٢ + جـ = − ٣

٨ + ٧ × ٤ − ١٠ + جـ = − ٣

٨ + ٢٨ − ١٠ + جـ = − ٣

٢٦ + جـ = − ٣

جـ = − ٢٩

ق (س) = $س^{٣}$ + ٧ $س^{٢}$ − ٥ س − ٢٩

٣٠) إذا كان ميل المماس لمُنحنى الاقتران ق (س) عند النُقطة (س ، ص) يساوي (٤ س^{٣} ـ ٦ س) ، فجد قاعدة الاقتران (ق)

علماً بأنّ مُنحنى الاقتران (ق) يمُر بالنقطة (٢ ، ٥)

الحل : ميل المماس = قَ (س) = ٤ س^{٣} ـ ٦ س

ق (س) = $\int$ (٤ س^{٣} ـ ٦ س) د س

ق (س) = س^{٤} ـ ٣ س^{٢} + جـ

(٢ ، ٥) ⟸ ق (٢) = ٥

ق (٢) = ٢^{٤} ـ ٣ × ٢^{٢} + جـ = ٣

١٦ ـ ٣ × ٤ + جـ = ٣

١٦ ـ ١٢ + جـ = ٣

٤ + جـ = ٣

جـ = ـ ١

ق (س) = س^{٤} ـ ٣ س^{٢} ـ ١

٣١) إذا كان ميل المماس لمُنحنى الاقتران ق (س) عند النُقطة (س ، ص)

يساوي $\frac{٣ س - س^{٣}}{س^{٣}}$ ، فجد قاعدة الاقتران ق (س)

علماً بأنّ مُنحنى الاقتران (ق) يمُر بالنقطة (− ١ ، ٦)

الحل : ميل المماس = قَ (س) = $\frac{٣ س - س^{٣}}{س^{٣}}$

$$ق (س) = \int \frac{٣ س - س^{٣}}{س^{٣}} \, د س = \int \left(\frac{٣ س}{س^{٣}} - \frac{س^{٣}}{س^{٣}} \right) د س$$

$$= \int (٣ س^{-٢} - ١) \, د س = \frac{٣ س^{-١}}{-١} - س + جـ$$

$$ق (س) = \frac{-٣}{س} - س + جـ$$

(− ١ ، ٦) ⟸ ق (− ١) = ٦

$$ق (-١) = \frac{-٣}{-١} - (-١) + جـ = ٦$$

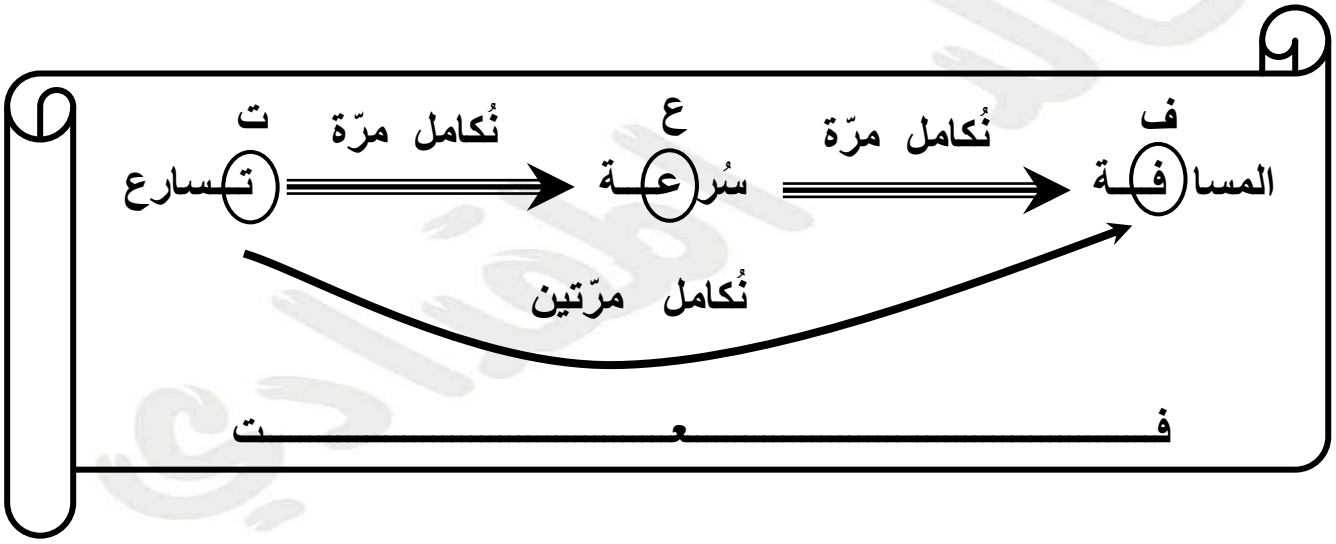
$$٣ + ١ + جـ = ٦$$

$$٤ + جـ = ٦$$

$$جـ = ٢$$

$$ق (س) = \frac{-٣}{س} - س + ٢$$

رابعاً : عندما يُعطيني السرعة أو التسارع



الفكرة الأولى : إيجاد المسافة عندما يُعطيني السرعة

لإيجاد المسافة نُكامل السرعة مرّة واحدة

$$ف(ن) = \int ع(ن)\, د ن$$

٣٢) يتحرّك جُسيم في خط مستقيم بحيث تكون سرعته (ع) مُعطاة بالعلاقة

ع (ن) = (٨ ن^{٣} + ٦) م / ث ، جد المسافة التي يقطعها الجُسيم بعد مرور

(٣ ثوان) من بدء الحركة ، علماً بأنّ الموقع الابتدائي للجسيم ف (٠) = ٤ م

الحل :

ف (ن) = $\int$ (٨ ن^{٣} + ٦) د ن

ف (ن) = ٢ ن^{٤} + ٦ ن + جـ

ف (ن) = ٢ ن^{٤} + ٦ ن + ٤

ف (٣) = ٢ × ٣^{٤} + ٦ × ٣ + ٤ = ٢ × ٨١ + ١٨ + ٤

= ١٦٢ + ١٨ + ٤ = ١٨٤ م

ف (٠) = ٤

ف (٠) = ٠ + ٠ + جـ = ٤

جـ = ٤

---

٣٣) يتحرّك جُسيم على خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد (ن) ثانية تُساوي

ع (ن) = (٤ ن + ٨) م / ث ، جد المسافة التي يقطعها الجُسيم بعد مرور

(ن) ثانية ، علماً بأنّ الموقع الابتدائي ف (٠) = ٣ م

الحل :

ف (ن) = $\int$ (٤ ن + ٨) د ن

ف (ن) = ٢ ن^{٢} + ٨ ن + جـ

ف (ن) = ٢ ن^{٢} + ٨ ن + ٣

ف (٠) = ٣

ف (٠) = ٠ + ٠ + جـ = ٣

جـ = ٣

٣٤) يتحرّك جُسيم في خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد (ن) ثانية تُعطى بالعلاقة ع (ن) = ٣ (ن + ١)^{٢} م / ث ، جد المسافة التي يقطعها الجُسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة ، علماً بأنّ موقعه الابتدائي ف (٠) = ١ م

الحل :

$$ف (ن) = \int ٣ (ن + ١)^{٢} \, د ن$$

الحل :

ص = ن + ١

$$= \int ٣ ص^{٢} \times \frac{د ص}{١}$$

$$\frac{د ص}{د ن} = ١ \Longleftrightarrow \frac{د ص}{١} = د ن$$

$$= \int ٣ ص^{٢} \, د ص = ص^{٣} = (ن + ١)^{٣} + جـ$$

ف (٠) = ١

ف (٠) = (٠ + ١)^{٣} + جـ = ١

١ + جـ = ١

جـ = ٠

$$ف (ن) = (ن + ١)^{٣}$$

ف (٢) = (٢ + ١)^{٣} = ٣^{٣} = ٢٧ م

٣٥) يتحرّك جُسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد (ن) ثانية تُعطى بالعلاقة ع (ن) = ٣ ن^{٢} − ٢ ن م / ث ، جد المسافة التي يقطعها الجُسيم بعد مرور (٣ ثوان) من بدء الحركة ، علماً بأنّ الموقع الابتدائي للجسيم ف (٠) = ٥ م

الحل :

ف (ن) = ∫ (٣ ن^{٢} − ٢ ن) د ن

ف (ن) = ن^{٣} − ن^{٢} + جـ

ف (٠) = ٥

ف (٠) = ٠ − ٠ + جـ = ٥

جـ = ٥

ف (ن) = ن^{٣} − ن^{٢} + ٥

ف (٣) = ٣^{٣} − ٣^{٢} + ٥ = ٢٧ − ٩ + ٥ = ٢٣ م

---

٣٦) يتحرّك جُسيم على خط مستقيم بحيث أن سرعته بعد (ن) ثانية تُعطى بالعلاقة ع (ن) = ٥ ن^{٤} − ٦ ن م / ث ، جد المسافة التي يقطعها الجُسيم بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة ، علماً بأنّ الموقع الابتدائي للجسيم ف (٠) = ٣ م

الحل :

ف (ن) = ∫ (٥ ن^{٤} − ٦ ن) د ن

ف (ن) = ن^{٥} − ٣ ن^{٢} + جـ

ف (٠) = ٣

ف (٠) = ٠ − ٠ + جـ = ٣

جـ = ٣

ف (ن) = ن^{٥} − ٣ ن^{٢} + ٣

ف (١) = ١^{٥} − ٣ × ١^{٢} + ٣ = ١ − ٣ + ٣ = ١ م

٣٧) يتحرّك جُسيم في خط مستقيم بحيث إن سرعته بعد (ن) ثانية تُعطى بالعلاقة ع (ن) = ٦ (ن + ١)^{٢} م / ث ، جد المسافة التي يقطعها الجُسيم بعد ثانيتين من بدء الحركة ، علماً بأنّ موقعه الابتدائي ف (٠) = ٨ م

الحل :

$$ف (ن) = \int ٦ (ن + ١)^{٢} \, د ن$$

الحل :

$$= \int ٦ ص^{٢} \times \frac{د ص}{١}$$

$$ص = ن + ١$$

$$\frac{د ص}{د ن} = ١ \Longleftrightarrow \frac{د ص}{١} = \frac{د ص}{د ن}$$

$$= \int ٦ ص^{٢} \, د ص = ٢ ص^{٣} = ٢ (ن + ١)^{٣} + جـ$$

$$ف (٠) = ٨$$

$$ف (٠) = ٢ (٠ + ١)^{٣} + جـ = ٨$$

$$٢ + جـ = ٨$$

$$جـ = ٦$$

$$ف (ن) = ٢ (ن + ١)^{٣} + ٦$$

$$ف (٢) = ٢ (٢ + ١)^{٣} + ٦ = ٢ \times ٣^{٣} + ٦$$

$$= ٢ \times ٢٧ + ٦ = ٥٤ + ٦ = ٦٠ م$$

الفكرة الثانية : إيجاد السرعة عندما يُعطيني التسارع

لإيجاد السرعة نُكامل التسارع مرّة واحدة

$$ع(ن) = \int ت(ن)\, د ن$$

٣٨) تتحرّك نُقطة ماديّة على خط مستقيم بتسارع ثابت (ت) مقداره

ت (ن) = ١٢ م / ث^{٢} ، جد سرعتها بعد زمن قدره (ن) ثانية ، علماً بأنّ سرعتها الابتدائية ع (٠) = ٧ م / ث ، ثمّ جد سرعتها بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة

الحل :

$$ع(ن) = \int ١٢\, د ن$$

$$ع(ن) = ١٢ ن + جـ$$

$$ع(ن) = ١٢ ن + ٧$$

$$ع(٢) = ١٢ \times ٢ + ٧ = ٢٤ + ٧ = ٣١ \text{ م}$$

ع (٠) = ٧

ع (٠) = ٠ + جـ = ٧

جـ = ٧

٣٩) يتحرّك جُسيم في خط مستقيم بحيث إن تسارعه بعد (ن) ثانية يُعطى بالعلاقة

ت (ن) = ٤ ن م / ث^{٢} ، جد سرعتها بعد مرور (٤) ثواني

علماً بأنّ سرعتها الابتدائية ع (٠) = ٣ م / ث

الحل :

ع (ن) = $\int$ ٤ ن د ن

ع (ن) = ٢ ن^{٢} + جـ

ع (ن) = ٢ ن^{٢} + ٣

ع (٤) = ٢ × ٤^{٢} + ٣

= ٢ × ١٦ + ٣

= ٣٢ + ٣ = ٣٥ م

ع (٠) = ٣

ع (٠) = ٠ + جـ = ٣

جـ = ٣

الفكرة الثالثة : إيجاد المسافة عندما يُعطيني التسارع

٤٠) يتحرّك جُسيم في خط مستقيم بتسارع ثابت (ت) مقداره

ت (ن) = ٨ م / ث^{٢} ، جد المسافة التي يقطعها الجُسيم بعد مرور (ن) ثانية من بدء الحركة ، علماً بأنّ السرعة الابتدائية للجُسيم ع (٠) = ٢ م / ث و موضعه الابتدائي للجُسيم ف (٠) = ١٠ م

الحل :

ع (ن) = $\int$ ٨ د ن

ع (ن) = ٨ ن + جـ$_{١}$

ع (ن) = ٨ ن + ٢

ع (٠) = ٢

ع (٠) = ٠ + جـ$_{١}$ = ٢

جـ$_{١}$ = ٢

ف (ن) = $\int$ (٨ ن + ٢) د ن

ف (ن) = ٤ ن^{٢} + ٢ ن + جـ$_{٢}$

ف (٠) = ١٠

ف (٠) = ٠ + ٠ + جـ$_{٢}$ = ١٠

جـ$_{٢}$ = ١٠

ف (ن) = ٤ ن^{٢} + ٢ ن + ١٠

٤١) يتحرّك جُسيم في خط مستقيم بتسارع ثابت (ت) يُعطى بالقاعدة

ت (ن) = ٦ سم / ث^{٢} ، ن ≥ ٠ ، جد المسافة التي يقطعها الجُسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة ، علماً بأنّ السرعة الابتدائية للجُسيم ع (٠) = ٤ سم / ث و موقعه الابتدائي ف (٠) = ٦ سم

الحل :

ع (ن) = $\int$ ٦ د ن

ع (ن) = ٦ ن + جـ$_{١}$

ع (ن) = ٦ ن + ٤

ع (٠) = ٤

ع (٠) = ٠ + جـ$_{١}$ = ٤

جـ$_{١}$ = ٤

ف (ن) = $\int$ (٦ ن + ٤) د ن

ف (ن) = ٣ ن^{٢} + ٤ ن + جـ$_{٢}$

ف (٠) = ٦

ف (٠) = ٠ + ٠ + جـ$_{٢}$ = ٦

جـ$_{٢}$ = ٦

ف (ن) = ٣ ن^{٢} + ٤ ن + ٦

ف (٢) = ٣ × ٢^{٢} + ٤ × ٢ + ٦

= ٣ × ٤ + ٨ + ٦

= ١٢ + ٨ + ٦ = ٢٦ سم

٤٢) إذا كان تسارع جُسيم بعد مرور (ن) ثانية يُعطى بالعلاقة ت (ن) = ٦ ن م / ث^{٢}

جد المسافة التي يقطعها الجُسيم بعد مرور (ن) ثانية من بدء الحركة

علماً بأنّ السرعة الابتدائية للجُسيم ع (٠) = ٢ م / ث

و موقعه الابتدائي للجُسيم ف (٠) = ١٢ م

الحل :

ع (ن) = $\int$ ٦ ن د ن

ع (ن) = ٣ ن^{٢} + جـ$_{١}$

ع (ن) = ٣ ن^{٢} + ٢

ع (٠) = ٢

ع (٠) = ٠ + جـ$_{١}$ = ٢

جـ$_{١}$ = ٢

ف (ن) = $\int$ (٣ ن^{٢} + ٢) د ن

ف (ن) = ن^{٣} + ٢ ن + جـ$_{٢}$

ف (ن) = ن^{٣} + ٢ ن + ١٢

ف (٠) = ١٢

ف (٠) = ٠ + ٠ + جـ$_{٢}$ = ١٢

جـ$_{٢}$ = ١٢

٤٣) إذا كان ق (٤) = ٨ ، ق(٦) = ١١ ، جد $\int_{٤}^{٦}$ قً (س) د س

الحل :

$\int_{٤}^{٦}$ قً (س) د س

= ق (س) $]_{٤}^{٦}$ = ق (٦) ـ ق (٤) = ١١ ـ ٨ = ٣

---

٤٤) إذا كان ق (ـ ٣) = ٩ ، ق(٥) = ـ ٧ ، جد $\int_{٥}^{-٣}$ قً (س) د س

الحل :

$\int_{٥}^{-٣}$ قً (س) د س

= ق (س) $]_{٥}^{-٣}$ = ق (ـ ٣) ـ ق (٥) = ٩ ـ ـ ٧ = ١٦

---

٤٥) إذا علمت أنّ قً (س) مُتصل ، و كان ق (١) = ـ ٣

ق(٢) = ١ ، جد $\int_{١}^{٢}$ قً (س) د س

الحل :

$\int_{١}^{٢}$ قً (س) د س

= ق (س) $]_{١}^{٢}$ = ق (٢) ـ ق (١) = ١ ـ ـ ٣ = ٤

٤٦) إذا كان ق (٥) = ٧ ، ق (٧) = ٨ ، جد قيمة $\int_{٢}^{٤}$ قَ (س + ٣) د س

الحل :

$\int_{٢}^{٤}$ قَ (س + ٣) د س

ص = س + ٣

$\frac{د ص}{د س}$ = ١ ⟸ د ص = د س

= $\int$ قَ (ص) د ص

= ق (ص) = ق (س + ٣) $\Big]_{٢}^{٤}$ = ق (٤ + ٣) − ق (٢ + ٣)

= ق (٧) − ق (٥) = ٨ − ٧ = ١

---

٤٧) إذا كان ق (٨) = ١٤ ، ق (− ١) = − ٥

جد قيمة $\int_{-١}^{٢}$ ٣ س^{٢} قَ (س^{٣}) د س

الحل :

$\int_{-١}^{٢}$ ٣ س^{٢} قَ (س^{٣}) د س

ص = س^{٣}

$\frac{د ص}{د س}$ = ٣ س^{٢} ⟸ $\frac{د ص}{٣ س^{٢}}$ = د س

= $\int$ ٣ س^{٢} قَ (ص) × $\frac{د ص}{٣ س^{٢}}$

= ق (ص) = ق (س^{٣}) $\Big]_{-١}^{٢}$ = ق (٢^{٣}) − ق (− ١^{٣})

= ق (٨) − ق (− ١) = ١٤ − − ٥ = ١٩

٤٨) إذا كان ق (٩) = ٥ ، ق (١) = ٣

جد قيمة $\int_{-١}^{٣}$ ٤ س قَ (س^{٢}) د س

الحل :

$\int_{-١}^{٣}$ ٤ س قَ (س^{٢}) د س

ص = س^{٢}

$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = ٢ س ⟸ $\frac{\text{د ص}}{\text{٢ س}}$ = د س

$= \int$ ٤ س قَ (ص) × $\frac{\text{د ص}}{\text{٢ س}}$

$= ٢$ ق (ص) $= ٢$ ق (س^{٢}) $\Big]_{-١}^{٣}$ $= ٢$ ق (٣^{٢}) − ٢ ق (− ١^{٢})

$= ٢$ ق (٩) − ٢ ق (١) $= ٢ \times ٥ - ٢ \times ٣ = ٤$

---

٤٩) إذا كانت قَ (س) = ٣ س^{٢} هي مُشتقة الاقتران ق (س)

المُعرّف على الفترة [٢ ، ٤] ، أوجد قيمة ق (٤) − ق (٢)

الحل :

$\int_{٢}^{٤}$ قَ (س) د س = $\int_{٢}^{٤}$ ٣ س^{٢} د س

$= \Big[\frac{٣ س^{٣}}{٣} \Big]_{٢}^{٤} = \Big[س^{٣} \Big]_{٢}^{٤}$

$= ٤^{٣} - ٢^{٣} = ٦٤ - ٨ = ٥٦$

$\int_{أ}^{ب}$ قَ (س) د س = ق (س) $\Big]_{أ}^{ب}$

= ق (ب) − ق (أ)

الدرس الثالث : خواص التكامل المحدود

الخاصيّة الأولى

$$\int_{أ}^{أ} ق(س)\, د س = ٠$$

٥٠) أوجد قيمة $\int_{٧}^{٧} (٣ س^{٢} - ٧ س)\, د س$

الحل : $\int_{٧}^{٧} (٣ س^{٢} - ٧ س) = ٠$

---

٥١) أوجد قيمة $\int_{٥}^{٥} جتا س\, د س$

الحل : $\int_{٥}^{٥} جتا س = ٠$

الخاصيّة الثانية : قلب الحدود

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\, د س = - \int_{ب}^{أ} ق(س)\, د س$$

٥٢) إذا كان $\int_{١}^{٣}$ ق (س) د س = ٨ ، جد $\int_{٣}^{١}$ ق (س) د س

الحل : $\int_{٣}^{١}$ ق (س) د س = − ٨

---

٥٣) إذا كان $\int_{٢}^{٥}$ ق (س) د س = − ٦ ، جد $\int_{٥}^{٢}$ ٢ ق (س) د س

الحل : $\int_{٥}^{٢}$ ق (س) د س = ٦

$\int_{٥}^{٢}$ ٢ ق (س) د س = ٢ × ٦ = ١٢

---

٥٤) إذا كان $\int_{٠}^{-٢}$ ق (س) د س = ١٢ ، جد $\int_{-٢}^{٠} \frac{\text{ق (س)}}{٣}$ د س

الحل : $\int_{-٢}^{٠}$ ق (س) د س = − ١٢

$\int_{-٢}^{٠} \frac{\text{ق (س)}}{٣}$ د س = $\frac{-١٢}{٣}$ = − ٤

٥٥) إذا كان $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,د س = ٣$ ، جد $\int_{ب}^{أ} ٥\,ق(س)\,د س$

الحل : $\int_{ب}^{أ} ق(س)\,د س = -٣$

$\int_{ب}^{أ} ٥\,ق(س)\,د س = ٥ \times -٣ = -١٥$

---

٥٦) إذا كان $\int_{٥}^{٩} ٤\,ق(س)\,د س = ٢٠$ ، جد $\int_{٩}^{٥} ق(س)\,د س$

الحل : $\int_{٥}^{٩} \frac{٤\,ق(س)}{٤}\,د س = \frac{٢٠}{٤} = ٥$

$\int_{٩}^{٥} ق(س)\,د س = -٥$

---

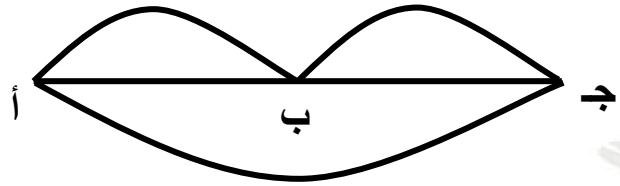
٥٧) إذا كان $\int_{٦}^{٤} ٥\,ق(س)\,د س = -١٥$ ، جد $\int_{٤}^{٦} ٢\,ق(س)\,د س$

الحل : $\int_{٦}^{٤} \frac{٥\,ق(س)}{٥}\,د س = \frac{-١٥}{٥} = -٣$

$\int_{٤}^{٦} ٢\,ق(س)\,د س = ٢ \times ٣ = ٦$

الخاصيّة الثالثة : خاصيّة الإضافة

الجزء الثاني	الجزء الأول



الـــكل

$$\int_{أ}^{جـ} ق(س)\,د س = \int_{أ}^{ب} ق(س)\,د س + \int_{ب}^{جـ} ق(س)\,د س$$

الحالة الأولى : أن يكون التكامل المجهول التكامل الأكبر

٥٨) إذا علمت أنّ $\int_{٠}^{٣} ق(س)\,د س = ٤$ ، $\int_{٥}^{٣} ق(س)\,د س = -٧$ ، أوجد قيمة $\int_{٠}^{٥} ق(س)\,د س$

الحل :

$$\int_{٣}^{٥} ق(س)\,د س = ٧$$

$$\int_{٠}^{٥} ق(س)\,د س = \int_{٠}^{٣} ق(س)\,د س + \int_{٣}^{٥} ق(س)\,د س$$

$$\int_{٠}^{٥} ق(س)\,د س = ٤ + ٧ = ١١$$

الجزء الثاني	الجزء الأول

الـــكل

٥٩) إذا علمت أنّ $\int_{٤}^{٢}$ ق (س) د س = ٥ ، $\int_{٤}^{٧}$ ٣ ق (س) د س = ٦

أوجد قيمة $\int_{٢}^{٧}$ ق (س) د س

الحل :

$$\int_{٢}^{٤} \text{ق (س) د س} = -٥$$

$$\int_{٤}^{٧} \frac{٣ \text{ ق (س)}}{٣} \text{ د س} = \frac{٦}{٣} = ٢$$

$$\int_{٢}^{٧} \text{ق (س) د س} = \int_{٢}^{٤} \text{ق (س) د س} + \int_{٤}^{٧} \text{ق (س) د س}$$

$$\int_{٢}^{٧} \text{ق (س) د س} = -٥ + ٢ = -٣$$

٦٠) إذا علمت أنّ $\int_{-٣}^{٠} ٢ ق(س)\, د س = ٨$ ، $\int_{٣}^{٠} \frac{ق(س)}{٣}\, د س = ٦$

أوجد قيمة $\int_{٣}^{-٣} ق(س)\, د س$

الحل :

$$\int_{-٣}^{٠} \frac{٢ ق(س)}{٢}\, د س = \frac{٨}{٢} = ٤$$

$$\int_{٣}^{٠} ٣ \times \frac{ق(س)}{٣}\, د س = ٣ \times ٦$$

$$\int_{٣}^{٠} ق(س)\, د س = ١٨ \Longleftarrow \int_{٣}^{٠} ق(س)\, د س = -١٨$$

$$\int_{٣}^{-٣} ق(س)\, د س = \int_{٠}^{-٣} ق(س)\, د س + \int_{٣}^{٠} ق(س)\, د س$$

$$\int_{٣}^{-٣} ق(س)\, د س = ٤ + -١٨ = -١٤$$

$$\int_{٣}^{-٣} ق(س)\, د س = ١٤$$

٦١) إذا علمت أنّ $\int_{٢}^{٥}$ ق (س) د س = ٧ ، $\int_{٨}^{٥}$ ٦ ق (س) د س = ١٨

أوجد قيمة $\int_{٨}^{٢}$ ٥ ق (س) د س

الحل :

$$\int_{٨}^{٥} \frac{٦ \text{ ق } (س)}{٦} \text{ د س } = \frac{١٨}{٦} = ٣$$

$$\int_{٥}^{٨} \text{ق (س) د س } = - ٣$$

$$\int_{٢}^{٨} \text{ق (س) د س } = \int_{٢}^{٥} \text{ق (س) د س } + \int_{٥}^{٨} \text{ق (س) د س}$$

$$\int_{٢}^{٨} \text{ق (س) د س } = ٧ + - ٣ = ٤$$

$$\int_{٨}^{٢} \text{ق (س) د س } = - ٤$$

$$\int_{٨}^{٢} ٥ \text{ ق (س) د س } = ٥ \times - ٤ = - ٢٠$$

الحالة الثانية : أن يكون التكامل المجهول أحد التكاملين الصغيرين

٦٢) إذا علمت أنّ $\int_{٧}^{١} ٣ \, ق (س) \, د س = ٦$ ، $\int_{١}^{٩} ٢ \, ق (س) \, د س = ٦$

أوجد قيمة $\int_{٧}^{٩} ق (س) \, د س$

الحل :

$$\int_{٧}^{١} \frac{٣ \, ق (س)}{٣} \, د س = \frac{٦}{٣} = ٢$$

$$\int_{١}^{٧} ق (س) \, د س = - ٢$$

$$\int_{١}^{٩} \frac{٢ \, ق (س)}{٢} \, د س = \frac{٦}{٢} = ٣$$

$$\int_{١}^{٩} ق (س) \, د س = \int_{١}^{٧} ق (س) \, د س + \int_{٧}^{٩} ق (س) \, د س$$

$$٣ = - ٢ + \int_{٧}^{٩} ق (س) \, د س \Longleftarrow \int_{٧}^{٩} ق (س) \, د س = ٥$$

٦٣) إذا علمت أنّ $\int_{٧}^{٣} ق(س)\,د س = -٤$ ، $\int_{٢}^{٧} ٣ ق(س)\,د س = ٩$

أوجد قيمة $\int_{٣}^{٢} ق(س)\,د س$

الحل :

$$\int_{٣}^{٧} ق(س)\,د س = ٤$$

$$\int_{٢}^{٧} \frac{٣ ق(س)}{٣}\,د س = \frac{٩}{٣} = ٣$$

$$\int_{٢}^{٧} ق(س)\,د س = \int_{٢}^{٣} ق(س)\,د س + \int_{٣}^{٧} ق(س)\,د س$$

$$٣ = \int_{٢}^{٣} ق(س)\,د س + ٤$$

$$-٤ \qquad -٤$$

$$\int_{٢}^{٣} ق(س)\,د س = -١$$

$$\int_{٣}^{٢} ق(س)\,د س = ١$$

الحالة الثالثة : تكامل اقتران مُتشعب

٦٤) إذا كان

$$ق (س) = \begin{cases} ٤ س - ٢ ، & -١ \leq س \leq ٢ \\ ٣ س^{٢} - ٦ ، & ٢ < س \leq ٣ \end{cases}$$

فجد $\int_{-١}^{٣} ق (س) \, د س$

الحل :

$$\int_{-١}^{٣} ق (س) \, د س = \int_{-١}^{٢} ق (س) \, د س + \int_{٢}^{٣} ق (س) \, د س$$

$$= \int_{-١}^{٢} (٤ س - ٢) \, د س + \int_{٢}^{٣} (٣ س^{٢} - ٦) \, د س$$

$$= (٢ س^{٢} - ٢ س) \Big]_{-١}^{٢} + (س^{٣} - ٦ س) \Big]_{٢}^{٣}$$

$$= (٢ \times ٢^{٢} - ٢ \times ٢) - (٢ \times -١^{٢} - ٢ \times -١)$$

$$+ ٣^{٣} - ٦ \times ٣ - (٢^{٣} - ٦ \times ٢)$$

$$= ٢ \times ٤ - ٤ - (٢ \times ١ - - ٢) + ٢٧ - ١٨ - (٨ - ١٢)$$

$$= ٨ - ٤ - (٢ + ٢) + ٩ - - ٤$$

$$= ٤ - ٤ + ٩ + ٤ = ١٣$$

٦٥) إذا كان

$$ق(س) = \begin{cases} ٦س^{٢} + ١ & ، \quad ١ \leq س \leq ٣ \\ ٢س - ٤ & ، \quad ٣ < س \leq ٥ \end{cases}$$

فجد $\int_{١}^{٥} ق(س)\, د س$

الحل :

$$\int_{١}^{٥} ق(س)\, د س = \int_{١}^{٣} ق(س)\, د س + \int_{٣}^{٥} ق(س)\, د س$$

$$= \int_{١}^{٣} (٦س^{٢} + ١)\, د س + \int_{٣}^{٥} (٢س - ٤)\, د س$$

$$= [س^{٣} + س]_{١}^{٣} + [س^{٢} - ٤س]_{٣}^{٥}$$

$$= (٢ \times ٣^{٢} + ٣ - (٢ \times ١^{٣} + ١)$$

$$+ (٥^{٢} - ٤ \times ٥ - (٣^{٢} - ٤ \times ٣)$$

$$= ٢ \times ٨ + ٢ - (٢ \times ١ + ١) + (٢٥ - ٢٠ - (٩ - ١٢)$$

$$= ١٦ + ٢ - (٢ + ١) + ٥ - - ٣$$

$$= ١٨ - ٣ + ٥ + ٣ = ٢٣$$

تكاملات مجهولة

٦٦) إذا علمت أنّ $\int_{٠}^{٣}$ ق (س) د س = ٥ ، أوجد قيمة $\int_{٠}^{٣}$ (ق (س) — ٢) د س

الحل :

$$\int_{٠}^{٣} (ق(س) - ٢)\, د س = \int_{٠}^{٣} ق(س)\, د س - \int_{٠}^{٣} ٢\, د س$$

$$= ٥ - ٢ س \Big]_{٠}^{٣} = ٥ - (٢ \times ٣ - ٢ \times ٠)$$

$$= ٥ - (٦ - ٠) = ٥ - ٦ = -١$$

---

٦٧) إذا علمت أنّ $\int_{٢}^{٤}$ ٦ ق (س) د س = ١٢ ، أوجد قيمة $\int_{٢}^{٤}$ (ق (س) + ١) د س

الحل : $\int_{٢}^{٤} \frac{٦}{٦}$ ق (س) د س = $\frac{١٢}{٦}$ ⟸ $\int_{٢}^{٤}$ ق (س) د س = ٢

$$\int_{٢}^{٤} (ق(س) + ١)\, د س = \int_{٢}^{٤} ق(س)\, د س + \int_{٢}^{٤} ١\, د س$$

$$= ٢ + س \Big]_{٢}^{٤} = ٢ + (٤ - ٢) = ٢ + ٢ = ٤$$

٦٨) إذا كان $\int_{٣}^{٥} \frac{ق(س)}{٤}$ د س = ٩ ، فجد $\int_{٥}^{٣} (٣ س^{٢} + ٦ ق (س))$ د س

الحل :

$$\int_{٣}^{٥} ٤ \times \frac{ق(س)}{٤} \text{ د س} = ٩ \times ٤ \Longleftarrow \int_{٣}^{٥} ق (س) \text{ د س} = ٣٦$$

$$\int_{٥}^{٣} ق (س) \text{ د س} = - ٣٦$$

$$\int_{٥}^{٣} (٣ س^{٢} + ٦ ق (س)) \text{ د س} = س^{٣}]_{٥}^{٣} + \int_{٥}^{٣} ٦ ق (س) \text{ د س}$$

$$= ٢٧ - ١٢٥ + ٦ \times - ٣٦ = - ٩٨ - ٢١٦ = - ٣١٤$$

---

٦٩) إذا كان $\int_{-٢}^{٢} ق(س)$ د س = ٨ ، $\int_{٥}^{٢} ق(س)$ د س = ٩ ، جد $\int_{٥}^{-٢} (٤ ق(س) - ٦ س)$ د س

الحل :

$$\int_{-٢}^{٥} ق (س) \text{ د س} = \int_{-٢}^{٢} ق (س) \text{ د س} + \int_{٢}^{٥} ق (س) \text{ د س}$$

$$\int_{-٢}^{٥} ق (س) \text{ د س} = ٨ + - ٩ = - ١ \Longleftarrow \int_{٥}^{-٢} ق (س) \text{ د س} = ١$$

$$\int_{-٢}^{٥} (٤ ق (س) - ٦ س) \text{ د س} = \int_{٥}^{-٢} ٤ ق (س) \text{ د س} - ٣ س^{٢}]_{٥}^{-٢}$$

$$= ٤ \times ١ - (١٢ - ٧٥) = ٤ - - ٦٣ = ٤ + ٦٣ = ٦٧$$

٧٠) إذا كان $\int_{-١}^{١} ق(س)\,د س = ٩$ ، $\int_{٣}^{١} ق(س)\,د س = ٦$ ، جد $\int_{-١}^{٣} (ق(س) + ٥)\,د س$

الحل :

$$\int_{-١}^{٣} ق(س)\,د س = \int_{-١}^{١} ق(س)\,د س + \int_{١}^{٣} ق(س)\,د س$$

$$\int_{-١}^{٣} ق(س)\,د س = ٩ + ٦ = ٣$$

$$\int_{-١}^{٣} (ق(س) + ٥)\,د س = \int_{-١}^{٣} ق(س)\,د س + ٥ س \Big]_{-١}^{٣}$$

$$= ٣ + (٥ \times ٣ - ٥ \times -١)$$

$$= ٣ + ١٥ + ٥ = ٣ + ٢٠ = ٢٣$$

٧١) إذا كان $\int_{١}^{٧} ٤\, ق(س)\, د\, س = ٨$ ، $\int_{٥}^{٧} ق(س)\, د\, س = -٩$

جد $\int_{١}^{٥} (٣\, ق(س) - \frac{٣}{٢} س^{٢})\, د\, س$

الحل :

$$\int_{١}^{٧} \frac{٤\, ق(س)}{٤}\, د\, س = \frac{٨}{٤} = ٢$$

$$\int_{١}^{٧} ق(س)\, د\, س = \int_{١}^{٥} ق(س)\, د\, س + \int_{٥}^{٧} ق(س)\, د\, س$$

$$٢ = \int_{١}^{٥} ق(س)\, د\, س + (-٩) \Longleftarrow \int_{١}^{٥} ق(س)\, د\, س = ١١$$

$$\int_{١}^{٥} (٣\, ق(س) - \frac{٣}{٢} س^{٢})\, د\, س$$

$$\int_{١}^{٥} ٣\, ق(س)\, د\, س - \left[\frac{٣}{٦} س^{٣} \right]_{١}^{٥}$$

$$= ٣ \times ١١ - (\frac{٣}{٦} \times ٥^{٣} - \frac{٣}{٦} \times ١^{٣})$$

$$= ٣٣ - (\frac{٣}{٦} \times ١٢٥ - \frac{٣}{٦} \times ١)$$

$$= ٣٣ - (\frac{٣٧٥}{٦} - \frac{٣}{٦}) = ٣٣ - \frac{٣٧٢}{٦}$$

$$= ٣٣ - ٦٢ = -٢٩$$

٧٢) إذا كان $\int_{-١}^{٦} (٣ ق(س) - ٢) د س = ١٠$ ، $\int_{٢}^{٦} ق(س) د س = ١٤$ ، جد $\int_{-١}^{٢} ق(س) د س$

الحل :

$$\int_{-١}^{٦} (٣ ق (س) - ٢) د س = ١٠$$

$$\int_{-١}^{٦} ٣ ق (س) د س - [٢ س]_{-١}^{٦} = ١٠$$

$$\int_{-١}^{٦} ٣ ق (س) د س - (٢ \times ٦ - ٢ \times -١) = ١٠$$

$$\int_{-١}^{٦} ٣ ق (س) د س - ١٤ = ١٠$$

$$\int_{-١}^{٦} ٣ ق (س) د س = ١٠ + ١٤ + ١٤$$

$$\int_{-١}^{٦} \frac{٣ ق (س)}{٣} د س = \frac{٢٤}{٣} \Longleftarrow \int_{-١}^{٦} ق (س) د س = ٨$$

$$\int_{-١}^{٦} ق (س) د س = \int_{-١}^{٢} ق (س) د س + \int_{٢}^{٦} ق (س) د س$$

$$٨ = \int_{-١}^{٢} ق (س) د س + ١٤$$

$$\int_{-١}^{٢} ق (س) د س = -٦$$

٧٣) إذا كان $\int_{ب}^{٢} (ق (س) - ٤) \, د س = ٦$ ، $\int_{ب}^{٣} ق (س) \, د س = -١$

جد $\int_{٢}^{٣} (ق (س) + ٣ س^{٢}) \, د س$

الحل :

$$\int_{٢}^{٣} (ق (س) + ٣ س^{٢}) \, د س$$

$$= \int_{٢}^{٣} ق (س) \, د س + س^{٣} \Big]_{٢}^{٣}$$

$$= -١٥ + ٢٧ - ٨$$

$$= -١٢ - ٨$$

$$= ٤$$

$$\int_{ب}^{٢} (ق (س) - ٤) \, د س = ٦$$

$$\int_{ب}^{٢} ق (س) \, د س - ٤ س \Big]_{ب}^{٢} = ٦$$

$$\int_{ب}^{٢} ق (س) \, د س - (٨ - ٠) = ٦$$

$$\int_{ب}^{٢} ق (س) \, د س - ٨ = ٦$$

$$\int_{ب}^{٢} ق (س) \, د س = ١٤$$

$$\int_{ب}^{٣} ق (س) \, د س = \int_{ب}^{٢} ق (س) \, د س + \int_{٢}^{٣} ق (س) \, د س$$

$$-١ = ١٤ + \int_{٢}^{٣} ق (س) \, د س \Longleftarrow \int_{٢}^{٣} ق (س) \, د س = -١٥$$

٧٤) إذا كان $\int_{-١}^{٥} (ق (س) د س = ٢ ، \int_{٢}^{٥} (١ - ق (س)) د س = ٧$

جد $\int_{-١}^{٢} (ق (س) - ٦ س^{٢}) د س$

الحل :

$$\int_{-١}^{٢} (ق (س) - ٦ س^{٢}) د س$$

$$= \int_{-١}^{٢} ق (س) د س - ٢ س^{٣}]_{-١}^{٢}$$

$$= ٦ - (٢ \times ٢^{٣} - ٢ \times ١^{٣} -)$$

$$= ٦ - (٢ \times ٨ - ٢ \times ١ -)$$

$$= ٦ - (١٦ + ٢)$$

$$= ٦ - ١٨ = - ١٢$$

$$\int_{٢}^{٥} (١ - ق (س)) د س = ٧$$

$$س]_{٢}^{٥} - \int_{٢}^{٥} ق (س) د س = ٧$$

$$(٥ - ٢) - \int_{٢}^{٥} ق (س) د س = ٧$$

$$٣ - \int_{٢}^{٥} ق (س) د س = ٧$$

$$- \int_{٢}^{٥} ق (س) د س = ٤$$

$$\int_{٢}^{٥} ق (س) د س = - ٤$$

$$\int_{-١}^{٥} ق (س) د س = \int_{-١}^{٢} ق (س) د س + \int_{٢}^{٥} ق (س) د س$$

$$٢ = \int_{-١}^{٢} ق (س) د س + ٤ - \Longleftarrow \int_{-١}^{٢} ق (س) د س = ٦$$

٧٥) إذا كان $\int_{١}^{٤} \left(\frac{ق(س)}{٦} + ٢ \right) دس = ٣$ ، $\int_{٧}^{٤} ١٠ ق(س) دس = ٣٠$

جد $\int_{١}^{٧} (ق(س) + ٢س) دس$

الحل :

$$= \int_{١}^{٧} (ق(س) + ٢س) دس$$

$$= \int_{١}^{٧} ق(س) دس + س^{٢} \Big]_{١}^{٧}$$

$$= - ٢١ + ٤٩ - ١$$

$$= ٢٨ - ١$$

$$= ٢٧$$

$$\int_{١}^{٤} \left(\frac{ق(س)}{٦} + ٢ \right) دس = ٣$$

$$\int_{١}^{٤} \frac{ق(س)}{٦} دس + ٢س \Big]_{١}^{٤} = ٣$$

$$\int_{١}^{٤} \frac{ق(س)}{٦} دس + ٨ - ٢ = ٣$$

$$\int_{١}^{٤} \frac{ق(س)}{٦} دس + ٦ = ٣$$

$$\int_{١}^{٤} \frac{ق(س)}{٦} \times ٦ دس = ٣ - \times ٦$$

$$\int_{١}^{٤} ق(س) دس = - ١٨$$

$$\int_{٧}^{٤} ١٠ ق(س) دس = ٣٠$$

$$\int_{٤}^{٧} ق(س) دس = - ٣$$

$$\int_{١}^{٧} ق(س) دس = \int_{١}^{٤} ق(س) دس + \int_{٤}^{٧} ق(س) دس = - ١٨ + - ٣ = - ٢١$$

١٠١

٧٦) إذا كان $\int_{٣}^{٧}$ ق (س) د س = ٥ ، $\int_{٣}^{٧}$ ٣ ع (س) د س = ٩

جد $\int_{٣}^{٧}$ (٤ ق (س) + ٨ ع (س) — ٤ س) د س

الحل :

$= [\ ٤ س^{٢} — ٢ + ٣ \times ٨ + ٥ \times ٤\ ]_{٣}^{٧}$

$= (١٨ — ٩٨) — ٢٤ + ٢٠$

$= ٨٠ — ٤٤$

$= — ٣٦$

$\int_{٣}^{٧} \frac{٣ ع (س)}{٣}$ د س $= \frac{٩}{٣}$

$\int_{٣}^{٧}$ ع (س) د س = ٣

---

٧٧) إذا كان $\int_{— ٢}^{٥}$ ق (س) د س = ٦ ، $\int_{٥}^{— ٢} \frac{١}{٢}$ ع (س) د س = ٤

جد $\int_{— ٢}^{٥}$ (٣ ق (س) + ع (س) — ٢ س) د س

الحل :

$= [\ — س^{٢} — ٨ + ٦ \times ٣\ ]_{— ٢}^{٥}$

$= (٤ — ٢٥) — ٨ — ١٨$

$= ٢١ — ١٠$

$= — ١١$

$\int_{٥}^{— ٢} ٢ \times \frac{١}{٢}$ ع (س) د س $= ٤ \times ٢$

$\int_{٥}^{— ٢}$ ع (س) د س = ٨

$\int_{— ٢}^{٥}$ ع (س) د س = — ٨

٧٨) إذا كان $\int_{-٤}^{٦} ٤ \, ق(س) \, د س = ٨$ ، $\frac{١}{٣} \int_{٦}^{-٤} ع(س) \, د س = ٥$

جد $\int_{-٤}^{٦} (٥ \, ق(س) + ٢ \, ع(س) - ٣ س^{٢}) \, د س$

الحل :

$$= ٥ \int_{-٤}^{٦} ق(س) \, د س + ٢ \int_{-٤}^{٦} ع(س) \, د س - [س^{٣}]_{-٤}^{٦}$$

$$= ٥ \times ٢ + ٢ \times -١٥ - (٢١٦ - -٦٤)$$

$$= ١٠ + -٣٠ - ٢٨٠$$

$$= -٣٠٠$$

$$\int_{-٤}^{٦} \frac{٤ \, ق(س)}{٤} \, د س = \frac{٨}{٤}$$

$$\int_{-٤}^{٦} ق(س) \, د س = ٢$$

$$٣ \times \frac{١}{٣} \int_{٦}^{-٤} ع(س) \, د س = ٥ \times ٣$$

$$\int_{-٤}^{٦} ع(س) \, د س = ١٥$$

$$\int_{-٤}^{٦} ع(س) \, د س = -١٥$$

المجاهيل

٧٩) إذا علمت أنّ $\int_{-١}^{١} م \, د س = ٨$ ، أوجد قيمة الثابت (م)

الحل : $\int_{-١}^{١} م \, د س = ٨ \Longleftarrow [م س]_{-١}^{١} = ٨ \Longleftarrow م - (-م) = ٨$

$\frac{٢ م}{٢} = \frac{٨}{٢} \Longleftarrow م = ٤$

---

٨٠) إذا علمت أنّ $\int_{-٣}^{١} ل \, د س = ٢٨$ ، أوجد قيمة الثابت (ل)

الحل : $\int_{-٣}^{١} ل \, د س = ٢٨ \Longleftarrow [ل س]_{-٣}^{١} = ٢٨ \Longleftarrow ل - (-٣ ل) = ٢٨$

$\frac{٤ ل}{٤} = \frac{٢٨}{٤} \Longleftarrow ل = ٧$

---

٨١) إذا علمت أنّ $\int_{٢}^{٤} ٣ جـ \, د س = ٢٤$ ، أوجد قيمة الثابت (جـ)

الحل : $\int_{٢}^{٤} ٣ جـ \, د س = ٢٤ \Longleftarrow [٣ جـ س]_{٢}^{٤} = ٢٤$

$٣ جـ \times ٤ - ٣ جـ \times ٢ = ٢٤ \Longleftarrow ١٢ جـ - ٦ جـ = ٢٤$

$\frac{٦ جـ}{٦} = \frac{٢٤}{٦} \Longleftarrow جـ = ٤$

٨٢) إذا علمت أنّ $\int_{-٢}^{ب} ٨ \, د س = ٢٤$ ، أوجد قيمة الثابت (ب)

الحل : $\int_{-٢}^{ب} ٨ \, د س = ٢٤ \Longleftarrow ٨ س \Big]_{-٢}^{ب} = ٢٤$

$٨ ب - ٨ \times -٢ = ٢٤$

$٨ ب + ١٦ = ٢٤$

$\frac{٨ ب}{٨} = \frac{٨}{٨} \Longleftarrow ب = ١$

---

٨٣) إذا علمت أنّ $\int_{جـ}^{٣} ٦ \, د س = ٣٠$ ، أوجد قيمة الثابت (جـ)

الحل : $\int_{جـ}^{٣} ٦ \, د س = ٣٠ \Longleftarrow ٦ س \Big]_{جـ}^{٣} = ٣٠$

$٦ \times ٣ - ٦ جـ = ٣٠$

$١٨ - ٦ جـ = ٣٠$

$\frac{-٦ جـ}{-٦} = \frac{١٢}{-٦} \Longleftarrow جـ = -٢$

٨٤) إذا علمت أنّ $\int_{٣}^{٤ جـ} ٥ \, د س = ٢٥$ ، أوجد قيمة الثابت (جـ)

الحل : $\int_{٣}^{٤ جـ} ٥ \, د س = ٢٥ \Longleftarrow ٥ س \Big]_{٣}^{٤ جـ} = ٢٥$

$٥ \times ٤ جـ - ٥ \times ٣ = ٢٥$

$٢٠ جـ - ١٥ = ٢٥$

$\frac{٢٠ جـ}{٢٠} = \frac{٤٠}{٢٠} \Longleftarrow ب = ٢$

---

٨٥) إذا علمت أنّ $\int_{أ}^{٣ أ} ٢ \, د س = ١٨$ ، أوجد قيمة الثابت (أ)

الحل : $\int_{أ}^{٣ أ} ٢ \, د س = ١٨ \Longleftarrow ٢ س \Big]_{أ}^{٣ أ} = ١٨$

$٢ \times ٣ أ - ٢ \times أ = ١٨$

$٦ أ - ٣ أ = ١٨$

$\frac{٣ أ}{٣} = \frac{١٨}{٣} \Longleftarrow أ = ٦$

٨٦) إذا علمت أنّ $\int_{١}^{ب} ٢ س \, د س = ٨$ ، أوجد قيمة الثابت (ب)

الحل : $\int_{١}^{ب} ٢ س \, د س = ٨ \Longleftarrow س^{٢} \Big]_{١}^{ب} = ٨$

$ب^{٢} - ١^{٢} = ٨ \Longleftarrow ب^{٢} - ١ = ٨$

$\sqrt{ب^{٢}} = \pm \sqrt{٩} \Longleftarrow ب = ٣ \ ، \ ب = - ٣$

---

٨٧) إذا علمت أنّ $\int_{٣}^{ل} ٦ س^{٢} \, د س = - ٣٨$ ، أوجد قيمة الثابت (ل)

الحل : $\int_{٢}^{ل} ٦ س^{٢} \, د س = - ٣٨ \Longleftarrow ٢ س^{٣} \Big]_{٣}^{ل} = - ٣٨$

$٢ ل^{٣} - ٢ \times ٣^{٣} = - ٣٨ \Longleftarrow ٢ ل^{٣} - ٢ \times ٢٧ = - ٣٨$

$٢ ل^{٣} - ٥٤ = - ٣٨ \Longleftarrow \frac{٢ ل^{٣}}{٢} = \frac{١٦}{٢}$

$\sqrt[٣]{ل^{٣}} = \sqrt[٣]{٨} \Longleftarrow ل = ٢$

٨٨) إذا علمت أنّ $\int_{-٢}^{جـ} ٩ س^{٢} \, د س = ٢١$ ، أوجد قيمة الثابت (جـ)

لحل : $\int_{-٢}^{جـ} ٩ س^{٢} \, د س = ٢١ \Longleftarrow [٣ س^{٣}]_{-٢}^{جـ} = ٢١$

$٣ جـ^{٣} - ٣ \times -٢^{٣} = ٢١ \Longleftarrow ٣ جـ^{٣} - ٣ \times -٨ = ٢١$

$٣ جـ^{٣} + ٢٤ = ٢١ \Longleftarrow \frac{٣ جـ^{٣}}{٣} = \frac{-٣}{٣}$

$\sqrt[٣]{جـ^{٣}} = \sqrt[٣]{-١} \Longleftarrow جـ = -١$

٨٩) إذا كان $\int_{١}^{جـ} (٢س + ١٢)\, د س = -٤٥$ ، أوجد قيمة (جـ)

الحل :

$$\int_{١}^{جـ} (٢س + ١٢)\, د س = -٤٥$$

$$[\, س^{٢} + ١٢ س \,]_{١}^{جـ} = -٤٥$$

$$جـ^{٢} + ١٢ جـ - (١^{٢} + ١٢ \times ١) = -٤٥$$

$$جـ^{٢} + ١٢ جـ - ١٣ = -٤٥$$

$$جـ^{٢} + ١٢ جـ - ١٣ + ٤٥ = ٠$$

$$جـ^{٢} + ١٢ جـ + ٣٢ = ٠$$

$$(جـ + ٨) (جـ + ٤) = ٠$$

$$جـ = -٨ \ ، \ جـ = -٤$$

٩٠) إذا كان $\int_{جـ}^{٢} (٤س - ١)\, د س = -٣جـ$ ، أوجد قيمة (جـ)

الحل :

$$\int_{جـ}^{٢} (٤س - ١)\, د س = -٣جـ$$

$$[(٢س^{٢} - س)]_{جـ}^{٢} = -٣جـ$$

$$٢ \times ٢^{٢} - ٢ - (٢جـ^{٢} - جـ) = -٣جـ$$

$$٢ \times ٤ - ٢ - ٢جـ^{٢} + جـ = -٣جـ$$

$$٨ - ٢ - ٢جـ^{٢} + جـ = -٣جـ$$

$$٦ - ٢جـ^{٢} + جـ = -٣جـ$$

$$٢جـ^{٢} - ٣جـ - جـ - ٦ = ٠$$

$$\frac{٢جـ^{٢}}{٢} - \frac{٤جـ}{٢} - \frac{٦}{٢} = ٠$$

$$جـ^{٢} - ٢جـ - ٣ = ٠$$

$$(جـ - ٣)(جـ + ١) = ٠$$

$$جـ = ٣ ، جـ = -١$$

٩١) إذا كان $\int_{٠}^{٣} (جـ س^{٢} - ٩) \, د س = -١٥$ ، أوجد قيمة (جـ)

الحل :

$$\int_{٠}^{٣} (جـ س^{٢} - ٩) \, د س = -١٥$$

$$\left[\frac{جـ س^{٣}}{٣} - ٩ س \right]_{٠}^{٣} = -١٥$$

$$\frac{جـ \times ٣^{٣}}{٣} - ٩ \times ٣ - \left(\frac{جـ \times ٠^{٣}}{٣} - ٩ \times ٠ \right) = -١٥$$

$$\frac{جـ \times ٢٧}{٣} - ٢٧ = -١٥$$

$$٩ جـ - ٢٧ = -١٥$$

$$\frac{٩ جـ}{٩} = \frac{١٢}{٩}$$

$$جـ = \frac{١٢}{٩}$$

٩٢) إذا كان ق (س) متصلاً ، و كان ق (١) = ٤ ، ق (٢) = ١٢

$$\int_{١}^{٢} أ \, ق'(س) \, د س = ١٦$$ ، (أ) ثابت ، جد قيمة الثابت (أ)

الحل :

$$\int_{١}^{٢} أ \, ق'(س) \, د س = ١٦$$

$$أ \, ق(س) \Big]_{١}^{٢} = ١٦ \Longleftarrow أ \, ق (٢) - أ \, ق (١) = ١٦$$

$$١٢ أ - ٤ أ = ١٦ \Longleftarrow \frac{٨ أ}{٨} = \frac{١٦}{٨} \Longleftarrow أ = ٢$$

٩٣) إذا كان (ق) اقتراناً مُتصلاً و كان ق (١) = ٣ ، ق (جـ) = ٨

$$\int_{١}^{جـ} (ق' (س) - ٢ س) \, د س = جـ$$ ، فجد قيمة (قيم) الثابت (جـ)

الحل :

$$\int_{١}^{جـ} (ق' (س) - ٢ س) \, د س = جـ$$

$$ق (س) \Big]_{١}^{جـ} - س^{٢} \Big]_{١}^{جـ} = جـ$$

$$ق (جـ) - ق (١) - (جـ^{٢} - ١^{٢}) = جـ$$

$$٨ - ٣ - جـ^{٢} + ١ = جـ \Longleftarrow ٦ - جـ^{٢} = جـ$$

$$جـ^{٢} + جـ - ٦ = ٠$$

$$(جـ + ٣) (جـ - ٢) = ٠$$

$$جـ = -٣ \text{ ، } جـ = ٢$$

٩٤) إذا كان $\int$ (قَ (س) + ٣ س^{٢}) د س = س^{٣} + أ س^{٢} + ١

و كان قَ (١) = ٦ ، فجد قيمة الثابت (أ)

الحل : نشتق الطرفين

قَ (س) + ٣ س^{٢} = ٣ س^{٢} + ٢ أ س

قَ (١) + ٣ × ١^{٢} = ٣ × ١^{٢} + ٢ أ × ١

٦ + ٣ = ٣ + ٢ أ ⟸ ٩ = ٣ + ٢ أ

٦ = ٢ أ ⟸ ٣ = أ

النوع الأوّل : اقتران واحد

الحالة الأولى : الاقتران الثابت

٩٥) احسب المساحة المحصورة بين مُنحنى الاقتران ق (س) = ٤

و محور السينات و المستقيمين س = ١ ، س = ٣

الحل :

المساحة = $\int_{١}^{٣}$ ٤ د س

٤ س $\Big]_{١}^{٣}$ = ٤ × ٣ − ٤ × ١ = ١٢ − ٤ = ٨ وحدات مُربعة

---

٩٦) إذا كان ق (س) = ٦ ، فاحسب المساحة المحصورة بين مُنحنى

الاقتران (ق) و محور السينات و المستقيمين س = ٠ ، س = ٥

الحل :

المساحة = $\int_{٠}^{٥}$ ٦ د س

٦ س $\Big]_{٠}^{٥}$ = ٦ × ٥ − ٦ × ٠ = ٣٠ − ٠ = ٣٠ وحدة مُربعة

الحالة الثانية : الاقتران الخطّي

الفكرة الأولى : المنطقة كاملة فوق محور السينات فينتج إجابة موجبة

٩٧) احسب المساحة المحصورة بين مُنحنى الاقتران ق (س) = ٢ س − ٢ و محور السينات و المستقيمين س = ٣ ، س = ٧

الحل : ٢ س − ٢ = ٠ ⟸ $\frac{٢ س}{٢} = \frac{٢}{٢}$ ⟸ س = ١

بما أنّ (١) لا ينحصر بين العددين (٣ و ٧) ، لذلك تكون المساحة تكامل واحد

المساحة = $\int_{٣}^{٧} (٢ س − ٢) \, د س$ ⟸ $\left[س^{٢} − ٢ س \right]_{٣}^{٧}$

$= ٧^{٢} − ٢ \times ٧ − (٣^{٢} − ٢ \times ٣)$

= ٤٩ − ١٤ − (٩ − ٦) = ٣٥ − ٣ = ٣٢ وحدة مُربعة

---

٩٨) احسب المساحة المحصورة بين مُنحنى الاقتران ق (س) = ٤ س + ٨ و محور السينات و المستقيمين س = ١ ، س = ٥

الحل : ٤ س + ٨ = ٠ ⟸ $\frac{٤ س}{٤} = \frac{− ٨}{٤}$ ⟸ س = − ٢

المساحة = $\int_{١}^{٥} (٤ س + ٨) \, د س$

$\left[٢ س^{٢} + ٨ س \right]_{١}^{٥} = ٢ \times ٥^{٢} + ٨ \times ٥ − (٢ \times ١^{٢} + ٨ \times ١)$

= ٥٠ + ٤٠ − (٢ + ٨) = ٩٠ − ١٠ = ٨٠ وحدة مُربعة

٩٩) جد مساحة المنطقة المحصورة بين مُنحنى الاقتران ق (س) = ٢ + ٥ س

و محور السينات و المستقيمين س = ٢ ، س = ٤

الحل : ٢ + ٥ س = ٠ $\Longleftarrow$ $\frac{٥ \text{ س}}{٥} = \frac{- ٢}{٥}$ $\Longleftarrow$ س = $\frac{- ٢}{٥}$

المساحة = $\int_{٢}^{٤}$ (٢ + ٥ س) د س

$$(٢ \text{ س} + \frac{٥ \text{ س}^{٢}}{٢}) \Big]_{٢}^{٤} = ٢ \times ٤ + \frac{٥ \times ٤^{٢}}{٢} - (٢ \times ٢ + \frac{٣ \times ٢^{٢}}{٢})$$

$$٨ + \frac{٥ \times ١٦}{٢} - (٤ + \frac{٣ \times ٤}{٢})$$

$$= ٨ + \frac{٨٠}{٢} - (٤ + \frac{١٢}{٢})$$

= ٨ + ٤٠ − (٤ + ٦) = ٤٨ − ١٠ = ٣٨ وحدة مُربعة

---

١٠٠) جد مساحة المنطقة المحصورة بين مُنحنى الاقتران ق (س) = ٢ س + ١

و محور السينات و المستقيمين س = ٠ ، س = ١

الحل : ٢ س + ١ = ٠ $\Longleftarrow$ $\frac{٢ \text{ س}}{٢} = \frac{- ١}{٢}$ $\Longleftarrow$ س = $\frac{- ١}{٢}$

المساحة = $\int_{٠}^{١}$ (٢ س + ١) د س $\Longleftarrow$ (س^{٢} + س) $\Big]_{٠}^{١}$

= ١^{٢} + ١ − (٠^{٢} + ٠)

= ١ + ١ − (٠ + ٠) = ٢ − ٠ = ٢ وحدة مُربعة

الفكرة الثانية : المنطقة كاملة تحت محور السينات

فينتج إجابة سالبة ، لذلك نكتب قيمة مُطلقة

١٠١) جد مساحة المنطقة المحصورة بين مُنحنى الاقتران ق (س) = ٢ س − ١

و محور السينات و المستقيمين س = − ٢ ، س = − ١

الحل : ٢ س − ١ = ٠ $\Longleftarrow$ $\frac{٢ س}{٢} = \frac{١}{٢}$ $\Longleftarrow$ س = $\frac{١}{٢}$

المساحة = $\left| \int_{-٢}^{-١} (٢ س − ١) د س \right|$ $\Longleftarrow$ $\left| \left[س^{٢} − س \right]_{-٢}^{-١} \right|$

$= \left| (− ١^{٢} − − ١) − (− ٢^{٢} − − ٢) \right|$

$= \left| ١ + ١ − (٤ + ٢) \right|$

$= \left| ٢ − ٦ \right|$

= | − ٤ | = ٤ وحدات مُربعة

١٠٢) جد مساحة المنطقة المحصورة بين مُنحنى الاقتران ق (س) = ١ ـ ٣ س
و محور السينات و المستقيمين س = ٤ ، س = ٦

الحل : ١ ـ ٣ س = ٠ $\Longleftarrow$ $\frac{٣ س}{٣}$ = $\frac{١}{٣}$ $\Longleftarrow$ س = $\frac{١}{٣}$

المساحة = $\left| \int_{٤}^{٦} (١ - ٣ س) \, د س \right|$

$= \left| [(س - \frac{٣ س^{٢}}{٢})]_{٤}^{٦} \right|$

$= \left| ٦ - \frac{٣ \times ٦^{٢}}{٢} - (٤ - \frac{٣ \times ٤^{٢}}{٢}) \right|$

$= \left| ٦ - \frac{٣ \times ٣٦}{٢} - (٤ - \frac{٣ \times ١٦}{٢}) \right|$

$= \left| ٦ - \frac{١٠٨}{٢} - (٤ - \frac{٤٨}{٢}) \right|$

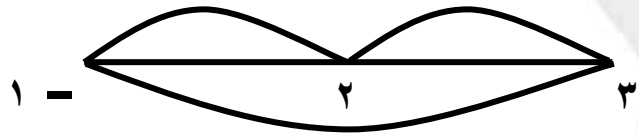
= | ٦ ـ ٥٤ ـ (٤ ـ ٢٤) | = | ـ ٤٨ ـ ـ ٢٠ |

= | ـ ٤٨ + ٢٠ | = | ـ ٢٨ | = ٢٨ وحدة مُربعة

الفكرة الثالثة : جُزء فوق محور السينات و جُزء تحت محور السينات ، لذلك نُجزّء التكامل فينتج إجابة موجبة و إجابة سالبة ، نأخذ القيمة المُطلقة للإجابة السالبة

١٠٣) جد مساحة المنطقة المحصورة بين مُنحنى الاقتران ق (س) = ٤ — ٢ س و محور السينات و المستقيمين س = — ١ ، س = ٣

الحل : ٤ — ٢ س = ٠ $\Longleftarrow$ $\frac{٢ س}{٢} = \frac{٤}{٢}$ $\Longleftarrow$ س = ٢



لمساحة = $\left| \int_{-١}^{٢} (٤ — ٢ س) د س + \int_{٢}^{٣} (٤ — ٢ س) د س \right|$

$= \left| [٤ س — س^{٢}]_{-١}^{٢} + [٤ س — س^{٢}]_{٢}^{٣} \right|$

$= \left| ٤ \times ٢ — ٢^{٢} — (٤ \times — ١ — (— ١)^{٢}) + ٤ \times ٣ — ٣^{٢} — (٤ \times ٢ — ٢^{٢}) \right|$

$= \left| ٨ — ٤ — (— ٤ — ١) + ١٢ — ٩ — (٨ — ٤) \right|$

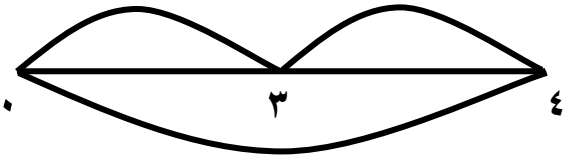
$= \left| ٤ — ٣ | + ٥ — ٤ = | + ٥ + ٤ — ١ \right|$

= ٩ + ١ = ١٠ وحدات مُربعة

١٠٤) جد مساحة المنطقة المحصورة بين مُنحنى الاقتران ق (س) = ٦ – ٢ س

في الفترة [٠ ، ٤]

الحل : ٦ – ٢ س = ٠ $\Longleftarrow$ $\frac{٢ س}{٢} = \frac{٦}{٢}$ $\Longleftarrow$ س = ٣



المساحة = $\left| \int_{٠}^{٣} (٦ – ٢ س) \, د س + \int_{٣}^{٤} (٦ – ٢ س) \, د س \right|$

$= \left| (٦ س – س^{٢}) \Big]_{٠}^{٣} + (٦ س – س^{٢}) \Big]_{٣}^{٤} \right|$

$= \left| ٦ \times ٣ – ٣^{٢} – (٦ \times ٠ – ٠^{٢}) + ٦ \times ٤ – ٤^{٢} – (٦ \times ٣ – ٣^{٢}) \right|$

$= \left| ١٨ – ٩ – (٠ – ٠) + ٢٤ – ١٦ – (١٨ – ٩) \right|$

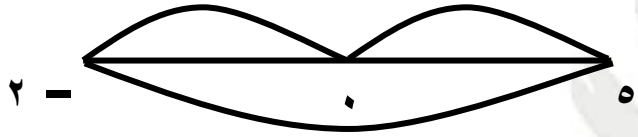
$= ٩ + \left| ٨ – ٩ \right| = ٩ + \left| ١ – \right|$

= ٩ + ١ = ١٠ وحدات مُربعة

١٠٥) جد مساحة المنطقة المحصورة بين مُنحنى الاقتران ق (س) = ٤ س

و محور السينات و المستقيمين س = − ٢ ، س = ٥

الحل : ٤ س = ٠ $\Longleftarrow$ $\frac{٤ س}{٤} = \frac{٠}{٤}$ $\Longleftarrow$ س = ٠



المساحة = $\left| \int_{-٢}^{٠} ٤ س \, د س \right| + \int_{٠}^{٥} ٤ س \, د س$

$= \left| [٢ س^{٢}]_{-٢}^{٠} \right| + [٢ س^{٢}]_{٠}^{٥}$

$= \left| ٢ \times ٠^{٢} - ٢ \times (-٢)^{٢} \right| + ٢ \times ٥^{٢} - ٢ \times ٠^{٢}$

$= \left| ٠ - ٤ \times ٢ \right| + ٢ \times ٢٥ - ٠$

$= \left| - ٨ \right| + ٥٠$

$= ٨ + ٥٠$

= ٥٨ وحدة مُربعة

الحالة الثالثة : الاقتران التربيعي

الفكرة الأولى : عندما يُعطينا الحدود

١٠٦) جد مساحة المنطقة المحصورة بين مُنحنى الاقتران ق (س) = ٣ س^{٢}

و محور السينات و المستقيمين س = ١ ، س = ٢

الحل : $\frac{٣ س^{٢}}{٣}$ = $\frac{٠}{٤}$ ⟸ $\sqrt{س^{٢}}$ = $\sqrt{٠}$ ⟸ س = ٠

المساحة = $\int_{١}^{٢}$ ٣ س^{٢} د س = $[س^{٣}]_{١}^{٢}$

= ٢^{٣} − ١^{٣} = ٨ − ١ = ٧ وحدات مُربعة

---

١٠٧) جد مساحة المنطقة المحصورة بين مُنحنى الاقتران ق (س) = − ٦ س^{٢}

و محور السينات في الفترة [٢ ، ٣]

الحل : $\frac{-٦ س^{٢}}{-٦}$ = $\frac{٠}{-٦}$ ⟸ $\sqrt{س^{٢}}$ = $\sqrt{٠}$ ⟸ س = ٠

لمساحة = $\left| \int_{٢}^{٣} -٦ س^{٢} \text{ د س} \right|$ = $\left| -٢ س^{٣} \right|_{٢}^{٣}$

= $\left| -٢ \times ٣^{٣} - -٢ \times ٢^{٣} \right|$ = $\left| -٥٤ + ١٦ \right|$

= $\left| -٣٨ \right|$ = ٣٨ وحدة مُربعة

١٠٨) احسب المساحة المحصورة بين مُنحنى الاقتران ق (س) = $س^{٢}$ + ١

و محور السينات و المستقيمين س = − ٣ ، س = ٣

الحل : $س^{٢}$ + ١ = ٠ ⟸ $س^{٢}$ = − ١

هذه المُعادلة ليس لها حل

المساحة = $\int_{-٣}^{٣}$ ($س^{٢}$ + ١) د س = $\left[\frac{س^{٣}}{٣} + س \right]_{-٣}^{٣}$

= $\frac{٣^{٣}}{٣} + ٣ - \left(\frac{(-٣)^{٣}}{٣} + (-٣) \right)$

= $\frac{٢٧}{٣} + ٣ - \left(\frac{-٢٧}{٣} - ٣ \right)$

= ٩ + ٣ − (− ٩ − ٣)

= ١٢ − − ١٢

= ١٢ + ١٢

= ٢٤ وحدة مُربعة

الفكرة الثانية : عندما لا يُعطينا الحدود

١٠٩) احسب مساحة المنطقة المُغلقة المحصورة بين مُنحنى الاقتران

ق (س) = س^{٢} − ٩ و محور السينات

الحل : س^{٢} − ٩ = ٠

$$\sqrt{س^{٢}} = \pm \sqrt{٩} \Longleftarrow س = ٣ \ ، \ س = -٣$$

$$\text{المساحة} = \left| \int_{-٣}^{٣} (س^{٢} - ٩) \, د س \right| = \left| \left[\frac{س^{٣}}{٣} - ٩ س \right]_{-٣}^{٣} \right|$$

$$= \left| \frac{٣^{٣}}{٣} - ٩ \times ٣ - \left(\frac{(-٣)^{٣}}{٣} - ٩ \times -٣ \right) \right|$$

$$= \left| \frac{٢٧}{٣} - ٢٧ - \left(\frac{-٢٧}{٣} + ٢٧ \right) \right|$$

$$= \left| ٩ - ٢٧ - (-٩ + ٢٧) \right|$$

$$= \left| -١٨ - ١٨ \right|$$

= | − ٣٦ | = ٣٦ وحدة مُربعة

١١٠) احسب مساحة المنطقة المُغلقة المحصورة بين مُنحنى الاقتران

ق (س) = ٦ س^{٢} − ٢٤ و محور السينات

الحل : ٦ س^{٢} − ٢٤ = ٠ $\Longleftarrow$ $\frac{٦ س^{٢}}{٦} = \frac{٢٤}{٦}$

$\sqrt{س^{٢}} = \pm \sqrt{٤}$ $\Longleftarrow$ س = ٢ ، س = − ٢

المساحة = $\left| \int_{-٢}^{٢} (٦ س^{٢} - ٢٤) \, د س \right| = \left| [٢ س^{٣} - ٢٤ س]_{-٢}^{٢} \right|$

$= \left| (٢ \times ٢^{٣} - ٢٤ \times ٢) - (٢ - \times ٢^{٣} - ٢٤ \times ٢ -) \right|$

$= \left| ٢ \times ٨ - ٤٨ - (٢ - \times ٨ - + ٤٨) \right|$

$= \left| ١٦ - ٤٨ - (- ١٦ + ٤٨) \right|$

$= \left| - ٣٢ - ٣٢ \right|$

$= \left| - ٦٤ \right|$

= ٦٤ وحدة مُربعة

١١١) احسب مساحة المنطقة المُغلقة المحصورة بين مُنحنى الاقتران

ق (س) = $س^{٢}$ + ٢ س و محور السينات

الحل : $س^{٢}$ + ٢ س = ٠ ⟸ س (س + ٢) = ٠

س = ٠ ، س = − ٢

المساحة = $\left| \int_{-٢}^{٠} (س^{٢} + ٢ س) \, د س \right| = \left| \left[\frac{س^{٣}}{٣} + س^{٢} \right]_{-٢}^{٠} \right|$

$= \left| \left(\frac{٠^{٣}}{٣} + ٠^{٢} \right) - \left(\frac{(-٢)^{٣}}{٣} + (-٢)^{٢} \right) \right|$

$= \left| ٠ - \left(\frac{-٨}{٣} + \frac{٤}{١} \right) \right|$

$= \left| - \frac{-٨ + ١٢}{٣} \right|$

$= \left| - \frac{٤}{٣} \right|$

$= \frac{٤}{٣}$ وحدة مُربعة

١١٢) احسب مساحة المنطقة المُغلقة المحصورة بين مُنحنى الاقتران

ق (س) = ١٢ س ــ ٣ س^{٢} و محور السينات

الحل : ١٢ س ــ ٣ س^{٢} = ٠ ⟸ ٣ س (٤ ــ س) = ٠

س = ٠ ، س = ٤

المساحة = $\int_{٠}^{٤}$ (١٢ س ــ ٣ س^{٢}) د س = [٦ س^{٢} ــ س^{٣}]$_{٠}^{٤}$

= ٦ × ٤^{٢} ــ ٤^{٣} ــ (٦ × ٠^{٢} ــ ٠^{٣})

= ٦ × ١٦ ــ ٦٤

= ٩٦ ــ ٦٤

= ٣٢ وحدة مُربعة

١١٣) احسب مساحة المنطقة المُغلقة المحصورة بين مُنحنى الاقتران

ق (س) = $س^{٢}$ − ٤ س + ٣ و محور السينات

الحل : $س^{٢}$ − ٤ س + ٣ = ٠

(س − ٣) (س − ١) = ٠

س = ٣ ، س = ١

$$\text{المساحة} = \left| \int_{١}^{٣} (س^{٢} - ٤ س + ٣) \, د س \right|$$

$$= \left| \left[\frac{س^{٣}}{٣} - ٢ س^{٢} + ٣ س \right]_{١}^{٣} \right|$$

$$= \left| \frac{٣^{٣}}{٣} - ٢ \times ٣^{٢} + ٣ \times ٣ - \left(\frac{١^{٣}}{٣} - ٢ \times ١^{٢} + ٣ \times ١ \right) \right|$$

$$= \left| \frac{٢٧}{٣} - ٢ \times ٩ + ٩ - \left(\frac{١}{٣} - ٢ \times ١ + ٣ \right) \right|$$

$$= \left| ٩ - ١٨ + ٩ - \left(\frac{١}{٣} - ٢ + ٣ \right) \right|$$

$$= \left| - \left(\frac{١}{٣} + \frac{١}{١} \right) \right| = \left| - \frac{٣ + ١}{٣} \right|$$

$$= \left| - \frac{٤}{٣} \right| = \frac{٤}{٣} \text{ وحدة مُربعة}$$

١١٤) احسب مساحة المنطقة المُغلقة المحصورة بين مُنحنى الاقتران

ق (س) = ٣ س^{٢} + ٦ س ـ ٩ و محور السينات

الحل : $\frac{٣ س^{٢}}{٣} + \frac{٦ س}{٣} - \frac{٩}{٣} = ٠$

س^{٢} + ٢ س ـ ٣ = ٠

(س + ٣) (س ـ ١) = ٠

س = ـ ٣ ، س = ١

المساحة = $\left| \int_{-٣}^{١} (٣ س^{٢} + ٦ س - ٩) \, د س \right|$

$= \left| \left[س^{٣} + ٣ س^{٢} - ٩ س \right]_{-٣}^{١} \right|$

$= \left| (١^{٣} + ٣ \times ١^{٢} - ٩ \times ١) - ((-٣)^{٣} + ٣ \times (-٣)^{٢} - ٩ \times (-٣)) \right|$

$= \left| ١ + ٣ \times ١ - ٩ \times ١ - (-٢٧ + ٣ \times ٩ + ٢٧) \right|$

$= \left| ١ + ٣ - ٩ - (-٢٧ + ٢٧ + ٢٧) \right|$

١٣٠

$= \left| ٤ - ٩ - ٢٧ \right| = \left| -٣٢ \right| = ٣٢$ وحدة مُربعة

الحالة الرابعة : الاقتران التكعيبي

١١٥) جد مساحة المنطقة المحصورة بين مُنحنى الاقتران ق (س) = $س^{٣}$

و محور السينات و المستقيمين س = ١ ، س = ٣

الحل : $\sqrt[٣]{س^{٣}} = \sqrt[٣]{٠} \Longleftarrow$ س = ٠

المساحة = $\int_{١}^{٣} س^{٣}$ د س = $\left[\frac{س^{٤}}{٤} \right]_{١}^{٣}$

= $\frac{٣^{٤}}{٤} - \frac{١^{٤}}{٤} = \frac{٨١}{٤} - \frac{١}{٤} = \frac{٨٠}{٤}$ = ٢٠ وحدة مُربعة

---

١١٦) جد مساحة المنطقة المحصورة بين مُنحنى الاقتران ق (س) = $- ٤ س^{٣}$

و محور السينات في الفترة [$- ٢$ ، ٠]

الحل : $\frac{- ٤ س^{٣}}{- ٤} = \frac{٠}{- ٤} \Longleftarrow \sqrt[٣]{س^{٣}} = \sqrt[٣]{٠} \Longleftarrow$ س = ٠

المساحة = $\int_{- ٢}^{٠} (- ٤ س^{٣})$ د س = $\left[- س^{٤} \right]_{- ٢}^{٠}$

= $- ٠^{٤} - - (- ٢)^{٤}$

= ٠ + ١٦

= ١٦ وحدة مُربعة

١١٧) جد مساحة المنطقة المحصورة بين مُنحنى الاقتران ق (س) = ٨ س^{٣}

و محور السينات في الفترة [− ٢ ، ٣]

الحل : $\frac{٨ \text{ س}^{٣}}{٨} = \frac{٠}{٨} \Longleftarrow \sqrt[٣]{\text{س}^{٣}} = \sqrt[٣]{٠} \Longleftarrow$ س = ٠

المساحة = $\left| \int_{-٢}^{٠} ٨ \text{ س}^{٣} \text{ د س} \right| + \int_{٠}^{٣} ٨ \text{ س}^{٣} \text{ د س}$

$= \left| [٢ \text{ س}^{٤}]_{-٢}^{٠} \right| + [٢ \text{ س}^{٤}]_{٠}^{٣}$

$= |٢ \times ٠^{٤} - ٢ \times (-٢)^{٤}| + ٢ \times ٣^{٤} - ٢ \times ٠^{٤}$

$= |٢ \times ٠ - ٢ \times ١٦| + ٢ \times ٨١ - ٢ \times ٠$

$= |٠ - ٣٢| + ١٦٢ - ٠$

$= |-٣٢| + ١٦٢$

$= ٣٢ + ١٦٢$

$= ١٩٤$ وحدة مُربعة

١١٨) جد مساحة المنطقة المحصورة بين مُنحنى الاقتران ق (س) = س^{٣} − ٨
و محور السينات و المستقيمين س = ٢ ، س = ٤

الحل : س^{٣} − ٨ = ٠ ⟸ $\sqrt[٣]{\text{س}^{٣}}$ = $\sqrt[٣]{٨}$ ⟸ س = ٢

المساحة = $\int_{٢}^{٤}$ (س^{٣} − ٨) د س = $\left[\left(\frac{\text{س}^{٤}}{٤} - ٨ \text{ س} \right) \right]_{٢}^{٤}$

= $\frac{٤^{٤}}{٤}$ − ٨ × ٤ − ($\frac{٢^{٤}}{٤}$ − ٨ × ٢)

= $\frac{٢٥٦}{٤}$ − ٣٢ − ($\frac{١٦}{٤}$ − ١٦)

= ٦٤ − ٣٢ − (٤ − ١٦)

= ٣٢ − − ١٢ = ٣٢ + ١٢ = ٤٤ وحدة مُربعة

---

١١٩) جد مساحة المنطقة المحصورة بين مُنحنى الاقتران ق (س) = ٤ + ٤ س^{٣}
و محور السينات و المستقيمين س = ٠ ، س = ٢

الحل : ٤ + ٤ س^{٣} = ٠ ⟸ ٤ س^{٣} = − ٤

$\sqrt[٣]{\text{س}^{٣}}$ = $\sqrt[٣]{-١}$ ⟸ س = − ١

المساحة = $\int_{٠}^{٢}$ (٤ + ٤ س^{٣}) د س = $\left[٤ \text{ س} + \text{س}^{٤} \right)_{٠}^{٢}$

= ٤ × ٢ + ٢^{٤} − (٤ × ٠ − ٠^{٤})

= ٨ + ١٦ − ٠ = ٢٤ وحدة مُربعة

١٢٠) احسب مساحة المنطقة المُغلقة المحصورة بين مُنحنى الاقتران

ق (س) = س − س^{٣} و محور السينات

الحل : س − س^{٣} = ٠

س (١ − س^{٢}) = ٠ ⟸ س (١ − س) (١ + س) = ٠

س = ٠ ، س = ١ ، س = − ١

$$\text{المساحة} = \left| \int_{-١}^{٠} (س - س^{٣}) \, د س \right| + \int_{٠}^{١} (س - س^{٣}) \, د س$$

$$= \left| \left[\frac{س^{٢}}{٢} - \frac{س^{٤}}{٤} \right]_{-١}^{٠} \right| + \left[\frac{س^{٢}}{٢} - \frac{س^{٤}}{٤} \right]_{٠}^{١}$$

$$= \left| \frac{٠^{٢}}{٢} - \frac{٠^{٤}}{٤} - \left(\frac{(-١)^{٢}}{٢} - \frac{(-١)^{٤}}{٤} \right) \right| + \frac{١^{٢}}{٢} - \frac{١^{٤}}{٤} - \left(\frac{٠^{٢}}{٢} - \frac{٠^{٤}}{٤} \right)$$

$$= \left| ٠ - \left(\frac{١}{٢} - \frac{١}{٤} \right) \right| + \frac{١}{٢} - \frac{١}{٤} - ٠$$

$$= - \left| - \frac{٤ - ٢}{٨} \right| + \frac{٤ - ٢}{٨}$$

$$= - \left| \frac{٢}{٨} \right| + \frac{٢}{٨} = \frac{٢}{٨} + \frac{٢}{٨} = \frac{٤}{٨} \text{ وحدة مُربعة}$$

١٢١) جد مساحة المنطقة المُغلقة المحصورة بين مُنحنى الاقتران ص = س^{٣}

و المستقيم س = − ١ و محور السينات

الحل : س^{٣} = ٠ ⟸ س = ٠

$$\text{المساحة} = \left| \int_{-١}^{٠} س^{٣} \, د س \right| = \left| \left[\frac{س^{٤}}{٤} \right]_{-١}^{٠} \right|$$

$$= \left| \frac{٠^{٤}}{٤} - \frac{(-١)^{٤}}{٤} \right|$$

$$= \left| - \frac{١}{٤} \right|$$

$$= \frac{١}{٤} \text{ وحدة مُربعة}$$

النوع الثاني : اقترانين

المساحة = $\int$ (الاقتران الأعلى − الاقتران الأخفض) د س

الحد الأكبر

الحد الأصغر

لاختبار أي الاقترانيين هو الأعلى داخل هذه الفترة نعوّض عدداً ضمن الفترة في الاقترانيين و يكون الاقتران الأعلى هو الذي إجابته أكبر

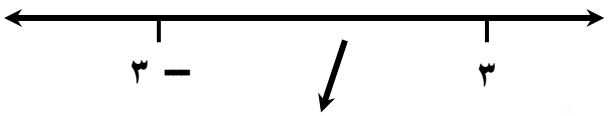
الحالة الأولى : اقتران ثابت مع اقتران تربيعي

١٢٢) احسب مساحة المنطقة المُغلقة المحصورة بين مُنحنيي الاقترانين

ق (س) = ٥ ، هـ (س) = $س^{٢}$ − ٤

الحل : $س^{٢}$ − ٤ = ٥ ⟸ $\sqrt{س^{٢}}$ = $\sqrt{٩}$

س = ٣ ، س = − ٣



ق (٠) = ٥

هـ (٠) = − ٤

المساحة = $\int_{-٣}^{٣}$ (٥ − ($س^{٢}$ − ٤)) د س

= $\int_{-٣}^{٣}$ (٥ − $س^{٢}$ + ٤)) د س

= $\int_{-٣}^{٣}$ (٩ − $س^{٢}$) د س = [٩ س − $\frac{س^{٣}}{٣}$)]$_{-٣}^{٣}$

= ٩ × ٣ − $\frac{٣^{٣}}{٣}$ − (٩ × − ٣ − $\frac{(-٣)^{٣}}{٣}$)

١٣٦

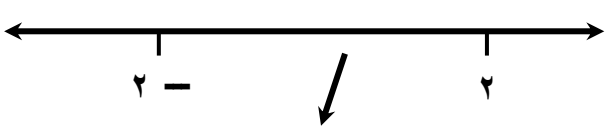
= ٢٧ − ٩ − (− ٢٧ − − ٩) = ١٨ + ١٨ = ٣٦ وحدة مُربعة

١٢٣) احسب مساحة المنطقة المُغلقة المحصورة بين مُنحنيي الاقترانين

ق (س) = ١٦ − ٤ $س^{٢}$ ، ص = ٠

الحل : ١٦ − ٤ $س^{٢}$ = ٠

$س^{٢}$ = ٤ ⟸ س = ٢ ، س = − ٢



ق (٠) = ١٦
الثاني = ٠

المساحة = $\int_{-٢}^{٢}$ (١٦ − ٤ $س^{٢}$ − ٠) د س ٠

= $\int_{-٢}^{٢}$ (١٦ − ٤ $س^{٢}$) د س

= [١٦ س − $\frac{٤ س^{٣}}{٣}$] $_{-٢}^{٢}$

= ١٦ × ٢ − $\frac{٤ \times ٢^{٣}}{٣}$ − (١٦ × − ٢ − $\frac{٤ \times − ٢^{٣}}{٣}$)

= ٣٢ − $\frac{٣٢}{٣}$ − (− ٣٢ − $\frac{− ٣٢}{٣}$)

= ٣٢ − $\frac{٣٢}{٣}$ + ٣٢ − $\frac{٣٢}{٣}$

= $\frac{٦٤}{١}$ − $\frac{٦٤}{٣}$

= $\frac{١٩٢ − ٦٤}{٣}$ = $\frac{١٢٨}{٣}$ وحدة مُربعة

١٢٤) احسب مساحة المنطقة المُغلقة المحصورة بين مُنحنيي الاقترانين

ق (س) = $س^{٢}$ − ٢ س ، ص = ٨

الحل : $س^{٢}$ − ٢ س = ٨

$س^{٢}$ − ٢ س − ٨ = ٠

(س − ٤) (س + ٢) = ٠

س = ٤ ، س = − ٢

المساحة = $\int_{-٢}^{٤}$ (٨ − ($س^{٢}$ − ٢ س)) د س

٠

ق (٠) = ٠
الثاني = ٨

$= \int_{-٢}^{٤}$ (٨ − $س^{٢}$ + ٢ س)) د س

$= \left[٨ س - \frac{س^{٣}}{٣} + س^{٢} \right]_{-٢}^{٤}$

$= ٨ \times ٤ - \frac{٤^{٣}}{٣} + ٤^{٢} - (٨ \times -٢ - \frac{-٢^{٣}}{٣} + -٢^{٢})$

$= ٣٢ - \frac{٦٤}{٣} + ١٦ - (-١٦ - \frac{-٨}{٣} + ٤)$

$= ٤٨ - \frac{٦٤}{٣} - (-١٢ - \frac{-٨}{٣})$

$= ٤٨ - \frac{٦٤}{٣} + ١٢ - \frac{٨}{٣} = ٦٠ - \frac{٧٢}{٣}$

= ٦٠ − ٢٤ = ٣٦ وحدة مُربعة

الحالة الثانية : اقتران خطّي مع اقتران تربيعي

١٢٥) احسب مساحة المنطقة المُغلقة المحصورة بين مُنحنيي الاقترانين

ق (س) = س^{٢} ــ ٤ س ، هـ (س) = ٢ س

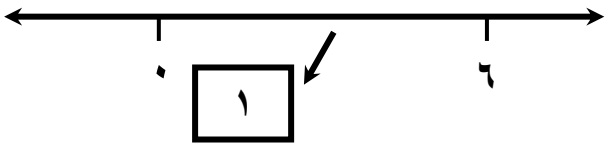
الحل : س^{٢} ــ ٤ س = ٢ س

س^{٢} ــ ٤ س ــ ٢ س = ٠

س^{٢} ــ ٦ س = ٠

س (س ــ ٦) = ٠

س = ٠ ، س = ٦



ق (١) = ــ ٣

هـ (١) = ٢

المساحة = $\int_{٠}^{٦}$ (٢ س ــ (س^{٢} ــ ٤ س)) د س

= $\int_{٠}^{٦}$ (٢ س ــ س^{٢} + ٤ س)) د س

= $\int_{٠}^{٦}$ (٦ س ــ س^{٢}) د س = $\left[\left(\frac{٦ س^{٢}}{٢} \right) - \left(\frac{س^{٣}}{٣} \right) \right]_{٠}^{٦}$

= (٣ × ٦^{٢}) ــ $\frac{٦^{٣}}{٣}$ ــ (٣ × ٠^{٢}) ــ $\frac{٠^{٣}}{٣}$)

= ٣ × ٣٦ ــ $\frac{٢١٦}{٣}$ = ١٠٨ ــ ٧٢

= ٣٦ وحدة مُربعة

١٢٦) احسب مساحة المنطقة المُغلقة المحصورة بين مُنحنيي الاقترانين

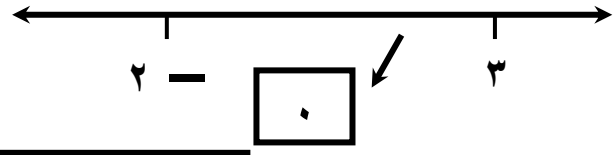
ص = س^{٢} ، ص − س = ٦

الحل : ص = ٦ + س

س^{٢} = ٦ + س ⟸ س^{٢} − س − ٦ = ٠

(س − ٣) (س + ٢) = ٠

س = ٣ ، س = − ٢



الأوّل = ٠
الثاني = ٦

المساحة = $\int_{-٢}^{٣}$ (٦ + س − س^{٢}) د س

$$= \left[\left(٦ س + \frac{س^{٢}}{٢} - \frac{س^{٣}}{٣} \right) \right]_{-٢}^{٣}$$

$$= \left(٦ \times ٣ + \frac{٣^{٢}}{٢} - \frac{٣^{٣}}{٣} \right) - \left(٦ \times -٢ + \frac{-٢^{٢}}{٢} - \frac{-٢^{٣}}{٣} \right)$$

$$= \left(١٨ + \frac{٩}{٢} - \frac{٢٧}{٣} \right) - \left(-١٢ + \frac{٤}{٢} - \frac{-٨}{٣} \right)$$

$$= \left(١٨ + \frac{٩}{٢} - ٩ \right) - \left(-١٢ + ٢ - \frac{-٨}{٣} \right)$$

$$= \left(٩ + \frac{٩}{٢} \right) - \left(-١٠ + \frac{٨}{٣} \right)$$

$$= ٩ + \frac{٩}{٢} + ١٠ - \frac{٨}{٣}$$

١٤٠

$$= ١٩ + \frac{٢٧ - ١٦}{٦} = \frac{١٩}{١} + \frac{١١}{٢} = \frac{٤٩}{٢}$$ وحدة مُربعة

١٢٧) احسب مساحة المنطقة المُغلقة المحصورة بين مُنحنيي الاقترانين

ق (س) = $س^{٢}$ + ٢ ، ص + ٢ س = ٥

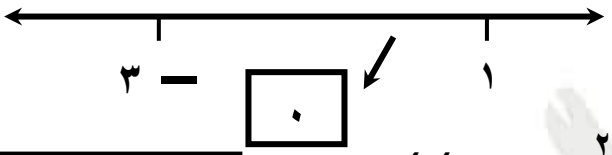
الحل : ص = ٥ − ٢ س

$س^{٢}$ + ٢ = ٥ − ٢ س ⟸ $س^{٢}$ + ٢ + ٢ س − ٥ = ٠

$س^{٢}$ + ٢ س − ٣ = ٠

(س + ٣) (س − ١) = ٠

س = − ٣ ، س = ١



ق (٠) = ٢

الثاني = ٥

المساحة = $\int_{-٣}^{١}$ (٥ − ٢ س − ($س^{٢}$ + ٢)) د س

= $\int_{-٣}^{١}$ (٥ − ٢ س − $س^{٢}$ − ٢) د س

= $\int_{-٣}^{١}$ (٣ − ٢ س − $س^{٢}$) د س

= [(٣ س − $س^{٢}$ − $\frac{س^{٣}}{٣}$)]$_{-٣}^{١}$

= ٣ × ١ − ١ − (٣ × − ٣ − (− ٣)^{٢} − $\frac{−٣^{٣}}{٣}$)

= ٣ − ١ − $\frac{١}{٣}$ − (− ٩ − ٩ − $\frac{−٢٧}{٣}$)

١٤١

= ٢ − $\frac{١}{٣}$ + ١٨ − ٩ = $\frac{١١}{١}$ − $\frac{١}{٣}$ = $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مُربعة

١٢٨) جد مساحة المنطقة المُغلقة المحصورة بين مُنحنيي الاقترانين

ق (س) = ٢ س^{٢} ، ل (س) = ٢ س + ٤

الحل : ٢ س^{٢} = ٢ س + ٤

٢ س^{٢} − ٢ س − ٤ = ٠

س^{٢} − س − ٢ = ٠

(س − ٢) (س + ١) = ٠

س = ٢ ، س = − ١

المساحة = $\int_{-١}^{٢}$ (٢ س + ٤ − ٢ س^{٢}) د س

ق (٠) = ٠

ل (٠) = ٤

$= \left[\left(س^{٢} + ٤ س - \frac{٢ س^{٣}}{٣} \right) \right]_{-١}^{٢}$

$= \left(٢^{٢} + ٤ \times ٢ - \frac{٢ \times ٢^{٣}}{٣} \right) - \left((-١)^{٢} + ٤ \times -١ - \frac{٤ \times -١^{٣}}{٣} \right)$

$= \left(٤ + ٨ - \frac{١٦}{٣} \right) - \left(١ - ٤ - \frac{-٤}{٣} \right)$

$= \left(١٢ - \frac{١٦}{٣} \right) - \left(-٣ + \frac{٤}{٣} \right)$

$= ١٢ - \frac{١٦}{٣} + ٣ - \frac{٤}{٣}$

$= \frac{١٥}{١} - \frac{٢٠}{٣} = \frac{٢٥}{٣}$ وحدة مُربعة

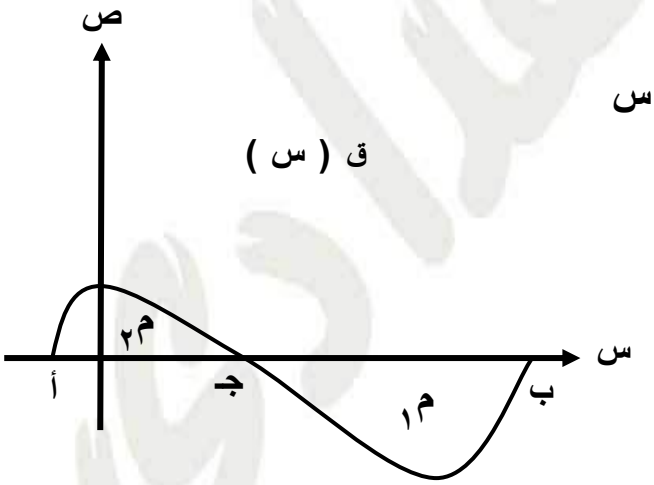
المساحة و الرسم

الفكرة الأولى

أوّلاً : المساحة : الجُزء الذي يكون فوق محور السينات و الذي تحت محور السينات تكون إجابة كل مُنهما موجباً

ثانياً : التكامل : الجُزء الذي يكون فوق محور السينات تكون إجابتهُ موجبة الجُزء الذي يكون تحت محور السينات تكون إجابتهُ سالبة

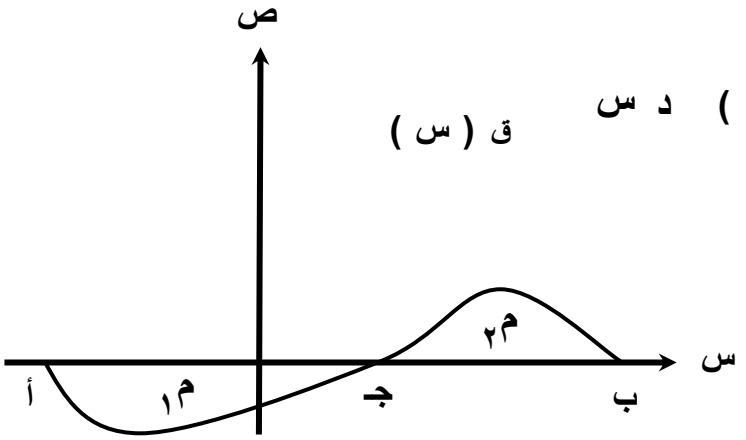
١٢٩) يُمثّل الشكل المجاور المنطقة المُغلقة المحصورة بين مُنحنى الاقتران (ق) و محور السينات في الفترة [أ ، ب] ، فإذا علمت أنّ مساحة (م١) تساوي (٨) و حدات مُربعة ، و مساحة (م٢) تساوي (٥) و حدات مُربعة ، فاحسب $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س



الحل :

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,د س = -٨ + ٥ = -٣$$

١٣٠) يُمثّل الشكل المجاور المنطقة المُغلقة المحصورة بين مُنحنى الاقتران (ق) و محور السينات في الفترة [أ ، ب] ، فإذا علمت أنّ مساحة (م١) تساوي (٩) و حدات مُربعة ، و مساحة (م٢) تساوي (٧) و حدات مُربعة ، فاحسب $\int_{أ}^{ب}$ ق (س) د س

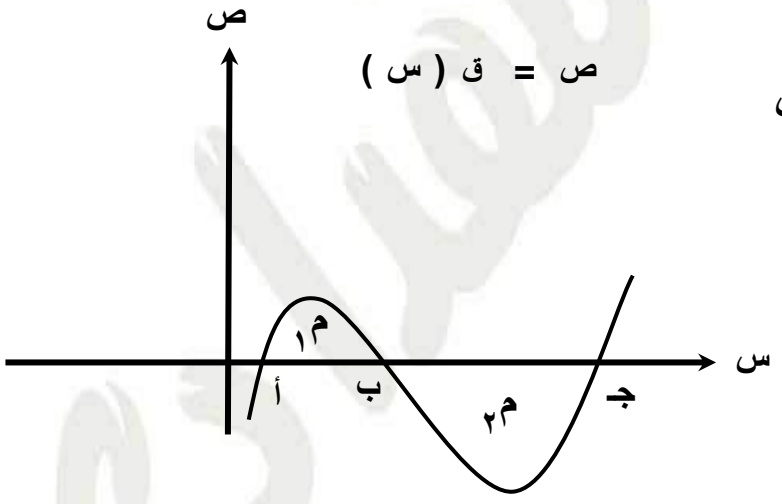


الحل :

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,د س = -٩ + ٧ = -٢$$

---

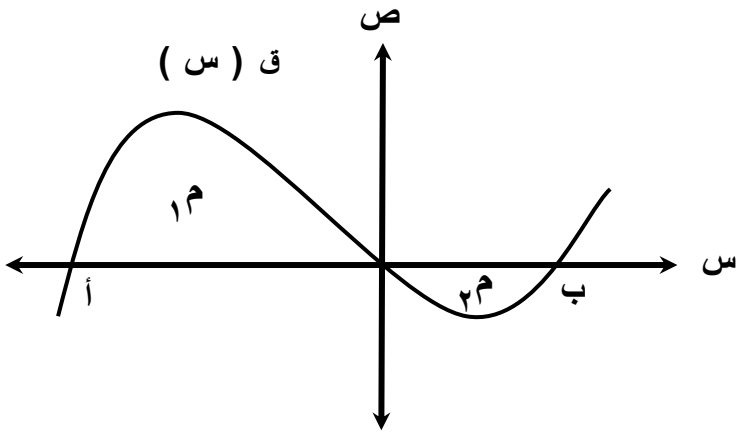
١٣١) بالاعتماد على الشكل الآتي الذي يُمثّل مُنحنى الاقتران ق (س) فإذا كانت المساحة (م١ = ٦) ، المساحة (م٢ = ١٠) فاحسب $\int_{أ}^{جـ}$ ق (س) د س



الحل :

$$\int_{أ}^{جـ} ق(س)\,د س = ٦ - ١٠ = -٤$$

١٣٢) يُبيّن الشكل المجاور المنطقة المُغلقة المحصورة بين مُنحنى الاقتران ق (س) و محور السينات في الفترة [أ ، ب] ، إذا علمت أنّ مساحة (م١) تساوي م١ = ٩ و حدات مُربعة ، م٢ = ٤ و حدات مُربعة



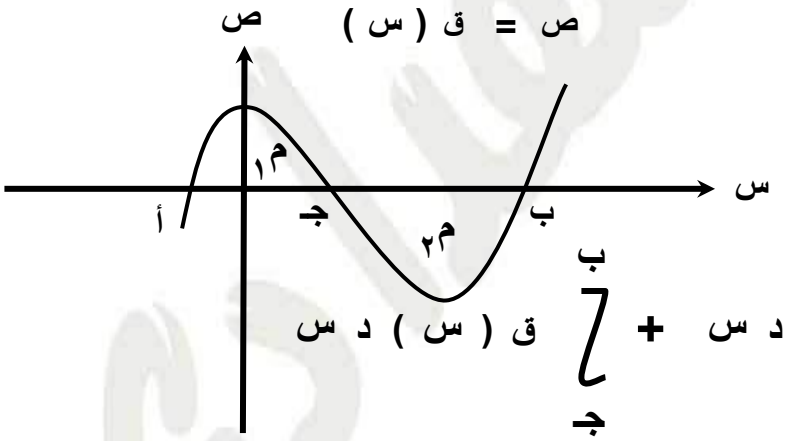
احسب $\int_{أ}^{ب} ق (س) \, د س$

الحل :

$\int_{أ}^{ب} ق (س) \, د س = ٩ + (- ٤) = ٥$

الفكرة الثانية

١٣٣) يُمثّل الشكل المجاور المنطقة المُغلقة المحصورة بين مُنحنى الاقتران (ق) و محور السينات في الفترة [أ ، ب] ، فإذا علمت أنّ مساحة (م١) تساوي (٦) و حدات مُربعة ، $\int_{أ}^{ب} ق (س) \, د س = - ٤$ ، فجد مساحة (م٢)



الحل :

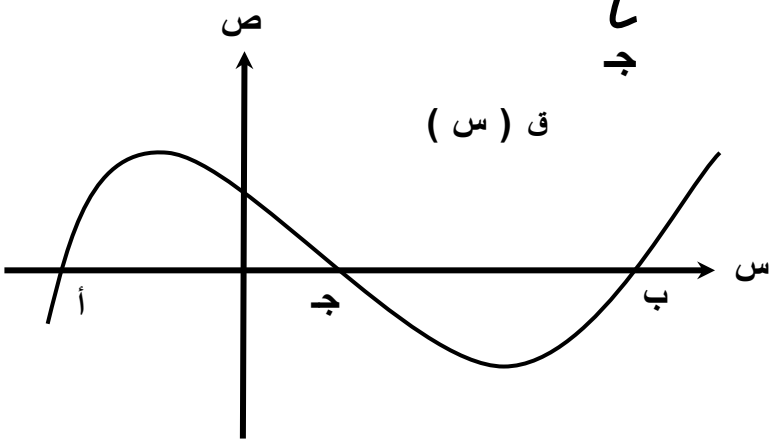
$\int_{أ}^{ب} ق (س) \, د س = \int_{أ}^{جـ} ق (س) \, د س + \int_{جـ}^{ب} ق (س) \, د س$

$- ٤ = ٦ + \int_{جـ}^{ب} ق (س) \, د س \Longleftarrow \int_{جـ}^{ب} ق (س) \, د س = - ١٠$

إذاً مساحة م٢ = ١٠

١٣٤) مُعتمداً الشكل المجاور و الذي يُمثّل مُنحنى الاقتران (ق) المُعرّف في الفترة [أ ، ب] ، إذا علمت أنّ مساحة المنطقة المُغلقة المحصورة بين مُنحنى الاقتران (ق) و محور السينات (١٤) و حدة مُربعة

و كان $\int_{أ}^{جـ} ق (س) د س = ٦$ ، فجد $\int_{جـ}^{ب} ق (س) د س$



الحل :

تُحسب المساحة كالتالي

$$\text{المساحة} = \int_{أ}^{جـ} ق (س) د س + \left| \int_{جـ}^{ب} ق (س) د س \right|$$

$$١٤ = ٦ + \left| \int_{جـ}^{ب} ق (س) د س \right|$$

$$\left| \int_{جـ}^{ب} ق (س) د س \right| = ٨$$

لكن المنطقة من (جـ) إلى (ب) تقع تحت محور السينات

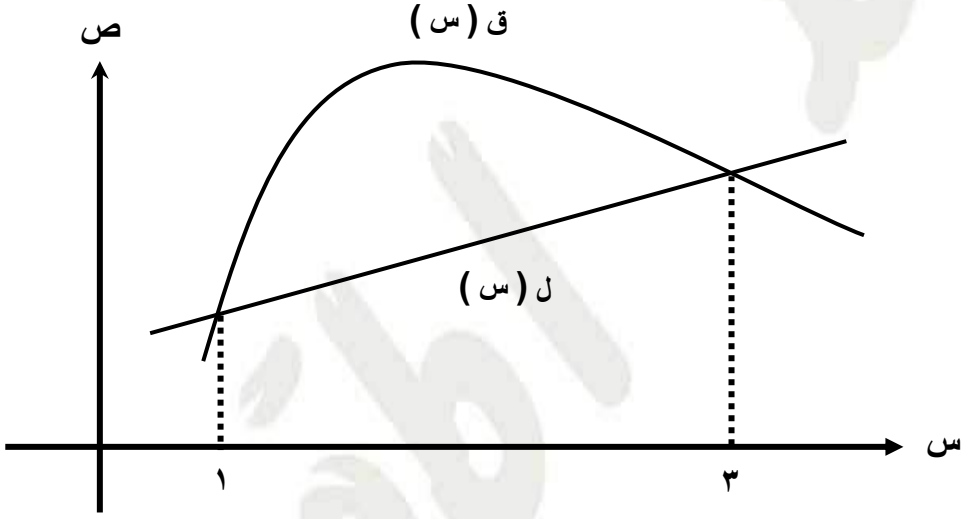
إذاً $\int_{جـ}^{ب} ق (س) د س = - ٨$

الفكرة الثالثة : رسمة اقترانين

١٣٥) الشكل المجاور يُمثّل منحيي الاقترانين ق (س) ، ل (س)

إذا علمت أنّ $\int_{١}^{٣} ٢ \, ق(س) \, د س = ١٢$ ، $\int_{٣}^{١} ل(س) \, د س = -٤$

فما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين في الفترة [١ ، ٣]



الحل :

$$\int_{١}^{٣} ٢ \, ق(س) \, د س = ١٢ \Longleftarrow \int_{١}^{٣} ق(س) \, د س = ٦$$

$$\int_{٣}^{١} ل(س) \, د س = -٤ \Longleftarrow \int_{١}^{٣} ل(س) \, د س = ٤$$

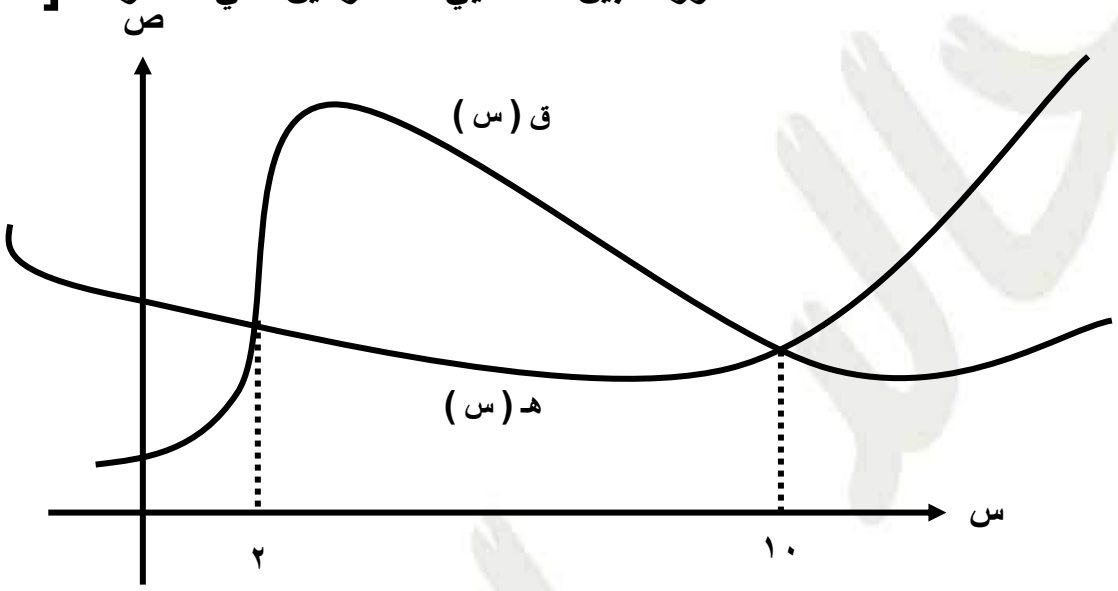
$$\text{المساحة} = \int_{١}^{٣} (ق(س) - ل(س)) \, د س = \int_{١}^{٣} ق(س) \, د س - \int_{١}^{٣} ل(س) \, د س$$

المساحة = ٦ − ٤ = ٢

١٣٦) الشكل المجاور يُمثّل منحيي الاقترانين ق (س) ، هـ (س)

إذا علمت أنّ $\int_{٢}^{١٠} ٥ \, ق(س) \, د س = ٤٠$ ، $\int_{١٠}^{٢} هـ(س) \, د س = - ٦$

فما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين في الفترة [٢ ، ١٠]



الحل :

$\int_{٢}^{١٠} ٥ \, ق(س) \, د س = ٤٠ \Longleftarrow \int_{٢}^{١٠} ق(س) \, د س = ٨$

$\int_{١٠}^{٢} هـ(س) \, د س = - ٦ \Longleftarrow \int_{٢}^{١٠} هـ(س) \, د س = ٦$

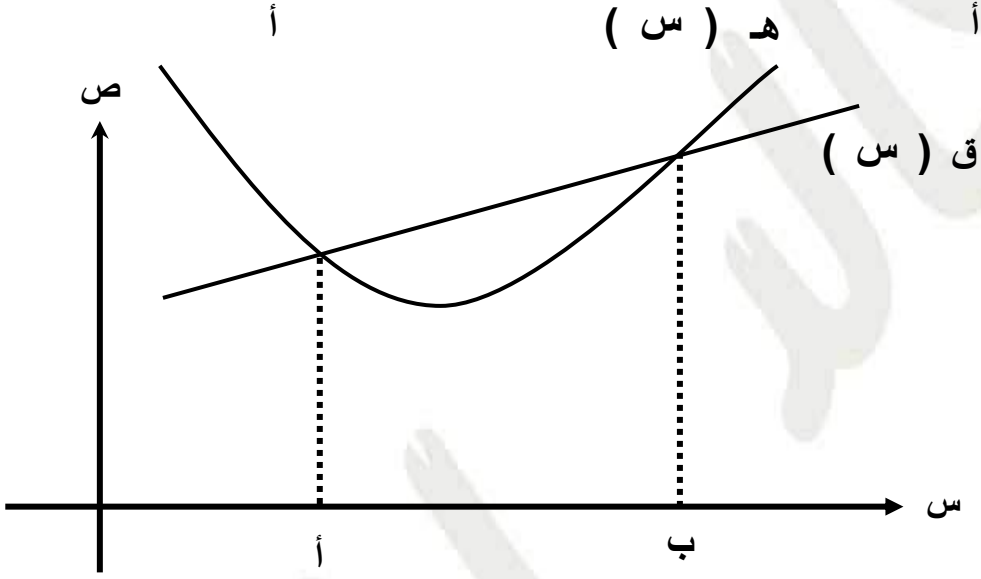
المساحة $= \int_{٢}^{١٠} (ق(س) - هـ(س)) \, د س = \int_{٢}^{١٠} ق(س) \, د س - \int_{٢}^{١٠} هـ(س) \, د س$

المساحة = ٨ − ٦ = ٢

١٣٧) يُمثّل الشكل المجاور منحيي الاقترانين ق (س) ، هـ (س)

إذا علمت أنّ المساحة المُغلقة المحصورة بين مُنحنيي الاقترانين (٣) و حدات مُربعة

و كان $\int_{أ}^{ب} ٢ \, ق(س) \, د س = ٢٤$ ، جد $\int_{أ}^{ب} هـ (س) \, د س$



الحل :

$\int_{أ}^{ب} ٢ \, ق(س) \, د س = ٢٤ \Longleftarrow \int_{أ}^{ب} ق(س) \, د س = ١٢$

المساحة $= \int_{أ}^{ب} (ق(س) - هـ(س)) \, د س = \int_{أ}^{ب} ق(س) \, د س - \int_{أ}^{ب} هـ(س) \, د س$

$٣ = ١٢ - \int_{أ}^{ب} هـ (س) \, د س$

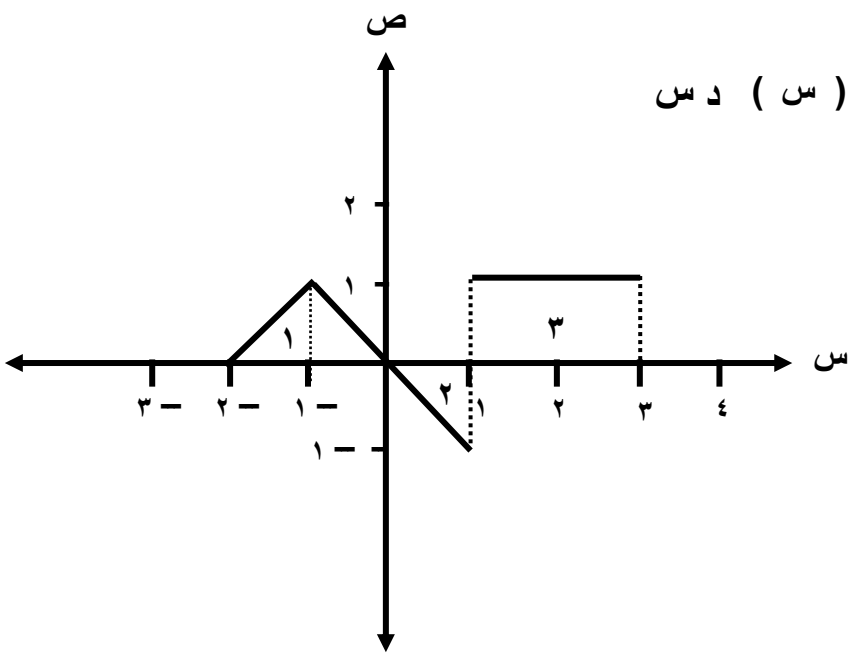
$- \int_{أ}^{ب} هـ (س) \, د س = ٣ - ١٢$

$- \int_{أ}^{ب} هـ (س) \, د س = - ٩ \Longleftarrow \int_{أ}^{ب} هـ (س) \, د س = ٩$

الفكرة الرابعة : رسمة اقترانين

١٣٨) يُمثّل الشكل المجاور مُنحنى الاقتران ق (س) المُعرّف على الفترة [ـ ٢ ، ٣]

اعتمد على الشكل لإيجاد قيمة $\int_{-2}^{3}$ ق (س) د س



الحل :

$$\int_{-2}^{3} \text{ق (س) د س}$$

تحت محور السينات

= مساحة المنطقة ١ ـ مساحة المنطقة ٢ + مساحة المنطقة ٣

$$= \frac{١}{٢} \times ٢ \times ١ - \frac{١}{٢} \times ١ \times ١ + ٢ \times ١$$

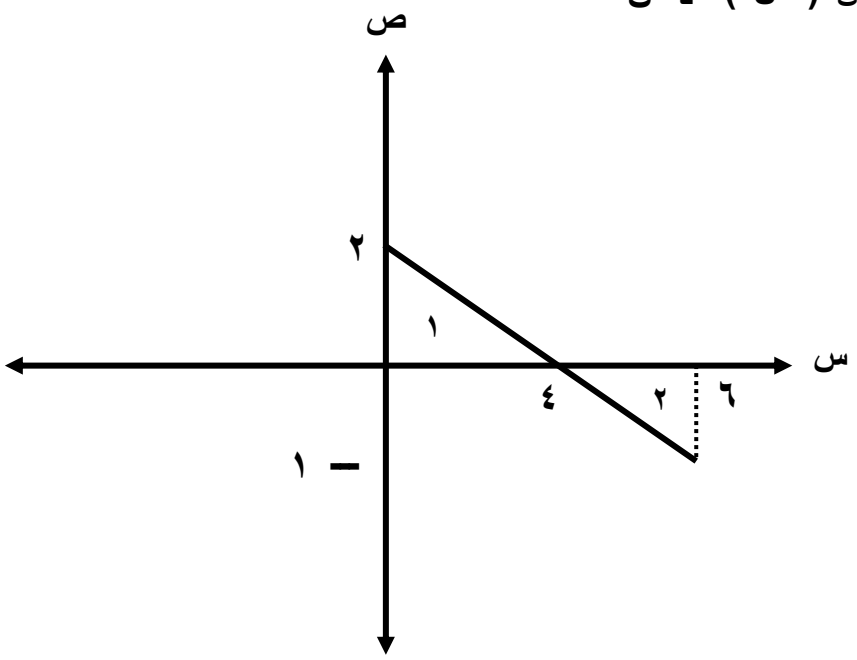
$$= ١ - \frac{١}{٢} + ٢ = ٢ + \frac{١}{٢} = ٢\frac{١}{٢}$$

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × طول القاعدة × الارتفاع

مساحة المستطيل = الطول × العرض

١٣٩) اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثّل مُنحنى الاقتران ق (س) المُعرّف على الف

[٠ ، ٦] ، جد $\int_{٠}^{٦}$ ق (س) د س



الحل :

$\int_{٠}^{٦}$ ق (س) د س

تحت محور السينات

= مساحة المنطقة ١ − مساحة المنطقة ٢

$= \frac{١}{٢} \times ٤ \times ٢ - \frac{١}{٢} \times ٢ \times ١$

= ٤ − ١ = ٣