دولة قطر
وزارة التعليم و التعليم العالي

الرياضيات

الصف الثاني عشر – تأسيسي

الفصل الدراسي الثاني

طبعة تجريبية
العام الدراسي
٢٠١٧-٢٠١٨

التصميم

اسباير للطباعة
ASPIRE PRINTING
Quality on deadline
PO Box: 24598, Doha-Qatar +974 4413 8555 +974 4413 8591
aspireprinting.qa info@aspireprinting.qa

النشيد الوطني

قَسَمًا بِمَنْ رَفَعَ السَّمَـاءْ	قَسَمًا بِمَنْ نَشَرَ الضِّيَـاءْ
قَطَرٌ سَتَبْقَـى حُـرَّةً	تَسْمُو بِرُوحِ الْأَوْفِيَـاءْ
سِيرُوا عَلَـى نَهْجِ الْأُلَـى	وَعَلَـى ضِيَـاءِ الْأَنْبِيَـاءْ
قَطَـرٌ بِقَلْبِـي سِيـرَةٌ	عِـزٌّ وَأَمْـجَادُ الْإِبَـاءْ
قَطَرُ الرِّجَـالِ الْأَوَّلِينَ	حُمَاتُنَا يَـوْمَ النِّـدَاءْ
وَحَمَائِـمُ يَوْمَ السَّلَامِ	جَوَارِحٌ يَـوْمَ الْفِـدَاءْ

لون علم دولة قطر العنابي والأبيض، وتفصل بين اللونين تسعة رؤوس.

الأبيض : هو رمز السلام الذي يسعى له حكام قطر وأبناؤها.

العنابي : يرمز إلى الدماء المتخثرة، وهي دماء الشهداء من أبناء قطر الذين خاضوا معارك كثيرة في سبيل وحدة دولة قطر وخاصة في النصف الأخير من القرن التاسع عشر.

الرؤوس التسعة : ترمز إلى أن دولة قطر هي العضو التاسع في الإمارات المتصالحة من دول الخليج العربية.

علم دولة قطر

رؤية قطر الوطنية ٢٠٣٠ م

تهدف رؤية قطر الوطنية ٢٠٣٠م - التي تمت المصادقة عليها بموجب القرار الأميري رقم ٤٤ لسنة ٢٠٠٨م - إلى تحويل قطر بحلول عام ٢٠٣٠م إلى دولة متقدمة، قادرة على تحقيق التنمية المُستدامة، وعلى تأمين استمرار العيش الكريم لشعبها جيلًا بعد جيل؛ حيث تحدد الرؤية الوطنية لدولة قطر النتائج التي يسعى البلد لتحقيقها على المدى الطويل، كما أنها توفر إطارًا عامًّا لتطوير استراتيجيات وطنية شاملة وخطط تنفيذها.

وتستشرف الرؤية الوطنية الآفاق التنموية من خلال الركائز الأربع المترابطة الآتية:

التنمية البشرية	التنمية الاجتماعية	التنمية الاقتصادية	التنمية البيئية

الركيزة الأولى - التنمية البشرية:

الغايات المستهدفة:

سكان متعلمون:

- نظام تعليمي يرقى إلى مستوى الأنظمة التعليمية العالمية المتميزة، ويُزَوِّد المواطنين بما يفي بحاجاتهم وحاجات المجتمع القطري، ويتضمن:
  - مناهج تعليم وبرامج تدريب تستجيب لحاجات سوق العمل الحالية والمستقبلية.
  - فرصًا تعليمية وتدريبية عالية الجودة تتناسب مع طموحات وقدرات كل فرد.
  - برامج تعليم مستمرة مدى الحياة ومتاحة للجميع.
- شبكة وطنية للتعليم النظامي وغير النظامي تُزَوِّد الأطفال والشباب القطريين بالمهارات اللازمة والدافعية العالية للمساهمة في بناء مجتمعهم وتقدمه، وتعمل على:
  - ترسيخ قيم وتقاليد المجتمع القطري، والمحافظة على تراثه.
  - تشجيع النشء على الإبداع والابتكار، وتنمية القدرات.
  - غرس روح الانتماء والمواطنة.
  - المشاركة في مجموعة واسعة من النشاطات الثقافية والرياضية.
- مؤسسات تعليمية متطورة ومستقلة تُدار بكفاءة وبشكل ذاتي، ووفق إرشادات مركزية، وتخضع لنظام المساءلة.
- نظام فاعل لتمويل البحث العلمي يقوم على مبدأ الشراكة بين القطاعين العام والخاص، وبالتعاون مع الهيئات الدولية المختصة، ومراكز البحوث العالمية المرموقة.
- دور فاعل دوليًا في مجالات النشاط الثقافي والفكري والبحث العلمي.

الفهرس

الوحدة 5 التحويلات الهندسية

التهيئة للوحدة 5 7
5-1 تحويلات التطابق 8
5-2 التمـــدد 14
5-3 تركيب التحويلات الهندسية 20
5-4 مقياس الرسم 27
5-5 مساقط الأشكال الثلاثية الأبعاد 31
اختبار الوحدة الخامسة 36

الوحدة 6 الدوال الأسية واللوغاريتمية

التهيئة للوحدة 6 41
6-1 الدوال الأسية 43
6-2 اللوغاريتمات 53
6-3 الدوال اللوغاريتمية 59
6-4 تطبيقات على الدوال الأسية واللوغاريتمية 65
اختبار الوحدة السادسة 70

الوحدة 7 القياسات

التهيئة للوحدة 7 73
7-1 مساحة الأشكال غير المنتظمة 74
7-2 حجم المنشور غير المنتظم 81
7-3 القياســات المركـبة 86
اختبار الوحدة السابعة 90

الوحدة 8 الاحتمـــالات

التهيئة للوحدة 8 93
8-1 مقدمة في الاحتمالات 94
8-2 الأحداث المتنافية 102
8-3 الأحداث المركبة 107
8-4 المخاطرة 114
8-5 المحاكاة 117
اختبار الوحدة الثامنة 122

الوحدة 5

التحويلات الهندسية
Geometrical Transformations

أفكار الوحدة

- أرسم صورة شكل هندسي تحت تأثير انعكاس في محور، إزاحة في المستوى الإحداثي، دوران مركزه نقطة الأصل، تمدد مركزه نقطة الأصل.
- أجد تركيب تحويلين هندسيين من نفس النوع أو من نوعين مختلفين.
- أجد مقياس الرسم الخطي وأستعمله لحساب الطول الحقيقي أو الطول على الخريطة.
- أتَعَرَّف وأجد مقياس رسم المساحة واستخدامه لحل مسائل مختلفة.
- أرسم المساقط (العلوي، الجانبي، الأمامي) لأشكال ثلاثية الأبعاد مستقيمة الأضلاع.
- أميز شكلًا ثلاثيًا علمت مساقطه الثلاث.

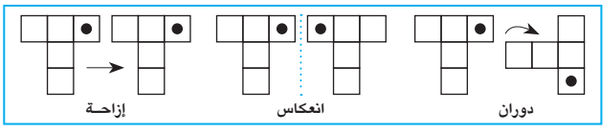
اعتمدت حركة أفلام الكرتون في بدايتها على التحويلات الهندسية البسيطة، قد تكون هذه التحويلات إزاحات متكررة أو دوران أو تمدد أو تركيب لأكثر من تحويل هندسي واحد لتبدو لنا الشخصيات وكأنها تنبض بالحياة، كما أن التحويلات الهندسية لها أهمية بالغة في الحياة العامة والعمل في مجال تصميم الجرافيكس والتصميمات ثلاثية الأبعاد لأنها تعتمد على المفاهيم الأولية للانتقال.

تهيئة الوحدة الخامسة

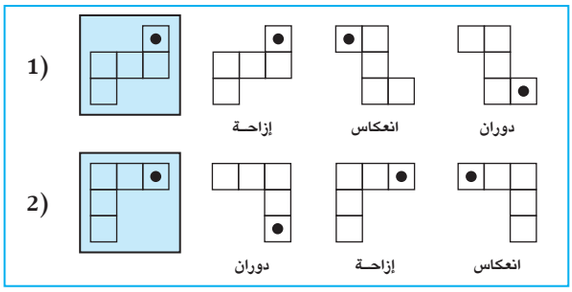
مراجعة

مثال 1 :

استخدم المفتاح أدناه:



للتعرف على نوع التحويل الهندسي لكل مما يلي:



مثال 2 :

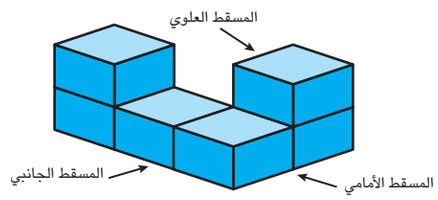
يستعمل مهندس معماري مسطرة خاصة لرسم التصاميم والمخططات إذا كان عرض الصالة على المخطط 2 cm وعرضها في الواقع 6 m فأوجد مقياس رسم المخطط.

عرض الصالة على المخطط 2 cm وعرضها في الواقع 6 m إذن مقياس رسم المخطط:

$\frac{2cm}{6m}$ أي $\frac{1cm}{3m}$ إذن مقياس رسم المخطط 1 cm : 3 m

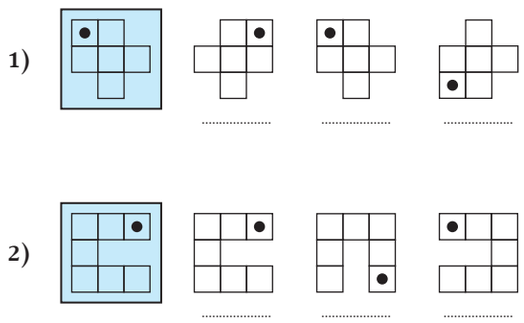
مثال 3 :

ارسم المساقط (العلوي والأمامي والجانبي) للشكل الثلاثي الأبعاد أدناه:



اختبار

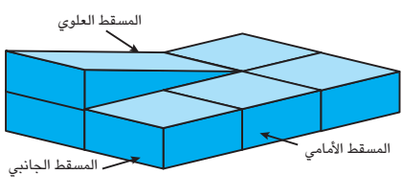
بالرجوع للمثال 1 حدد نوع التحويل الهندسي لكل مما يلي:



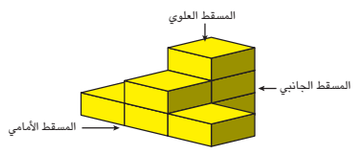
قيست المسافة بين مدينتين على خريطة فكانت المسافة 5.5 cm إذا كانت المسافة الحقيقية بين المدينتين 82.5 km، فما مقياس رسم الخريطة.

ارسم المساقط (العلوي والأمامي والجانبي) للأشكال الثلاثية الأبعاد أدناه:

1)



2)



5-1 تحويـــلات التطـــابق
Congruent Transformations

أفكار الدرس

- ارسـم صورة شـكل بالانعكاس حـول مسـتقيم في المسـتوى الإحداثي.
- ارسـم صـورة شـكل ناتجة عن إزاحة في المستوى الإحداثي.
- ارسم صورة شكلين يدوران حول الأصل.

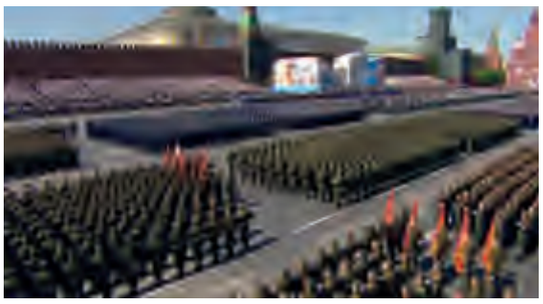
المعايير:

12F.7.1
12F.7.3

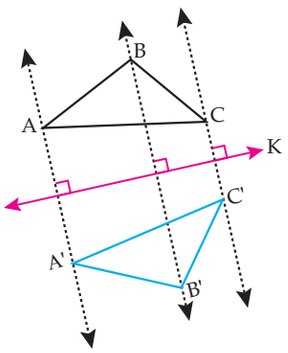
المصطلحات:

- الانعكاس
  reflection
- محور الانعكاس
  line of reflection
- الإزاحة
  translation
- الدوران
  rotation
- زاوية الدوران
  angle of rotation
- مركز الدوران
  center of rotation
- تحويلات تطابق
  congruent transformations

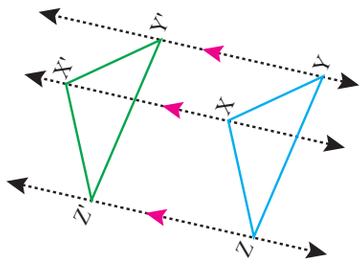
تمهيد



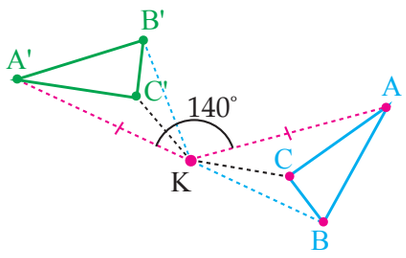
تعتبـر فرق العروض العسـكرية عنصرًا مهما، فـي الاحتفـالات الوطنيـة تزيدها بهجـة وبهـاء، وتخضع معظـم حركات أعضاء تلـك الفرق لما يعرف بالهندسـة بالإزاحة، حيث يحكمها اتجاه حركة وعدد خطوات محددين، أو دوران بزاوية ما، من أجل عمل تشكيلات حركية مدروسة بدقة.



تعلمت سـابقا أن **الانعكاس** reflection تحويل هندسـي يقلـب الشـكل حول مسـتقيم يسـمى **محـور الانعـكاس** line of reflection، بحيث يكـون كلٌ مِن بُعـد النقطـة وبُعـد صورتها عن محور الانعكاس متساويين.



وكـذلك تعلـمـت أن **الإزاحـــة** translation تحويل هندسـي ينقل الشكل من موقع إلى آخر دون تدويره، حيث يتم نقل جميع نقاط الشـكل المسافة نفسها، وفي الاتجاه نفسه.



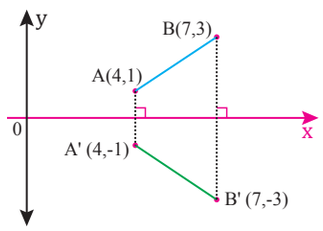
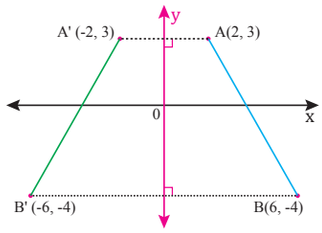
كمـا تعلمـت أيضـا أن **الـدوران** rotation تحويل هندسـي، يحرك كل نقطة في الشكل الأصلي **بزاوية دوران** angle of rotation معينـة، وفي اتجاه محدد حـول نقطة ثابتة تسمى **مركز الدوران** center of rotation.

نلاحظ أن صورة كل شكل تحت تأثير التحويلات الهندسية أعلاه مطابقة للشكل الأصلي، وعليه فإن كلا من التحويلات الهندسية: الانعكاس والإزاحة والدوران تعتبر **تحويلات تطابق** congruent transformations؛ لأن صورة كل شكل في كل تحويل منها مطابقة للشكل الأصلي.

والآن ستتعلم كيفية رسم صورة شكل تحت تأثير كل من التحويلات الهندسية التالية: الانعكاس، الإزاحة، الدوران في المستوى الإحداثي وفق قاعدة رياضية محددة.

الانعكاس في المستوى الإحداثي: يمكنك رسم صورة انعكاس شكل في المستوى الإحداثي باستعمال قاعدة.

مفهوم — الانعكاس حول المحور x أو المحور y

الانعكاس حول المحور x	الانعكاس حول المحور y
لتعيين صورة النقطة (x, y) بالانعكاس حول المحور x، اضرب الإحداثي y في -1	لتعيين صورة النقطة (x, y) بالانعكاس حول المحور y، اضرب الإحداثي x في -1
أي أن: $(x, y) \rightarrow (x, -y)$	**أي أن:** $(x, y) \rightarrow (-x, y)$
مثال: 	**مثال:** 

مثال 1 : رسم صورة شكل بالانعكاس حول المحور x أو المحور y

أوجد الانعكاس المحدد لكل شكل مما يأتي، ثم مثله وصورته بيانيا:

a) ΔABC الذي إحداثيات رؤوسه هي: A (-5, -3), B (1, -2), C (2, 0) بالانعكاس حول المحور x.

الخطوة 1 : استعمل قاعدة الانعكاس حول المحور x، لإيجاد إحداثيات صورة كل نقطة.

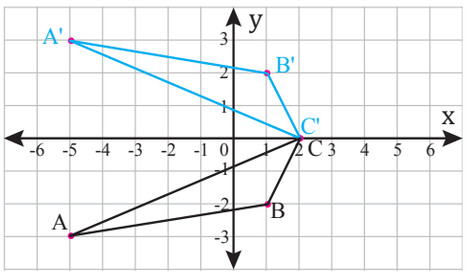
$(x, y) \rightarrow (x, -y)$

A (-5, -3) → A' (-5, 3)

B (1, -2) → B' (1, 2)

C (2, 0) → C' (2, 0)

الخطوة 2 : مثِّل ΔABC وصورته في المستوى الإحداثي



إرشاد

النقاط على محور الانعكاس: النقاط الواقعة على محور الانعكاس هي فقط التي تبقى ثابتة تحت تأثير الانعكاس.

b) متوازي الأضلاع PQRS الذي إحداثيات رؤوسه هي: P(-5, 0), Q(1, 2), R(1, -1), S(-5, -3) بالانعكاس حول المحور y.

الخطوة 1 : استعمل قاعدة الانعكاس حول المحور y، لإيجاد إحداثيات صورة كل نقطة.

$(x, y) \rightarrow (-x, y)$

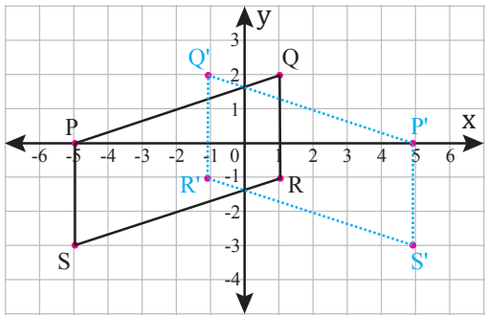
P (-5, 0) → P' (5, 0)

Q (1, 2) → Q' (-1, 2)

R (1, -1) → R' (-1, -1)

S (-5, -3) → C' (5, -3)

الخطوة 2 : مثِّل متوازي الأضلاع PQRS وصورته في المستوى الإحداثي



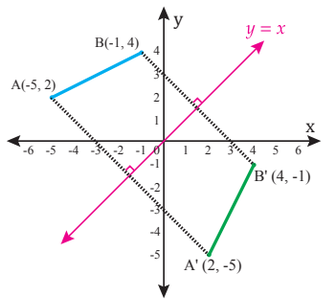
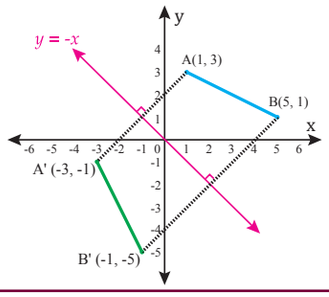
تحقق

أوجد الانعكاس المحدد لكل شكل مما يأتي، ثم مثله وصورته بيانيا:

1A) الشكل الرباعي EFGH الذي إحداثيات رؤوسه هي: E(2, 3), F(4, 2), G(4, -3), H(2, -3) بالانعكاس حول المحور x.

1B) ΔJKL الذي إحداثيات رؤوسه هي: J(0, 3), K(-2, -1) L(1, -1) بالانعكاس حول المحور y.

مفهوم — الانعكاس حول المستقيم $y = x$ أو المستقيم $y = -x$

الانعكاس حول المستقيم $y = x$	الانعكاس حول المستقيم $y = -x$
لتعيين صورة النقطة (x, y)	لتعيين صورة النقطة (x, y)
بالانعكاس حول المستقيم $y = x$ ،	بالانعكاس حول المستقيم $y = -x$ ،
بدل موضعي الإحداثيين x و y	بدل موضعي الإحداثيين x و y
أي أن: $(x, y) \rightarrow (y, x)$	ثم اضرب كلا الإحداثيين في -1
مثال:	أي أن: $(x, y) \rightarrow (-y, -x)$
	مثال: 

مثال 2 : رسم صورة شكل بالانعكاس حول المستقيم $y = x$ أو المستقيم $y = -x$

أوجد الانعكاس المحدد لكل شكل مما يأتي، ثم مثله وصورته بيانيا:

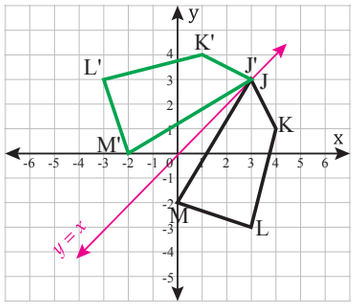
a) الشكل الرباعي JKLM الذي إحداثيات رؤوسه هي: J (3, 3), K (4, 1), L (3, -3), M (0, -2) بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.

الخطوة 1 : استعمل قاعدة الانعكاس حول المحور $y = x$ ،

لإيجاد إحداثيات صورة كل نقطة.

(x, y)	$\rightarrow$	(y, x)
J (3, 3)	$\rightarrow$	J' (3, 3)
K (4, 1)	$\rightarrow$	K' (1, 4)
L (3, -3)	$\rightarrow$	L' (-3, 3)
M (0, -2)	$\rightarrow$	M' (-2, 0)

الخطوة 2 : مثل الشكل الرباعي JKLM وصورته في المستوى الإحداثي.



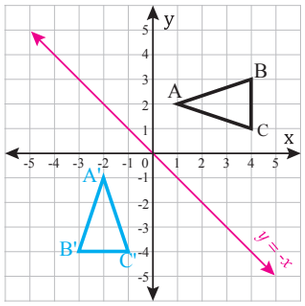
b) ΔABC الذي إحداثيات رؤوسه هي: A (1, 2), B (4, 3), C (4, 1) بالانعكاس حول المستقيم $y = -x$.

الخطوة 1 : استعمل قاعدة الانعكاس حول المحور $y = -x$،

لإيجاد إحداثيات صورة كل نقطة.

(x, y)	$\rightarrow$	$(-y, -x)$
A (1, 2)	$\rightarrow$	A' (-2, -1)
B (4, 3)	$\rightarrow$	B' (-3, -4)
C (4, 1)	$\rightarrow$	C' (-1, -4)

الخطوة 2 : مثل ΔABC وصورته في المستوى الإحداثي.



تحقق

أوجد الانعكاس المحدد لكل شكل مما يأتي، ثم مثله وصورته بيانيا:

2A) ΔBCD الذي إحداثيات رؤوسه هي: B (0, 0), C (1, 2), D (1, -2) بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.

2B) الشكل الرباعي ABCD الذي إحداثيات رؤوسه هي: A (-4, -1), B (-1, -1), C (-2, -3), D (-3, -3) بالانعكاس حول المستقيم $y = -x$.

الإزاحة في المستوى الإحداثي: يمكن رسم الإزاحات في المستوى الإحداثي، إذا علمنا مقدار الإزاحة واتجاهها أفقيًا أو رأسيا، فإذا رمزنا للمسافة الأفقية من النقطة الأصلية إلى صورتها بالرمز a ، وللمسافة الرأسية من النقطة الأصلية إلى صورتها بالرمز b ، فإنه يمكن التعبير عن هذه الإزاحة بالقاعدة: $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$، أو بمتجه الإزاحة $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$، ويمكن استعمال هذه القاعدة أو المتجه لإجراء إزاحة للشكل في المستوى الإحداثي.

إرشاد

الإزاحة الأفقية والإزاحة الرأسية:

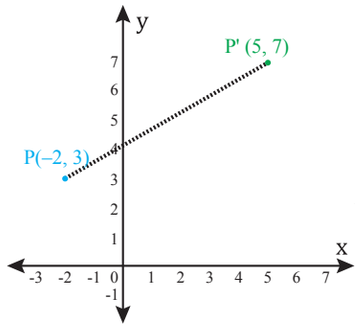
عندما تكون $b = 0$ ، تكون الإزاحة أفقية فقط، وعندما تكون $a = 0$ ، تكون الإزاحة رأسية فقط.

مفهوم الإزاحة في المستوى الإحداثي

لإزاحة النقطة (x, y) وفق متجه الإزاحة $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$، اجمع a إلى الإحداثي x، و b إلى الإحداثي y .

أي أن: $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$

مثال: إذا كان متجه الإزاحة $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$، فإن صورة النقطة $P(-2, 3)$ الناتجة من هذه الإزاحة $P'(5, 7)$



مثال 3 : رسم صورة شكل تحت تأثير إزاحة

أوجد الإزاحة المحددة لكل شكل مما يأتي، ثم مثِّل الشكل وصورته بيانيا:

a) ΔEFG الذي إحداثيات رؤوسه هي: E (-2, -1), G (-2, -5) F (-5, -5) وفق متجه الإزاحة $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

الخطوة 1 : استعمل قاعدة الإزاحة؛ لإيجاد إحداثيات صورة كل نقطة.

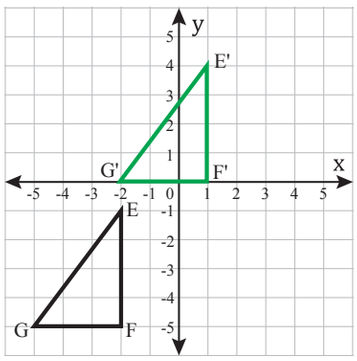
$(x, y) \rightarrow (x+3, y+5)$

E (-2, -1) → E' (1, 4)

F (-2, -5) → F' (1, 0)

G (-5, -5) → G' (-2, 0)

الخطوة 2 : مثِّل بيانيا ΔEFG وصورته في المستوى الإحداثي.



b) المربع JKLM الذي إحداثيات رؤوسه هي: J (0, 0), K (2, 2), L (4, 0), M (2, -2) وفق قاعدة الإزاحة $(x, y) \rightarrow (x - 4, y - 1)$.

الخطوة 1 : استعمل قاعدة الإزاحة؛ لإيجاد إحداثيات صورة كل نقطة.

$(x, y) \rightarrow (x - 4, y - 1)$

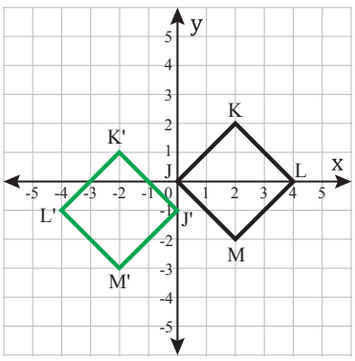
J (0, 0) → J' (-4, -1)

K (2, 2) → K' (-2, 1)

L (4, 0) → L' (0, -1)

M (2, -2) → M' (-2, -3)

الخطوة 2 : مثل المربع JKLM وصورته في المستوى الإحداثي.



تحقق

أوجد الإزاحة المحددة لكل شكل مما يأتي، ثم مثله وصورته بيانيا:

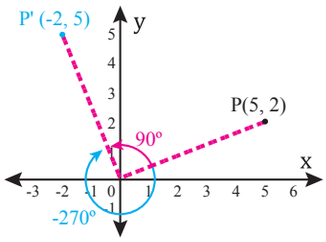
3A) ΔJKL الذي إحداثيات رؤوسه هي: A(3, 1), B(2, 4), C(-2, -1) ، وفق متجه الإزاحة $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

3B) الشكل الرباعي QRST الذي إحداثيات رؤوسه هي: Q(2, 2), R(-2, 2), S(0, 0), T(3, 0) وفق قاعدة الإزاحة $(x, y) \rightarrow (x + 2, y - 1)$.

الـدوران في المسـتوى الإحداثي: القواعد التالية يمكن اسـتخدامها لتحديد صورة نقطة مـا، تحت تأثير دوران بزاوية 90^0 أو 180^0 أو 270^0 مع أوعكس اتجاه عقارب الساعة باعتبار نقطة الأصل مركز الدوران.

مفهوم — الدوران في المستوى الإحداثي

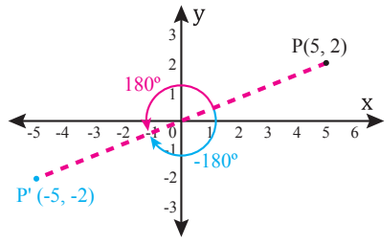
الدوران بزاوية 90°



عند تدوير النقطة (x, y) بزاوية 90° عكس اتجاه حركة عقارب الساعة، أو 270° في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب الإحداثي y في -1 ، ثم بدل موقعي الإحداثيين x, y .

أي أن: $(x, y) \rightarrow (-y, x)$

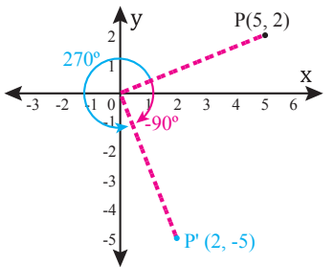
الدوران بزاوية 180°



عند تدوير النقطة (x, y) بزاوية 180° عكس اتجاه حركة عقارب الساعة، أو 180° في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب كلا من الإحداثيين x, y في -1

أي أن: $(x, y) \rightarrow (-y, -x)$

الدوران بزاوية 270°



عند تدوير النقطة (x, y) بزاوية 270° عكس اتجاه حركة عقارب الساعة، أو 90° في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب الإحداثي x في -1 ، ثم بدل موقعي الإحداثيين x, y .

أي أن: $(x, y) \rightarrow (y, -x)$

إرشـاد

الدوران في اتجاه حركة عقارب الساعة:

يشـير قياس زاوية الـدوران السـالب إلى أن الـدوران في اتجاه حركة عقارب الساعة.

مثال 4 : رسم صورة شكل تحت تأثير الدوران في المستوى الإحداثي

أوجـد دوران المثلـث PQR الـذي إحداثيات رؤوسـه هـي: P(-2, 2), Q(-4, 2) R(-1, 4) حـول نقطة الأصل وبزاوية 90° ، ثم مثل المثلث وصورته بيانيا.

الخطوة 1 : استعمل قاعدة الدوران بزاوية 90°

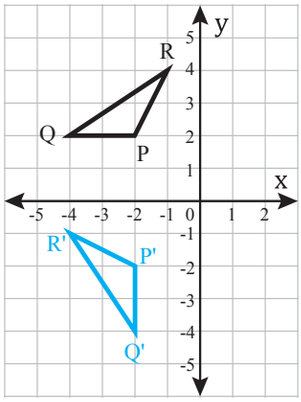
$(x, y) \rightarrow (-y, x)$

P (-2, 2) → P' (-2, -2)

Q (-4, 2) → Q' (-2, -4)

R (-1, 4) → R' (-4, -1)

الخطوة 2 : مثِّل ΔPQR وصورته ΔP'Q'R' في المستوى الإحداثي.



إرشـاد

الدوان بزاوية 360°:

الـدوران بزاويـة 360° حـول نقطـة مـا يعيـد الشـكل إلى وضعه الأصلي.

تحقق

4) أوجد دوران متوازي الأضلاع FGHJ الذي إحداثيات رؤوسه هي: F(1, 1), G(2, 2), H(-2, 2), J(-3, 1) حول نقطة الأصل وبزاوية 180° ، ثم مثل متوازي الأضلاع وصورته بيانيا.

تمارين 1-5

مثال 1،2

اختر الإجابة الصحيحة للأسئلة 1-2

1) ما الانعكاس الذي ينقل النقطة A (2, -5) إلى A' (-5, 2) ؟

A انعكاس حول المحور x **C** انعكاس حول المستقيم $y = x$

B انعكاس حول المحور y **D** انعكاس حول المستقيم $y = -x$

2) أوجد صورة النقطة B (3, -2) حول المستقيم $y = -x$

A B' (-2, 3) **B** B' (-2, -3) **C** B' (2, -3) **D** B' (-3, 2)

أوجد الانعكاس المحدد لكل شكل مما يأتي، ثم مثله وصورته بيانيا:

3) ΔXYZ الذي إحداثيات رؤوسه هي: X (3, 2), Y (4, 0), Z (2, -2) بالانعكاس حول المحور y .

4) QRST رباعي إحداثيات رؤوسه هي: Q (-1, 3), R (1, 3), S (3, 1), T (-3, -1) بالانعكاس حول المحور x.

5) الشكل الرباعي JKLM الذي إحداثيات رؤوسه هي: J (0, 5), K (3, 3), L (0, -5), M (-3, -3) بالانعكاس حول المحور $y = x$.

مثال 3

اختر الإجابة الصحيحة للأسئلة 6-7

6) أوجد صورة النقطة A (3, 7) بالإزاحة وفق متجه الإزاحة $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

A A' (-7, -5) **B** A' (-1, 9) **C** A' (7, 5) **D** A' (1, -9)

7) ما صورة النقطة A (-4, 7) بالإزاحة التي قاعدتها $(x, y) \rightarrow (x + 3, y - 5)$ ؟

A A' (-1, 2) **B** A' (-1, 12) **C** A' (-7, 2) **D** A' (-7, 12)

أوجد الإزاحة المحددة لكل شكل مما يأتي، ثم مثله وصورته بيانيا:

8) شبه المنحرف JKLM الذي إحداثيات رؤوسه هي: J (-2, 2), K (2, 2), L (4, -2) M (-4, -2) وفق متجه الإزاحة $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

9) ΔDFG الذي إحداثيات رؤوسه هي: D (-1, 3), F (-5, 2) G (-3, -1) وفق متجه الإزاحة $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

مثال 4

أوجد الدوران المحدد لكل شكل مما يأتي، ثم مثل الشكل وصورته بيانيا:

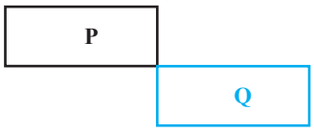
10) المعين WXYZ الذي إحداثيات رؤوسه هي: W (-4, 0), X (0, 4), Y (4, 0) Z (0, -4) حول نقطة الأصل وبزاوية 90°.

11) ΔFGH الذي إحداثيات رؤوسه هي: F (0, 0), G (-3, 1) H (-1, 3) حول نقطة الأصل وبزاوية 180°.

12) متوازي الأضلاع MPQV الذي إحداثيات رؤوسه هي: M (-4, 0), P (-3, 4), Q (-1, 4) V (-2, 0) حول نقطة الأصل وبزاوية 270°.

13) يبين الرسم المجاور مستطيلين Q, P.

المستطيل Q لا يمكن الحصول عليه من المستطيل P من خلال:



A الانعكاس حول محور.

B دوران.

C إزاحة.

مسائل مهارات التفكير العليا

14) هل تبقى نقطة ثابتة في الدوران ؟ فسر إجابتك.

15) ارسم شكلا في المستوى الإحداثي بحيث يكون موقع صورته الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم $x = 3$ منطبقا على الشكل نفسه، وضح الشروط التي تلزم لتحقيق ذلك؟

5-2

التمـــدد
Dilation

أفكار الدرس

- اتعرف مفهوم التمدد.
- ارسم صورة ناتجة عن التمدد في المستوى الاحداثي.
- اجد معامل التمدد.

المعايير:

12F.7.1

المصطلحات:

- التمدد
  dilation
- معامل التمدد
  scale factor of dilation

تمهيد

لا زال بعض المصورين المحترفين يفضل الكاميرات التقليدية التي تحول الفيلم المصور إلى شـريط سـلبي للصـور (نيجاتيف)، ومنه يتم طباعة صور بقياسـات مختلفة وفق تكبيـر أو تصغير بمعامل محدد، وفي كل من الحالتين يسمى تمددا.

التمدد dilation: تحويل هندسـي يكبر الشـكل أو يصغره بنسبة محددة هي نسبة أطوال أبعاد الصورة إلى أطوال الأبعاد المناظرة لها في الشكل الأصلي.

وتسـمى هذه النسـبة **معامل التمدد** scale factor of dilation، والصورة الناتجة عن التمدد تشـبه الشكل الأصلي، ويتم تحديد التمدد بمعرفة مركز ومعامل التمدد الذي سنرمز له بالرمز (k)، ومعامل التمدد يحدد ما إذا كان التمدد تكبيرا، أو تصغيرا أو تحويل تطابق.

مفهوم

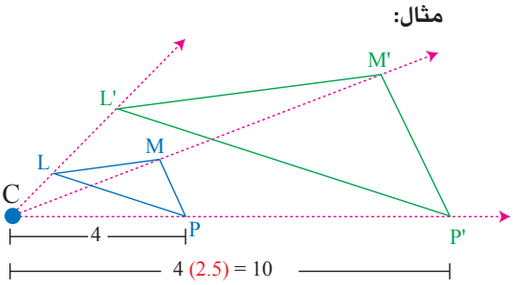
التمـــــــدد

هـو تحويل هندسـي يكبر الشـكل أو يصغـره بنسـبة محددة تسـمى معامـل التمدد، ويتـم تحديد التمدد بمعرفة مركزه ومعامله (k).

إذا كان $\Delta L'M'P'$ ناتجـا عن تمدد ΔLMP الذي مركزه C ، معامله k، فإن:

$$CL' = k\,(CL)$$
$$CM' = k\,(CM)$$
$$CP' = k\,(CP)$$

مثال:



$\Delta L'M'P'$ هو صورة ΔLMP الناتجة عن التمدد الذي مركزه C ، ومعامله 2.5

للتمدد حالات من حيث التكبير والتصغير وموقع الصورة بالنسبة للشكل الأصلي، والذي يحدد ذلك معامل التمدد.

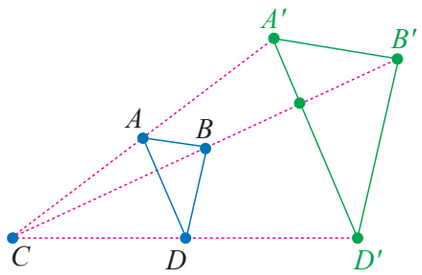
إرشـاد

- **إذا كانت $|k| = 1$**
  فإن التمدد تحويل تطابق
- **إذا كانت $|k| > 1$**
  فإن التمدد تكبير
- **إذا كانت $|k| < 1$**
  فإن التمدد تصغير

حالات التمدد:

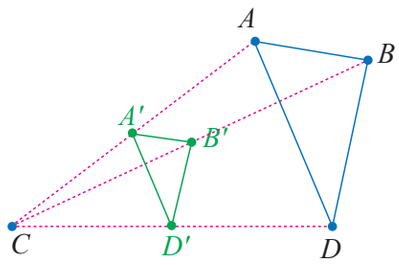
أولا : إذا كان $k > 0$ فإن صورة الشكل تكون في نفس جهة الشكل الأصلي بالنسبة لمركز التمدد:

- $k > 1$ يكون التمدد تكبيرًا



k = 1.5

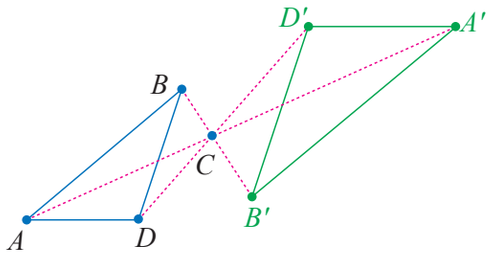
- $0 < k < 1$ يكون التمدد تصغيرًا



k = 0.5

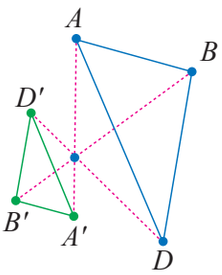
ثانيًا : إذا كان $k < 0$ فإن صورة الشكل الناتج تكون في الجهة المقابلة للشكل الأصلي بالنسبة لمركز التمدد:

- $k < -1$ يكون التمدد تكبيرًا



k = 1.25

- $-1 < k < 0$ يكون التمدد تصغيرًا



k = -0.5

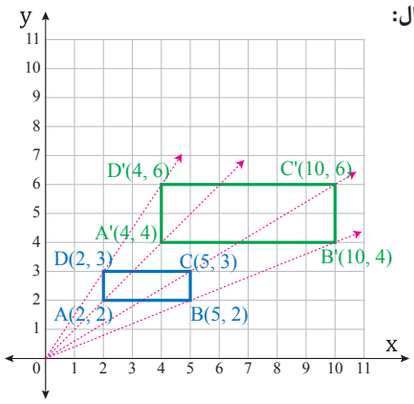
التمدد في المستوى الإحداثي: يمكننا استعمال القاعدة الآتية في رسم الصورة الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل على المستوى الإحداثي.

مفهوم — التمدد في المستوى الإحداثي

لتعيين صورة النقطة (x, y) الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله k ، اضرب الإحداثيين x, y في معامل التمدد k .

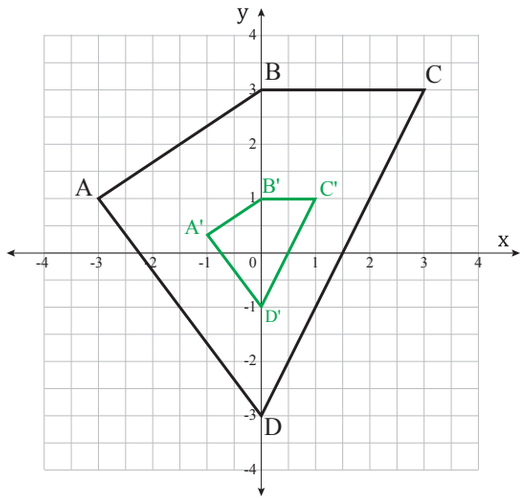
أي أن: $(x, y) \rightarrow (k\,x, k\,y)$

مثال:



مثال 1 : رسم التمدد في المستوى الإحداثي

a) أوجد التمدد الذي مركزه هو نقطة الأصل ومعامله $\frac{1}{3}$ للشكل $ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: A (-3, 1), B (0, 3), C (3, 3), D (0, -3) ، ثم مثله وصورته بيانيا.



الخطوة 1 : أوجد إحداثيات صورة كل نقطة

$$(x, y) \rightarrow (\tfrac{1}{3}x, \tfrac{1}{3}y)$$

$A\,(-3, 1) \rightarrow A'(-1, \frac{1}{3})$

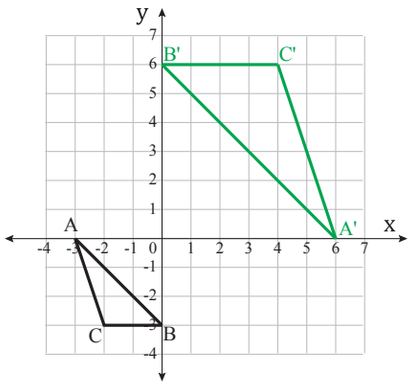
$B\,(0, 3) \rightarrow B'(0, 1)$

$C\,(3, 3) \rightarrow C'(1, 1)$

$D\,(0, -3) \rightarrow D'(0, -1)$

الخطوة 2 : عين النقاط وصورها على المستوى الإحداثي، ثم مثل الشكل وصورته كما في الشكل المقابل.

b) مثل ΔABC الذي رؤوسه هي: A(-3, 0), B(0, -3), C(-2, -3) ، ثم أوجد صورته بتمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله -2



الخطوة 1 : أوجد إحداثيات صورة كل نقطة

$A\,(-3, 0) \rightarrow A'(6, 0)$

$B\,(0, -3) \rightarrow B'(0, 6)$

$C\,(-2, -3) \rightarrow C'(4, 6)$

الخطوة 2 : عين النقاط وصورها على المستوى الإحداثي كما في الشكل المجاور.

تحقق

1) عين صورة الشكل الهندسي الذي رؤوسه A (0, 1), B(0, 3), C (3, 1), D (2, 0) ، بالتمدد الذي معامله:

a) $k = 3$ **b) $k = 0.5$**

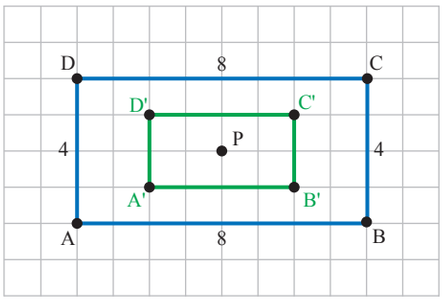
معامل التمدد: عندما يكون الشــكل وصورته مرســومين بتمدد ما، فإنه يمكنك تحديد نوع التمدد من خلال معامله، الذي يمكن إيجاده بالعلاقة:

$$k = \frac{\text{طول أبعاد صورة الشكل}}{\text{الطول المناظر له في الشكل الأصلي}}$$

مثال 2 : إيجاد معامل التمدد

أوجد معامل التمدد الذي مركزه P لكل مما يأتي، ثم حدد ما إذا كان التمدد تكبيرا أم تصغيرا:

a)



بما أن صورة الشكل في نفس اتجاه الشكل الأصلي بالنسبة لمركز التمدد P، فإن إشارة معامل التمدد موجبة.

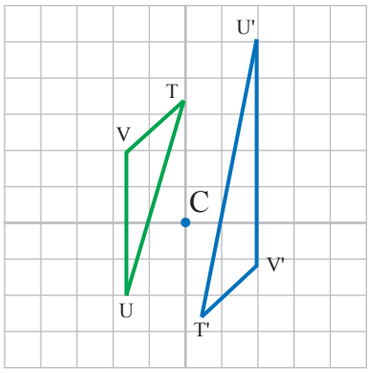
معامل التمدد: $k = \frac{\text{طول أبعاد صورة الشكل}}{\text{الطول المناظر له في الشكل الأصلي}}$

نسبة طولي قطعتين متناظرتين: $= \frac{A'B'}{AB}$

عوض وبسط $= \frac{2 \text{ units}}{4 \text{ units}} = \frac{1}{2}$

وبما أن $|k| < 1$ فالتمدد تصغير.

b)



بما أن صورة الشــكل عكس اتجاه الشكل الأصلي بالنسبة لمركز التمدد C، فإن إشارة معامل التمدد سالبة.

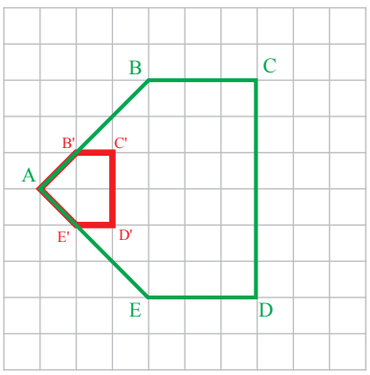
معامل التمدد: $k = -\frac{\text{طول أبعاد صورة الشكل}}{\text{الطول المناظر له في الشكل الأصلي}}$

نسبة طولي قطعتين متناظرتين: $= -\frac{U'V'}{UV}$

عوض وبسط $= -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$

وبما أن $|k| > 1$ فالتمدد تكبير.

تحقق



2) في الشكل المجاور، الشكل $A'B'C'D'E'$ هو صورة الشكل $ABCDE$ الناتجة عن تمدد مركزه النقطة A ، أوجد معامل هذا التمدد، ثم بين ما إذا كان التمدد تكبيرا أم تصغيرا.

تمارين 5-2

مثال 1

1)مثل المضلع المعطاة إحداثيات رؤوسه بيانيا، ثم مثل صورته الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل، ومعامله العدد k المحدد في كل مما يأتي:

a) $V(-3, 2), Z(-3, 3), X(4, 2.5), W(2, 1), k = 2.5$

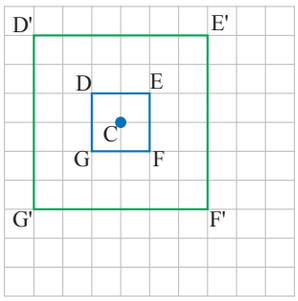
b) $H(-3, 3), J(6, 3), K(6, -6), L(-12, -9), k = \frac{1}{3}$

c) $A(4, 3), B(4, -2), C(-3, -2), k = -2$

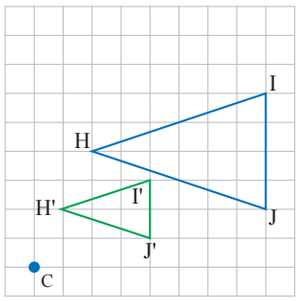
مثال 2

2) أوجد معامل التمدد الذي مركزه C لكل مما يأتي، ثم حدد ما إذا كان التمدد تكبيرا أم تصغيرا:

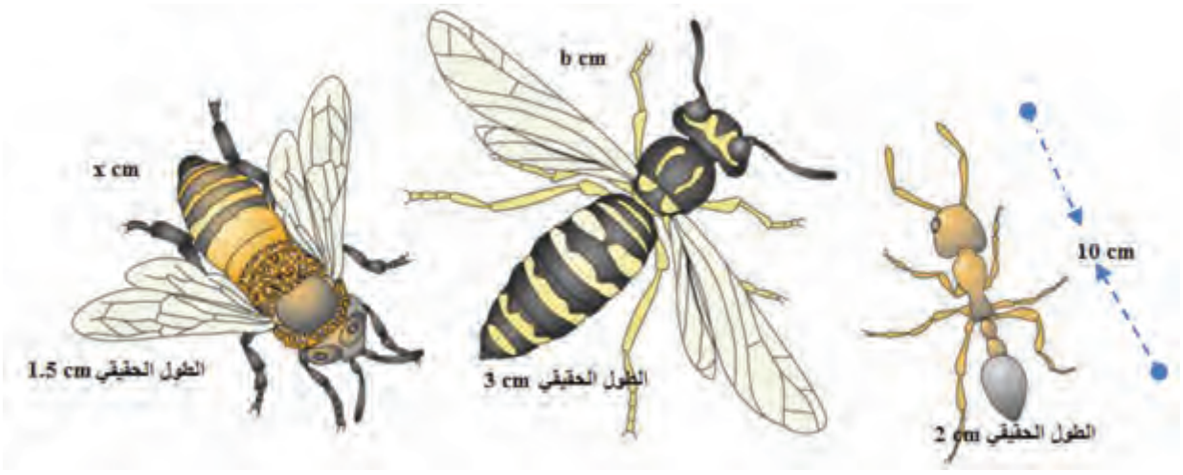
a)



b)



3) في أحد المعالم المدرسية قامت مجموعة من الطلاب بعمل جدارية لبعض الحشرات بنفس معامل التكبير.
أوجد قيمة x , b والتي تمثل الطول على الجدارية للحشرتين في الصورة أدناه:

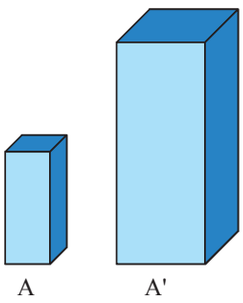


4) الشكل المجاور يوضح تمددًا لشبه مكعب A، مركزه P :

a) قدر معامل التمدد بين أبعاد الشكلين ؟

b) وضح هل التمدد تصغير أم تكبير؟

c) حدد مركز التمدد P بالرسم ؟



مسائل مهارات التفكير العليا

4) حدد أي الحالات التالية من التمدد تكون الصورة فيها تنطبق على الأصل ، أو مشابهة للأصل ، أو مساوية للأصل:

a) تمدد معامل -1

b) تمدد معامل 2.5

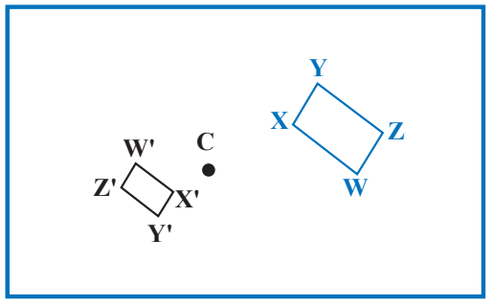
c) تمدد معامل $-\frac{1}{3}$

d) تمدد معامل 1

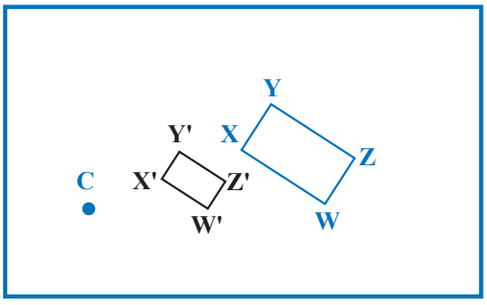
5) ناقش صحة هذه العبارة: «كل تمدد هو تحويل تطابق».

6) يمثل كل من علي وطلال صورة الشكل الرباعي $WXYZ$ تحت تأثير تمدد بمعامل سالب، أي منهما إجابته صحيحة؟ فسر إجابتك.

علي



طلال



5-3 تركيب التحويلات الهندسية
Composition of Transformation

أفكار الدرس

- ارسم صورة شكل هندسي ناتجة عن تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين أو مستقيمين متقاطعين
- ارسم صورة شكل هندسي ناتجة من تركيب دورانين حول نفس المركز
- ارسم صورة شكل هندسي ناتجة من تركيب تمددين
- ارسم صورة شكل هندسي ناتجة من تركيب تحويلين هندسيين مختلفين.

المعايير:

12F.7.1

المصطلحات:

- التحويل الهندسي المركب
composite transformation

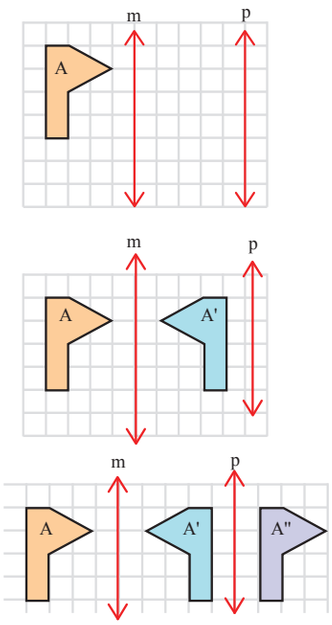
تمهيد

عند عرض لشريط بالحركة البطيئة يوضح موضع فراشة خلال فترة زمنية ما، كما في الصورة المجاورة، التي توضح أن موضع الفراشة عند A هو نتاج لعدة تحويلات هندسية متتالية للفراشة من الموضع B .

عند إجراء تحويل هندسي على شكل ما، ثم إجراء تحويل هندسي آخر على صورته الناتجة من التحويل الأول، فإن التحويل الهندسي الذي نقل الشكل الأصلي لصورته النهائية هو تركيب لتحويلين هندسيين، ويسمى **تحويلا هندسيا مركبا** composite transformation.

أولاً: تركيب انعكاسين حول مستقيمين :

تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين:



نشاط

ارسم صورة الشكل A الناتجة عن انعكاس حول المستقيم m ، ثم حول المستقيم p ، ثم صف تحويلا هندسيا واحدا ينقل A إلى "A

الخطوة 1 : ارسم صورة الشكل A الناتجة عن انعكاس حول المستقيم m.

الخطوة 2 : ارسم صورة الشكل 'A الناتجة عن انعكاس حول المستقيم p .

من الرسم الناتج يمكن وصف تركيب الانعكاسين المتتاليين حول المستقيم m ثم المستقيم p أنه يكافئ إزاحة أفقية إلى اليمين مقدارها 10 وحدات أي ضعف المسافة بين المستقيمين m, p

وهذا يتفق مع النظرية التالية:

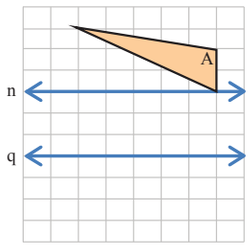
نظرية 1

تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين

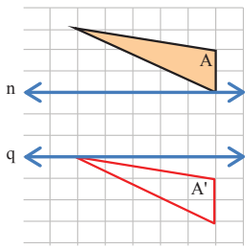
تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين يكافئ إزاحة اتجاهها عمودي على المستقيمين،ومقدارها مثلي المسافة بين المستقيمين.

مثال 1 : رسم تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين

صف تحويلا هندسيا واحدا يكافئ الانعكاسين للشكل A حول المستقيمين n ثم q ، ومن ثم ارسم صورته الناتجة عن الانعكاس حولهما.



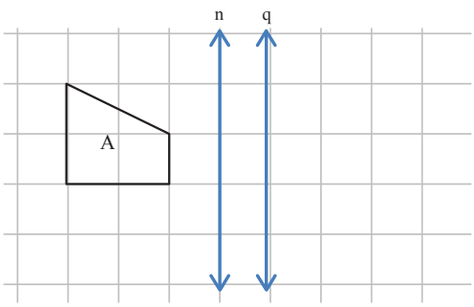
الخطوة 1 : نحدد التحويل الهندسي المكافئ بناء على النظرية السابقة فإن تركيب الانعكاسين حول المستقيم n ثم q ، يكافئ إزاحة اتجاهها عمودي عليهما ومقدارها ضعف المسافة بينهما وتساوي 6 وحدات.



الخطوة 2 : ارسم صورة الشكل A بالإزاحة.

تحقق

1) صف تحويلا هندسيا واحدا يكافئ انعكاس شكل A حول المستقيمين n ثم q ، ومن ثم ارسم صورته الناتجة عن الانعكاس حولهما.



بنفس الطريقة المتبعة في النشاط السابق للنظرية 1 يمكننا التوصل لجميع النظريات اللاحقة.

تركيب انعكاسين حول مستقيمين متقاطعين:

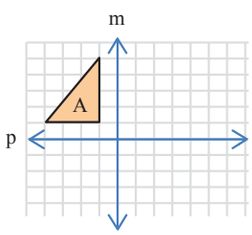
نظرية 2

تركيب انعكاسين حول مستقيمين متقاطعين

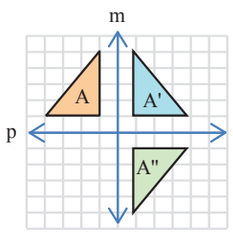
تركيب انعكاسين حول مستقيمين متقاطعين يكافئ دورانا، مركزه نقطة تقاطع المستقيمين وقياس زاويته ضعف قياس الزاوية الحادة أو القائمة بين المستقيمين.

مثال 2 : رسم تركيب انعكاسين حول مستقيمين متوازيين

ارسم صورة الشكل A بالانعكاس حول المستقيم m ، ثم حول المستقيم p ، باستخدام تحويلٍ هندسيٍ واحدٍ يكافئ الانعكاس حول المستقيمين.

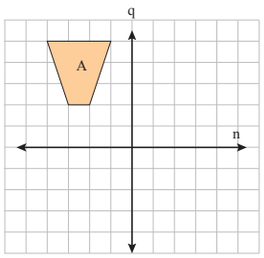


الخطوة 1 : من النظرية 2، يمكن وصف تركيب الانعكاسين المتتاليين حول المستقيم m ثم المستقيم p أنه يكافئ دورانا باتجاه عقارب الساعة بزاوية مقدارها $90^\circ \times 2 = 180^\circ$ حول نقطة تقاطع المستقيمين m, p .



الخطوة 2 : ارسم الشكل A" الناتج من الدوران.

تحقق



2) ارسم صورة الشكل A الناتجة من انعكاس حول المستقيمين n ثم q ، ومن ثم صف تحويلا هندسيا واحدا يكافئ الانعكاس حول المستقيمين n, q.

ثانيا: تركيب دورانين حول نفس المركز:

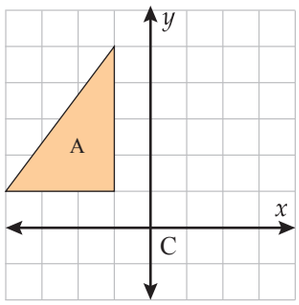
نظرية 3

تركيب دورانين حول نفس المركز

تركيب دورانين حول نفس المركز، يكافئ دورانا حول نفس المركز وبزاوية تساوي مجموع زاويتي الدورانين.

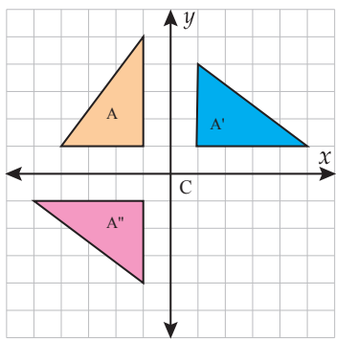
مثال 3 : تركيب دورانين حول نفس المركز

صف تحويلا هندسيا واحدا يكافئ الدورانين المتتاليين الأول بزاوية 90^o , ثم زاوية 180^o في اتجاه عقارب الساعة، حول المركز C ثم ارسم صورة الشكل A تحت تأثير التحويل المكافئ.



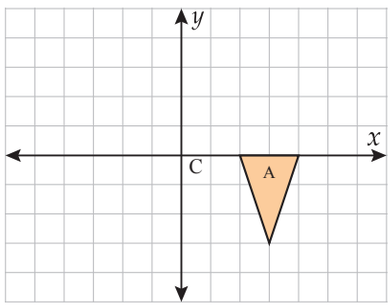
الخطوة 1 : بناء على النظرية أعلاه، يمكن وصف تركيب الدورانين الأول بزاوية 90^o ويليه الدوران بزاوية 180^o باتجاه عقارب الساعة على أنه يكافئ دورانا بنفس الاتجاه والمركز وبزاوية مقدارها:

$$90^o + 180^o = 270^o$$



الخطوة 2 : ارسم صورة الشكل A الناتجة عن دوران بزاوية 270^o مركزه C.

تحقق



3) ارسم صورة الشكل A الناتجة من تركيب دورانين حول نقطة الأصل C باتجاه عكس عقارب الساعة وبزاوية 180^o ويليها زاوية 90^o ، ثم صف تحويلا هندسيا واحدا يكافئ الدورانين السابقين.

لاحظ أن:

الصورة الناتجة عن تركيب تحويلي تطابق كالانعكاس أو الإزاحة أو الدوران تكون مطابقة للشكل الأصلي.

أي أن: تركيب تحويلي تطابق هو تحويل تطابق أيضا.

ثالثًا: تركيب تمددين لهما نفس المركز:

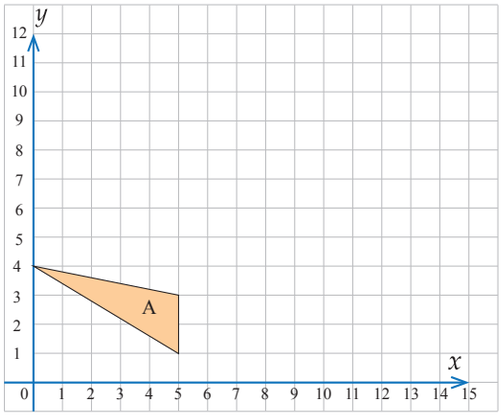
نظرية 4

تركيب تمددين لهما نفس المركز

تركيب تمددين لهما نفس المركز، يكافئ تمددا له نفس المركز ومعامله حاصل ضرب معاملي التمددين الأصليين.

مثال 4 : تركيب دورانين حول نفس المركز

أوجد صورة المثلث A الذي إحداثيات رؤوسه هي: (5, 3), (5, 1), (0, 4) تحت تأثير التمددين، الأول بمعامل مقداره 1.5 وثم تمدد معامله 2، مركزهما نقطة الأصل، ثم صف تحويلا واحدًا يكافئ التمددين.

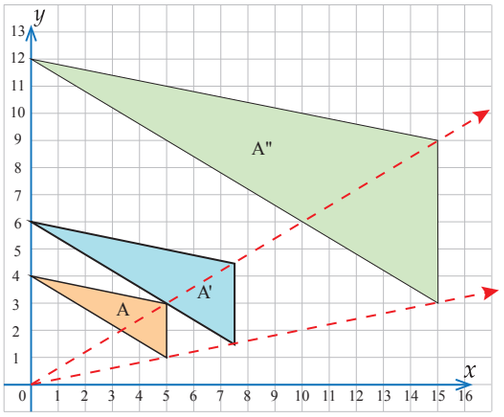


الخطوة 1 : نوجد صورة كل نقطة من رؤوس الشكل A بالتمدد الأول الذي معامله 1.5 ونمثلها على نفس المستوى ويسمى الشكل الناتج A'

$(0, 4) \rightarrow (0, 6)$

$(5, 1) \rightarrow (7.5, 1.5)$

$(5, 3) \rightarrow (7.5, 4.5)$



الخطوة 2 : نوجد صورة كل نقطة من رؤوس الشكل A' بالتمدد الثاني الذي معامله 2 ونمثلها على نفس المستوى ويسمى الشكل الناتج A"

$(0, 6) \rightarrow (0, 12)$

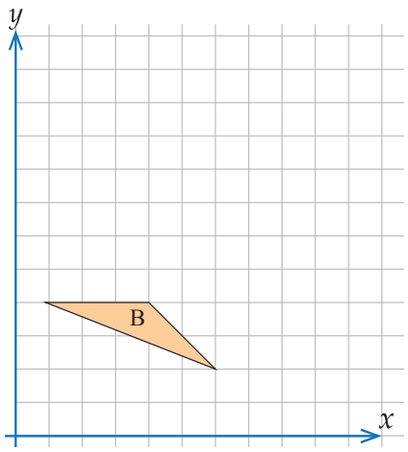
$(7.5, 1.5) \rightarrow (15, 3)$

$(7.5, 4.5) \rightarrow (15, 9)$

من الرسم الناتج وبناء على النظرية 3، يمكن وصف تركيب التمددين أعلاه على أنه يكافئ تمددا بنفس المركز ومعامله يساوي $1.5 \times 2 = 3$

تحقق

4) أوجد صورة المثلث B الذي إحداثيات رؤوسه هي: (1, 4), (6, 2), (4, 4) تأثير التمددين، الأول بمعامل مقداره 0.5 وثم تمدد معامله 3 ، مركزهما نقطة الأصل.



رابعا: تركيب تحويلين هندسيين مختلفين:

درست سابقا تركيب تحويلين هندسيين من نفس النوع ويمكن تركيب أي تحويلين هندسيين مختلفين.

كما في المثال التالي:

مثال 5 : رسم تركيب تحويلين هندسيين مختلفين

مثل بيانيا صورة المثلث JKL الذي رؤوسه $J\,(3, 2)$, $K\,(2, 0)$, $L\,(0, 0)$ بتركيب التحويلين:

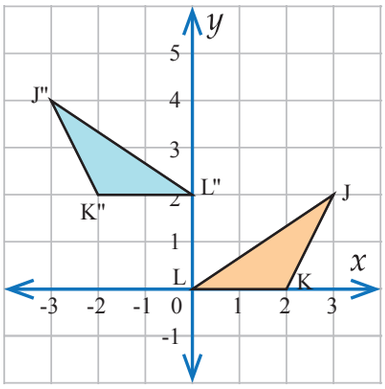
a) إزاحة وفق المتجه $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ ، ثم انعكاس حول المحور y

الخطوة 1 : أوجد صورة ΔJKL بالقاعدة للإزاحة المطلوبة:

$J\,(3, 2) \rightarrow J'\,(3, 4)$

$K\,(2, 0) \rightarrow K'\,(2, 2)$

$L\,(0, 0) \rightarrow L'\,(0, 2)$



الخطوة 2 : نوجد صورة $\Delta J'K'L'$ بالقاعدة للانعكاس حول المحور y

$J'\,(3, 4) \rightarrow J''\,(-3, 4)$

$K'\,(2, 2) \rightarrow K''\,(-2, 2)$

$L'\,(0, 2) \rightarrow L''\,(0, 2)$

الخطوة 3 : مثل ΔJKL وصورته $\Delta J''K''L''$ بيانيا كما في الشكل المجاور.

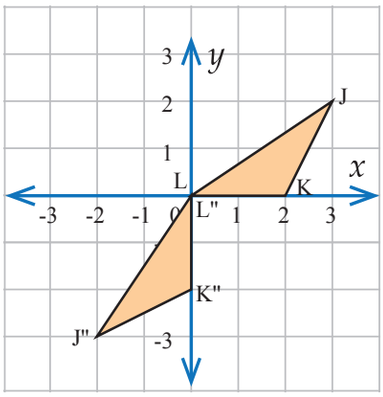
b) دوران بزاوية $90°$ عكس عقارب الساعة مركزه نقطة الأصل ثم انعكاس حول المحور x

الخطوة 1 : أوجد صورة ΔJKL باستعمال قاعدة الدوران

$J\,(3, 2) \rightarrow J'\,(-2, 3)$

$K\,(2, 0) \rightarrow K'\,(0, 2)$

$L\,(0, 0) \rightarrow L'\,(0, 0)$



الخطوة 2 : نوجد صورة $\Delta J'K'L'$ بالقاعدة للانعكاس حول المحور x

$J'\,(-2, 3) \rightarrow J''\,(-2, -3)$

$K'\,(0, 2) \rightarrow K''\,(0, -2)$

$L'\,(0, 0) \rightarrow L''\,(0, 0)$

الخطوة 3 : مثل ΔJKL وصورته $\Delta J''K''L''$ بيانيا، كما في الشكل المجاور.

تحقق

إحداثيات رؤوس ΔJKL هي: $J\,(1, 1)$, $K\,(2, 5)$, $L\,(0, 2)$ مثل بيانيا صورته بتركيب التحويلين التاليين:

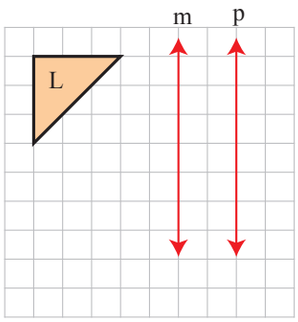
5A) إزاحة وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x - 2, y + 1)$، ثم انعكاس حول المحور y

5B) دوران $180°$ حول نقطة الأصل، ثم انعكاس حول المستقيم $y = x$

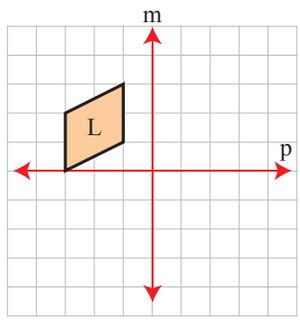
تمارين 3-5

مثال 1،2 1) ارسم صورة الشكل L الناتجة عن انعكاس حول المستقيم m، ثم حول المستقيم p ، ثم صف تحويلا هندسيا واحدا يكافئ الانعكاسين:

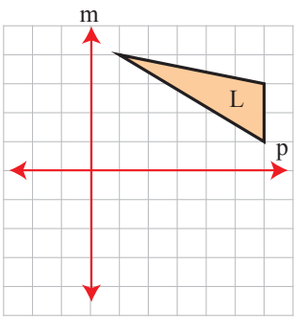
a)



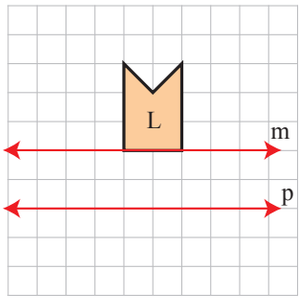
b)



c)

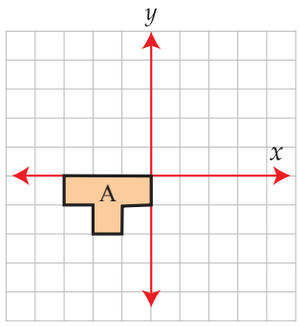


d)

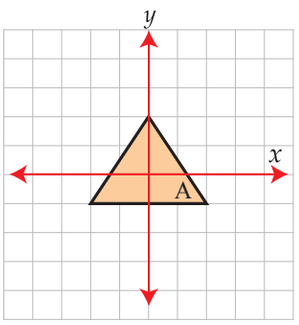


مثال 3 2) ارسم صورة الشكل A بالدورانين حول نقطة الأصل، بزاوية 180° ثم زاوية 90° في اتجاه عقارب الساعة، باستخدام تحويلٍ هندسيٍ واحدٍ يكافئ تركيب الدورانين.

a)

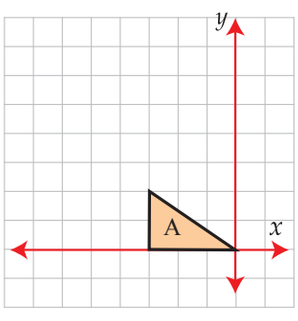


b)

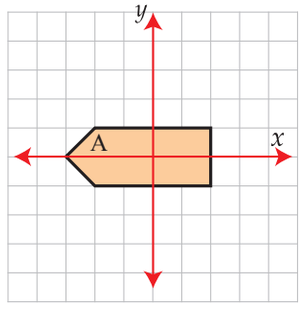


مثال 4 3) ارسم صورة الشكل A بالتمددين، الأول بمعامل مقداره 0.5 ، وثم تمدد معامله 1.5 مركزهما نقطة الأصل، باستخدام تحويلٍ هندسيٍ واحدٍ يكافئ التمددين.

a)



b)



مثال 5

4) مثـل صورة الشـكل الرباعـي ABCD الذي إحداثيات رؤوسـه هـي: A (1, 2), B (3, 0), C (-2, 0), D (-1, 2) تحت تأثير التحويلات الهندسية التالية:

a) دوران $270°$ باتجاه عقارب الساعة مركزه نقطة الأصل، ثم انعكاس حول المحور y

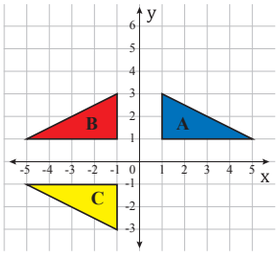
b) انعكاس حول المحور x ، ثم إزاحة وفق متجه الإزاحة $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5) اجـري تمـددان للمثلـث ABC الـذي إحداثيـات رؤوسـه هـي: A (12, 4), B (4, 8), C (8, 8) ، مركزهما نقطة الأصـل وبمعاملين متساويين، فأصبحت إحداثيات الصورة النهائية A'' (3,1), B'' (1,2), C'' (2,-2). أوجد معامل التمدد k لكل من التمددين؟

مسائل مهارات التفكير العليا

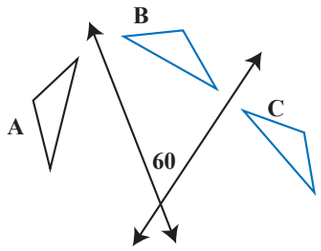
6) قامت كل من نور ورند بوصف تركيب تحويلين هندسيين يجعل الصورة النهائية للشكل A هي الشكل C ، فكانت إجابتهما كالتالي. أيهما كانت إجابتها صحيحة؟ فسر إجابتك.

نور
انعكاس في محور y يتبعه
انعكاس في المحور x

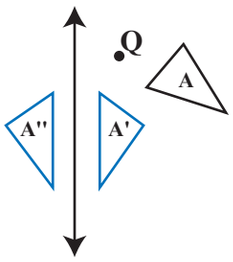


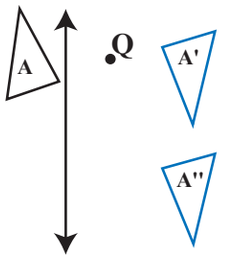
رند
تركيب دورانين مركزهما نقطة الأصل، بزاوية 90°، ثم زاوية 90°، باتجاه عكس عقارب الساعة

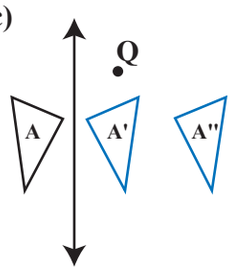
7) أوجد زاوية الدوران التي تنقل A إلى C ، في الشكل أدناه. حيث مركز الدوران نقطة تقاطع المستقيمين.

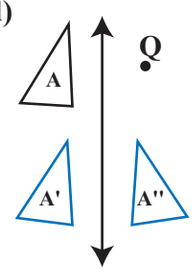


8) اكتب رمز الشكل أمام التحويل الذي يمثله أسفل الأشكال التالية:

a)


b)


c)


d)


- انسحاب باتجاه موازٍ للمستقيم L ، ثم انعكاس في المستقيم L
- دوران مركزه Q ، ثم انسحاب باتجاه موازي للمستقيم L
- دوران مركزه Q، ثم انعكاس في المستقيم L
- انعكاس في المستقيم L، ثم انسحاب باتجاه عمودي على المستقيم L

5-4 مقياس الرسم
Scale Drawing

أفكار الدرس

- احسب مقياس الرسم.
- استعمل مقياس الرسم في حل مسائل.

المعايير:

12F.7.2

المصطلحات:

- مقياس الرسم الخطي
  linear scale drawing
- مقياس رسم المساحة
  area scale drawing

تمهيد

الخارطة هي رسم دقيق لسطح الأرض أو جزء منها، وبما أن الخارطة أصغر من مساحة الأرض التي تمثلها، فلابد من استخدام نسبة معينة للعلاقة بين قياسات الخارطة والقياسات الحقيقية على الأرض.

مقياس الرسم الخطي:

للخارطة عدد من العناصر التي يجب توافرها فيها منها **مقياس الرسم الخطي** (linear scale drawing) وبدونه تفقد الخارطة جانبا علميا مهما .

فمثلا مقياس الرسم الخطي 1cm : 6m يعني أن كل 1cm على الرسم يمثل 6m في الواقع.

مفهوم — مقياس الرسم الخطي

مقياس الرسم الخطي هو النسبة بين الطول على الخارطة أو المخطط والطول الحقيقي.

$$\text{مقياس الرسم الخطي} = \frac{\text{الطول على الخريطة أو المخطط}}{\text{الطول الحقيقي}}$$

مثال 1 : إيجاد مقياس الرسم الخطي

إذا كانت المسافة بين مدينتي إسطنبول وطرابزون التركية هو 5cm على الخارطة، وكانت المسافة الحقيقية بينهما 1070 km تقريبا. أوجد مقياس الرسم الخطي للخارطة.

$$\text{مقياس الرسم الخطي} = \frac{\text{الطول على الخريطة}}{\text{الطول الحقيقي}}$$

$$= \frac{5\text{ cm}}{1070\text{ km}}$$

$$= \frac{1\text{ cm}}{214\text{ km}}$$

إذن مقياس رسم الخارطة هو 1 cm : 214 km

تحقق

1) إذا كانت المسافة بين القدس والخليل 60 km وكانت هذه المسافة بينهما في إحدى الخرائط تساوي 5 cm ، أوجد مقياس الرسم الخطي.

إرشاد

يمكن كتابة مقياس الرسم بطرق مختلفة كما يأتي:

1cm = 214 km

1cm : 214km

1 : 21400000

$\frac{1\text{ cm}}{214\text{ km}}$

مثال 2 : استعمال مقياس الرسم الخطي

إذا علمت أن المسافة بين مدينتي الدوحة والخور على الخارطة 2.5cm استعمل مقياس الرسم الموضح على الخارطة لإيجاد المسافة الحقيقية بين المدينتين.

افترض أن x تمثل المسافة الحقيقية بين مدينة الدوحة ومدينة الخور

$$\text{مقياس الرسم الخطي} = \frac{\text{الطول على الخريطة}}{\text{الطول الحقيقي}}$$

$$\frac{2.5\text{ cm}}{x\text{ km}} = \frac{1\text{ cm}}{20\text{ km}}$$

$$1 \times x = 20 \times 2.5$$

$$x = 50\text{ km}$$

إذن المسافة بين مدينة الدوحة والخور هو 50 km

تحقق

2) إذا كان مقياس الرسم المسجل على إحدى الخرائط هو 1 cm : 500 km وكان البعد الحقيقي بين المدينتين هو 900 km . أوجد البعد بين المدينتين على الخارطة.

مقياس رسم المساحة:

مقياس الرسم الخطي يصف نسبا ثابتة بين الأطوال على الخارطة والأطوال المناظرة لها في الواقع، بينما تختلف هذه النسب عندما نقارن بين المساحات في الخارطة والمساحات في الواقع، **فمقياس رسم المساحة** area scale drawing هو النسبة بين المساحة على الخارطة (المخطط) والمساحة الحقيقية.

مفهوم : مقياس رسم المساحة

إذا كان مقياس الرسم الخطي للخارطة هو a : b حيث a الطول على الخارطة b الطول الحقيقي، فإن مقياس رسم المساحة هو $a^2 : b^2$

$$\text{مقياس رسم المساحة} = \frac{\text{المساحة على الخارطة أو المخطط}}{\text{المساحة الحقيقية}}$$

مثال 3 : استعمال مقياس الرسم لإيجاد المساحات

إذا كانت المساحة الفعلية لبحيرة هو $180\,000\text{ m}^2$ فأوجد مساحة البحيرة على خارطة لها مقياس رسم خطي 1cm:30m

الحل

افترض أن المساحة على الخارطة هو A

مقياس الرسم الخطي $1\text{cm} : 30\text{ m}$

ربع $1\text{cm}^2 : 30^2\text{ m}^2$

بسط $1\text{cm}^2 : 900\text{ m}^2$

مقياس رسم المساحة = $\frac{\text{المساحة على الخارطة}}{\text{المساحة الحقيقية}}$

$$\frac{A}{180000\text{m}^2} = \frac{1}{900\ \text{cm}^2}$$

$$A \times 900 = 1 \times 180000$$

$$A = \frac{180000}{900}$$

$$A = 200\text{cm}^2$$

إذن المساحة على الخارطة هو $200\ \text{cm}^2$

تحقق

3) أوجد المساحة الفعلية لمدينة ما إذا كانت مساحتها على خارطة بمقياس رسم خطي 1cm : 4km تساوي $2.25\ \text{cm}^2$

مثال 4 : **استعمال المساحات لإيجاد مقياس الرسم الخطي**

إذا كانت المساحة الفعلية لمدينة ما تساوي $36\ \text{km}^2$ ومثلت على خارطة بمساحة تساوي $100\ \text{cm}^2$ أوجد مقياس الرسم الخطي للخارطة.

مقياس رسم المساحة $100\ \text{cm}^2 : 36\ \text{km}^2$

خذ الجذر التربيعي $\sqrt{100}\ \text{cm} : \sqrt{36}\ \text{km}$

بسط $10\text{cm} : 6\text{km}$

$5\text{cm} : 3\text{km}$

تحقق

4) إذا كانت مساحة على خارطة ما تساوي $49\ \text{cm}^2$ وعلى الطبيعة تساوي $9\ \text{km}^2$ ، أوجد مقياس الرسم الخطي للخارطة.

تمارين 4-5

مثال 1،2

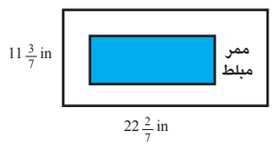
1) إذا كانت المسافة بين مدينتي الدوحة ومكة المكرمة على خارطة هو 4.8 cm وكانت المسافة الحقيقية بينهما هو 1446 km .أوجد مقياس الرسم لهذه الخارطة.

2) أوجد مقياس الرسم لخريطة، إذا كان البعد بين مدينتين على الخريطة 9 cm والبعد الفعلي 72 km

3) خريطة مقياس الرسم الخطي لها هو 1cm : 5km فاذا كانت المسافة الحقيقية بينهما 112 km فأوجد المسافة بينهما على الخريطة.

4) أراد مهندس معماري تصميم نافورة لوضعها أمام مدخل فندق فقام برسم النافورة على مخطط بمقياس رسم 1 cm : 0.5 m وكان قطر النافورة بالرسم 4 cm أوجد طول قطر النافورة الحقيقي.

5) أرادت جوري بناء مسبح في ساحة فناء منزلها فقامت شركة متخصصة في تصميم المسابح بعمل مخطط بمقياس رسم: $1\frac{3}{4}\ ft$:1 in



أوجد المساحة الحقيقية اللازمة لتصميم المسبح والممر المبلط المحاط به.

6) قام مهندس بتصميم مخطط لمصنع فإذا كان كل 2.5 cm على المخطط تمثل 12.5 m في الحقيقة وكانت المسافة الحقيقية بين مبنيين في المصنع تساوي 35 m أوجد المسافة بينهما على المخطط.

مثال 3

7) رسم مخطط منزل بمقياس رسم خطي 2 cm : 1 m وكانت مساحة غرفة النوم على المخطط 12 cm^2 أوجد المساحة الحقيقية لغرفة النوم.

8) خارطة بمقياس رسم خطي 1 cm إلى 5 km مثلت عليها مزرعة على شكل مستطيل مساحته 6 cm^2 أوجد المساحة الحقيقية للمزرعة.

9) المساحة الحقيقية لبحيرة ما هو 5000 m^2 مثلت على خارطة بمقياس رسم خطي 1 cm : 1000 m أوجد مساحة البحيرة على الخارطة.

مثال 4

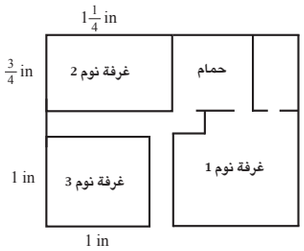
10) حقل مساحته 36 km^2 مثل على خارطة بمساحة تساوي 144 cm أوجد مقياس الرسم الخطي.

11) المخطط المقابل يمثل مثلث مساحته الحقيقية 36 m^2 أوجد مقياس الرسم الخطي علما أن طول المربع على المخطط يساوي 1 cm

12) رسمت لجين غرفة صف أبعاده الحقيقية 18 ft, 12 ft على مخطط بمساحة 96 in^2 أوجد مقياس الرسم الخطي.

13) رسم مبنى بمقياس رسم خطي 1 cm : 3 m فكان ارتفاع المبنى على الرسم 1 cm و2 mm ثم تم تعديل مقياس الرسم ليصبح 1 cm : 4 m فما هو الارتفاع الجديد للمبنى على الرسم.

14) المخطط المقابل يمثل مخطط غرف 3 أشقاء محمد ومعاذ وزيد بمقياس رسم خطي 0.5 in : 6 ft فـإذا كانت غرفة 2 هي غرفة معاذ والغرفة 3 هي غرفة زيد وادعى معاذ إن شقيقه الأصغر زيد قد حصل على الغرفة ذات المساحة الأكبر فهل ادعاؤه صحيح فسر إجابتك.



مسائل مهارات التفكير العليا

15) قامت سارة بعمل مخططي لمبنى المدرسة فإذا كان مقياس الرسم للمخطط الأول هو 1 in : 1 ft ومقياس الرسم للمخطط الثاني هو 1 in : 6 ft أي المخططين سيكون الرسم فيه اكبر فسر إجابتك.

16) طلبت معلمة الرياضيات كتابة مقياس الرسم الخطي 1 in : 2 ft على الصورة a : b فقامت داليا بكتابته على الصورة 2 : 1 بينما قامت نور بكتابته على الصورة 24 : 1 فأي من الطالبتين أجابتها صحيحة فسر إجابتك.

17) أرادت زينة تصميم خريطة بمقياس رسم 1 : 1 فهل يمكنها ذلك وضح إجابتك.

18) صف كيف يمكن إيجاد مقياس الرسم الخطي لخريطة لم يكتب عليها مقياس الرسم المستعمل فيها.

5-5 مساقط الأشكال الثلاثية الأبعاد
Plans and Elevations

أفكار الدرس

- ارسم كلا من المسقط العلوي والأمامي و الجانبي الثنائي البعد لأشكال ثلاثية الأبعاد ومستقيمة الأضلاع.
- أحدد الشكل الثلاثي الأبعاد بمعلومية المساقط.

المعايير:

12F.7.4

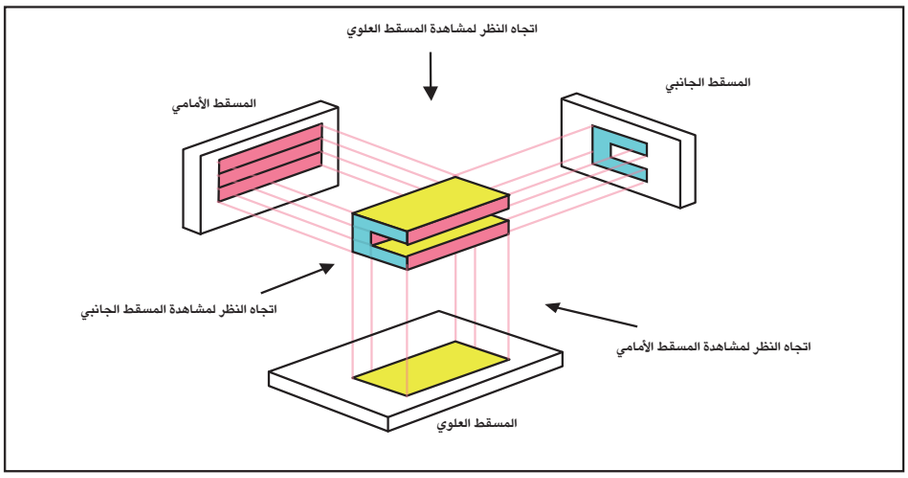
المصطلحات:

- الإسقاط العمودي orthogonal projection
- المسقط الأمامي front elevation
- المسقط الجانبي side elevation
- المسقط العلوي plan

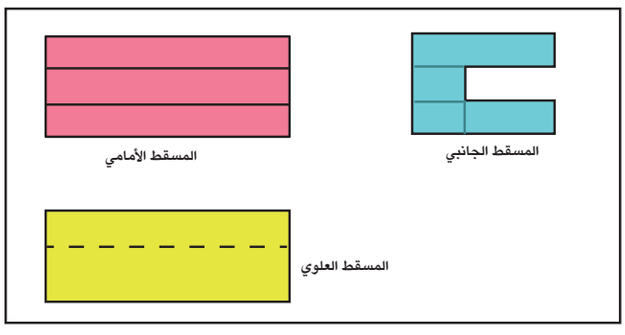
تمهيد

في مجال التصميم والرسم يكون الحاسوب عنصرا أساسيا، وحتى يتمكن المصمم من عرض الشكل على الشاشة فهو بحاجة لإسقاطه وكلمة إسقاط تعني رسم جسم ذي ثلاثة أبعاد (المنظور) على الشاشة أو ورقة الرسم التي لها بعدان فقط .لذا يجب أن يمثل المنظور بطريقة تؤدي إلى ادراك الشكل الحقيقي له ولتمثيل المنتجات المطلوب تصنيعها مثل السيارات أو التصميم الهندسي للمباني ترسم مساقطها في أكثر من اتجاه لضمان تمام وضوحها ويكتفي بصفة عامة بثلاثة مساقط ترسم بطريقة **الإسقاط العمودي** orthogonal projection وهي:

1) **المسقط الأمامي** front elevation يحتوي على كل المساحات التي يمكن رؤيتها من الأمام.
2) **المسقط الجانبي** side elevation يحتوي على كل المساحات التي يمكن رؤيتها من الجانب.
3) **المسقط العلوي** plan يحتوي على كل المساحات التي يمكن رؤيتها من أعلى.



والشكل أدناه يوضح رسم المساقط.

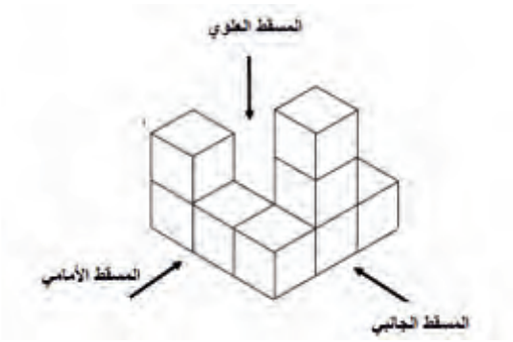


إرشاد

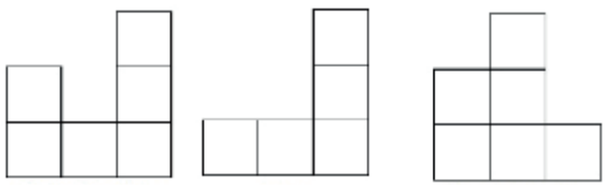
عند رسم شكل ثلاثي الأبعاد على ورقة رسم مستوية لها بُعدان، لن يُظهر الرسم الشكل الحقيقي للجسم تماما، ولن يُعطي الرسم الأبعاد الحقيقية.

مثال 1 : رسم مساقط شكل ثلاثي الأبعاد باستخدام شبكة المربعات

ارسم كلا من المساقط (الأمامي والعلوي والجانبي) للشكل الثلاثي الأبعاد أدناه:

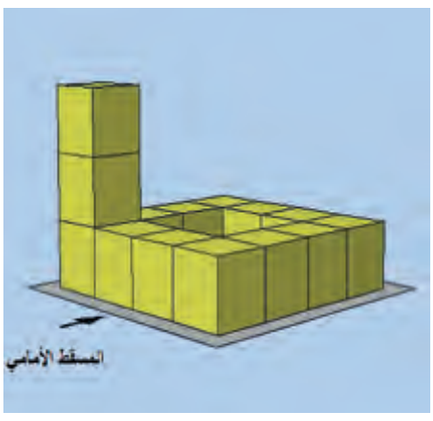


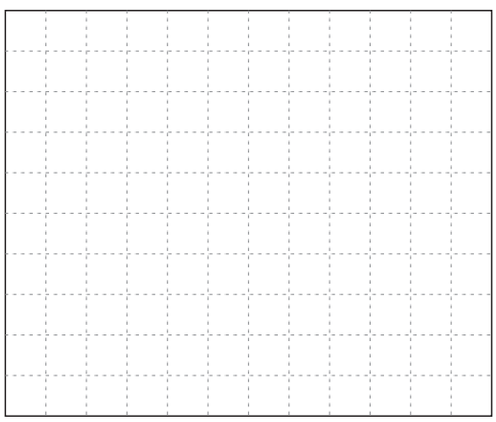
المسقط الجانبي المسقط العلوي المسقط الأمامي



تحقق

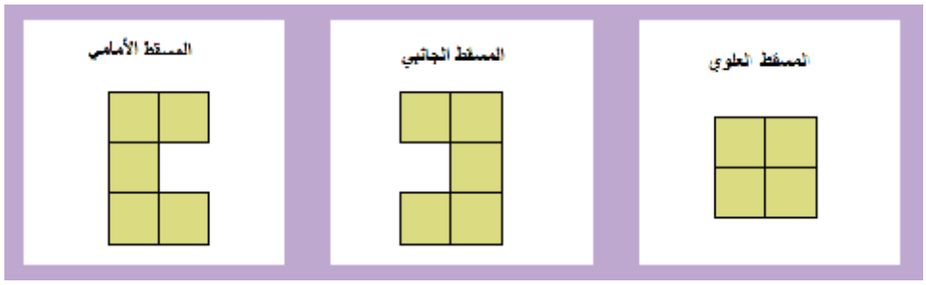
1) ارسم كلا من المساقط (العلوي والأمامي والجانبي) للشكل الثلاثي الأبعاد أدناه:

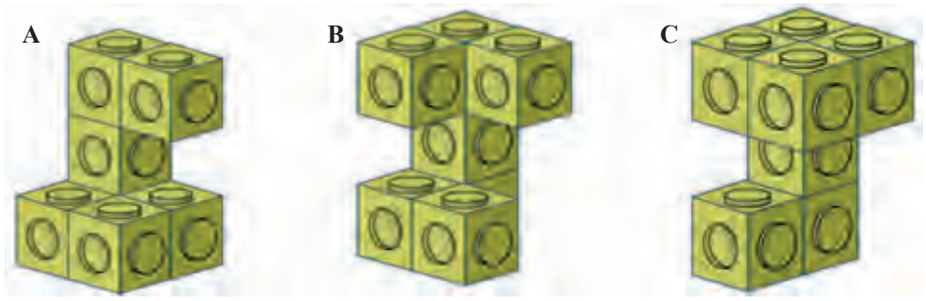




مثال 2 : تحديد الشكل الثلاثي الأبعاد بمعلومية المساقط

حدد الشكل الثلاثي الأبعاد الذي يمثل المساقط التالية:

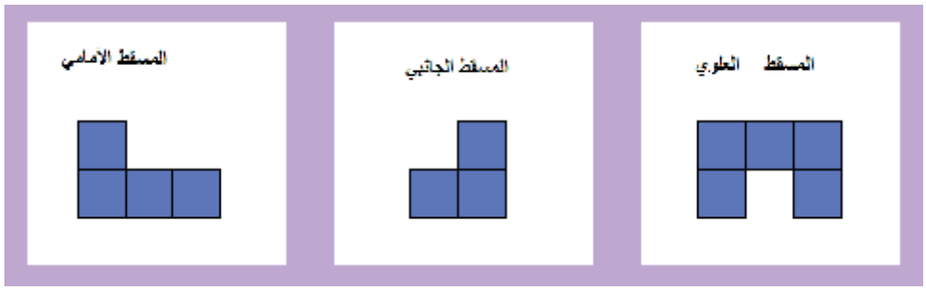


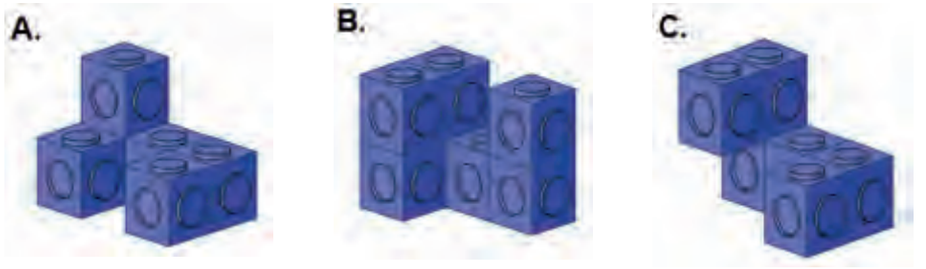


الإجابة: الشكل B هو الشكل المناسب الناتج من تركيب المساقط أعلاه.

تحقق

2) حدد الشكل الثلاثي الأبعاد الذي يمثل المساقط التالية:

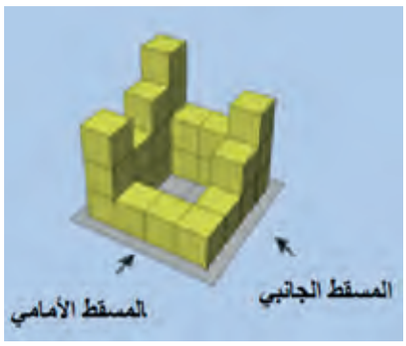




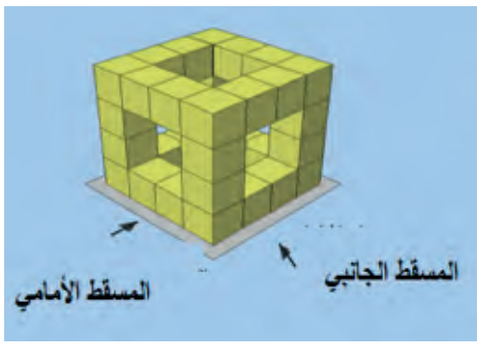
تمارين 5-5

مثال 1 ارسم كلا من المساقط (الأمامي والعلوي والجانبي) للأشكال الثلاثية الأبعاد أدناه:

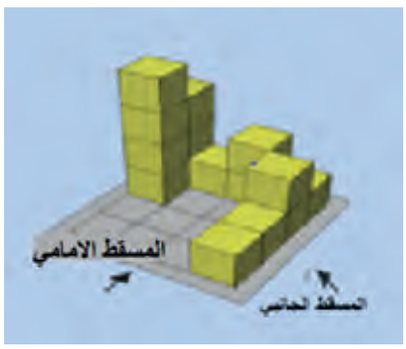
1)



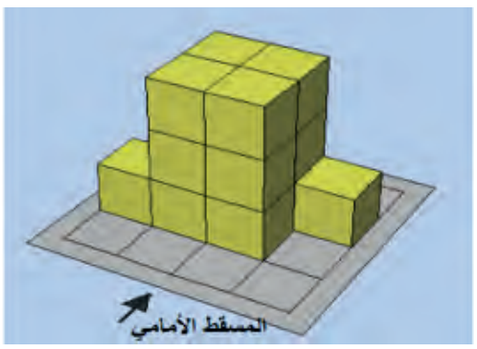
2)



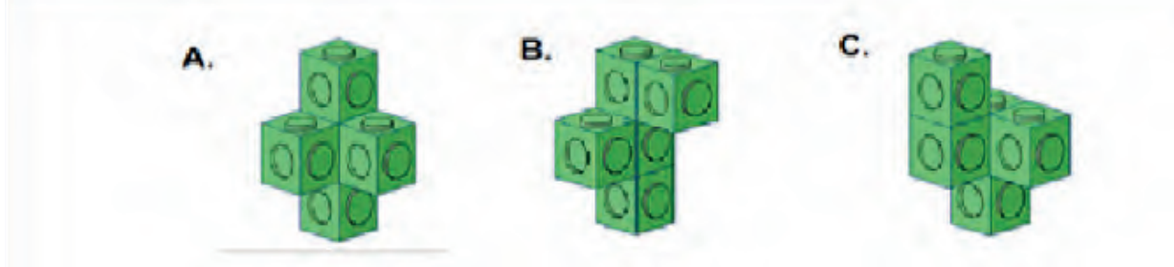
3)



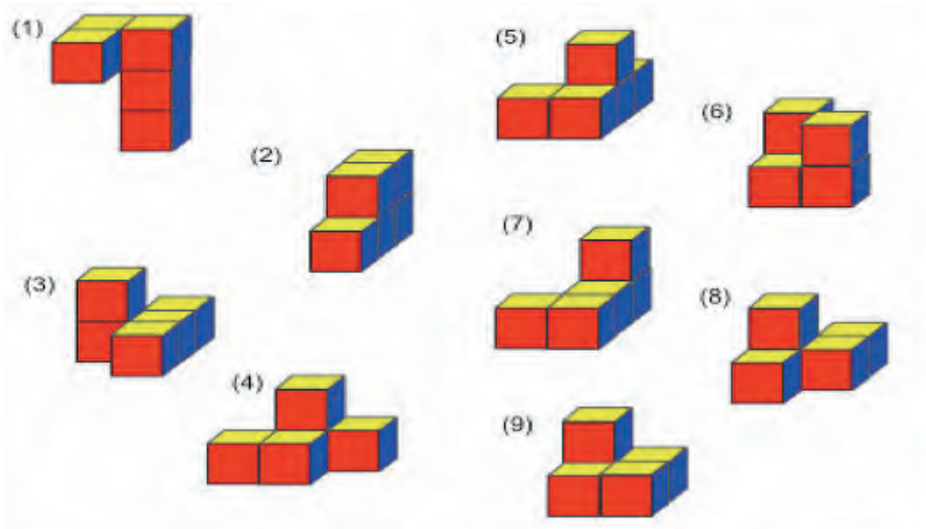
4)

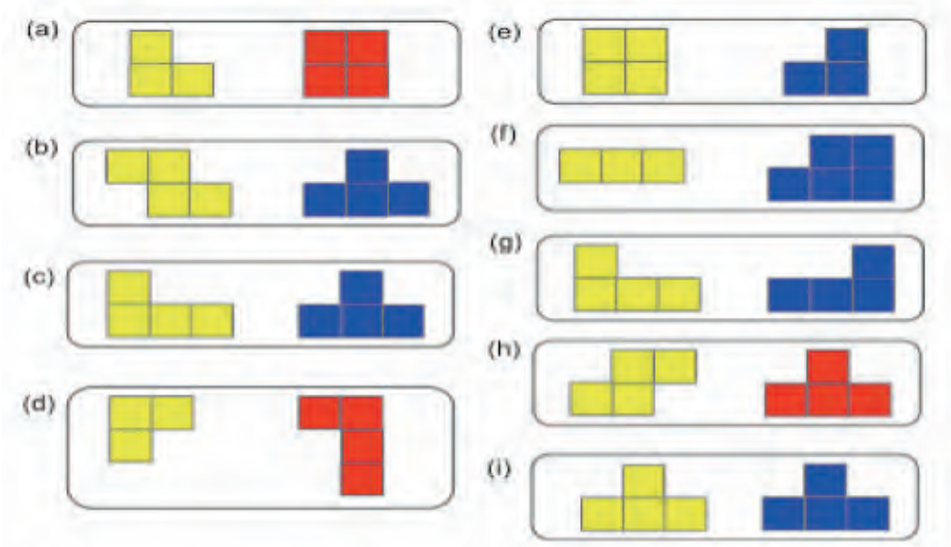


مثال 2 5) حدد الشكل الثلاثي الأبعاد الذي يمثل المساقط التالية:



6) اكتب رقم النموذج أمام المساقط التي تمثله:

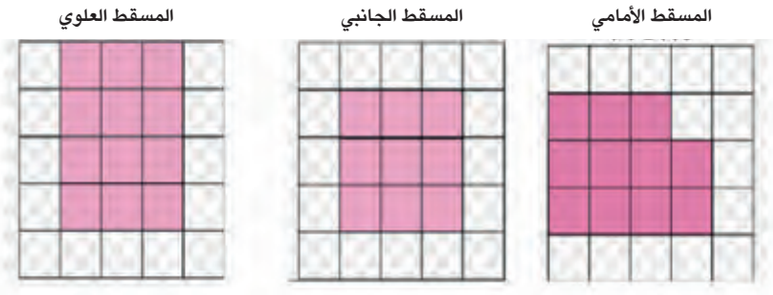




مسائل مهارات التفكير العليا

7) إذا كانت المساقط العلوية والأمامية لمجسمين هي نفسها فان للمجسمين الشكل نفسه فسر إجابتك.

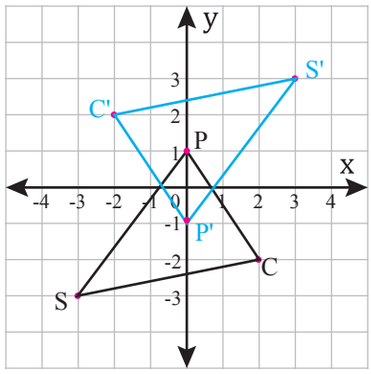
8) رسم مهندس المساقط أدناه باستخدام أحد برامج الرسم ارسم الشكل الثلاثي الأبعاد الذي يمكن تكوينه من هذه المساقط.



اختبار الوحدة الخامسة

اختيار من متعدد:

1) الـدوران الـذي مركـزه نقطـة الأصـل ويحـول المثلـث *PCS* إلى المثلث *P′C′S′* هو:



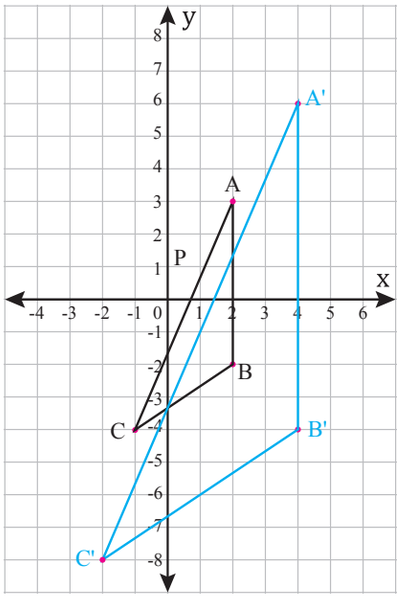
A) بزاوية 90° مع عقارب الساعة

B) بزاوية 90° عكس عقارب الساعة

C) بزاوية 180° عكس عقارب الساعة

D) بزاوية 270° مع عقارب الساعة

2) التمدد الذي يجعل من $\Delta A'B'C'$ صورة ΔABC هو:



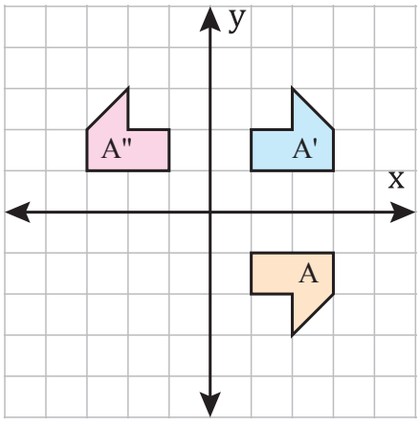
A) تمدد مركزه نقطة الأصل معامله $\frac{1}{2}$

B) تمدد مركزه نقطة الأصل معامله $\frac{-1}{2}$

C) تمدد مركزه نقطة الأصل معامله -2

D) تمدد مركزه نقطة الأصل معامله 2

3) التحويل الهندسي المركب الذي ينقل الشكل A إلى الشكل "A هو:



A) تمدد بمعامل 0.25 ثم تمدد بمعامل 2

B) انعكاس في محور x ثم انعكاس في المحور y

C) دوران بزاوية 180° يتبعه دوران بزاوية 90° مع عقارب الساعة

D) انسحاب للأعلى 4 وحدات ثم لليسار 4 وحدات

4) ازيحـت النقطـة K (-1,6) وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x + 2, y + 3)$ ثم عكست صورتها حول المحور y ، ما هي إحداثيات K''

A) K'' (1, 9)

B) K'' (1, -9)

C) K'' (-1, 9)

D) K'' (-1, -9)

5) مرح طالبة في المرحلة الجامعية تستقل السيارة للذهاب إلى الجامعة فإذا كانت المسـافة بـين منزلها والجامعة ممثلة عـلى أحد الخرائط تساوي 16 cm ، فما هي المسافة الحقيقية بين منزلها والجامعة إذا علمت أن مقياس رسم الخريطة 1 cm : 0.5 km ؟

A) 80 km

B) 800 km

C) 0.8 km

D) 8 km

6) استعمل الخريطة أدناه في إيجاد البعد الحقيقي التقريبي بين دخان والجميلية.

A) 4 km

B) 16 km

C) 35 km

D) 50 km

7) قام مهندس بإرسال مخطط تصميم منزل جاسم الجديد وعندما نظر جاسم إلى المخطط وجد أن المهندس لم يكتب مقياس الرسم الخطي للمخطط فقام جاسم بقياس أعلى حائط لديه فوجد أنه 25 m وعند مقارنته بالمخطط وجد أنه 12.5 cm فأوجد مقياس رسم المخطط.

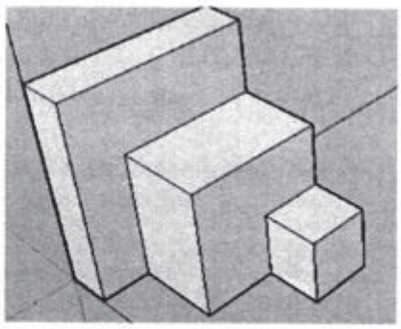
A) 1 cm : 2m

B) 2 cm : 1 m

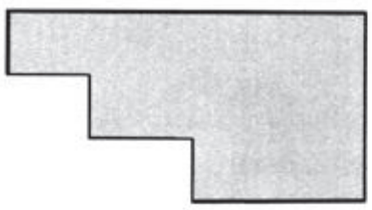
C) 0.5 cm : 1 m

D) 1 cm : 0.5 m

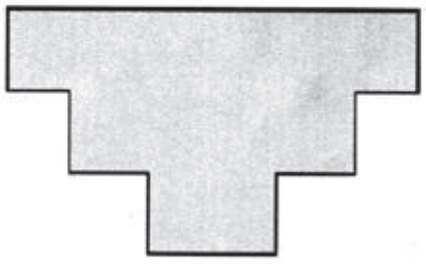
8) حدد الشكل الذي يمثل المسقط العلوي للشكل الثلاثي الأبعاد أدناه.



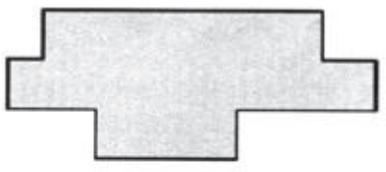
A)



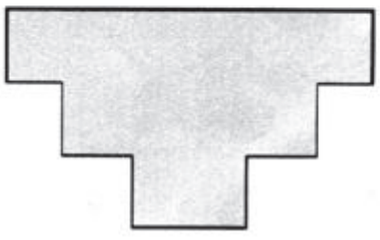
B)



C)

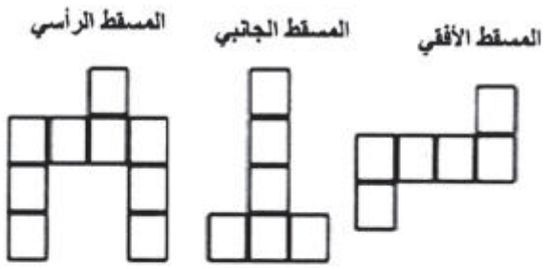


D)



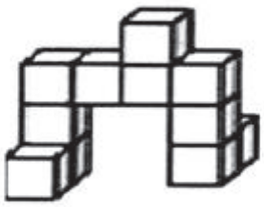
اختبار الوحدة الخامسة

9) حدد الشكل الذي يمثل المسقط العلوي للشكل الثلاثي الأبعاد أدناه.

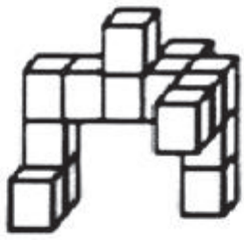


A)

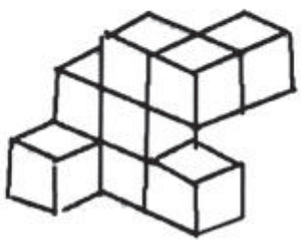
B)



C)



D)



أوجد صورة كل شكل بالانعكاس المحدد في الأسئلة 10-11.

10) المثلث ABC الذي إحداثيات رؤوسه هي:

A (1,2), B (5,5), C (5,2) بالانعكاس حول المحور x

11) المستطيل الذي رؤوسه X (-2,2) ,Y (2,2), C (2,3), Z (-2,3)

بالانعكاس في المستقيم $y = -x$

أوجد صورة كل شكل وفق الإزاحة المحددة في الأسئلة 12-13

12) المثلث الذي رؤوسه A (-3, 4), B (2, 8), C (5, 1)

وفق متجه الإزاحة $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

13) الشكل الرباعي الذي رؤوسه هي:

A(-1,1), B(-1,-2), C (-4,-4), D(-5,2)

وفق متجه الإزاحة $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

أوجد صورة كل شكل تحت تأثير الدوران المحدد في الاسئلة 14-15

14) المثلث الذي رؤوسه R (1, 6), S (4, 7), T (1, 3)

حول نقطة الأصل وبزاوية 90° عكس عقارب الساعة

15) الشكل الهندسي الذي رؤوسه:

A (0,1), B (-2,0), C (-2,2), D (0,2)

حول نقطة الأصل بزاوية 180°

ارسم صورة الأشكال الواردة في 16 و17 بالتمدد المحدد لكل منها:

16) المثلث FGH الذي إحداثيات رؤوسه: (3,4), (6,10), (-3,5)

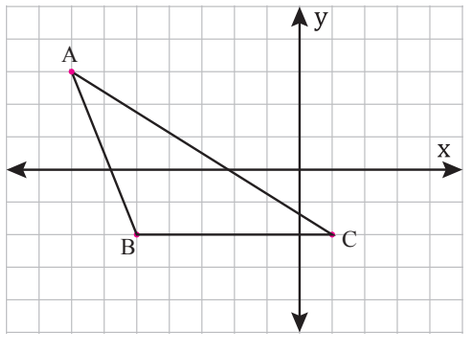
بتمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله 0.5

17) الشكل الرباعي الذي رؤوسه:

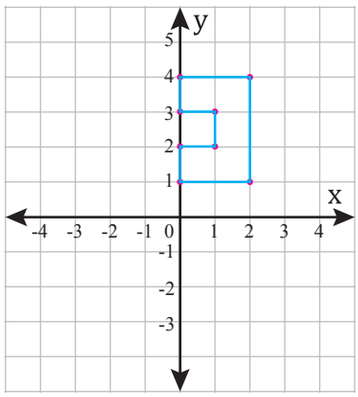
P (1,2), Q (3,3), R (3,5), S (1,4)

بتمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله 2.5

18) ارسم صورة المثلث ABC الناتجة عن انعكاس حول المحور x، ثم حول المحور y، ثم صف تحويلا هندسيا واحدا يمثل تركيب الانعكاسين.



19) ارسم صورة الشكل أدناه بتركيب دورانين حول نقطة الأصل بزاويتين كل منهما 90° باتجاه عقارب الساعة.



20) أوجد صورة الشكل ABCD الذي رؤوسه هي:

A (1, 1), B (3, 3), C (-1, -1), D (-3, -3) تحت تأثير التحويل الهندسي المركب من التحويلين الهندسيين التاليين:

إزاحة وفق المتجه $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ويليه انعكاس في المحور y

21) أوجد صورة المضلعات التالية تحت تأثير تركيب التمددين أدناه:

a) ΔABC, A (1, 6), B (4, 7), C (1, 3), $k_1 = 0.5$, $k_2 = 2$

b) $\square PQRS$, P (1, 2), Q (3, 3), R (3, 5), S (1, 4)

$k_1 = -1$, $k_2 = 3$

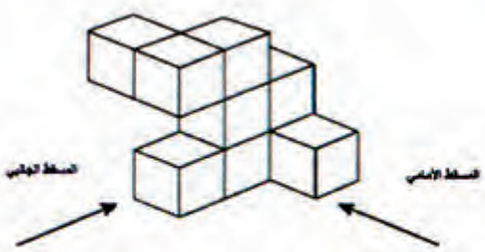
22) إذا علمت أن مقياس الرسم الخطي لخريطة ما هو 1 cm : 0.1 km فأوجد طول ضلع مربع على الخريطة إذا علمت أن مساحته في الحقيقة $1\ km^2$

23) حقل طوله 25 m وعرضه 15 m فإذا مثل على مخطط بمقياس رسم خطي 1 cm : 5 m فأوجد مساحة الحقل على المخطط.

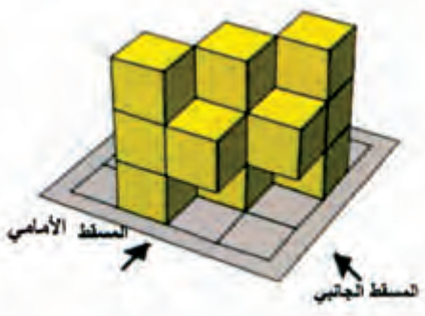
24) ارسم المساقط (العلوي والأمامي والجانبي) للأشكال الثلاثية أدناه.

A)

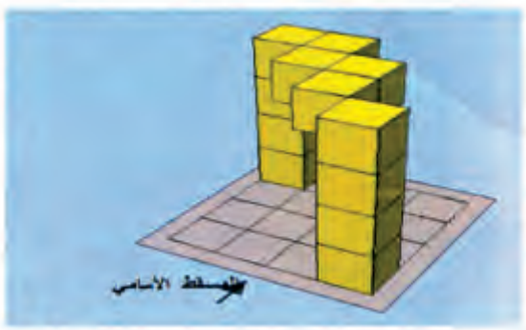
B)



C)



D)



الوحدة 6

الدوال الأسية واللوغاريتمية

Exponential and Logarithmic Functions

أفكار الوحدة

- أتعرف الدالة الأسية وتمثيلها البياني.
- أتعرف دالتي النمو والإضمحلال الأسي.
- أتعرف اللوغاريتم وخواصه.
- أستعمل اللوغاريتمات في حل معادلات أسية.
- أتعرف الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البياني.
- أحل مسائل فيزيائية وتطبيقات من واقع الحياة تتضمن الدوال الأسية واللوغاريتمية .

كيف يقوم العلماء بتحديد عمر الأحافير : تستخدم الدوال الأسية لنمذجة دوال خاصة تسمى دوال الإضمحلال الأسي والتي تستخدم في تحديد عمر الأحافير. يستعمل الكربون C–14وهو أحد نظائر الكربون المشعة الذي يتحلل بمرور الوقت كمقياس لتقدير أعمار الأحافير ذات الأساس البيولوجي كقطع الخشب وأوراق الشجر والعظام القديمة ... إلخ ، والتي قد يصل عمرها لأكثر من 50000 سنة ، فاذا كان لدينا كمية معينة من الكربون C–14، فإنه بعد مرور حوالي 5730 عام يكون قد تحلل نصفها ، وهذا ما يسمى بعمر النصف half-time ، ويكون هذا العمر بمثابة الاساس الذي يعتمد عليه علماء الجيولوجيا والإنثروبولوجيا في تقدير عمر الأثار والآحافير التي توجد على الكرة الأرضية.

تهيئة الوحدة السادسة

مراجعة

مثال 1 :

حل كلاً من المعادلتين الآتيتين :

a) $64 = 4^{x}$

$4^{3} = 4^{x}$

$3 = x$

b) $2^{x} = 16^{2}$

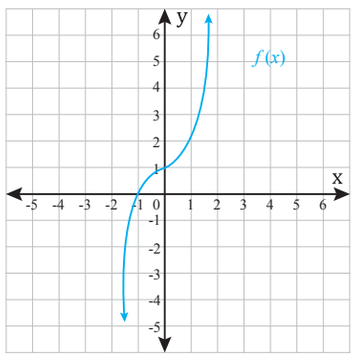
$2^{x} = (2^{4})^{2}$

$2^{x} = 2^{8}$

$x = 8$

مثال 2 :

في الشكل المقابل :
ارسم الدالة العكسية للدالة f (x) الممثلة بيانيا



الخطوة 1 :

ارسم المستقيم $y = x$

الخطوة 2 :

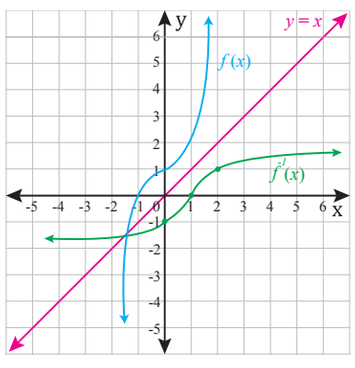
حدد بعض النقاط على منحنى الدالة ثم جد صورها بالانعكاس حول $y = x$

بعض النقاط : $(1,2)$, $(0,1)$, $(-1,0)$

صورها بالانعكاس حول $y = x$ $(2,1)$, $(1,0)$, $(0,-1)$

الخطوة 3 :

مثل النقاط $(0,-1)$, $(1,0)$, $(2,1)$ وارسم المنحنى المار بها لتحصل على الدالة العكسية للدالة الممثلة بيانيا .



اختبار

حل كلاً من المعادلات الآتية :

1) $9^{x} = 81$

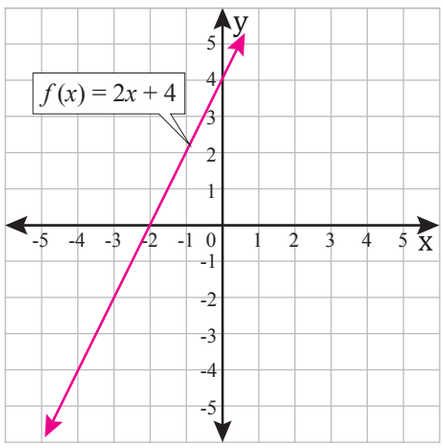
2) $3^{x} = 27$

3) $125 = 5^{x}$

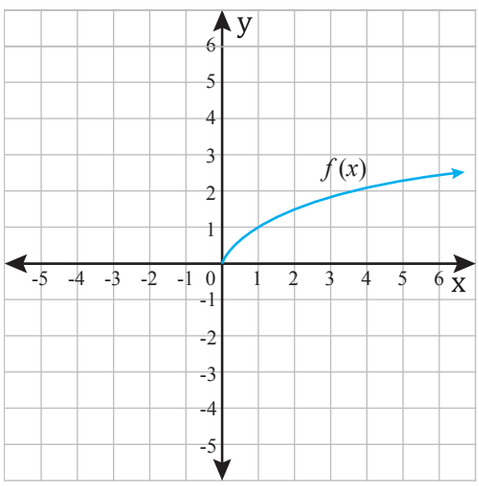
4) $3^{x+1} = 3^{5}$

5) ارسم الدالة العكسية للدالتين الممثلتين بيانيا

a)



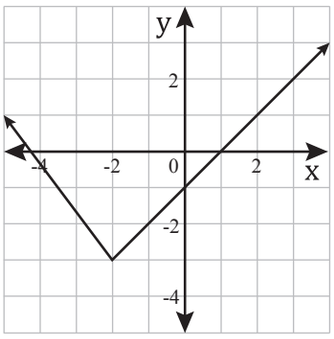
b)



مثال 3 :

استعمل التمثيل البياني أدناه في إيجاد كلٍ مما يأتي :

- المجال والمدى
- مقاطع المحاور
- فترات التزايد والتناقص



- المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

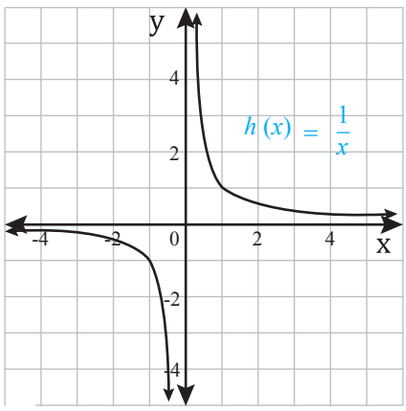
  المدى : $]-6 , \infty[$

- مقاطع المحاور : المنحنى يقطع المحور x عند -10 , 2 ويقطع المحور y عند النقطة -2
- فترات التزايد والتناقص : الدالة متناقصة على الفترة $]-\infty , -4[$ ومتزايدة على الفترة $]-4 , \infty[$

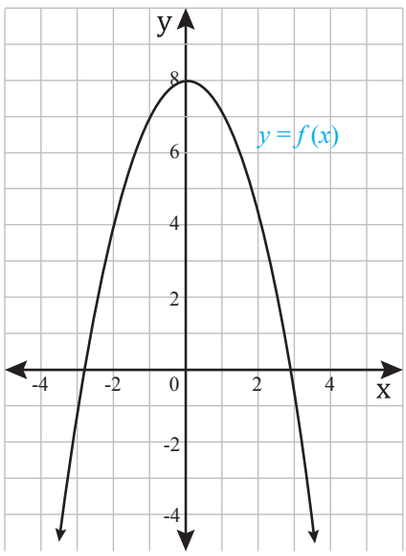
6) استعمل التمثيل البياني لكل دالة في إيجاد كلا مما يأتي :

- المجال والمدى
- مقاطع المحاور
- فترات التزايد والتناقص

a)



b)



6-1 الدوال الأسية
Exponential Functions

تمهيد

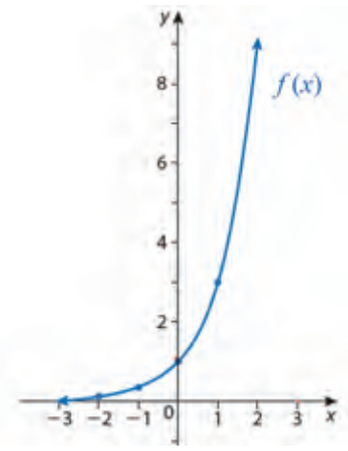
إذا وصلتك رسالة عبر البريد الإلكتروني ثم قمت بإعادة إرسالها إلى ثلاثة أشخاص ، ثم قام كل شخص من الثلاثة بإعادة إرسالها إلى ثلاثة أشخاص أخرين تولى كلا منهم إعادة إرسالها إلى ثلاثة أخرين وهكذا ...

إذا استمرت عملية الإرسال بهذا النمط ، سيزداد عدد الذين استلموا البريد الإلكتروني بشكل سريع ، هذا النمط في الزيادة يسمى إزدياداً أسياً ، ويمكن معرفة عدد الرسائل التي تم إرسالها بعد عدد x من مرات الإرسال باستعمال الدالة $y = 3^x$

تسمى مثل هذه الدوال التي أساسها ثابت وأسها متغير **بالدالة الأسية** exponential function

الدالة الأسية :

يوضح الشكل أدناه جدول لبعض قيم الدالة $f(x) = 3^x$، عند تعيين هذه النقاط في المستوى الإحداثي والتوصيل بينها بخط أملس نحصل على التمثيل البياني للدالة الأسية $f(x) = 3^x$



x	$f(x) = 3^x$
− 3	$\frac{1}{27}$
− 2	$\frac{1}{9}$
− 1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3
2	9
3	27

من التمثيل البياني يتضح أنه :

كلما زادت قيم x فإن قيم y تزداد، لذا فالدالة متزايدة على مجالها ، مع ملاحظة أن التزايد يكون بطيئا عند القيم السالبة وسريعا عند قيم x الموجبة .

وكلما اقتربت قيم x من سالب مالانهاية تقترب قيم y من الصفر ، لذا يمثل المحور x خط تقارب أفقي للدالة .

لا حظ أن الأساس في الدالة الأسية أعلاه ، عدد صحيح موجب أكبر من الصفر ، ماذا لو كان الأساس كسر محصور بين الواحد الصحيح والصفر ، كيف سيكون شكل التمثيل البياني لهذه الدالة ؟

أفكار الدرس

- أتعرف الدالة الرئيسة للدوال الأسية وتمثيلها البياني
- أتعرف دالتي النمو والاضمحلال الأسي وأميز بينهما.
- أتعرف دالة الأس الطبيعي وتمثيلها البياني.
- أحل مسائل فيزيائية وتطبيقات من واقع الحياة تتضمن الدوال الأسية.

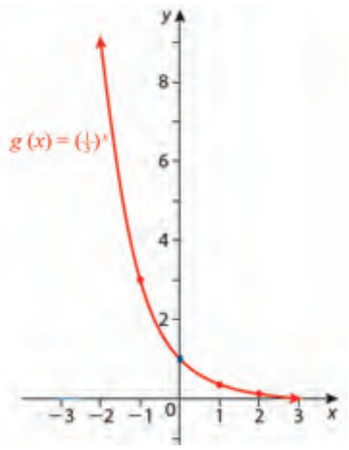
المعايير:

12F.5.8

المصطلحات:

- الدالة الأسية
  exponential function
- دالة النمو الأسي
  exponential growth function
- دالة الاضمحلال الأسي
  exponential decay function
- عامل النمو
  growth factor
- عامل الاضمحلال
  decay factor
- العدد النيبيري
  Napier's constant
- دالة الأس الطبيعي
  natural exponential function

يوضح الشكل أدناه جدول لبعض قيم الدالة $g(x) = (\frac{1}{3})^x$ ، عند تعيين هذه النقاط في المستوى الإحداثي والتوصيل بينها بخط أملس نحصل على التمثيل البياني للدالة الأسية $g(x) = (\frac{1}{3})^x$



x	$g(x) = (\frac{1}{3})^x$
− 3	27
− 2	9
− 1	3
0	1
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$
3	$\frac{1}{27}$

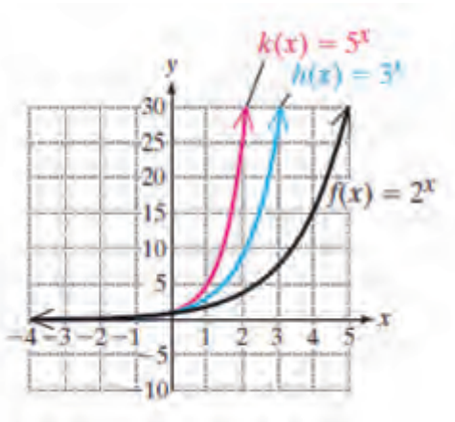
من التمثيل البياني يتضح أنه :

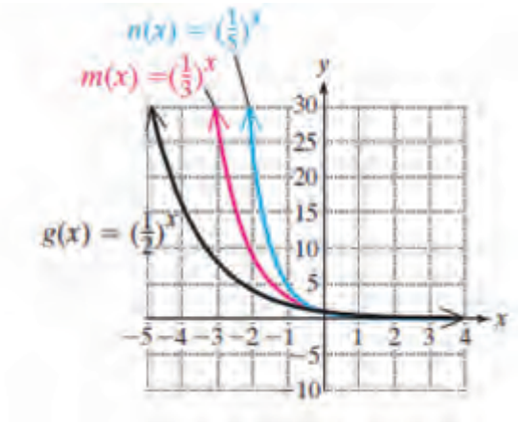
كلما زادت قيم x فإن قيم y تقل، لذا فالدالة متناقصة على مجالها ، مع ملاحظة أن التناقص يكون سريعا عند القيم السالبة وبطيئا عند قيم x الموجبة .

وكلما اقتربت قيم x من موجب مالانهاية تقترب قيم y من الصفر ، لذا يمثل المحور x خط تقارب أفقي للدالة .

يوضح الشكل التالي عدة تمثيلات بيانية للدالة الأسية $y = b^x$

لاحظ أن الدالة متزايدة على مجالها عندما $b > 1$ ومتناقصة عندما $0 < b < 1$

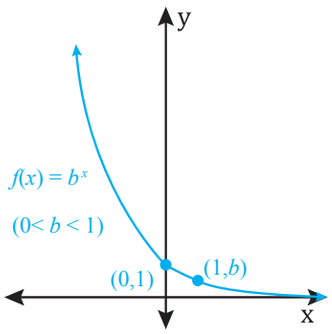


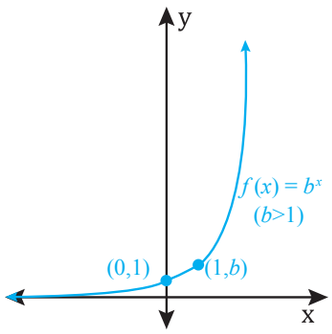


مفهوم

الدالة الأسية الرئيسة

هي دالة على الصورة $f(x) = b^x$ ، حيث الأس x متغير مستقل والأساس b عدد حقيقي موجب لا يساوي الواحد





أهم ما يميز تمثيلها البياني :

المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية أو $]-\infty , \infty[$ أو $\mathbb{R}$

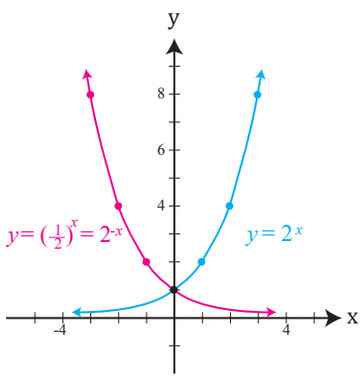
المدى : مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة أو $]0 , \infty[$ أو $\mathbb{R}^+$

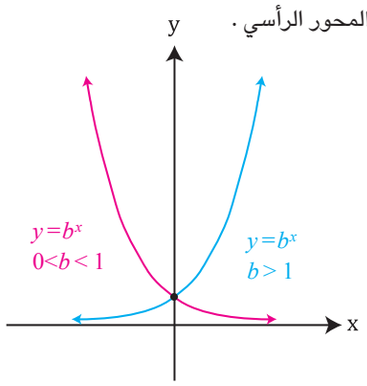
مقاطع المحاور : المقطع الرأسي $y = 1$

خطوط التقارب : خط تقارب أفقي معادلته $y = 0$

فترات التزايد والتناقص : متزايدة على مجالها عندما $b > 1$ ومتناقصة عندما $0 < b < 1$

عند تمثيل منحنى الدالتين $y = b^x , y = (\frac{1}{b})^x$ على نفس المستوى الإحداثي فإن كلا منهما هو انعكاس للآخر حول المحور الرأسي .



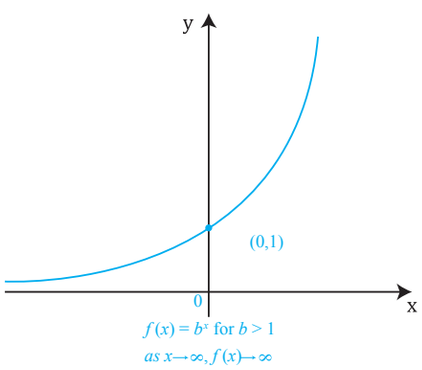


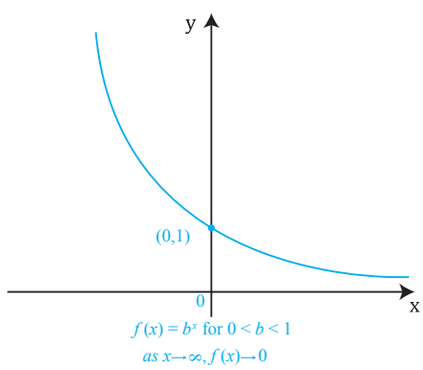
مفهوم

دالتي النمو والإضمحلال الأسي

تُصنف الدالة الأسية $y = b^x$ وفقا لقيمة الأساس b إلى دالتين :

- دالة النمو الأسي exponential growth function عندما $b > 1$ ، وفيها تزداد قيم y كلما زادت قيم x لذا الدالة متزايدة على مجالها.
- دالة الإضمحلال الأسي exponential decay function عندما $0 < b < 1$ ، وفيها تقل قيم y كلما زادت قيم x ، لذا فالدالة متناقصة على مجالها .

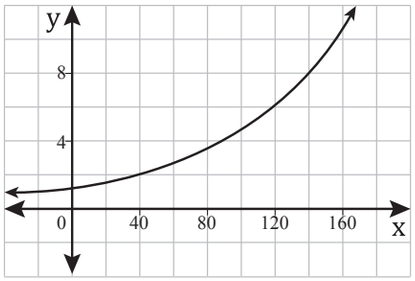




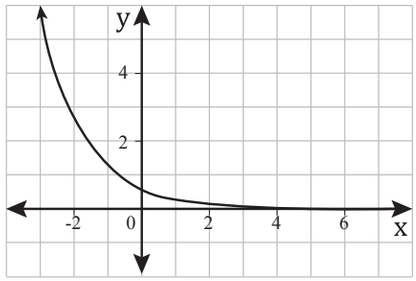
مثال 1 : تمييز دالة النمو والإضمحلال الأسي

أي مما يلي يمثل دالة نمو أسي وأيها يمثل دالة إضمحلال أسي ، فسر إجابتك

a)



b)



c) $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x$

d) $f(x) = (5)^x$

a) كلما زادت قيم x فإن قيم y تزداد ، إذن فالدالة متزايدة على مجالها ، وبالتالي فإن التمثيل البياني يمثل دالة نمو أسي .

b) كلما زادت قيم x فإن قيم y تقل ، إذن فالدالة متناقصة على مجالها ، وبالتالي فإن التمثيل البياني يمثل دالة إضمحلال أسي .

c) بما أن قيمة الأساس للدالة الأسية كسر محصور بين قيمتي الصفر والواحد الصحيح ، إذن فالصيغة تمثل دالة إضمحلال أسي .

d) بما أن قيمة الأساس للدالة الأسية عدد موجب أكبر من الواحد الصحيح ، إذن فالصيغة تمثل دالة نمو أسي.

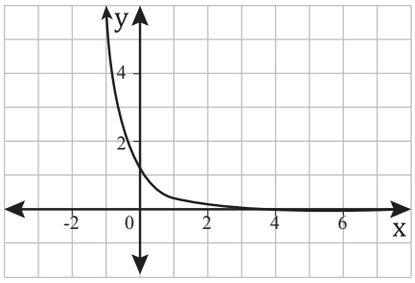
تحقق

1) أي مما يلي يمثل دالة نمو أسي وأيها يمثل دالة إضمحلال أسي ، فسر إجابتك

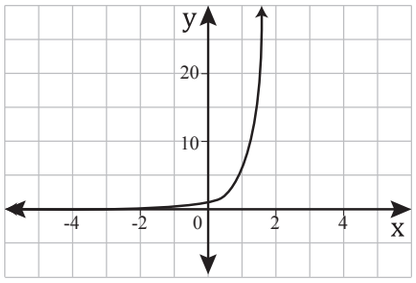
a) $y = (6)^x$

b) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

c)



d)



تستعمل دالة النمو الأسي التي على الصيغة $A(t) = A_0(1 + r)^t$ لحساب الزيادة في كمية ما بنسبة مئوية ثابتة خلال فترات زمنية متساوية ، حيث A_0 القيمة الابتدائية ، r النسبة المئوية للنمو ، t الزمن وفق ما يرد في المسألة. لاحظ أن أساس الدالة الأسية هنا يتكون من الواحد الصحيح مضافا إليه النسبة المئوية للزيادة ، يسمى $(1 + r)$ عامل النمو growth factor . تستعمل دوال النمو الأسي في تطبيقات كثيرة منها على سبيل المثال حسابات النمو السكاني والفوائد البنكية ، وأرباح الشركات ... إلخ

ويمكن حساب النقص في كمية ما بنسبة مئوية ثابتة خلال فترات زمنية متساوية باستعمال دالة الإضمحلال الأسي التي على الصيغة $A(t) = A_0(1 - r)^t$ حيث A_0 القيمة الابتدائية ، r النسبة المئوية للإضمحلال، t الزمن وفق ما يرد في المسألة . لاحظ أن أساس الدالة الأسية هنا يتكون من الواحد الصحيح مطروحا منه النسبة المئوية للنقصان ، يسمى$(1 - r)$ عامل الإضمحلال decay factor . تستعمل دوال الإضمحلال الأسي في تطبيقات كثيرة منها على سبيل المثال حسابات تناقص أعداد الوفيات أو تضاؤل كمية المواد مشعة أو ما تبقى من كمية الأدوية في جسم الإنسان ،...إلخ

مثال 2 : استعمال دالتي النمو والإضمحلال الأسي

خلال الفترة 2005 – 2015 بلغ المعدل السنوي للنمو السكاني لإحدى الدول 4% تقريبا ، إذا قدّرعدد سكان هذه الدولة عام 2005 بـ 3,500,000 نسمة تقريبا.

أكتب صيغة دالة أسية تمثل عدد السكان بعد مرور t سنة ، ثم استعملها لتقدير عدد سكان هذه المدينة عام 2020 لأقرب نسمة ؟

$$\begin{aligned} A(t) &= A_0(1 + r)^t \\ &= 3{,}500{,}000\ (1 + 0.04)^{15} \\ &= 3{,}500{,}000\ (1.04)^{15} \\ &= 6{,}303{,}302.269 \\ &\approx 6{,}303{,}302 \end{aligned}$$

إذن يُقدّر عدد سكان الدولة عام 2020 بحوالي 6,303,302 نسمة

التعداد أو الإحصاء السكاني

هو عملية منهجية موحدة تتم بشكل دوري وغالباً ما تكون حكومية ، ولا تتضمن عد السكان فحسب بل تمتد لتشمل جمع البيانات الديموغرافية والاقتصادية والاجتماعية التي تنطبق في فترة زمنية محدودة على كافة الأشخاص في الدولة أو جزء محدد منها.

تحقق

2) يحتوي كوب من الشاي الأخضر على 35 mg من مادة الكافيين ، إذا كان معدل تخلص جسم الشخص البالغ من هذه المادة 12.5% في الساعة .

أكتب صيغة دالة أسية تمثل كمية الكافيين بعد مرور t ساعة ، ثم استعملها لتقدير كمية الكافيين المتبقية في الجسم بعد مرور 3 ساعات من شرب الشاي الأخضر ؟

العـدد النيبـيري عندما قام العلماء بدراسـة الظواهـر الطبيعيّة، وتحليل نتائـج التجارب العلمية في العديـد من المجالات، والتعبير عنها باستعمال معادلات وصيغ رياضية، ظهر لديهم بعض الأعداد التي ما زالت مستخدمة إلى يومنا هذا . من أهمّ هـذه الأعـداد العدد النيبيري Napier's constant ، وتوصل إليه الفلكي وعالم الرياضيات الإسـكتلندي جون نايبير John Napier عندمـا قام بحسـاب قيمة المقـدار الأسي $(1+\frac{1}{x})$ لقيم كبيرة ، حيث لاحظ أنه كلمـا زادت قيم x فإن قيمة المقدار تقترب من عدد ثابت قيمته التقريبية $(e \approx 2.72)$

العدد النيبيري نسبة إلى الفلكي وعالم الرياضيات الإسكتلندي جون نايبير John Napier وهو عدد حقيقي غير نسبي فهو يتكون من عدد لا نهائي من الخانات العشرية غير المتكررة.

يدخـل العدد النيبيري في عدد كبير من التطبيقات التي تسـتخدم في توضيح وتفسـير بعض الظواهر التي تحدث في الطبيعة ، وتسـمى الدالة التي أساسـها العـدد النيبيري دالـة الأس الطبيعي natural exponential function

x	$(1+\frac{1}{x})^x$
100	2.70481382942
1000	2.71692393224
10,000	2.71814592683
100,000	2.71826823717
1,000,000	2.71828046932
1,000,000,000	2.71828182710

مفهوم دالة الأس الطبيعي

هي دالة أسية أساسها العدد النيبيري e ، وتكتب على الصورة : $f(x) = e^x$ حيث $(e \approx 2.72)$

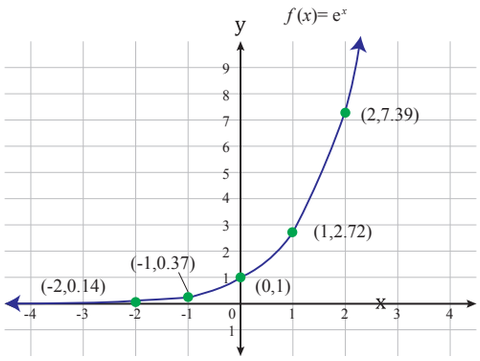
أهم ما يميز تمثيلها البياني :

المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

المدى : مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $\mathbb{R}^+$

مقاطع المحاور : المقطع الرأسي $y = 1$

خطوط التقارب : خط تقارب أفقي معادلته $y = 0$

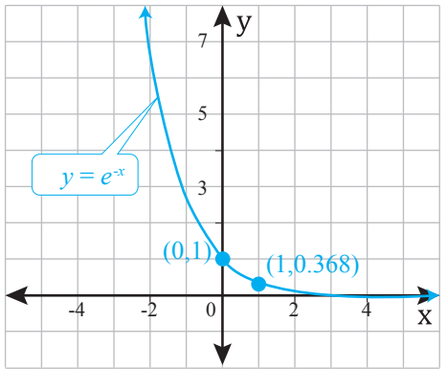


إرشـاد

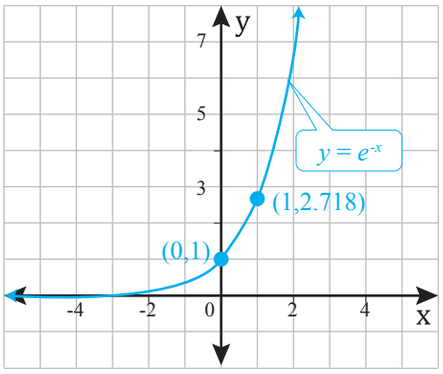
بعض قيم الدالة $y = e^x$ موضحة في الجدول أدناه :

x	$f(x) = e^x$
– 3	0.050
– 2	0.135
– 1	0.368
0	1.000
1	2.718
2	7.389
3	20.086

يوضح الشكل التالي فترات التزايد والتناقص لدالة الأس الطبيعي $y = e^x$



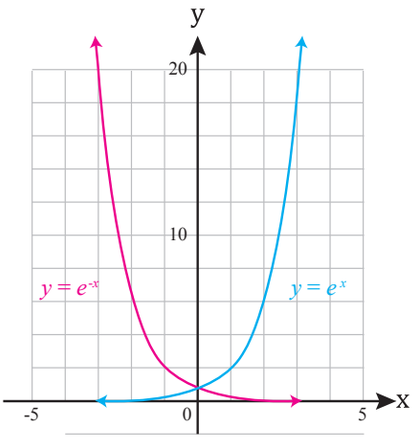
دالة إضمحلال أسي طبيعي



دالة نمو أسي طبيعي

فالدالة متزايدة على مجالها عندما تكون إشارة معامل x موجبة ، ومتناقصة عندما تكون إشارة المعامل سالبة .

عند تمثيل منحنى الدالتين $y = e^{-x}, y = e^x$ على نفس المستوى الإحداثي ، فإن كلا منهما هو انعكاس للآخر حول المحور الرأسي .



إرشـاد

دالة الأس الطبيعي :

من أهم الدوال الأسية المستعملة في العلوم كالفيزياء والكيمياء والأحياء. فعلى سبيل المثال تستعمل في حسابات نمو وتكاثر الكائنات وتضاؤل المحاليل الكيميائية والمواد المشعة، وإمتصاص الأدوية في الجسم، والفائدة المركبة.

النمو والإضمحلال الأسي المتواصل :

عندما تنمو (أو تضمحل) كمية ما باستمرار وبمعدل r خلال فترة زمنية محددة ، فإن كمية النمو أو الإضمحلال تعطى بالصيغة $A(t) = A_0\, e^{rt}$ وتسمى دالة النمو أو الإضمحلال الأسي المتواصل ، حيث :

$A(t)$: القيمة النهائية (بعد نموها أو إضمحلالها)

A_0 : القيمة الاولية

r : معدل النمو أو الإضمحلال (نمو عندما $r > 0$ ، واضمحلال عنما $r < 0$)

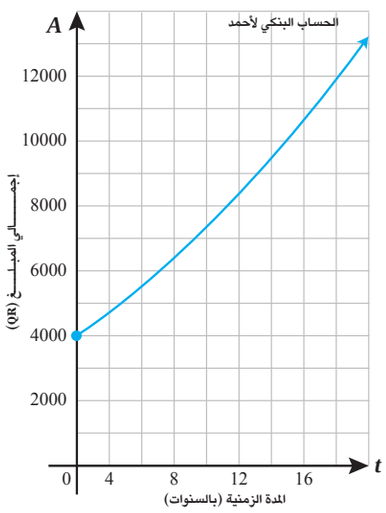
t : الزمن (وفق ما يرد في المسألة)

مثال 3 : **استعمال دالة النمو الأسي المتواصل**

أودع أحمد مبلغا من المال في بنك يحسب بشكل متواصل فائدة سنوية مركبة . يوضح الشكل المقابل إجمالي المبلغ لحسابه البنكي بعد مرور t سنة .

a) كم كان المبلغ الأصلي الذي أودعه أحمد في حسابه البنكي

b) قدّر إجمالي المبلغ في حساب أحمد بعد مرور 10 سنوات

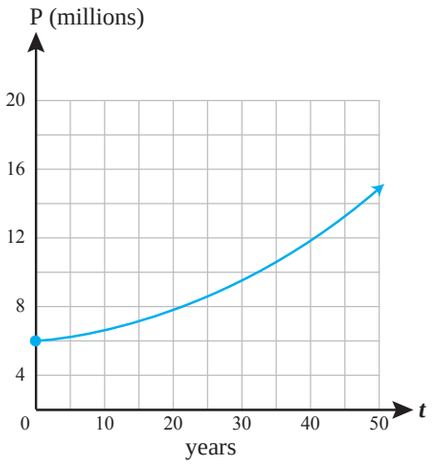


a) المبلغ الأصلي الذي أودعه أحمد في حسابه البنكي يبلغ ، QR 4000، وذلك لإن منحنى الدالة يقطع المحور y في النقطة (0,4000).

b) التمثيل البياني لحساب أحمد البنكي يُشير إلى أنه عند $t = 10$ فإن إجمالي المبلغ يُصبح تقريبا QR 7250

تحقق

يوضح الشكل التالي النمو الأسي المتواصل P بالملايين لسكان إحدى الدول بعد مرور t سنة .



3A) ما عدد السكان الحالي لهذه المدينة ؟

3B) قدّر عدد سكان المدينة بعد 15 سنة ؟

3C) بعد كم سنة تقريبا يتضاعف عدد سكان المدينة؟

مثال 4 : **استعمال دالة الإضمحلال الأسي المتواصل**

في أحد المحميات الطبيعية ، يتناقص عدد الأرانب بشكل متواصل .

إذا كان عدد الأرانب بعد مرور t من السنوات

يُعطى بالصيغة : $R = 230\ e^{-0.2t}$

a) ما عدد الأرانب الأولي في المحمية ؟

b) قدّر عدد الأرانب بعد 3 سنوات؟

a) عدد الأرانب عند بدء تطبيق البرنامج هو 230 أرنب

b) لإيجاد عدد الأرانب بعد 3 سنوات نعوض $t = 3$:

$$R = 230e^{-0.2t}$$
$$= 230 \times e^{-0.2(3)}$$
$$\approx 126.2$$

إذن بعد مرور 3 سنوات سيصبح عدد الأرانب في المحمية 126 أرنبا تقريبا

تحقق

تتضاءل كمية مادة مشعة وفق الصيغة $M(t) = 1500e^{-0.032t}$

حيث M كتلة المادة بالجرامات ، t الزمن بالسنوات .

4A) ما كتلة المادة المشعة الأصلية ؟

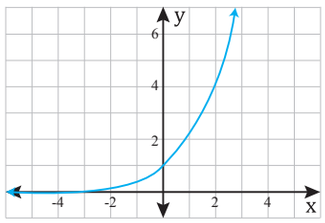
4B) أحسب كتلة ما تبقى من المادة المشعة بعد مرور 70 سنة ؟

تمارين 6-1

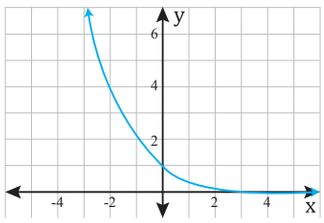
مثال 1

1) أي من التمثيلات البيانية التالية يمثل دالة نمو أسي وأيها يمثل دالة إضمحلال أسي ؟ فسر إجابتك

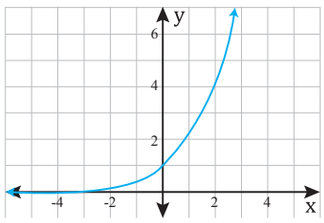
a)



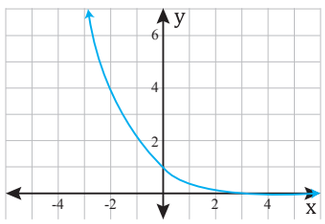
b)



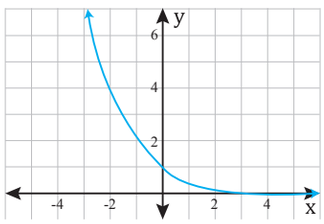
c)



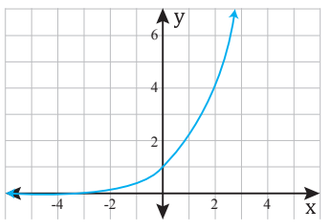
d)



e)



f)



2) أي مما يلي يمثل دالة نمو أسي وأيها يمثل دالة إضمحلال أسي ؟ فسر إجابتك

a) $y = 6^{x}$ b) $y = (1.2)^{x}$ c) $y = 7^{x}$ d) $y = (0.75)^{x}$

e) $y = (\frac{1}{6})^{x}$ f) $y = (0.6)^{x}$ g) $y = (\frac{1}{8})^{x}$ h) $y = (1.8)^{x}$

مثال 2

3) اشترى عبدالله قطعة أرض بسعر QR 2,250,000 إذا كان سعرها يزيد بمعدل 1.4% سنويا . أكتب دالة أسية تمثل سعر الأرض بعد t سنة من شرائها ، ثم استعمل هذه الصيغة لتقدير سعر قطعة الأرض بعد 7 سنوات من شرائها ؟

4) إذا كان عدد سكان دولة يتزايد بمعدل 3.5% سنويا ، إذا ستمرت الزيادة بنفس المعدل . قدّر كم سيصبح عدد سكان هذه الدولة بعد 10 سنوات ، إذا علمت أن عددهم في العالم الحالي 2,350,000 نسمة .

5) يتناقص ثمن سلعة بمعدل 32% سنويا ، إذا علمت أن ثمنها اليوم $1200 ، أكتب دالة أسية تمثل ثمن السلعة بعد t سنة من شرائها ، ثم استعمل هذه الصيغة لتقديرها بعد 5 سنوات من شرائها ؟

6) يتناقص سعر سيارة سنويا بمعدل 11% . أكتب دالة أسية تمثل ثمن السيارة بعد t سنة من شرائها ، ثم استعمل هذه الصيغة لتقدير سعر السيارة بعد 6 سنوات من شرائها ، إذا علمت أن سعر السيارة الأصلي QR 200,000

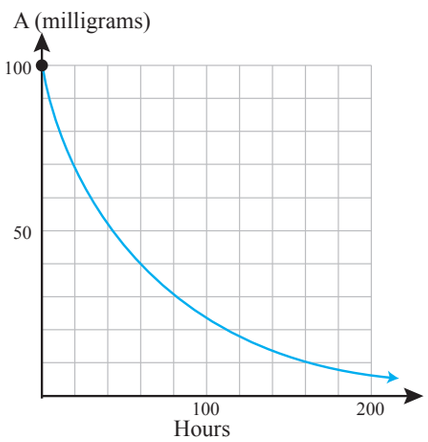
مثال 3

7) يوضح الشكل المقابل الإضمحلال الأسي المتواصل لكتلة مادة A بعد مرور t ساعة

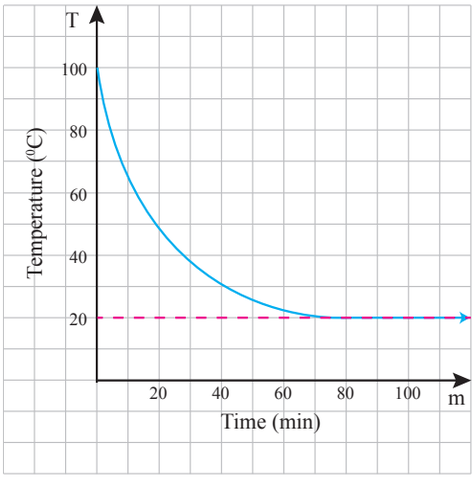
a) ما كتلة المادة المشعة الاصلية ؟

b) قدّر كتلة ما تبقى من المادة بعد مرور 80 ساعة ؟

c) بعد كم ساعة تقريبا تتضاءل كتلة المادة إلى النصف ؟



8) يوضح الشكل المقابل تناقص أسي متواصل لدرجة حرارة كوب من الماء المغلي كل دقيقة في غرفة درجة حرارتها 20 درجة مئوية



a) قدّر درجة حرارة الماء بعد مرور 40 min ؟

b) بعد كم دقيقة تقريبا تصبح درجة حرارة الماء $50^{o}C$؟

c) يوضح التمثيل البياني وجود خط تقارب أفقي للدالة .

أكتب معادلته ثم وضح ماذا يعني في هذه المسألة؟

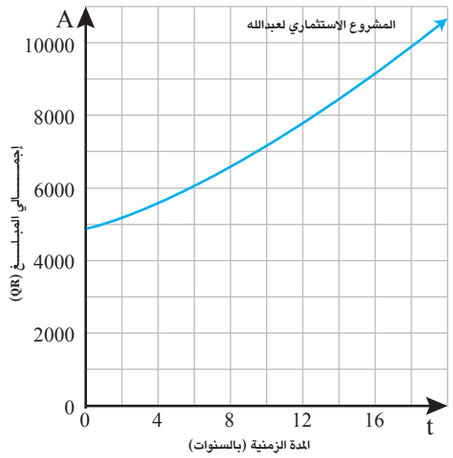
مثال 4

9) تنتشر القوارض في مزرعة بشكل متواصل وفق الصيغة : $A = 2000e^{0.015t}$ ، حيث A المساحة التي تنتشر فيها القوارض ، t الزمن بالأيام ، قدّر لأقرب متر مربع المساحة التي تنتشر فيها القوارض بعد أسبوع .

10) يتزايد سكان إحدى المدن سنويا وفق الصيغة : $N = 120{,}000e^{0.027t}$. قدّر لأقرب نسمة عدد سكان المدينة بعد 5 سنوات .

11) يستهلك جسم مريض جرعة دواء وفق الصيغة $C = 150e^{-0.07t}$ ، حيث C تركيز جرعة الدواء المتبقية في جسم المريض بالميليمترات ، t الزمن بالساعات . ما كمية الدواء المتبقية في جسم المريض بعد 10 ساعات .

12) استثمر كل من فهد وعبدالله مبلغا في مشاريع تجارية تحسب فائدة سنوية مركبة . إذا كان إجمالي المبلغ A لاستثمار فهد بعد مرور t سنة يُعطى بالصيغة $A(t) = 3224e^{0.05t}$ ، بينما إجمالي المبلغ المستثمر لعبدالله بعد مرور t سنة يُعطى بالتمثيل البياني الموضح أدناه :



a) كم كان المبلغ الأصلي الذي استثمره كلا من فهد وعبدالله في حسابه البنكي

b) قارن بين إجمالي المبلغ في حساب كلا منهما بعد مرور 12 سنة

c) بفرض أن حسن أستثمر مبلغ QR 5500 في مشروع يحسب بشكل متواصل فائدة مركبة نسبتها السنوية 3.75% ، أحسب إجمالي المبلغ المستثمر في مشروع حسن بعد 12 سنة ثم قارنه مع إجمالي المبالغ المستثمرة لكلا من فهد وعبدالله ؟

مسائل مهارات التفكير العليا

13) لديك الدوال الأسية التالية :

a) $f(x) = 4^x$ b) $g(x) = (\frac{1}{4})^x$ c) $h(x) = 2^x$

ما قيمة x التي تتساوى عندها قيم الدوال الثلاث ؟ وما هي هذه القيمة ؟ فسر إجابتك

14) يبلغ سُمك الورقة الاعتيادية 0.005 cm ، قام شخص بقصها إلى نصفين ثم وضع النصفين فوق بعضهما البعض ليقصهما معا إلى نصفين وضع بعضهما فوق بعض ليقصها ، بفرض أن هذا النمط في قص الأجزاء استمر عدة مرات . أكتب صيغة لدالة تمثل عدد قطع الورق بعد القص n مرة ، ثم استعملها لإيجاد سُمك الرزمة الناتجة من تراكم عدد القطع بعد القص 30 مرة ؟

15) صل كل تمثيل بياني مما يلي بدالة النمو أو الإضمحلال المناسبة :

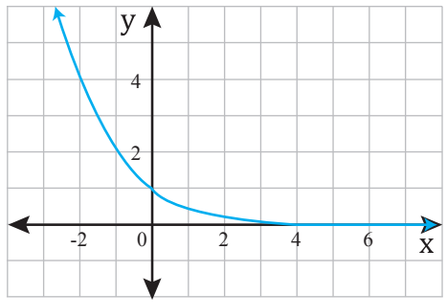
a) دالة نمو بمعدل 1.5%

b) دالة إضمحلال بمعدل النصف

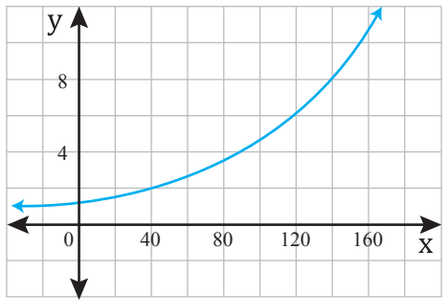
c) دالة نمو بمعدل عشرة أضعاف

d) دالة إضمحلال بمعدل 80%

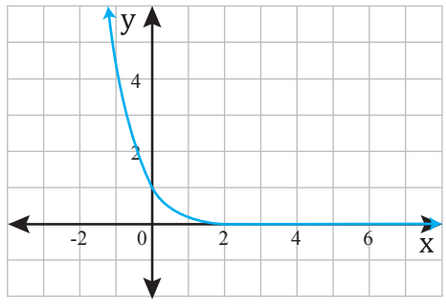
A)



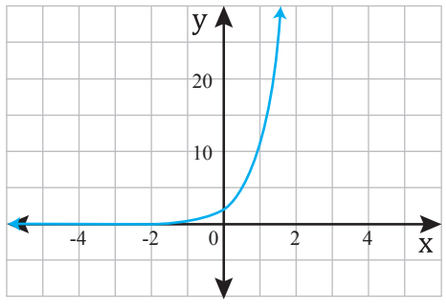
B)



C)



D)



6-2 اللوغاريتمات
Logarithms

أفكار الدرس

- اتعرف مفهوم اللوغاريتم باعتباره عملية عكسية لرفع عدد ما لأس.
- أحول الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية والعكس.
- اتعرف خواص اللوغاريتم المعتاد والطبيعي واستعملها في حل معادلات أسية .

المعايير:

12F.5.8

المصطلحات:

- لوغاريتم
  logarithm
- اللوغاريتم المعتاد
  common logarithm
- اللوغارتيم الطبيعي
  natural logarithm

تمهيد

يوضح الجدول المقابل عدة معادلات أسية، البعض منها يمكن حلها بسهولة ، لأن الثابت في الطرف الأيمن للمعادلة يمكن كتابته في صورة قوة لنفس الأساس في الطرف الأيسر.

Equation		Solution
$5^x = 5$	⟶	$x = 1$
$5^x = 20$	⟶	$x = ?$
$5^x = 25$	⟶	$x = 2$
$5^x = 60$	⟶	$x = ?$
$5^x = 125$	⟶	$x = 3$

ولكن في البعض الآخر ، على سبيل المثال $5^x = 20$ لا يمكن كتابة العدد 20 في صورة قوة للأساس 5 وكذلك $5^x = 60$ لا يمكن كتابة العدد 60 في صورة قوة للأساس 5 . لحل مثل هذه المعادلات الأسية نستعمل اللوغاريتميات.

يُعرف اللوغاريتم logarithm على أنه العملية العكسية لرفع عدد ما لأس ، فعلى سبيل المثال رفع العدد 2 للأس 3 يساوي 8 ، لأن الـ 8 تنتج عن ضرب 2 في نفسها 3 مرات .

ويُعبر عن ذلك رياضيا بالصورة : $2^3 = 2 \times 2 \times 2$

وبالتالي تكون العملية العكسية للرفع هي لوغاريتم 8 للأساس 2 يساوي 3

ويُعبر عن ذلك رياضيا بالصورة : $\log_2 8 = 3$ وتُقرأ : (لوغارتيم 8 للأساس 2 يساوي 3)

حيث أن الناتج الذي نحصل عليه هنا (قيمة اللوغارتيم) تمثل 3 وهوالعدد الذي ينبغي أن نرفع له الأساس 2 للحصول على 8 .

مفهوم — اللوغاريتم

لوغاريتم a للاساس b هو الأس الذي يجعل المعادلة $a = b^c$ صحيحة

حيث a , b عددين موجبين ، $b \neq 1$ ، ويُعبر عن ذلك رياضيا بالصيغة : $\log_b a = c$

مثال : $\log_5 25 = 2$ لأن $5^5 = 25$ وتقرأ : لوغاريتم 25 للأساس 5 يساوي 2

لاحظ أن الصورة اللوغاريتمية تُكافىء الصورة الأسية ، لذا بسهولة يمكن التحويل من إحدى الصورتين إلى الأخرى .

Logarithmic Form		Exponential Form
$\log_b (a) = c$	$\Longleftrightarrow$	$b^c = a$
$\log_4 16 = 2$	$\Longleftrightarrow$	$4^2 = 16$

مثال 1 : تحويل الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية

حول الصورة الأسية إلى الصورة اللوغارتيمية :

a) $4^{\frac{1}{2}} = 2$

$\log_4 2 = \frac{1}{2}$

b) $15^3 = 3375$

$\log_{15} 3375 = 3$

تحقق

حول الصورة الأسية إلى الصورة اللوغارتيمية :

1A) $6^2 = 36$

1B) $10^6 = x$

1C) $10^x = 100$

1D) $32^7 = x$

قراءة

أدخل مفهوم اللوغاريتمات إلى الرياضيات في أوائل القرن السابع عشر على يد عالم الرياضيات الاسكتلندي جون نابيير كوسيلة لتبسيط الحسابات ، ليعتمد عليها بعد ذلك الملاحين والعلماء والمهندسين والفلكيين وغيرهم لإنجاز حساباتهم بسهولة أكبر مستخدمين المساطر الحاسبة والجداول اللوغاريتمية .

قراءة

لوغاريتـم هي كلمة إنجليزية أخذت من اسم العالم العربي الخوارزمي.

مثال 2 : **تحويل الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية**

حول الصورة اللوغارتيمية إلى الصورة الأسية :

a) $\log_5 125 = 3$

$5^3 = 125$

b) $\log_4 \frac{1}{256} = -4$

$\frac{1}{256} = 4^{-4}$

تحقق

حول الصورة اللوغارتيمية إلى الصورة الأسية :

2A) $\log_3 81 = 4$ **2B)** $\log_2 64 = 6$

2C) $\log_x 49 = 2$ **4D)** $\log_3 \frac{1}{9} = -2$

حالات خاصة من اللوغاريتمات : عندما يكـون العدد 10 أسـاس اللوغارتيم يسـمى **اللوغاريتم المعتاد** common logarithm أو اللوغاريتم العشري ، ويُكتب دون كتابة الأساس 10 ، حيث $\log x = \log_{10} x$ أي أنه إذا لم يكتب أساس اللوغارتيم فإن أساسه يكون العدد 10 .

وعندمـا يكون الأسـاس هـو العدد النيبيري e يسـمى **اللوغارتيم الطبيعـي** natural logarithm ، ويرمز له بالرمز ln حيث : $\ln x = \log_e x$

إرشـاد

Common Logarithm: $\log x = y \longleftrightarrow 10^y = x$

Natural Logarithm: $\ln x = y \longleftrightarrow e^y = x$

تحوي الحاسـبات العلمية مفاتيح لحسـاب اللوغاريتمات ، فالمفتاح log يسـتعمل لإيجـاد قيمة اللوغاريتم المعتاد والمفتاح ln يستعمل لحساب اللوغاريتم الطبيعي .

مثال 3 : **إيجاد قيمة اللوغاريتم باستعمال الحاسبة العلمية**

استعمل الحاسبة العلمية لإيجاد قيمة اللوغاريتمات التالية لأقرب جزء من عشرة آلاف :

a) log 5

$\log 5 \approx 0.6990$

اضغط على المفاتيح: log 5 = 0.6989700043

b) In 12

$\ln 12 \approx 2.4849$

اضغط على المفاتيح: ln 12 = 2.48490665

تحقق

استعمل الحاسبة العلمية لإيجاد قيمة اللوغاريتمات التالية لأقرب جزء من مئة :

3A) log 23 **3B)** In 31

مفهوم بعض خصائص اللوغاريتمات

1) خصائص أساسية :

لأي لوغاريتم عشري : $\log 1 = 0$ ، $\log 10 = 1$

لأي لوغاريتم طبيعي : $\ln 1 = 0$ ، $\ln e = 1$

2) خاصية لوغاريتم القوة :

لوغاريتم القوة يساوي حاصل ضرب الأس في لوغاريتم أساس القوة ، ويُعبر عن ذلك رياضيا بالصيغة :

$\log (m^n) = n \times \log m$ حيث n عدد حقيقي ، m عدد موجب

مثال : $\log 3^2 = 2 \log 3$ ، $\ln 5^6 = 6 \ln 5$

3) خاصية المساواة للمعادلات اللوغاريتمية :

إذا كان $x = y$ فإن $\log x = \log y$ والعكس صحيح

مثال : إذا كان $x = 3$ فإن $\log x = \log 3$ إذا كان $5x = 4$ فإن $\ln 5x = \ln 4$

مثال 4 : تحويل الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية

حل كلا من المعادلات الأتية مقربا إلى أقرب جزء من مئة :

a) $4^x = 19$

$4^x = 19$	المعادلة الأصلية
$\log 4^x = \log 19$	خاصية المساواة للدوال اللوغاريتمية
$x \log 4 = \log 19$	خاصية لوغاريتم القوة
$x = \frac{\log 19}{\log 4}$	بقسمة كلا الطرفين على $\log 4$
$x \approx 2.12$	باستعمال الحاسبة

b) $3^{5x} - 4 = 98$

$3^{5x} - 4 = 98$	المعادلة الأصلية
$3^{5x} = 98 + 4$	اجمع 4 لكلا الطرفي
$3^{5x} = 102$	بسّط
$\log 3^{5x} = \log 102$	خاصية المساواة للمعادلات اللوغاريتمية
$5x \log 3 = \log 102$	خاصية لوغاريتم القوة
$x = \frac{\log 102}{5 \log 3}$	اقسم كلا الطرفين على $5 \log 3$
$x \approx 0.84$	استعمل الآلة الحاسبة

c) $e^{3x+2} = 5$

$e^{3x+2} = 5$	المعادلة الأصلية
$\ln e^{3x+2} = \ln 5$	خاصية المساواة للمعادلات اللوغاريتمية
$(3x + 2) \ln e = \ln 5$	$\ln e = 1$
$3x = -2 + \ln 5$	اطرح 2 من كلا الطرفين
$x = \frac{-2 + \ln 5}{3}$	اقسم كلا الطرفين 3
$x \approx 0.13$	استعمل الآلة الحاسبة

تحقق

حل كلا من المعادلات الأتية مقربا إلى أقرب جزء من مئة :

4A) $7^{3x} = 15$ **4B)** $5^{x+5} + 2 = 9$ **4C)** $e^{x+2} = 7$

مثال 5 : **حل معادلة أسية باستعمال اللوغاريتم**

أودع فيصل مبلغ QR 5,000 في بنك يحسب فائدة مركبة نسبتها السنوية 5.2%. بعد كم سنة يتجاوز إجمالي المبلغ الذي أودعه QR 20,000 ؟

$$A(t) = A_0 (1 + r)^t$$

$$20{,}000 = 5{,}000 \times (1.052)^t$$

$$(1.052)^t = 4$$

$$\log (1.052)^t = \log 4$$

$$t \times 1.052 = \log 4$$

$$t = \frac{\log 4}{\log 1.052}$$

$$t \approx 27.3$$

إذن بعد حوالي 27 سنة يتجاوز جملة المبلغ المُودع QR 20,000

تحقق

5) اشترى شخص سيارة بمبلغ QR 180 000 ، إذا كان سعرها يتناقص سنويا بمعدل 3% بعد كم سنة يصل سعر السيارة QR 120000 ؟

تمارين 6-2

مثال 1 **1) حول الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية :**

a) $12^2 = 144$ **b)** $8^{\frac{1}{3}} = 2$ **c)** $10^{-5} = 0.000\,01$ **d)** $7^{2x} = y + 3$

مثال 2 **2) حول الصورة اللوغارتيمية إلى الصورة الأسية :**

a) $\log_5 25 = 2$ **b)** $\log_8 4 = \frac{2}{3}$ **c)** $\log 1\,000\,000 = 6$ **d)** $\log_{11}(x + 3) = y$

مثال 3 **3) استعمل الحاسبة العلمية لإيجاد قيمة اللوغاريتمات التالية لأقرب جزء من عشرة آلاف :**

a) log 3 **b)** log 3.2 **c)** log 74 **d)** log 0.8

e) log 64 **f)** log 128 **g)** ln 8.2 **h)** ln 31

مثال 4 **4) حل كلا من المعادلات الآتية مقربا إلى أقرب جزء من مئة :**

a) $5^x = 9$ **b)** $5^{4x} = 3$ **c)** $4^{4x} = 17$

d) $e^{x-2} = 8$ **e)** $e^{x+1} = 9$ **f)** $e^{4x-2} = 5$

مثال 5 **5) اشترى شخص قطعة أرض بسعر QR 2,250,000 إذا كان سعرها يزيد بمعدل 1.4% سنويا . بعد كم سنة يصل سعر الأرض QR 3,000,000 ؟**

6) يتناقص ثمن سلعة بمعدل 32% سنويا ، إذا علمت أن ثمنها اليوم $1200 ، بعد كم سنة يصبح سعرها $100

7) أكمل الجدول التالي بكتابة الصورة الأسية المكافئة للصورة اللوغاريتمية والعكس :

	Exponential Form	Logarithmic Form
1.	$2^5 = 32$	
2.		$\log_3 81 = 4$
3.	$Z^y = x$	
4.		$\log_b a = c$
5.	$10^3 = 1000$	
6.		$\log 10 = 1$
7.	$e^a = b$	
8.		$\ln p = q$
9.	$(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$	
10.		$\log_{1/3} 9 = -2$
11.	$10^{-2} = 0.01$	
12.		$\log 4 = x$
13.	$e^0 = 1$	
14.		$\ln e = 1$
15.	$25^{1/2} = 5$	
16.		$\log_{16} 2 = \frac{1}{4}$
17.	$e^1 = s$	
18.		$\ln w = r$
19.	$15^{-2} = \frac{1}{225}$	
20.		$\log_3 p = -1$

اختيار من متعدد :

8) ما قيمة $\log 243$ ؟

A) 2.3856 **B)** 5 **C)** 6.2403 **D)** 81

9) ما الصيغة اللوغاريتمية المكافئة للصيغة الأسية $e^x = 13$ ؟

A) $\ln 13 = x$ **B)** $\ln x = 13$ **C)** $\log_x 13 = e$ **D)** $\log e^x = 13$

10) ما الصيغة الأسية المكافئة للصيغة اللوغاريتمية $k = -\log_h 5$ ؟

A) $h^k = \frac{1}{5}$ **B)** $h^k = -5$ **C)** $k^h = \frac{1}{5}$ **D)** $k^h = -5$

11) أي مما يلي يمثل حل المعادلة : $e^{2x+1} = 4$ لأقرب جزء من مئة ؟

A) 0.19 **B)** 0.39 **C)** 1.5 **D)** 2.39

مسائل مهارات التفكير العليا

12) أوجد قيمة x في المقدار اللوغريتمي $\log_x 16 = \frac{4}{3}$

13) تستعمل الصيغة $W = 90 \log d + 60$ لقياس سرعة الرياح (بوحدة الميل لكل ساعة) قرب موقع حدوث الإعصار حيث d المسافة التي يقطعها الإعصار بالميل . أعد كتابة الصيغة بالصورة الأسية . (حل الصيغة بالنسبة للمتغير d)

14) فيما يلي الخطوات التي قام بها فيصل لحل المعادلة الأسية $2(3^x) = 8$ ، ناقش صحة أو خطأ الحل النهائي الذي توصل إليه مقدما تبريرا لكل خطوة قام بها .

$$2(3^x) = 8$$
$$6^x = 8$$
$$\log 6^x = \log 8$$
$$x \log 6 = \log 8$$
$$x = \frac{\log 8}{\log 6}$$
$$x \approx 0.12$$

15) تم إنشاء موقع إلكتروني جديد خاص بالتغذية الصحية ، إذا كان عدد المتابعين لهذا الموقع يزداد وفق الصيغة الأسية : $N(t) = (1.1)^t$ ، حيث N عدد المتابعين بعد مرور t يوم . متى يتجاوزعدد المتابعين للموقع 1,000,000 شخص ؟

6-3 الدوال اللوغاريتمية
Logarithmic Functions

أفكار الدرس

- اتعرف الدالة الرئيسة للدوال اللوغاريتمية وتمثيلها البياني
- استنتج العلاقة بين الدالة اللوغاريتمية والدالة الأسية.
- اتعرف دالة اللوغاريتم الطبيعي وتمثيلها البياني.
- أحل مسائل فيزيائية وتطبيقات من واقع الحياة تتضمن الدوال الأسية.

المعايير:

12F.5.8

المصطلحات:

- دالة اللوغاريتم
  logarithmic function
- دالة اللوغاريتم الطبيعي
  natural logarithmic function

تمهيد

يستخدم مهندسو ومطورو البرامج الكمبيوترية اللوغاريتمات في تصميم برمجيات لإنشاء برامج محددة، مثل الرسوم البيانية التي تقارن البيانات الإحصائية ، ويتم الاستعانة بالدوال اللوغاريتمية لإقامة علاقات غير خطية ، كما تستعمل أنواع محددة من اللوغاريتمات في تطوير منتجات مايكروسوفت ويندوز.

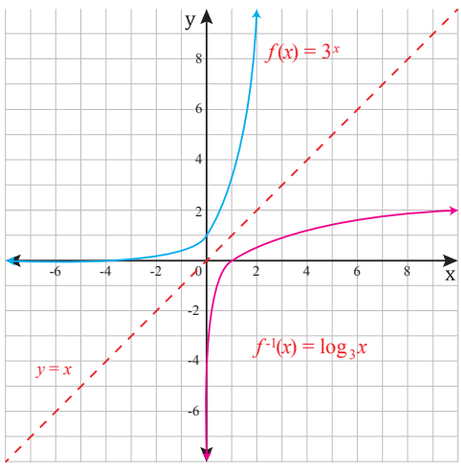
الدالة اللوغاريتمية:

ما يُميز الدالة الأسية $f(x) = b^x$ أنها دالة واحد إلى واحد وبالتالي يوجد لها معكوس يمكن إيجاده جبريا باتباع الخطوات التالية :

الدالة الأسية الأم	$f(x) = b^x$
عوض عن $f(x)$ بـ y	$y = b^x$
بدل بين x , y	$x = b^y$
حل المعادلة باستعمال تعريف اللوغاريتم	$y = \log_b x$
عوض عن y بـ $f^{-1}(x)$	$f^{-1}(x) = \log_b x$

يوضح الشكل أدناه التمثيل البياني وجدول القيم للدالة الأسية $y = 3^x$ ومعكوسها $y = \log_3 x$

$f(x) = 3^x$	
x	y
-3	$\frac{1}{27}$
-2	$\frac{1}{9}$
-1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3
2	9
3	27



$f^{-1}(x) = \log_3 x$	
x	y
$\frac{1}{27}$	-3
$\frac{1}{9}$	-2
$\frac{1}{3}$	-1
1	0
3	1
9	2
27	3

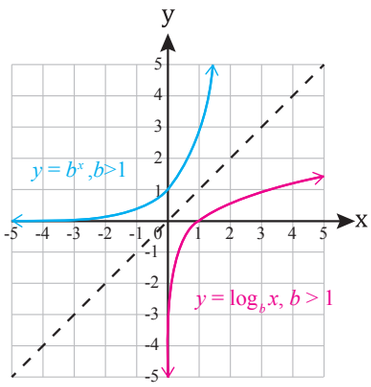
يتضح من التمثيل البياني للدالتين ، أن الدالة اللوغاريتمية logarithmic function هي معكوس الدالة الأسية حول المحور $y = x$ (والعكس صحيح)

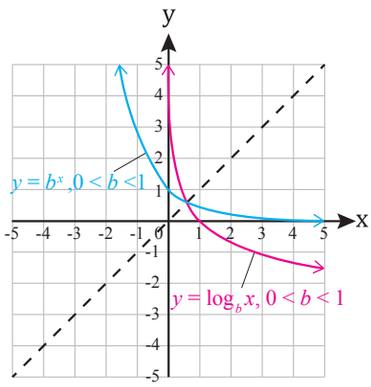
مفهوم

الدالة اللوغاريتمية الرئيسة

الدالة اللوغاريتمية $f(x) = \log_b x$ حيث $b > 0$ ، $b \neq 1$ هي معكوس الدالة الأسية $f(x) = b^x$

ولذا ، فإن التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية هو انعكاس للدالة الأسية حول المحور $y = x$





أهم ما يميز تمثيلها البياني :

المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة أو $\mathbb{R}^+$

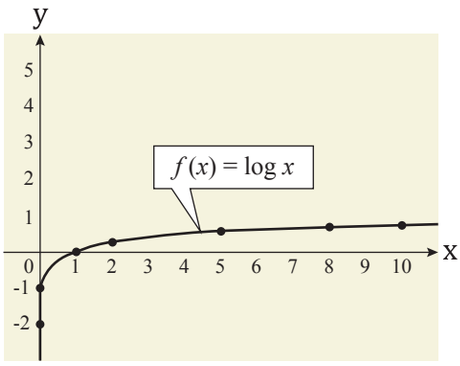
المدى : مجموعة الأعداد الحقيقية أو $\mathbb{R}$

مقاطع المحاور : المقطع الأفقي $x = 1$

خطوط التقارب : خط تقارب رأسي معادلته $x = 0$

التزايد والتناقص : متزايدة على مجالها عندما $b > 1$ ومتناقصة عندما $0 < b < 1$

دالة اللوغاريتم المعتاد : يوضح الشكل التالي دالة اللوغاريتم للأساس 10 ، لاحظ أنه :



- **عندما تزداد قيم x إلى مالانهاية ، فإن قيم y تزداد إلى مالانهاية .**
- **عندما تقترب قيم x من الصفر فإن قيم y تقترب من سالب مالانهاية ، ولذا فإن منحنى الدالة يقترب من المحور الرأسي ولا يمسه.**
- **لأي دالة لوغاريتم معتاد : $\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$**

مثال 1 :

استعمال دالة اللوغاريتم المعتاد

أجريت تجربة على مجموعة من الطلبة لقياس مدى احتفاظهم بالمحتوى المعرفي للمواد التي يدرسونها ، حيث يتم إعادة اختبارهم في المواد وبشكل منتظم كل شهر بدءا من الشهر الذي يلي اجتيازهم الاختبار الأصلي للمادة.

إذا كان تقدير درجة أحد الطلبة في مادة الرياضيات بعد مرور t شهر من انتهاء اختباره فيها يُعطى بالدالة :

$$S(t) = 85 - 25\log(t + 1)$$

a) أحسب درجة الطالب في الاختبار الأصلي ؟

b) قدّر درجة الطالب بعد مُضي شهرين ؟

c) قدّر درجة الطالب بعد مُضي سنة ؟

قراءة

لقياس مدى احتفاظ الطلبة بالمعلومات يتم إعادة اختبارهم فيها بعد وقت من تعلمها .

a) $S(t) = 85 - 25 \log (t + 1)$

$S(0) = 85 - 25 \log (0 + 1)$

$= 85 - 25 \log 1$

$= 85 - 25 (0)$

$= 85 - 0$

$= 85$

إذن ، درجة الطالب في الاختبار الأصلي كانت 85

b) $S(t) = 85 - 25 \log (t + 1)$

$S(2) = 85 - 25 \log (2 + 1)$

$= 85 - 25 \log 3$

≈ 73.1

إذن ، درجة الطالب بعد مُضي شهرين انخفضت تقريبا إلى 73.1

c) $S(t) = 85 - 25 \log (t + 1)$

$S(12) = 85 - 25 \log (12 + 1)$

$= 85 - 25 \log 13$

≈ 57.2

إذن ، درجة الطالب بعد مُضي سنة انخفضت تقريبا إلى 57.2

إرشـاد

استخدم الحاسبة العلمية لإيجاد قيم $\log 13$, $\log 3$ ثم قرب الناتج النهائي لأقرب جزء من عشرة

تحقق

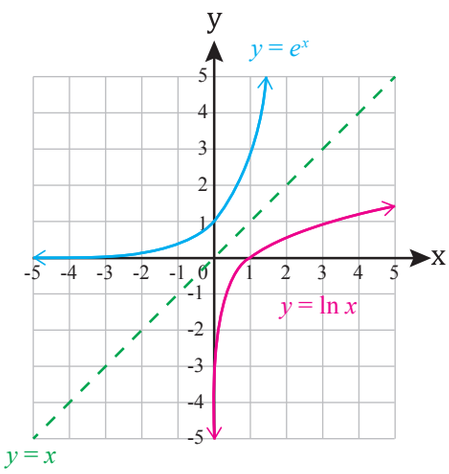
تستعمل الدالة $W(d) = 60 + 90 \log d$ لقياس سرعة الرياح (بوحدة الميل لكل ساعة) قرب موقع حدوث الإعصار ، حيث d المسافة التي يقطعها الإعصار بالميل .

أحسب سرعة الرياح لإعصار قطع مسافة 600 ميل ؟

دالة اللوغاريتم الطبيعي :

يطلق على دالة اللوغاريتم للأساس e **دالة اللوغاريتم الطبيعي** natural logarithmic function ويرمز لها بالرمز $y = \ln x$

عند تمثيل دالة الأس الطبيعي $y = e^x$ ودالة اللوغاريتم الطبيعي بيانيا على نفس المستوى الأحداثي ، نجد أن منحنى إحداهما هو انعكاس للآخر حول المستقيم $y = x$.



خصائص دالة اللوغاريتم المعتاد $y = \log x$ تنطبق على دالة اللوغاريتم الطبيعي $y = \ln x$ من حيث :

- المجال والمدى
- مقاطع المحاور
- خط التقارب الرأسي
- التزايد والتناقص.

لأي دالة لوغاريتم طبيعي : $\ln e = 1$, $\ln 1 = 0$

إرشـاد

قيم الدالة $y = \ln x$ موضحة في الجدول أدناه :

x	$\ln x$
1	0.000
2	0.693
3	1.099
4	1.386
5	1.609
6	1.792
7	1.946

مثال 2 : استعمال دالة اللوغاريتم الطبيعي

تزداد قيمة مبيعات إحدى الشركات بآلاف الريالات وفقا للدالة $S(a) = 10 + 20\ln(a+1)$

حيث a المبلغ الذي يتم إنفاقه على الدعاية والإعلان

a) أحسب مبيعات الشركة في حال عدم إنفاقها إي مبلغ على الدعاية والإعلان ؟

b) قدّر ما يلي :

1. مبيعات الشركة في

2. مبيعات الشركة في حال إنفاقها على الدعاية والإعلان مبلغ خمسة عشر ألف ريال ؟

a) $S(0) = 10 + 20 \ln(0 + 1)$

$= 10 + 20 \ln(1)$

$= 10 - 20(0)$

$= 10$

إذن ، في حال عدم إنفاق أي مبلغ على الدعاية والإعلان ، ستكون مبيعات الشركة QR 10000

b) 1. $S(3) = 10 + 20 \ln(3 + 1)$

$= 10 + 20(1.39)$

≈ 37.8

إذا تم إنفاق QR 3000 على الدعاية والإعلان ، فستكون مبيعات الشركة QR 37800 تقريبا

2. $S(15) = 10 + 20 \ln(15 + 1)$

$= 10 + 20(2.77)$

≈ 65.4

إذا تم إنفاق QR 15000 ، فستكون مبيعات الشركة QR 65400 تقريبا

تحقق

يزداد عدد سكان مدينة ما بالألأف وفقا للدالة $P(t) = 3 + 4\ln(t + 1)$ ، حيث t الزمن بالسنوات.

2A) أحسب عدد سكان المدينة الأولي (الحالي) ؟

2B) قدّر عدد سكان المدينة بعد ثلاث سنوات؟

إرشـاد

بشكل عام ، العلاقة بين المبيعات والإعلانات علاقة طردية حيث تزداد المبيعات مع زيادة الإنفاق على الدعاية والإعلان.

تمارين 3-6

مثال 1

1) إذا كان تقدير درجة اختبار أحد الطلبة في مادة العلوم بعد t شهر من انتهاء الفصل الدراسي يُعطى بالدالة :

$$S(t) = 95 - 28\log(t+1)$$

a) أحسب درجة الطالب في الاختبار بعد انتهاء الفصل الدراسي مباشرة؟

b) قدّر درجة الطالب بعد مُضي سنتان ؟

2) تُستعمل الدالة $S = \log A$ لقياس قوة الزلزال حيث A هي سعة الموجة المسببة للهزة الأرضية، وتقاس بالميلليمتر .

a) ما قوة زلزال تبلغ سعة الموجة المسببة له 2000 mm ؟

b) كم تبلغ سعة موجة زلزال قوته 7.8 ؟

3) تستعمل الصيغة $M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{10^{4.4}}\right)$ لتحديد قوة الهزة الأرضية على مقياس ريختر M ، حيث E كمية الطاقة المنبعثة من الأرض عند حدوث الهزة الأرضية.

أحسب قوة الهزة الأرضية على مقياس ريختر عند انبعاث طاقة زلزالية مقدارها 4.7×10^{13}

مثال 2

4) يتبع شخص نظاما غذائيا لتخفيف وزنه ، إذا كان وزنه بالكيلوجرام بعد مرور t شهر يُعطى بالدالة :

$$W(t) = 130 - 8\ln(t+1)$$

a) كم كان وزن الشخص عندما بدأ النظام الغذائي؟

b) قدّر وزنه بعد سنة

5) تُستعمل الصيغة $n = -\ln P$ لضبط درجة الإضاءة لآلة التصوير التي يتم استعمالها عند نقص الإضاءة ، حيث P نسبة ضوء الشمس في منطقة إلتقاط الصورة . قدّر درجة ضبط إضاءة آلة التصوير في يوم غائم، إذا كانت نسبة الإضاءة في اليوم الغائم تُعادل $\frac{1}{8}$ نسبة الإضاءة في اليوم المشمس .

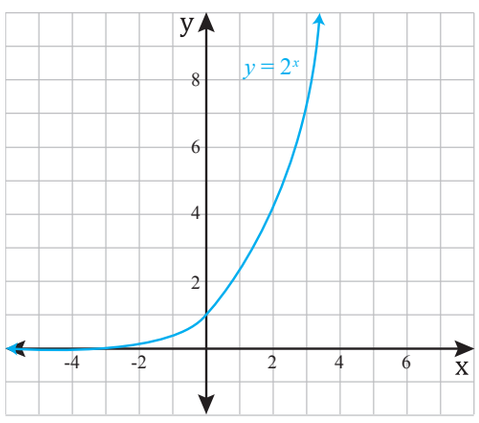
6) يستعمل علماء الأحياء الدالة $L = 27.1 \ln w - 32.8$ لتوضيح العلاقة بين طول L (inches) ووزن w (pounds) التماسيح في إحدى البحيرات

a) قدّر طول تمساح وزنه 40 pound

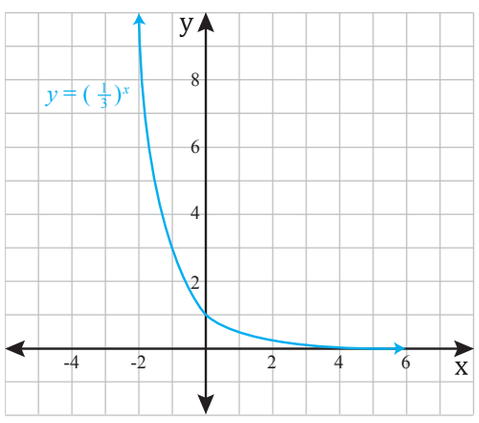
b) قدّر وزن تمساح طوله 30 inches

7) لكل دالة أسية مما يلي ، أكتب معادلة الدالة العكسية ، ثم أوجد المجال والمدى ، مقاطع المحاور ، معادلة خط التقارب

a)



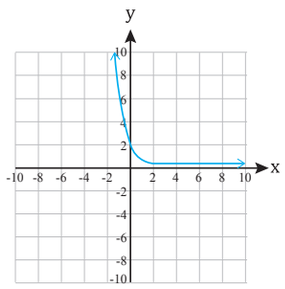
b)



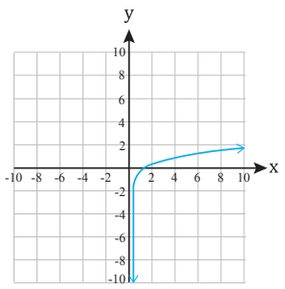
8) صل كل دالة من الدوال التالية بتمثيلها البياني :

a) $f(x) = 4^{x}$ **b)** $q(x) = (\frac{1}{5})^{x}$ **c)** $h(x) = \log_{5} x$ **d)** $h(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

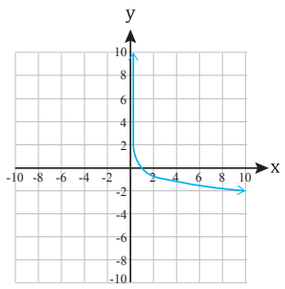
A)



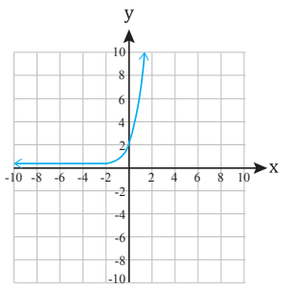
B)



C)



D)



مسائل مهارات التفكير العليا

9) يوضح الشكل المقابل جدول قيم لدالة:

x	1	2	8
y	0	1	3

ناقش صحة العبارات التالية ؟ فسر إجابتك

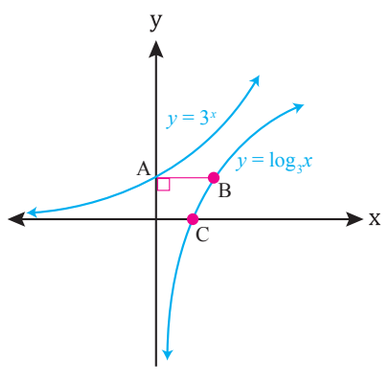
- y دالة أسية في x
- y دالة لوغاريتمية في x
- x دالة أسية في y
- y دالة خطية في x

10) دالة لوغاريتمية على الصورة $f(x) = \log_{b} x$ يمر منحناها بالنقطة $(9, 2)$ أوجد قيمة b ؟

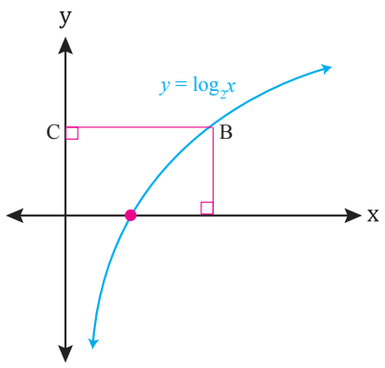
11) ما العلاقة بين مجال ومدى الدالة اللوغاريتمية ومجال ومدى الدالة الأسية المناظرة لها ، استعن بمثال لتوضيح إجابتك .

12) في الشكل أدناه ، أوجد إحداثيات النقاط A , B , C ؟

a)



b)



Not drawn in scale

6-4

تطبيقات على الدوال الأسية واللوغاريتمية

Applications on Exponential and Logarithmic Functions

أفكار الدرس

- حل مسائل فيزيائية وتطبيقات من واقع الحياة تتضمن الدوال الأسية واللوغاريتمية.

المعايير:

12F.5.8

تمهيد

تظهر تطبيقات الدوال الأسية واللوغاريتمية في مسائل فيزيائية وتطبيقات حياتية كثيرة على سبيل المثال النمو السكاني والفائدة المركبة، انتشار الأوبئة ، اضمحلال المواد الإشعاعية، امتصاص الأدوية في الجسم ، تقدير درجة الحمضية أو القاعدية للسوائل ، قياس قوة الزلازل والهزات الأرضية ، ومستوى الصوت ، ... إلخ

مثال 1 :

تُستعمل الصيغة $M = 25e^{0.1t}$ لحساب كتلة البكتيريا (mg) في عينة مختبرية بعد مرور t ساعة .

a) أحسب كتلة البكتيريا في العينة المختبرية بعد مرور 7 hours ؟

b) بعد كم ساعة تصل كتلة البكتيريا في العينة 100 mg ؟

a) $M = 25e^{0.1t}$

$= 25e^{0.1(7)}$

≈ 50

إذن ، بعد مرور 7 h تصبح كتلة البكتيريا 50 mg تقريبا .

b) $M = 25e^{0.1t}$

$100 = 25e^{0.1t}$

$4 = e^{0.1t}$

$\ln 4 = \ln e^{0.1t}$

$\ln 4 = 0.1t \times \ln e$

$\ln 4 = 0.1t$

$t = \frac{\ln 4}{0.1}$

≈ 13.86

إذن ، تصل كتلة البكتيريا في العينة 100 mg بعد حوالي 14 h

تحقق

مستعملا الصيغة في المثال أعلاه :

1A) أحسب كتلة البكتيريا في العينة المختبرية بعد مرور يوم واحد ؟

1B) بعد كم ساعة تصل كتلة البكتيريا في العينة 30 mg ؟

مثال 2 :

تستعمل الصيغة الأسية : $M = M_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$ ، لتقدير عمر الكائنات الحية الميتة ، حيث M هي كتلة الكربون (C−14) المتبقية في العينة بعد انقضاء t سنة ، M_0 كتلة الكربون الأصلية ، وُجدت أحفورة في موقع أثري وكان نسبة ما تبقى فيها من الكربون (C−14) يعادل 25% من الكمية الأصلية .

قدّر عمر الأحفورة الأثرية ؟

بما أن كتلة الكربون الأصلية لمادة الكربون M_0 ، نعوض عن M بـ $0.25M_0$ ثم نحل المعادلة الأسية باستعمال اللوغاريتم المعتاد لإيجاد قيمة t :

$$M = M_{\frac{1}{2}}(\quad)^{\frac{t}{5730}}$$

$$0.25\, M_0 = M_0\,(0.5)^{\frac{t}{5730}}$$

$$0.25 = (0.5)^{\frac{t}{5730}}$$

$$\log 0.25 = \log (0.5)^{\frac{t}{5730}}$$

$$\log 0.25 = \frac{t}{5730} \times \log (0.5)$$

$$t = \frac{5730 \times \log 0.25}{\log (0.5)}$$

$$t = 11{,}460$$

إذن ، يبلغ عمر الأحفورة 11460 سنة

تحقق

2) مستعملا الصيغة في المثال أعلاه :

وُجدت أحفورة أخرى ، إذا كان نسبة ما تبقى فيها من كربون (C−14) يعادل 35% من الكمية الأصلية. قدّر عمر الأحفورة الأثرية ؟

استعمال دالة اللوغاريتم الطبيعي

مثال 3 :

تُستعمل الصيغة $pH = -\log [H^+]$ لتحديد قيمة الرقم الهيدروجيني لمحلول حيث $[H+]$ تركيز أيون الهيدروجين الذي يقاس بوحدة mol/L (مول/لتر)

a) احسب الرقم الهيروجيني pH لمطر تركيز أيونات الهيدروجين فيه يساوي 0.0002 mol/L ، ثم حدد ما إذا كان المطر حامضيا أم قاعديا

b) أحسب تركيز أيون الهيدروجين لمطر حمضي رقمه الهيدروجيني 4.2

a) $pH = -\log [H^+]$

$= -\log (0.0002)$

≈ 3.7

بما أن $pH \approx 3.7 < 7$ ، إذن المطر حمضي

b) $pH = -\log [H^+]$

$4.2 = -\log [H^+]$

$-4.2 = \log [H^+]$

$[H^+] = 10^{-4.2}$

$[H^+] = 0.00006395\ 73$

$[H^+] \approx 0.000063$

إذن تركيز أيون الهيدروجين للمطر الحمضي يساوي تقريبا 0.000063 mol/L

تحقق

3) مستعملا الصيغة في المثال أعلاه :

أحسب تركيز أيون الهيدروجين لمطر حمضي رقمه الهيدروجيني 5.6

قراءة

تتكون معظم الأمطار الحمضية بسبب مركبات النيتروجين والكبريت الناتجة عن الأنشطة البشرية والتي تتفاعل في الجو لتكوّن الأحماض ، وتعد من أخطر الظواهر الطبيعية ولها تأثيرات مدمرة على النباتات والحيوانات المائية.

إرشاد

في مقياسpH يكون المحلول :

- حامضيا عندما يكون pH أقل من 7
- قاعديا عندما يكون pH أكبر من 7
- متعادلا عندما pH =7

قراءة

تشكل القراءة 85 dB على مقياس شدة الصوت مؤشرا يؤدي بلوغها أو تجاوزها إلى إصابة سامع الصوت بأضرار في الأذن قد تكون دائمة .

مثال 4 :

تُستعمل الصيغة : $L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$ لقياس مستوى الصوت بوحدة الديسيبل dB ، حيث I شدة الصوت وتقاس بوحدة W/m^2 (واط لكل متر مربع) ، I_0 الحد الأدنى لشدة الصوت الذي يمكن أن تسمعه أذن الإنسان . إذا علمت أن $I_0 = 10^{-12}$ ، أوجد شدة الصوت لقطار سريع يبلغ مستوى الصوت الذي يصدره 90 dB

$$L = 10 \times \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right)$$

$$90 = 10 \times \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right)$$

$$9 = \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right)$$

$$\frac{I}{10^{-12}} = 10^9$$

$$I = 10^{-12} \times 10^9$$

$$I = 10^{-3}$$

إذن تبلغ شدة صوت القطار $0.001\ W/m^2$

تحقق

4) مستعملا الصيغة في المثال أعلاه :

أوجد شدة الصوت لطائرة نفاثة يبلغ مستوى الصوت الذي تصدره 100 dB

تمارين 6-4

مثال 1

1) تُستعمل الصيغة $M = 1000 \times 2^{0.15t}$ لحساب كتلة البكتيريا (ميليجرام) في عينة مختبرية بعد مرور t دقيقة .

a) ما كتلة البكتيريا الأولية ؟

b) أحسب كتلة البكتيريا في العينة المختبرية بعد مرور 4 min؟

c) بعد كم دقيقة تصل كتلة البكتيريا في العينة المختبرية إلى ضعف كتلتها الأولية ؟

مثال 2

2) عندما تموت الكائنات الحية تتضائل كمية الكربون (C14) الموجودة في النسيج الميت أسياً وفقاً للصيغة : $N = N_0 e^{-0.000121t}$ ، حيث N_0 الكمية الأولية للكربون ، t المدة المنقضية بالسنوات. أكتشفت عظمة في موقع أثري بعد كم سنة تتضائل كمية الكربون (C14) في العظمة إلى 25% من كميتها الأصلية ؟

مثال 3

3) استعمل الصيغة $pH = -\log[H^+]$ لإيجاد :

a) تركيز ايونات الهيدروجين لمحلول رقمه الهيدروجيني 4.5

b) الرقم الهيدروجيني لسائل الدم إذا علمت أن مستوى تركيز ايونات الهيدروجين فيه يساوي 4.47×10^{-8} mol/L

4) تستعمل الصيغة $\log E = 11.8 + 1.5M$ لقياس كمية الطاقة E المنبعثة من الأرض مع الهزة الأرضية ، حيث M قوة الهزة الأرضية على مقياس ريختر M . أحسب كمية الطاقة المنبعثة من الارض عند حدوث هزة أرضية قوتها 9 درجات على مقياس ريختر.

مثال 4

5) توضح الصيغة $L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0}\right)$ العلاقة بين شدة الصوت I ومستواه L ، حيث I_0 هو الصوت المسموع بالكاد يوضح الجدول التالي شدة ومستوى الصوت لبعض مصادر الصوت في البيئة المحيطة بنا .

أوجد القيم المفقودة في الجدول إذا علمت أن $I_0 = 10^{-12}$

مصدر الصوت	شدة الصوت (I) W/m^2	مستوى الصوت (L) dB
الهمس	10^{-10}	
المحادثة العادية	10^{-6}	
صفارة سيارة الإسعاف		120
الإطلاق الصاروخي		180

6) تستعمل الصيغة الأسية $V = V_0 e^{-0.01t}$ لتقدير سرعة تفاعل محلول كيميائي ، حيث t درجة الحرارة المئوية . قدّر درجة الحرارة عندما تكون سرعة تفاعل المحلول 3 أمثال سرعته عندما كانت درجة حرارته $0\ ^oC$؟

7) توضح الصيغة $\log W = \log 2.4 + 0.8H$ العلاقة بين أوزان وأطوال الأطفال الذين تتراوح أعمارهم بين 5 و13 سنة ، حيث W وزن الطفل بالكيلوجرام و H طوله بالمتر .

a) أحسب وزن طفل طوله 1.4 m

b) أحسب طول طفل وزنه 50 kg

8) تتحلل مادة مشعة بعد مرور t سنة وفق الصيغة : $M = M_0 \times e^{kt}$ ، حيث M_0 كتلة المادة الأصلية ، k معامل الإضمحلال الأسي للمادة المشعة . إذا كانت كتلة المادة الأصلية 400 g وكتلتها المتبقية بعد مرور 5 سنوات 50 g. أوجد قيمة k لأقرب 3 منازل عشرية؟

9) تتكاثر الأسماك في إحدى البحيرات بعد مرور t شهر وفق الصيغة : $N = N_0 \times 2^{mt}$ ، حيث N_0 عدد الأسماك الأولي m معامل النمو الأسي للأسماك . إذا كان عدد الأسماك الأولي 5000 سمكة وعددها يتضاعف كل 4 شهور . أوجد قيمة m لأقرب 3 منازل عشرية؟

مسائل مهارات التفكير العليا

10) عدد الجراثيم في مستعمرة جراثيم ينمو أسياً ، إذا كان عدد الجراثيم في الساعة 13:00 من هذا اليوم 1000 ، وفي الساعة 15:00 بلغ 4000.

a) كم يبلغ عدد الجراثيم في الساعة 18:00 ؟

b) كم سيكون عدد الجراثيم في اليوم التالي مباشرة عند الساعة 10:00 ؟

11) تُستعمل الصيغة $pH = -\log[H^+]$ لتحديد قيمة الرقم الهيدروجيني لمحلول حيث [H+] تركيز أيون الهيدروجين الذي يقاس بوحدة mol/L (مول/لتر). محلول A رقمه الهيدروجيني $pH = 2.9$ ، محلول B تركيز أيون الهيدروجين فيه يعادل أربعة أمثال تركيزها في المحلول A . أوجد قيمة الرقم الهيدروجيني للمحلول B ؟

12) تُستعمل الصيغة $t = \frac{-160}{3} \log\left(\frac{N}{N_0}\right)$ لحساب عدد السنوات t اللازمة لإضمحلال الكمية الأصلية N_0 mg من مادة مشعة لتصبح N mg . أحسب كمية ما يتبقى من 100 mg من المادة بعد 50 سنة ؟

اختبار الوحدة السادسة

اختيار من متعدد :

1) أي من الدوال الأسية الأتية يمثل دالة نمو أسي ؟

A) $y = \frac{1}{20}\left(\frac{5}{2}\right)^x$

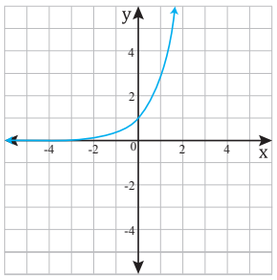
B) $y = 16\,(0.4)^x$

C) $y = 20\left(\frac{1}{8}\right)^x$

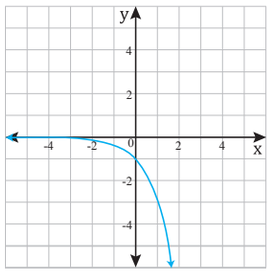
D) $y = 8x^3$

2) أي من التمثيلات البيانية التالية هو منحنى الدالة $y = \ln x$

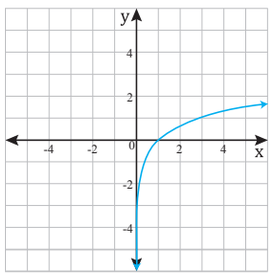
A)



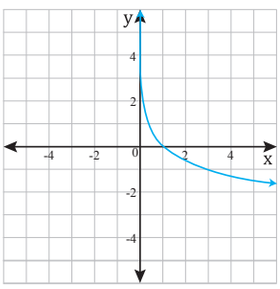
B)



C)



D)



3) أي الدوال الأسية التالية يمر منحناها بالنقطة $(2, -50)$**؟**

A) $y = 2\,(5)^x$

B) $y = -2\,(5)^x$

C) $y = 2\,(0.5)^x$

D) $y = -2\,(0.5)^x$

4) أي مما يلي يكافىء الصورة الأسية للمقدار اللوغاريتمي $\log_{243} 81 = \frac{4}{5}$ **؟**

A) $(81)^{\frac{4}{5}} = 243$

B) $243 = \left(\frac{4}{5}\right)^{81}$

C) $(243)^{\frac{4}{5}} = 81$

D) $\left(\frac{4}{5}\right)^{243} = 81$

5) أي مما يلي يكافىء الصورة اللوغاريتمية للمقدار الأسي $5^3 = 125$ **؟**

A) $\log_{125} 5 = 3$

B) $\log_3 125 = 5$

C) $\log_5 125 = 3$

D) $\log_5 3 = 125$

6) أي مما يلي يُكافىء حل المعادلة الأسية $e^{2x-5} = 29$ **؟**

A) $\frac{5 + \ln 29}{2}$

B) 17

C) $\frac{5 - \ln 29}{2}$

D) $\frac{\ln 29}{2} + 5$

7) أي مما يلي يمثل قيمة x **في الصيغة اللوغاريتمية** $\log_{\frac{1}{8}} x = 1$ **؟**

A) $-\frac{1}{8}$

B) 0

C) -8

D) 8

8) أي النقاط التالية تمثل نقطة تقاطع الدالة $y = \ln x$ مع المحور x ؟

A) (1, 0)

B) (1, e)

C) (0, 1)

D) (e, 1)

9) إذا كانت الكتلة المتبقية بالجرامات من مادة مشعة M بعد t سنة تُعطى بالصيغة : $M(t) = 1000e^{-0.03t}$. قدّر بعد كم سنة تصل كمية المادة المتبقية إلى 200 جرام ؟

A) 23.3

B) 403428

C) 2.5

D) 53.6

10) إذا كان عدد سكان دولة عام 2017 هو 35,000,000 نسمة تقريبا، وكان معدل النمو السكاني 2% سنويا . قدّر عدد سكان الدولة عام 2025 لأقرب نسمة ؟

A) 41828240

B) 41008078

C) 40203998

D) 35700000

11) أي من الصيغ التالية يمثل دالة أسية لسعر سيارة بعد مرور t سنة من شرائها ، إذا كان سعرها الأصلي QR 180,000 ويتناقص سنويا بمعدل 5% ؟

A) $A(t) = 180000\ (0.95)^t$

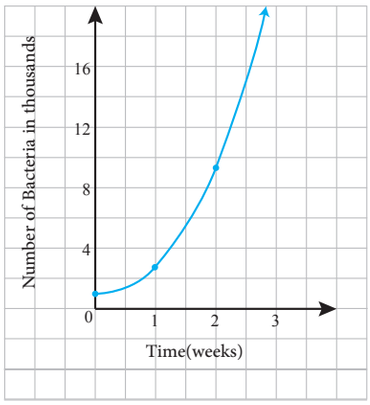
B) $A(t) = 180000\ (0.05)^t$

C) $A(t) = 180000\ (0.95)$

D) $A(t) = 180000\ (1.05)^t$

أجب عن الأسئلة التالية :

12) يوضح الشكل التالي تكاثر عدد الخلايا في مزرعة بكتيرية بالآلاف بمرور t أسبوع v



a) ما عدد الخلايا في الأسبوع الأول ؟ وكم أصبح عددها في الأسبوع الثاني؟

b) كم تتوقع أن يصبح عدد الخلايا في منتصف الأسبوع الثالث ؟

13) تعتبر قمة أفرست اعلى قمة جبل في العالم بارتفاع يصل الى 8848 m فوق مستوى سطح البحر.
وتستعمل الصيغة $A = 15500\ (5 - \log P)$ لإيجاد قيمة الضغط الجوي P بوحدة باسكال عند ارتفاع A متر .
أوجد قيمة الضغط الجوي عند قمة جبل إفرست .

14) تستعمل الصيغة الأسية $V(t) = 1000(0.925)^t$ لحساب كمية المياه المتبقية باللتر في خزان بعد مرور t دقيقة.

a) ما كمية المياه الأولية الموجودة في الخزان ؟

b) أوجد كمية ما تبقى من المياه في الخزان بعد مرور 10 min ؟

c) إذا علمت أن الخزان يعتبر فارغا إذا تبقى فيه 5% من كمية المياه ، بعد كم دقيقة يصبح الخزان فارغا ؟

15) لقياس مدى احتفاظ الطلبة بالمعارف والمهارات التي اكتسبوها بعد دراستهم لمادة أو مقرر دراسي، يتم اختبارهم عدة مرات وعلى مدى فترات زمنية متساوية. تستعمل الدالة $M(t) = 90 - 20\ln(t+1)$ لتقدير درجة الاختبار لطالب في أحد المقررات الدراسية بعد مرور t شهر على انتهاء الفصل الدراسي.

a) قدّر درجة الطالب في الاختبار بعد مُضي سنة من انتهاء الفصل الدراسي ؟

b) قدّر الفترة الزمنية التي يجب أن تنقضي بعد انتهاء الفصل الدراسي ليحصل الطالب على 80 درجة في الاختبار ؟

الوحدة 7

القياســـات
Measures

أفكار الوحدة

- أحســب وأقــدر مســاحة أشــكال مســتوية غير منتظمة .
- أجد حجم منشور قائم غير منتظم .
- أحل مسائل من واقع الحياة على القياسات المركبة .

تصميم وتنفيذ الحدائق :

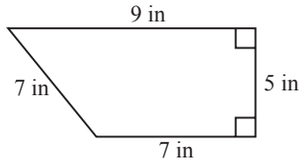
يقــوم المهندســون المختصون برفع مســاحة الأرض وأبعادها ثم عمل تصميــم لمخطط الحديقة يوضح أماكن المســطحات الخضراء وأحواض الزهور والأشــجار والشــجيرات والمتسلقات وأماكن الجلوس وممرات المشــاة والبرك، ثم يضعون خارطة تصور ما ستكون عليه الحديقة مستقبلا ليكون أساسا سليما لتقدير التكاليف والوقت اللازم للتنفيذ بناء على المساحة والحجم لكل منها.

تهيئة الوحدة السابعة

مراجعة

مثال 1 :

أوجد مساحة الشكل أدناه:



مساحة شبه المنحرف $A = \frac{1}{2} h(b_1 + b_2)$

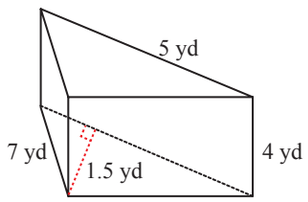
بالتعويض $h = 5, b_1 = 7, b_2 = 9$ $= \frac{1}{2} (5) (7 + 9)$

$= \frac{1}{2} (5) (16)$

إذن مساحة شبه المنحرف 40 in^2

مثال 2 :

أوجد حجم المجسم الذي أمامك:



حجم المنشور القائم $V = \text{area of base} \times \text{height}$

بالتعويض $V = \frac{1}{2} \times 5 \times 1.5 \times 4 = 15\ yd^3$

إذن حجم المجسم $15\ yd^3$

مثال 3 :

قطعة من الخشب على شكل متوازي مستطيلات حجمه $1500\ cm^3$، وكثافته $0.65\ gm/cm^3$ ، أوجد كتلة قطعة الخشب؟

صيغة الكتلة $mass = density \times volume$

بالتعويض $d = 0.65, v = 1500$

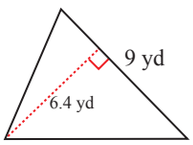
$m = d \times v = 0.65 \times 1500 = 975$ gm.

إذن كتلة قطعة الخشب 975 gm

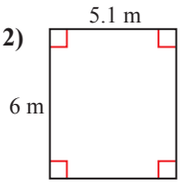
اختبار

أوجد مساحة كل من الأشكال التالية:

1)

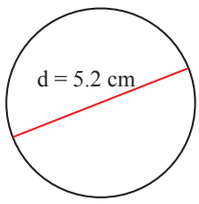


2)



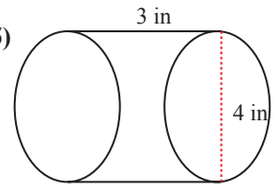
3)

4)

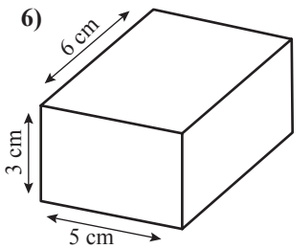


أوجد حجم كل من المجسمات التالية:

5)



6)



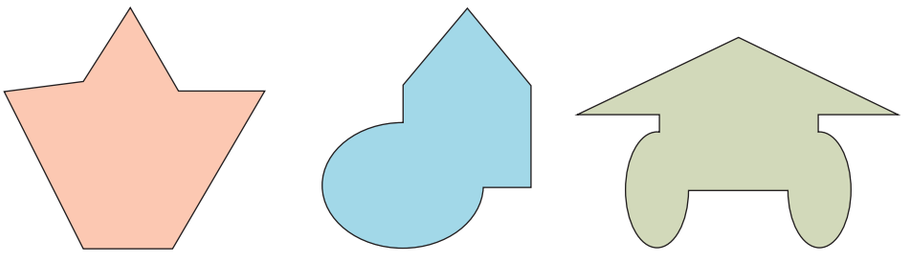
7) في عام 2012 : بلغ عدد سكان دولة قطر 1,963,124 نسمة، إذا علمت أن مساحة دولة قطر $11,437\ km^2$ ، أحسب الكثافة السكانية لدولة قطر.

7-1 مساحة الأشكال غير المنتظمة
Area of Irregular Shapes

تمهيد

صمم مهندس حديقة منزلية تتضمن بركة سباحة وأحواض نباتات وزهور ومناطق للجلوس وممرات للمشاة مع مراعاة التناسب فيما بينها، كيف يمكنك حساب المساحة التي تغطيها البركة من الحديقة؟

درست سابقا صيغًا رياضية لحساب مساحات أشكال مستوية مثل المثلثات والمربعات والمستطيلات وغيرها من الأشكال، ولكن أحيانًا توجد أشكال لا نستطيع إيجاد مساحتها باستخدام صيغ محددة تسمى **أشكالًا غير منتظمة** irregular shapes وهي أشكال غير منتظمة في أبعادها أو زواياها، كالأشكال الظاهرة أمامك:



أفكار الدرس

- أجد وأقدر مساحة أشكال مستوية غير منتظمة.

المعايير:

11F.9.2

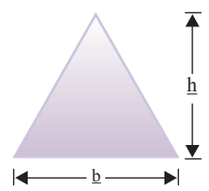
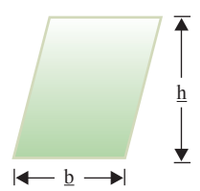
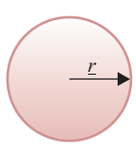
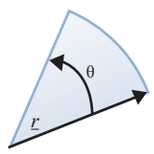
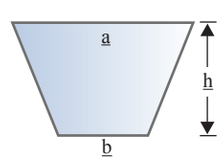
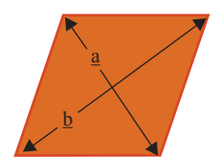
المصطلحات:

- الأشكال غير المنتظمة
  irregular shapes

حساب مساحة أشكال غير منتظمة:

ولحساب مساحتها نقوم بتقسيمها إلى أشكال سبق لنا دراستها ويمكننا حساب مساحتها بسهولة ويسر.

فيما يلي بعض صيغ حساب المساحات التي تحتاج إليها:

Square $A_{square} = w^2$	Rectangle $A_{rectangle} = \ell \times w$	Triangle (any) $A_{triangle} = \frac{1}{2} \times b \times h$	Parallelogram $A_{parallelogram} = b \times h$
			
Circle $A_{circle} = \pi r^2$	Sector $A_{sector} = (\theta/360)\ \pi r^2$	Trapezium $A_{trapezium} = \frac{1}{2}(a \times b)h$	Rhombus $A_{trapezium} = \frac{1}{2} \times a \times b$
			

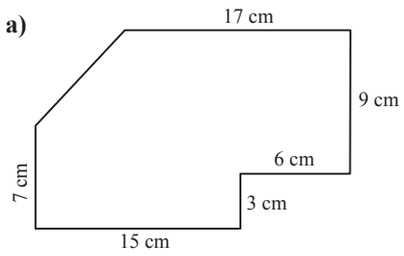
مثال 1 : إيجاد مساحة شكل غير منتظم

احسب مساحة كل من الأشكال غير المنتظمة المرسومة أدناه:

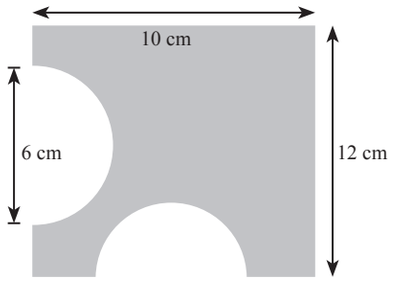
إرشاد

- قسم الشكل المركب إلى عدة أشكال يمكنك حسابها مساحة كل منها على حدة.
- يمكنك تقسيم الشكل بأكثر من طريقة.

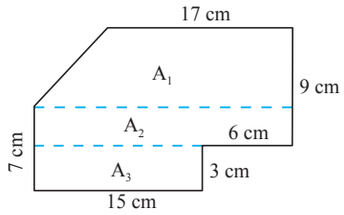
a)



b)



a) الخطوة 1 :



قسم الشكل إلى عدة أشكال يمكنك حساب مساحة كل منها على حدة باستخدام صيغ معروفة، والشكل المقابل يمكن تقسيمه إلى مستطيلين وشبه منحرف.

الخطوة 2 : احسب الأطوال المجهولة اعتمادا على الأطوال المعلومة وخواص الأشكال.

صيغة مساحة شبه المنحرف

$A_1 = \frac{1}{2} \times h(b_1 + b_2)$

$A_1 = \frac{1}{2} \times 5(21 + 17)$

$= 95\text{cm}^2$

صيغة مساحة المستطيل

$A_2 = 1 \times w$

عوض

$A_2 = 21 \times 4$

احسب

$= 84\text{cm}^2$

صيغة مساحة المستطيل

$A_3 = 1 \times w$

عوض

$A_3 = 3 \times 15$

احسب

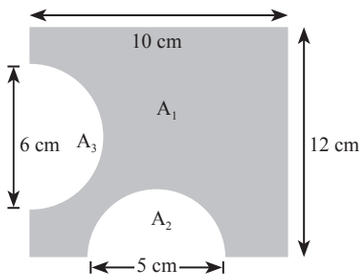
$= 45\text{cm}^2$

الخطوة 3 : اجمع المساحات معا

$A = A_1 + A_2 + A_3 = 95 + 84 + 45 = 224\ \text{cm}^2$

إذن مساحة الشكل غير المنتظم تساوي $224\ \text{cm}^2$

b) الخطوة 1 :



قسم الشكل إلى عدة أشكال يمكنك حساب مساحة كل منها باستخدام صيغ معروفة، والشكل المقابل يمكن تقسيمه إلى مستطيل قطع منه نصفي دائرتين.

الخطوة 2 : احسب مساحة كل شكل.

صيغة مساحة المستطيل

$A_1 = 1 \times w$

عوض واحسب

$A_1 = 10 \times 12 = 120\text{cm}^2$

صيغة مساحة نصف الدائرة

$A_2 = \frac{1}{2} \pi r^2$

عوض واحسب

$A_2 = \frac{1}{2} \times 3.14 \times 2.5^2 \approx 9.81\text{cm}^2$

صيغة مساحة نصف الدائرة

$A_3 = \frac{1}{2} \pi r^2$

عوض واحسب

$A_3 = \frac{1}{2} \times 3.14 \times 3^2 = 14.13\text{cm}^2$

الخطوة 3 : اجمع المساحات معا

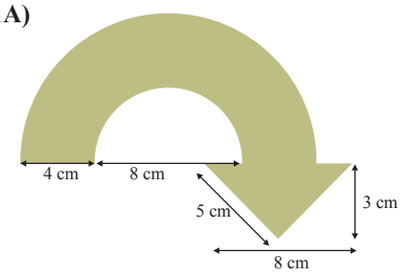
$A = A_1 - (A_2 + A_3) = 120 - (9.81 + 14.13) = 96.06\ \text{cm}^2$

إذن مساحة الشكل غير المنتظم تساوي $96.06\ \text{cm}^2$

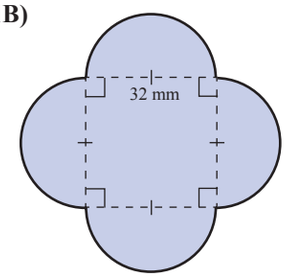
تحقق

أوجد مساحة كلا من الأشكال المظللة التالية:

1A)



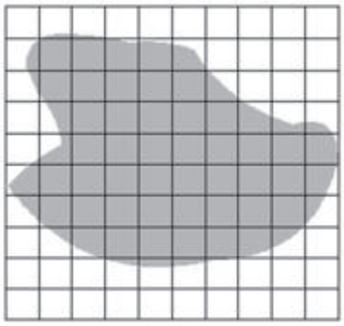
1B)



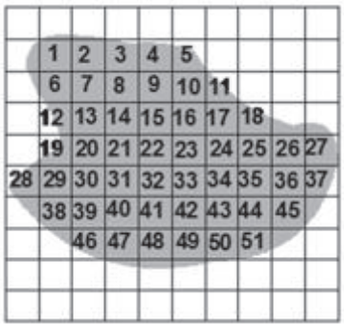
تقدير مساحة الأشكال غير المنتظمة:

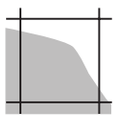
إذا أردنا حساب مساحة شكل غير منتظم كما في الشكل المقابل، فسنجد أنه من الصعوبة تقسيم الشكل إلى أشكال هندسية يمكننا حساب مساحتها باستخدام صيغ محددة، في هذه الحالة نستخدم عدة طرق لتقدير مساحتها وسنوضح إحداها فيما يلي:

1) قسم المنطقة إلى مربعات متساوية طول كل منها الوحدة .

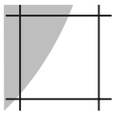


2) احسب عدد المربعات الكاملة، فإذا كانت المنطقة تغطي أكثر من نصف المربع تعد مربعا كاملا كما في الشكل الموضح أمامك.





3) احسب عدد أنصاف المربعات واقسم على 2 للحصول على عدد المربعات الكاملة فإذا كانت المنطقة تغطي أقل من النصف تحسب نصف المربع كما في الشكل الموضح أمامك.



4) اجمع عدد المربعات التي حصلت عليها في الخطوات السابقة لتقدر مساحة المنطقة وإذا علمت مساحة المربع الواحد يمكنك الضرب فيها للحصول على تقدير نهائي للمساحة.

مثال 2 : تقدير مساحة شكل غير منتظم

قدر مساحة ولاية ماونتن المظللة باللون الأخضر في الخارطة التي أمامك، علما أن مساحة كل وحدة مربعة تساوي $700\ mi^2$

الخطوة 1 : عد المربعات الكاملة ستجد عددها 20

الخطوة 2 : عد أنصاف المربعات واقسم على 2، ستحصل على 3 مربعات.

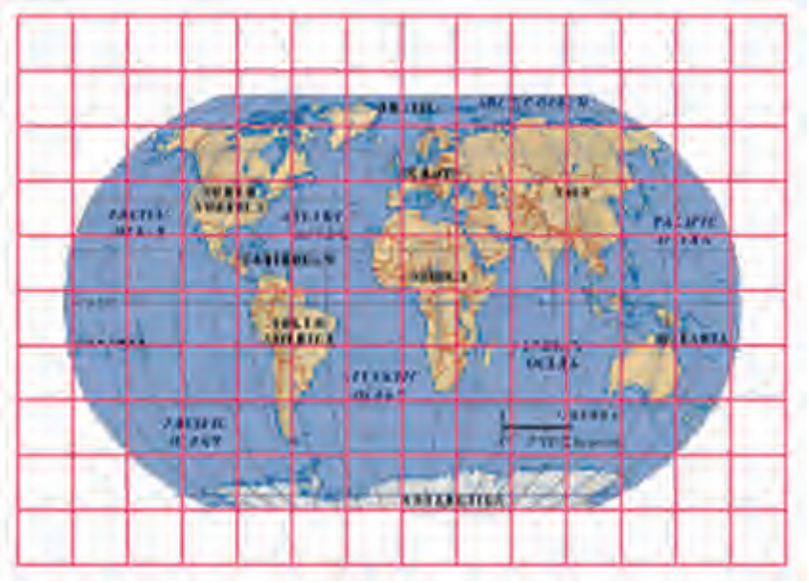
الخطوة 3 : اجمع عدد المربعات التي حصلت عليها في الخطوات السابقة لتقدر مساحة الولاية:

$20 + 3 = 23$

إذن مساحة الولاية تقريبا $23 \times 700 = 16100\ mi^2$

تحقق

2) قدر مساحة الكرة الأرضية من الخارطة أدناه إذا كانت مساحة المربع 6 مليون كيلومتر مربع؟

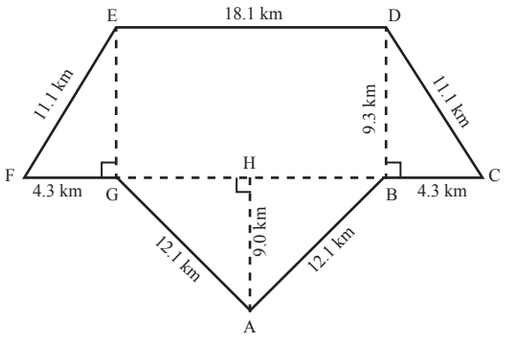


تمارين 1-7

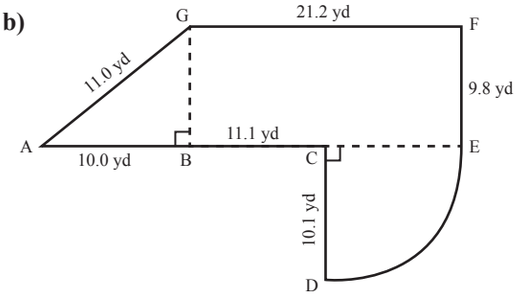
مثال 1

1) احسب مساحة كل شكل من الأشكال التالية:

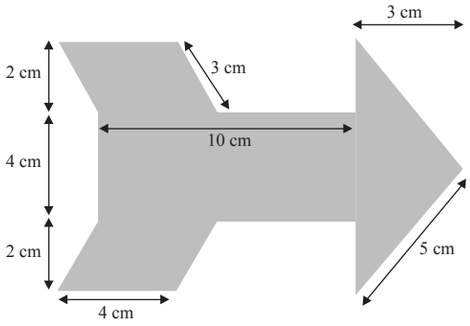
a)



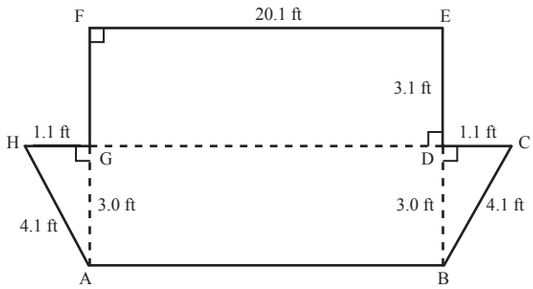
b)



c)



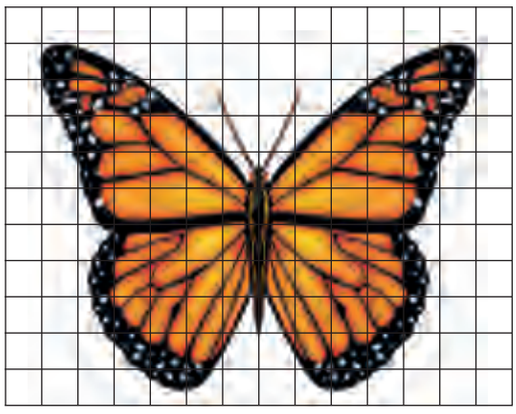
d)



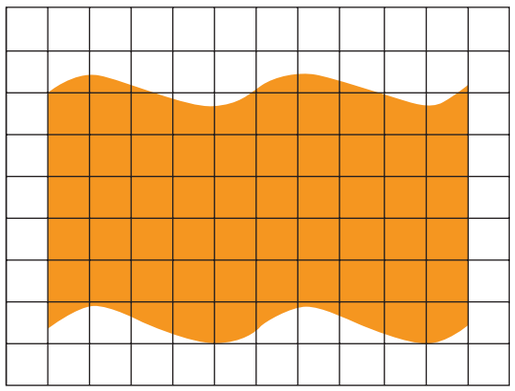
مثال 2

2) قدر مساحة كل شكل من الأشكال التالية علمًا بأن كل مربع يمثل $2\ cm^2$:

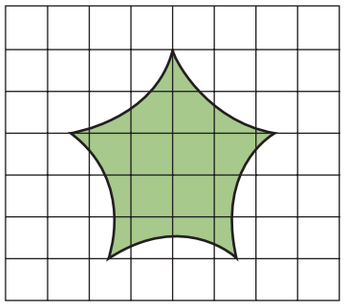
a)



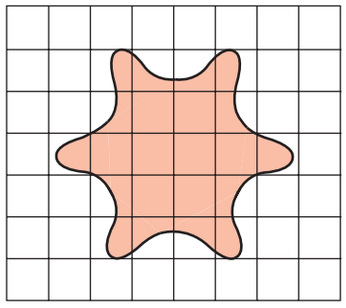
b)



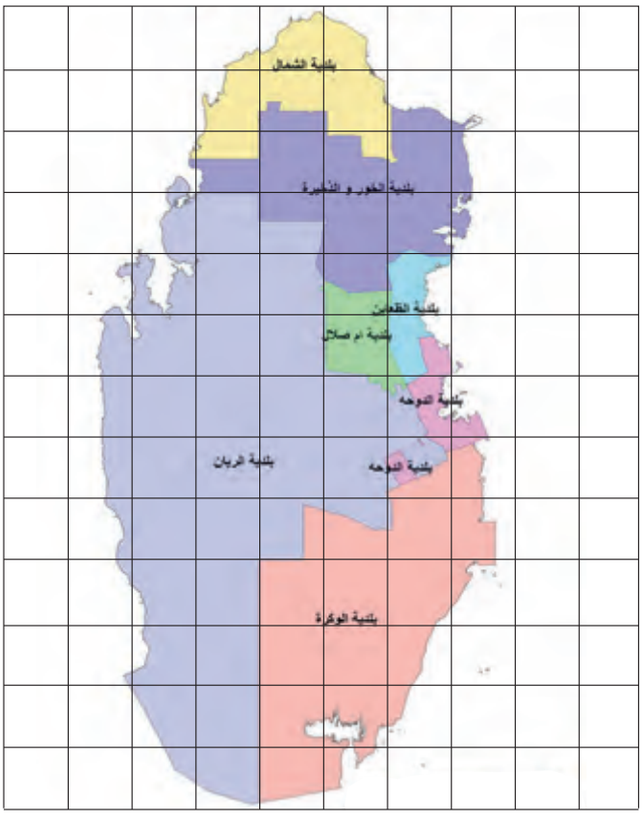
c)



d)

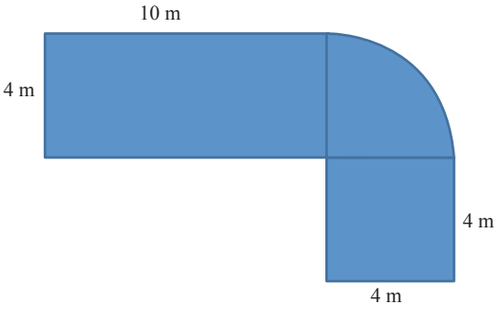


3) إذا كانت الخارطة التي أمامك تمثل بلديات دولة قطر في إحدى السنوات قدر مساحة كل بلدية من البلديات علما بأن مساحة المربع تساوي $170\ km^2$:



4) يراد صَبغ واجهة كوخ، فإذا كان كل لتر من الطلاء يغطي $10\ m^2$ من الجدار، ما كمية الطلاء اللازمة لتغطية واجهة الكوخ؟

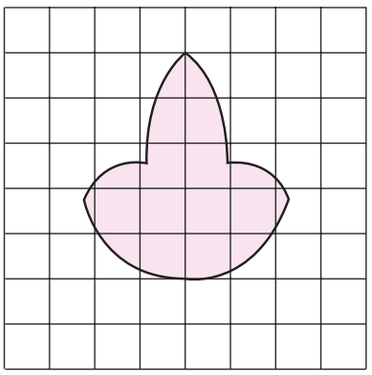
5) ترغب سيدة في تغطية أرضية أحد الممرات في منزلها بالرخام فإذا كانت الأرضية، كما في الشكل المقابل، ساعدها في حساب المساحة؟



مسائل مهارات التفكير العليا

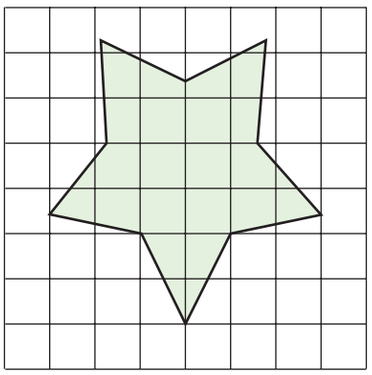
6) أي من الأشكال التالية أكبر مساحة:

a)



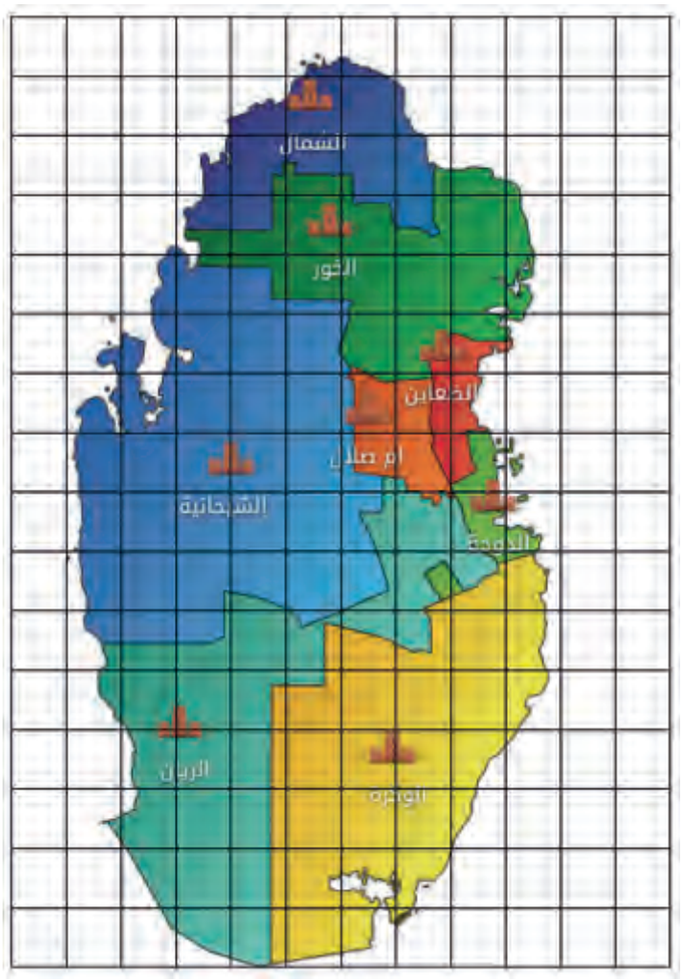
كل مربع مساحته $5\ cm^2$

b)



كل مربع مساحته $3\ cm^2$

7) أمامك أحدث تقسيم لبلديات دولة قطر ناقش أي البلديات أكبر الوكرة أم الريان؟ وفسر ذلك.



7-2

حجم المنشور غير المنتظم
Volume of Irregular Prism

أفكار الدرس

- اتعرف المنشور غير المنتظم
- احسب حجم منشور غير منتظم .
- احل تطبيقات تتضمن حجم منشور غير منتظم .

المعايير:

11F.9.2

المصطلحات:

- منشور غير منتظم
  irregular prism

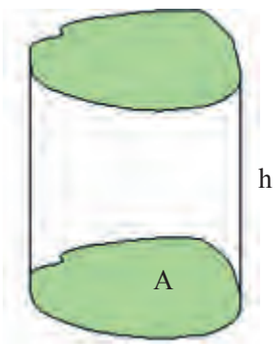
تمهيد

بركة سباحة تم إنشاؤها في أحد الفنادق، يراد تقدير كمية الماء اللازمة لتعبئة هذه البركة، فكيف يمكن للفندق عمل ذلك؟

المنشور هو مجسم له قاعدتان متوازيتان ومتطابقتان كل منهما سطح مستو ويسمى منشورًا قائمًا إذا كانت الأسطح الجانبية عمودية على القاعدتين وتصنف المنشورات القائمة بناءً على شكل قواعدها، فإذا كانت القاعدتان شكل غير منتظم يسمى الشكل **منشورًا غير منتظم** irregular prism ، وحيث أن المنشور غير المنتظم هو منشور قائم فإن حجمه يحسب بطريقة مماثلة لما اتبع في حساب حجم المنشور القائم.

مفهوم

المنشور غير المنتظم irregular prism



هو منشور قائم قاعدته على هيئة شكل غير منتظم،

يحسب حجمه بالصيغة:

$$V = A \times h$$

حيث:

V : حجم المنشور غير المنتظم.

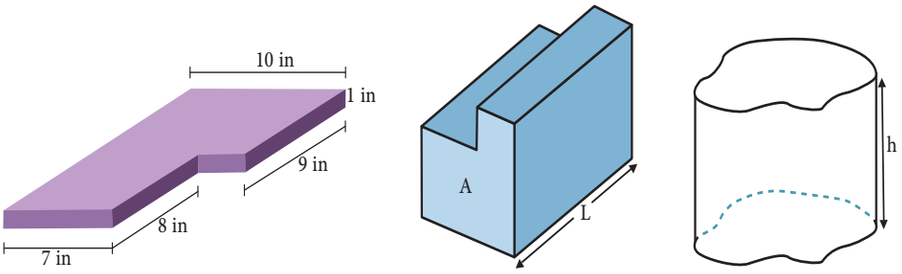
A : مساحة القاعدة.

h : ارتفاع المنشور.

تذكر

استخدام وحدات القياس نفسها لكل الأبعاد عند حساب الحجم.

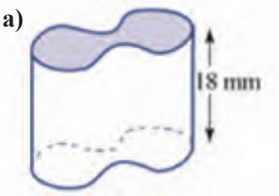
أمثلة على المنشور غير المنتظم:



مثال 1 : إيجاد حجم منشور غير منتظم علمت مساحة قاعدته

أوجد حجم كل من المنشورات غير المنتظمة فيما يلي:

a)



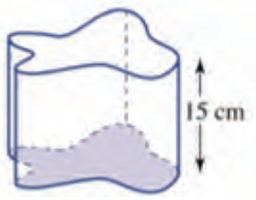
مساحة القاعدة $25\ mm^2$

a) $V = A \times h$

$V = 25 \times 18$

$= 450\ mm^3$

b)



مساحة القاعدة $24\ cm^2$

b) $V = A \times h$

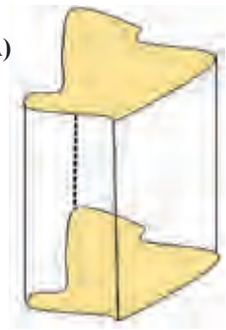
$V = 24 \times 15$

$= 360\ cm^3$

تحقق

أوجد حجم كل من المنشورات غير المنتظمة فيما يلي:

1A)



مساحة القاعدة $200\ cm^2$

الارتفاع 22 cm

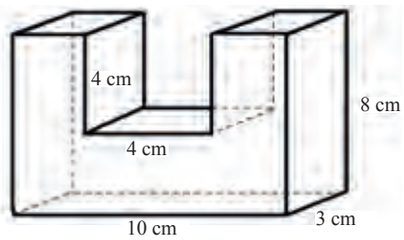
1B)

مساحة القاعدة $150\ in^2$

الارتفاع 30 in

مثال 2 : إيجاد حجم منشور غير منتظم علم أبعاده

احسب حجم المنشور غير المنتظم أدناه:



أولا: احسب مساحة القاعدة: يمكن حساب مساحة القاعدة بحساب مساحة المستطيل الأكبر وطرح منه مساحة المربع الأصغر:

$\text{Area of base} = (10 \times 8) - (4 \times 4)$

$= 80 - 16 = 64\ cm^2$

ثانيا: حساب حجم المنشور:

$V = A \times h$

$= 64 \times 3$

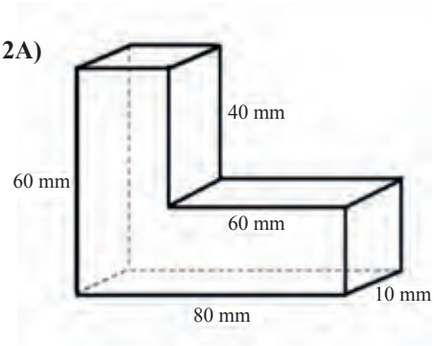
$= 192\ cm^3$

إذن حجم حجم المنشور $192\ cm^3$

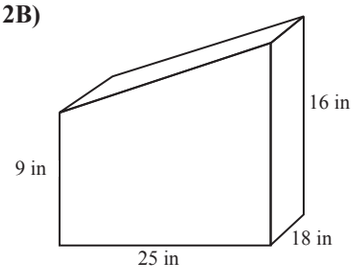
تحقق

احسب حجم المنشور غير المنتظم أدناه:

2A)

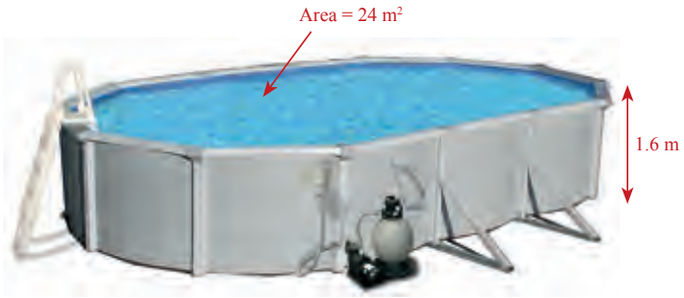


2B)



مثال 3: إيجاد حجم منشور غير منتظم علم أبعاده

احسب حجم الماء في البركة التي أمامك.



لإيجاد حجم الماء نحسب سعة البركة:

حجم المنشور غير المنتظم: $V = A \times h$

بالتعويض: $A = 24, h = 1.6$ $= 24 \times 1.6$

$= 38.4 \text{ m}^3$

إذن حجم الماء في البركة 38.4 m^3

تحقق

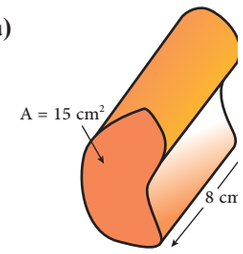
صممت شركة مجسم من النحاس على شكل منشور قائم ارتفاعه 7 cm وقاعدته على هيئة نجمة غير منتظمة مساحتها 25 cm^2 ، فكم كمية النحاس المستخدمة لصنع 100 مجسم من نفس النوع.

تمارين 2-7

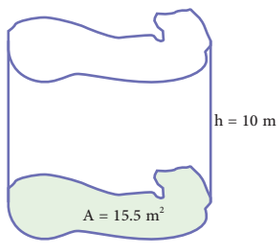
مثال 1، 2

1) أوجد حجم كل من المنشورات غير المنتظمة التالية:

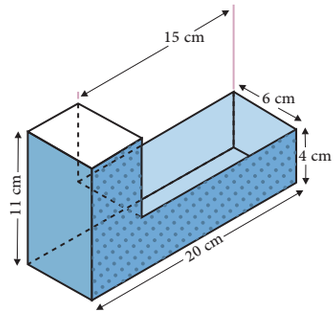
a)



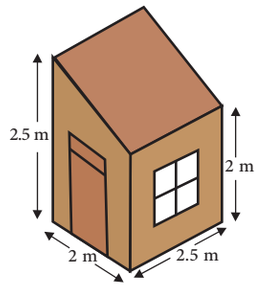
b)



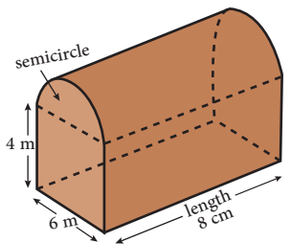
c)



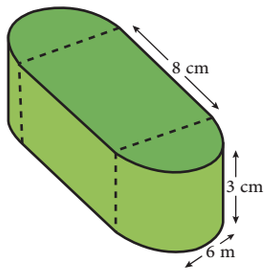
d)



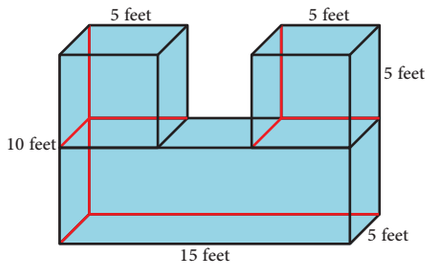
e)



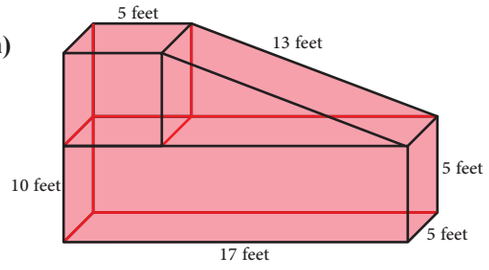
f)



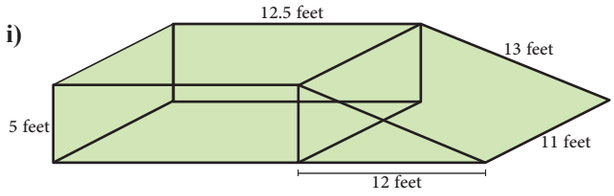
g)



h)



i)

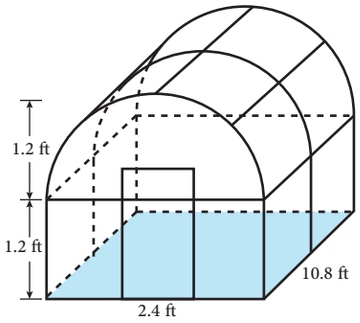


مثال 3

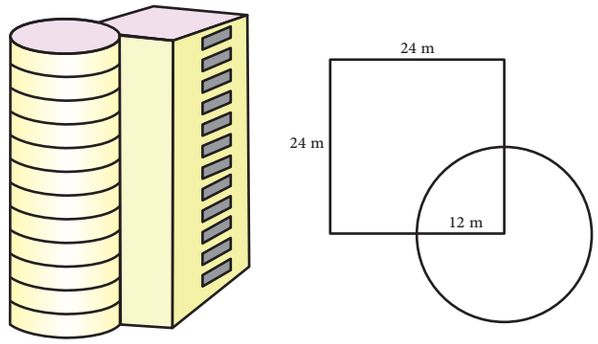
2) حُفر نفق طوله 200 m كما في الشكل المجاور :

فاحسب كمية الهواء التي تملا النفق.

3) رُكـب نظام تبريد في كوخ بحيث يغطي $20\ ft^3$ ، فإذا كانت أبعـاد الكوخ كما هي موضحه بالشـكل، فهل نظام التبريد مناسب للكوخ؟ فسر ذلك.



4) صمم مبنى على هيئة منشـور مسـقطه العلوي كما في الشـكل أدناه، فإذا كان ارتفـاع المبنى 73 m ، فأوجد حجمه.



مسائل مهارات التفكير العليا

5) أيهما أفضل: بناء منشور ثلاثي منتظم أم نصف أسطوانة كسقف لمكعب للحصول على خزان ماء أكبر ما يمكن؟

6) خزان على شكل منشور غير منتظم مكون من مكعب طول ضلعه 3 m ، تعلوه نصف أسطوانة نصف قطر قاعدتها 1.5 m ، يصب فيه الماء بمعدل لتر واحد في الدقيقة، احسب ما يلي:

a) حجم المنشور

b) الزمن اللازم حتى يرتفع الماء فيه إلى مستوى 1 m

c) الزمن اللازم حتى يمتلأ الخزان

تنويه: $1\ litre = 1000\ cm^3$

7) بنى خالد بركة بعمق 2 m من جزأين متصلين جزء دائري نصف قطره 3 m ، وجزء مستطيل طوله 12 m وعرضه 6 m ، فكم مترًا مكعبًا من الماء يحتاج لملئها؟

8) ناقش كيف يمكنك إيجاد حجم منشور قائم غير منتظم؟

7-3 القياسات المركبة
Compound Measures

تمهيد

يتميز الفهد الصياد بسرعة فائقة لا ينازعه فيها أحد من أبناء فصيلته، وبذلك فهو يعتبر أسرع حيوان على وجه الأرض، فتصل سرعته إلى 120 km/h ويستطيع أن يصل من سرعة 0 إلى سرعة 110 km/h خلال 3s فقط.

أفكار الدرس

- أحل تطبيقات تتضمن بعض القياسات المركبة مثل السرعة المتوسطة والتسارع والكثافة السكانية.

المعايير:

11F.9.3

المصطلحات:

- القياسات المركبة compound measures
- السرعة المتوسطة average speed
- التسارع acceleration
- الكثافة السكانية population density

القياسات المركبة:

تمثل **القياسات المركبة** compound measures العلاقة بين كميتين قياسيتين مختلفتين في الوحدات أو أكثر، وتظهر في العديد من القياسات كالسرعة المتوسطة والكثافة والضغط والقدرة، والجدول التالي يبين القياسات المركبة التي سنتناولها في هذا الدرس.

مفهوم — القياسات المركبة

القياس	التعبير اللفظي	الرموز
السرعة المتوسطة (s) average speed	السرعة المتوسطة = $\frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}}$	$s = \frac{d}{t}$ حيث: d = المسافة، t = الزمن
التسارع (a) acceleration	التسارع = $\frac{\text{التغير في السرعة}}{\text{التغير في الزمن}}$	$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$ v_1 السرعة الابتدائية، v_2 السرعة النهائية، t_1 الزمن الابتدائي، t_2 الزمن النهائي
الكثافة السكانية (d_p) population density	الكثافة السكانية = $\frac{\text{عدد الأشخاص}}{\text{المساحة}}$	$d_p = \frac{n}{A}$ حيث: n = عدد السكان، A = المساحة

وفيما يلي بعض الأمثلة حيث تستخدم المقاييس المركبة:

السرعة المتوسطة:

يمكن تعريف **السرعة المتوسطة** average speed على أنها المسافة الكلية المقطوعة مقسومة على الزمن، على سبيل المثال إذا قطعت سيارة مسافة 80 km في ساعة واحدة فإن سرعتها المتوسطة تكون 80 km/h . وإذا قطعت مسافة 320 km في 4 h فإن سرعتها المتوسطة أيضا تكون 80 km/h ، بغض النظر عن مدى تغير سرعتها أو توقفها خلال المسافة، وتستخدم الصيغة التالية لحسابها:

حيث: s السرعة المتوسطة، d المسافة الكلية المقطوعة، t الزمن المستغرق: $s = \frac{d}{t}$

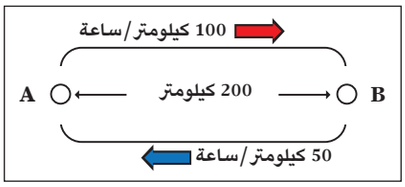
إرشاد

تذكر عند حل تطبيقات على القياسات المركبة:

- حدد ما هي المعطيات وما هو المطلوب.
- دائما العمليات إما بالضرب أو القسمة وأسأل هل الوحدات لها معنى.
- تأكد من أن وحدات القياس متماثلة.

مثال 1 : إيجاد السرعة المتوسطة

قطعت سيارة المسافة بين مدينتين ذهابا بسرعة 100 km/h، وعودة بسرعة 50 km/h. ماهي السرعة المتوسطة للسيارة خلال الرحلة كاملة إذا كانت المسافة بين المدينتين 200 km



الخطوة 1 : احسب زمن الذهاب - حيث قطع مسافة 200 km بسرعة 100 km/h :

$$t_1 = \frac{d}{s} = \frac{200\ \text{km}}{100\ \text{km/h}} = 2\text{h}$$

الخطوة 2 : احسب زمن العودة - حيث قطع مسافة 200 km بسرعة 50 km :

$$t_2 = \frac{d}{s} = \frac{200\ \text{km}}{50\text{km/h}} = 4\text{h}$$

الخطوة 3 : احسب السرعة المتوسطة - حيث المسافة الكلية ذهابا وعودة $200 + 200 = 400$ km والزمن الكلي $4 + 2 = 6$h :

$$s = \frac{400\ \text{km}}{6\ \text{h}} = 66.67\ \text{km/h}$$

إذن السرعة المتوسطة خلال الرحلة 66.67 km/h

تحقق

1) قطعت سيارة المسافة بين مدينتين ذهابا بسرعة 120 km/h وعودة بسرعة 80 km/h ، ماهي السرعة المتوسطة للسيارة خلال الرحلة كاملة إذا كانت المسافة بين المدينتين 240 km ؟

التسـارع:

التسارع acceleration (العجلة) هو مقدار التغير في السرعة المتّجهة (يتم تحديدها من خلال المقدار والاتجاه معًا) للجسم بالنسبة للزمن، ويقاس التسارع في العادة بوحدة المتر لكل ثانية مربّعة، مثلا إذا تغيرت سرعة جسم متحرك زيادة أو نقصان فإننا نقول بأن حركة الجسم متسارعة أو متعجلة، تصور أن جسمًا يتحرك من السكون ويزيد من سرعته بمقدار 2 m/s في كل ثانية، فبعد ثانية من بدء حركته تكون سرعته تساوي 2 m/s ، وبعد ثانيتين تصبح سرعته 4 m/s ، وبعد 3 s تصل سرعته إلى 6 m/s وهكذا ...

ففي هذه الحالة توصف حركة الجسم بأنها ذات تسارع أو عجلة ثابتة أو منتظمة لأن الزيادة في السرعة كانت تحدث بشكل منتظم وهو 2 m/s

فإذا بدأ جسم ما حركته بسرعة ابتدائية v_1 في لحظة زمنية t_1 ثم تغيرت سرعته لتصل إلى سرعة نهائية v_2 في لحظة زمنية t_2 فإنه يمكن تحديد قيمة التسارع بالصيغة:

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

حيث أن التسارع كمية متجهة فإذا كانت تزايدية تكون بإشارة موجبة، أما إن كانت تناقصية (كما في حالة تناقص السرعة عند استخدام المكابح في السيارات) تكون بإشارة سالبة، أما إذا كانت صفرًا فإن الجسم يتحرك بسرعة ثابتة.

مثال 2 : إيجاد التسارع

تتحرك سيارة في خط مستقيم بتسارع منتظم فإذا تغيرت سرعتها من 36 km/h إلى 90 km/h خلال فترة زمنية مقدارها 20 s ، احسب تسارع السيارة بوحدة m/s^2 .

الخطوة 1 : حول الوحدات:

بما أن المطلوب هو التسارع بوحدة m/s^2 ، حول وحدات السرعة من km/h إلى m/s :

$$v_1 = \frac{36 \times 1000}{1 \times 60 \times 60} = 10 m/s$$

$$v_2 = \frac{90 \times 1000}{1 \times 60 \times 60} = 25 m/s$$

الخطوة 2 : احسب التسارع :

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{25 - 10}{20} = 0.75 m/s^2$$

حيث أن التسارع موجب إذن سرعة السيارة في تزايد خلال الفترة الزمنية.

تحقق

2) احسب مقدار تسارع السيارة بوحدة m/s^2 في حالة أن سرعتها تغيرت من 54 km/h إلى 36 km/h خلال 2 s ؟

الكثافة السكانية:

الكثافة السكانية population density هو مقياس ديمغرافي يُستخدم عادةً في علم السكان لقياس معدّل عدد السكّان المُتواجدين في مَنطقة جغرافيّة مُعيّنة في فترة منتصف العام مثل الدول أو المدن أو أي منطقة مأهولة بالسكان، ويُقسم هذا الرقم على المساحة الكلية للمَنطقة الجغرافية ،وتستخدم لحسابها الصيغة التالية:

$$d_p = \frac{n}{A}$$

حيث d_p الكثافة السكانية ، n عدد السكان في المنطقة، A المساحة الكلية للمنطقة.

الدّيموغرافيـــا (Demography) المعروفـة بعلـم السـكّان؛ هـي علم إحصائيّ اجتماعـيّ وحيويّ، يعتمد على دراسـة مجموعة من الإحصاءات حول الأفراد.

مثال 3 : إيجاد الكثافة السكانية

أيهمـا أكثـر كثافة سـكانية بلديـة الخور أم بلدية الوكرة حسـب إحصـاءات وزارة التخطيـط التنموي والإحصاء عام 2004؟

البلدية	المساحة (km^2)	عدد السكان (نسمة)
الخور	$1500 km^2$	31547
الوكرة	$2500 km^2$	31441

الخطوة 1 : احسب الكثافة السكانية لبلدية الخور:

$$d_p = \frac{n}{A} = \frac{31547}{1500} = 21$$

إذن كثافة السكان 21 نسمة لكل كيلومتر مربع.

الخطوة 2 : احسب الكثافة السكانية لبلدية الوكرة:

$$d_p = \frac{n}{A} = \frac{31441}{2500} \approx 13$$

إذن كثافة السكان 13 نسمة لكل كيلومتر مربع.

الخطوة 3 : قارن الكثافتين:

نلاحظ أن كثافة السكان في بلدية الخور عام 2004 أكثر من بلدية الوكرة.

مـن مهـام وزارة التخطيط التنموي والإحصاء إجراء العمليات الإحصائية الرسمية وتنظيمها والإشراف عليها، وتنفيذ التعدادات والمسـوح المختلفة ونشر البيانات والمنتجات الإحصائية.

تحقق

3) أيهما أكثر كثافة سكانية حسب إحصاءات 2017 استراليا أم كندا ؟

الدولة	المساحة (km^2)	عدد السكان (نسمة)
أستراليا	7,692,024	24,733,103
كندا	9,984,670	37,015,257

تمارين 3-7

مثال 1

1) قطعت سيارة المسافة بين مدينتين ذهابا بسرعة 100 km/h وعودة بسرعة 60 km/h ، ماهي السرعة المتوسطة للسيارة خلال الرحلة كاملة إذا كانت المسافة بين المدينتين 300km ؟

2) قام راكب دراجة نارية برحلة بسرعة 100 km/h في أول ساعتين وكانت سرعته المتوسطة 80 km/h في الساعات الثلاث التالية، ماهي سرعته المتوسطة لكل الرحلة ؟

3) يسير قطار بسرعة 125 mi/h لمدة ساعتين ثم بسرعة 90 mi/h لمدة 5 ساعات، ماهي السرعة المتوسطة للقطار خلال الرحلة كاملة؟

مثال 2

4) ماهو مقدار تسارع السيارة بوحدة m/s^2 في حالة أن سرعتها تغيرت من 120 km/h إلى 180 km/h خلال 4 s ؟

5) تتحرك سيارة في خط مستقيم بتسارع منتظم فإذا تغيرت سرعتها من 70 km/h إلى 100 km/h خلال فترة زمنية مقدارها 30 s، احسب تسارع السيارة بوحدة m/s^2 ؟

6) تتسارع طائرة من سرعة 700 km/h إلى أن تصل سرعتها إلى 360 km/h وهي السرعة اللازمة للهبوط خلال 12 s. جد التسارع اللازم بوحدة m/s^2؟

مثال 3

7) أيهما أكثر كثافة سكانية الصين أم الهند حسب الإحصاءات في الجدول أدناه:

البلد	المساحة (km^2)	عدد السكان (نسمة)
الصين	9,640,821	1,384,803,400
الهند	3,287,240	1,310,775,750

8) قارن الكثافة السكانية لكل من سنغافورة وهونغ كونغ وفق إحصاءات عام 2016 المدونة أمامك:

البلد	عدد السكان (نسمة)	المساحة km^2
سنغافورة	5,607,28	709
هونغ كونغ	7,346,70	1,050

9) قارن الكثافة السكانية لكل من ماليزيا ومصر وفق إحصاءات عام 2016 المدونة أمامك :

البلد	المساحة (km^2)	عدد السكان (نسمة)
ماليزيا	330,803	31,888,000
مصر	1,002,450	94,182,580

10) عند مدخل مواقف سوق واقف تحدد علامة مرورية السرعة المسموح بها بـ 40 km/h ، عند الخروج من مواقف سوق واقف توجد علامة نهاية المنع تفصل بين العلامتين 800 m ، يقطع راكب دراجة نارية هذه المسافة خلال مدة 1 min 20 s ، بينما يقطعها سائق سيارة في 36 s ، أيهما كان يسير ضمن السرعة المسموح بها ؟

11) إذا كانت المسافة بين مدينة الدوحة ومسيعيد 89 km وقطعت سيارة المسافة بسرعة 80 km/h، وعادت بسرعة 90 km/h. ماهي السرعة المتوسطة للسيارة خلال الرحلة كاملة ؟

مسائل مهارات التفكير العليا

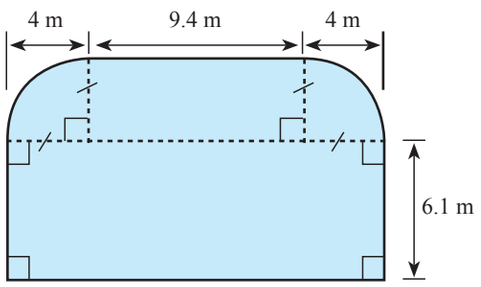
12) يقطع أحمد 90 km في ساعتين بالسيارة بسرعة ثابتة:
   a) ما المسافة التي يقطعها خلال نصف ساعة ؟
   b) ما طول المدة التي استغرقها في قيادته لـ 75 km ؟

13) يبدأ رجل رحلته إلى عمله في الساعة 7:45 وتستغرق ساعة ونصف لقطع مسافة 48 km ، أوجد:
   a) الوقت الذي وصل فيه إلى عمله.
   b) سرعة الرجل.

اختبار الوحدة السابعة

اختيار من متعدد:

1) احسب مساحة الشكل غير المنتظم المظلل مقربة لرقمين عشريين:



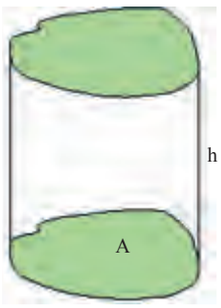
A) 169.05 m^2

B) 131.27 m^2

C) 143.93 m^2

D) 143.93 cm^2

2) احسب مساحة قاعدة الشكل أدناه إذا كان حجمه 375 cm^3 وارتفاعه 12.5 cm:



A) 30 cm

B) 0.033 cm^2

C) 0.033 cm

D) 30 cm^2

3) ما الزمن اللازم لقطع مسافة 90 km، بسرعة متوسطة 24 km/h:

A) 3h 15m

B) 3h 5m

C) 3h 30m

D) 3h 45m

4) تزداد سرعة طائرة من 360 km/s إلى 720 km/s ، ما الزمن الذي تحتاجه ليصل تسارعها إلى 20 m/s^2 :

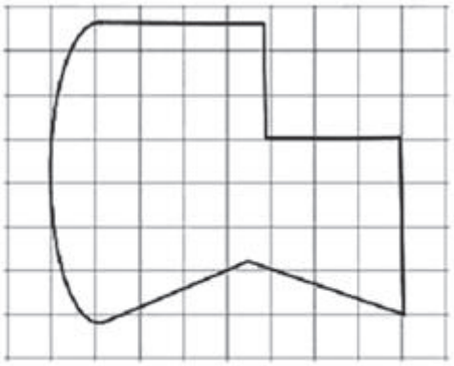
A) 2000 s

B) 18 s

C) 20 s

D) 5 s

5) قدر مساحة الشكل أدناه حيث أن كل مربع يمثل 60 mi^2 ؟



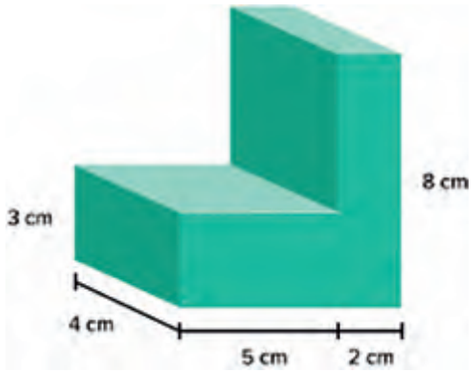
A) 1353 mi^2

B) 2220 mi^2

C) 2600 mi^2

D) 3000 mi^2

6) احسب حجم المنشور غير المنتظم أدناه:



A) 224 cm^3

B) 124 cm^3

C) 48 cm^3

D) 113 cm^3

7) احسب مساحة دولة نامبيا إذا كانت الكثافة السكانية لها 6.63 نسمة لكل ميل مربع و عدد السكان 2,113,077 نسمة :

A) 1400 mi^2

B) 30000 mi^2

C) 318714 mi^2

D) 318714 km^2

أجب عن الأسئلة التالية:

1) من الجدول أدناه أوجد:

البلد	الكثافة السكانية (نسمة لكل km^2)	المساحة (km^2)
الدنمارك	126	43.094
الرأس الأخضر	126	4.033

a) عدد سكان الدنمارك.

b) عدد سكان الرأس الأخضر.

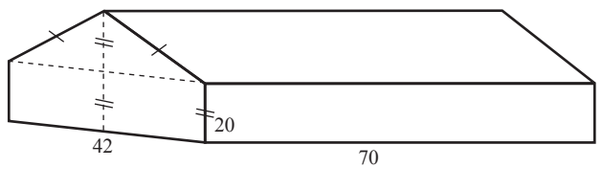
c) قارن بينها.

2) بدأ جسم ما حركته بسرعة 10 m/s من السكون لتصل سرعته إلى 35 m/s خلال 6 s ، احسب تسارع الجسيم.

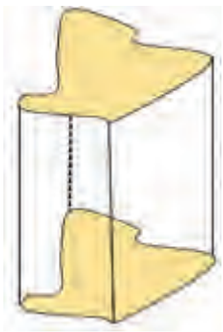
3) قطعت طائرة مسافة 1140 mi بسرعة 570 mi/h ، ثم قطعت مسافة 1275 mi بسرعة 425 mi/h ، ماهي السرعة المتوسطة للطائرة خلال الرحلة كاملة.

4) احسب حجم كل من الأشكال التالية:

a)



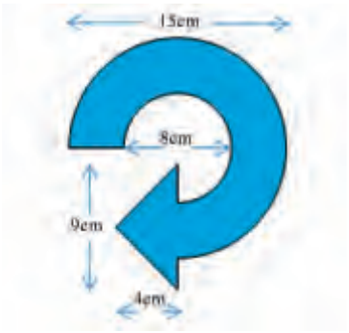
b)



مساحة القاعدة $22.5\ cm^2$

الارتفاع 10 cm

5) يتكون الشكل المظلل باللون الأزرق من ثلاثة أرباع حلقة مع رأس سهم، احسب المساحة الإجمالية مقربة إلى رقمين عشريين:



الوحدة 8

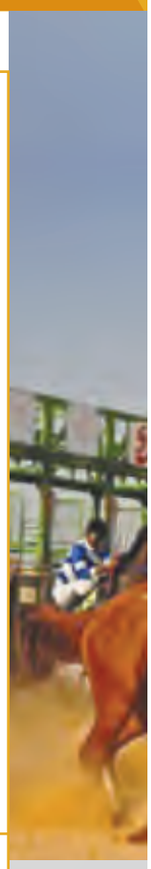
الاحتمالات
Probability

أفكار الوحدة

- أجد الاحتمال التجريبي لحوادث من تجربة احتمالية.
- أتعرف المتغير العشوائي والتوزيع الاحتمالي لتجربة عشوائية.
- أتعرف الحدثين المتنافيين وغير المتنافيين، وأجد احتمال اتحادهما.
- أتعرف الحوادث المركبة.
- أجد احتمالات الحوادث المستقلة وغير المستقلة.
- إيجاد احتمال حدث إذا علم وقوع حدث آخر.
- أتعرف المخاطرة وأحل مسائل تتضمنها.
- أقدر الاحتمال التجريبي باستعمال المحاكاة.

ظهر عِلْمُ الاحتمالات نتيجة أبحاث قام بها العديد من العلماء، اشتهر منهم العالمان الفرنسيان باسكال وفيرمات في منتصف القرن السابع عشر، عند دراستهما لأرقام معينة في عالم المراهنة وألعاب الحظ، ومنذ ذلك الحين اشترك الكثير من الرياضيين والعلماء في أبحاث هذا العلم، وعلى الرغم من أنه علم قديم إلا أنه لم توضع له مسلمات إلا في القرن الماضي، ويحتل هذا العلم الآن وضعا متميزا بين أساسيات الرياضيات؛ حيث أصبح أداة هامة في مجالات متعددة مثل الطبيعة والطب، وعلم النفس والعلوم السياسية والتربية وغيرها من المجالات المختلفة، والجدير بالذكر أن قضايا الحظ والصدفة كانت تعتبر في الماضي من الأمور الغامضة التي لا تخضع لتحليل رياضي أو تنبؤ علمي، ولكن الرياضيين أثبتوا عكس ذلك، حين استطاعوا أن يحولوا مثل هذه القضايا إلى علم يساهم في التنمية وتقدم البشر. والعبارات الاحتمالية شائعة بين الناس، فكثير ما نستعمل عبارات الاحتمال في معظم حياتنا اليومية للتعبير عن أحداث في ظروف عدم التأكد، كأن نقول: احتمال أن تسقط الأمطار غدا، أو احتمال أن يفوز فريق **أ** على فريق **ب** في إحدى مسابقات البرامج التعليمية.

تهيئة الوحدة الثامنة



مراجعة

مثال 1 :

إذا كانت التجربة الاحتمالية رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6

a) اكتب الفضاء العيني للتجربة

الفضاء العيني $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

b) ما احتمال ظهور العدد 3 ؟

ليكن الحدث A ظهور العدد 3

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6}$$

c) ما احتمال عدم ظهور العدد 3 ؟

عدم ظهور العدد 3 يعني A' (متممة A)

$$P(A') = 1 - P(A)$$

$$P(A') = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

مثال 2 :

في تجربة إلقاء قطعة نقد مرتين متتاليتين، ما احتمال ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل.

فضاء العينة للتجربة $S = \{ HH, HT, TH, TT \}$

ليكن A :يمثل ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل ، هذا يعني مرة او مرتان $A = \{ HT, TH, HH \}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{4}$$

مثال 3 :

لعب فريق كرة قدم مباراتي الذهاب والإياب:

a) اكتب فضاء العينة للنتائج الممكنة

$S = \{WW, WL, WE, LL, LW, LE, EE, EW, EL\}$

حيث W: فوز، L : خسارة، E : تعادل.

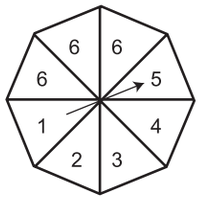
b) أوجد احتمال الفوز مرة واحدة فقط:

ليكن A يمثل فوز الفريق مرة واحدة.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{9}$$

اختبار

1) إذا أدير المؤشر على القرص أدناه:



a) ما احتمال وقوف المؤشر على العدد 6 ؟

b) ما احتمال عدم وقوف المؤشر على العدد 3 ؟

c) إذا أدير المؤشر 1200 مرة. كم مرة تتوقع وقوف المؤشر على العدد 6 ؟

2) رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرتين متتاليتين.

a) ما احتمال أن يظهر عددان متساويان في المرتين ؟

b) ما احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهرين 5 على الأكثر؟

3) لدى عائلة 3 أطفال، ونريد تسجيلهم حسب جنس كل منهم:

a) اكتب الفضاء العيني للتجربة مستخدما مخطط الشجرة الاحتمالية.

b) أوجد احتمال أن يكون لدى العائلة ولدان على الأكثر.

8-1 مقدمة في الاحتمالات
Introduction to Probability

أفكار الدرس

- أجد الاحتمال التجريبي والنظري لحوادث من تجربة احتمالية
- أتعرف المتغير العشوائي
- أجد قيم المتغير العشوائي واحتمالاتها .

المعايير:

12F. 11.1
12F. 11.2
12F. 11.3

المصطلحات:

- التجربة العشوائية
  random experiment
- فضاء العينة
  sample space
- الحدث البسيط
  simple event
- الحدث المركب
  compound event
- الحدث المستحيل
  impossible event
- الحدث الأكيد
  certain event
- الاحتمال التجريبي
  experimental probability
- التكرار النسبي
  relative frequency
- الاحتمال النظري
  theoretical probability
- المتغير العشوائي
  random variable

تمهيد

لكي يتم تحديد مكان أحد الفريقين في ملعب كرة القدم أو اليد مثلا يلقي حكم المباراة قطعة نقد معدنية وقد تكون النتيجة صورة (H) أو كتابة (T) .

وقد درست سابقا أن التجربة الاحتمالية أو ما يعرف **بالتجربة العشوائية** random experiment هي التجربة التي يمكن معرفة جميع نتائجها مسبقا ولكن لا يمكن التنبؤ بحدوث أي من هذه النتائج، كما تعلمت أن مجموعة جميع النواتج الممكنة لهذه التجربة ويرمز لها بالرمز S تسمى **فضاء العينة** sample space أو الفضاء العيني للتجربة العشوائية، وعدد هذه النواتج $n(S)$

كما درست أن الحدث هو أي مجموعة جزئية من فضاء العينة وأن الأحداث تصنف إلى **الحدث البسيط** simple event عندما يحتوي على ناتج واحد فقط من نواتج التجربة أو **الحدث المركب** compound event عندما يحتوي على حدثين بسيطين أو أكثر. ويرمز للحدث بأحد الحروف الكبيرة مثل: ***A,B,C ...*** ولعدد العناصر بالرمز ***n(A), n(B), ...*** وتقسم الحوادث حسب إمكانية حدوثها إلى ثلاثة أنواع من الحوادث وهي:

الحدث المستحيل: الحدث الذي لا يمكن أن يقع عند إجراء التجربة العشوائية يسمى **الحدث المستحيل** impossible event، ولا يحتوي أي عنصر من عناصر الفضاء العيني، أي أن عدد عناصره 0 ، لذا فإن احتماله يساوي 0 . مثلا عند إجراء مباراة كرة القدم بين فريقين فإن فوز الفريقين معا يكون مستحيلا واحتمال ذلك يساوي 0 .

الحدث الأكيد : الحدث الذي يحتوي جميع عناصر فضاء العينة للتجربة العشوائية يسمى **الحدث الأكيد** certain event مثلا عند رمي قطعة نقد مرة واحدة فإنه من المؤكد ظهور (H) أو (T) واحتمال ذلك يساوي $\frac{2}{2} = 1$

الحدث الممكن الوقوع: هو الحدث الذي ليس مستحيلا ولا أكيدا ويكون احتمال وقوعه بين 0 و 1 .

الاحتمال التجريبي والاحتمال النظري:

يعرف **الاحتمال التجريبي** experimental probability **أو التكرار النسبي** relative frequency لحدث بأنه نسبة عدد مرات ظهور الحدث إلى العدد الكلي لمرات إجراء التجربة. فإذا رميت قطعة نقد 100 مرة وظهرت الصورة (H) 47 مرة فإن الاحتمال التجريبي لظهور الصورة يساوي $0.47 = \frac{47}{100}$ ويرمز له بالرمز $P(H)$.

في حين أن **الاحتمال النظري** theoretical probability للحدث يعتمد على افتراضات يتوقع الحصول عليها عند إجراء التجربة كما في تجربة إلقاء قطعة النقد ومكعب مرقم من 1 إلى 6 .... إلخ.

فمثلا عند إلقاء قطعة النقد تكون النتائج الممكنة $\{H, T\}$ ويكون الاحتمال النظري لكل من الصورة والكتابة متساويان لتساوي فرصة ظهور كل منهما أي أن: $P(H) = P(T) = \frac{1}{2}$.

ويعبر عن احتمال أي حدث بكسر اعتيادي أو عشري أو نسبة مئوية .

وتقترب قيمة الاحتمال التجريبي من الاحتمال النظري كلما زاد عدد مرات إجراء التجربة .

مفهوم — الاحتمال النظري للحدث

إذا كانت إمكانية الحدوث نفسها لنتائج التجربة الاحتمالية فإن احتمال الحدث هو نسبة عدد نواتج ذلك الحدث إلى العدد الكلي للنواتج الممكنة.

ويعبر عن ذلك بالصيغة : $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ ، $0 \le P(A) \le 1$ حيث :

$P(A)$: احتمال الحدث A

$n(A)$: عدد عناصر الحدث A

$n(S)$: عدد عناصر فضاء العينة S

مثال : عند رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة ، إذا كان الحدث A يمثل ظهور عدد فردي

فإن : $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

مثال 1 : إيجاد الاحتمال التجريبي

الجدول التالي يمثل دراسة ميدانية للزمن الذي يقضيه مجموعة من الأشخاص في ممارسة الرياضة يوميا بالدقائق:

الزمن (min)	$10 \le x < 30$	$30 \le x < 50$	$50 \le x < 70$	$70 \le x < 90$	$90 \le x < 110$
التكرار	10	15	30	25	20

إذا اختير أحد الأشخاص عشوائيا :

a) ما الاحتمال التجريبي لأن يقضي زمنا أقل من 70 دقيقة ؟

ليكن الحدث A يمثل أن الشخص يقضي زمنا أقل من 70 دقيقة

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10+15+30}{100} = \frac{55}{100} = 0.55$ $\quad n(A) = 55 \, , \, n(S) = 100$

b) ما الاحتمال التجريبي لأن يقضي زمنا أكثر من 90 دقيقة ؟

ليكن الحدث B يمثل أن الشخص يقضي زمنا أكثر من 90 دقيقة

$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{20}{100} = 0.20$ $\quad n(B) = 20 \, , \, n(S) = 100$

تحقق

الجدول التالي يمثل أعمار 50 عاملا في أحد المصانع نتيجة لدراسة قام بها قسم الموارد البشرية في المصنع:

العمر (year)	$18 \le x < 30$	$30 \le x < 42$	$42 \le x < 54$	$54 \le x < 66$
التكرار	10	15	20	5

اختير عامل عشوائيا:

1A) ما الاحتمال التجريبي لأن يكون عمر العامل أقل من 42 سنة ؟

1B) ما الاحتمال التجريبي لأن يكون عمر العامل أكثر من 30 سنة ؟

مثال 2 : إيجاد الاحتمال النظري

أوجد احتمال كل من الحوادث التالية:

a) اختيار عدد زوجي من الأعداد {3,4,5,6,7}.

ليكن الحدث A يعني اختيار عدد زوجي.

$$n(A) = 2 \ , \ n(S) = 5$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{5} = 0.4$$

b) ظهور عدد أكبر من 7 عند رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة .

الاحتمال لهذا الحدث يساوي 0 ، لأنه لا يوجد عدد أكبر من 6 على أي وجه للمكعب .

c) مجموع العددين الظاهرين أكبر من 1 عند رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرتين.

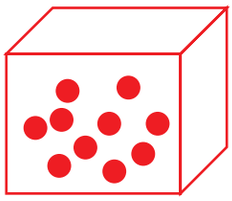
الاحتمال يساوي 1 حيث أن أصغر عدد على كل وجه لأي مكعب هو 1 وبالتالي أصغر مجموع للعددين يساوي 2 ، (أكبر من 1).

تحقق

أوجد احتمال كل من الحوادث التالية:

2A) مجموع الرقمين الظاهرين أقل من 1 عند رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرتين.

2B) الحصول على صورة (H) عند رمي قطعة نقد مرة واحدة.



2C) الحصول على كرة حمراء عند سحب كرة عشوائيا من صندوق يحتوي 10 كرات حمراء فقط.

المتغـير العشـوائي: أحيانـا نهتم عند إجراء تجربة عشـوائية بربـط نتائج هذه التجربـة بأعداد حقيقيـة، فمثلاعند رمي قطعـة نقـد 3 مـرات متتاليـة قـد نهتم بعدد مـرات ظهـور الصـورة (H) وفي هذه الحالـة يرتبط كل ناتـج من نواتج فضـاء العينـة بعـدد حقيقي .وهـذا يعرف دالة مـن فضـاء العينـة S إلى مجموعة جزئية مـن الأعداد الحقيقية تسـمى **متغيرا عشوائيا** random variable وتستخدم الرموز $X, Y, Z, \ldots$ للدلالة على المتغير العشوائي .

مثال 3 : إيجاد احتمالات قيم المتغير العشوائي

رميت قطعة نقد 3 مرات متتالية، إذا كان المتغير العشوائي X يدل على عدد مرات ظهور الكتابة T

a) أوجد قيم المتغير العشوائي X

بما أن عدد مرات ظهور الكتابة 0,1,2,3 فإن : $X = \{0, 1, 2, 3\}$

b) أوجد احتمالات قيم المتغير العشوائي X

الناتج	HHH	THH	HTH	HHT	HTT	THT	TTH	TTT
عدد مرات ظهور الكتابة	0	1	1	1	2	2	2	3

بالاعتماد على الجدول أعلاه:

$X = 0$ تعني عدم ظهور الكتابة وتكررت مرة واحدة : $P(X = 0) = \frac{1}{8}$

$X = 1$ تعني ظهور الكتابة مرة واحدة فقط ، وتكررت 3 مرات: $P(X = 1) = \frac{3}{8}$

$X = 2$ تعني ظهور الكتابة مرتان، وتكررت 3 مرات: $P(X = 2) = \frac{3}{8}$

$X = 3$ تعني ظهور الكتابة ثلاث مرات، وتكررت مرة واحدة: $P(X = 3) = \frac{1}{8}$

c) أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X

من b) أوجدنا احتمال كل قيمة من قيم X

X	0	1	3	3
P(X)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

إرشـاد

- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي هو التعبير عن كل قيمة من قيم المتغير واحتمالها سواء في جدول أو كأزواج مرتبة أو أي تمثيل آخر .
- دائما مجموع الاحتمالات للتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي يساوي 1

تحقق :

عند رمي قطعة نقد مرتين:

3A) اكتب عناصر الفضاء العيني S .

3B) إذا كان المتغير العشوائي X يدل على عدد مرات ظهور الصورة H ، اكتب قيم X.

3C) أوجد احتمالات قيم المتغير العشوائي.

3D) كون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

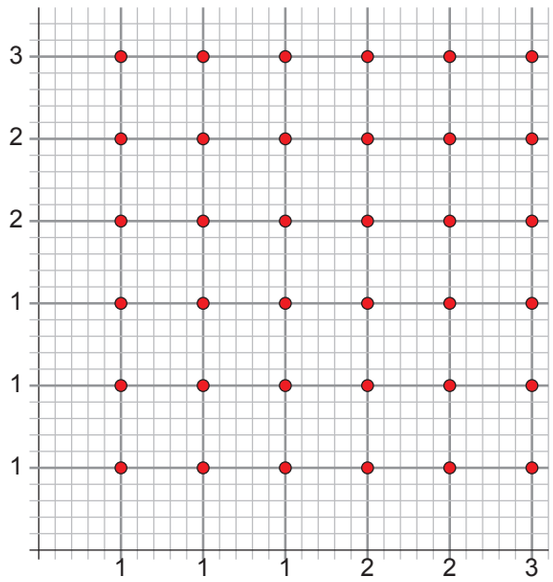
مثال 4 : المتغير العشوائي للسحب مع الإرجاع وبدون إرجاع

وعـاء به 6 بطاقات مرقمـة كما يلي : ثلاثة تحمل الرقـم 1، اثنتان تحمل الرقم 2، واحدة تحمل الرقم 3 سحبت بطاقتان من الوعاء على التوالي وكان المتغير العشوائي X يعني مجموع الرقمين على البطاقتين المسحوبتين كون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي إذا كان السحب

a) مع الإرجاع.

الشكل المجاور يمثل عناصر فضاء العينة للتجربة

قيم المتغير العشوائي الممكنة هي $X=\{2,3,4,5,6\}$ واحتمال كل منها هو :



$$P(2) = P\{(1,1)\} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$P(3) = P\{(1,2),(2,1)\} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$P(4) = P\{(1,3),(2,2),(3,1)\} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

$$P(5) = P\{(2,3),(3,2)\} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(6) = P\{(3,3)\} = \frac{1}{36}$$

جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي :

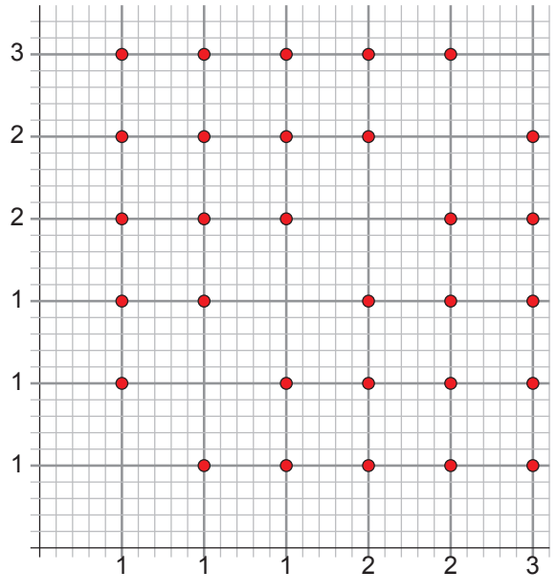
X	2	3	4	5	6
P(X)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$

b) بدون إرجاع

استخدم المربعات الواردة في (a) مع الأخذ بعين الاعتبار أن السحب بدون إرجاع .

وهذا يعني أن عناصر الفضاء العيني 30 عنصرا كما في الشـكل اللاحق نتيجة اسـتثناء الأزواج التي تمثل اختيار كل بطاقة مع نفسها والتي تمثل النقاط الواقعة على القطر .قيم المتغير العشوائي الممكنة هي $X=\{2,3,4,5\}$

واحتمال كل منها هو:



$$P(2) = P\{(1,1)\} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

$$P(3) = P\{(1,2), (2,1)\} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

$$P(4) = P\{(1,3), (2,2), (3,1)\} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

$$P(5) = P\{(2,3), (3,2)\} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$$

إذن جدول التوزيع الاحتمالي:

X	2	3	4	5
P(X)	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$

تحقق:

وعاء به 4 بطاقات مرقمة كما يلي 3 ، 2، 2 ، 1 ، سحبت بطاقتان عشوائيا.

4A) إذا كان السحب مع الإرجاع

4B) إذا كان السحب بدون إرجاع

وإذا كان المتغير العشوائي X يعني مطلق الفرق بين الرقمين الظاهرين على البطاقتين.

a) اكتب قيم X الممكنة.

b) أوجد احتمال كل قيمة من قيم X .

c) كون جدول التوزيع الاحتمالي.

تمارين 1-8

مثال 1 الجدول التالي يمثل الزمن الذي يقضيه 100 طالب من طلاب الصف الثاني عشر تأسيسي في دراستهم المنزلية بالدقائق:

الزمن (min)	$30 \le x < 60$	$60 \le x < 90$	$90 \le x < 120$	$120 \le x < 150$	$150 \le x < 180$
التكرار	12	18	36	14	20

إذا اختير أحد الطلاب عشوائيا:

1) ما الاحتمال التجريبي لأن يقضي زمنا أقل من $120\ min$ ؟

2) ما الاحتمال التجريبي لأن يقضي زمنا اكثر من $90\ min$ ؟

الجدول التالي يمثل أوزان 50 عاملا في أحد المصانع:

الوزن (kg)	$60 \le x < 70$	$70 \le x < 80$	$80 \le x < 90$	$90 \le x < 100$
التكرار	12	18	13	7

إذا اختير أحد العمال عشوائيا:

3) ما الاحتمال التجريبي لأن يكون وزنه أقل من $90\ kg$ ؟

4) ما الاحتمال التجريبي لأن يكون وزنه اكثر من أو يساوي $80\ kg$ ؟

5) الجدول التالي يمثل رواتب 40 موظفا في إحدى المدارس الخاصة

الراتب بالآلاف QR	$5 \le x < 7$	$7 \le x < 9$	$9 \le x < 11$	$11 \le x < 13$	$13 \le x < 15$
التكرار	9	14	7	6	4

اختير موظف عشوائيا أوجد الاحتمال التجريبي لكل من الحوادث التالية :

a) أن يكون راتب الموظف أكثر من 11 ألف ريال.

b) أن يكون راتب الموظف أقل من 16 ألف ريال.

مثال 2 أوجد احتمال كل من الحوادث التالية:

6) اختيار عدد أولي من مجموعة الأعداد $\{4, 6, 8, 9\}$.

7) ظهور عدد فردي عند رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة.

8) ظهور عدد أقل من 7 عند رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة.

9) في تجربة إلقاء قطعة نقد 3 مرات ، ما احتمال ظهور الصورة H مرتين.

10) اختار شخص الإقامة في فندق من 30 طابقا ، ما احتمال أن تكون إقامته في غرفة تقع بين الطابقين 20 ، 27 ؟

مثال 3 11) عائلة لديها 5 أطفال، إذا كان المتغير العشوائي X يرمز إلى عدد الأولاد في العائلة فما هي مجموعة القيم التي يأخذها المتغير X ؟

12) إذا دل المتغير العشوائي X على مجموع الرقمين الظاهرين عند رمي مكعبين مرقمين من 1 إلى 6، أوجد كلا مما يلي :

a) قيم X الممكنة .

b) جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

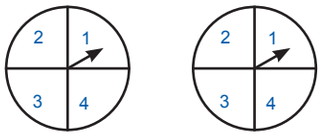
13) في تجربة إلقاء قطعة نقد مرتين، إذا كان المتغير العشوائي X يدل على عدد مرات ظهور الصورة H . أوجد كلا مما يأتي:

a) قيم المتغير العشوائي X .

b) احتمالات قيم المتغير العشوائي X .

c) جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي.

14) أدير قرصان متطابقان كل منهما مقسم إلى 4 أقسام متطابقة مرقمة من 1 إلى 4 وسجل الرقم الذي يقف عليه المؤشر، إذا عرف المتغير العشوائي X بأنه مطلق الفرق بين الرقمين الظاهرين :



a) أوجد الفضاء العيني للتجربة .

b) أوجد قيم المتغير العشوائي X واحتمالاتها.

c) أنشئ جدولا للتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي.

مثال 4

15) وعاء به 5 بطاقات مرقمة كما يلي 1, 2, 2, 3, 4 سحبت بطاقتان عشوائيا.

a) إذا كان السحب مع الإرجاع.

b) إذا كان السحب بدون إرجاع.

وإذا كان المتغير العشوائي X يعني مطلق الفرق بين الرقمين الظاهرين على البطاقتين.

a) اكتب قيم X الممكنة.

b) أوجد احتمال كل قيمة من قيم X .

c) كون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي.

16) قم برمي مكعبين مرقمين من 1 إلى 6 وسجل العدد الظاهر على وجهيهما ، إذا كان المتغير العشوائي X يمثل مطلق الفرق بين العددين الظاهرين

a) أوجد فضاء العينة للتجربة S

b) أوجد قيم X واحتمالاتها

c) أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي .

مسائل مهارات التفكير العليا

17) في تجربة رمي قطعة نقد 25 مرة ، هل يمكن أن يكون احتمال ظهور الصورة (H) يساوي $\frac{1}{2}$ ؟ فسر إجابتك.

18) الجدول التالي يمثل التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي X ، أوجد قيمة K .

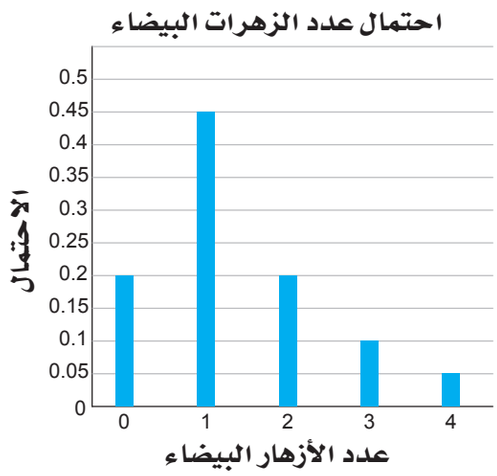
X	0	1	2	3
$P(X)$	0.3	k	0.1	2k

19) الشكل المجاور يمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الأزهار البيضاء عند زراعة 4 بذور .

أجب عما يأتي :

a) أوجد $P(X= 0)$

b) ما احتمال أن تكون زهرتان على الأقل بيضاوين ؟



8-2 الأحـــداث المتنـافـيـة
Mutually Exclusive Events

أفكار الدرس

- أتعرف الحدثين المتنافيين.
- أجد احتمال اتحاد حدثين متنافيين.
- أتعرف الأحداث المتنافية والشاملة.
- أجد الاحتمالات باستخدام حقيقة أن مجموع احتمالات الأحداث المتنافية والشاملة يساوي 1

المعايير:

12F. 11.5
12F. 11.6

المصطلحات:

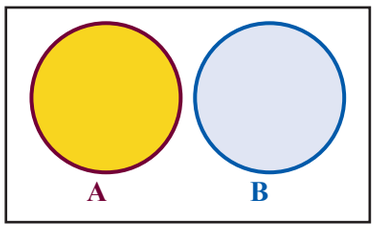
- **الأحداث المتنافية**
  mutually exclusive events
- **الحوادث المتنافية والشاملة**
  mutually exclusive and exhaustive events

تمهيد

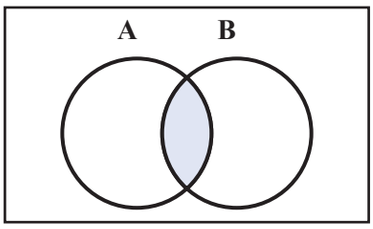
عند رمي قطعة النقد مرة واحدة فإنه إما أن تظهـر الصورة (H) أو الكتابة (T)، ولا يمكـن أن تظهـر الصـورة والكتابة معا في نفس الوقت.

الحدثان المتنافيان : يسمى الحدثان A, B **حدثين متنافيين** mutually exclusive events إذا لم يكن من الممكن حدوثهما في نفس الوقت، أي أنه لا يوجد أي نواتج مشتركة بينهما (منفصلين) $A \cap B = \emptyset$

وتوضح أشكال فن أدناه معنى الحدثين المتنافيين و الحدثين غير المتنافيين.



A,B حدثان متنافيان (منفصلان)
$A \cap B = \emptyset$



A,B حدثان غير متنافيين (متقاطعان)
$A \cap B \neq \emptyset$

مثال 1 : **تمييز الأحداث المتنافية وغير المتنافية**

حدد إذا كان الحدثان A, B متنافيين أم غير متنافيين؟ فسر إجابتك.

a) عند سحب كرة من صندوق يحتوي على 5 كرات حمراء و 4 كرات بيضاء .

الحدث A : يمثل الكرة المسحوبة بيضاء، والحدث B: يمثل الكرة المسحوبة حمراء .

الحدثان متنافيان لأنه لا يمكن أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء و حمراء في نفس الوقت .

b) في تجربة اختيار موظف من إحدى الشركات لحضور دورة تدريبية.

الحدث A : يعني الموظف أعزب والحدث B :يعني الموظف عمره أقل من 30 سنة .

الحدثان غير متنافيين لأنه من الممكن أن يكون الموظف أعزبا وعمره أقل من 30 سنة في نفس الوقت.

تحقق

حدد ما إذا كان الحدثان A, B متنافيين أم غير متنافيين؟ فسر إجابتك.

1A) في تجربة اختيار عدد صحيح من الأعداد بين 1 و 80 .

الحدث A: العدد يقبل القسمة على 5 .

الحدث B: يقبل القسمة على 10

1B) في تجربة رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة .

الحدث A: ظهور عدد أكبر من 3 .

الحدث B: ظهور عدد أقل من 3

عند ايجاد احتمال اتحاد حدثين من المهم معرفة فيما إذا كان الحدثان متنافيين أم غير متنافيين

مفهوم — احتمال اتحاد الحدثين المتنافيين وغير المتنافيين

- **إذا كان الحدثان A, B حدثين متنافيين فإن احتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتماليهما .**

  أي أن : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- **إذا كان الحدثان A, B غير متنافيين فاحتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتماليهما مطروحا منه احتمال وقوعهما معا .**

  أي أن : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

مثال 2 : إيجاد احتمال اتحاد حدثين متنافيين و حدثين غير متنافيين

a) عند رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة ، احسب احتمال ظهور العدد 3 أو 5 .

إذا كان الحدث A : يعني ظهور العدد 3 $\quad P(A) = \frac{1}{6}$

والحدث B : يعني ظهور العدد 5 $\quad P(B) = \frac{1}{6}$

فإن ظهور العدد 3 أو 5 يعني $A \cup B$ ، وهما حدثان متنافيان

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

b) إذا كان A,B حدثين غير متنافيين بحيث كان

$P(A \cup B) = 0.6$ ، أوجد $P(A \cap B)$

بما أن الحدثين غير متنافيين فإن :

$P(A) = 0.5 \ , P(B) = 0.4$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0.6 = 0.5 + 0.4 - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 0.5 + 0.4 - 0.6$$

$$P(A \cap B) = 0.9 - 0.6 = 0.3$$

تحقق

2A) صف به 30 طالبا منهم 13 طالبا عيونهم سـوداء ، 7 طلاب عيونهم عسـلية ، 10 طلاب عيونهم زرقاء . اختير طالب عشوائيا، ما احتمال أن تكون عيناه زرقاء أو عسلية؟

2B) إذا كان A, B حدثين غير متنافيين بحيث كان

$P(B) = 0.3$ ، $P(A \cup B) = 0.6$ ، $P(A \cap B) = 0.5$ ، أوجد $P(A)$

الحوادث المتنافية والشاملة

إذا كانت نواتج أي تجربة احتمالية مجموعة حوادث متنافية مثنى مثنى واتحادها جميعا يساوي فضاء العينة S ، فإنها تسمى **حوادث متنافية وشاملة** mutually exclusive and exhaustive لتجربة احتمالية فضاؤها العيني S وأهميتها في حل مسائل متنوعة في الاحتمالات.

مفهوم — الحوادث المتنافية والشاملة

- إذا كان A_n , ... , A_3 , A_2 , A_1 حوادث من فضاء عيني S فإنها تسمى متنافية وشاملة إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان :

الحوادث شاملة — 1) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = S$

الحوادث متنافية مثنى مثنى . — 2) $A_j \cap A_k = \emptyset \ , \forall j, k \in \{1, 2, 3, \ldots , n\}$

إرشاد

- تكون الحوادث شاملة إذا كان اتحادها يساوي فضاء العينة للتجربة.
- الرمز $\forall\, i, j$ يعني لكل العناصر. i, j

مما سبق يمكن استنتاج العلاقة التالية للحوادث المتنافية والشاملة :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) = P(S) = 1$$

مثال 3 : ايجاد احتمالات مجهولة لحوادث متنافية وشاملة

a) إذا كانت A_3 , A_2 , A_1 حوادث متنافية وشاملة بحيث

$$P(A_1) = 2P(A_2) \ , \ P(A_2) = 3P(A_3)$$

أوجد قيمة $P(A_1)$, $P(A'_1)$.

A_3 , A_2 , A_1 أحداث متنافية وشاملة

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1$$
$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$
$$= 2P(A_2) + 3P(A_3) + P(A_3)$$
$$= 2 \times 3P(A_3) + 3P(A_3) + P(A_3)$$
$$10P(A_3) = 1$$
$$P(A_3) = \frac{1}{10}$$

- $P(A_1) = 2P(A_2) = 2 \times 3P(A_3)$
$$= 6\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$
- $P(A'_1) = 1 - P(A_1) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

إرشاد

- الحدث A' يسمى الحدث المتمم للحدث A ويعني عدم وقوع الحدث A
- A', A حدثان متنافيان دائما
- $P(A) + P(A') = 1$
- $P(A') = 1 - P(A)$

تحقق

3) إذا كانت A_3 , A_2 , A_1 حوادث متنافية وشاملة بحيث $P(A_1) = 3P(A_2) \ , \ P(A_2) = 2P(A_3)$

أوجد قيمة $P(A_1)$, $P(A'_1)$.

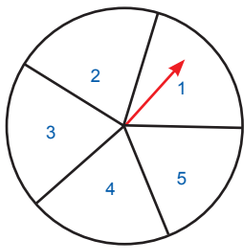
تمارين 2-8

مثال 1

حدد إذا كان الحدثان A, B متنافيين أم غير متنافيين، فسر إجابتك.

1) في تجربة اختيار طالب من أحد الفصول، يمثل الحدث A : أن تكون عيناه عسليتين، B : أن تكون عيناه سوداوين.

2) قرص دوار مقسم إلى خمس مناطق متطابقة مرقمة من 1 إلى 5 ،



يمثل الحدث A : وقوف المؤشر على عدد فردي.

ويمثل الحدث B : وقوف المؤشر على عدد أولي.

مثال 2

3) إذا كان A, B حدثين بحيث كان $P(A \cap B) = 0.4$, $P(B) = 0.5$, $P(A) = 0.7$ ، أوجد $P(A \cup B)$

4) يقدم مقصف 3 أنواع من العصائر ، 4 أنواع من الفطائر و4 أنواع من السندويشات.

اختار محمد صنفا واحدا من الأصناف الثلاثة ما احتمال أن يكون ما اختاره

محمد عصيرا أو فطيرة ؟

5) اختارت مريم كتابا عشوائيا من مكتبة فصلها التي تحتوي 25 كتابا باللغة العربية، 14 كتابا باللغة الإنجليزية و 7 كتب باللغة الإسبانية.

ما احتمال أن يكون الكتاب باللغة العربية أو الإسبانية ؟

6) يتكون فريق مدرسي من 18 رياضيا موزعين كما في الجدول أدناه ، ويرغب معلم الرياضة في اختيار قائد للفريق:

الصف	السادس	الخامس	الرابع
عدد الطلاب	4	6	8

a) ما احتمال أن يكون قائد الفريق من الصف الرابع أو السادس ؟

b) ما احتمال أن يكون قائد الفريق من الصف الخامس أو الرابع ؟

c) ما احتمال أن يكون قائد الفريق ليس من الصف الرابع ؟

7) إذا كان A, B حدثين من فضاء العينة نفسه، وكان $P(A \cup B) = 0.6$, $P(B) = 0.5$, $P(A) = 0.4$.

هل الحدثين متنافيين؟ فسر إجابتك.

8) إذا كان A, B حدثين متنافيين وكان $P(A \cup B) = 0.8$, $P(A) = 0.3$ أوجد $P(B)$.

مثال 3

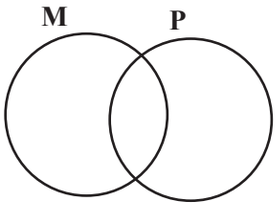
9) إذا كان A, B حدثين متنافيين وشاملين، وكان $P(A) = 3P(B)$, أوجد كلا من $P(A)$, $P(B)$.

10) إذا كانت A,B,C حوادث متنافية وشاملة بحيث أن، $P(B) = 4P(C)$, $P(A) = 2P(B)$, أوجد $P(C)$.

تمارين 2-8

11) في تجربة رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرتين .
ما احتمال عدم ظهور عددين متساويين ؟

12) صف به 35 طالبا ، 25 منهم يفضلون الرياضيات و18 يفضلون الفيزياء ، تم اختيار طالب عشوائيا .
أوجد احتمال أن يفضل الرياضيات و الفيزياء .
(استعمل شكل فن المقابل لتوزيع الطلاب على المادة المفضلة)



مسائل مهارات التفكير العليا

13) إذا كانت A_1, A_2, A_3 حوادث متنافية وشاملة بحيث $P(A_1) = 2P(A_2) = 5P(A_3)$ أوجد قيمة $P(A_2)$.

14) اكتب مثالا لحدثين متنافيين وحدثين غير متنافيين لنفس التجربة الاحتمالية.

15) ناقش صحة العبارة التالية: مجموع احتمالي أي حدثين متنافيين يساوي 1 دائما.

8-3 الأحداث المركبة
Compound Events

أفكار الدرس

- أتعرف الأحداث المركبة.
- أتعرف وأميز الحوادث المستقلة وغير المستقلة.
- أجد احتمالات الأحداث المستقلة وغير المستقلة.
- أستعمل مخطط الشجرة في إيجاد احتمالات أحداث مركبة مستقلة وغير مستقلة.
- أجد احتمال حدث إذا علم وقوع حدث آخر.

المعايير:

12F. 11.7
12F. 11.8

المصطلحات:

- **حوادث مستقلة** independent events
- **حوادث غير مستقلة** dependent events
- **الشجرة الاحتمالية** probability tree
- **الحدث المشروط** conditional event
- **الاحتمال المشروط** conditional probability

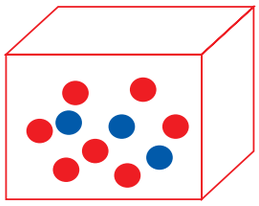
تمهيد

تعلمت سابقا أنه إذا تكون الحدث من حدثين بسيطين أو أكثر سمي **حدثا مركبا** compound event

الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

إذا كان A, B حدثين بحيث أن وقوع أحدهما لا يعتمد على وقوع الآخر سمي الحدثان **حدثين مستقلين** independent events بينما إذا كان وقوع أحدهما يعتمد على وقوع الآخر سمي الحدثان **حدثين غير مستقلين** dependent events.

فمثلا: أذا أطلق كل من جاسم وعلي رصاصة على هدف ما وكان الحدث A يعني إصابة جاسم للهدف والحدث B يعني إصابة علي للهدف في هذه الحالة يكون الحدثان مستقلين لأن إصابة جاسم للهدف لا تعتمد على إصابة علي له والعكس صحيح .



وفي تجربة سحب كرتين من صندوق به 7 كرات حمراء و 3 كرات زرقاء بدون إرجاع ، فان اختيار الكرة الأولى واختيار الكرة الثانية تمثل حوادث غير مستقلة لأن اختيار الكرة الثانية يعتمد على نتيجة اختيار الكرة الأولى.

مثال 1 : **تمييز الحوادث المستقلة وغير المستقلة**

في كل من التجارب التالية حدد فيما إذا كان الحدثان A, B مستقلين أم غير مستقلين، فسر إجابتك.

a) تجربة سحب بطاقتين بدون إرجاع من مجموعة بطاقات مكتوب عليها أحد الحروف a,b,c,d,e,f إذا كان الحدث A يعني البطاقة الأولى عليها الحرف f، والحدث B يعني البطاقة الثانية عليها الحرف c .

الحدثان غير مستقلين لأن احتمال وقوع B يعتمد على وقوع A ، أي أن وقوع A يؤثر على وقوع B .

b) تجربة سحب كرة واحدة بيضاء من صندوقين في كل منهما كرات بيضاء وحمراء إذا كان الحدث A يعني سحب كرة بيضاء من الصندوق الأول، والحدث B يعني سحب كرة بيضاء من الصندوق الثاني.

الحدثان مستقلان لأن سحب كرة بيضاء من الصندوق الأول لايؤثر في سحب كرة بيضاء من الصندوق الثاني.

تحقق

في كل من التجارب التالية حدد فيما إذا كان الحدثان A, B مستقلين أم غير مستقلين، فسر إجابتك.

1A) الحدث A وصول متسابق في بطولة الشطرنج إلى الدور قبل النهائي، والحدث B يعني وصول المتسابق للدور النهائي.

1B) الحدث A يعني نجاح حمد في اختبار الرياضيات، والحدث B يعني نجاحه في الفيزياء.

إرشاد

- إذا كان الحدثان A,B مستقلين فإن كلا من الحوادث التالية تكون مستقلة:
  - A', B'
  - A, B'
  - A', B

احتمال تقاطع حدثين مستقلين:

إذا ألقيت قطعة نقد ورمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 فان فضاء العينة لهذه التجربة هو :

$$S = \begin{Bmatrix} (H,1),(H,2),(H,3),(H,4),(H,5),(H,6) \\ (T,1),(T,2),(T,3),(T,4),(T,5),(T,6) \end{Bmatrix}$$

بالاعتماد على النتائج السابقة فإن احتمال الحدث ظهور الصورة T على قطعة النقد والعدد 5 على المكعب هو،

$$P(T \cap 5) = \frac{1}{12}$$

و يمكن إيجاد هذا الاحتمال بضرب احتمال الحدثين البسيطين التاليين:

$$P(T) = \frac{1}{2}, P(5) = \frac{1}{6}$$

$$P(\mathrm{T} \cap 5) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

مفهوم — احتمال تقاطع حدثين مستقلين

إذا كان الحدثان A, B حدثين مستقلين فإن احتمال وقوع A و B معا يساوي حاصل ضرب احتماليهما والعكس صحيح.

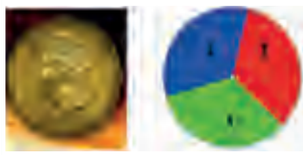
أي أن: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ والعكس صحيح.

مثال 2 : إيجاد احتمال تقاطع حدثين مستقلين

ألقيت قطعة نقد وأدير قرص دوار مكون من 3 مناطق متطابقة مرقمة من 1 إلى 3 .

أوجد احتمال ظهور الكتابة T على قطعة النقد واستقرار المؤشر على العدد 2 .

الفضاء العيني للتجربة $S = \{(H,1),(H,2),(H,3),(T,1),(T,2),(T,3)\}$



$$P\{(T,2)\} = \frac{1}{6}$$

ويمكن تفسير ذلك باستخدام الأحداث المستقلة كما يلي:

إذا كان الحدث A يعني ظهور الكتابة على قطعة النقد فإن : $P(A) = \frac{1}{2}$

والحدث B يعني استقرار المؤشر على العدد 2 فإن : $P(B) = \frac{1}{3}$

الحدثان A, B مستقلان $P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

تحقق

2) إذا ألقيت قطعة نقد ومكعب مرقم من 1 إلى 6 ،

ما احتمال ظهور الصورة على قطعة النقد والعدد 5 على وجه المكعب ؟

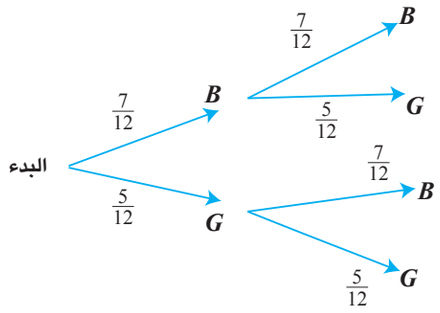
الشـجرة الاحتماليـة: مـن الطرق الشـائعة في إيجـاد احتمالات الحوادث المركبة المسـتقلة وغير المسـتقلة اسـتعمال **الشجرة الاحتمالية** probability tree

مثال 3 : ايجاد الاحتمالات باستعمال الشجرة الاحتمالية

صندوق به 7 كرات زرقاء و 5 كرات خضراء، سحبت كرتان عشوائيا باستخدام الشجرة الاحتمالية.

a) أوجد احتمال أن تكون الكرتان زرقاوان إذا كان السحب مع الإرجاع.

والشكل التالي يمثل الشجرة الاحتمالية لعملية السحب مع الإرجاع.



$$P(B \cap B) = \frac{7}{12} \times \frac{7}{12} = \frac{49}{144}$$

$$P(B \cap G) = \frac{7}{12} \times \frac{5}{12} = \frac{35}{144}$$

$$P(G \cap B) = \frac{5}{12} \times \frac{7}{12} = \frac{35}{144}$$

$$P(G \cap G) = \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} = \frac{25}{144}$$

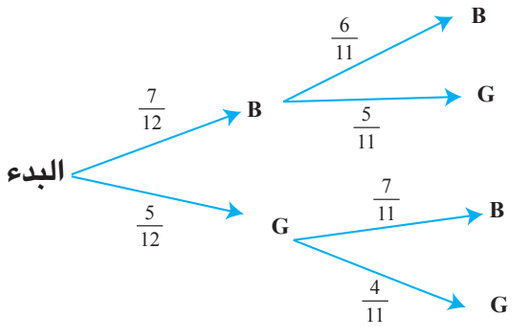
احتمال أن تكون الكرة الأولى زرقاء $P(B) = \frac{7}{12}$

واحتمال أن تكون الكرة الثانية زرقاء لأن السحب مع الإرجاع. $P(B) = \frac{7}{12}$

احتمال أن تكون الكرتان زرقاوان يعني $P(B \cap B) = \frac{7}{12} \times \frac{7}{12} = \frac{49}{144} \approx 0.34$

b) أوجد احتمال أن تكون الكرتان زرقاوان إذا كان السحب بدون إرجاع .

والشكل التالي يمثل الشجرة الاحتمالية لعملية السحب مع الإرجاع.



$$P(B \cap B) = \frac{7}{12} \times \frac{6}{11} = \frac{42}{132}$$

$$P(B \cap G) = \frac{7}{12} \times \frac{5}{11} = \frac{35}{132}$$

$$P(G \cap B) = \frac{5}{12} \times \frac{7}{11} = \frac{35}{132}$$

$$P(G \cap G) = \frac{5}{12} \times \frac{4}{11} = \frac{20}{132}$$

احتمال أن تكون الكرة الأولى زرقاء $P(B) = \frac{7}{12}$

واحتمال أن تكون الكرة الثانية زرقاء لأن السحب بدون إرجاع. $P(B) = \frac{6}{11}$

احتمال أن تكون الكرتان زرقاوان يعني $P(B \cap B) = \frac{7}{12} \times \frac{6}{11} = \frac{42}{132} \approx 0.32$

تحقق

حقيبة تحتوي على 5 بطاقات مرقمة من 1 إلى 5 ، سـحبت بطاقتان واحدة بعد الأخرى اسـتخدم الشجرة الاحتمالية لإيجاد احتمال أن تكون الأعداد على البطاقتين أعدادا فردية ، إذا كان السحب:

3A) مع الإرجاع.

3B) بدون إرجاع.

إرشـاد

- لاحـظ أن مجمـوع الاحتمالات لجميع النواتج يساوي 1

الاحتمال المشروط : عند اختيار عدد من مضاعفات العدد 3 من مجموعة أعداد محصورة بين 5 و 15 .

ما احتمال أن يكون العدد زوجيا؟

مضاعفات العدد 3 هي $\{6,9,12\}$ حيث تم اختزال فضاء العينة إلى 3 أعداد الحدث A هو اختيار عدد زوجي ، والحدث B هو اختيار عدد من مضاعفات 3 وبذلك يكون احتمال اختيار عدد زوجي من المضاعفات السابقة $= \frac{2}{3}$ ، ويسمى مثل هذا **الاختيار احتمالا مشروطا** conditional probability . ورمزه $(A|B)$ يعني اختيار عدد زوجي شرط أن يكون من مضاعفات العدد 3 .

مفهوم — الاحتمال المشروط

إذا كان الحدثـان A, B حدثـين في فضـاء عينـي فإن احتمال وقوع A شرط وقوع B يسـاوي احتمال تقاطعهما مقسوما على احتمال الحدث B ، بحيث $P(B) \neq 0$

أي أن : $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) \neq 0$

مثال 4 : — ايجاد الاحتمال المشروط

a) إذا كان A, B حدثين في فضاء عيني بحيث $P(A) = \frac{1}{2} . P(B) = \frac{1}{4} , P(A \cap B) = \frac{1}{5}$

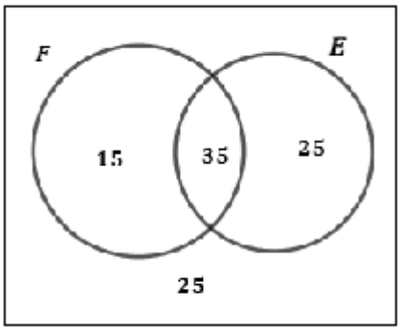
أوجد كلا من : $P(A|B) , P(B|A)$.

باستخدام قاعدة الاحتمال المشروط :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$$

b) يـدرس 100 طالـب في أحد معاهد اللغـات بحيث يدرس 60 منهم اللغة الإنجليزية و 50 الفرنسـية ويـدرس اللغتين معا 35 طالبا. إذا اختير أحد الطلاب عشـوائيا، أوجد احتمال أن يكون يدرس اللغة الإنجليزية إذا كان يدرس اللغة الفرنسية.



يمكن توضيح البيانات السـابقة بشكل فن المجاور إذا كان الحـدث E يعنـي الطالـب يـدرس اللغـة الإنجليزيـة والحدث F يعني الطالب يدرس اللغة الفرنسية .

فإن :

$$P(E) = \frac{60}{100} = 0.6$$

$$P(F) = \frac{50}{100} = 0.5$$

$$P(E \cap F) = \frac{35}{100} = 0.35$$

المطلوب : احتمال أن يكون الطالب دارسا للغة الإنجليزية إذا كان يدرس الفرنسية يعني $P(E|F)$

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{0.35}{0.50} = 0.7$$

c) يحتوي كيس على 4 كرات حمراء، 6 كرات بيضاء ،سـحبت كرتان عشـوائيا على التوالي دون إرجاع. احسب احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان بيضاوان .

إرشـاد

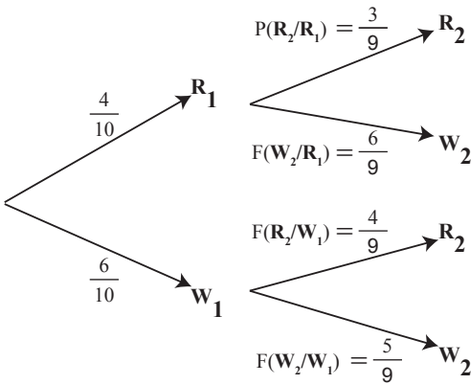
- إذا كان الحـدث A, B حدثـين مستقلين فإن:

$P(A|B) = P(A)$
$P(B|A) = P(B)$

- إذا كان الحـدث A, B حدثين غير مستقلين فإن:

$P(A \cap B) = P(A) \times P(A|B)$

يمكن استخدام طريقة الشجرة الاحتمالية كما درست سابقا:



$$P(W_1 \cap W_2) = P(W_1) \times P(W_2|W_1)$$

$$P(W_1 \cap W_2) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

تحقق

4A) إذا كان **A, B** حدثين في فضاء عيني بحيث $P(A) = \frac{2}{3}$. $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{2}{5}$

أوجد كلا من : $P(B|A)$, $P(A|B)$.

4B) في مثال (4.b) إذا اختير أحد الطلاب عشوائيا، أوجد احتمال أن يدرس اللغة الفرنسية إذا كان يدرس الانجليزية .

4C) يحتوي كيس على 7 كرات حمراء و8 كرات زرقاء ، سحبت كرتان بدون إرجاع ، احسب احتمال أن تكون الكرتان زرقاوان (يمكنك استخدام مخطط الشجرة)

تمارين 3-8

مثال 1

في كل من التجارب التالية حدد فيما إذا كان الحدثان A, B مستقلين أم غير مستقلين ، فسر إجابتك

1) تجربة سحب بطاقتين مع الإرجاع من مجموعة بطاقات مرقمة من 2 إلى 9 .الحدث A يعني العدد المكتوب على البطاقة الأولى 7 والحدث B يعني العدد المكتوب على البطاقة الثانية 5.

2) صف به 30 طالبا منهم 5 طلاب تبدأ أسماؤهم بحرف (الميم) ،نريد اختيار طالبين بالترتيب واحدا تلو الآخر ، الحدث A يعني أن يكون اسم الأول يبدأ بحرف الميم ، الحدث B يعني أن يكون اسم الطالب الثاني يبدأ بحرف الميم .

3) يقدم مقصف إحدى المدارس 3 أنواع من الفطائر وهي الجبن ، الزعتر واللبنة و نوعين من العصائر وهما البرتقال والمانجو ، تريد ريم اختيار وجبة مكونة من فطيرة وعصير ،الحدث A يعني أن تكون الفطيرة المختارة فطيرة جبن والحدث B أن يكون العصير برتقالا.

مثال 2

4) أديـر قرص مقسـم إلى 6 مناطق متطابقة ومرقمة مـن 1 إلى 6 ، وألقيت قطعة نقد مرة واحدة، ما احتمال وقوف المؤشر على عدد أولي وظهور الكتابة على قطعة النقد.

5) صندوق به 15 كرة مقسمة بالتساوي على 3 ألوان حمراء ،زرقاء و بيضاء .

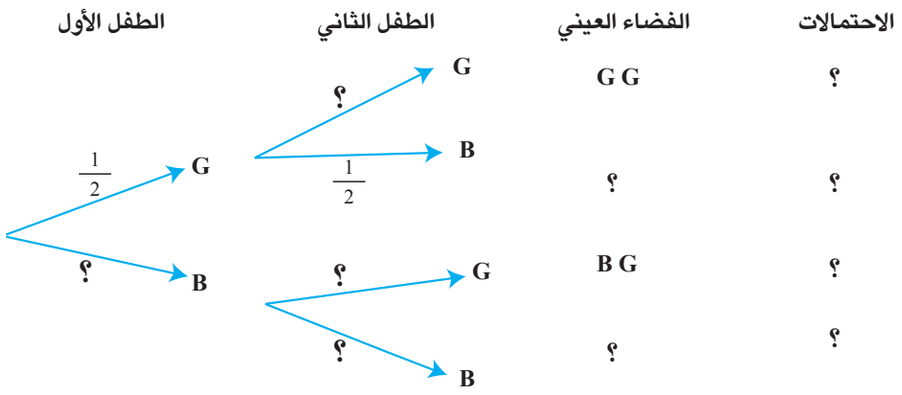
سحبت كرة عشوائيا ثم أعيدت وسحبت كرة ثانية . أوجد احتمال اختيار كرة حمراء في المرتين.

6) إذا كان $P(A) = 0.5$, $P(A \cap B) = 0.45$, أوجد $P(B)$ إذا كان الحدثان مستقلين .

7) إذا كان A, B حدثين بحيث $P(A \cap B) = 0.3$, $P(B) = \frac{3}{4}$, $P(A) = \frac{2}{3}$ ، هل الحدثان مستقلان؟

مثال 3

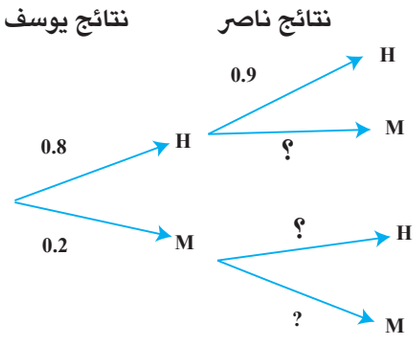
8) الشجرة الاحتمالية التالية تمثل جنس المولود لطفلين في إحدى العائلات ، أكمل البيانات الناقصة على الشكل وأوجد احتمال أن يكون لدى العائلة ولد واحد (G ترمز للبنت ، B ترمز للولد) .



9) صندوق يحتوي على 3 بطاقات حمراء و 4 زرقاء و 2 صفراء، إذا تم سحب بطاقتين بدون ارجاع فما احتمال أن تكونا مختلفتي اللون ؟ استخدم الشجرة الاحتمالية لتوضيح الحل .

10) إذا كان احتمال اصابة ناصر للهدف يساوي 0.9 واحتمال إصابته من قبل يوسف 0.8.

اكتب الفضاء العيني وأوجد احتمال كل ناتج من النواتج باستخدام الشجرة الاحتمالية .



مثال 4

11) إذا كان A, B حدثين ، بحيث $P(A) = 0.7, P(B) = 0.5, P(A|B) = 0.6$ أوجد:

a) $P(A \cap B)$

b) $P(B|A)$

12) صندوق يحوي 12 مصباحا منها 2 تالفين ، سحب مصباحان بدون إرجاع، أوجد:

a) احتمال أن يكون المصباحان تالفين .

b) احتمال أن يكون الثاني تالفا بشرط الأول صالحا .

يمكنك استعمال الشجرة الاحتمالية .

13) تقدم الطالبان راشد وجمال لامتحان الثانوية العامة ، فإذا كان احتمال نجاح راشد 0.7 واحتمال نجاح جمال 0.6 ، أوجد احتمال كل مما يأتي :

a) نجاحهما معا

b) نجاح أحدهما على الأقل

c) نجاح راشد فقط

d) عدم نجاح أي منهما

مسائل مهارات التفكير العليا

14) أراد كل من خالد و محمد إيجاد احتمال $(A|B)$، حيث $P(A) = 0.5 , P(B) = 0.2$ والحدثان مستقلان ، أيهما كانت إجابته صحيحة ؟ فسر إجابتك.

خالد	محمد
لأن الحدثين مستقلان $P(A\|B) = P(A)$	لا يمكن إيجاد $P(A\|B)$ لأن قيمة $P(A \cap B)$ غير معلومة

15) في إحدى الكليات نجح 90% من الطلاب في الفيزياء و 85% في الكيمياء و 80% في الفيزياء والكيمياء معا ، اختير أحد الطلاب عشوائيا إذا كان هذا الطالب ناجحا في الكيمياء ، فما هو احتمال أن يكون ناجحا في الفيزياء أيضا ؟

16) إذا كان A,B حدثين مستقلين، وكان $P(A) = 2P(B) , P(A \cap B) = 0.18$ أوجد $P(A \cup B)$

8-4 المخاطرة
Risk

أفكار الدرس

- أتعرف المخاطرة.
- أختار القرار الأنسب بناء على القيمة المتوقعة أو الاحتمال المشروط.

المعايير:

12F. 11.4

المصطلحات:

- المخاطرة
  risk

تمهيد

احيانا يتوجب على المرء اتخاذ قرارات هامة قد تحدث تغيرا كبيرا في حياته إيجابيا أو سلبيا مما يتطلب إجراء دراسات وحسابات دقيقة مبنية على الاحتمالات وعمل الإحصاءات اللازمة لاتخاذ القرار الأنسب من حيث تنفيذ العمل أو عدمه، وإذا اضطر لتنفيذه فإنه يختار الأقل ضررا و خسارة.

كيف يمكننا الربط بين **المخاطرة** **risk** والاحتمالات في حياتنا اليومية؟ يمكننا اعتبار أن معظم ما نقوم به خلال حياتنا اليومية يتضمن نوعاً من المخاطرة.

ومن الأمثلة المألوفة لمفهوم المخاطرة ، المسابقات الثقافية التي تتضمن مضاعفة الجائزة عند الإجابة الصحيحة على كل سؤال جديد، فمثلا إذا وصل جابر إلى مبلغ QR 50 000 فيكون السؤال القادم حاسما في الوصول إلى QR100 000 أو الرجوع إلى QR3000 إن أخطأ أو الانسحاب وأخذ المبلغ الذي وصل إليه حسب شروط المسابقة وهنا تكمن المخاطرة فما القرار الأنسب الذي يجب أن يتخذه جابر؟ المخاطرة بالإجابة أو الانسحاب وأخذ مبلغ QR 50 000 . وتلعب المعرفة الجيدة عن مفهوم المخاطرة دورا هاما في اتخاذ القرارات الأنسب في كل مجالات الحياة وتساعد في الحصول على أفضل النتائج اقتصاديا وصحيا وفي باقي المجالات الأخرى.

مثال 1 : **اتخاذ القرار المناسب بالاعتماد على المخاطرة**

إذا كان احتمال تعرض سالم للدغة من قنديل البحر أثناء رحلة بحرية هو 0.15 .ما احتمال أن يتعرض للدغة واحدة إذا ذهب للسباحة مرتان؟ هل ينصح بالذهاب في رحلة ثانية؟

احتمال التعرض للدغة 0.15 وعدم التعرض للدغة $1 - 0.15 = 0.85$ التعرض للدغة واحدة يعني: التعرض في الرحلة الأولى وعدم التعرض في الثانية أو التعرض في الرحلة الثانية وعدم التعرض في الأولى.

ليكن الحدث A يمثل تعرض سالم للدغة في أحد الأيام.

$$P(A) = 0.15 \times 0.85 + 0.85 \times 0.15 = 0.255$$

بما أن احتمال إصابته بلدغة أخرى قليل، ينصح بذهابه في الرحلة الثانية.

تحقق :

1) تعتمد مغسلة للسجاد على توقعات هطول المطر ، فإذا كان احتمال هطول المطر 25% في اليوم ما احتمال أن تمطر مرة واحدة خلال اليومين القادمين ؟وهل تنصح بغسيل السجاد بعد يومين؟

أحيانا قد نستخدم الاحتمال المشروط لاتخاذ القرار الأنسب في حالات مختلفة ، كما في المثال التالي :

مثال 2 : **اتخاذ القرار المناسب باستعمال الاحتمال المشروط**

يريد صاحب مطعم استخدام وجبات جديدة في قائمة الطعام التي يقدمها وذلك لزيادة نسبة المبيعات في المطعم، والجدول التالي يمثل عدد الوجبات المباعة وعدد الوجبات المتبقية خلال أحد أيام الأسبوع:

الحالة	عدد الوجبات	
	الوجبات الجديدة N New Meal	الوجبات القديمة 0 Old Meal
المباع S (Sold)	54	42
المتبقي R (Remained)	16	28

مستعملا الاحتمال المشروط، أي الوجبات سيعتمدها صاحب المطعم لزيادة المبيعات؟ علما أن سعر الوجبة القديمة والجديدة نفس السعر.

نجد عدد الوجبات الكلية = 140 وجبة ثم نستخدم الاحتمال المشروط مرتين:

1) احتمال أن تباع الوجبة بشرط أن تكون جديدة $P(S|N) = \frac{P(S \cap N)}{P(N)} = \left(\frac{54}{140}\right) \div \left(\frac{70}{140}\right) = \frac{27}{35}$

2) احتمال أن تباع الوجبة بشرط أن تكون قديمة $P(S|O) = \frac{P(S \cap O)}{P(O)} = \left(\frac{42}{140}\right) \div \left(\frac{70}{140}\right) = \frac{3}{5}$

اتخاذ القرار بما أن $\frac{3}{5} < \frac{27}{35}$ فالأفضل اعتماد الوجبة الجديدة .

تحقق :

2. يريد ولي أمر أن يسجل ابنه في احدى المدارس الثانوية ، فاطلع على نتائج العام السابق لمدرستين قريبتين من منزله والتي يمثلها الجدول التالي :

الحالة	عدد الطلاب	
	المدرسة A	المدرسة B
ناجح P Pass	110	80
راسب F Fail	40	70

استعمل الاحتمال المشروط لتساعد ولي الأمر على اختيار المدرسة المناسبة .

تمارين 8-4

مثال 1

1) قررت هدى الاستثمار في المشاريع التي احتمال نجاح الاستثمار فيها لا يقل عن 0.6 فإذا استثمرت مبلغا من المال في مشروع احتمال نجاحه 0.8 ، هل تنصح هدى بالاستثمار في نفس المشروع 3 مرات متتالية؟ فسر إجابتك.

2) احتمال وجود عواصف رملية في اليوم 0.17 ، ما احتمال وجود عاصفة رملية واحدة في يومين متتاليين؟ هل تنصح بالخروج في رحلة برية في اليوم الثاني؟ فسر إجابتك.

مثال 2

4) يريد جاسم التسجيل في أحد معاهد اللغات، فاختار عينة مكونة من 30 طالبا في كل معهد وأخضعهم لاختبار مستوى وكانت النتائج كما في الجدول التالي:

الحالة	عدد الطلاب	
	المعهد A	المعهد B
P ناجح Pass	21	18
F راسب Fail	9	12

استعمل الاحتمال المشروط لتساعد جاسم على اختيار المعهد المناسب .

5) يقارن أحد الباحثين بين مجمعين تجاريين فاختار 50 شخصا عشوائيا من رواد كل مجمع وسجل درجة رضى كل منهم عن خدمات المجمع وسجل النتائج في الجدول التالي :

درجة الرضا	العدد في المجمع A	العدد في المجمع B
H (High) عالية	35	42
L (Low) متدنية	15	8

معتمدا على النتائج السابقة ، إذا أردت زيارة أحد المجمعات أيهما تفضل A أم B ؟ ولماذا؟

6) لدى حمد وصالح 50 بطاقة لعب، إذا اتفقا على اللعب باستعمال القرص الدوار المجاور بحيث يحصل صالح على 10 بطاقات إذا وقف المؤشر على عدد زوجي ويخسر 7 بطاقات إذا وقف على أي رقم آخر. هل تؤيد صالح في المخاطرة واللعب أم لا ؟ وضح إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

7) اكتب مسألة من واقع الحياة على المخاطرة.

8) لدى مريم و دانة 100 بطاقة لعب، إذ اتفقتا على اللعب باستعمال سحب البطاقات عشوائيا من الكيس المجاور؛ بحيث تحصل دانة على 15 بطاقة إذا كان الرقم المسحوب أقل من 3 ، وتخسر 10 بطاقات إذا كان أي رقم آخر.

هل تؤيد دانة في المخاطرة واللعب أم لا ؟ وضح إجابتك.

8-5

المحاكاة
Simulation

أفكار الدرس

- استعمل برمجيات في تنفيذ محاكاة لتجارب عشوائية مختلفة .
- اقدر الاحتمال التجريبي باستخدام نتائج المحاكاة .

المعايير:

12F. 13.1

المصطلحات:

- محاكاة simulation

تمهيد

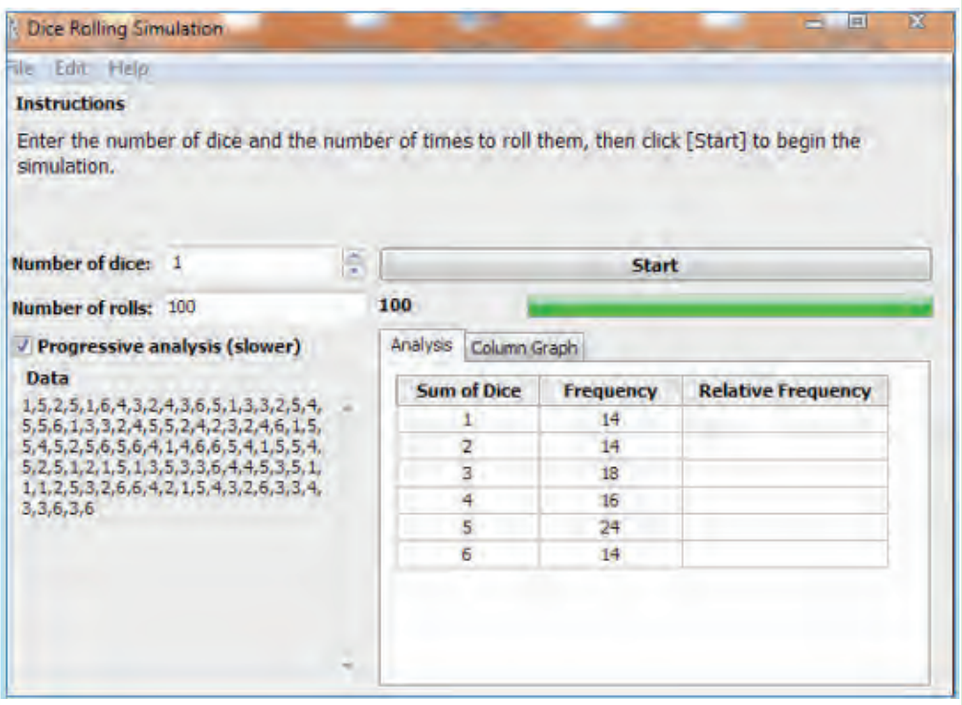
تلجأ مراكز تعليم قيادة السيارات إلى إعطاء دروس إجبارية لمن يريد أن يتعلم القيادة على نماذج تحاكي السيارة الحقيقية في صالات التدريب؛ بحيث يوضع المتدرب في ظروف مشابهة تماما للتدريب الحقيقي، مثل هذه العملية تسمى **محاكاة** simulation.

وتستخدم المحاكاة في العديد من المجالات الحياتية؛ توفيرا للجهد والمال، وتقليلًا للخسائر البشرية في الحروب، ومن هذه المجالات على سبيل المثال: أنظمة الكمبيوتر، الصناعات، عالم المال والأعمال، الطيران المدني، الخطط العسكرية والحروب المفترضة (المناورات العسكرية).

نظرا لأهمية عملية المحاكاة في توفير الجهد والمال، وقدرتها على إعطاء نتائج دقيقة؛ فقد أصبحت عملية لا غنى عنها، ونظرا لعلاقة المحاكاة المباشرة بنظرية الاحتمالات، وما تمثله هذه النظرية كفرع رئيس من فروع الرياضيات، والترابط الوثيق مع العلوم الأخرى، واستخدام الاحتمالات في معظم نواحي حياتنا؛ فقد صممت برمجيات خاصة للقيام بعملية المحاكاة للتجارب المشهورة في الاحتمالات، مثل رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 وملاحظة النتائج الممكنة، وحساب الاحتمال التجريبي لكل منها، ومقارنته بالاحتمال النظري لكل نتيجة، والذي يشجع هذه العملية هو قدرتها على إجراء التجربة لأي عدد من المرات .

مثال 1 : استعمال البرمجيات في تنفيذ محاكاة لالقاء مكعب مرقم من 1 إلى 6

الشكل المجاور يمثل نتيجة محاكاة لتجربة إلقاء مكعب (مرقم من 1 إلى 6) 100 مرة عن طريق برمجيات الكمبيوتر والتي تتوفر بكثرة في مواقع إلكترونية عديدة أو مع كتب الرياضيات على أسطوانات مرافقة للكتاب. احسب الاحتمال التجريبي (التكرار النسبي) لكل نتيجة .



تعلـم أن الاحتمـال التجريبـي (التكـرار النسـبي) للحـدث A $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ وبذلك تكـون الاحتمالات التجريبية للنواتج كما يلي :

فمثلا

$$P(5) = \frac{n(5)}{n(S)}$$

$$P(5) = \frac{24}{100} = 24\%$$

وهكذا مع بقية النواتج وبتقريب النتائج لأقرب عدد صحيح نحصل على مجموع التكرارات النسبية = 100% أو 1 .

مجموع العددين	التكرار	التكرار النسبي
1	14	13.86%
2	14	13.86%
3	18	17.82%
4	16	15.84%
5	24	23.76%
6	14	13.86%

تحقق :

الشـكل المجاور يمثل نتائج إجـراء تجربة رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 . أوجد :

1A) عدد مرات إجراء التجربة

2B) الاحتمال التجريبي لكل من نتائج التجربة.

مجموع العددين	التكرار	التكرار النسبي
1	81	
2	83	
3	79	
4	90	
5	80	
6	87	

نلاحظ مـن الأمثلة السـابقة أنه كلما زاد عـدد مرات إجراء التجربـة، كلمـا اقـترب الاحتمـال التجريبي مـن الاحتمال النظري للنتيجة. وسوف نعرض نتائج إجراء نفس التجربة 1000 مرة في الجدول المجاور.

لاحـظ تقارب النتائـج في العمود الثالث، وقـارن مع النتائج التي حصلت عليها في المثال السابق.

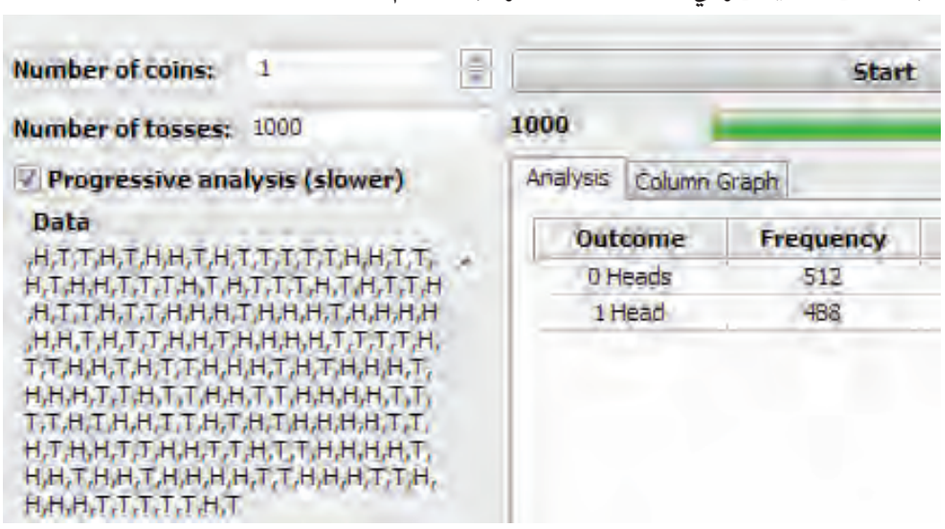
مجموع العددين	التكرار	التكرار النسبي
1	190	18.98%
2	164	16.38%
3	156	15.58%
4	163	16.28%
5	162	16.18%
6	165	16.5%

مثال 2 : مقارنة الاحتمال النظري والتجريبي باستخدام المحاكاة

a) إذا رميت قطعة نقد مرة واحدة. اكتب الفراغ العيني للتجربة. ما احتمال:

- **ظهور H (صورة) ؟**
- **ظهور T (كتابة) ؟**

b) الشكل أدناه يمثل رمي قطعة نقد 1000 مرة باستخدام المحاكاة..



أوجد الاحتمال التجريبي لظهور كل من الصورة H و الكتابة T. ثم أكمل الجدول التالي :

الناتج	التكرار	الاحتمال التجريبي	الاحتمال النظري
T	512		
H	488		

a) $S = \{H, T\}$

$$P(H) = \frac{1}{2}$$

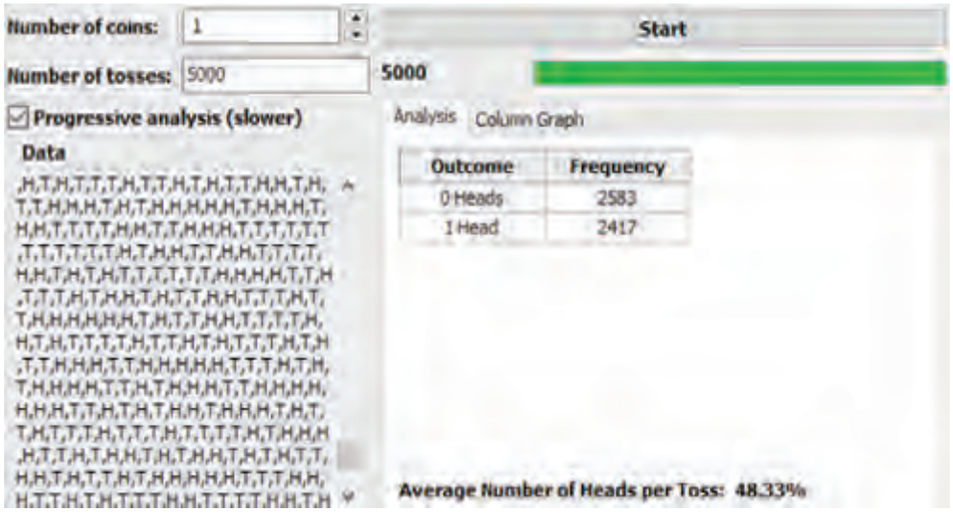
$$P(T) = \frac{1}{2}$$

b) بالاعتماد على النتائج السابقة تكون الاحتمالات كما يلي :

الناتج	التكرار	الاحتمال التجريبي	الاحتمال النظري
T	512	$\frac{512}{1000} = 0.512$	
H	488	$\frac{488}{1000} = 0.488$	

تحقق :

الشكل أدناه يمثل رمي قطعة نقد 5000 مرة باستخدام المحاكاة ،



2A) أوجد الاحتمال التجريبي لظهور كل من الصورة H والكتابة T ثم أكمل الجدول التالي :

الناتج	التكرار	الاحتمال التجريبي	الاحتمال النظري
T	2583		
H	2417		

2B) ماذا تلاحظ عندما زادت عدد مرات إجراء التجربة؟

تمارين 8-5

مثال 2,1

1) الجدول التالي يمثل نتيجة رمي حجري نرد 200 مرة باستخدام برنامج المحاكاة السابق ويبين مجموع العددين الظاهرين:

200

Analysis | Column Graph

Sum of Dice	Frequency
2	7
3	19
4	14
5	22
6	21
7	39
8	25
9	21
10	19
11	8
12	5

المجموع	التكرار	الاحتمال العملي
2	7	$\frac{7}{200} = 0.035$
3	19	
4	14	
5	22	
6	21	
7	39	
8	25	
9	21	
10	19	
11	8	
12	5	

a) استخدم الجدول في إيجاد الاحتمال العملي لكل مجموع.

b) اكتب الفضاء العيني لتجربة إلقاء مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرتين ، ثم أوجد الاحتمال النظري لمجموع العددين الظاهرين.
استخدم الجدول المرافق.

المجموع	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
الاحتمال النظري							$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$			$\frac{1}{36}$

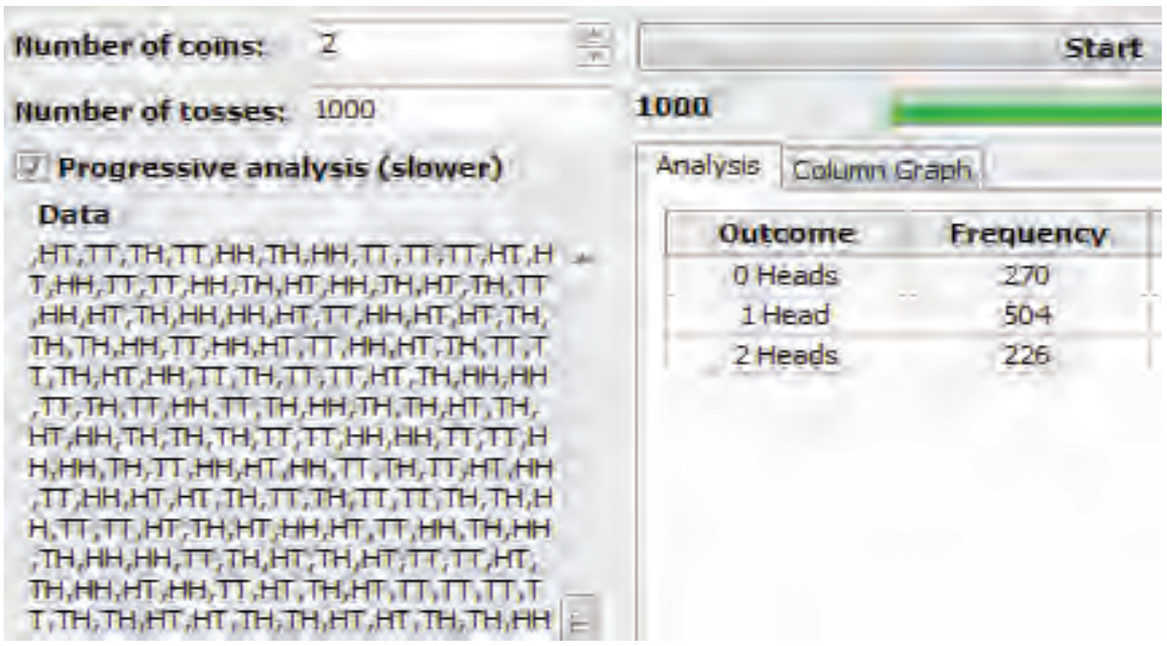
c) قارن بين النتائج السابقة، كيف تفسر ذلك الفرق بين الاحتمال النظري و العملي ؟

2) إذا رميت قطعتي نقد مرة واحدة ، اكتب الفضاء العيني للتجربة.

a) أوجد احتمال كل ناتج من النواتج،استخدم الجدول التالي:

الناتج	*TT*	*HT , TH*	*HH*
الاحتمال النظري			

b) إذا أجريت التجربة باستخدام برنامج المحاكاة وكانت النتائج معطاة بالشكل المجاور أكمل الجدول المرافق.



الناتج	*TT*	*HT , TH*	*HH*
الاحتمال النظري			
التكرار	270	504	226
الاحتمال التجريبي			

مسائل مهارات التفكير العليا

3) يعمل في إحدى الشركات 40% من الجنسية النيبالية، 30% هندية، 20% بنغالية و 10% فليبينية.

صمم محاكاة لاختيار أحد العمال وذلك بتدوير قرص دائري مقسم إلى 4 أجزاء 10 مرات كما في الشكل واختيار المنطقة التي يقف عليها المؤشر .

ضع النتائج في الجدول التالي :

الجنسية	هندية	نيبالية	فلبينية	بنغالية
العدد				

a) ما احتمال أن يكون العامل هنديا ، حسب التجربة ؟

b) ما الاحتمال النظري بأن يكون العامل هنديا ؟

c) متى يتساوى الاحتمالان ؟ فسر اجابتك .

4) اكتب فقرة تبين فيها أهمية المحاكاة وبعض استخداماتها في الحياة العملية .

اختبار الوحدة الثامنة

اختيار من متعدد

1) أي من الأعداد التالية لا يمثل احتمالا لأي حدث؟

A. 1 **B.** 0

C. -0.7 **D.** 0.5

2) الجدول التالي يمثل أعمار العاملين في أحد المصانع:

العمر year	15 – 24	25 – 34	35 – 44	45 – 54	55 – 64
التكرار f	45	42	73	28	12

اختير أحد العاملين عشوائيا، ما احتمال أن يكون عمره أقل من 45 سنة؟

A. 0.44 **B.** 0.37

C. 0.8 **D.** 0.2

3) إذا كان A, B حدثين متنافيين وكان : $P(A \cup B) = 0.8$ ، $P(A) = 0.2$ ، أوجد $P(B)$.

A. 0.2 **B.** 0.16

C. 0.6 **D.** 0.4

4) إذا كان A,B حدثين متنافيين وكان : $P(A \cup B) = 0.7$ ، $P(A) = 0.5$ ، أوجد $P(B')$.

A. 0.5 **B.** 0.8

C. 0.3 **D.** 0.2

5) زرع شخص شجرتين، إذا كان احتمال نمو الأولى 0.4 واحتمال نمو الثانية 0.5 أوجد احتمال نموهما معا.

A. 0.5 **B.** 0.7

C. 0.9 **D.** 0.2

أجب عن الأسئلة التالية:

6) إذا كان A,B حدثين في فضاء عيني ،

وكان : $P(B) = 0.7$, $P(A) = 0.6$, $P(A|B) = 0.8$ ، أوجد :

a) $P(A \cap B)$

b) $P(B|A)$

7) صندوق يحتوي 8 كرات حمراء ، 8 خضراء و 8 صفراء، سحبت كرتان عشوائيا، مع الإرجاع. إذا كان الحدث A يعني سحب كرة خضراء في المرة الأولى B يعني سحب خضراء في الثانية:

a) هل A, B مستقلان؟ فسر إجابتك.

b) أوجد احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان خضراوين.

8) رميت 3 قطع نقد مرة واحدة، ما احتمال ظهور صورة H مرتين على الأكثر؟

9) الجدول التالي يمثل آراء 2000 شخصا من الذكور والإناث حول رياضة السباحة ، اختير شخص عشوائيا. أوجد احتمال أن يكون ذكرا علما أنه يفضل السباحة.

الجنس	عدد الأشخاص	
	يفضل السباحة	لا يفضل السباحة
ذكر	800	600
انثى	400	200

10) إذا كانت كل من الحوادث A, B, C متنافية وشاملة بحيث : $P(A) = 4P(B), P(C) = 0.2$ ، أوجد $P(A)$.

11) تقدم أحد الطلبة لاختبار قبول في الرياضيات واللغة الإنجليزية، إذا كانت نسبة نجاحه في الرياضيات 75%، ونسبة نجاحه في اللغة الإنجليزية 60% وفي الاختبارين معا 55%. اختير أحد الطلاب عشوائيا أوجد احتمال أن يكون ناجحا في اللغة الإنجليزية إذا كان ناجحا في الرياضيات.

12) اطلق رجلان النار على هدف ، إذا كان احتمال إصابة الأول للهدف 0.25 واحتمال إصابة الثاني للهدف 0.4

أوجد :

a) احتمال إصابة الهدف من الرجلين معا .

b) احتمال إصابة الهدف .

c) احتمال عدم إصابة الهدف .

13) رمي مكعبان مرقمان من 1 إلى 6 ، ما احتمال أن يظهر عددان متساويان أو مجموعهما 8 ؟

14) بين ما إذا كان كل حدثين مما يلي متنافيين أم لا:

a) عند سحب كرة من صندوق به 7 كرات حمراء و 8 كرات خضراء إذا كان الحدث A يمثل سحب كرة حمراء، B يمثل سحب كرة خضراء.

b) في تجربة اختيار العدد الظاهر على وجه المكعب المرقم من 1 إلى 6 ، إذا كان الحدث A يمثل العدد الظاهر أولي، B يمثل العدد الظاهر فردي .

15) القي مكعب مرقم بالاعداد : 1, 5, 3, 3, 3, 3مرتين متتاليتين، إذا كان المتغير العشوائي X هو مجموع الرقمين الظاهرين ، أوجد قيم X الممكنة .

16) القي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرتين ، إذا دل المتغير العشوائي X على العدد الأصغر بين العددين الظاهرين:

a) أوجد قيم X .

b) اوجد $P(X = 4)$

17) صندوق يحتوي 10 كرات منها 6 كرات حمراء، 4 كرات بيضاء، سحبت كرتان بدون إرجاع، استخدم شجرة الاحتمالات لإيجاد كل من الاحتمالات التالية:

a) أن تكون كلاهما بيضاء.

b) أن تكون الأولى بيضاء والثانية حمراء.

c) أن تكون كلاهما من نفس اللون.

d) أن تكون إحداهما بيضاء.

18) ألقي مكعبان مرقمان من 1 إلى 6 مرة واحدة، إذا كان المتغير العشوائي X يعني أصغر العددين الظاهرين أو أحدهما إذا تساويا:

a) أوجد قيم X

b) أوجد احتمال $X = 3$

19) يريد خالد التسجيل في إحدى حملات الحج، فاختار عينة مكونة من 30 شخصا في كل حملة ممن سبق لهم التعامل مع هذه الحملات وسألهم عن مستوى الخدمات التي تقدمها كل حملة وكانت النتائج كما في الجدول التالي:

مستوى الخدمة	عدد الأشخاص	
	الحملة A	الحملة B
ممتازة E	21	18
متوسطة M	9	12

استعمل الاحتمال المشروط لتساعد خالد على اختيار الحملة المناسبة.

20) احتمال وجود عواصف رملية في اليوم 0.15 ، ما احتمال وجود عاصفة رملية واحدة في 3 أيام متتالية؟

هل تنصح بالخروج في رحلة برية في اليوم الثالث؟ فسر إجابتك.