الرياضيات

الصف الثاني عشر - متقدم

الفصل الدراسي الثاني

طبعة تجريبية

٢٠١٧-٢٠١٨

التصميم

اسباير للطباعة
ASPIRE PRINTING
Quality on deadline

PO Box: 24598, Doha-Qatar +974 4413 8555 +974 4413 8591
aspireprinting.qa info@aspireprinting.qa

النشيد الوطني

قَسَمًا بِمَنْ رَفَعَ السَّمَاءْ	قَسَمًا بِمَنْ نَشَرَ الضِّيَاءْ
قَطَرٌ سَتَبْقَى حُرَّةً	تَسْمُو بِرُوحِ الْأَوْفِيَاءْ
سِيرُوا عَلَى نَهْجِ الْأُلَى	وَعَلَى ضِيَاءِ الْأَنْبِيَاءْ
قَطَرٌ بِقَلْبِي سِيرَةٌ	عِزٌّ وَأَمْجَادُ الْإِبَاءْ
قَطَرُ الرِّجَالِ الْأَوَّلِينَ	حُمَاتُنَا يَوْمَ النِّدَاءْ
وَحَمَائِمٌ يَوْمَ السَّلَامْ	جَوَارِحٌ يَوْمَ الْفِدَاءْ

لون علم دولة قطر العنابي والأبيض، وتفصل بين اللونين تسعة رؤوس.

الأبيض : هو رمز السلام الذي يسعى له حكام قطر وأبناؤها.

العنابي : يرمز إلى الدماء المتخثرة، وهي دماء الشهداء من أبناء قطر الذين خاضوا معارك كثيرة في سبيل وحدة دولة قطر وخاصة في النصف الأخير من القرن التاسع عشر.

الرؤوس التسعة : ترمز إلى أن دولة قطر هي العضو التاسع في الإمارات المتصالحة من دول الخليج العربية.

علم دولة قطر

رؤية قطر الوطنية ٢٠٣٠ م

تهدف رؤية قطر الوطنية ٢٠٣٠م - التي تمت المصادقة عليها بموجب القرار الأميري رقم ٤٤ لسنة ٢٠٠٨م - إلى تحويل قطر بحلول عام ٢٠٣٠م إلى دولة متقدمة، قادرة على تحقيق التنمية المُستدامة، وعلى تأمين استمرار العيش الكريم لشعبها جيلًا بعد جيل؛ حيث تحدد الرؤية الوطنية لدولة قطر النتائج التي يسعى البلد لتحقيقها على المدى الطويل، كما أنها توفر إطارًا عامًّا لتطوير استراتيجيات وطنية شاملة وخطط تنفيذها.

وتستشرف الرؤية الوطنية الآفاق التنموية من خلال الركائز الأربع المترابطة الآتية:

التنمية البشرية	التنمية الاجتماعية	التنمية الاقتصادية	التنمية البيئية

الركيزة الأولى - التنمية البشرية:

الغايات المستهدفة:

سكان متعلمون:

- نظام تعليمي يرقى إلى مستوى الأنظمة التعليمية العالمية المتميزة، ويُزَوِّد المواطنين بما يفي بحاجاتهم وحاجات المجتمع القطري، ويتضمن:
  - مناهج تعليم وبرامج تدريب تستجيب لحاجات سوق العمل الحالية والمستقبلية.
  - فرصًا تعليمية وتدريبية عالية الجودة تتناسب مع طموحات وقدرات كل فرد.
  - برامج تعليم مستمرة مدى الحياة ومتاحة للجميع.
- شبكة وطنية للتعليم النظامي وغير النظامي تُزَوِّد الأطفال والشباب القطريين بالمهارات اللازمة والدافعية العالية للمساهمة في بناء مجتمعهم وتقدمه، وتعمل على:
  - ترسيخ قيم وتقاليد المجتمع القطري، والمحافظة على تراثه.
  - تشجيع النشء على الإبداع والابتكار، وتنمية القدرات.
  - غرس روح الانتماء والمواطنة.
  - المشاركة في مجموعة واسعة من النشاطات الثقافية والرياضية.
- مؤسسات تعليمية متطورة ومستقلة تُدار بكفاءة وبشكل ذاتي، ووفق إرشادات مركزية، وتخضع لنظام المساءلة.
- نظام فاعل لتمويل البحث العلمي يقوم على مبدأ الشراكة بين القطاعين العام والخاص، وبالتعاون مع الهيئات الدولية المختصة، ومراكز البحوث العالمية المرموقة.
- دور فاعل دوليًّا في مجالات النشاط الثقافي والفكري والبحث العلمي.

الفهرس

الوحدة 5

التكامـــل

الوحدة 6

تطبيقات التكامل

الوحدة 7

المتجهـــات

الوحدة 5

التكامل
Integration

أفكار الوحدة

- تعرف مفهوم التكامل غير المحدود ورمزه.
- تعرف قواعد التكامل غير المحدود واستعمالها.
- حل مسائل هندسية على التكامل غير المحدود.
- تعرف دالة اللوغاريتم الطبيعي على أنها الدالة الأصلية للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$
- إيجاد التكامل غير المحدود لدالة المقلوب ولمضاعفاتها ولتركيبات خطية منها .
- إيجاد التكامل غير المحدود لدالة الأس الطبيعي ولمضاعفاتها ولتركيبات خطية منها.
- إيجاد التكامل غير المحدود لمضاعفات الدوال المثلثية الآتية $\sin x , \cos x , \sec^2 x$ ولتركيبات خطية منها.
- تعرف مفهوم التكامل المحدود للدوال وإيجاد قيمته
- استعمال التكامل بالتعويض لإيجاد تكاملات محدودة وغير محدودة.
- استعمال التكامل بالأجزاء لإيجاد تكاملات محدودة وغير محدودة.
- استعمال الكسور الجزئية لإيجاد تكاملات محدودة وغير محدودة.

يستعمل التكامل في العديد من التطبيقات الحياتية كحساب مساحة وحجم المجسمات غير المنتظمة الأبعاد والتي لا نستطيع حساب مساحتها أو حجمها باستعمال قوانين المساحة والحجوم للأشكال المنتظمة وكذلك في هندسة العمارة وكيفية حساب الخامات اللازمة لتصميم المباني ذات المنحنيات والمنحدرات المعقدة ... إلخ.

تهيئة الوحدة الخامسة

انظر للمراجعة ثم اجب عن الاختبار الاتي:

مراجعة

مثال 1 :

أوجد مشتقة كل من الدوال الآتية:

1) $y = 4x^3 - 5x + 3$

$$\frac{d}{dx}[\,4x^3 - 5x + 3\,] = 4\,(3x^2) - 5$$

$$= 12x^2 - 5$$

2) $y = 5\sin x - 2\tan 3x$

$$\frac{d}{dx}[\,5\sin x - 2\tan 3x\,] = 5\cos x - 2(3\sec^2(3x))$$

$$= 5\cos x - 6\sec^2(3x)$$

3) $y = \ln(x+1) - 2e^{-3x}$

$$\frac{d}{dx}[\,\ln(x+1) - 2e^{-3x}\,] = \frac{1}{x+1} + 6e^{-3x}$$

مثال 2 :

أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة $f(x) = 3x^2 - \sqrt{x}$ عند $x = 1$

نجد $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(3x^2 - \sqrt{x}) = 6x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

نجد ميل المماس عند $x = 1$

$$f'(1) = 6(1) - \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad = 6 - \frac{1}{2} = 5.5$$

إذن ميل المماس عند $x = 1$ هو 5.5

مثال 3 :

أوجد مشتقة الدالة الآتية :

$y = (3x^4 - 5x^2)^5$

$$\frac{d}{dx}(3x^4 - 5x^2)^5 = 5\,(3x^4 - 5x^2)^4\,(12x^3 - 10x)$$

اختبار

أوجد مشتقة كل من الدوال الآتية:

1) $y = \sqrt{3}\,x^4 + 2x^{-2} + 5$

2) $y = -2\cos x + 3\sin(2x - 1)$

3) $y = \dfrac{3x^4 - x^3}{x+1}$

4) $y = 2x\,e^{x^2}$

5) $y = \ln(2x^3 - 5x) + e^2$

6) $y = 3\cos^2(2x)$

أوجد ميل المماس لمنحنى الدوال التالية عند قيم x المحددة :

1) $f(x) = 2x^3 - 5x \quad , \quad x = 2$

2) $f(x) = e^{2x} + 3x \quad , \quad x = 0$

3) $f(x) = \cos^2(3x) \quad , \quad x = \dfrac{\pi}{6}$

أوجد مشتقة كل من الدوال الآتية :

1) $y = (5x^3 - 2x^2 - 7)^4$

2) $y = \sqrt[3]{(1+x)^2}$

5-1

التكامل غير المحدود
Indefinite Integration

أفكار الدرس

- تعرف مفهوم الدالة الأصلية وإيجادها.
- تعرف مفهوم التكامل غير المحدود ورمزه.
- إيجاد التكامل غير المحدود معتمدا على التفاضل.
- حل مسائل هندسية على التكامل غير المحدود.

المعايير:

12A.10.1

المصطلحات:

الدالة الأصلية (المقابلة)
anti – derivative function
تكامل غير محدود
indefinite integration
ثابت التكامل
the constant of integration

تمهيد

تعلمت أنه إذا أعطيت موقع جسم بـدالة ما ولتكن $f(x) = x^2 + 3x$ فإن الدالة التي تمثل سرعة الجسم هي مشــتقة $f(x)$ أي $f'(x) = 2x + 3$، لكن إذا أعطيت دالة تمثل السرعة المتجهة وطلب إليك إيجاد دالة الموقع منها فلا بد من وجود طريقة للعمل عكسيا والعودة إلى الدالة الأصلية وبمعنى آخر فإننا نبحث عن $F(x)$ بحيث إن $F'(x) = f(x)$ وتسمى $F(x)$ **دالة مقابلة (أصلية) للدالة** $f(x)$ (anti – derivative function)
أي أن عملية إيجاد الدالة المقابلة للدالة المشتقة هي عكس عملية الاشتقاق.

مفهوم — الدالة المقابلة (الأصلية)

تكون الدالة $F(x)$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)$ على فترة ما I إذا كانت $f(x) = F'(x)$ لجميع قيم x في هذه الفترة .

يمكنك استعمال التعريف السابق لإيجاد الدالة المقابلة.

مثال 1 : الدالة المقابلة

أوجد دالة مقابلة لكل دالة مما يأتي :

a) $f(x) = 5x^4$

لنبحث عن دالة مشتقتها $5x^4$ تذكر أن قوة x في مشتقة الدالة أقل بواحد من قوة x في الدالة وعليه إن قوة المتغير x في الدالة المقابلة $F(x)$ ستكون 5 وبما أن معامل x في مشتقة الدالة يساوي قوة x في الدالة، فإن $F(x) = x^5$ هي الدالة المقابلة للدالة $f(x)$ لأن $\frac{d}{dx}(x^5) = 5x^4$

لاحظ أن x^5 ليست الدالة المقابلة الوحيدة للدالة $f(x)$ ، فمثلا $G(x) = x^5 - 2$ دالة مقابلة لأن $G'(x) = 5x^4$ وكذلك $H(x) = x^5 + 7$ دالة مقابلة أيضا.

b) $f(x) = -6x^{-7}$

بما أن قوة x في مشتقة الدالة أقل بواحد من قوة x في الدالة المقابلة فإن قوة المتغير x في $F(x)$ ستكون -6
وعليه تكون $F(x) = x^{-6}$ دالة مقابلة للدالة $f(x)$ لأن $\frac{d}{dx}(x^{-6}) = -6x^{-7}$
لاحظ أن كلا من $G(x) = x^{-6} + 3$ ، $H(x) = x^{-6} - 11$ تمثل دالة مقابلة للدالة $f(x)$.

c) $f(x) = -5$

بما أن قوة x في مشتقة الدالة أقل بواحد من قوة x في الدالة المقابلة فإن قوة المتغير x في $F(x)$ ستكون 1
وعليه تكون $F(x) = -5x$ دالة مقابلة للدالة $f(x)$ لأن $\frac{d}{dx}(-5x) = -5$
لاحظ أن كلا من $G(x) = -5x + 1$ ، $H(x) = -5x - 3$ تمثل دالة مقابلة للدالة $f(x)$.

تحقق

أوجد دالة مقابلة لكل دالة مما يأتي :

1A) $f(x) = -2x^{-3}$ 1B) $g(x) = 8x^7$ 1C) $h(x) = -7$

في المثال الســابق لاحظ أن إضافة ثابت لدالة مقابلة ينتج عنه دالة مقابلة أخرى ، وبشــكل عام فإن إضافة ثابت c لدالة مقابلة ينتج دالة مقابلة أخرى ، لأن مشتقة الثابت تساوي صفرا .

وعليه فإن هنالك عدد لا نهائي من الدوال المقابلة لأي دالة.

إن عملية إيجاد عائلة الدوال المقابلة للدالة تسمى **التكامل غير المحدود** (indefinite integration)

ويسمى c **ثابت التكامل غير المحدود** (constant of integration)

مفهوم — التكامل غير المحدود

إذا كانت الدالة $F(x)$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)$ على فترة ما I فإن التكامل غير المحدود للدالة $f(x)$ بالنسبة للمتغير x في الفترة I هو :

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

حيـث $\int$ هـو رمـز التكامـل ، $f(x)$ هي الدالة المكاملة ، dx متغير التكامل ، $F(x)$ دالـة مقابلة ، c ثابت التكامل غير المحدود.

قراءة الرياضيات

يقـرأ التعبيـر $\int f(x)\,dx$ تكامـل الدالـة $f(x)$ بالنسـبة للمتغير x .

ويمكن استعمال مفهوم التكامل غير المحدود في إيجاد تكامل بعض الدوال.

مثال 2 : إيجاد التكامل غير المحدود

أوجد التكامل غير المحدود فيما يلي :

a) $\int 7x^6\,dx$

$\because \frac{d}{dx}[x^7] = 7x^6$

$\therefore \int 7x^6\,dx = x^7 + c$

b) $\int -4x^{-5}\,dx$

$\because \frac{d}{dx}[x^{-4}] = -4x^{-5}$

$\therefore \int -4x^{-5}\,dx = x^{-4} + c$

c) $\int e^x\,dx$

$\because \frac{d}{dx}[e^x] = e^x$

$\therefore \int e^x\,dx = e^x + c$

تحقق

أوجد التكامل غير المحدود فيما يلي :

2A) $\int 6x^5\,dx$ 2B) $\int \sec^2 x\,dx$ 2C) $\int -11x^{-12}\,dx$

بمـا أن إيجـاد تكامل الدالة هو العملية العكسـية لإيجاد مشـتقة الدالـة ، وبالتالي إذا كانـت $F(x) = \int f(x)\, dx$ فيمكنك أخذ المشتقة لكل من طرفي المعادلة بالنسبة للمتغير x

نتيجة

إذا كانت $F(x) = \int f(x)\, dx$ فإن $F'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int f(x)\, dx\right] = f(x)$

مثال 3 : إيجاد المشتقة من التكامل

أوجد المشتقة المطلوبة لكل دالة مما يلي :

a) $f(x) = \int (3x^2 + 2x + 1)\, dx \qquad ;\ f'(x)$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}\left[\int (3x^2 + 2x + 1)\, dx\right]$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$$

إذن $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$

b) $f(x) = \int (x^2 - 3x - 1)\, dx \qquad ;\ f'(5)$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}\left[\int (x^2 + 3x + 1)\, dx\right]$$

$$f'(x) = x^2 - 3x + 1$$

$$f'(5) = (5)^2 - 3(5) + 1 = 11$$

إذن $f'(5) = 11$

تحقق

أوجد المشتقة المطلوبة لكل دالة مما يلي :

3A) $f(x) = \int (x^2 - 5x)\, dx\ ;\ f'(x)$

3B) $f(x) = \int (3x^2 - 4x + 2)\, dx\ ;\ f'(1)$

معادلة المنحنى:

يمكنـك إيجـاد معادلـة المنحنى إذا علمت دالة ميـل المنحنى ونقطة تمـر بالمنحنى. فإذا كانـت دالة ميل المماس للمنحنى هي $\frac{dy}{dx} = 2x$ فما معادلة هذا المنحنى؟

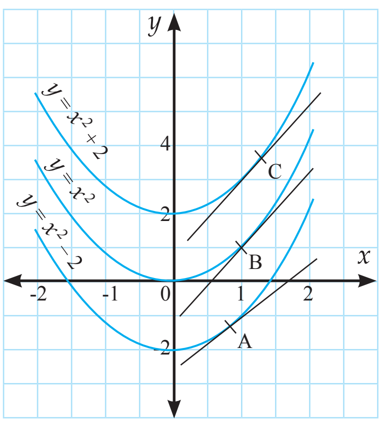
عند إيجاد تكامل الدالة $\frac{dy}{dx} = 2x$ بالنسبة للمتغير x نجد أن $y = x^2 + c$ حيث c ثابت التكامل وبالتعويض عن c بالقيم $-2\ ,\ 0\ ,\ 2$ نجد أن :

$y = x^2 + 2\ ,\ y = x^2\ ,\ y = x^2 - 2$ على الترتيب.

هـذه دوال تربيعية وتمثيلهـا البياني موضح في الشـكل المجاور حيث أن الثابت c يمكن أن يأخذ أي قيمة حقيقية.

في هذه الحالة سوف تكون المعادلة لعائلة المنحنيات المتطابقة والمزاحة رأسيا في المستوى الإحداثي هي الدالة $y = x^2 + c$.

أحد عناصر هذه العائلة من المنحنيات يمكن تعيينه إذا علمنا نقطة على المنحنى عندئذ يمكن حساب قيمة c وإيجاد معادلة المنحنى.



مثال 4: معادلة المنحنى

إذا كان منحنى الدالة $f(x)$ يمر بالنقطة $(0 , 4)$ ودالة ميله عند أي نقطة عليه تعطى بالعلاقة $f'(x) = 3x^2$، فأوجد معادلة المنحنى ؟

الخطوة 1 : أوجد تكامل الدالة $f'(x)$

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int 3x^2\,dx$$

$$\because \frac{d}{dx}(x^3 + c) = 3x^2$$

$$\therefore f(x) = \int 3x^2\,dx = x^3 + c$$

الخطوة 2 : أوجد قيمة ثابت التكامل

بما أن منحنى الدالة يمر بالنقطة $(0 , 4)$ نعوض في الدالة $f(x)$

$$f(0) = 4$$

$$3(0)^2 + c = 4$$

$$0 + c = 4$$

$$c = 4$$

الخطوة 3 : اكتب معادلة المنحنى

$$\therefore f(x) = x^3 + 4$$

إذن معادلة المنحنى هي $f(x) = x^3 + 4$

تحقق

4) إذا كان منحنى الدالة يمر بالنقطة $(1 , 3)$ ودالة ميله عند أي نقطة عليه تعطى بالعلاقة $f'(x) = 2x$، فأوجد معادلة المنحنى ؟

إرشاد

ميل المنحى:

- ميل منحنى الدالة يساوي ميل المماس للمنحنى عند نقطة التماس.
- ميل المماس عند نقطة ما هو مشتقة الدالة عند تلك النقطة.

تمارين 5-1

مثال 1

1) أوجد دالة مقابلة لكل دالة مما يأتي:

1) $f(x) = 3x^2$ 2) $g(x) = -3x^{-4}$ 3) $h(x) = 4$

4) $f(x) = \cos x$ 5) $g(x) = 2e^{2x}$ 6) $h(x) = \pi$

مثال 2

أوجد التكامل غير المحدود فيما يلي :

7) $\int -2x^{-3}\, dx$ 8) $\int \frac{1}{x}\, dx\ , x > 0$ 9) $\int -2\, dx$

مثال 3

أوجد المشتقة المطلوبة لكل دالة مما يلي :

10) $f(x) = \int (3x^4 - 5x)\, dx\ ;\ f'(x)$ 11) $g(x) = \int (x^3 - 5x^2 - x)\, dx\ ;\ g'(2)$

12) $f(x) = \int \sin x\, dx\ ;\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 13) $g(x) = \int (2x^3 - 4x^2 - x)\, dx\ ;\ g''(1)$

مثال 4

14) إذا كان منحنى الدالة يمر بالنقطة $(2\ ,\ 0)$ ودالة ميله عند أي نقطة عليه تعطى بالعلاقة $f'(x) = 4x^3$ ، فأوجد معادلة المنحنى ؟

15) إذا كان منحنى الدالة يمر بالنقطة $(1\ ,\ 2)$ ودالة ميله عند أي نقطة عليه تعطى بالعلاقة $g'(x) = 6x - 12$ ، فأوجد معادلة المنحنى ؟

16) إذا كان $\int f(x)\, dx = x^4 + 2x^3 + 5x$ ، فأوجد :

a) $f(2)$ b) $f'(3)$

17) إذا كان $\int (f'(x) + x^3 + 3)\, dx = 3x^2 + ax - 6$ و $f'(2) = 4$ ، فأوجد قيمة a

18) إذا كان $f(x)$ متصلا على $\mathbb{R}$ وكان :

$\int [f(x) + 2]\, dx = x^3 + bx^2 + 9\ ,\ f(1) = 5$ أوجد قيمة الثابت b

مسائل مهارات التفكير العليا

19) إذا كان $f(1) = 5\ , f'(1) = 8\ , f''(x) = 12x^2 - 6x$ ، أوجد الدالة $f(x)$؟

20) إذا كان منحنى الدالة $f(x)$ يمر بالنقطة $(1\ ,\ 3)$ ودالة ميله عند أي نقطة عليه تعطى بالعلاقة

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ , x > 0$ ، فأوجد معادلة المنحنى ؟

21) إذا كان $\int f(x)\, dx = \cos^2 x$ ، أثبت أن $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

5-2 القواعد الأساسية للتكامل غير المحدود
The Basic Indefinite Integration Rules

أفكار الدرس

- تعرف قواعد التكامل غير المحدود واستعمالها في إيجاد التكامل غير المحدود لبعض الدوال.
- حل مسائل هندسية على التكامل غير المحدود.

المعايير:

12A.10.2

المصطلحات:

الدالة الثابتة
constant function
دالة القوى
power function

تمهيد

درســت في الدرس الســابق أن التكامل هو العملية العكسية للتفاضل ولاســتنتاج إحدى قواعد التكامل غير المحدود أكمل ما يلي :

إذا كانت : $f(x) = 5x + 2$ فإن $\frac{d}{dx}(5x+2) =$ ،

$f(x) = 5x + 2$ فإن $\frac{d}{dx}(5x-1) =$ ،

$f(x) = 5x$ فإن $\frac{d}{dx}(5x) =$ ،

$f(x) = 5x + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$ فإن $\frac{d}{dx}(5x+c) =$ ،

وبالتالي فإن : $\int 5\, dx =$

وهذا يقودنا لقاعدة تكامل **الدالة الثابتة** (constant function)

قاعدة (1) تكامل الدالة الثابتة

إذا كانت $f(x) = k$ دالة ثابتة فإن :

$$\int k\, dx = kx + c \quad , \quad k , c \in \mathbb{R}$$

تذكر بأن كل دالة ناتجة عن اشتقاق يقابلها دالة مقابلة، ولاستنتاج قاعدة تكامل **دالة القوى** (power function) أكمل ما يلي :

$\int x\, dx =$ $\Rightarrow$ $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\right) =$

$\int x^2\, dx =$ $\Rightarrow$ $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right) =$

$\int x^3\, dx =$ $\Rightarrow$ $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4}\right) =$

ماذا تستنتج مما سبق ؟

مما سبق نستنتج قاعدة تكامل دالة القوى.

قاعدة (2) تكامل دالة القوى

إذا كانت $f(x) = x^n$ فإن :

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad , \quad n \neq -1 \; , \quad n , c \in \mathbb{R}$$

مثال 1 : استعمال قواعد التكامل غير المحدود

أوجد التكامل غير المحدود فيما يلي :

a) $\int 5\,dx$

$$\int 5\,dx = 5x + c$$

b) $\int -e^3\,dx$

$$\int -e^3\,dx = -e^3x + c$$

c) $\int x^6\,dx$

$$\int x^6\,dx = \frac{x^{6+1}}{6+1} + c$$
$$= \frac{x^7}{7} + c$$

d) $\int \frac{1}{x^4}\,dx$

$$\int \frac{1}{x^4}\,dx = \int x^{-4}\,dx$$
$$= \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + c$$
$$= \frac{x^{-3}}{-3} + c$$
$$= -\frac{1}{3x^3} + c$$

e) $\int x^{\frac{-2}{5}}\,dx$

$$\int x^{\frac{-2}{5}}\,dx = \frac{x^{\frac{-2}{5}+1}}{\frac{-2}{5}+1} + c$$
$$= \frac{x^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}} + c$$
$$= \frac{5}{3}x^{\frac{3}{5}} + c$$

تحقق

أوجد التكامل غير المحدود فيما يلي :

1A) $\int \pi^2\,dx$ 1B) $\int \log_3 9\,dx$ 1C) $\int x^9\,dx$

1D) $\int \frac{1}{x^6}\,dx$ 1E) $\int x^{\frac{3}{4}}\,dx$

ويمكن إيجاد تكامل حاصل ضرب دالة في عدد ثابت وتكامل جمع أو طرح دالتين كما يلي :

قاعدة (3) تكامل ضرب دالة في عدد ثابت

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx = kF(x) + c \quad , \quad k, c \in \mathbb{R}$$

قاعدة (4) تكامل جمع أو طرح دالتين

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

يمكنـك تعميـم قاعـدة تكامل جمع أو طرح دالتين إلى أي عـدد منته من الدوال ، ونعبر عن ذلـك بأن تكامل المجموع الجبري لأي عدد منته من الدوال القابلة للتكامل هو المجموع الجبري لتكامل كل من تلك الدوال :

$$\int [f(x) \pm g(x) \pm \cdots \pm h(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx \pm \cdots \pm \int h(x)\,dx$$

مثال 2 : استعمال القواعد الأساسية للتكامل غير المحدود

أوجد التكامل غير المحدود فيما يلي :

a) $\int \frac{-2}{x^3}\,dx = -2\int \frac{1}{x^3}\,dx$

$= -2x^{-3}\,dx$

$= (-2)\,\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c$

$= (-2)\,\frac{x^{-3}}{-2} + c = \frac{1}{x^2} + c$

b) $\int \sqrt{5}\,x^{\frac{-2}{3}}\,dx$

$\int \sqrt{5}\,x^{\frac{-2}{3}}\,dx = \sqrt{5}\int x^{\frac{-2}{3}}\,dx$

$= (\sqrt{5})\,\frac{x^{\frac{-2}{3}+1}}{\frac{-2}{3}+1} + c$

$= (\sqrt{5})\,\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + c$

$= 3\sqrt{5}\,x^{\frac{1}{3}} + c$

c) $\int (x^2 - 2x + 5)\,dx$

$\int (x^2 - 2x + 5)\,dx = \int x^2\,dx - \int 2x\,dx + \int 5\,dx$

$= \frac{x^3}{3} - (2)\,\frac{x^2}{2} + 5x + c$

$= \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5x + c$

d) $\int \frac{3x^5 - 2x^3 + 11}{x^2}\,dx$

$\int \frac{3x^5 - 2x^3 + 11}{x^2}\,dx = \int \frac{3x^5}{x^2}\,dx - \int \frac{2x^3}{x^2}\,dx + \int \frac{11}{x^2}\,dx$

$= \int 3x^3\,dx = \int 2x\,dx - \int 11x^{-2}\,dx$

$= 3\,\frac{x^{3+1}}{3+1} - 2\,\frac{x^{1+1}}{1+1} + 11\,\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c$

$= \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{2}x^2 + \frac{11}{-1}x^{-1} + c$

$= \frac{3}{4}x^4 - x^2 - \frac{11}{x} + c$

إرشاد

تبسيط الدوال:

تكامل ضرب دالة القوى في عدد ثابت

$$\int kx^n\,dx = k\int x^n\,dx$$

إرشاد

تبسيط الدوال:

قبل ايجاد التكامل لدالة ما أعد كتابة هذه الدالة بصورة مكافئة بحيث يمكنك استعمال القواعد الأساسية للتكامل.

تحقق

أوجد التكامل غير المحدود فيما يلي :

2A) $\int \frac{7}{x^{4}}\,dx$ **2B)** $\int \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

2C) $\int (5x^{3}-2x)\,dx$ **2D)** $\int \frac{2x^{3}+x^{2}}{x^{2}}\,dx$

درست سابقا كيفية ايجاد مشتقة دالة القوى فمثلا إذا كانت $f(x)=\frac{k}{a}\,\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+c$ فإن :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{k}{a\,(n+1)}(ax+b)^{n+1}+c\right)=\frac{k}{a\,(n+1)}\,(n+1)\,(ax+b)^{n}\,(a)$$

$$=k\,(ax+b)^{n}$$

حيث $a \neq 0\ ,\ n \neq -1\ ,\ a, b, k, n \in \mathbb{R}$

وبما أن التكامل هو العملية العكسية للتفاضل إذن يمكن تعميم قاعدة القوى لإيجاد التكامل غير المحدود عندما يكون المقدار المرفوع للأس دالة خطية.

نتيجة

إذا كانت $f(x)=k\,(ax+b)^{n}$ فإن :

$$\int k\,(ax+b)^{n}\,dx=\frac{k}{a}\,\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+\mathrm{c} \quad , \quad n\neq -1\ ,\ a\neq 0\ ,\ k, a, b, c, n \in \mathbb{R}$$

مثال 3 : استعمال الصورة العامة لتكامل دالة القوى

أوجد التكامل غير المحدود فيما يلي :

a) $\int 8\,(2x-3)^{9}\,dx$

$$\int 8\,(2x-3)^{9}\,dx=\frac{8}{2}\times\frac{(2x-3)^{9+1}}{9+1}+c$$

$$=\frac{8}{2}\,\frac{(2x-3)^{10}}{10}+c$$

$$=\frac{2}{5}\,(2x-3)^{10}+c$$

b) $\int \frac{5}{(7-2x)^{5}}\,dx$

$$\int \frac{5}{(7-2x)^{5}}\,dx=\int 5\,(7-2x)^{-5}\,dx$$

$$=\frac{5}{-2}\,\frac{(7-2x)^{-5+1}}{-5+1}+c$$

$$=\frac{5}{8}\,(7-2x)^{-4}+c$$

c) $\int (x^{2}-10x+25)^{3}\,dx$

$$\int (x^{2}-10x+25)^{3}\,dx=\int ((x-5)^{2})^{3}\,dx$$

$$=\int (x-5)^{6}\,dx$$

$$=\frac{(x-5)^{6+1}}{6+1}+c$$

$$=\frac{1}{7}\,(x-5)^{7}+c$$

d) $\int 5x^3 \left(\frac{2x+3}{x}\right)^3 dx$

$$\int 5x^3 \left(\frac{2x+3}{x}\right)^3 dx = \int 5x^3 \frac{(2x+3)^3}{x^3} dx$$
$$= \int 5\,(2x^3+3)^3\, dx$$
$$= \frac{5}{2} \frac{(2x+3)^{3+1}}{3+1} + c$$
$$= \frac{5}{8}(2x+3)^4 + c$$

تحقق

أوجد التكامل غير المحدود فيما يلي :

3A) $\int 5\,(7x-2)^4\, dx$

3B) $\int \frac{2}{3\,(7-9x)^5}\, dx$

3C) $\int \frac{7}{9x^2-12x+4}\, dx$

3D) $\int 3x^8 \left(\frac{5x-4}{x}\right)^8 dx$

كما يمكننا اســتعمال قواعد التكامل غير المحدود لإيجاد معادلة المنحنى بمعلومية دالة ميله عند أي نقطة واقعة عليه.

مثال 4 : إيجاد معادلة المنحنى

إذا كان منحنى الدالة $g(x)$ يمر بالنقطة $(1\,,5)$ ودالة ميله عند أي نقطة عليه تعطى بالعلاقة $g'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 1$ ، فأوجد معادلة المنحنى $g(x)$.

الخطوة 1 : أوجد تكامل الدالة $g'(x)$

$$g'(x) = \int g(x)\, dx$$
$$= \int (4x^3 - 3x^2 + 1)\, dx$$
$$= 4\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^4}{3} + x + c$$
$$= x^4 - x^3 + x + c$$

الخطوة 2 : أوجد قيمة ثابت التكامل

بما أن منحنى الدالة يمر بالنقطة $(1\,,5)$ نعوض في الدالة $g(x)$

$$g(1) = 5$$
$$(1)^4 - (1)^3 + 1 + c = 5$$
$$1 + c = 5$$
$$c = 5 - 1 = 4$$

الخطوة 3 : اكتب معادلة المنحنى

$$g(x) = x^4 - x^3 + x + 4$$

إذن معادلة المنحنى هي : $g(x) = x^4 - x^3 + x + 4$

تحقق

4) إذا كان منحنى الدالة $f(x)$ يمر بالنقطة $(2\,,3)$ ودالة ميله عند أي نقطة عليه تعطى بالعلاقة $f'(x) = 3x^2 + 2x$ ، فأوجد معادلة المنحنى $f(x)$.

إرشـاد

تحليل العبارات التربيعية:

- $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

إرشـاد

قوانين الأسس:

- $(a^n)^m = a^{nm}$
- $(ab)^n = a^n . b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

تمارين 5-2

مثال 1 أوجد التكامل غير المحدود فيما يلي :

1) $\int \sqrt{5}\, dx$ 2) $\int \pi e^5\, dx$ 3) $\int x^{\frac{-2}{7}}\, dx$ 4) $\int \frac{1}{x^2}\, dx$

5) $\int (-\log_3 5)\, dx$ 6) $\int 3\pi\, dx$ 7) $\int x^{e+1}\, dx$ 8) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

مثال 2 أوجد التكامل غير المحدود فيما يلي :

9) $\int \frac{1}{2} x^5$

10) $\int \frac{e^3}{\sqrt[5]{x^2}}\, dx$

11) $\int (5x^{-2} + 2x)\, dx$

12) $\int (x^5 - 2\sqrt{x} - \frac{3}{x^2})\, dx$

13) $\int \frac{3x^2+1}{x^4}\, dx$

14) $\int \frac{-3}{x^5}\, dx$

15) $\int \sqrt{5x}\, dx$

16) $\int (\sqrt{x} - \frac{3}{x^2})\, dx$

17) $\int (\frac{2}{5x^6} + \frac{1}{\sqrt[5]{x}} - 1)\, dx$

18) $\int \frac{x^3 - 4x + 3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

مثال 3 أوجد التكامل غير المحدود فيما يلي :

19) $\int -4\,(7x-5)^{-5}\, dx$

20) $\int \frac{6}{9(5x+2)^3}\, dx$

21) $\int \frac{x^2-25}{x-5}\, dx$

22) $\int 9x^5 (\frac{4x-3}{x})^5\, dx$

23) $\int (2\sqrt{3x+7})^3\, dx$

24) $\int \frac{-3}{12(4x-3)^{\frac{2}{3}}}\, dx$

25) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\, dx$

26) $\int 7x^{12} (\frac{5}{x} - 2)^{12}\, dx$

مثال 4

27) إذا كان منحنى الدالة $f(x)$ يمر بالنقطة $(1, 4)$ ودالة ميله عند أي نقطة عليه تعطى بالعلاقة $f'(x) = 2x - 3$، فأوجد معادلة المنحنى $f(x)$.

28) أوجد الدالة $f(x)$ إذا علمت أن منحناها يقطع محور الاحداثيات الأفقي عند $x = \frac{5}{4}$ ودالة ميله عند أي نقطة عليه تعطى بالعلاقة $f'(x) = (1-x)^2$.

مسائل مهارات التفكير العليا

29) إذا علمت ان $\frac{d^2y}{dx^2} = -6x$ وميل المنحنى عندما $x = 2$ هو -12 وكان المنحنى يمر بالنقطة $(2, -4)$، فأوجد معادلة المنحنى.

30) أوجد $f(x)$ إذا علمت أن $f''(x) = 2x$، والنقطتان $(0, 5)$، $(1, 0)$ تقعان على منحنى الدالة.

31) إذا كانت معادلة ميل المماس للدالة $f(x)$ هي $f'(x) = ax - 6\ ,\ a \in \mathbb{R}$ وكان منحنى الدالة يمر بالنقطة $(2, 1)$ وميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة يساوي 4، فأوجد معادلة منحنى الدالة $f(x)$.

5-3 تكامل دالة المقلوب ودالة الأس الطبيعي
Integration of Reciprocal and Natural Logarithmic Functions

أفكار الدرس

- تعرف دالة اللوغاريتم الطبيعي على أنها الدالة الأصلية للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$.
- إيجاد التكامل غير المحدود لمضاعفات دالة المقلوب ولتركيبات خطية منها .
- إيجاد التكامل غير المحدود لدالة الأس الطبيعي.
- إيجاد التكامل غير المحدود لمضاعفات دالة الأس الطبيعي ولتركيبات خطية منها.

المعايير:

12A.10.2

المصطلحات:

دالة المقلوب
reciprocal function

دالة الأس الطبيعي
natural logarithmic function

تمهيد

درست سابقا قاعدة تكامل دالة القوى وهي $n \neq -1$ ، $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ وتم استثناء $n = -1$ من القاعدة لأنها تجعل مقام تكامل هذه الدالة يساوي صفرا وبالعودة لمشتقة دالة اللوغاريتم الطبيعي $f(x) = \ln x \;,\; x > 0$ فإن $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \;,\; x \neq 0$ وباستعمال مفهوم الدالة المقابلة نجد أن تكامل **دالة المقلوب** (reciprocal function) هو:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int x^{-1}\,dx = \ln|x| + c$$

لاحظ أنه : تم وضع القيمة المطلقة لدالة اللوغاريتم الطبيعي لأن مجال دالة اللوغاريتم الطبيعي $\mathbb{R}^+$

قاعدة (5) تكامل دالة المقلوب

إذا كانت $f(x) = x^{-1}$ فإن :

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c \quad , \quad c \in \mathbb{R} \;,\; x \neq 0$$

مثال 1 : التكامل غير المحدود لدالة المقلوب

أوجد التكامل غير المحدود فيما يلي :

a) $\int \frac{-5}{x}\,dx$

$$\int \frac{-5}{x}\,dx = -5\int \frac{1}{x}\,dx$$
$$= -5\ln|x| + c$$

b) $\int \frac{2x+3}{x}\,dx$

$$\int \frac{2x+3}{x}\,dx = \int \left(\frac{2x}{x} + \frac{3}{x}\right)dx$$
$$= \int 2\,dx + 3\int \frac{1}{x}\,dx$$
$$= 2x + 3\ln|x| + c$$

c) $\int \left(\frac{-3x}{x^2} + 8x\right)dx$

$$\int \left(\frac{-3x}{x^2} + 8x\right)dx = \int \frac{-3x}{x^2}\,dx + 8\int x\,dx$$
$$= \int \frac{-3}{x}\,dx + 8\int x\,dx$$
$$= -3\ln|x| + 8\,\frac{x^2}{2} + c$$
$$= -3\ln|x| + 4x^2 + c$$

تحقق

أوجد التكامل غير المحدود فيما يلي :

1A) $\int 4x^{-1}\,dx$ 1B) $\int \frac{6x+7}{2x}\,dx$ 1C) $\int \left(\frac{2x^2}{x^3} - 6\right)dx$

ويمكن تعميم القاعدة الســابقة لإيجاد التكامل غير المحدود عندما يكون المقام دالة خطية على الصورة $ax+b\ ,\ a\neq 0$ حيث $\frac{d}{dx}\,[\ln(ax+b)+c] = \frac{a}{ax+b}+0 = \frac{a}{ax+b}$

لاستخلاص النتيجة التالية :

نتيجة

إذا كانت $f(x) = \frac{k}{ax+b}$ فإن :

$$\int \frac{k}{ax+b}\,dx = \frac{k}{a}\ln|ax+b|+c\ ,\ x\neq \frac{-b}{a}\ ,\ a\neq 0\ ,\ k,a,b,c\in\mathbb{R}$$

مثال 2 : استعمال الصورة العامة لتكامل دالة المقلوب

أوجد التكامل غير المحدود فيما يلي :

a) $\int \frac{3}{5x-7}\,dx$

$$\int \frac{3}{5x-7}\,dx = \frac{3}{5}\ln|5x-7|+c$$

b) $\int \frac{2}{2-4x}\,dx$

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{2-4x}\,dx &= \int \frac{2}{2(1-2x)}\,dx\\ &= \int \frac{1}{1-2x}\,dx\\ &= \frac{1}{-2}\ln|1-2x|+c\\ &= -\frac{1}{2}\ln|1-2x|+c\end{aligned}$$

c) $\int \frac{2x+7}{x+1}\,dx$

نعيد كتابة $\frac{2x+7}{x+1}$ باستعمال القسمة المطولة أو القسمة التركيبية

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+7}{x+1}\,dx &= \int \left(2+\frac{5}{x+1}\right)dx\\ &= \int 2\,dx + \int \frac{5}{x+1}\,dx\\ &= 2x+5\ln|x+1|+c\end{aligned}$$

تحقق

أوجد التكامل غير المحدود فيما يلي :

2A) $\int \frac{5}{4-2x}\,dx$ **2B)** $\int \frac{3}{9+12x}\,dx$ **2C)** $\int \frac{6x+2}{2x+3}\,dx$

نعلم أن **دالة الأس الطبيعي** (natural logarithmic function) هي الدالة الأسية الوحيدة التي مشتقتها نفسها أي أن $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ وبالتالي فإن الدالة المقابلة لدالة الأس الطبيعي هي الدالة نفسها وبذلك :

$$\int e^x\,dx = e^x + c\quad ,\quad c\in\mathbb{R}$$

أما الدالة التي على الصورة $f(x)=\frac{1}{k}e^{kx}+c$ فإن $\frac{d}{dx}(\frac{1}{k}e^{kx}+c)=e^{kx}+0=e^{kx}$

وبالتالي فإنه يمكن استنتاج القاعدة **6** من قواعد التكامل غير المحدود بأخذ التكامل للطرفين :

$\int \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k}e^{kx}+c\right)dx=\int e^{kx}\,dx$ فينتج أن :

$$\int e^{kx}\,dx=\frac{1}{k}\,e^{kx}+c$$

قاعدة (6) تكامل دالة الأس الطبيعي

إذا كانت $f(x)=e^{kx}$ فإن :

$$\int e^{kx}\,dx=\frac{1}{k}\,e^{kx}+c \quad , \quad k\neq 0\ ,\ c\in\mathbb{R}$$

مثال 3 : تكامل دالة الأس الطبيعي

أوجد التكامل غير المحدود فيما يلي :

a) $\int e^{3x}\,dx$

$$\int e^{3x}\,dx=\frac{1}{3}e^{3x}+c$$

b) $\int \sqrt{5}\,e^{-2x}\,dx$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{5}\,e^{-2x}\,dx &= \sqrt{5}\int e^{-2x}\,dx\\ &=\sqrt{5}\,(\tfrac{1}{-2})\,e^{-2x}+c\\ &=-\frac{\sqrt{5}}{2}\,e^{-2x}+c\end{aligned}$$

c) $\int (4x^3+\frac{2}{e^{2x}}-2x^{-1})\,dx$

$$\begin{aligned}\int (4x^3+\frac{2}{e^{2x}}-2x^{-1})\,dx &= \int 4x^3\,dx+\int 2e^{-2x}\,dx-\int \frac{2}{x}\,dx\\ &=4\,\frac{x^4}{4}+\frac{2}{-2}\,e^{-2x}-2\ln|x|+c\\ &=x^4-e^{-2x}-2\ln|x|+c\end{aligned}$$

تحقق

أوجد التكامل غير المحدود فيما يلي :

3A) $\int e^{-4x}\,dx$

3B) $\int e^{(\ln 2)x}\,dx$

3C) $\int (6-\frac{2}{3}e^{2x}+\frac{4}{x})\,dx$

ويمكن تعميم القاعدة السابقة لإيجاد التكامل غير المحدود عندما يكون الأس دالة خطية على الصورة $ax+b\ ,\ a\neq 0$ حيث أن : $\frac{d}{dx}\,(e^{ax+b}+c)=ae^{ax+b}+0=ae^{ax+b}$ لاستخلاص النتيجة التالية :

نتيجة

إذا كانت $f(x) = ke^{ax+b}$ فإن :

$$\int ke^{ax+b}\,dx = \frac{k}{a}e^{ax+b} + c \;,\; a \neq 0 \;,\; k, a, b, c \in \mathbb{R}$$

مثال 4 : استعمال الصورة العامة لتكامل دالة الأس الطبيعي

أوجد التكامل غير المحدود فيما يلي :

a) $\int 3e^{2-7x}\,dx$

$$\int 3e^{2-7x}\,dx = \frac{3}{-7}e^{2-7x} + c$$

$$= -\frac{3}{7}e^{2-7x} + c$$

b) $\int (5e^{2x-1}+4)^2\,dx$

$$\int (5e^{2x-1}+4)^2\,dx = \int (25e^{4x-2} + 40e^{2x-1} + 16)\,dx$$

$$= \frac{25}{4}e^{4x-2} + 20e^{2x-1} + 16x + c$$

c) $\int \frac{e^x - 1}{e^{2x+1}}\,dx$

$$\int \frac{e^x - 1}{e^{2x+1}}\,dx = \int \frac{e^x}{e^{2x+1}}\,dx - \int \frac{1}{e^{2x+1}}\,dx$$

$$= \int e^{x-2x-1}\,dx - \int e^{-2x-1}\,dx$$

$$= \int e^{-x-1}\,dx - \int e^{-2x-1}\,dx$$

$$= -e^{-x-1} - \frac{1}{-2}e^{-2x-1} + c$$

$$= -e^{-x-1} + \frac{1}{2}e^{-2x-1} + c$$

تحقق

أوجد التكامل غير المحدود فيما يلي :

4A) $\int \sqrt{3}\,e^{3-5x}\,dx$ **4B)** $\int (3 - e^{2x-1})\,dx$ **4C)** $\int \frac{x^2 - 6x^3 e^{x+1}}{x^3}\,dx$

إرشــاد

المتطابقات التربيعية :

$(a \pm b)^2$

$= a^2 \pm 2ab + b^2$

تمارين 3-5

مثال 1 أوجد التكامل غير المحدود فيما يلي :

1) $\int \frac{7}{x}\,dx$

2) $\int \frac{5x^2-2x}{2x^2}\,dx$

3) $\int \left(\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}\right) dx$

4) $\int \frac{\sqrt{3}}{2x}\,dx$

5) $\int \frac{x+2}{x^2-4}\,dx$

6) $\int \frac{x-2}{x^2-3x+2}\,dx$

مثال 2 أوجد التكامل غير المحدود فيما يلي :

7) $\int \frac{3}{2x+10}\,dx$

8) $\int \frac{5}{3-2x}\,dx$

9) $\int \frac{3x+1}{x+2}\,dx$

10) $\int \left(\frac{-7}{1-x}+\frac{2}{x}\right) dx$

11) $\int \left(\frac{9\pi}{3x-7}-\sqrt[3]{x}\right) dx$

12) $\int \frac{x-3}{x^2-9}\,dx$

مثال 3 أوجد التكامل غير المحدود فيما يلي :

13) $\int e^{4x}\,dx$

14) $\int e^{-\frac{1}{2}x}\,dx$

15) $\int \left(-2x^5+\frac{5}{3e^{-6x}}+\frac{8}{4x}\right) dx$

16) $\int \left(e^{\sqrt{x}}+\frac{1}{e-1}\right) dx$

17) $\int (1-e^x)^2\,dx$

18) $\int \left(e^{-2x}+\frac{3}{6x+3}\right) dx$

مثال 4 أوجد التكامل غير المحدود فيما يلي :

19) $\int 2e^{5-3x}\,dx$

20) $\int \left(\sqrt{5}\,e^2-e^{4x-2}\right) dx$

21) $\int \frac{1+e^{2x}}{e^{5x}}\,dx$

22) $\int \left(e^{4x+5}\right)^3 dx$

23) $\int \left(\sqrt{3}-e^{2x+3}\right)^2 dx$

24) $\int (3-e^{2x})(2+e^{3+5x})\,dx$

أوجد التكامل غير المحدود فيما يلي :

25) $\int \frac{x^5+4x^4+3}{x-4}\,dx$

26) $\int \frac{e^{3x}-27}{e^x-3}\,dx$

27) $\int 3x\,e^{2+\ln x^2}\,dx$

مسائل مهارات التفكير العليا

28) أوجد كل من أحمد ومحمد $\int \frac{1}{4x}\,dx$ فأي منهما إجابته صحيحة ؟ ولماذا ؟

أحمد	محمد
$\int \frac{1}{4x}\,dx=\frac{1}{4}\ln\lvert 4x\rvert+c$	$\int \frac{1}{4x}\,dx=\frac{1}{4}\ln\lvert x\rvert+c$

5-4

تكامل الدوال المثلثية
Integration of Trigonometric Functions

أفكار الدرس

- إيجاد التكامل غير المحدود لمضاعفات الدوال المثلثية الاتية $\sin x$, $\cos x$, $\sec^2 x$ ولتركيبات خطية منها.
- إيجاد التكامل غير المحدود لدوال مثلثية باستعمال المتطابقات المثلثية الأساسية.

المعايير:

12A.10.2

المصطلحات:

دالة مثلثية
trigonometric function

تمهيد

معتمداً على ما درسته في وحدة التفاضل وعلى فكرة أن عملية التكامل هي عكس عملية التفاضل وعلى اعتبار أن $c \in \mathbb{R}$ أكمل ما يأتي :

$$\frac{dy}{dx}(-\cos x + c) = \quad , \quad \int \sin x \, dx =$$

$$\frac{dy}{dx}(\sin x + c) = \quad , \quad \int \cos x \, dx =$$

$$\frac{dy}{dx}(\tan x + c) = \quad , \quad \int \sec^2 x \, dx =$$

من خلال إجابتك يمكنك استنتاج قواعد تكامل الدوال المثلثية الأساسية.

قاعدة (7) تكامل $\sin x$

إذا كانت $f(x) = \sin x$ فإن :

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

قاعدة (8) تكامل $\cos x$

إذا كانت $f(x) = \cos x$ فإن :

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

قاعدة (9) تكامل $\sec^2 x$

إذا كانت $f(x) = \sec^2 x$ فإن :

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

مثال 1 : استعمال قواعد التكامل غير المحدود للدوال المثلثية الأساسية

أوجد كلا من التكاملات غير المحدودة التالية :

a) $\int (3\cos x - 5\sec^2 x) \, dx$

$$\int (3\cos x - 5\sec^2 x) \, dx = 3\int \cos x \, dx - 5\int \sec^2 x \, dx$$

$$= 3\sin x - 5\tan x + c$$

b) $\int \frac{9-\sin^2 x}{\sin x - 3}\, dx$

$$\int \frac{9-\sin^2 x}{\sin x - 3}\, dx = \int \frac{(3-\sin x)(3+\sin x)}{-1\,(3-\sin x)}\, dx$$

$$= \int -1\,(3+\sin x)\, dx$$

$$= \int (-3-\sin x)\, dx$$

$$= -3x + \cos x + c$$

تحقق

أوجد كلا من التكاملات غير المحدودة التالية:

1A) $\int (5-4\sec^2 x)\, dx$

1B) $\int \frac{\cos^2 x - 3\cos x + 2}{\cos x - 1}\, dx$

ويمكن تعميم قواعد التكامل للدوال المثلثية الأساسية لإيجاد التكامل غير المحدود عندما تكون الزاوية دالة خطية على الصورة $ax+b \;,\; a \neq 0$ حيث أن :

$$\frac{d}{dx}\cos(ax+b) = -a\sin(ax+b)$$

$$\therefore \int -a\sin(ax+b)\, dx = \cos(ax+b) + c_1$$

$$\therefore -a\int \sin(ax+b)\, dx = \cos(ax+b) + c_1$$

وبقسمة الطرفين على $-a$

$$\therefore \int \sin(ax+b)\, dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + \frac{c_1}{a}$$

وبشكل عام فإن :

$$\int k\sin(ax+b)\, dx = k\int \sin(ax+b)\, dx = -\frac{k}{a}\cos(ax+b) + c$$

قاعدة (10) تكامل الدالة $f(x) = k\sin(ax+b)$

إذا كانت $f(x) = k\sin(ax+b)$ فإن :

$$\int k\sin(ax+b)\, dx = \frac{-k}{a}\cos(ax+b) + c$$

حيث $k, a, b, c \in \mathbb{R} \;,\; a \neq 0$

وبالمثل يمكن تطبيق الخطوات السابقة لاستنتاج القاعدتين التاليتين :

قاعدة (11) تكامل الدالة $f(x) = k\cos(ax+b)$

إذا كانت $f(x) = k\cos(ax+b)$ فإن :

$$\int k\cos(ax+b)\, dx = \frac{k}{a}\sin(ax+b) + c$$

حيث $k, a, b, c \in \mathbb{R} \;,\; a \neq 0$

قاعدة (12) تكامل الدالة $f(x) = k\sec^2(ax+b)$

إذا كانت $f(x) = k\sec^2(ax+b)$ فإن :

$$\int k\sec^2(ax+b)\, dx = \frac{-k}{a}\tan(ax+b) + c$$

حيث $k, a, b, c \in \mathbb{R} \;,\; a \neq 0$

مثال 2 : استعمال الصورة العامة لتكامل الدوال المثلثية الأساسية

أوجد كلا من التكاملات غير المحدودة التالية :

a) $\int 5\cos(13x-\pi)\,dx$

$$\int 5\cos(13x-\pi)\,dx = \frac{5}{13}\sin(13x-\pi)+c$$

b) $\int (3\sin(9x+1)+2x^3)\,dx$

$$\int (3\sin(9x+1)+2x^3)\,dx = \int 3\sin(9x+1)\,dx + \int 2x^3\,dx$$
$$= -\frac{3}{9}\cos(9x+1)+\frac{2}{4}x^4+c$$
$$= -\frac{1}{3}\cos(9x+1)+\frac{1}{2}x^4+c$$

c) $\int (6\sin(3x)-2\sec^2(2x-5))\,dx$

$$\int (6\sin(3x)-2\sec^2(2x-5))\,dx = \int 6\sin(3x)\,dx - \int \sec^2(2x-5)\,dx$$
$$= -\frac{6}{3}\cos 3x - \frac{2}{-2}\tan(2x-5)+c$$
$$= -2\cos(3x)+\tan(2x-5)+c$$

تحقق

أوجد كلا من التكاملات غير المحدودة التالية :

2A) $\int 7\sin(5-2x)\,dx$

2B) $\int \left(4\sec^2(7-12x)-\frac{3}{4x^2}\right)dx$

2C) $\int 4\cos(8x)-\cos(3x-2)\,dx$

كما يمكنك تبسيط بعض العبارات التي تحوي دوال مثلثية باستعمال المتطابقات المثلثية لإيجاد التكامل غير المحدود لها.

مثال 3 : استعمال المتطابقات المثلثية في إيجاد التكامل

أوجد كلا من التكاملات غير المحدودة التالية :

a) $\int \left(3\cos x-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$

$$\int \left(3\cos x-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = \int 3\cos x\,dx - \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$
$$= \int 3\cos x\,dx - \int \sec^2 x\,dx$$
$$= 3\sin x - \tan x + c$$

b) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1-\sin^2 x}\,dx$

$$\int \frac{1+\cos^2 x}{1-\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx$$
$$= \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx + \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx$$
$$= \int \sec^2 x\,dx + \int 1\,dx$$
$$= \tan x + x + c$$

إرشاد

المتطابقات المثلثية الأساسية:

$\csc x = \frac{1}{\sin x}$, $\sin x \neq 0$

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $\cos x \neq 0$

$\cot x = \frac{1}{\tan x}$, $\tan x \neq 0$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$

$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$

c) $\int \frac{(\sec^2 (2x-1) - \tan^2 (2x-1))}{\csc (1-2x)} dx$

$$\int \frac{(\sec^2 (2x-1) - \tan^2 (2x-1))}{\csc (1-2x)} dx$$

$$= \int \frac{(\sec^2 (2x-1) - (\sec^2 (2x-1) - 1)}{\csc (1-2x)} dx$$

$$= \int \frac{(\sec^2 (2x-1) - \sec^2 (2x-1) + 1}{\csc (1-2x)} dx$$

$$= \int \frac{1}{\csc (1-2x)} dx$$

$$= \int \sin (1-2x)\, dx$$

$$= -\frac{1}{-2} \cos (1-2x) + c$$

$$= \frac{1}{2} \cos (1-2x) + c$$

تحقق

أوجد كلا من التكاملات غير المحدودة التالية :

3A) $\int \tan x \cos x \, dx$

3B) $\int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\csc (3x-2)} dx$

3C) $\int \frac{\sec (5-7x) \cos (5-7x)}{1 - \sin^2 (5-7x)} dx$

تعلمت سابقا كيفية إيجاد معادلة المنحنى إذا علمت دالة ميله ونقطة تمر به وبنفس الطريقة يمكنك إيجاد معادلة المنحنى لدالة مثلثية.

مثال 4 : معادلة منحنى دالة مثلثية

أوجد الدالة $f(x)$ إذا علمت أن منحناها يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{2}, 0)$ وميل منحناها عند أي نقطة عليه يعطى بالعلاقة $f'(x) = -6 \sin 2x$

الخطوة 1 : أوجد تكامل الدالة $f'(x)$

$$f(x) = \int f'(x)\, dx = \int -6\sin 2x \, dx$$

$$f(x) = \frac{-6}{2} (-\cos 2x) + c$$

$$= 3 \cos 2x + c$$

الخطوة 2 : أوجد قيمة ثابت التكامل

وبما أن منحنى الدالة يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{2}, 0)$ نعوض في الدالة $f(x)$

$$f(\frac{\pi}{2}) = 0$$

$$3 \cos (2 (\frac{\pi}{2})) + c = 0$$

$$3(-1) + c = 0$$

$$-3 + c = 0$$

$$c = 3$$

الخطوة 3 : اكتب معادلة المنحنى

$$\therefore f(x) = 3 \cos 2x + 3$$

إذن معادلة المنحنى هي : $f(x) = 3 \cos 2x + 3$

تحقق

4) أوجد الدالة $f(x)$ إذا علمت أن منحناها يمر بالنقطة $(0, 2)$ وميل منحناها عند أي نقطة عليه يعطى بالعلاقة $f'(x) = 2 \cos x + \sin x$

تمارين 5-4

مثال 1 أوجد كلا من التكاملات غير المحدودة التالية :

1) $\int (-2 \sin x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{3}{x})\, dx$

2) $\int (\sec x - 5)(\sec x + 5)\, dx$

3) $\int \frac{\sin^2 x + 5 \sin x - 6}{\sin x - 1}\, dx$

4) $\int \frac{1 - \sec^2 x}{1 + \sec^2 x}\, dx$

مثال 2 أوجد كلا من التكاملات غير المحدودة التالية :

5) $\int 5 \cos(3x - 2)\, dx$

6) $\int (2 \sin(10x - 1) + e^{2x})\, dx$

7) $\int \left(2 \sec^2 3x - 4 \sin(5 - 2x)\right) dx$

8) $\int \left(\sqrt{x} + \cos(3 - 4x)\right) dx$

9) $\int \frac{\cos^2(2x - 1) - 4}{\cos(2x - 1) + 2}\, dx$

10) $\int \frac{\sec^2(2x) - 3 \sec(2x) + 4}{\sec(2x) - 4}\, dx$

مثال 3 أوجد كلا من التكاملات غير المحدودة التالية :

11) $\int 3 \sin x \csc x\, dx$

12) $\int (5 \cos^2 x + 5 \tan^2 x \cos^2 x)\, dx$

13) $\int \left(4 + \tan^2(2 - 9x)\right) dx$

14) $\int \left(2 \sec^2(3x - 2) + \tan^2(3x - 2)\right) dx$

15) $\int \left(\frac{\cos 3x}{\cot 3x} + 2 \sin 3x\right) dx$

15) $\int \left(\csc^2(5x - 3) - \cot^2(5x - 3)\right) dx$

مثال 4

17) أوجد الدالة $f(x)$ إذا علمت أن منحناها يمر بالنقطة $(0\,,\,1)$ وميل منحناها عند أي نقطة عليه يعطى بالعلاقة

$$f'(x) = -3 - 3 \sin 3x$$

18) أوجد الدالة $f(x)$ إذا علمت أن منحناها يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{6}\,,\,\frac{1}{3})$ وميل منحناها عند أي نقطة عليه يعطى بالعلاقة

$$f'(x) = 6 \sin 3x - 2 \cos 3x$$

19) أوجد $\int \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}\, dx$

20) أوجد $\int e^{5 - \ln \cos^2 x}\, dx$

مسائل مهارات التفكير العليا

21) إذا كان $f''(x) = -4 \cos 2x$ وكان للدالة قيمة صغرى محلية قيمتها -2 عند $x = \frac{\pi}{2}$ ، فأوجد الدالة $f'(x)$

22) أوجد الدالة $f(x)$ إذا كان ميل منحناها عند أي نقطة عليه يعطى بالعلاقة $0 \le x < \frac{\pi}{2}$, $f''(x) = \sin 2x$ وكانت النقطة $(0\,,\,\frac{1}{2})$ نقطة حرجة للدالة.

5-5 التكامل المحدود
The Definite Integral

أفكار الدرس

- تعـرف مفهوم التكامـل المحدود للدوال وإيجاد قيمته.
- تعرف خصائص التكامل المحدود للدوال واستعمالها.

المعايير:

12A.10.3

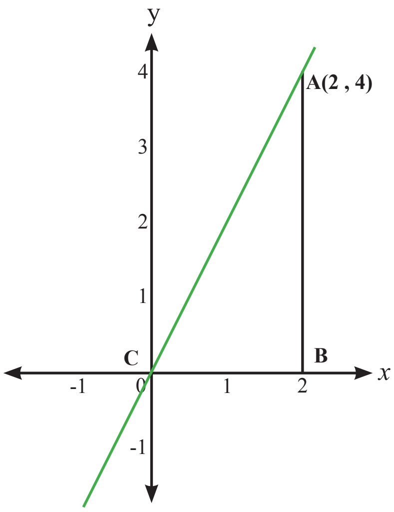
المصطلحات:

التكامل المحدود
the definite integral

قراءة الرياضيات

يقرأ $\int_a^b f(x)\ dx$ التكامل المحدود للدالة $f(x)$ من $x = a$ إلى $x = b$ بالنسبة للمتغير x ونسمي a الحد السفلي للتكامل، b الحد العلوي للتكامل.

تمهيد



الشكل المجاور يمثل منحنى الدالة $f(x) = 2x$

من الشكل المجاور أجب عما يلي :

- أوجد مساحة المثلث ABC
- أوجد الدالة $F(x)$ حيث $F(x) = \int 2x\ dx$
- أوجد $F(2) - F(0)$

إن إجابتك الصحيحة على الأسئلة السابقة تبين لك أن $F(2) - F(0)$ تساوي مساحة المثلث المحصور بين منحنى الدالة $f(x)$ ومحور السينات في الفترة $[0 , 2]$

ويسمى $F(2) - F(0)$ **بالتكامل المحدود** (the definite integral) للدالة $f(x)$ ويكتب على الصورة

$$\int_0^2 f(x)\ dx$$

مفهوم — **تعريف التكامل المحدود**

إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة على الفترة $[a , b]$ وكانت $F(x)$ هي الدالة المقابلة للدالة $f(x)$ على الفترة $[a , b]$ فإن التكامل المحدود للدالة $f(x)$ على هذه الفترة هو :

$$\int_a^b f(x)\ dx = [\ F(x)\ ]_a^b = F(b) - F(a)$$

مما سبق نلاحظ أن التكامل المحدود لا يتضمن ثابت التكامل c وذلك لأن :

$$\int_a^b f(x)\ dx = [\ F(x) + c\ ]_a^b = [F(b) + c\ ] - [F(a) + c\ ] = F(b) - F(a)$$

مثال 1 : **استعمال التكامل المحدود**

أوجد قيمة التكامل المحدود فيما يلي :

a) $\int_1^3 (6x^2 + 4x)\ dx$

$$\begin{aligned}\int_1^3 (6x^2 + 4x)\ dx &= [\ 2x^3 + 2x^2\ ]_1^3\\ &= (2 \times 3^3 + 2 \times 3^2) - (2 \times 1^3 + 2 \times 1^2)\\ &= (54 + 18) - (2 + 2)\\ &= 72 - 4 = 68\end{aligned}$$

b) $\int_0^1 e^{2-2x}\ dx$

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{2-2x}\ dx &= [-\tfrac{1}{2} e^{2-2x}\ ]_0^1\\ &= \left(-\tfrac{1}{2} e^{2-2\times 1}\right) - \left(-\tfrac{1}{2} e^{2-2\times 0}\right)\\ &= (-\tfrac{1}{2} e^{0}) - (-\tfrac{1}{2} e^{2})\\ &= -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} e^{2} \cong 3.2\end{aligned}$$

c) $\int_2^6 \frac{1}{\sqrt{2x-3}}\,dx$

$$\int_2^6 \frac{1}{\sqrt{2x-3}}\,dx = \int_2^6 \frac{1}{(2x-3)^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

$$= \int_2^6 (2x-3)^{\frac{-1}{2}}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}\,\frac{(2x-3)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right]_2^6$$

$$= \left[\frac{1}{2}\,\frac{(2x-3)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_2^6$$

$$= \left[(2x-3)^{\frac{1}{2}} \right]_2^6$$

$$= (2\times 6-3)^{\frac{1}{2}} - (2\times 2-3)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 3 - 1 = 2$$

c) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(3x)\,dx$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(3x)\,dx = \left[-\frac{1}{3}\cos 3x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\cos\left(3\times\frac{\pi}{6}\right)\right) - \left(-\frac{1}{3}\cos\left(3\times\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\cos\pi = 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

تنبيه

دائمًا يكون كل من حدي التكامل المحدود للدوال المثلثية مقاساً بالتقدير الدائري ما لم يذكر غير ذلك.

تحقق

أوجد قيمة التكامل المحدود فيما يلي :

1A) $\int_1^2 (3x^2 - 2x)\,dx$

1B) $\int_0^1 e^{3x}\,dx$

1C) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt[3]{3x-4}}\,dx$

1D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

هناك خصائص مهمة للتكامل المحدود تساعد في تسهيل حسابه لبعض الدوال في كثير من الحالات، ومن هذه الخصائص:

خاصية (1)

إذا كانت الدالة معرفة عند $x = a$ فإن $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

خاصية (2)

إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للتكامل على الفترة $[\,a , b\,]$ فإن :

$$\int_a^a f(x)\,dx = -\int_a^a f(x)\,dx$$

خاصية (3)

$$\int_a^b k\,dx = k\,(b-a) \quad , \; k \in \mathbb{R}$$

مثال 2 : استعمال خواص التكامل المحدود

a) أوجد قيمة $\int_{3}^{3} \sqrt[3]{x^2+1}\ dx$

$$\int_{3}^{3} \sqrt[3]{x^2+1}\ dx = F(3) - F(3) = 0$$

b) إذا كان $\int_{1}^{4} f(x)\ dx = \frac{3}{5}$ فأوجد $\int_{4}^{1} f(x)\ dx$

$$\int_{4}^{1} f(x)\ dx = -\int_{1}^{4} f(x)\ dx$$
$$= -\frac{3}{5}$$

c) أوجد قيمة $\int_{1}^{6} 8\ dx$

$$\int_{1}^{6} 8\ dx = 8\,(6-1) = 40$$

d) إذا كان $\int_{-2}^{4} 3b\ dx = 54\ ,\ b \in \mathbb{R}$ أوجد قيمة b

$$\because \int_{-2}^{4} 3b\ dx = 54$$

$$\therefore\ 3b\,\big(4-(-2)\big) = 54 \quad \Rightarrow \quad 18\,b = 54 \quad \Rightarrow \quad b = 3$$

تحقق

2A) أوجد قيمة $\int_{5}^{5} (2x^2-3)^3\ dx$

2B) إذا كان $\int_{5}^{3} (3x^2-2)\ dx = -94$ ، فأوجد $\int_{3}^{5} (3x^2-2)\ dx$

2C) أوجد قيمة $\int_{-2}^{15} 10\ dx$

2D) إذا كان $\int_{3}^{9} 4a\ dx = -12\ ,\ a \in \mathbb{R}$ ، فأوجد قيمة a

خاصية (4)

إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للتكامل على فترة مغلقة تنتمي إليها الأعداد $a\ ,\ b\ ,\ c$ فإن :

$$\int_{a}^{c} f(x)\ dx = \int_{a}^{b} f(x)\ dx + \int_{b}^{c} f(x)\ dx$$

مثال 3 استعمال خواص التكامل المحدود

إذا كان $\int_1^9 f(x)\,dx = 13,\ \int_5^9 f(x)\,dx = -21$ ، فأوجد $\int_1^5 f(x)\,dx$

$$\int_1^9 f(x)\,dx = \int_1^5 f(x)\,dx + \int_5^9 f(x)\,dx$$

$$13 = \int_1^5 f(x)\,dx + (-21)$$

$$\int_1^5 f(x)\,dx = 13 + 21 = 34$$

تحقق

(3A إذا كان $\int_0^3 f(x)\,dx = -2,\ \int_3^5 f(x)\,dx = 11$ ، فأوجد $\int_0^5 f(x)\,dx$

(3B إذا كان $\int_0^6 f(x)\,dx = -8,\ \int_4^6 f(x)\,dx = 2.5$ ، فأوجد $\int_0^4 f(x)\,dx$

إرشاد

لا يشترط في الخاصية 4 أن تقع b بين a, c لذلك يمكن كتابتها على الصورة التالية :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

ففي المثال 3 يمكن أن يتم الحل كما يلي :

$$\int_1^5 f(x)\,dx = \int_1^9 f(x)\,dx + \int_9^5 f(x)\,dx = 13 + 21 = 34$$

خاصية (5)

- إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للتكامل على الفترة $[a, b]$ ، $f(x) \ge 0$ لكل $x \in [a, b]$ فإن :

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$$

- إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للتكامل على الفترة $[a, b]$ ، $f(x) \le 0$ لكل $x \in [a, b]$ فإن :

$$\int_a^b f(x)\,dx \le 0$$

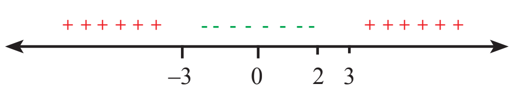
مثال 4 استعمال خواص التكامل المحدود

دون حساب قيمة التكامل بين أن : $\int_0^2 (x^2 - 9)\,dx < 0$

- **أوجد أصفار الدالة $x^2 - 9$**

$$x^2 - 9 = 0$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \pm 3$$

- **ابحث في إشارة المقدار الجبري $x^2 - 9$ في $[0, 2]$**



- **حدد إشارة التكامل:**

من إشارة الدالة نلاحظ أن $x^2 - 9 < 0$ لجميع قيم x في $[0, 2]$

$$\therefore \int_0^2 (x^2 - 9)\,dx < 0$$

تحقق

(4 دون حساب قيمة التكامل بين أنَّ : $\int_2^4 (x^2 - 1)\,dx > 0$

إرشاد

إشارة المقادير التربيعية

لتحديد إشارة المقادير التربيعية على الصورة $ax^2 + bx + c$ على خط الأعداد فإن للمقدار إشارة a دائمًا إلّا بين الجذرين

يمكننا حساب التكامل المحدود لدالة القيمة المطلقة على فترة ما، بإعادة تعريف هذه الدالة في صورة دالة متعددة التعريف ومن ثم إجراء عملية التكامل مع استعمال الخاصية 4 إن لزم الأمر .

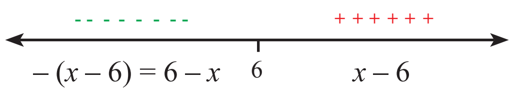
مثال 5 تكامل دالة القيمة المطلقة

أوجد قيمة $\int_1^8 |x-6|\,dx$

• اجعل ما بداخل رمز القيمة المطلقة يساوي الصفر ، ثم حل المعادلة

$$x-6=0 \Rightarrow x=6$$

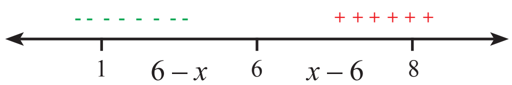
• عين صفر المعادلة على خط الأعداد ثم حدد الاشارة على جانبيه .



• أعد تعريف دالة القيمة المطلقة حول $x=6$

$$|x-6| = \begin{cases} x-6 & ,x \geq 6 \\ -(x-6) & ,x < 6 \end{cases}$$

• عين حدي التكامل على خط الأعداد السابق.



• استعمل تعريف دالة المطلق والخاصية 4 في إيجاد $\int_1^8 |x-6|\,dx$

$$\int_1^8 |x-6|\,dx = \int_1^6 (6-x)\,dx + \int_6^8 (x-6)\,dx$$

$$= \left[6x - \frac{1}{2}x^2\right]_1^6 + \left[\frac{1}{2}x^2 - 6x\right]_6^8$$

$$= \left[\left(6\times 6 - \frac{1}{2}\times 6^2\right) - \left(6\times 1 - \frac{1}{2}\times 1^2\right)\right] + \left[\left(\frac{1}{2}\times 8^2 - 6\times 8\right) - \left(\frac{1}{2}\times 6^2 - 6\times 6\right)\right]$$

$$= (18-5.5) + (-16+18) = 14.5$$

تحقق

أوجد قيمة كل مما يلي:

5 A) $\int_0^5 |3-x|\,dx$

5 B) $\int_0^2 |3-x|\,dx$

تمارين 5-5

مثال 1 أوجد قيمة التكامل المحدود في كل مما يأتي :

1) $\int_1^3 (2x-5)\,dx$

2) $\int_0^1 e^{2x-3}\,dx$

3) $\int_2^3 \frac{2}{4x-1}\,dx$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin(4x+1) - \sec^2 x)\,dx$

5) $\int_0^2 (2x-1)^2\,dx$

6) $\int_0^1 (3x + e^{2-5x})\,dx$

7) $\int_0^2 \frac{8x+1}{2x+1}\,dx$

8) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cot 2x \sin 2x\,dx$

مثال 2 أوجد قيمة كل مما يأتي :

9) $\int_{-5}^{-5} \sqrt{2x+1}\,dx$

10) $\int_1^1 \frac{3}{x^3}\,dx$

11) إذا كان $\int_0^{\sqrt{8}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = 2$ ، فأوجد قيمة $\int_{\sqrt{8}}^0 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

12) إذا كان $\int_0^{\pi} \tan x \cos x\,dx = 2$ ، فأوجد قيمة $\int_{\pi}^0 \tan x \cos x\,dx$

13) أوجد قيمة :

a) $\int_2^{102} -11\,dx$

b) $\int_4^{23} \cos \pi\,dx$

14) إذا كان $\int_{1+b}^{2+3b} 5\,dx = 40 , b \in \mathbb{R}$ ، فأوجد قيمة b

مثال 3 15) إذا كان $\int_0^5 f(x)\,dx = 1 , \int_0^1 f(x)\,dx = -2$ ، فأوجد $\int_1^5 f(x)\,dx$

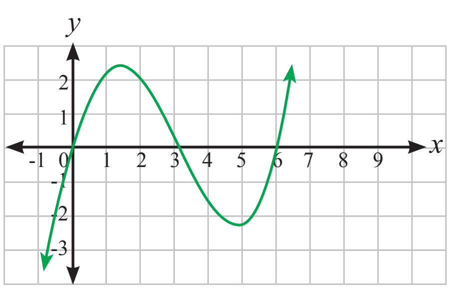
16) إذا كان $\int_{-2}^1 f(x)\,dx = 2 , \int_1^3 f(x)\,dx = -6$ ، فأوجد $\int_3^{-2} f(x)\,dx$

مثال 4 دون حساب قيمة التكامل بين أن :

17) $\int_{-1}^1 (x^2-4)\,dx < 0$

18) $\int_{-3}^3 (16-x^2)\,dx > 0$

19) بالاستعانة بالشكل المجاور الذي يمثل منحنى الدالة $f(x)$ المتصلة على الفترة $[0 , 6]$ ، أجب عن ما يأتي :



• ما إشارة $\int_1^3 f(x)\,dx$ ، ولماذا ؟

• ما إشارة $\int_3^6 f(x)\,dx$ ، ولماذا ؟

مثال 5 **أوجد قيمة كل من التكاملات التالية :**

22) $\int_0^3 x^2 - |x-1|\, dx$ 21) $\int_{-1}^0 |2-x|\, dx$ 20) $\int_2^5 |6x-2|\, dx$

23) إذا كان منحنى الدالة $f(x)$ يمر بالنقطتين $(1, 6), (3, 4)$ ، فأوجد $\int_1^3 f'(x)\, dx$

24) إذا كان $\int_{-6}^{a^2-5a} f(x)\, dx = 0\, dx \; ; f(x) > 0$ ، فما قيمة a ؟

25) إذا كان $\int_0^k x(1-x)\, dx = -4.5$ ، فما قيمة k ؟

26) إذا كان $\int_a^2 2a\, dx = -30 \, , a \in \mathbb{R}$ ، فما قيمة a ؟

27) **إذا كان $\int_2^4 x^3\, dx = 60 \, , \int_2^4 x\, dx = 6 \, , \int_2^4 dx = 2$ ، فأوجد كلا من التكاملات الآتية :**

c) $\int_2^4 (6+2x-x^3)\, dx$ b) $\int_2^4 (x^3+4)\, dx$ a) $\int_4^2 x\, dx$

28) إذا كان $f(x) = \begin{cases} |x-2| & , x < 0 \\ x+2 & , x \geq 0 \end{cases}$ ، **فأوجد :**

c) $\int_{-4}^6 f(x)\, dx$ b) $\int_{-2}^2 f(x)\, dx$ a) $\int_{-2}^0 f(x)\, dx$

مسائل مهارات التفكير العليا

29) أوجد كثيرة الحدود $f(x)$ من الدرجة الأولى بحيث أنَّ: $f(0) = 1 \, , \int_0^1 f(x)\, dx = 4$

30) إذا كان $\int_2^5 \frac{f(x)}{3}\, dx = -2 \, , \int_9^2 (2f(x)+3)\, dx = -17$ ، فأوجد $\int_5^9 (4f(x)-1)\, dx$

31) دون حساب قيمة التكامل، بيّن أنَّ:

$$\int_1^2 x\, dx \leq \int_1^2 x^2\, dx$$

التكامل بالتعويض
Integration by Substitution

5-6

أفكار الدرس

- تعرف أن : $\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + c$ واستعمالها في إيجاد بعض التكاملات.
- استعمال التكامل بالتعويض لإيجاد تكاملات غير محدودة.
- استعمال التكامل بالتعويض لحساب تكاملات محدودة.

المعايير:

12A.10.11
12A.10.12
12A.10.13

المصطلحات:

الدالة المركبة
composite function

التكامل بالتعويض
integration by substitution

تمهيد

طلب الأستاذ أحمد من طلابه أن يجيبوا عن الأسئلة التالية :

1) بين أن الدالة $f(x) = \frac{1}{6}(x^2+3)^6$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x) = 2x\,(x^2+3)^5$

2) أوجد $\int 2x\,(x^2+3)^5\, dx$

3) ما هي علاقة الدالة المقابلة $\frac{1}{6}(x^2+3)^6$ بالدالة $2x\,(x^2+3)^5$

4) ما هي مشتقة المقدار x^2+3 الموجود داخل القوس $(x^2+3)^5$ وما علاقة المشتقة بالمقدار الموجود خارج القوس في الدالة $f(x)$

5) هل يمكنك أن تستنتج طريقة سريعة لحساب هذا التكامل ؟ ما هي ؟

6) باستخدام الطريقة التي اكتشفتها احسب التكامل التالي : $\int (x^3+1)^{10}\, 3x^2\, dx$

مما سبق ومن خلال دراستك للتفاضل باستعمال قاعدة السلسلة يمكنك إيجاد تكامل دالتين إحداهما مشتقة الأخرى كليا أو جزئيا وهذه الطريقة تسمى تكامل **الدالة المركبة** (composite function) كالتالي :

$$\int F'(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + c$$

مفهوم: تكامل مشتقة الدالة المركبة

إذا كان مدى الدالة $g(x)$ هو الفترة I ، $f(x)$ دالة متصلة على I والدالة $F(x)$ هي الدالة المقابلة للدالة $f(x)$ فإن : $\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + c$

مثال 1: استعمال تكامل مشتقة الدالة المركبة

أوجد : $\int (x^3-2x)^7\,(3x^2-2)\, dx$

$$f(x) = x^7 \quad , \quad g(x) = x^3 - 2x$$

$$f(g(x)) = (x^3-2x)^7 \quad , \quad g'(x) = 3x^2 - 2$$

$$\because \int f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + c$$

$$\therefore \int (x^3-2x)^7\,(3x^2-2)\, dx = \frac{1}{8}(x^3-2x)^8 + c$$

تحقق

أوجد : $\int (x^3-2x^2)^5\,(3x^2-4x)\, dx$

من المثال السابق نلاحظ أن $\int (x^3-2x)^7\,(3x^2-2)\, dx$ يمثل تكامل حاصل ضرب دالة قوى في مشتقة أساسها وبالتالي يمكننا أن نستنتج النتيجة التالية :

$$\int [f(x)]^n f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c \,,\; n \neq -1$$

وبناءً على النتيجة يمكن حل مثال 1 كما يلي:

$[f(x)]^n = (x^3 - 2x)^7$,

$f'(x) = (3x^2 - 2)$

$\therefore \int (x^3 - 2x)^7 (3x^2 - 2)dx = \frac{1}{8}(x^3 - 2x)^8 + c$

من المفهوم السابق يمكننا الحصول على النتائج التالية التي ستساعدنا في إيجاد بعض التكاملات :

نتيجة **تكامل مشتقة الدالة المركبة**

1) $\int [f(x)]^n f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c ,\ n \neq -1$

2) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln f(x) + c \ ,\ f(x) \neq 0$

3) $\int f'(x)\, e^{f(x)}\, dx = e^{f(x)} + c$

4) $\int f'(x) \cos f(x)\, dx = \sin f(x) + c$

5) $\int f'(x) \sin f(x)\, dx = -\cos f(x) + c$

6) $\int f'(x) \sec^2 f(x)\, dx = \tan f(x) + c$

مثال 2 **استعمال نتائج تكامل الدالة المركبة**

أوجد التكامل غير المحدود فيما يلي :

a) $\int \frac{5x^4 - 14x}{x^5 - 7x^2}\, dx$

نلاحظ أن : $f(x) = x^5 - 7x^2 \ ,\ f'(x) = 5x^4 - 14x$

$\because \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln |\, f(x)\, | + c$

$\therefore \int \frac{5x^4 - 14x}{x^5 - 7x^2}\, dx = \ln |\, x^5 - 7x^2\, | + c$

b) $\int (2x + 1)\, e^{x^2 + x}\, dx$

نلاحظ أن : $f(x) = x^2 + x \ ,\ f'(x) = 2x + 1$

$\because \int f'(x)\, e^{f(x)}\, dx = e^{f(x)} + c$

$\therefore \int (2x + 1)\, e^{x^2 + x}\, dx = e^{x^2 + x} + c$

c) $\int (3x^2 + 5) \sin (x^3 + 5x)\, dx$

نلاحظ أن : $f(x) = (x^3 + 5x)\ ,\ f'(x) = 3x^2 + 5$

$\because \int f'(x) \sin f(x)\, dx = -\cos f(x) + c$

$\therefore \int (3x^2 + 5) \sin (x^3 + 5x)\, dx = -\cos (x^3 + 5x) + c$

تحقق

أوجد التكامل غير المحدود فيما يلي :

2A) $\int \frac{2x}{x^2 + 3}\, dx$ **2B)** $\int -2x\, e^{1 - x^2} dx$ **2C)** $\int (3x^2 - 2x) \sec^2 (x^3 - x^2)\, dx$

بالعودة للسؤال 2 من فقرة التمهيد لإيجاد ناتج $\int 2x\,(x^2+3)^5\,dx$ ، يمكن اتباع ما يلي:

- نفرض أن $u = x^2 + 3$ وبالتالي فإن $\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow du = 2\,x\,dx \Rightarrow \frac{du}{2x} = dx$
- نعوض عن $x^2+3\,,\,dx$ في $\int 2x\,(x^2+3)^5\,dx$ نجد أن :

$$\int 2x\,(x^2+3)^5\,dx = \int \cancel{2x}\,u^5\,\frac{du}{\cancel{2x}} = \int u^5\,du$$

- نستعمل قاعدة تكامل دالة القوة ينتج :

$$\int u^5\,du = \frac{1}{6}u^6 + c = \frac{1}{6}(x^2+3)^6 + c$$

ويمكن تعميم هذه القاعدة : لإيجاد $\int f\,g\,(x)\;g'\,(x)\,dx$

نفرض أن: $u = g\,(x) \Rightarrow \frac{du}{2x} = g\,(x) \Rightarrow du = g'(x)\,dx$

وبالتعويض $\int f(g\,(x))\;g'\,(x)\,dx = \int f(u)\,du = F\,(u) + c$

وهذا ما يسمى **التكامل بالتعويض** (integration by substitution)

قاعدة — التكامل بالتعويض

إذا كانت $u = g\,(x)$ ، $du = g'(x)\,dx$ فإن :

$$\int f(g\,(x))\;g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F\,(u) + c$$

يمكنك استعمال القواعد الأساسية للتكامل غير المحدود في إيجاد تكامل الدوال بطريقة التعويض.

مثال 3 — التكامل غير المحدود بالتعويض

أوجد التكامل في كل مما يلي :

a) $\int (x^2+3x)^9\,(4x+6)\,dx$

- **افرض أن** $u = x^2 + 3x$
- **أوجد** $\frac{du}{dx}$

$$\frac{du}{dx} = 2x + 3 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x+3}$$

- **عوض في $\int (x^2+3x)^9\,(4x+6)\,dx$ عن $x^2+3x\,;\,dx$ ثم أوجد التكامل**

$$\int (x^2+3x)^9\,(4x+6)\,dx = \int u^9\,(4x+6)\,\frac{du}{2x+3}$$
$$= 2\int u^9\,(2x+3)\,\frac{du}{2x+3}$$
$$= 2\int u^9\,du$$
$$= 2\,\frac{u^{10}}{10} + c$$

- **عوض $u = x^2 + 3x$ من الفرض**

$$= \frac{1}{5}(x^2+3x)^{10} + c$$

إذن $\int (x^2+3x)^9\,(4x+6)\,dx = \frac{1}{5}(x^2+3x)^{10} + c$

إرشاد

في حالة إيجاد التكامل غير المحدود بطريقة التعويض تكتب الإجابة النهائية باستعمال نفس متغير الدالة المراد إيجاد التكامل لها وهو في مثال 3 المتغير x

b) $\int \frac{x-2}{x^2-4x}\,dx$

- افرض أن $u = x^2 - 4x$
- أوجد $\frac{du}{dx}$

$$\frac{du}{dx} = 2x - 4 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x-4}$$

- عوض في $\int \frac{x-2}{x^2-4x}$ عن $x^2 - 4x$; dx ثم أوجد التكامل

$$\int \frac{x-2}{x^2-4x}\,dx = \int \frac{x-2}{u} \cdot \frac{du}{2x-4}$$
$$= \int \frac{x-2}{u} \cdot \frac{du}{2(x-2)}$$
$$= \int \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{2}$$
$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u}\,du$$
$$= \frac{1}{2} \ln |u| + c$$

- عوض $u = x^2 - 4x$ من الفرض

$$= \frac{1}{2} \ln |x^2 - 4x| + c$$

إذن $\int \frac{x-2}{x^2-4x}\,dx = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 4x| + c$

تحقق

أوجد التكامل فيما يلي :

3A) $\int x\, e^{x^2+1}\,dx$

3B) $\int (5x^4 - 2) \cos (2x^5 - 4x)\,dx$

تحتـاج بعـض التكاملات للتعويض عن قيمة x من الفرض إذا لم يتم اختصارها بطريقة التعويض السـابقة وذلك بكتابة الدالة بدلالة متغير واحد قبل إجراء التكامل كما يتضح من المثال التالي

مثال 4 التكامل غير المحدود بالتعويض

أوجد التكامل في كل مما يلي :

a) $\int x\,(2x-1)^{\frac{1}{2}}\,dx$

- افرض أن $u = 2x - 1$
- أوجد $\frac{du}{dx}$

$$\frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

- عبر عن x بدلالة u

$$u = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{u+1}{2}$$

- عوض في $\int x\,(2x-1)^{\frac{1}{2}}\,dx$ عن dx, $2x-1$, وعن x ثم أوجد التكامل

$$\int x\,(2x-1)^{\frac{1}{2}}\,dx = \int \left(\frac{u+1}{2}\right) \cdot u^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{du}{2}$$
$$= \int \frac{u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}}{4}\,du$$
$$= \frac{1}{4} \int \left(u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\right) du$$
$$= \frac{1}{4} \left(\frac{2}{5} \cdot u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} \cdot u^{\frac{3}{2}}\right) + c$$
$$= \frac{1}{10} u^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{6} u^{\frac{3}{2}} + c$$

• عوض من الفرض $u = 2x - 1$

$$= \frac{1}{10}(2x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{6}(2x-1)^{\frac{3}{2}} + c$$

إذن $\int x(2x-1)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{10}(2x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{6}(2x-1)^{\frac{3}{2}} + c$

b) $\int (x+4)\sqrt{2-3x}\,dx$

• افرض أن $u = 2 - 3x$

• أوجد $\frac{du}{dx}$

$$\frac{du}{dx} = -3 \Rightarrow dx = \frac{du}{-3}$$

• عبر عن x بدلالة u

$$u = 2 - 3x \Rightarrow x = \frac{u-2}{-3}$$

• عوض في $\int (x+4)\sqrt{2-3x}\,dx$ عن dx , $2-3x$, x ثم أوجد التكامل

$$\int (x+4)\sqrt{2-3x}\,dx = \int \left(\frac{u-2}{-3} + 4\right)\cdot\sqrt{u}\cdot\frac{du}{-3}$$

$$= \int \left(\frac{u-2}{-3} + \frac{-12}{-3}\right)\cdot u^{\frac{1}{2}}\,\frac{du}{-3}$$

$$= \frac{1}{-3}\int (u-14)\cdot u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{-3}\int \left(u^{\frac{3}{2}} - 14u^{\frac{1}{2}}\right)du$$

$$= \frac{1}{-3}\left(\frac{2}{5}\cdot u^{\frac{5}{2}} - 14\times\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}}\right) + c$$

$$= -\frac{2}{15}u^{\frac{5}{2}} + \frac{28}{9}u^{\frac{3}{2}} + c$$

• عوض $u = 2 - 3$ من الفرض

$$= \frac{-2}{15}(2-3x)^{\frac{5}{2}} + \frac{28}{9}(2-3x)^{\frac{3}{2}} + c$$

• إذن $\int (x+4)\sqrt{2-3x}\,dx = \frac{-2}{15}(2-3x)^{\frac{5}{2}} + \frac{28}{9}(2-3x)^{\frac{3}{2}} + c$

تحقق

أوجد التكامل في كل مما يلي :

4A) $\int (x+2)^9(x+1)\,dx$

4B) $\int \frac{2x}{(x-1)^2}\,dx$

ويمكن اســتعمال طريقة التكامل بالتعويض في إيجاد قيمة تكامل محدود بإجراء نفس خطوات التكامل غير المحدود مع الأخذ بعين الاعتبار تغيير حدود التكامل حسب الفرض كما في المثال التالي :

مثال 5 التكامل المحدود بالتعويض

أوجد قيمة $\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,dx$

- افرض أن $u = 2x - 1$
- أوجد $\frac{du}{dx}$

$$\frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

- عبر عن x بدلالة u

$$u = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{u+1}{2}$$

- أوجد الحدود الجديدة للتكامل بالتعويض في $u = 2x - 1$

عندما $x = 1$ $\Leftarrow$ $u = 2\,(1) - 1 = 1$

عندما $x = 5$ $\Leftarrow$ $u = 2\,(5) - 1 = 9$

- عوض في $\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,dx$ عن dx , $2x - 1$ وعن x وحدود التكامل الجديدة ثم أوجد قيمة التكامل.

$$\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,dx = \int_1^9 \frac{\frac{u+1}{2}}{\sqrt{u}}\,\frac{du}{2}$$

$$= \int_1^9 \frac{u+1}{2} \cdot \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}\,\frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\int_1^9 (u+1)\cdot u^{\frac{-1}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{4}\int_1^9 (u^{\frac{1}{2}} + u^{\frac{-1}{2}})\,du$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{2}{3}\,u^{\frac{3}{2}} + 2\,u^{\frac{1}{2}}\right)\right]_1^9$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}\,(9)^{\frac{3}{2}} + 2\,(9)^{\frac{1}{2}}) - (\frac{2}{3}\,(1)^{\frac{3}{2}} + 2\,(1)^{\frac{1}{2}})\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[(18+6) - \left(\frac{2}{3} + 2\right)\right] = \frac{16}{3}$$

إذن $\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,dx = \frac{16}{3}$

تحقق

5) أوجد قيمة: $\int_0^{\sqrt{2}} x^5\,(x^2+6)^6\,dx$

إرشـاد

التكامل المحدود بالتعويض

في إيجـاد قيمة التكامل المحدود بطريقة التعويـض يمكنك ايجاد التكامـل غيـر المحـدود بدلالـة المتغيـر x ومـن ثـم التعويض بحدي التكامل الأصليين.

ففي المثال 4 :

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x-1}}$$

$$= \int \frac{\frac{u+1}{2}}{\sqrt{u}}\,\frac{du}{2}$$

$$= \int \frac{u+1}{2}\,\frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}\,\frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\int (u+1)\cdot u^{\frac{-1}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{4}\int (u^{\frac{1}{2}} + u^{\frac{-1}{2}})\,du$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\,u^{\frac{3}{2}} + 2\,u^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\,(2x-1)^{\frac{3}{2}} + 2(2x-1)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}\,(2x-1)^{\frac{3}{2}} + 2(2x-1)^{\frac{1}{2}}\right]_1^5$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}\,(2\times5-1)^{\frac{3}{2}} + 2(2\times5-1)^{\frac{1}{2}}\right] - \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}\,(2\times1-1)^{\frac{3}{2}} + 2(2\times1-1)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\,(18+6) - \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}+2\right) = \frac{16}{3}$$

تمارين 5-6

مثال 1 أوجد التكامل غير المحدود في كل مما يلي :

1) $\int (x^3 + 3x^2)^8 (3x^2 + 6x)\, dx$

2) $\int x^4 (x+1)^4 (2x+1)\, dx$

مثال 2 أوجد التكامل غير المحدود في كل مما يلي :

3) $\int \frac{2x}{x^2 - 5}\, dx$

4) $\int \cos x\, e^{\sin x}\, dx$

5) $\int \sin^4 x \cos x\, dx$

6) $\int \frac{(\ln x)^3}{x}\, dx$

7) $\int \frac{1}{\cos^2 x} e^{\tan x}\, dx$

8) $\int (\sin x + \cos x)^2\, dx$

مثال 3 أوجد التكامل في كلٍّ مما يلي :

9) $\int (1-3x)\, e^{3x^2 - 2x}\, dx$

10) $\int \frac{3x-1}{6x^2 - 4x}\, dx$

11) $\int \frac{e^{\frac{x-1}{x}}}{x^2}\, dx$

12) $\int \cos(3\cos x) \sin x\, dx$

مثال 4 أوجد التكامل في كلٍّ مما يلي :

13) $\int x^3 \sqrt{x^2+2}\, dx$

14) $\int \frac{x^3}{\sqrt{(x^2+9)^3}}\, dx$

15) $\int 2x^5 (x^2+5)^4\, dx$

16) $\int \frac{4}{x \ln x}\, dx$

مثال 5 أوجد قيمة كل من التكاملات الآتية :

17) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x \tan^3 x\, dx$

18) $\int_0^{\pi} \sin^3 x \cos^4 x\, dx$

أوجد كلاً من التكاملات الآتية :

19) $\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\, dx$

20) $\int_4^9 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\, dx$

21) $\int \sin^3 x\, dx$

22) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\, dx$

23) إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة $y = f(x)$ عند أي نقطة عليه يعطى بالعلاقة $\frac{dy}{dx} = 3 \sin x \cos^2 x$ ، أوجد معادلة هذا المنحنى علماً بأنه يمر بالنقطة $(0\,,\,1)$

مسائل مهارات التفكير العليا

24) أثبت أن : $\int \sqrt[3]{2x^5 - x^3}\, dx = \frac{3}{16}(2x^2-1)^{\frac{4}{3}} + c$

25) أثبت أن : $\int \frac{(x+1)^5}{x^7}\, dx = \frac{-1}{6}\left(1+\frac{1}{x}\right)^6 + c$

5-7

التكامل بالأجزاء
Integration by Parts

أفكار الدرس

- تعرف واستعمال التكامل بالأجزاء لإيجاد تكامل غير محدود لبعض الدوال.
- استعمال التكامل بالأجزاء لإيجاد تكامل غير محدود لدوال أكثر من مرة.
- استعمال التكامل بالأجزاء لإيجاد تكامل محدود لبعض الدوال.

المعايير:

12A.10.10

المصطلحات:

التكامل بالأجزاء
integration by parts

تمهيد

تعلمت سابقا طريقة إيجاد مشتقة حاصل ضرب دالتين .

لتكن $u(x), v(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير x

1) أوجد $\frac{d}{dx}(u \cdot v)$

2) ضع $u\,v'$ موضوع القاعدة التي حصلت عليها

3) كامل الطرفين بالنسبة للمتغير x

4) عوض في الخطوة 3 عن $u' = \frac{du}{dx}$, $v' = \frac{dv}{dx}$ ثم بسط

اتباعك للخطوات السابقة بشكل صحيح يمكنك من استنتاج القاعدة الخاصة بتكامل ضرب دالتين إحداهما يسهل اشتقاقها u والأخرى يسهل تكاملها dv وهي :

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$$

وتسمى هذه القاعدة **التكامل بالأجزاء** (integration by parts)

قاعدة — التكامل بالأجزاء

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$$

والآن يمكنك استعمال قاعدة التكامل بالأجزاء لإيجاد تكاملات كان يصعب حلها بالطرق التي درستها سابقًا

مثال 1 : التكامل بالأجزاء

أوجد كلا من التكاملات الآتية

a) $\int x \cos x \, dx$

- **افرض u , dv**

$u = x \qquad dv = \cos x\,dx$

- **أوجد مشتقة u وتكامل dv بالنسبة للمتغير x**

$du = dx \qquad v = \sin x$

- **استعمل قاعدة التكامل بالأجزاء لإيجاد تكامل الدالة**

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$$

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx$$

$$= x\sin x + \cos x + c$$

إذن $\int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x + c$

b) $\int \frac{x}{e^{2x}}\,dx$

$$\int \frac{x}{e^{2x}}\,dx = \int x e^{-2x}\,dx$$

تنبيه

الاختيار الصحيح لـ u , dv يساعدك في ايجاد التكامل بالأجزاء لحاصل ضرب دالتين بسهولة، فمثلا في مثال 1 عند اختيار:

$u = \cos x$, $dv = x\,dx$

فإن:

$du = -\sin x$, $v = \frac{1}{2}x^2$

وبالتالي:

$\int x\cos x\,dx =$
$\frac{1}{2}x^2\cos x + \frac{1}{2}\int x^2 \sin x\,dx$

- وهذا مما يعقد حل هذا النوع من التكاملات

• افرض u , dv

$u = x \qquad dv = e^{-2x}\, dx$

• أوجد مشتقة u وتكامل dv بالنسبة للمتغير x

$du = dx \qquad v = \frac{-1}{2} e^{-2x}$

• استعمل قاعدة التكامل بالأجزاء لإيجاد تكامل الدالة

$$\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du$$

$$\int \frac{x}{e^{2x}}\, dx = \frac{-1}{2} x\, e^{-2x} - \int \frac{-1}{2} e^{-2x}\, dx$$

$$= \frac{-1}{2} x\, e^{-2x} + \frac{1}{4} e^{-2x} + c$$

إذن : $\int \frac{x}{e^{2x}}\, dx = \frac{-1}{2} x\, e^{-2x} + \frac{1}{4} e^{-2x} + c$

تحقق

1) أوجد كلا من التكاملات الآتية:

1A) $\int x \sin 2x\, dx$

1B) $\int x \ln 3x\, dx$

بعض التكاملات تتطلب تطبيق قاعدة التكامل بالأجزاء أكثر من مرة لإيجاد نتيجة التكامل

مثال 2 : التكامل بالأجزاء أكثر من مرة

أوجد $\int x^2 \sin x\, dx$

$\int x^2 \sin x\, dx$

• افرض u , dv

$u = x^2 \qquad dv = \sin x\, dx$

• أوجد مشتقة u وتكامل dv بالنسبة للمتغير x

$du = 2x\, dx \qquad v = -\cos x$

• استعمل قاعدة التكامل بالأجزاء لإيجاد تكامل الدالة

$$\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du$$

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x\, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

• استعمل قاعدة التكامل بالأجزاء مرة ثانية لإيجاد تكامل الدالة $\int 2x \cos x\, dx$

• افرض u , dv

$u = 2x \qquad dv = \cos x\, dx$

• أوجد مشتقة u وتكامل dv بالنسبة للمتغير x

$du = 2\, dx \qquad v = \sin x$

• استعمل قاعدة التكامل بالأجزاء لإيجاد تكامل الدالة

$$\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du$$

$$\int 2x \cos x\, dx = 2x \sin x - \int 2 \sin x\, dx$$

$$= 2x \sin x + 2 \cos x + c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

• بالتعويض من (2) في (1) نحصل على :

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x\, dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$$

إذن $\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$

تحقق

2) أوجد التكامل التالي $\int x^2 \sin x\, dx$

ويمكن استعمال طريقة التكامل بالأجزاء لحساب قيمة التكامل المحدود لحاصل ضرب دالتين وفق القاعدة

$$\int_a^b u\, dv = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b v\, du$$

مثال 3 : ## التكامل المحدود بالأجزاء

أوجد قيمة $\int_1^e \ln x\, dx$

$$\int_1^e \ln x\, dx$$

• افرض $u\,,\, dv$

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

• أوجد مشتقة u وتكامل dv بالنسبة للمتغير x

$$du = \frac{1}{x} \qquad v = x$$

• استعمل قاعدة التكامل بالأجزاء لإيجاد تكامل الدالة

$$\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du$$

$$\int_1^e \ln x\, dx = [x \ln x] - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x}\, dx$$

$$= [x \ln x - x]_1^e$$

• عوض بحدي التكامل لحساب قيمة التكامل

$$= [(e \ln e - e) - (1 \ln 1 - 1)]$$

$$= [(e - e) - (0 - 1)] = 1$$

إذن $\int_1^e \ln x\, dx = 1$

تحقق

3) أوجد قيمة $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} x^2 \sin 2x\, dx$

تمارين 5-7

مثال 1 أوجد كلًّا من التكاملات فيما يلي :

2) $\int x \cos 2x \, dx$

1) $\int x e^{5x} \, dx$

4) $\int x \sec^2 x \, dx$

3) $\int x^2 \ln x \, dx$

مثال 2 أوجد كلًّا من التكاملات الآتية :

6) $\int x^2 \cos 3x \, dx$

5) $\int x^2 \sin 2x \, dx$

مثال 3 أوجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية :

8) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \, dx$

7) $\int_{1}^{3} x \sqrt{x-1} \, dx$

أوجد كلًّا من التكاملات الآتية :

10) $\int x \sqrt[3]{3x-1} \, dx$

9) $\int e^x \sin(2x+1) \, dx$

12) $\int x^2 \sin 4x \, dx$

11) $\int (x^2+3) \cos x \, dx$

13) إذا كان $f(1) = 2$, $f(3) = 5$, $\int_{1}^{3} f(x) \, dx = 4$ ، فأوجد $\int_{1}^{3} x f'(x) \, dx$

مسائل مهارات التفكير العليا

14) أوجد $\int \sin x \cos x \, dx$

15) أوجد $\int e^x \cos x \, dx$

16) إذا كان $f(2) = 8$, $f(1) = 5$, $f'(1) = f'(2) = 3$, $\int_{1}^{2} f(x) \, dx = 5$ ، فاحسب قيمة $\int_{1}^{2} x^2 f''(x) \, dx$

17) أثبت أن: $\int \cos \sqrt{x+5} \, dx = 2\sqrt{x+5} \sin \sqrt{x+5} + 2\cos \sqrt{x+5} + c$

5-8 التكامل بالكسور الجزئية
Integration by Partial Fractions

أفكار الدرس

- كتابة الكسر الجبري على صورة مجموع كسرين جبريين أو أكثر
- استعمال الكسور الجزئية لإيجاد بعض التكاملات.

المعايير:

12A.2.3
12A.10.14

المصطلحات:

الكسور الجزئية
partial fractions
التكامل بالكسور الجزئية
integration by partial fractions

تمهيد

إذا أردنا إيجاد $\int \frac{7x+1}{x^2+x-6}\,dx$ قد نبحث عن طريقة لتبسيط الكسر الجبري $\frac{7x+1}{x^2+x-6}$ أو نفكر بطريقة التعويض إذا كان البسط مشتقة المقام وهذا غير متحقق وإذا فكرنا بطريقة التكامل بالأجزاء فلن تساعدنا في إيجاد التكامل لذلك نفكر بطريقة أخرى بحيث نكتب الكسر $\frac{7x+1}{x^2+x-6}$ بصورة تجعل تطبيق قواعد التكامل ممكنًا فيها وهي إعادة كتابة الكسر الجبري بتجزئته إلى كسرين جبريين أو أكثر وذلك عن طريق تحليل مقام الكسر الجبري إلى عوامل أولية خطية وتسمى هنا **الكسور الجزئية** (partial fractions) ومن ثم تطبيق قواعد التكامل وتسمى هذه الطريقة **التكامل بالكسور الجزئية** (integration by partial fractions) وسنقتصر في دراستنا على الحالات الآتية :

- كسر جبري مقامه كثيرة حدود وتقبل التحليل إلى عوامل خطية مختلفة
- كسر جبري مقامه يحتوي على عامل خطي مكرر
- كسر جبري فيه درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام ، ومقامه يقبل التحليل إلى عوامل خطية

مثال 1 : تكامل كسر جبري مقامه حاصل ضرب عاملين خطيين مختلفين

اكتب الكسر $\frac{7x+1}{x^2+x-6}$ على صورة ناتج جمع كسرين جبريين ثم أوجد $\int \frac{7x+1}{x^2+x-6}\,dx$

الخطوة 1 : اكتب الكسر $\frac{7x+1}{x^2+x-6}$ على صورة ناتج جمع كسرين جبريين

- حلل المقام إلى عوامله ثم عبر عن الكسر الجبري على صورة مجموع كسرين جبريين بسط أحدهما A وبسط الأخر B

$$\frac{7x+1}{x^2+x-6} = \frac{7x+1}{(x-2)\,(x+3)}$$

$$\frac{7x+1}{x^2+x-6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+6}$$

- اجمع الكسرين الجبريين

$$\frac{7x+1}{x^2+x-6} = \frac{A\,(x+3) + B\,(x-2)}{(x-2)\,(x+3)}$$

- أوجد قيمة A , B من تساوي الكسرين الجبريين

$$7\,x + 1 = A\,(x+3) + B\,(x-2)$$

عوض عن $x = -3$ لإيجاد قيمة B

$$7\,(-3) + 1 = A\,(-3+3) + B\,(-3-2)$$
$$-20 = 0 - 58$$
$$4 = B$$

عوض عن $x = 2$ لإيجاد قيمة A

$$7\,(2) + 1 = A\,(2+3) + B\,(2-2)$$
$$15 = 5A - 0$$
$$3 = B$$

عوض عن قيمة A , B في الخطوة 1

$$\frac{7x+1}{x^2+x-6} = \frac{3}{x-2} + \frac{4}{x+6}$$

الخطوة 2 : أوجد $\int \frac{7x+1}{x^2+x-6}\,dx$

أعد كتابة التكامل باستعمال الكسور الجزئية للكسر الجبري $\frac{7x+1}{x^2+x-6}$ من الخطوة 1 ثم أوجده

إرشاد

اختيار قيم x

لإيجاد قيم A , B في التكامل بالكسور الجزئية يمكن أن نعوض عن أي قيمة لـ x ولكن للسهولة نعوض عن أصفار المقام.

$$\int \frac{7x+1}{x^2+x-6}\,dx = \int \left(\frac{3}{x-2} + \frac{4}{x+3}\right) dx$$
$$= \int \frac{3}{x-2}\,dx + \int \frac{4}{x+3}\,dx$$
$$= 3\int \frac{1}{x-2}\,dx + 4\int \frac{1}{x+3}\,dx$$
$$= 3\ln|x-2| + 4\ln|x+3| + c$$

إذن $\int \frac{7x+1}{x^2+x-6}\,dx = 3\ln|x-2| + 4\ln|x+3| + c$

تحقق

1) اكتب الكسر $\frac{x+3}{x^2+6x+5}$ على صورة ناتج جمع كسرين جبريين ثم أوجد $\int \frac{x+3}{x^2+6x+5}\,dx$

مثال 2: تكامل كسر جبري مقامه عامل خطي مكرر

اكتب الكسر $\frac{2x-3}{(x-1)^2}$ على صورة ناتج جمع كسرين جبريين ثم أوجد تكامله

الخطوة 1 : اكتب الكسر الجبري $\frac{2x-3}{(x-1)^2}$ على صورة ناتج جمع كسرين جبريين

- عبر عن الكسر الجبري على صورة مجموع كسرين جبريين بسط أحدهما A وبسط الأخر B

$$\frac{2x-3}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

- اجمع الكسرين الجبريين

$$\frac{2x-3}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}$$

- أوجد قيمة A , B من تساوي الكسرين

$$2x-3 = (x-1) + B$$

- عوض $x = 1$ لإيجاد قيمة B

$$2(1)-3 = A(1-1) + B$$
$$-1 = 0 + B$$
$$-1 = B$$

- عوض $x = 0$ وعن قيمة B لإيجاد قيمة A

$$2(0)-3 = A(0-1) + B$$
$$-3 = -1A - 1$$
$$-3+1 = -A$$
$$2 = A$$

- عوض عن قيمة A , B في الخطوة 1

$$\frac{2x-3}{(x-1)^2} = \frac{2}{x-1} + \frac{-1}{(x-1)^2}$$

الخطوة 2 : أوجد $\int \frac{2x-3}{(x-1)^2}\,dx$

أعد كتابة التكامل باستعمال الكسور الجزئية للكسر الجبري $\frac{2x-3}{(x-1)^2}$ من الخطوة 1 ثم أوجده

$$\int \frac{2x-3}{(x-1)^2}\,dx = \int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{-1}{(x-1)^2}\right) dx$$
$$= \int \frac{2}{x-1}\,dx + \int \frac{-1}{(x-1)^2}\,dx$$
$$= 2\int \frac{1}{x-1}\,dx - 1\int (x-1)^{-2}\,dx$$
$$= 2\ln|x-1| - (-1)(x-1)^{-1} + c$$
$$= 2\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + c$$

إذن $\int \frac{2x-3}{(x-1)^2}\,dx = 2\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + c$

تحقق

2) اكتب الكسر $\frac{2x+5}{(x-1)^2}$ على صورة ناتج جمع كسرين جبريين ثم أوجد تكامله.

عندما تكون درجة البســط أكبر من أو تســاوي درجة المقام في الكســر الجبري فإنه يتوجب علينا إجراء عملية القسـمة لتبسيط الكسر الجبري ومن ثم إعادة كتابة الكسر الجبري الجديد على صورة كسور جزئية .

مثال 3 : تكامل كسر جبري فيه درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام

a) اكتب الكسر $\frac{2x^3-2x^2+1}{x^2-x}$ على صورة ناتج جمع كسور جزئية ثم أوجد تكامله

الخطوة 1 : اكتب الكسر $\frac{2x^3-2x^2+1}{x^2-x}$ على صورة ناتج جمع كسور جزئية

- أوجد ناتج قسمة $2x^3-2x^2+1$ على x^2-x

$$\begin{array}{r|l} & 2x \\ \hline x^2-x & 2x^3-2x^2+1 \\ & 2x^3-2x^2 \\ \hline & 0+0+1 \end{array}$$

$$\frac{2x^3-2x^2+1}{x^2-x} = 2x + \frac{1}{x^2-x} \quad \dots\dots\dots (1)$$

- عبر عن الكسر الجبري $\frac{1}{x^2-x}$ على صورة مجموع كسرين جبريين بسط أحدهما A وبسط الأخر B

$$\frac{1}{x^2-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \quad \dots\dots\dots (2)$$

- اجمع الكسرين الجبريين

$$\frac{1}{x^2-x} = \frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)}$$

- أوجد قيمة A, B من تساوي الكسرين الجبريين ثم عوض عن قيمة A, B في (2)

$$1 = A(x-1) + Bx$$

- عوض عن $x=1$ لإيجاد قيمة B

$$1 = A(1-1) + B(1)$$
$$1 = 0 + B$$
$$1 = B$$

- عوض عن $x=0$ لإيجاد قيمة A

$$1 = A(0-1) + B(0)$$
$$1 = -1A + 0$$
$$-1 = A$$

$$\frac{1}{x^2-x} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1} \quad \dots\dots\dots (3)$$

- عوض عن (3) في (1)

$$\frac{2x^3-2x^2+1}{x^2-x} = 2x + \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}$$

الخطوة 2 : أوجد $\int \frac{2x^3-2x^2+1}{x^2-x}\, dx$

أعد كتابة التكامل باستعمال الكسور الجزئية للكسر الجبري $\frac{2x^3-2x^2+1}{x^2-x}$ من الخطوة 1 ثم أوجده

$$\int \frac{2x^3-2x^2+1}{x^2-x}\, dx = \int \left(2x + \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}\right) dx$$
$$= \int 2x\, dx + \int \frac{1}{x}\, dx + \int \frac{1}{x-1}\, dx$$
$$= x^2 - \ln|x| + \ln|x-1| + c$$

إذن $\int \frac{2x^3-2x^2+1}{x^2-x}\, dx = x^2 - \ln|x| + \ln|x-1| + c$

تحقق

3) اكتب الكسر الجبري $\frac{x^3}{x^2 - 1}$ على صورة ناتج جمع كسور جزئية ثم أوجد تكامله.

ويمكن إيجاد قيمة تكامل محدود لدالة باستعمال طريقة الكسور الجزئية

مثال 4: التكامل المحدود بالكسور الجزئية

أوجد قيمة $\int_3^4 \frac{6x - 2}{(x - 2)(x + 3)}\, dx$

الخطوة 1 : اكتب الكسر الجبري $\frac{6x - 2}{(x - 2)(x + 3)}$ على صورة ناتج جمع كسور جزئية

- عبر عن الكسر الجبري $\frac{6x - 2}{(x - 2)(x + 3)}$ على صورة مجموع كسرين جبريين بسط أحدهما A وبسط الأخر B

$$\frac{6x - 2}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 3}$$

- اجمع الكسرين الجبريين

$$\frac{6x - 2}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{A(x + 3) + B(x - 2)}{(x - 2)(x + 3)}$$

- أوجد قيمة A , B من تساوي الكسرين الجبريين

$$6x - 2 = A(x + 3) + B(x - 2)$$

- عوض عن $x = -3$ لإيجاد قيمة B

$$6(-3) - 2 = A(-3 + 3) + B(-3 - 2)$$
$$-20 = 0 - 5B$$
$$4 = B$$

- عوض عن $x = 2$ لإيجاد قيمة A

$$6(2) - 2 = A(2 + 3) + B(-2 - 2)$$
$$10 = 5A - 0$$
$$2 = A$$

- عوض عن قيمة A , B في الخطوة 1

$$\frac{6x - 2}{(x - 2)(x + 3)} = \frac{2}{x - 2} + \frac{4}{x - 3}$$

الخطوة 2 : أوجد $\int_3^4 \frac{6x - 2}{(x - 2)(x + 3)}\, dx$

أعد كتابة التكامل باستعمال الكسور الجزئية للكسر الجبري $\frac{6x - 2}{(x - 2)(x + 3)}$ من الخطوة 1 ثم أوجد التكامل

$$\int_3^4 \frac{6x - 2}{(x - 2)(x + 3)}\, dx = \int_3^4 \frac{2}{x - 2}\, dx + \int_3^4 \frac{4}{x + 3}\, dx$$

$$= \left[2 \ln|x - 2| + 4 \ln|x + 3|\right]_3^4$$

$$= \left[(2 \ln|4 - 2| + \ln|4 + 3|) - (2\ln|3 - 2| + 4 \ln|3 + 3|)\right]$$

$$= 2 \ln 2 + 4 \ln 7 - 2 \ln 1 - 4 \ln 6 \cong 2.003$$

إذن قيمة $\int_3^4 \frac{6x - 2}{(x - 2)(x + 3)}\, dx$ تساوي 2.003 تقريبًا

تحقق

4) أوجد قيمة $\int_{-1}^0 \frac{7x - 11}{(x + 2)(x + 3)}\, dx$

تمارين 5-8

مثال 1-3 اكتب الكسر الجبري في كل مما يلي على صورة ناتج جمع كسرين جبريين ثم أوجد تكامله

1) $\frac{5x-4}{6x^2-6x-12}$

2) $\frac{6x}{x^2-4x-12}$

3) $\frac{4x+1}{(x-2)^2}$

4) $\frac{2x-14}{x^2-10x+25}$

5) $\frac{2x^3+2x^2+1}{x^2+x}$

6) $\frac{2x^3-3x^2+1}{x^2}$

مثال 4 أوجد قيمة كل من التكاملات الآتية

7) $\int_{2}^{3} \frac{8x-3}{2x^2-x}\,dx$

8) $\int_{-1}^{1} \frac{x+3}{x^2+6x+5}\,dx$

9) $\int \frac{x^2+1}{x^2-x}\,dx$

10) $\int \frac{4x^2-5x-15}{x^3-4x^2-5x}\,dx$

مسائل مهارات التفكير العليا

11) أوجد $\int \frac{x-5}{x^2(x+1)}\,dx$

12) أوجد $\int \frac{e^x}{e^{2x}-e^x-2}\,dx$

13) أثبت أن $\int \frac{3x^4+3x^3-5x^2+x-1}{x^2+x-2}\,dx = x^3+x+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+c$

اختبار الوحدة الخامسة

1) إذا كان $g(x) = \int \cos x \, dx$ ، فأي مما يلي قيمة $g'(\frac{\pi}{2})$ ؟

a) 1

b) 0

c) –1

d) $\frac{\pi}{2}$

2) إذا كان $\int f(x) \, dx = x^3 + 2x - 3$ ، أوجد $f(2)$.

a) 2

b) 10

c) 14

d) 28

3) إذا كان $f'(x) = 6x^2 - 2x$, $f(2) = 7$ ، فأي مما يلي $f(x)$ ؟

a) $2x^3 - x^2 + 5$

b) $2x^3 - x^2 - 5$

c) $2x^3 - x^2 + 19$

d) $2x^3 - x^2 - 19$

4) إذا كان $\int_{-2}^{1} f(x) \, dx = 3$, $\int_{1}^{4} f(x) \, dx = -7$ ،

فما قيمة $\int_{4}^{-2} f(x) \, dx$ ؟

a) –4

b) 4

c) 10

d) –10

5) أي مما يلي قيمة $\int_{-1}^{2} |x| \, dx$ ؟

a) 0

b) 4

c) 1

d) 2

6) إذا كان $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \, dx = b$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx = a$ ، فما قيمة $a + b$ ؟

a) 1

b) 0

c) -2π

d) 2π

7) إذا كان $\int_{1}^{7} h(x) \, dx = 12$, $\int_{1}^{5} 2h(x) \, dx = 10$ ،

فما قيمة $\int_{7}^{5} h(x) \, dx$ ؟

a) 2

b) 22

c) –7

d) 7

8) أي مما يلي يمثل دالة مقابلة للدالة $f(x) = x(x^2 + 1)$ ؟

a) $F(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 1)^2 + c$

b) $F(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 1)^2$

c) $F(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^2 + c$

d) $F(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^2$

9) إذا كانت $F(x) = x^2 + x$ دالة مقابلة للدالة $f(x)$ ، فأي مما يلي قيمة $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ ؟

a) 12

b) 8

c) 4

d) $13\frac{1}{3}$

10) بين أن الدالة $F(x) = \sqrt{x^2 + 6x}$ هي الدالة المقابلة للدالة $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{(x^2+6x)}}$

11) إذا علمت أن $\int (f''(x) + f'(x) + f(x))\,dx = x^3 + 2ax^2 + 6$ وكان $f(1) = 6$ $f'(1) = 3$ $f''(1) = 2$ ، فأوجد قيمة a

أوجد كلًّا من التكاملات غير المحدودة التالية:

12) $\int \log_2 7\,dx$

13) $\int \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x^2} + x\right)^2 dx$

14) $\int \frac{2x-3}{\sqrt[3]{4x^2-12x+9}}\,dx$

15) $\int \frac{\sec^2 x - \tan^2 x}{\sqrt{x}}\,dx$

16) $\int \frac{\cos^2 x - 5}{1 - \sin^2 x}\,dx$

أوجد كلًّا من التكاملات التالية:

17) $\int \frac{7}{e^{9x} - 13}\,dx$

18) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x - 1}\,dx$

19) $\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x}\,dx$

20) $\int e^{x-e}\,dx$

21) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$

22) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$

أوجد كلًّا من التكاملات التالية:

23) $\int \cot x\,dx$

24) $\int \frac{1 + \tan^2 x}{1 + \tan x}\,dx$

25) $\int \frac{\cot x}{\ln \sin x}\,dx$

26) $\int \frac{1}{x^8 - x}\,dx$

27) $\int \tan^3 x\,dx$

28) $\int \frac{\cot(\ln x)}{x}\,dx$

29) $\int_{1}^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1 + \ln x}}$

30) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x - \sin^3 x}\,dx$

31) $\int \frac{x+1}{x(x-1)^2}\,dx$

32) $\int \frac{5x-2}{7x+9}\,dx$

33) $\int_{1}^{2} \frac{x^3 + 4x - 8}{x^2 - 9}\,dx$

34) أوجد معادلة الدالة كثيرة الحدود y إذا كان $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x^2 + 2$ وكان ميل المماس لمنحنى الدالة عند نقطة عليها $(1, 3)$ يساوي 2

35) إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة y عند نقطة عليها يساوي $2x(x-1)$ ، فأوجد معادلة هذا المنحنى علمًا بأنه يمر بالنقطة $(0, 1)$

الوحدة 6

تطبيقات التكامل

Applications of Integration

أفكار الوحدة

- حساب المساحة باستعمال التكامل المحدود .
- حساب التكامل المحدود لدالة من المساحة .
- إيجاد حجم المجسم الدوراني حول محور x باستعمال التكامل المحدود .
- حل مسائل فيزيائية باستعمال التكامل.
- تكوين وحل معادلات تفاضلية بسيطة بطريقة فصل المتغيرات.
- حل مسائل فيزيائية وحياتية تتضمن معادلات تفاضلية بسيطة قابلة للفصل.

هناك العديد من التطبيقات الحياتية التي يستعمل فيها التكامل المحدود ، مثل التطبيقات الهندسية والاقتصادية والفيزيائية والعلوم المختلفة ، حيث يعالج التكامل المحدود كيفية إيجاد مساحات مناطق محدودة بمنحنيات يصعب حسابها بالقوانين البسيطة كحساب مساحة واجهة مبنى لإيجاد تكلفة بنائه أوتكلفة دهانه ، وكذلك حساب الحجوم الدورانية والكميات الفيزيائية . كما يدخل التكامل المحدود في حل المسائل الحياتية المتضمنة النمو والاضمحلال والمسافة والسرعة والعجلة .

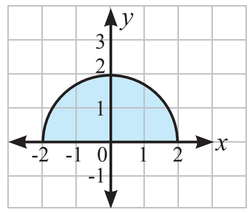
التهيئة للوحدة السادسة

انظر للمراجعة ثم أجب عن الاختبار الآتي :

مراجعة

مثال 1 :

أوجد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور.



المنطقة المظللة تمثل نصف دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها يساوي وحدتين، وعليه فإن مساحة المنطقة المظللة هي :

$$A = \frac{1}{2}\pi r^2$$

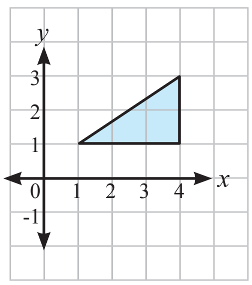
$$= \frac{1}{2}\pi(2)^2 \approx 6.3$$

إذن مساحة المنطقة المظللة تساوي تقريبا 6.3 وحدة مربعة

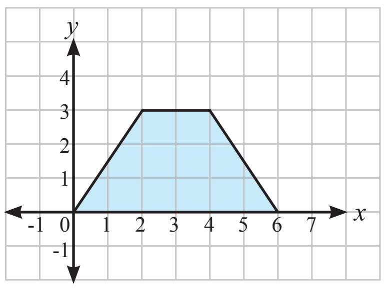
اختبار

أوجد مساحة المنطقة المظللة في كل مما يلي :

1)

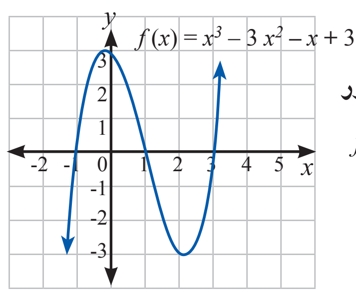


2)



مثال 2 :

معتمدا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الدالة $f(x)$ أوجد قيمة $\int_1^3 f(x)\,dx$



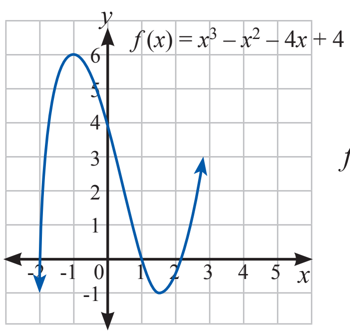
$$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 (x^3 - 3x^2 - x + 3)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_1^3$$

$$= \frac{-9}{4} - \frac{7}{4} = -4$$

إذن $\int_1^3 f(x)\,dx = -4$

معتمدا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الدالة $f(x)$ أوجد قيمة كل مما يلي :



3) $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$

4) $\int_{1}^{2} f(x)\,dx$

5) $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$

مثال 3 :

إذا كانت دالة ميل منحنى الدالة $f(x)$ هي $f'(x) = 2x + 3$ ومنحنى الدالة $f(x)$ يمر بالنقطة $(0, 1)$. أوجد $f(x)$

$$f(x) = \int (2x + 3)\,dx = x^2 + 3x + c$$

بما أن الدالة $f(x)$ تمر بالنقطة $(0, 1)$ فإن

$1 = 0 + 0 + c$

$c = 1$

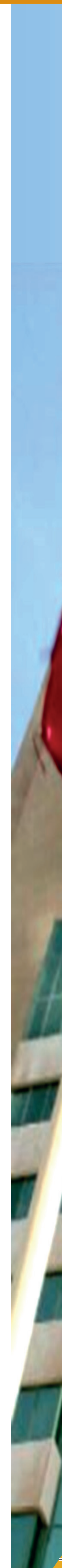
$f(x) = x^2 + 3x + 1$

إذن $f(x) = x^2 + 3x + 1$

6) إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة $y = f(x)$ عند أي نقطة عليه (x, y) يعطى بالقاعدة $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 2$

أوجد قاعدة الدالة $f(x)$ علمًا بأن منحناها يمر بالنقطة $(3, -2)$

7) أوجد قاعدة الدالة $f(x)$ إذا علمت أن ميل المماس عند أي نقطة عليه (x, y) هو $\frac{5}{\sqrt{x}}$ وأن منحنى الدالة $f(x)$ يمر بالنقطة $(4, 1)$



6-1

المساحة تحت المخطط البياني لدالة
Area Under The Curves

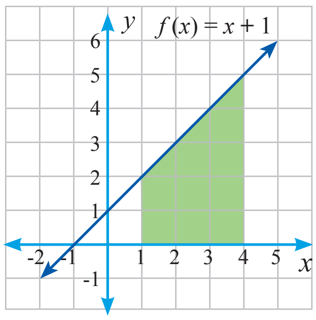
أفكار الدرس
- حساب مساحة المنطقة المحصورة بين المخطط البياني لدالة ومستقيمين رأسيين ومحور x
- حساب مساحة المنطقة المحصورة بين المخطط البياني لدالة ومحور x
- حساب قيمة التكامل المحدد لدالة من المساحة .

المعايير:
12A.10.5
12A.10.7
12A.14.1

المصطلحات:
المساحة تحت المنحنى
area under the curve

تمهيد

درست سابقا كيفية حساب مساحات المناطق المستوية المضلعة ، مثل : المستطيل والمثلث وشبه المنحرف وغيرها من المناطق المستوية المنتظمة.



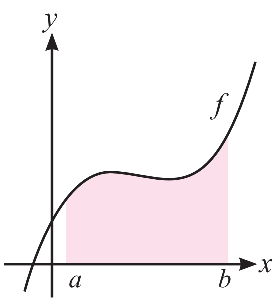
في الشكل المجاور ؛ المنطقة المظللة هي المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ ومحور x والمستقيمين $x = 1$, $x = 4$

1) احسب مساحة المنطقة المظللة.

2) احسب $\int_1^4 f(x)\, dx$

3) ماذا تلاحظ من النتائج السابقة ؟

لاحظ من إجابتك الصحيحة على الأسئلة السابقة أن مساحة المنطقة المظللة تساوي قيمة التكامل المحدود للدالة على الفترة $[1, 4]$ ، كما تلاحظ أن المنطقة المظللة تمثل منطقة مستوية منتظمة تقع فوق محور x .



ولكن عندما تكون المنطقة المظللة تحت منحنى الدالة $f(x)$ كما في الشكل المجاور تمثل منطقة مستوية غير منتظمة فإننا نحتاج لحساب مساحة المنطقة المظللة تحت المنحنى والواقعة فوق محور x والمحدودة بالمستقيمين الرأسيين $x = a$, $x = b$ باستعمال التكامل المحدود على الفترة $[a, b]$

وهذا يقودنا إلى مفهوم **المساحة تحت المخطط البياني لدالة** (area under the curve) كما يلي :

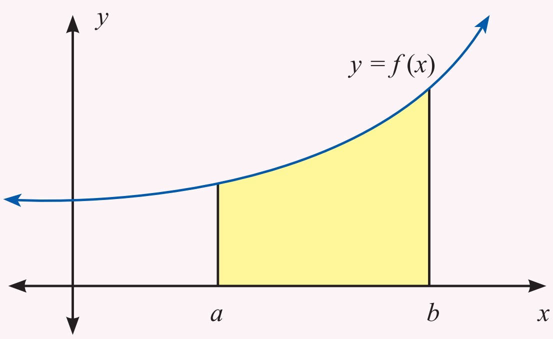
مفهوم — المساحة تحت المخطط البياني لدالة وفوق محور x

التعبير اللفظي : إذا كانت $f(x)$ دالة قابلة للتكامل وموجبة على الفترة $[a, b]$ فإن مساحة المنطقة المحدودة بالمخطط البياني للدالة $f(x)$ ، ومحور x ، والمستقيمين $x = b$, $x = a$ هي قيمة التكامل المحدود للدالة على هذه الفترة .

الرموز :

$$A = \int_a^b f(x)\, dx \quad , \quad f(x) > 0 \,, x \in [a, b]$$

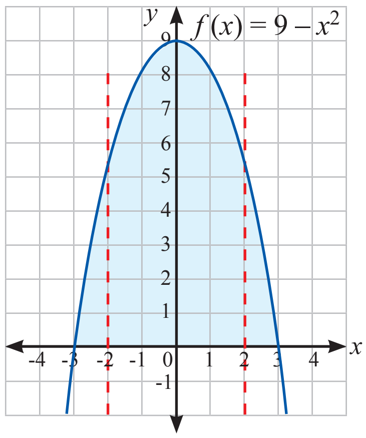
نموذج :



مثال 1

مساحة المنطقة فوق محور x والمحصورة بين منحنى دالة ومستقيمين رأسيين

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)=9-x^2$ ومحور x والمستقيمين $x=-2, x=2$



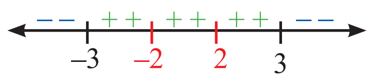
• أوجد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الدالة مع محور x

$$9-x^2=0$$

$$\Rightarrow 9=x^2$$

$$\Rightarrow x=\pm 3 \notin [-2 , 2]$$

• ادرس إشارة الدالة $f(x)$ بين المستقيمين $x=-2 , x=2$



تلاحظ أن إشارة الدالة $f(x)$ موجبة بين المستقيمين $x=-2 , x=2$ كما هو موضح في الشكل بالأعلى.

• استعمل قاعدة المساحة.

$$A = \int_{-2}^{2} f(x)\, dx$$

$$A = \int_{-2}^{2} (9-x^2)\, dx$$

$$= \left[9x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \left(9(2)-\frac{2^3}{3}\right)-\left(9(-2)-\frac{(-2)^3}{3}\right)=\frac{92}{3}$$

إذن مساحة المنطقة المحصورة هي $\frac{92}{3}$ وحدة مربعة

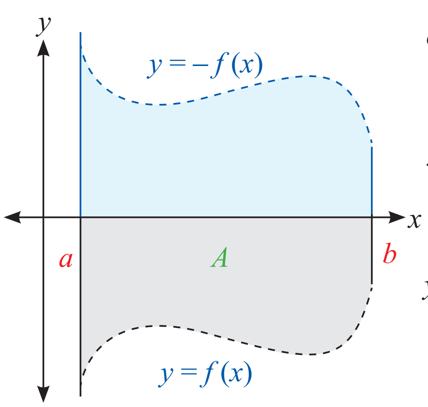
تحقق

1) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)=3x^2+1$ ومحور x والمستقيمين $x=0 , x=2$

تنبيه

إذا كان منحنى $y=f(x)$ يقع كليا تحت محور x فإن منحنى $y=-f(x)$ يقع كليا فوق محور x وذلك بالانعكاس في المحور x

إذا كانت الدالة $y=f(x)$ قابلة للتكامل على الفترة $[a, b]$ وكان منحنى الدالة يقع كلياً تحت محور x في هذه الفترة كما في الشكل المجاور :



فإن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $y=f(x)$ ومحور x والمستقيمين $x=a , x=b$ يمكن حسابها كما يأتي :

المساحة A = مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $y=-f(x)$ (الواقع فوق محور x) ومحور x والمستقيمين $x=a , x=b$

وبالاعتماد على المفهوم السابق فإن :

$$A=\int_{a}^{b} -f(x)\, dx = -\int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

وهذه القيمة تمثل القيمة المطلقة لتكامل الدالة $y=f(x)$ على الفترة $[a, b]$ والمفهوم التالي يوضح ذلك .

مفهوم — المساحة فوق المخطط البياني لدالة وتحت محور x

التعبير اللفظي : إذا كانت $f(x)$ دالة قابلة للتكامل وسالبة على الفترة $[a, b]$ فإن مساحة المنطقة المحدودة بالمخطط البياني للدالة $f(x)$، ومحور x، والمستقيمين $x = a$, $x = b$ هي القيمة المطلقة للتكامل المحدود للدالة على هذه الفترة .

الرموز : $A = \left| \int_a^b f(x)\, dx \right|$

مثال 2 — مساحة المنطقة تحت محور x والمحصورة بين منحنى دالة ومستقيمين رأسيين

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x) = 1 - \frac{2x}{3}$ ومحور x والمستقيمين $x = 6$, $x = 9$

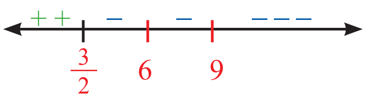
- أوجد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الدالة مع محور x

$$1 - \frac{2x}{3} = 0$$

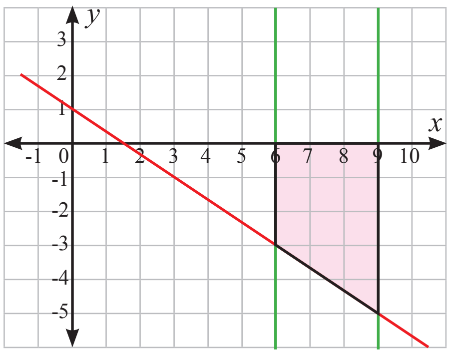
$$\Rightarrow x = \frac{3}{2} \notin [6, 9]$$

- ادرس إشارة الدالة $f(x)$ بين المستقيمين

$x = 6$, $x = 9$



تلاحظ أن إشارة الدالة $f(x)$ سالبة بين المستقيمين $x = 6$, $x = 9$ كما هو موضح في الشكل المجاور.



- أوجد المساحة المطلوبة.

$$A = \left| \int_6^9 f(x)\, dx \right| = \left| \int_6^9 (1 - \frac{2x}{3})\, dx \right| = \left| [x - \frac{x^2}{3}]_6^9 \right|$$

$$= \left| (9 - \frac{9^2}{3}) - (6 - \frac{6^2}{3}) \right| = \left| (-18) - (-6) \right| = 12$$

إذن مساحة المنطقة المحصورة هي 12 وحدة مربعة

إرشاد

يمكنك التحقق من صحة الحل في مثال 2 بحساب مساحة المنطقة المظللة (شبه المنحرف) كما يلي:

$b_1 = 3, b_2 = 5, h = 3$

$A = \frac{(b_1 + b_2)}{2} \times h$

$= \frac{(3 + 5)}{2} \times 3 = 12$

تحقق

2) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المخطط البياني للدالة $f(x) = 4x^3$ ومحور x والمستقيمين $x = -2$, $x = 0$

إذا كانت $f(x)$ دالة قابلة للتكامل على الفترة $[a, b]$ ووقع جزء منها فوق محور x والجزء الآخر تحت محور x في هذه الفترة فإن مساحة المنطقة المحصورة بالمخطط البياني للدالة $f(x)$، ومحور x، ومستقيمين رأسيين $x = a$, $x = b$ يمكن حسابها اعتمادا على ما سبق بالخطوات التالية :

1 - أوجد أصفار الدالة $f(x)$ في الفترة $[a, b]$.

2- جزئ الفترة $[a, b]$ إلى فترات جزئية باستعمال أصفار الدالة .

3- أوجد المساحة المطلوبة باستعمال القيمة المطلقة للتكامل المحدود للدالة $f(x)$ على كل فترة جزئية .

مثال 3

مساحة أكثر من منطقة محصورة بين منحنى دالة ومحور x ومستقيمين رأسيين

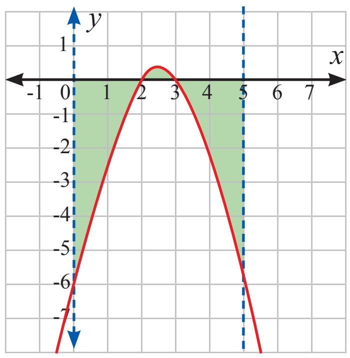
أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x) = 5x - x^2 - 6$ والمستقيم $x = 5$ ومحور y ومحور x

• **أوجد أصفار الدالة**

$$5x - x^2 - 6 = 0$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$(x - 3)(x - 2) = 0$$
$$x = 3 \; , \; x = 2$$

• **أوجد الفترات الجزئية باستعمال أصفار الدالة.**

بما أن المنطقة المطلوب إيجاد مساحتها محصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ والمستقيم $x = 5$ ومحور y فإن الفترة التي تقع ضمنها هذه المنطقة هي $[0, 5]$ وحيث أن $2, 3 \in [0, 5]$ فيكون لدينا ثلاث مناطق تقع ضمن ثلاث فترات جزئية وهي $[3, 5]$, $[2, 3]$, $[0, 2]$ كما يتضح من الشكل البياني أدناه .



• **أوجد المساحة باستعمال القيمة المطلقة للتكامل المحدود.**

$$A = \left|\int_0^2 f(x)\,dx\right| + \left|\int_2^3 f(x)\,dx\right| + \left|\int_3^5 f(x)\,dx\right|$$

$$= \left|\int_0^2 (5x - x^2 - 6)\,dx\right| + \left|\int_2^3 (5x - x^2 - 6)\,dx\right| + \left|\int_3^5 (5x - x^2 - 6)\,dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 6x\right]_0^2\right| + \left|\left[\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 6x\right]_2^3\right| + \left|\left[\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 6x\right]_3^5\right|$$

$$= \left|\frac{-14}{3}\right| + \left|\frac{1}{6}\right| + \left|\frac{-14}{3}\right|$$

$$= \frac{14}{3} + \frac{1}{6} + \frac{14}{3} = 9.5$$

إذن مساحة المنطقة المحصورة هي 9.5 وحدة مربعة

تحقق

3) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين $f(x) = 2 - x$ والمستقيمين $x = 1 \; , \; x = 5$ ومحور x

إرشـاد

معادلة المحور y هي $x = 0$

من المفهومين السابقين نستنتج ما يلي :

إذا كانت $f(x)$ دالة قابلة للتكامل على الفترة $[a, b]$ فإن مساحة المنطقة المحصورة بالمخطط البياني للدالة $f(x)$ ، ومحور x ، على هذه الفترة تعطى بالقاعدة :

$$A = \int_a^b |f(x)|\,dx = \begin{cases} \int_a^b f(x)\,dx & ; f(x) \geq 0 \\ -\int_a^b f(x)\,dx & ; f(x) < 0 \end{cases}$$

مثال 4 مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة ومحور x

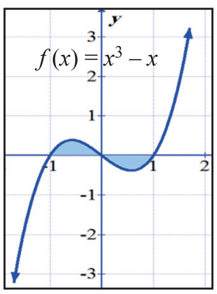
أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x) = x^3 - x$ ومحور x

- **أوجد أصفار الدالة**

$$x^3 - x = 0$$
$$\Rightarrow x(x^2 - 1) = 0$$
$$\Rightarrow x = 0 , \pm 1$$

- **أوجد الفترات الجزئية باستعمال أصفار الدالة ثم ادرس إشارة الدالة في كل فترة جزئية.**

إشارة الدالة $f(x)$: $- - \;|\; + + \;|\; - - \;|\; + +$ عند النقاط $-1 \quad 0 \quad 1$



تلاحظ أن : $f(x) > 0$ في الفترة $[-1, 0]$

$f(x) < 0$ في الفترة $[0, 1]$

كما يتضح ذلك في الشكل المجاور .

- **أوجد المساحة المطلوبة.**

$$A = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx - \int_{0}^{1} (x^3 - x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{4} - \left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

إذن مساحة المنطقة المحصورة هي0.5 وحدة مربعة

تحقق

4) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ ومحور x

إرشاد

يمكنك حل المثال 4 باستعمال القيمة المطلقة مباشرة دون دراسة الإشارة كما يلي :

$$A = \left|\int_{-1}^{0}(x^3 - x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{1}(x^3 - x)\,dx\right| = \frac{1}{2}$$

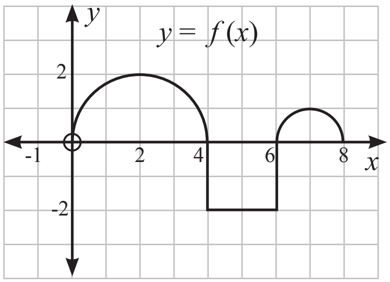
استنتجنا سابقاً أن : $A = \int_a^b |f(x)|\,dx$ ومنها نحصل على النتيجة التالية لحساب التكامل المحدود للدالة $f(x)$ على الفترة $[a, b]$ بدلالة المساحة .

مفهوم حساب التكامل المحدود بدلالة المساحة

$$\int_a^b f(x)\,dx = \begin{cases} A \;; & \text{إذا كانت المنطقة فوق محور } x \\ -A \;; & \text{إذا كانت المنطقة تحت محور } x \end{cases}$$

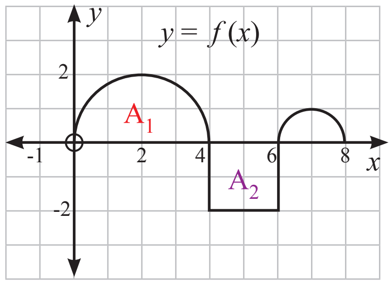
مثال 5 حساب التكامل المحدود من المساحة

من الشكل المبين أدناه ، أوجد ما يلي :



a) $\int_0^6 f(x)\, dx$

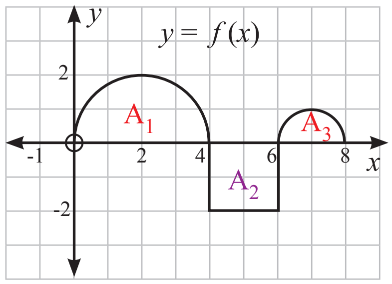
$$\int_0^6 f(x)\, dx = A_1 + (-A_2) = \frac{\pi (2)^2}{2} + [-(2 \times 2)] \approx 2.3$$



b) $\int_0^8 f(x)\, dx$

$$\int_0^8 f(x)\, dx = A_1 + (-A_2) + A_3$$

$$= \frac{\pi (2)^2}{2} + [-(2 \times 2)] + \frac{\pi (1)^2}{2} \approx 3.9$$



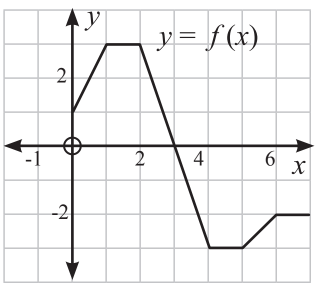
تحقق

5) من الشكل المجاور، أوجد ما يلي :

a. $\int_0^3 f(x)\, dx$

b. $\int_2^4 f(x)\, dx$

c. $\int_0^7 f(x)\, dx$



تمارين 6-1

مثال 1-3 أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ ومحور x والمستقيمين الرأسيين في كل مما يأتي :

1) $f(x) = x - 3 \ , \ x = 4 \ , \ x = 6$

2) $f(x) = x^3 \ , \ x = -2 \ , \ x = 0$

3) $f(x) = 2 - x \ , \ x = 1 \ , \ x = 5$

4) $f(x) = e^x \ , \ y - axis \ , \ x = 2$

5) $f(x) = \frac{1}{x} \ , \ x = e \ , \ x = e^2$

6) $f(x) = \tan x \ , \ x = \frac{-\pi}{4} \ , \ x = 0$

7) $f(x) = \sin x - \frac{1}{2} \ , \ x = \frac{-\pi}{2} \ , \ x = \frac{\pi}{2}$

مثال 4 أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة المعطاة ومحور x

8) $f(x) = x^2 - 4$

9) $f(x) = x^3 - 9x$

10) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$

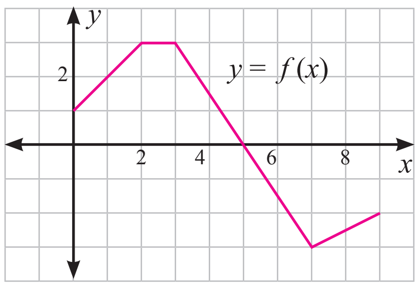
أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة المعطاة ومحور x ومحور y

11) $f(x) = e^{x-2} - e$

12) $f(x) = 2 - \sqrt{x}$

13) $f(x) = 5 \ \text{In} \ (x + 3)$

مثال 5 الشكل الموضح أدناه يمثل بيان الدالة $f(x)$ احسب كلاً من التكاملات التالية :



14) $\int_0^2 f(x) \, dx$

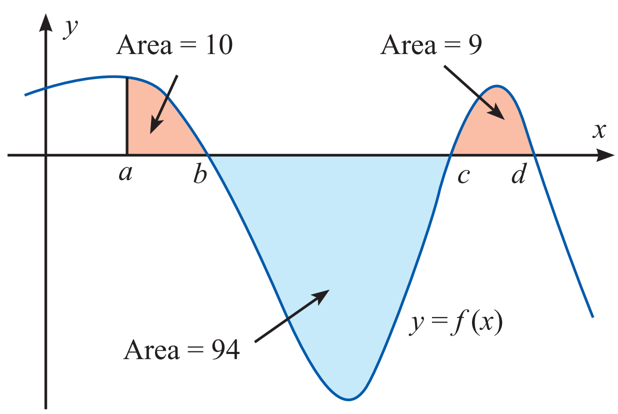
15) $\int_0^5 f(x) \, dx$

16) $\int_5^7 f(x) \, dx$

17) $\int_0^9 f(x) \, dx$

18) $\int_0^9 |f(x)| \, dx$

استخدم المساحات الموضحة في الشكل أدناه لإيجاد ما يلي :



19) $\int_a^b f(x) \, dx$

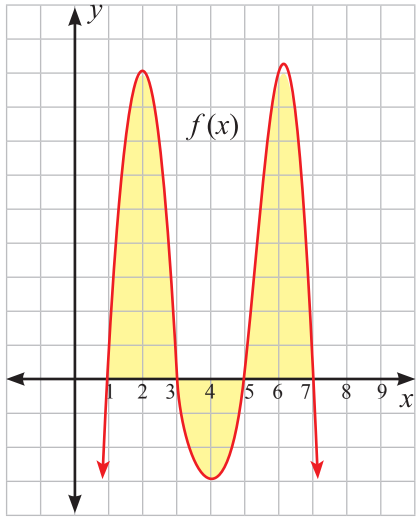
20) $\int_b^c f(x) \, dx$

21) $\int_a^c f(x) \, dx$

22) $\int_a^d f(x) \, dx$

23) $\int_a^d |f(x)| \, dx$

24) الشكل الموضح أدناه يمثل بيان الدالة $f(x)$ والمنطقة المحصورة بين منحنى الدالة ومحور x



a. أيهما أكبر، قيمة المساحة الكلية للمنطقة المظللة أم قيمة التكامل $\int_1^7 f(x)\,dx$ ؟ لماذا؟

b. عبر عن قيمة المساحة الكلية للمنطقة المظللة باستعمال التكامل المحدود.

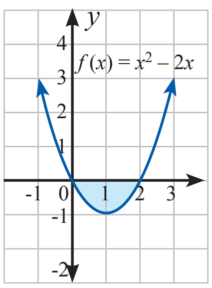
c. بشكل عام أي مما يلي صحيح؟

$i)\ A > \int_a^b f(x)\,dx$ $ii)\ A < \int_a^b f(x)\,dx$ $iii)\ A \geq \int_a^b f(x)\,dx$ $iv)\ A \leq \int_a^b f(x)\,dx$

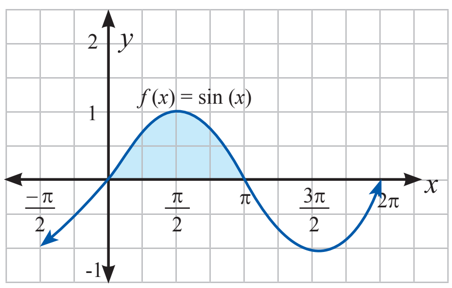
25) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x) = \sin 2x$ ومحور x في الفترة $[0, \pi]$

26) أوجد مساحة المنطقة المظللة في كل مما يأتي :

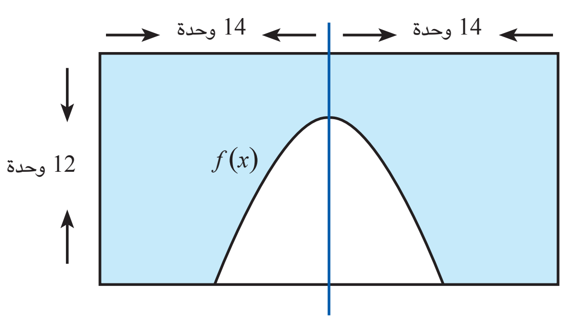
a)



b)



27) الشكل أدناه يمثل الواجهة الأمامية لمبنى ، مدخل هذا المبنى يمثله المنحنى $f(x) = 8 - \frac{x^2}{2}$. ما التكلفة الكلية لدهان المنطقة المظللة إذا علمت أن سعر دهان الوحدة المربعة 40 ريالا ؟

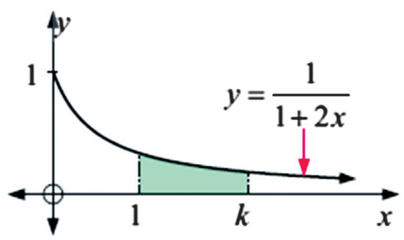


مسائل مهارات التفكير العليا

28) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x) = |x| + 1$ ومحور x والمستقيمين $x = 1$, $x = -2$

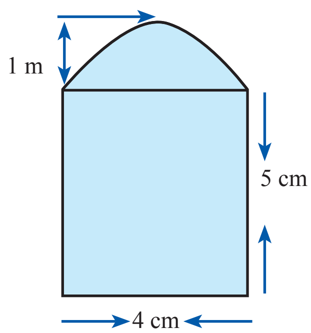
29) إذا كانت مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور هي 0.2 وحدة مربعة .

أوجد k مقربة لأقرب أربع منازل عشرية.



30) الشكل المجاور يمثل مدخل مبنى على شكل مستطيل يعلوه قوس على شكل

قطع مكافئ ، أوجد مساحة واجهة هذا المدخل .



6-2 مساحة المنطقة بين المخططين البيانيين لدالتين
Area of Region Between Two Curves

أفكار الدرس

- حساب مساحة المنطقة المحصورة بين المخططين البيانيين لدالتين .
- حساب مساحة المنطقة المحصورة بين المخططين البيانيين لدالتين و مستقيمين رأسيين.

المعايير:

12A.10.5
12A.10.7
12A.14.1

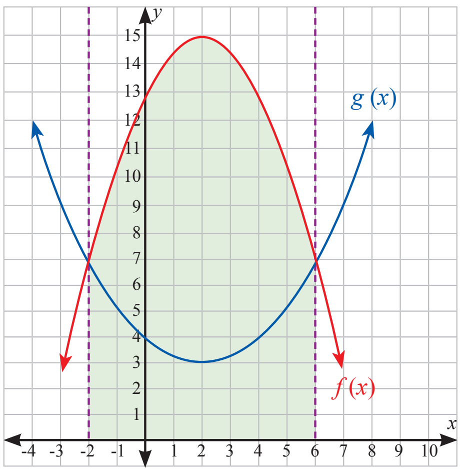
المصطلحات:

المساحة بين مخططين بيانيين لدالتين
area between two curves

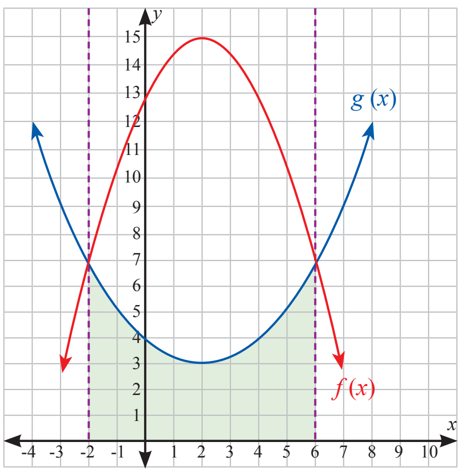
تمهيد

الأشكال المبينة أدناه تمثل منحنى كل من الدالتين $f(x)$ ، $g(x)$:

1. عبر عن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ والمستقيمين $x=-2$, $x=6$ ومحور x باستخدام التكامل المحدود.

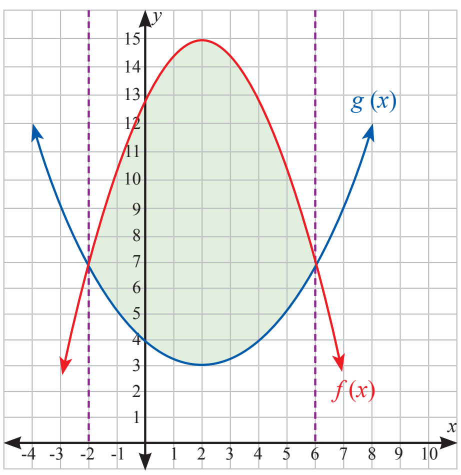


2. عبر عن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $g(x)$ والمستقيمين $x=-2$, $x=6$ ومحور x باستخدام التكامل المحدود.



3. أوجد الإحداثي x لنقطتي تقاطع منحنى كلٍ من الدالتين $f(x)$ ، $g(x)$.

4. عبر عن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الدالتين $f(x)$ ، $g(x)$ باستعمال التكامل المحدود.



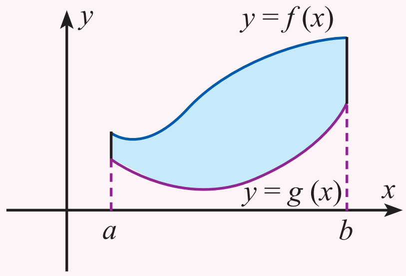
إن إجاباتك الصحيحة على الأسئلة السابقة ستساعدك في استنتاج قاعدة حساب **المساحة بين مخططين بيانيين لدالتين** (area between two curves) وذلك كما يلي:

مفهوم المساحة بين المخططين البيانيين لدالتين

إذا كانت الدالتان $f(x)$, $g(x)$ قابلتين للتكامل على الفترة $[a, b]$ و كانت $f(x) \geq g(x)$ في هذه الفترة، فإن مساحة المنطقة المحصورة بين المخططين البيانيين للدالتين تعطى بالقاعدة :

$$A = \int_a^b [\, f(x) - g(x)\,]\, dx$$

نموذج :



مثال 1 مساحة المنطقة المحصورة بين المخططين البيانيين لدالتين

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المخططين البيانيين للدالتين $f(x) = x^2 + x - 2$ و $g(x) = x + 2$.

- أوجد الإحداثي x لنقاط تقاطع المخططين البيانيين للدالتين

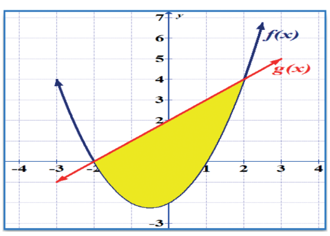
$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x^2 + x - 2 &= x + 2 \\ x^2 - 4 &= 0 \\ (x-2)(x+2) &= 0 \\ \Rightarrow x = 2 \;&,\; x = -2 \end{aligned}$$

- اختبر أي الدالتين أكبر في فترة التكامل

يمكن اختبار أي الدالتين أكبر في فترة التكامل و ذلك باختيار قيمة من الفترة $[-2, 2]$ ولتكن $x = 0$ وتعويضها في كلا الدالتين

$$\because g(0) = 2 > f(0) = -2 \quad \Rightarrow \quad g(x) \geq f(x)$$

و يتضح ذلك في الشكل المجاور.



- احسب مساحة المنطقة المحصورة بين المخططين البيانيين للدالتين.

$$A = \int_{-2}^{2} [\, g(x) - f(x)]\, dx = \int_{-2}^{2} [\,(x+2) - (x^2 + x - 2)]\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = (8 - \frac{8}{3}) - (-8 + \frac{8}{3})$$

$$= 10\,\frac{2}{3}$$

إذن مساحة المنطقة المحصورة تساوي $10\,\frac{2}{3}$ وحدة مربعة .

تحقق

1) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المخططين البيانيين للدالتين

$$f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = 4x - x^2$$

و يمكـن أن يتقاطع المخطـطـان البيانيان للدالتين في أكثر من نقطة بحيث تكـون المنطقة المحصورة بينهما مجزأة إلى جزأين أو أكثر.

مثال 2 مساحة أكثر من منطقة محصورة بين منحنيي دالتين

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الدالتين

$$f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x \ , \ g(x) = -x^2 + 2x$$

• **أوجد الإحداثي x لنقاط تقاطع المخططين البيانيين للدالتين.**

$f(x) = g(x)$

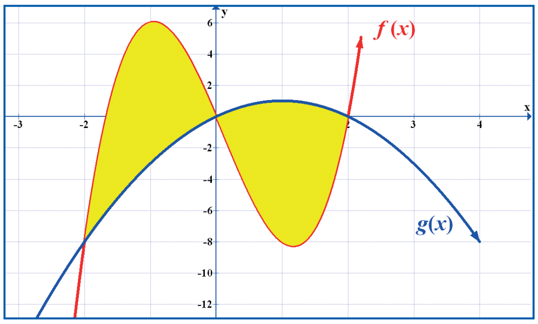
$\Rightarrow 3x^3 - x^2 - 10x = -x^2 + 2x$

$\Rightarrow 3x^3 - 12x = 0$

$\Rightarrow 3x(x^2 - 4) = 0$

$\Rightarrow 3x(x-2)(x+2) = 0$

$\Rightarrow x = 0 \ , \ x = -2 \ , \ x = 2$



تلاحـظ أن المنطقـة المحصـورة بيـن منحنيـي الدالتيـن مجـزأة إلـى جزأيـن ، أي أنهـا تقـع فـي فترتين هـما $[0, 2]$, $[-2, 0]$ كما في الشكل البياني أعلاه.

• **احسب مساحة المنطقة المحصورة بين المخططين البيانيين للدالتين.**

$$A = \left| \int_{-2}^{0} \left(f(x) - g(x)\right) dx \right| + \left| \int_{0}^{2} \left(f(x) - g(x)\right) dx \right|$$

$$= \left| \int_{-2}^{0} \left(3x^3 - x^2 - 10x - (-x^2 + 2x)\right) dx \right| + \left| \int_{0}^{2} \left(3x^3 - x^2 - 10x - (-x^2 + 2x)\right) dx \right|$$

$$= \left| \int_{-2}^{0} (3x^3 - 12x)\, dx \right| + \left| \int_{0}^{2} (3x^3 - 12x)\, dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{3x^4}{4} - 6x^2\right]_{-2}^{0} \right| + \left| \left[\frac{3x^4}{4} - 6x^2\right]_{0}^{2} \right|$$

$$= |-(12 - 24)| + |12 - 24| = 24$$

إذن مساحة المنطقة المحصورة تساوي 24 وحدة مربعة .

تحقق

2) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الدالتين

$$f(x) = x^3 - 3x \quad , \quad g(x) = x$$

إرشـاد

فـي مثـال 2 يمكـن اختبـار أي الدالتين أكبر في كل فترة جزئية ثم إيجاد المساحة المطلوبة

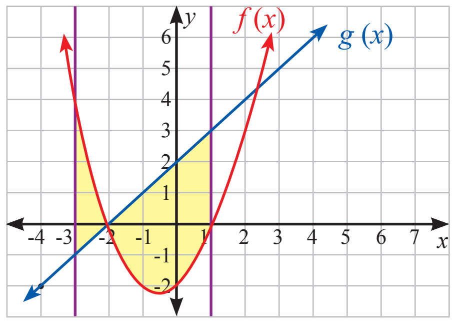
وبنفس الطريقة الســابقة يمكن حساب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي دالتين ومستقيمين رأسيين مع الأخذ بعين الاعتبار أن بداية ونهاية هذه المنطقة يحددهما المستقيمان الرأسيان ، والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال 3 مساحة أكثر من منطقة محصورة بين منحنيي دالتين

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المخططين البيانيين للدالتين

$f(x) = x^2 + x - 2 \ , \ g(x) = x + 2$ والمستقيمين $x = 1 \ , \ x = -3$

• أوجد الإحداثي x لنقاط تقاطع المخططين البيانيين للدالتين.



$f(x) = g(x)$

$\Rightarrow x^2 + x - 2 = x + 2$

$\Rightarrow x^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow (x-2)(x+2) = 0$

$\Rightarrow x = 2 \ , \ x = -2$

$-2 \in [-3, 1] \ , \ 2 \notin [-3, 1]$

تلاحظ أن المنطقة المحصورة بين المخططين البيانيين للدالتين و المستقيمين $x = 1 \ , \ x = -3$ مجزأة إلى جزأين، أي أنها تقع في الفترتين $[-2, 1]$ ، $[-3, -2]$ كما في الشكل البياني أعلاه.

• اختبر أي الدالتين أكبر في كل فترة من فترات التكامل.

$\because f(-2.5) = 1.75 > g(-2.5) = -0.5 \qquad \Rightarrow f(x) \geq g(x) \ , \ x \in [-3, -2]$

$\because g(0) = 2 > f(0) = -2 \qquad \Rightarrow g(x) \geq f(x) \ , \ x \in [-2, 1]$

• احسب مساحة المنطقة المحصورة بين المخططين البيانيين للدالتين.

$$A = \int_{-3}^{-2} [f(x) - g(x)]\,dx + \int_{-2}^{1} [g(x) - f(x)]\,dx$$

$$= \int_{-3}^{-2} (x^2 - 4)\,dx + \int_{-2}^{1} (4 - x^2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{-3}^{-2} + \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1}$$

$$= \left(\frac{16}{3} - 3\right) + \left(\frac{11}{3} - \frac{-16}{3}\right) = \frac{34}{3} = 11\frac{1}{3}$$

إذن مساحة المنطقة المحصورة تساوي $11\frac{1}{3}$ وحدة مربعة .

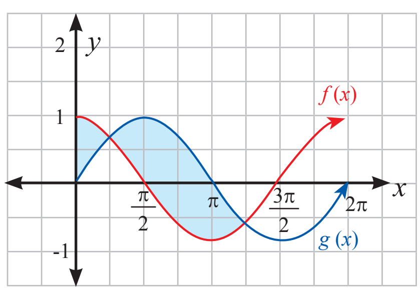
تحقق

3) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الدالتين $f(x) = 2 - x^2 \ , \ g(x) = x^2$ والمستقيمين $x = 2 \ , \ x = -1$

ويمكن حساب مساحة المنطقة المحصورة بين دالتين من خلال الرسم المعطى بحيث يتم تحديد حدود التكامل عن طريق حل المعادلة الناتجة عن مساواة الدالتين .

مثال 4 حساب مساحة منطقة مظللة

بالاعتماد على الشكل أدناه الذي يمثل المخططين البيانيين للدالتين $f(x) = \cos x$ ، $g(x) = \sin x$،
أوجد مساحة المنطقة المظللة .



• أوجد الإحداثي x لنقاط تقاطع المخططين البيانيين للدالتين معاً ضمن الفترة $[0, 2\pi]$

$$\sin x = \cos x$$
$$\frac{\sin x}{\cos x} = 1$$
$$\tan x = 1$$
$$x = \tan^{-1}(1)$$
$$\therefore x = \frac{\pi}{4} \quad , \quad x = \frac{5\pi}{4}$$

لاحظ من الشكل البياني المعطى أعلاه أن $f(x) \geq g(x)$ في الفترة $[0, \frac{\pi}{4}]$ و $g(x) \geq f(x)$ في الفترة $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$

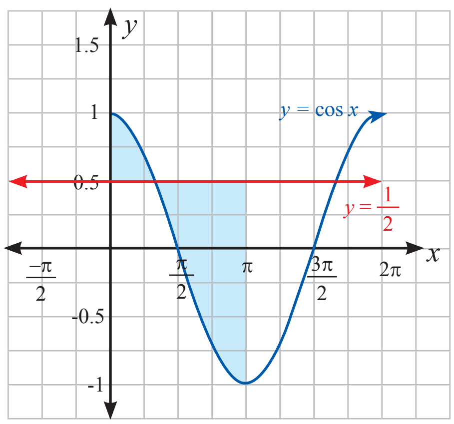
• احسب مساحة المنطقة المظللة.

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [f(x) - g(x)]\, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} [g(x) - f(x)]\, dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\cos x - \sin x]\, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} [\sin x - \cos x]\, dx$$
$$= [\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$
$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (0+1) + \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$
$$= 3\sqrt{2} - 1$$

إذن مساحة المنطقة المحصورة تساوي $3\sqrt{2} - 1$ وحدة مربعة .

تحقق

4) بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل المخططين البيانيين للدالتين $y = \cos x$ ، $y = \frac{1}{2}$ أوجد مساحة المنطقة المظللة.



تمارين 6-2

الأمثلة 1-2 أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المخططين البيانيين للدالتين في كل مما يأتي:

1) $f(x) = x - 3 \quad , \quad g(x) = x^2 - 3x$

2) $y = x^2 - 2x \quad , \quad y = 3$

3) $f(x) = \sqrt{x} \quad , \quad g(x) = x^2$

4) $f(x) = 3x^3 - x \quad , \quad g(x) = 2x^3 + 8x$

5) $f(x) = x^3 - 3x \quad , \quad g(x) = 2x^2$

6) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x \quad , \quad g(x) = -2x$

مثال 3 أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المخططين البيانيين للدالتين و المستقيمين الرأسيين في كل مما يلي :

7) $f(x) = 2x^2 \quad , \quad g(x) = 2x \quad , \quad x = 0 \quad , \quad x = 1$

8) $f(x) = 2x^2 \quad , \quad g(x) = 2x \quad , \quad x = -1 \quad , \quad x = 1$

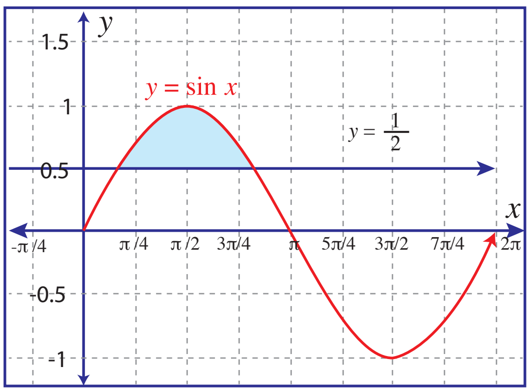
9) $f(x) = 2x^2 \quad , \quad g(x) = 2x \quad , \quad x = -1 \quad , \quad x = 3$

10) $f(x) = x^3 - 5x \quad , \quad g(x) = 2x^2 - 6 \quad , \quad x = -3 \quad , \quad x = 3$

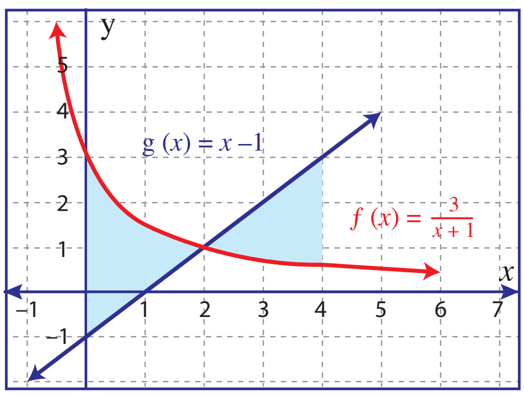
11) $f(x) = x^3 \quad , \quad g(x) = x^4 - 2x^2 \quad , \quad x = -1 \quad , \quad x = 2$

مثال 4 بالاعتماد على الأشكال البيانية المعطاه، أوجد مساحة المنطقة المظللة في كل مما يلي:

12)



13)



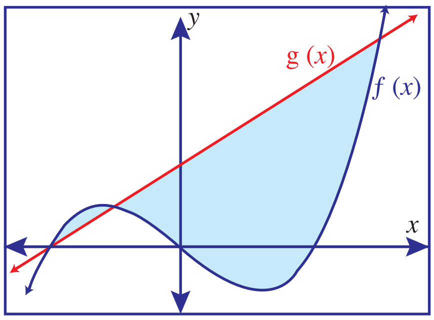
أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المخططين البيانيين للدالتين في كل مما يأتي :

14) $y = x^3 - 5x \quad , \quad y = 2x^2 - 6$

15) $y = \sin x \, , \quad y = \cos x \, , \quad 0 \le x \le 2\pi$

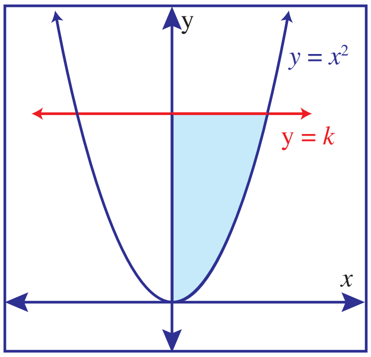
16) الشكل المجاور يمثل المخططيين البيانيين لكلٍ من

$f(x) = x^3 - 4x$, $g(x) = 3x + 6$ أوجد مساحة المنطقة المظللة .

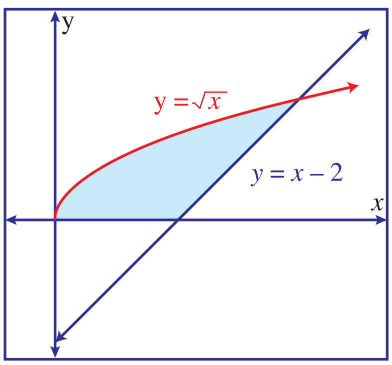


مسائل مهارات التفكير العليا

17) في الشكل المجاور ، إذا كانت مساحة المنطقة المظللة تساوي $\frac{16}{3}$ وحدة مربعة . أوجد قيمة k .



18) أوجد مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور .



6-3

الحجوم الدورانية
Volumes of Revolution

أفكار الدرس

- إيجاد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين المخطط البياني لدالة و محور x و مستقيمين رأسيين حول المحور x .
- إيجاد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين المخطط البياني لدالة و محور x حول المحور x .

المعايير:

12A.14.1

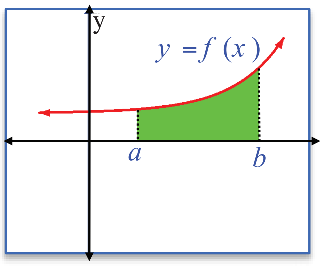
المصطلحات:

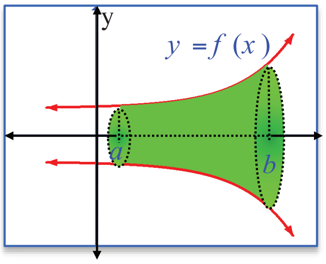
حجم المجسم الدوراني
volume of solid of revolution

تمهيد

لنعتبر منحنى الدالة $y = f(x)$ المبين أدناه :

إذا دارت المنطقة المظللة والمحصورة بين $x = a$ و $x = b$ ، ومحور x ، حول محور x دورة كاملة (360°) ، فإنه سيتكون مجسم ثلاثي الأبعاد ، يسمى هذا المجسم بالمجسم الدوراني.





يتكون المجسم الدوراني من عدد غير منتهٍ من الأقراص الإسطوانية الرقيقة كما هو موضح في الشكل أدناه :

1) ما قانون حجم الأسطوانة القائمة التي طول نصف قطرها r وارتفاعها h ؟

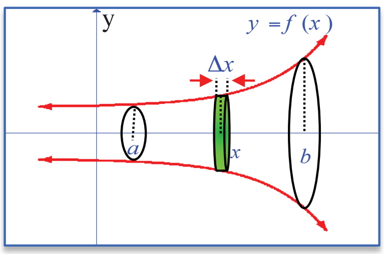
2) ماذا تمثل كل من $f(a) , \Delta x , f(b)$ ؟

3) ماذا يمثل المقدار $\pi [f(a)]^2 \Delta x$ ؟

4) ماذا يمثل المقدار $\pi [f(b)]^2 \Delta x$ ؟

5) ماذا يمثل المقدار $\pi [f(x)]^2 \Delta x$ ؟

6) ماذا يمثل المقدار $\sum_{x=a}^{x=b} \pi [f(x)]^2 \Delta x$ ؟



إن إجاباتك الصحيحة على الأسئلة السابقة ستقودك إلى استنتاج أن **حجم المجسم الدوراني** (volume of solid of revolution) يعطى بصورة تقريبية بالمقدار: $\sum_{x=a}^{x=b} \pi [f(x)]^2 \Delta x$ حيث $f(x)$ هي نصف قطر كل قرص أسطواني، Δx هي ارتفاع القرص الأسطواني.

وحتى نحصل على حجم المجسم الدوراني نزيد عدد الأقراص الإسطوانية المكونة للمجسم ليصبح عددها لا نهائي، وذلك بجعل سماكة (ارتفاع) كل قرص اسطواني تقترب من الصفر ($\Delta x \to 0$) ، وبالتالي يصبح :

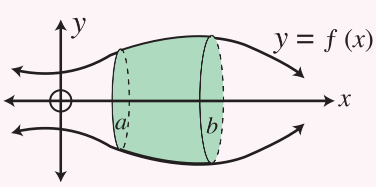
$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x=a}^{x=b} \pi [f(x)]^2 \Delta x = \int_a^b \pi [f(x)]^2 \, dx = \pi \int_a^b y^2 \, dx$$

مفهوم — حجم المجسم الدوراني

إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للتكامل على الفترة $[a , b]$ فإن حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين المخطط البياني للدالة $y = f(x)$ و محور x و المستقيمين الرأسيين $x = a , x = b$ دورة كاملة حول محور x يعطى بالقاعدة :

$$V = \pi \int_a^b y^2 \, dx$$

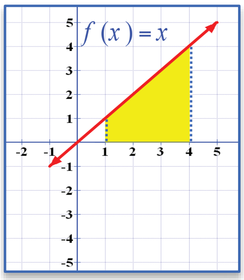
نموذج :

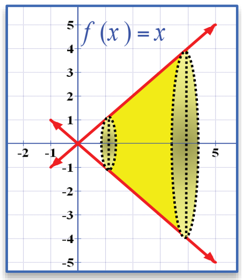


مثال 1 : دوران المنطقة المحصورة بين المخطط البياني لدالة ومحور x و مستقيمين رأسيين

أوجد حجم المجسم الدوراني الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين المخطط البياني للدالة $f(x) = x$ ومحور x و المستقيمين $x = 1$, $x = 4$ دورة كاملة حول محور x .

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$
$$= \pi \int_1^4 x^2 \, dx = \left[\pi \frac{x^3}{3} \right]_1^4$$
$$= \pi \left(\frac{64}{3} - \frac{1}{3} \right) = 21\pi$$





إذن حجم المجسم الدوراني الناتج هو 21π وحدة مكعبة .

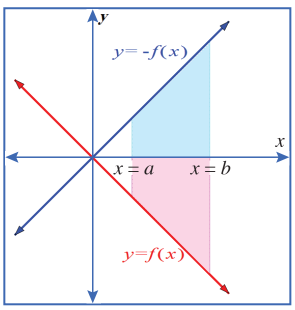
تحقق

1) أوجد حجم المجسم الدوراني الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين المخطط البياني للدالة $f(x) = \sqrt{\sin x}$ ومحور x و المستقيمين $x = \pi$, $x = 0$ دورة كاملة حول محور x

إرشاد

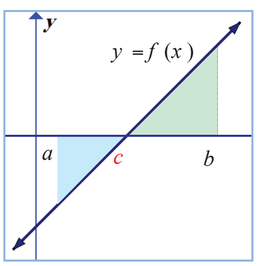
في مثال 1 يسمى الشكل الناتج باسم المخروط الناقص القائم ، و يمكن التحقق من صحة الحل كما يلي :
حجم المخروط الناقص القائم هو الفرق بين حجم المخروط الأكبر الذي ارتفاعه 4 وحدات ونصف قطر قاعدته 4 وحدات و حجم المخروط الأصغر الذي نصف قطر قاعدته وحدة واحد و ارتفاعه وحدة واحدة أي أن :

$$V = \frac{1}{3}\pi \, 4^2 \, (4) - \frac{1}{3}\pi \, 1^2 \, (1) = 21\pi$$



إذا كانت الدالة $y = f(x)$ قابلة للتكامل على الفترة $[a, b]$ و كان منحنى الدالة يقع تحت محور x في هذه الفترة كما في الشكل المجاور ، فإن حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $y = f(x)$ و محور x و المستقيمين الرأسيين $x = a$, $x = b$ دورة كاملة حول محور x يمكن حسابها كما يلي :
الحجم V يساوي حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $y = -f(x)$ والمستقيمين الرأسيين $x = a$, $x = b$ ومحور x دورة كاملة حول محور x . أي أن :

$$V = \pi \int_a^b [-f(x)]^2 \, dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$



و مما سبق نستنتج أن حساب حجم المجسم الدوراني لن يختلف باختلاف موقع الدالة $y = f(x)$ بالنسبة لمحور x ، وعليه إذا وقع جزء من منحنى $y = f(x)$ فوق محور x والجزء الآخر تحت محور x في الفترة $[a, b]$ كما في الشكل المجاور فهذا يعني أن المنحنى يقطع المحور x عند $x = c$ حيث $c \in [a, b]$ فإنه يمكن حساب حجم المجسم الدوراني دون تجزئة التكامل وذلك لأن :

$$V = \pi \int_a^c [f(x)]^2 \, dx + \pi \int_c^b [f(x)]^2 \, dx$$
$$= \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

مثال 2 : دوران أكثر من منطقة

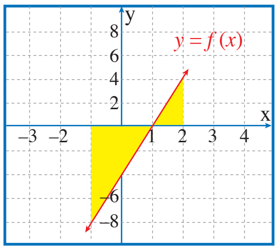
أوجد حجم المجسم الدوراني الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين المخطط البياني للدالة $f(x) = 4x - 4$ ومحور x والمستقيمين $x = -1 , x = 2$ دورة كاملة حول محور x

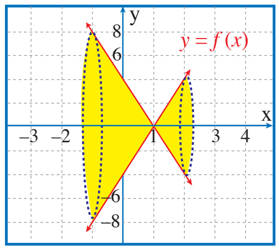
$$V = \pi \int_{-1}^{2} (4x-4)^2\, dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} (16x^2 - 32x + 16)\, dx$$

$$= \pi \left[\frac{16x^3}{3} - 16x^2 + 16x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \pi \left(\frac{32}{3} - \frac{-112}{3}\right) = 48\pi$$





إذن حجم المجسم الدوراني الناتج هو 48π وحدة مكعبة.

تحقق

2) أوجد حجم المجسم الدوراني الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين المخطط البياني للدالة $f(x) = x^3$ ومحور x والمستقيمين $x = -2 , x = 1$ دورة كاملة حول محور x .

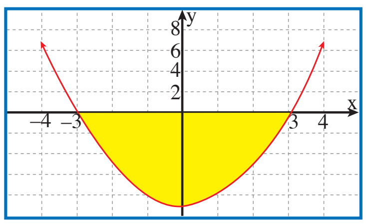
ويمكن استعمال نفس الطريقة السابقة لحساب حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين الدالة $y = f(x)$ و محور x دورة كاملة حول محور x وذلك بتعيين حدود هذه المنطقة بحل المعادلة $f(x) = 0$.

مثال 3 : دوران المنطقة المحصورة بين منحنى دالة ومحور x

أوجد حجم المجسم الدوراني الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2 - 9$ ومحور x دورة كاملة حول محور x .

- **أوجد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الدالة مع محور x**

$$x^2 - 9 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 = 9$$
$$\therefore x = \pm 3$$



- **احسب حجم المجسم الدوراني**

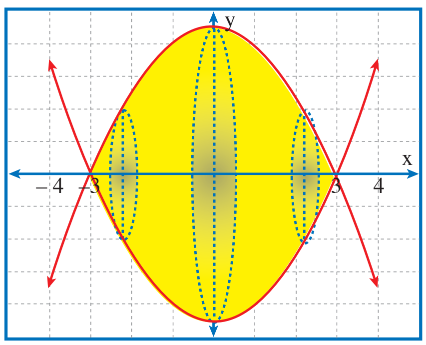
$$V = \pi \int_{-3}^{3} y^2\, dx = \pi \int_{-3}^{3} (x^2-9)^2\, dx$$

$$= \pi \int_{-3}^{3} (x^4 - 18x + 81)\, dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^5}{5} - 6x^3 + 81x\right]_{-3}^{3}$$

$$= \pi \left(\frac{684}{5} - \frac{-684}{5}\right) = 48\pi$$

$$= \frac{1296}{5}\pi = 259.2\pi$$



إذن حجم المجسم الدوراني الناتج هو $259.2\,\pi$ وحدة مكعبة .

تحقق

3) أوجد حجم المجسم الدوراني الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $y = 4 - 3x - x^2$ ومحور x دورة كاملة حول المحور x .

تمارين 6-3

مثال 1 **أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران منحنى كل دالة مما يأتي دورة كاملة حول محور x :**

2) $y = \frac{1}{x-1}$, $2 \le x \le 3$

1) $y = 2x^3$, $1 \le x \le 2$

4) $y = \sqrt{\cos x}$, $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$

3) $y = \sqrt{25 - x^2}$, $0 \le x \le 5$

مثال 2 **أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين المخطط البياني للدالة والمستقيمين الرأسيين ومحور x دورة كاملة حول محور x في كل مما يلي :**

5) $y = x + 1$, $x = -4$, $x = 1$

6) $y = 4 - x^2$, $x = -4$, $x = 3$

7) $y = x^3 - 9$, $x = -1$, $x = 4$

8) $y = 2e^{2x} - 2$, $x = -\ln 6$, $x = \ln 2$

مثال 3 **أوجد حجم المجسم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة ومحور x دورة كاملة حول محور x في كل مما يلي :**

10) $y = 4 - x^2$

9) $y = 1 - x^2$

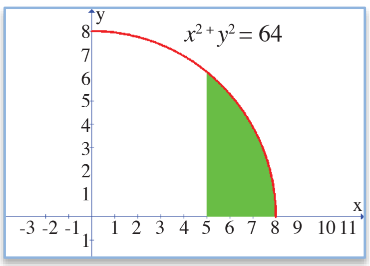
12) $y = x^3 - 4x$

11) $y = x^4 - 9x^2$

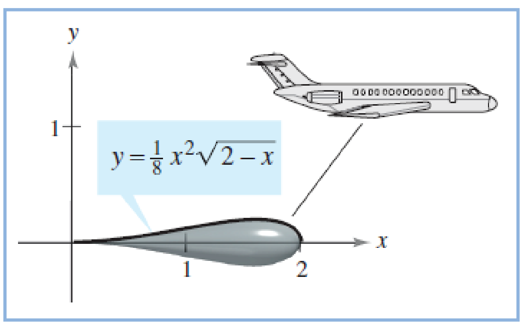
13) المخطط البياني المجاور يمثل المنطقة المحصورة بين الدائرة التي معادلتها $x^2 + y^2 = 64$ والمستقيم $x = 5$ في الربع الأول .

a) إذا دارت المنطقة المظللة في الشكل المجاور حول محور x دورة كاملة، احسب حجم المجسم الدوراني.

b) بالاعتماد على حل الفرع a ، أوجد حجم الماء في وعاء نصف كروي نصف قطره 8 cm ، إذا كان عمق الماء 3 cm .



14) يتم تصميم خزان وقود في جناح طائرة من خلال دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $y = \frac{1}{8} x^2 \sqrt{2 - x}$ و محور x دورة كاملة حول محور x كما في الشكل المجاور . أوجد حجم الخزان إذا كانت قياسات x, y بوحدة المتر .



مسائل مهارات التفكير العليا

15) استعمل الحجوم الدورانية لإثبات أن :

a) حجم الاسطوانة الدائرية القائمة هو $V = \pi r^2 h$

b) حجم المخروط القائم هو $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

c) حجم الكرة هو $V = \frac{4}{3} \pi r^3$.

6-4
حجم المجسم الدوراني الناتج عن دوران منطقة محصورة بين مخططي دالتين
Volumes of Revolution Between Two Curves

أفكار الدرس

- إيجاد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين المخططين البيانيين لدالتين حول المحور x .
- إيجاد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين المخططين البيانيين لدالتين و مستقيمين رأسيين و محور x حول المحور x .

المعايير:

12A.14.1

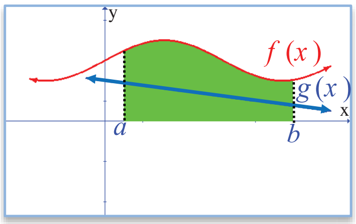
المصطلحات:

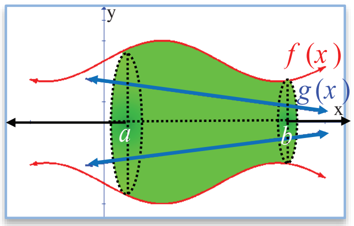
حجم المجسم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين مخططي دالتين
volume of solid of revolution between two curves

تمهيد

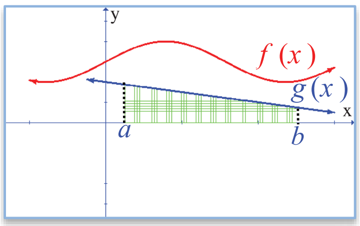
الأشكال المبينة أدناه تمثل منحنيي الدالتين $g(x)$, $f(x)$:

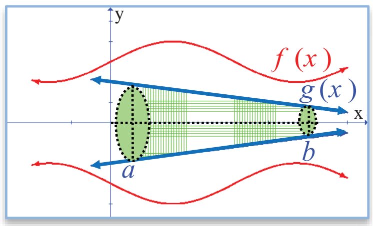
1. عبر عن حجم المجسم الدوراني الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ والمستقيمين $x = a$, $x = b$ ومحور x، حول محور x باستعمال التكامل المحدود.



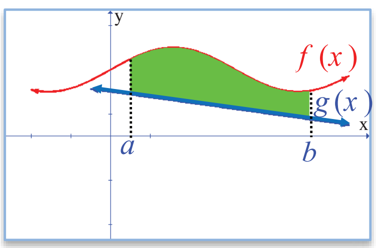


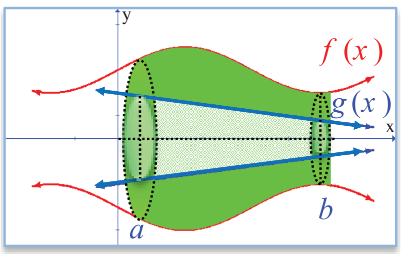
2. عبر عن حجم المجسم الدوراني الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $g(x)$ والمستقيمين $x = a$, $x = b$ ومحور x، حول محور x باستعمال التكامل المحدود.





3. عبر عن حجم المجسم الدوراني الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنيي الدالتين $f(x)$ ، $g(x)$ والمستقيمين $x = a$, $x = b$ حول محور x باستعمال التكامل المحدود.





إن إجاباتك الصحيحة على الأسئلة السابقة تساعدك في استنتاج القاعدة الخاصة بحساب **حجم المجسم الدوراني الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنيي دالتين** (volume of solid of revolution between two curves) ومستقيمين رأسيين $x = a$, $x = b$ ، وذلك على النحو التالي:

مفهوم: حجم المجسم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين مخططي دالتين

إذا كانت الدالتان $f(x)$ ، $g(x)$ قابلتين للتكامل على الفترة $[a, b]$ فإن حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين المخططين البيانيين للدالتين $f(x)$ ، $g(x)$ والمستقيمين الرأسين $x = a$, $x = b$ حول محور x دورة كاملة يعطى بالقاعدة :

$$V = \pi \int_a^b \left| [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right| dx$$

$$= \begin{cases} \pi \int_a^b \left| [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right| dx & ; [f(x)]^2 \geq [g(x)]^2 \\ -\pi \int_a^b \left| [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right| dx & ; [f(x)]^2 \leq [g(x)]^2 \end{cases}$$

تنبيه

لأي دالتين $f(x)$ ، $g(x)$

فإن :

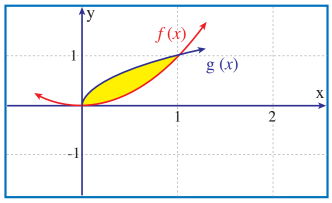
$[f(x)]^2 - [g(x)]^2 \neq [f(x) - g(x)]^2$

مثال 1 : الحجم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنيي دالتين متقاطعتين

أوجد حجم المجسم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2$ ومنحنى الدالة $g(x) = \sqrt{x}$ ، دورة كاملة حول محور x .

- أوجد الإحداثي x لنقطة تقاطع منحنيي الدالتين

$$f(x) = g(x)$$
$$x^2 = \sqrt{x}$$
$$x^4 = x$$
$$x^4 - x = 0$$
$$x(x^3 - 1) = 0$$
$$\therefore x = 0 , x = 1$$



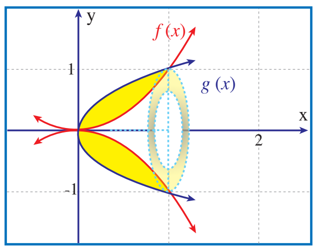
- قارن بين الدالتين

لاحظ في الفترة $[0 , 1]$ أن $[g(x)]^2 \geq [f(x)]^2$ وذلك بالتعويض عن $x = \frac{1}{2}$ نجد أن :

$$\left[g\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \frac{1}{2} > \left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \frac{1}{16}$$

- احسب الحجم الدوراني

$$V = \pi \int_0^1 \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right) dx$$
$$= -\pi \int_0^1 \left([x^2]^2 - [\sqrt{x}]^2\right) dx$$
$$= -\pi \int_0^1 (x^4 - x)\, dx$$
$$= -\pi \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2} \Big]_0^1\right) = -\pi \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} - (0)\right) = -\pi \left(\frac{-3}{10}\right) = \frac{3\pi}{10}$$



إذن حجم المجسم الدوراني هو $\frac{3\pi}{10}$ وحدة مكعبة

تحقق

1) أوجد حجم المجسم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x) = 2x$ ومنحنى الدالة $g(x) = 5x - x^2$ ، دورة كاملة حول محور x .

ويمكن حساب حجم المجسم الدوراني الناتج عن دوران منطقة واحدة حدودها طرفي الفترة $[a , b]$ و محصورة بين منحنيي الدالتين $f(x)$ ، $g(x)$ حول محور x باستعمال القيمة المطلقة دون دراسة تحقق الشرط الوارد في المفهوم كما يلي :

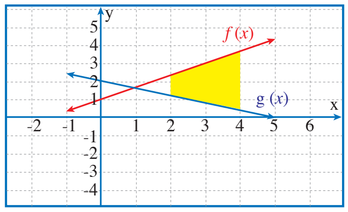
$$V = \pi \int_a^b \left| [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right| dx = \pi \left| \int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right) dx \right|$$

وبالمثل يمكن حساب حجم المجسم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنيي دالتين و مستقيمين رأسيين مع الأخذ بعين الاعتبار أن بداية و نهاية هذه المنطقة يحددهما المستقيمان الرأسيان ، و المثال التالي يوضح ذلك .

مثال 2 : الحجم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنيي دالتين و مستقيمين رأسيين

أوجد حجم المجسم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين المخططين البيانيين للدالتين $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ و $g(x) = \frac{-2}{5}x + 2$ والمستقيمين $x = 2 , x = 4$ ، دورة كاملة حول محور x.

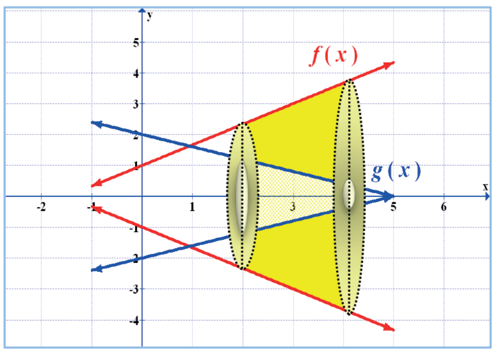
- أوجد الإحداثي x لنقطة تقاطع منحنيي الدالتين



$$f(x) = g(x)$$
$$\frac{2}{3}x + 1 = \frac{-2}{5}x + 2$$
$$\frac{2}{3}x + \frac{2}{5}x = 1$$
$$\frac{16}{15}x = 1$$
$$x = \frac{15}{16} \notin [2,4]$$

- احسب الحجم الدوراني

$$V = \pi \left| \int_2^4 \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right) dx \right|$$
$$= \pi \left| \int_2^4 \left([\tfrac{2}{3}x + 1]^2 - [\tfrac{-2}{5}x + 2]^2\right) dx \right|$$
$$= \pi \left| \int_2^4 \left(\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{3}x + 1 - \frac{4}{25}x^2 + \frac{8}{5}x - 4\right) dx \right|$$
$$= \pi \left| \int_2^4 \left(\frac{64}{225}x^2 + \frac{44}{15}x - 3\right) dx \right|$$
$$= \pi \left| \left[\frac{64}{675}x^3 + \frac{22}{15}x^2 - 3x\right]_2^4 dx \right|$$
$$= \pi \left| \frac{11836}{675} - \frac{422}{675} \right|$$
$$= \frac{11414}{675}\pi \approx 53.12$$



إذن حجم المجسم الدوراني هو 53.12 وحدة مكعبة تقريبا

تحقق

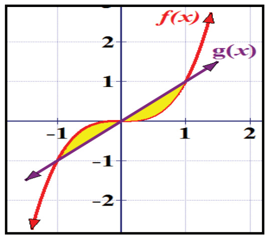
2) أوجد حجم المجسم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين المخططين البيانيين للدالتين $y = x^3$ و $y = 8$ والمستقيمين $x = 0 , x = 1$ ، دورة كاملة حول محور x.

ويمكن حساب حجم المجسم الدوراني الناتج عن دوران أكثر من منطقة محصورة بين منحنيي دالتين دورة كاملة حول محور x بأي من الطريقتين السابقتين لكل منطقة كما في المثال التالي :

مثال 3 : الحجم الناتج عن دوران أكثر من منطقة بين منحنيي دالتين متقاطعتين

أوجد حجم المجسم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين المخططين البيانيين للدالتين $f(x) = x^3$ و $g(x) = x$ دورة كاملة حول محور x.

- أوجد الإحداثي x لنقطة تقاطع منحنيي الدالتين



$$f(x) = g(x)$$
$$x^3 = x$$
$$x^3 - x = 0$$
$$x(x^2 - 1) = 0$$
$$\therefore x = 0 , x = \pm 1$$

- قارن بين الدالتين

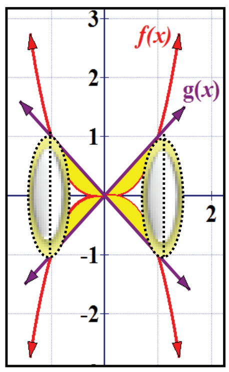
لاحظ أنه في الفترة $[-1 , 0]$ نجد أن $[f(x)]^2 \leq [g(x)]^2$

وذلك بالتعويض عن $x = \frac{-1}{2}$ فإن $\left[f\left(\frac{-1}{2}\right)\right]^2 = \frac{1}{64} < \left[g\left(\frac{-1}{2}\right)\right]^2 = \frac{1}{4}$

وكذلك نجد بالمثل في الفترة $[0 , 1]$ أن $[f(x)]^2 \leq [g(x)]^2$

وبما أن $[f(x)]^2 \leq [g(x)]^2$ في الفترة $[-1 , 1]$ وبالرجوع إلى القاعدة الموضحة في المفهوم نجد أنه لابد من استعمال الحالة الثانية من القاعدة.

- احسب الحجم الدوراني



$$V = \pi \int_{-1}^{1} |[f(x)]^2 - [g(x)]^2| \, dx$$
$$= -\pi \int_{-1}^{1} ([x^3]^2 - [x]^2) \, dx$$
$$= -\pi \left[\frac{x^7}{7} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1}$$
$$= -\pi \left[\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{-1}{7} - \frac{-1}{3}\right) \right]$$
$$= -\pi \left[\frac{-4}{21} - \frac{4}{21} \right]$$
$$= \frac{8\pi}{21}$$

إذن حجم المجسم الدوراني هو $\frac{8\pi}{21}$ وحدة مكعبة

تحقق

3) أوجد حجم المجسم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنيي الدالتين $f(x) = x^3 - 2x^2$ و $g(x) = 3x$ دورة كاملة حول محور x.

إرشاد

يمكنك إيجاد الحجم في مثال 3 باستعمال القيمة المطلقة دون دراسة تحقق الشرط أي دون المقارنة بين الدالتين كما يلي :

$$V = \pi \left| \int_{-1}^{0} [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \, dx \right| + \pi \left| \int_{0}^{1} [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \, dx \right|$$

تمارين 6-4

مثال 1 أوجد حجم المجسم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين المخططين البيانيين للدالتين $f(x), g(x)$ ومحور x دورة كاملة حول محور x في كل مما يأتي :

1) $f(x) = 4 - x^2 \quad , \quad g(x) = 3$

2) $f(x) = x^2 + x \quad , \quad g(x) = 2x + 6$

3) $f(x) = \sqrt{x} \quad , \quad g(x) = x - \sqrt{x}$

مثال 2 أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين المخططين البيانيين للدالتين $f(x), g(x)$ والمستقيمين الرأسيين ومحور x دورة كاملة حول محور x في كل مما يلي :

4) $f(x) = x + 1 \quad , \quad g(x) = x - 1 \quad , \quad x = 1 \quad , \quad x = 4$

5) $f(x) = \sin x \quad , \quad g(x) = \cos x \quad , \quad x = 0 \quad , \quad x = \frac{\pi}{4}$

أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين المخططين البيانيين للدالتين $g(x), f(x)$ والمستقيم الرأسي المعطى ومحور x دورة كاملة حول محور x في كل مما يأتي :

6) $f(x) = \sqrt{x - 4} \quad , \quad g(x) = 1 \quad , \quad x = 8$

7) $f(x) = e^{\frac{x}{2}} \quad , \quad g(x) = e \quad , \quad x = 0$

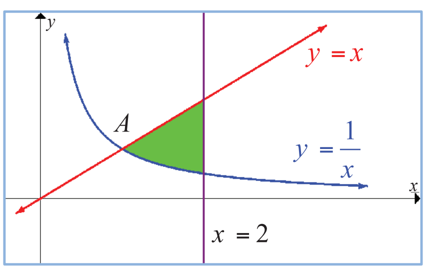
مثال 3 أوجد حجم المجسم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين المخططين البيانيين للدالتين $g(x), f(x)$ ومحور x دورة كاملة حول محور x في كل مما يأتي :

8) $f(x) = x^3 \quad , \quad g(x) = 4x$

9) $f(x) = x \quad , \quad g(x) = x^2 \quad , \quad x = 0 \quad , \quad x = 3$

10) $f(x) = e^{x} \quad , \quad g(x) = e^{-x} \quad , \quad x = -1 \quad , \quad x = 1$

11) إذا دارت المنطقة المظللة (بين $x > 0$; $y = \frac{1}{x}$, $y = x$, $x = 2$) حول محور x كما هو موضح في الشكل أدناه .



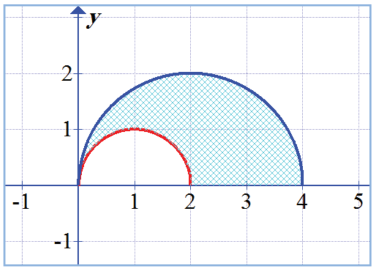
a) أوجد إحداثيي النقطة A .

b) أوجد الحجم الدوراني .

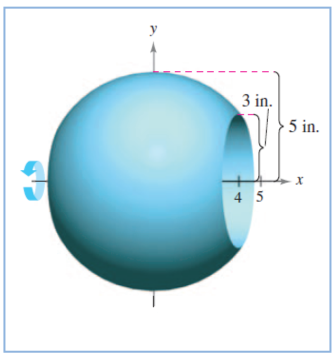
مسائل مهارات التفكير العليا

12) إذا كان حجم المجسم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنيي الدالتين $f(x) = \sqrt{kx}$ ، $g(x) = \frac{x^2}{k}$ حيث $k \neq 0$ ومحور x دورة كاملة حول محور x ، يساوي $\frac{12\pi}{5}$ وحدة مكعبة ، فما قيمة الثابت k ؟

13) يمثل الشكل المجاور نصفي دائرتين متماستين في نقطة الأصل . احسب حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المظللة دورة كاملة حول محور x .



14) تقوم آلة بحفر ثقب عبر مركز كرة معدنية نصف قطرها 5 in كما في الشكل المجاور . إذا كان نصف قطر الثقب 3 in ، فما حجم الحلقة المعدنية الناتجة؟



6-5 تطبيقات فيزيائية
Physical Applications

أفكار الدرس

- إيجاد المسافة و الازاحة باستعمال تكامل السرعة بالنسبة إلى الزمن .
- إيجاد السرعة باستعمال تكامل التسارع (العجلة) بالنسبة إلى الزمن .
- حل مسائل فيزيائية بإيجاد التغير الكلي لكمية فيزيائية باستعمال التكامل

المعايير:

12A.10.8
12A. 10.9

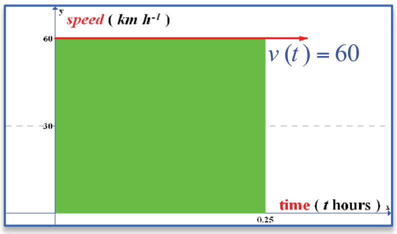
المصطلحات:

سرعة اللحظية
velocity
المسافة
distance
الإزاحة
displacement
التسارع (العجلة)
acceleration
معدل التغير
rate of change

تمهيد

إذا تحركت سيارة بسرعة لحظية ثابتة مقدارها $60\ km / h$ لمدة 15 min :

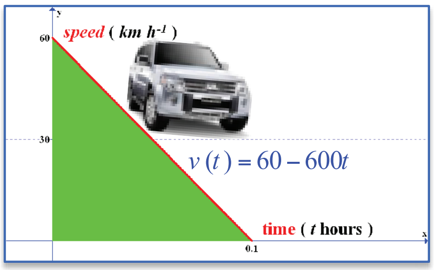
1) احسب المسافة التي قطعتها السيارة خلال هذه المدة.



2) لماذا يمكننا تمثيل السرعة اللحظية للسيارة $v\ (\ t\ )$ خلال الفترة الزمنية t على شكل خط مستقيم أفقي؟ (انظر للشكل المجاور)

3) احسب مساحة المنطقة المستطيلة المحددة بالمستقيم الأفقي $v\ (t)\ =\ 60$ خلال الفترة الزمنية $t\ =\ 0$ إلى $t\ =\ 0.25$.

4) احسب التكامل المحدود $\int_{0}^{\frac{1}{4}} v\ (t)\ dt$. هل حصلت على نفس الإجابة التي حصلت عليها في الفرع (1)؟ ماذا تستنتج ؟



5) اعتماداً على استنتاجك، إحسب المسافة التي تقطعها السيارة التي بيان دالة السرعة لها موضح جانباً من $t\ =\ 0$ إلى $t\ =\ 0.1$.

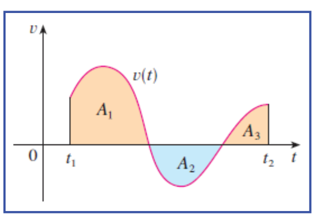
الإجابة على الأسئلة السابقة سترشدك إلى أن :

المساحة تحت منحنى السرعة اللحظية تساوي المسافة الكلية المقطوعة خلال الفترة الزمنية وبما أن المساحة تحت المنحنى هي تكامل الدالة كما تعلمت سابقاً، فإن تكامل **دالة السرعة اللحظية**(velocity) **هو دالة المسافة الكلية** (distance) التي تقطعها السيارة خلال رحلتها، أي أن:

$$d\ (t) = \int_{t_1}^{t_2} v\ (t)\ dt$$

وهذا يكون صحيحاً فقط على اعتبار أن السيارة تسير في خط مستقيم خلال الفترة الزمنية دون أن تغير من إتجاه حركتها.

وفي الحالة التي يحدث فيها تغيير في إتجاه حركة السيارة (الأجسام عموماً) إلى الخلف خلال الفترة الزمنية، فإن السرعة اللحظية سوف تتغير إشارتها، لتصبح سالبة و مع ذلك تبقى المسافة المقطوعة في ازدياد وبالتالي فإنه لحساب المسافة الكلية المقطوعة خلال الفترة الزمنية فإننا نحسب تكامل مطلق السرعة اللحظية لأن المسافة كمية غير متجهة .



ففي الشكل المجاور إذا كان المنحنى يمثل السرعة اللحظية التي يسير بها جسيم في الفترة $[t_1\ ,t_2]$، فإن المسافة الكلية التي يقطعها هذا الجسيم في هذه الفترة يمكن التعبير عنها بدلالة المساحة تحت منحنى السرعة كما يلي :

$$d = \int_{t_1}^{t_2} \left| v\ (t) \right| dt = A_1 + A_2 + A_3$$

إرشاد

تعلمت سابقاً أن:

$$\frac{d}{dx}\ d\ (t\ ) = v\ (t\ )$$

وبالتالي فإن الدالة المقابلة لدالة السرعة هي دالة المسافة

مفهوم المسـافة الكلية

إذا تحرك جسم ما خلال الفترة الزمنية $[t_1 , t_2]$ وكانت دالة السرعة اللحظية لحركة الجسم هي $v\ (t)$ فإن المسافة الكلية المقطوعة خلال الفترة الزمنية من t_1 إلى t_2 هي :

$$d = \int_{t_1}^{t_2} |\, v\ (t)\, |\, dt = \begin{cases} \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} v\ (t)\ dt\ ;\ v\ (t) > 0 \\ -\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} v\ (t)\ dt\ ;\ v\ (t) < 0 \end{cases}$$

مثال 1 : حساب المسافة الكلية

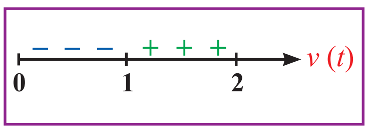
يتحرك جسـيم وفق دالة السـرعة اللحظية $v\ (t) = 3\ t^2 - 3$ cm/s . فأوجد المسافة الكلية التي يقطعها الجسيم خلال الفترة الزمنية من $t = 0$ إلى $t = 2$ (t الزمن بالثواني) .

لمعرفة فيما إذا كان الجسيم يغير من إتجاه حركته ، نساوي دالة السرعة اللحظية بالصفر.

$$\begin{aligned} &v\ (t) = 0 \\ &\Rightarrow 3\ t^2 - 3 = 0 \\ &\Rightarrow 3\ (t^2 - 1) = 0 \\ &\Rightarrow 3\ (t - 1)\ (t + 1) = 0 \\ &\Rightarrow t = 1 \text{ or } t = -1 \end{aligned}$$

لاحظ أن القيمة $t = -1$ مرفوضة و أن $1 \in [0 , 2]$ أي أن الجسم يغير من إتجاه حركته بعد ثانية واحدة من بداية الحركة حيث أن الجسيم يسير باتجاه في الفترة $[0 , 1]$ ثم يغير اتجاهه في الفترة $[1 , 2]$.

إشارة دالة السرعة اللحظية توضح أن الجسم يبدأ حركته لليسار ثم بعد ثانية يبدأ الحركة لليمين.



$$\begin{aligned} d &= -\int_0^1 (3\ t^2 - 3)\ dt + \int_1^2 (3\ t^2 - 3)\ dt \\ &= -\Big[(t^3 - 3t)\Big]_0^1 + \Big[(t^3 - 3t)\Big]_1^2 \\ &= -\big[(1 - 3) - 0\big] + \big[(2^3 - 3\ (2)) - (1 - 3)\big] \\ &= 6 \end{aligned}$$

إذن المسافة الكلية التي يقطعها الجسيم خلال الفترة الزمنية من $[0 , 2]$ هي 6 cm .

تحقق

1) يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث تعطى سرعته اللحظية بالدالة $v\ (t) = \sin \pi t$ cm/s.

أوجد المسافة الكلية التي يقطعها الجسيم خلال الفترة الزمنية $[0 , 2]$ (t الزمن بالثواني).

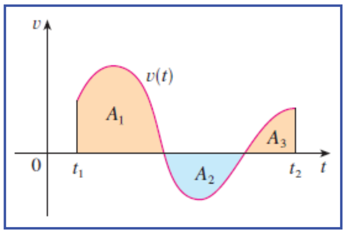
إرشـاد

فـي مثـال 1 يمكن اسـتخدام القيمـة المطلقـة دون الحاجة لدراسـة إشـارة دالة السرعة وذلك على النحو التالي :

$$d = \left| \int_0^1 (3\ t^2 - 3)\ dt \right| + \left| \int_1^2 (3\ t^2 - 3)\ dt \right|$$

وبمـا أن **الإزاحـة** (displacement) كميـة متجهة تـُعطي بـُعد موقع الجسـم في نهاية الحركة عـن موقعه عند بداية الحركة دون اعتبار تغيير إتجاه الحركة خلال الفترة الزمنية، لذلك عند حسـاب إزاحة الجسـيم خلال الفترة الزمنية فإننا نحسب تكامل السرعة اللحظية لهذا الجسيم في هذه الفترة الزمنية.

ففي الشكل المجاور إذا كان المنحنى يمثل السرعة اللحظية التي يسير بها جسيم في الفترة $[t_1, t_2]$ ، فإن إزاحة الجسيم في هذه الفترة يمكن التعبير عنها بدلالة المساحة تحت منحنى السرعة اللحظية كما يلي :



$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt = A_1 - A_2 + A_3$$

مفهوم الإزاحة

إذا تحرك جسم ما خلال الفترة الزمنية $[t_1, t_2]$ وكانت دالة السرعة اللحظية لحركة الجسم هي $v(t)$ فإن الإزاحة (الموقع) خلال الفترة الزمنية من t_1 إلى t_2 هي :

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt$$

وبشكل عام فإن دالة الإزاحة (الموقع) عند أي زمن t تعطى بالعلاقة : $s(t) = \int v(t)\, dt$

مثال 2 : حساب الإزاحة

يتحرك جسيم وفق دالة السرعة اللحظية $v(t) = 3t^2 - 3$ cm/s . فأوجد إزاحة الجسيم خلال الفترة الزمنية من $t = 0$ إلى $t = 2$ (الزمن t بالثواني).

لاحظ هنا أنه لا داعي لمعرفة فيما إذا كان الجسيم يغير من إتجاه حركته أو لا. لأن المطلوب إزاحة الجسيم خلال الفترة الزمنية $[0 , 2]$.

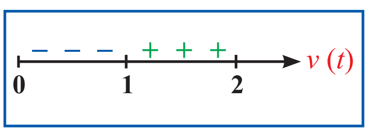
$$\begin{aligned} s &= \int_0^2 (3t^2 - 3)\, dt \\ &= \left[(t^3 - 3t)\right]_0^2 \\ &= [(8 - 6) - 0] = 2 \end{aligned}$$

إذن ستكون إزاحة الجسيم 2 cm إلى اليمين من نقطة بداية الحركة بعد مرور ثانيتين .

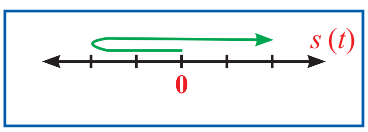
تحقق

2) يتحرك جسيم في خط مستقيم من النقطة O بحيث تعطى سرعته في أي لحظة بالدالة $v(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$ cm/s .
أوجد إزاحة (موقع) الجسيم عن النقطة O بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة.

بالرجوع إلى المثال 1 كانت إشارة دالة السرعة اللحظية موضحة بالمخطط المجاور (1) وبالاستعانة بالمثال 2 فإنه يتضح من إشارة دالة السرعة اللحظية أن الجسيم يبدأ الحركة من موقعه الأصلي O متجهاً نحو اليسار وحدتين ثم يعكس اتجاه حركته وينطلق نحو اليمين اربع وحدات و يمثل الشكل المجاور (2) مسار هذا الجسيم وبالتالي تكون المسافة الكلية المقطوعة هي 6 وحدات ، بينما تكون إزاحته بعد مرور ثانيتين هي وحدتين إلى يمين النقطة O



شكل (1)



شكل (2)

تعلمت سابقا أن **دالة العجلة / التسارع** (acceleration) $a(t)$ هي مشتقة دالة السرعة اللحظية $v(t)$ وبما أن التكامل هو العملية العكسية للتفاضل فإنه يمكننا كتابة قاعدة حساب السرعة اللحظية على النحو التالي:

مفهوم — السرعة

إذا تحرك جسم ما خلال الفترة الزمنية $[t_1, t_2]$ وكانت دالة العجلة (التسارع) لحركة الجسم هي $a(t)$

فإن السرعة اللحظية خلال الفترة من t_1 إلى t_2 هي :

$$v = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt$$

وبشكل عام فإن دالة السرعة اللحظية عند أي لحظة t تعطى بالعلاقة : $v(t) = \int a(t)\,dt$

مثال 3 : حساب السرعة

يتحرك جسيم في خط مستقيم بتسارع $a(t) = 2 - 6t \ \text{cm/s}^2$. فإذا كان $v(1) = 2 \ \text{cm/s}$ ، فأوجد السرعة اللحظية للجسيم عندما يكون الزمن $t = 3$ ثوانٍ.

$v(t) = \int (2 - 6t)\,dt = 2t - 3t^2 = c$

$\therefore v(1) = 2$

$\Rightarrow 2 = 2 - 3 + c$

$\Rightarrow c = 3$

$\Rightarrow v(t) = 2t - 3t^2 + 3$

$\therefore v(3) = 2(3) - 3(3)^2 + 3$

$\therefore v(3) = -18$

إذن السرعة اللحظية للجسيم عندما يكون الزمن $t = 3$ ثواني هي 18cm/s عكس اتجاه حركة الجسيم عند بدء حركته .

تحقق

3) يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث يكون تسارعه في أي لحظة زمنية $a(t) = e^{-2t} \ \text{cm/s}^2$. إذا كانت سرعة الجسيم الابتدائية $v(0) = 4 \ \text{cm/s}^{-1}$. أوجد سرعة الجسيم اللحظية عندما يكون الزمن $t = 1$ ثانية .

إرشاد

- السرعة الابتدائية للجسيم هي سرعته عندما $t = 0$
- الحركة من السكون تعني سرعته عندما $t = 0$ هي $v(0) = 0$

مما سبق نعلم أن المسافة الكلية هي تكامل دالة السرعة اللحظية (إذا لم يغيِّر الجسم من إتجاه حركته)، أي هي تكامل معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن، ومنه يمكن تعميم هذه الفكرة للكميات الفيزيائية على النحو التالي :

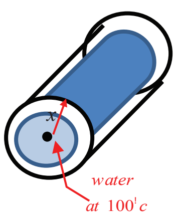
التغير الكلي في الكمية الفيزيائية يساوي تكامل **معدل تغير** (rate of change) هذه الكمية الفيزيائية.

مثال 4 : حساب درجة الحرارة

أنبوب معدني نصف قطره الخارجي 4 cm ونصف قطره الداخلي 2 cm. يمر من خلاله ماء درجة حرارته 100° C. تتناقص درجة الحرارة خلال المعدن من الداخل إلى الخارج حسب العلاقة $\frac{dT}{dx} = \frac{-10}{x}$ حيث x هي المسافة من المحور المركزي وأيضا $2 \le x \le 4$. أوجد درجة حرارة السطح الخارجي للأنبوب.

- أوجد $T(x)$.

كامل الطرفين بالنسبة للمتغير x لإيجاد $T(x)$.



$\because \frac{dT}{dx} = \frac{-10}{x}$

$\Rightarrow T(x) = \int \frac{-10}{x}\,dx$

$\therefore T(x) = -10 \ln|x| + c$ .... (1)

إرشاد

في مثال 4 يمكن حساب درجة الحرارة عند السطح الخارجي بإيجاد كمية الحرارة المفقودة (من 100) خلال الأنبوب كما يلي:

$T(x) = \int_2^4 \frac{-10}{x}\,dx$

$= \Big[-10 \ln|x|\Big]_2^4$

$= -6.9$

درجة حرارة السطح =

$100 + (-6.9) = 93.1$

• **أوجد قيمة c**

لإيجاد قيمة c نعوض عن $T(2) = 100$, $x = 2$ في المعادلة (1)

$$-10 \ln(2) + c = 100$$

$$c = 100 + 10 \ln(2)$$

• **عوض عن قيمة c في المعادلة (1)**

$$\therefore T(x) = -10 \ln x + 100 + 10 \ln(2)$$

$$= 10(\ln 2 - \ln x) + 100$$

$$\therefore T(x) = 10 \ln\left(\frac{2}{x}\right) + 100 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

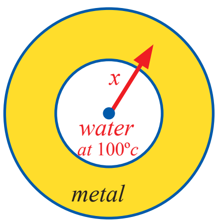
• **أوجد درجة حرارة السطح الخارجي للأنبوب عندما $x = 4$**

$$\therefore T(4) = 10 \ln\left(\frac{2}{4}\right) + 100 = 93.1$$

إذن درجة حرارة السطح الخارجي للأنبوب عندما $x = 4$ هي 93.1^oC

تحقق

4) أنبوب معدني نصف قطره الخارجي $6\ cm$ ونصف قطره الداخلي $3\ cm$. يمر من خلاله ماء درجة حرارته 100^oC. معدل تناقص درجة الحرارة خلال المعدن هو $\frac{dT}{dx} = \frac{-10}{x^{0.063}}$ حيث x هي المسافة من المحور المركزي وأيضًا $3 \leq x \leq 6$. أوجد درجة حرارة السطح الخارجي للإنبوب.



تمارين 6-5

مثال 2-1

1) جسيم دالة سرعته اللحظية $v(t) = 1 - 2t\ cms^{-1}$ ويتحرك في خط مستقيم.

a) أوجد المسافة الكلية المقطوعة في الثانية الأولى من الحركة.

b) أوجد الإزاحة (الموقع) للجسيم نهاية الثانية الأولى.

2) جسيم دالة سرعته اللحظية $v(t) = t^2 - t - 2\ cms^{-1}$

a) أوجد المسافة الكلية المقطوعة في الثواني الثلاثة الأولى من الحركة.

b) أوجد الإزاحة (الموقع) للجسيم نهاية الثانية الثالثة.

مثال 3

3) يتحرك جسيم من السكون ابتداء من نقطة الأصل وعلى خط مستقيم بعجلة مقدارها $-6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)\ cms^{-2}$ احسب سرعة الجسيم عندما $t = 1$ ثانية.

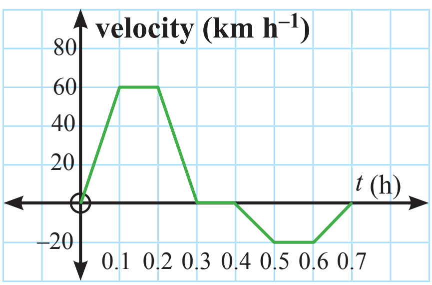
4) يتحرك جسيم ابتداء من نقطة الأصل وعلى خط مستقيم بعجلة مقدارها $4e^{4t}\ ms^{-2}$ وكانت سرعته الابتدائية تساوي $2\ ms^{-1}$. احسب سرعة الجسيم عندما $t = 3$ ثانية.

مثال 4

5) معدل التكلفة لإنتاج x من الأدوات الصناعية في اليوم الواحد هو $C'(x) = 3.15 + 0.004\ x$. ما هي التكلفة الكلية في اليوم الواحد لإنتاج 800 أداة ، إذا علمت أن التكلفة الثابتة قبل بدء الإنتاج هي QR 450 في اليوم الواحد ؟

6) يقوم مجموعة من العمال بحفر حفرة في التراب ، فإذا كان معدل حجم التراب بالمتر المكعب المرفوع في الساعة يتعين بالعلاقة $\frac{dv}{dt} = 10 - \frac{2}{3}t$ (حيث t الزمن بالساعات)، احسب حجم التراب المرفوع في 3 ساعات.

7) سيارة تسير على طريق مستقيم ، دالة سرعتها اللحظية مرسومة جانبًا :



a) أي جزءٍ من المخطط البياني يبين أن السيارة تتحرك إلى الخلف ؟

b) أوجد المسافة الكلية التي قطعتها السيارة.

c) أوجد الإزاحة النهائية (الموقع النهائي) للسيارة.

8) قارب يبحر في خط مستقيم. سرعته اللحظية هي $v(t) = \frac{100}{(t+2)^2}\ ms^{-1}$. أوجد الزمن الذي يستغرقه القارب ليقطع مسافة 30 m .

9) جسيم يتحرك في خط مستقيم بسرعة لحظية $v(t) = t^2 - 6t + 8\ ms^{-1}$

a) ارسم مخطط إشارة $v(t)$ (السرعة اللحظية).

b) اشرح بالضبط ما يحدث للجسيم في الثواني الخمسة الأولى من الحركة.

c) بعد 5 ثواني ، ما هو بعد الجسيم عن موقعه الأصلي ؟

d) أوجد المسافة الكلية التي يقطعها الجسيم في الثواني الخمسة الأولى من الحركة.

10) قطار يتحرك على مسار مستقيم بعجلة (تسارع) $a(t)=\frac{t}{10}-3\ \mathrm{ms^{-2}}$. إذا كانت السرعة اللحظية الابتدائية للقطار هي $45\ \mathrm{ms^{-1}}$ ، حدد المسافة الكلية المقطوعة في الدقيقة الأولى.

11) جسم سرعته اللحظية الإبتدائية $20\ \mathrm{ms^{-1}}$ ويتحرك في خط مستقيم ودالة العجلة له $a(t)=4e^{\frac{-t}{20}}\ \mathrm{ms^{-2}}$

a) بين أنه كلما زادت t فإن سرعة الجسم اللحظية تقترب من قيمة محددة.

b) أوجد المسافة الكلية المقطوعة في أول 10 ثواني من الحركة.

12) اشتركت متسابقتان لمدة أربع دقائق في الكتابة على الآلة الكاتبة فكانت سرعة المتسابقة الأولى تعطى من العلاقة $\frac{dw}{dt}=-6t+12t+90$ كلمة / دقيقة حيث w عدد الكلمات التي تكتبها خلال زمن t دقيقة. وسرعة المتسابقة الثانية تعطى بالعلاقة $\frac{dk}{dt}=-6t^2+15t+85$ كلمة / دقيقة حيث k عدد الكلمات التي تكتبها خلال زمن t دقيقة. أيّ المتسابقتين تكتب كلمات أكثر من الأخرى؟

مسائل مهارات التفكير العليا

13) يتحرك جسيم في خط مستقيم بحيث أن تسارعه يعطى بالعلاقة $a(t)=\frac{2k}{t^3}\ \mathrm{ms^{-2}}$ حيث t الزمن بالثواني، $k\in\mathbb{R}$، إذا كانت سرعة الجسيم $4\ \mathrm{ms^{-1}}$ عندما $t=1$ ، أوجد المسافة الكلية المقطوعة في الفترة $[0\ ,9]$ إذا علمت أن السرعة تؤول إلى $6\ \mathrm{ms^{-1}}$ مع ازدياد الزمن.

14) ابتدأ جسم الحركة من نقطة الأصل في خط مستقيم وبسرعة ابتدائية v_0 ، و سار بتسارع ثابت c ، فإذا كانت سرعة الجسم بعد t من الثواني هي v ، و المسافة المقطوعة هي d ، فأثبت صحة القوانين الآتية :

a) $v=v_0+c\,t$

b) $d=v_0\,t+\frac{1}{2}c\,t^2$

6-6 المعادلات التفاضلية
Differential Equations

أفكار الدرس

- تعرُّف مفهوم المعادلات التفاضلية وحلها بطريقة فصل المتغيرات.
- تكوين معادلات تفاضلية بسيطة من الدرجة الاولى وحلها.
- حل مسائل حياتية وفيزيائية باستعمال معادلات تفاضلية بسيطة تتضمن النمو والاضمحلال.

المعايير:

12A.11.1
12A. 11.2

المصطلحات:

معادلة تفاضلية
differential equation

فصل المتغيرات
separation of variables

معادلة تفاضلية قابلة للفصل
separable differential equation

الحل العام
general solution

الحل الخاص
particular solution

تمهيد

1. اكتب معادلة الدائرة التي مركزها $(0, 0)$ ونصف قطرها r .

2. أوجد $\frac{dy}{dx}$.

3. ما اسم الطريقة التي استخدمتها لتجد $\frac{dy}{dx}$ ؟

4. هل يمكنك باستخدام التكامل العودة من المعادلة التي حصلت عليها في الفرع (3) إلى معادلة الدائرة الأصلية التي كتبتها في الفرع (1) ؟

إن المعادلة الناتجة من الإجابة على السؤال (3) من الأسئلة السابقة $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$ تسمى **معادلة تفاضلية** (differential equation) من الدرجة الأولى لاحتوائها على المشتقة $\frac{dy}{dx}$ ، وتكون معادلة الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$ الناتجة عن إجابة السؤال (1) حلاً للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$

مفهوم — المعادلة التفاضلية

- المعادلة التفاضلية هي المعادلة التي تتضمن مشتقة أو مشتقات.
- حل المعادلة التفاضلية هو إيجاد علاقة تربط متغيرات المعادلة التفاضلية بحيث تحقق هذه المعادلة.

ويمكن فصل متغيرات المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$ على النحو التالي : $y\ dy = -x\ dx$

وتعتبر مثالاً على **معادلة تفاضلية قابلة للفصل** (separable differential equation).

مفهوم — المعادلة التفاضلية القابلة للفصل

المعادلة التفاضلية القابلة للفصل هي المعادلة التي يمكن كتابتها على الصورة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

ولحل المعادلة التفاضلية القابلة للفصل $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$ فإننا نضرب طرفي المعادلة بكل من $g(y)$ و dx لفصل المتغيرات ثم نكامل الطرفين .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

$$g(y)\ dy = f(x)\ dx$$

$$\therefore \int g(y)\ dy = \int f(x)\ dx$$

والحل بهذه الطريقة يتضمن قيمة (قيما) ثابتة مجهولة ويسمى **الحل العام** للمعادلة التفاضلية (general solution)

مثال 1 : إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = ky$

- افصل متغيرات المعادلة التفاضلية

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = k$$
$$\frac{1}{y}\,dy = k\,dx$$

- أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية بإيجاد تكامل الطرفين

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int k\,dx$$
$$\ln|y| = kx + c$$
$$|y| = e^{kx+c}$$
$$y = \pm e^{c}\,e^{kx}$$

افرض أن $A = \pm e^{c}$

$$\therefore\ y = Ae^{kx}$$

إذن الحل العام للمعادلة التفاضلية هو $y = A\,e^{kx}$

إرشاد

يمكننا التحقق من صحة الحل بإيجاد المشتقة وتعويضها في المعادلة الأصلية، ونعوض $y = Ae^{kx}$ أيضًا في الطرف الأيمن.

تحقق

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية :

1A) $\frac{dy}{dx} = x\,y$ **1B)** $y' = k\,e^{-y}$

ولإيجاد قيمة الثابت (قيم الثوابت) المجهولة في الحل العام للمعادلات التفاضلية نستعمل الشروط الابتدائية للحصول على **الحل الخاص للمعادلة التفاضلية** (particular solution).

مثال 2 : إيجاد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $(1+x^2)\,\frac{dy}{dx} = 2xy$ إذا كانت $y = 2$ عندما $x = 0$.

- افصل متغيرات المعادلة التفاضلية

$$dy = \frac{2x}{1+x^2}\,y\,dx$$
$$\frac{dy}{y} = \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

- أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية بإيجاد تكامل الطرفين

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$
$$\ln|y| = \ln|1+x^2| + c$$
$$\ln|y| - \ln|1+x^2| = c$$
$$\ln\left|\frac{y}{1+x^2}\right| = c$$
$$\left|\frac{y}{1+x^2}\right| = e^{c}$$
$$\frac{y}{1+x^2} = \pm e^{c} = A$$
$$\therefore y = A\,(1+x^2) \ ....(1)$$

- **أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية**

أوجد قيمة الثابت A بالتعويض عن $x = 0$ و $y = 2$ في المعادلة (1)

$2 = A\,(1 + 0) \Rightarrow A = 2$

عوض عن $A = 2$ في معادلة (1)

$\therefore y = 2\,(1 + x^2)$ ....(2)

إذن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية هو $y = 2\,(1 + x^2)$

تحقق

2) أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = -\,4\,xy$ إذا كانت $y = 1$ عندما $x = 0$

ويمكن الاستفادة من حل المعادلات التفاضلية في بعض تطبيقات الهندسة التحليلية كما يتضح في المثال التالي.

مثال 3: إيجاد معادلة منحنى دالة

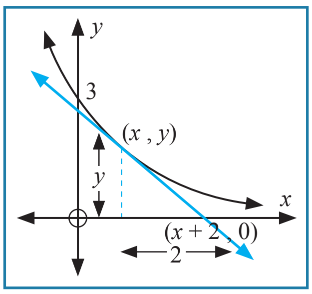
إذا كان مماس الدالة $y = f(x)$ عند النقطة (x, y) يقطع محور x عند $x + 2$ وكان المنحنى يقطع محور y عند $y = 3$. أوجد معادلة هذا المنحنى على الصورة $y = f(x)$

- **كوّن المعادلة التفاضلية**

بما أن المماس يمر بالنقطتين (x, y) و $(x + 2, 0)$ كما يتضح في الشكل أدناه فإن ميله هو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 0}{x - (x + 2)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{2}$$



- **افصل متغيرات المعادلة التفاضلية**

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{-1}{2}\,dx$$

- **أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية بإيجاد تكامل الطرفين**

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{-1}{2}\,dx$$

$$\ln|y| = \frac{-1}{2}x + c$$

$$\therefore |y| = e^{\frac{-1}{2}x + c}$$

$$y = \pm\, e^{c}\, e^{\frac{-1}{2}x}$$

$$y = Ae^{\frac{-1}{2}x}$$

- **أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية**

عوض $y = 3$, $x = 0$ في الحل العام للحصول على الحل الخاص

$$\therefore 3 = Ae^{0} \Rightarrow A = 3$$

$$\therefore y = 3\,e^{\frac{-1}{2}x}$$

إذن معادلة هذا المنحنى هي $y = 3\,e^{\frac{-1}{2}x}$.

تحقق

3) إذا كان مماس الدالة $y = f(x)$ عند النقطة (x, y) يقطع محور y عند $y - 1$ وكان منحنى الدالة يمر بالنقطة $(1, 2)$. أوجد معادلة هذا المنحنى على الصورة $y = f(x)$.

تظهـر المعادلات التفاضليـة في كثير من التطبيقات الحياتية والفيزيائية كمسـائل النمو والاضمحلال، فإذا كان معـدل التغير في الكمية y يتناسـب طرديًا مع قيمة y ، حيـث أن y دالة بدلالة الزمن t فيمكن التعبير عن هذا التناسب كما يلي :

$$\frac{dy}{dt} = k\,y$$

معدل التغير في الكمية y

ثابت التناسب الطردي مع الكمية y

وهذا التناسب يمثل معادلة تفاضلية قابلة للفصل ، والحل العام لهذه المعادلة التفاضلية يكون :

- دالة نمو أسي إذا كانت $k > 0$
- دالة اضمحلال أسي إذا كانت $k < 0$

مثال 4 : **من واقع الحياة**

يتدفـق المـاء من خزان بحيث يكون ارتفاع الماء المتبقي h مترًا فوق قاعدة الخزان بعد t ثانية يحقق المعادلة التفاضلية $\frac{dh}{dt} = -kh$ حيث k عدد ثابت موجب. إذا كان الارتفاع الابتدائي للماء هو 2 مترًا ثم أصبح بعد 10 ثوان مترًا واحدًا. أوجد معادلة ارتفاع الماء المتبقي في الخزان في أي زمن t .

- **أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية**

$$\because \frac{dh}{dt} = -kh$$

$$\therefore \int \frac{dh}{h} = \int -k\ dt$$

$$\ln|h| = -kt + c$$

$$h = \pm e^{-kt+c}$$

$$h = Ae^{-kt}$$

- **أوجد قيمة الثابت A بالتعويض عن $t = 0\ ,\ h = 2$**

$$h = Ae^{-kt}$$

$$2 = Ae^{-k(0)}$$

$$A = 2$$

$$\therefore h = 2e^{-kt}$$

- **أوجد قيمة الثابت k بالتعويض عن $t = 10\ ,\ h = 1$**

$$1 = 2e^{-k(10)}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-10k}$$

$$\ln\frac{1}{2} = -10\,k$$

$$k = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-10}$$

$$k \approx 0.069$$

$$h = 2\,e^{-0.069\,t}$$

إذن ارتفاع الماء في الخزان عند أي زمن هو $h = 2\,e^{-0.069\,t}$

تحقق

4) خزان اسـطواني قائم مملوء بالماء، بدأ الماء يتسـرب منه بمعدل يتناسـب طرديًا مع حجم الماء المتبقي في الخـزان ، إذا كان حجـم الماء فـي الخزان عند البدايـة 1000 لتر ، وبعد مرور 20 دقيقـة أصبح 500 لتر . فكم لتراً سيتبقى في الخزان بعد ساعة؟

مثال 5 : من واقع الحياة

معدل تزايد العدد الكلي للبكتيريا في خلية يتناسب طرديًا مع العدد الكلي للبكتيريا في نفس الخلية. إذا كان العدد الابتدائي للبكتيريا $N_0 = 1000$ وكان عدد البكتيريا قد زاد بنسبة 10% في الساعة الأولى.

a) اكتب المعادلة التفاضلية التي تمثل معدل ازدياد البكتيريا في الخلية.

اعتبر أن عدد البكتيريا N في أي لحظة t لتكوين المعادلة التفاضلية

$$\because \frac{dN}{dt} \propto N$$

$$\therefore \frac{dN}{dt} = k\ N$$

b) حل المعادلة التفاضلية لإيجاد صيغة لتزايد عدد البكتيريا في الخلية

- **أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية**

$$\because \frac{dN}{dt} = k\ N$$

$$\therefore \int \frac{dN}{N} = \int k\,dt$$

$$\ln|N| = kt + c$$

$$|N| = e^{kt+c}$$

$$N = \pm e^{c} e^{kt}$$

$$N = Ae^{kt} \text{ ....(1)}$$

- **أوجد قيمة الثابت A بالتعويض عن $N = 1000$, $t = 0$**

$$1000 = A\,e^{0}$$

$$\Rightarrow 1000 = A$$

$$\therefore N = 1000e^{kt} \text{ ....(2)}$$

- **أوجد قيمة الثابت k**

عندما $t = 1$ فإن قيمة N في الساعة الأولى هي

$$N = (1 + 10\%)\ 1000 = 1.1\ (1000)$$

عوض عن $t = 1$ وقيمة N في الساعة الأولى في المعادلة (2)

$$1.1\ (\cancel{1000}) = \cancel{1000}\ e^{k(1)}$$

$$1.1 = e^{k}$$

$$\ln(1.1) = \ln e^{k}$$

$$\ln(1.1) = k$$

$$\Rightarrow N = 1000\ e^{t\ln 1.1}$$

$$N = 1000\ e^{\ln(1.1)^t}$$

$$\therefore N = 1000\ (1.1)^t$$

إذن صيغة تزايد عدد البكتيريا في الخلية هي $N = 1000\ (1.1)^t$

تحقق

5) في عملية تكرير 100 طن من السكر الخام، إذا كان معدل التغير في وزن السكر الخام يتناسب طرديا مع وزن السكر الخام W، فإذا تم تكرير 80 % من السكر الخام خلال 10 ساعات، فما كمية السكر الخام المتبقية بعد مرور 20 ساعة من بدء عملية التكرير؟

إرشاد

خواص اللوغاريتمات:

تذكر أن :

- $n \ln x = \ln x^n$
- $e^{\ln x} = x$

تمارين 6-6

مثال 1 أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية التالية :

1) $\frac{dy}{dx} = 5y$ 2) $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}$

3) $\frac{dp}{dt} = 3\sqrt{p}$ 4) $\frac{dQ}{dt} = 2Q + 3$

5) $xy = y'$ 6) $y' = xe^{y}$

مثال 2 أوجد الحل الخاص لكل من المعادلات التفاضلية التالية :

7) $\frac{dy}{dx} = 4y \quad ; \quad x = 0 \ , \ y = 10$ 8) $\frac{dM}{dt} = -3M \quad ; \quad M(0) = 20$

9) $\frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{y}}{3} \quad ; \quad t = 24 \ , \ y = 9$ 10) $\frac{dp}{dt} = 2p + 3 \quad ; \quad p(0) = 2$

11) $\frac{dy}{dx} = k\sqrt{y} \quad ; \quad k \text{ is a constant} \ , \ y(4) = 1 \ , \ y(5) = 4$

مثال 3 12) المقطع من محور y لمنحنى $y = f(x)$ هو 2 ، ومماس المنحنى عند النقطة (x, y) يقطع محور x عند $x + 3$.

أوجد معادلة هذا المنحنى على الصورة $y = f(x)$.

13) إذا كان ميل المماس لمنحنى عند أي نقطة (x, y) يساوي مثليّ الإحداثي y عند تلك النقطة، فأثبت أن معادلة المنحنى هي دالة أسية.

مثال 4 14) عند إغلاق المذياع الذي يعمل بالترانزستور، فإن شدة التيار تتناقص وفقًا للمعادلة التفاضلية $\frac{dI}{dt} = -kI$ حيث k ثابت.

إذا انخفضت شدة التيار إلى 10% في الثانية الأولى، فما هو الزمن الذي تستغرقه شدة التيار لتصل إلى $0.1\ \%$ من قيمتها الأصلية ؟

15) قطعة من المعدن كتلتها $1\ kg$ أُسقطت من السكون في الماء. بعد t من الثواني كانت سرعتها اللحظية هي $v\ m/s$

ومعادلة حركتها هي $\frac{dv}{dt} = g - 4v$ حيث g هو ثابت الجاذبية.

a) أثبت أن $v = \frac{g}{4}(1 - e^{-4t})$

b) أوجد الزمن الذي تسقط عنده قطعة المعدن بسرعة $\frac{g}{10}\ m/s$

مثال 5

16) معدل تزايد العدد الكلي لنوع من البكتيريا يتناسب طرديًا مع العدد الحالي لهذا النوع من البكتيريا، إذا كان عدد البكتيريا في البداية 1000 ، وتضاعف هذا العدد خلال 4 ساعات ، فما عدد البكتيريا بعد مرور يوم كامل؟

17) يتحرك جسيم في خط مستقيم بسرعة مقدارها $v\ m/s$ ، إذا كان تسارعه يتناسب طرديًا مع سرعته v ، إذا كانت سرعته الابتدائية $4\ m/s$ ، ثم أصبحت سرعته $v = 6$ عندما $t = 4$ sec ، فما سرعة الجسيم عندما $t = 5$ sec

أوجد حل كلٍ من المعادلات التفاضلية التالية :

18) $\frac{dz}{dr} = z + zr^2 \quad , \quad z(0) = 1$

19) $(1 + x)\frac{dy}{dx} = 2xy \ , \ y(0) = e^2$

مسائل مهارات التفكير العليا

20) معدل تبخر الماء من بحيرة يتناسب طرديًا مع حجم الماء المتبقي. أوجد النسبة المئوية للماء المتبقي بعد 50 يومًا دون أن تمطر، إذا كان 50% من الماء يتبخر خلال 20 يومًا.

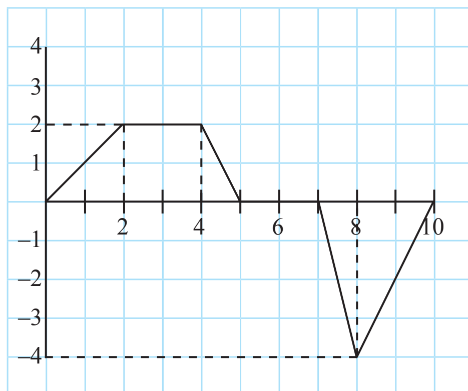
21) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية : $\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} = \frac{(3x-1)^9}{y^2}$

اختبار الوحدة السادسة

1) ما مساحة المنطقة بين المخطط البياني للدالة $y = \frac{1}{4}x^3$ حيث ومحور x والمستقيمين $x = 2$ ، $x = -2$ ؟

A) 0 B) 1
C) 2 D) 8

2) المخطط البياني للدالة $f(x)$ معطى في الشكل أدناه.



استعمل الشكل في حساب قيمة $\int_0^{10} |f(x)|\, dx$.

A) 13 B) 7.5
C) 6 D) 1.5

3) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $y = x^2 + 1$ والمستقيم $y = 5$.

A) 0 B) $\frac{16}{3}$
C) $\frac{28}{3}$ D) 8

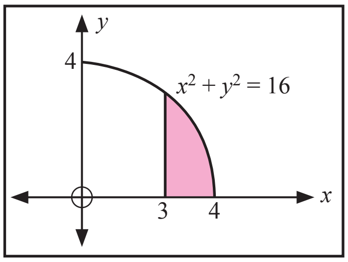
4) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $y = x^3 - x$ والمستقيم $y = x$.

A) 0 B) 1
C) 2 D) 4

5) أوجد حجم المجسم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين $y = e^{2x}$ والمستقيمين $y = \ln 4$ ، $y = \ln 2$ دورة كاملة حول المحور x

A) 12π B) 60π
C) 40π D) 20π

6) ما حجم المجسم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة في الشكل أدناه حول المحور x ؟



A) $\frac{11\pi}{3}$ B) 21π
C) $\frac{128\pi}{3}$ D) 39π

7) أوجد حجم المجسم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين $y = x^3$ و $y = 4x$ حيث $x \geq 0$ دورة كاملة حول المحور x.

A) $\frac{1024\pi}{21}$ B) $\frac{512\pi}{21}$
C) 8π D) 4π

8) ما حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين $y = 3x^2$ و $y = 3x$ دورة كاملة حول المحور x ؟

A) $\frac{1}{2}\pi$ B) π
C) $\frac{12}{5}\pi$ D) $\frac{6}{5}\pi$

9) جسيم يتحرك على خط مستقيم بحيث أن سرعته v معطاة بالعلاقة $v(t) = 4 - 2t\ cms^{-1}$ حيث أن t الزمن بالثواني.
ما المسافة الكلية المقطوعة في الفترة الزمنية $[0, 3]$ من الحركة ؟

A) 5 cm B) 4 cm
C) 3 cm D) 1 cm

10) يتحرك جسيم في خط مستقيم بتسارع (عجلة) مقدارها $a(t) = \frac{2}{t+1}\ ms^{-2}$ حيث t الزمن بالثواني.
إذا كانت سرعة الجسيم الابتدائية هي $v(0) = 3\ ms^{-1}$ ، فما هي سرعة الجسيم عندما $t = 2$ ؟

A) ln 6 B) ln 9
C) 3 + ln 6 D) 3 + ln 9

11) ما الحل الخاص بالمعادلة التفاضلية

$\frac{dy}{dx} = 2xy$ حيث $y = 10$ عندما $x = 0$ ؟

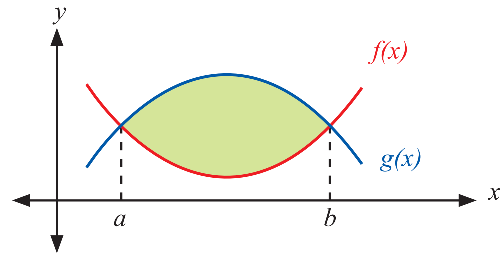
A) $y = e^{x^2}$ B) $y = 10\, e^{x^2}$
C) $y = e^x$ D) $y = 10\, e^x$

12) عند إيداع مبلغ N ريالاً في بنك بحيث يزداد هذا المبلغ بمعدل 0.03 من قيمته سنويًا، أي مما يلي يمثل المعادلة التفاضلية التي تعطي معدل الزيادة في المبلغ ؟

A) $\frac{dN}{dt} = 0.03N$ B) $\frac{dN}{dt} = 0.03$

C) $\frac{dt}{dN} = 0.03N$ D) $\frac{dt}{dN} = 0.03$

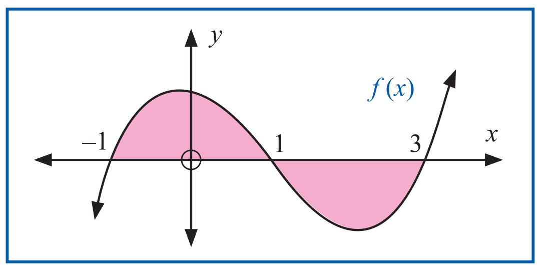
13) معتمدًا على الشكل أدناه، إذا علمت أن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الدالتين $f(x)$, $g(x)$ تساوي 6 وحدات مربعة، وكان $\int_a^b f(x)\,dx = 10$ فما قيمة $\int_a^b g(x)\,dx$ ؟



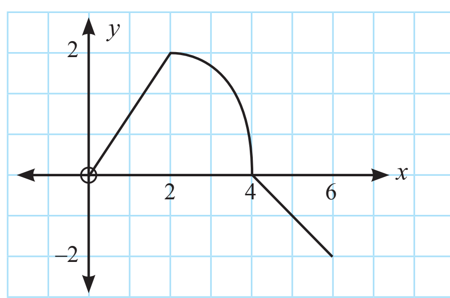
A) 10 B) 16

C) 1 D) – 4

14) بالاعتماد على الشكل المجاور هل صحيح أن $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ يمثل مساحة المنطقة المظللة ؟ وضح إجابتك باختصار.



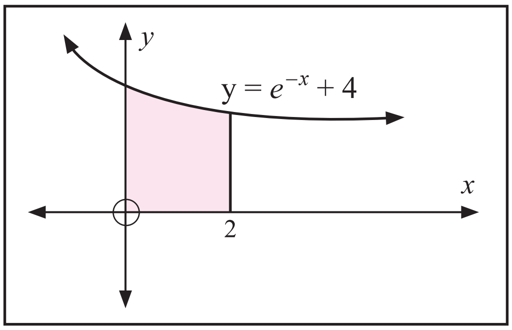
15) بالاعتماد على بيان الدالة $y = f(x)$ الموضح جانبًا أوجد:



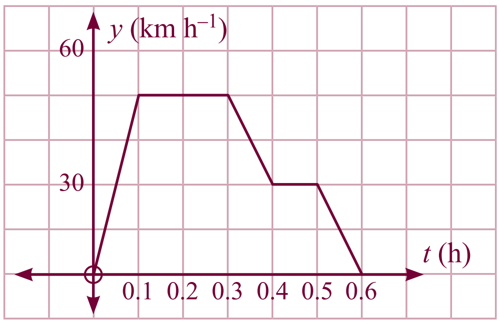
A) $\int_0^4 f(x)\,dx$ B) $\int_4^6 f(x)\,dx$

C) $\int_0^6 f(x)\,dx$ D) $\int_0^6 |f(x)|\,dx$

16) أوجد حجم المجسم الدوراني المتكون عند دوران المنطقة المظللة بزاوية 360 حول محور x



17) بيان دالة السرعة اللحظية لعداء رياضي موضح أدناه. أوجد المسافة الكلية التي قطعها هذا العداء.



18) جسيم يتحرك بخط مستقيم، وكانت دالة تسارعه هي $a(t) = 2t - 5\ ms^{-1}$ إذا كانت سرعة الجسيم الابتدائية $4\ ms^{-1}$:

a) بين أن سرعته اللحظية تعطى بالعلاقة $v(t) = t^2 - 5t + 4\ ms^{-1}$

b) ما مقدار المسافة التي يقطعها الجسيم خلال الثواني الأربعة الأولى من الحركة ؟

c) أوجد الازاحة (الموقع) للجسيم بعد 4 ثواني.

19) أوجد الحل العام لكل من المعادلات التفاضلية التالية :

a) $\frac{dy}{dx} = k(A - y)$ b) $\frac{dy}{dx} = 4x - xy^2$

20) آلة صناعية قيمتها عند الشراء QR 2500 وكانت قيمتها تتناقص بمرور الزمن وفق العلاقة $\frac{dC}{dt} = -500\,(t+1)^{-2}$ حيث C تكلفة الآلة بعد t سنة من شرائها. احسب قيمة الآلة بعد 3 سنوات من شرائها.

21) إذا كان معدل الزيادة في عدد الأسماك في بركة يساوي 0.4 عددها الحالي شهريًا فإذا كان عدد الأسماك الابتدائي في البركة تقريبًا e^{60} ، أوجد عدد الأسماك بعد سنة.

الوحدة 7

المتجهات
Vectors

أفكار الوحدة

- تعـرف المتجهات في المســتوى الإحداثــي والفضاء ثلاثي الأبعاد.
- تعرف خصائص المتجهات واستعمالها.
- إجراء العمليات على المتجهات في المســتوى والفضاء ثلاثي الأبعاد.
- تعـرف متجهــات الوحدة الأساســية واستعمالها.
- إيجـاد حاصـل ضرب متجهـين قياسياً.
- إيجـاد قيــاس الزاويــة بــين متجهين والزوايا الاتجاهية لمتجه ما.
- حـل مســائل حياتيــة على المتجهات.

الربط مع الحياة:

يعتبر نظام الملاحة العالمي (GPS) من أهم التطبيقات التي ســاهمت في تســهيل عملية الاســتدلال على المواقع وتعيينها سواءً في بعدين أو ثلاثة أبعاد، ويقوم هذا النظام بتعيين المواقع والمسافات والاتجاهات اللازمة للوصول إلى نقطة الهدف ، حيث يقرن المسافة بالاتجاه مثل (أكمل بشكل مستقيم مسافة 8.14km)

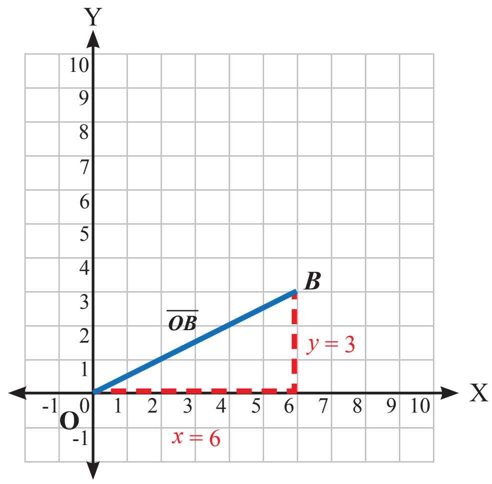
وكما تعلم، فإن تعيين المســافة وحدها بين نقطة الانطلاق ونقطة الوصول لا يكفي للاســتدلال على الموقع المراد الوصول إليه، ولا بد من تعيين اتجاه الحركة أيضاً بحيث تتشكل كمية ذات قياس (مقدار) ولها اتجاه.

تهيئة الوحدة السابعة

مراجعة

مثال 1 :

مثل القطعة المستقيمة OB في المستوى الإحداثي إذا علمت أن $B\ (6\ ,3)$ ، $O\ (0\ ,0)$ ، وبين مسقطيها على محوري $x\ ,y$



مثال 2 :

إذا كانت $B\ (3\ ,\ -5)$ ، $A\ (-2\ ,\ 7)$ نقطتين في المستوى الإحداثي، أوجد المسافة بينهما.

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(3 - (-2))^2 + (-5 - 7)^2}$$

$$AB = \sqrt{169}$$

AB =13 units

مثال 3 :

أوجد إحداثيي نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، إذا علمت أن

$B\ (-2\ ,\ 0)$ ، $A\ (10\ ,\ -6)$

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\ ,\ \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

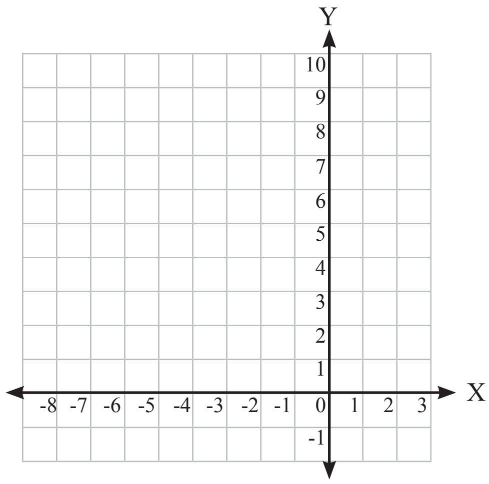
$$= \left(\frac{10 + (-2)}{2}\ ,\ \frac{-6 + 0}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{8}{2}\ ,\ \frac{-6}{2}\right)$$

$$= (4\ ,\ -3)$$

اختبار

1) مثل القطعة المستقيمة OB في المستوى الإحداثي إذا علمت أن $B\ (-4\ ,2)$ ، $O\ (0\ ,0)$ ، وبين مسقطيها على محوري $x\ ,y$



2) إذا كانت $B\ (5\ ,-6)$ ، $A\ (-1\ ,\ 2)$ نقطتين في المستوى الإحداثي، أوجد المسافة بينهما.

3) أوجد إحداثيي نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، إذا علمت أن

$B\ (-3\ ,\ 8)$ ، $A\ (5\ ,\ 2)$

مقدمة في المتجهات
Introduction to Vectors

7-1

أفكار الدرس

- تمييز الكميات القياسية والكميات المتجهة.
- تعرف مفهوم المتجه ورمزه وتمثيله هندسياً.
- تعرف خصائص المتجهات واستعمالها.
- إجراء العمليات على المتجهات هندسياً.
- حل مسائل حياتية على المتجهات.
- تعرف الصورة التركيبية للمتجه وتمثيله هندسياً في المستوى .

المعايير:

11A.10.2 , 11A.10.4
11A.10.6 , 12A.13.1
12A.13.2 , 12A.13.4

المصطلحات:

الإزاحة displacement
متجه vector
المتجهات المتساوية equal vectors
المتجهات المتوازية parallel vectors
المتجه الصفري the zero vector
سالب (معكوس) المتجه negative vector
جمع المتجهات vectors addition
طرح المتجهات vectors subtraction
الضرب بعدد حقيقي scalar multiplication
الصورة التركيبية component form

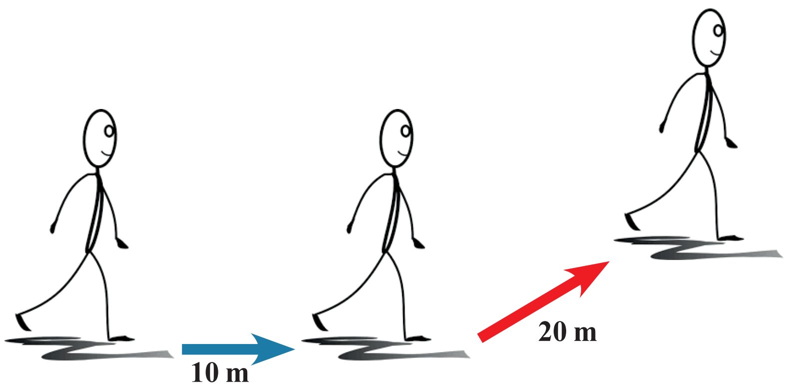
تمهيد

في حياتنا اليومية الكثير من الكميات التي يلزم تحديدها بشكل كامل ومفهوم ، ولا يكتمل الهدف منها إلا بذكر عناصرها كاملة .

فمثلاً: إذا سار أحمد بخط مستقيم من نقطة ما مسافة 10 m فإن **إزاحة** (displacement) أحمد عن موقعه الأصلي هي بمقدار 10 m. فإذا تابع أحمد السير مرة أخرى بخط مستقيم مسافة 20 m ، فهل تستطيع الإجابة عن الأسئلة التالية:

- ما المسافة التي قطعها أحمد ؟
- هل تستطيع تعيين موقع أحمد النهائي بالنسبة إلى نقطة الانطلاق؟

من خلال إجابتك على السؤالين السابقين، تلاحظ أن المسافة التي قطعها أحمد يمكن حسابها بسهولة (10 m + 20 m = 30 m) وهي كمية تتعين فقط بالمقدار ووحدة القياس، أما موقع أحمد فلا يمكن تعيينه دون تعيين اتجاه حركته.



وهذا يقودنا إلى تعريف نوعين من الكميات التي نتعامل معها في حياتنا:

الكميات القياسية : وهي الكميات التي يمكن تحديدها من خلال قيمة عددية ووحدة قياس فقط .

الكميات المتجهة : وهي الكميات التي يمكن تحديدها من خلال قيمة عددية ووحدة قياس واتجاه .

مثال 1 : الكميات القياسية والكميات المتجهة

صنف الكميات التالية إلى كميات قياسية أو كميات متجهة .

a) **يسير قارب بسرعة** 45 km/h **باتجاه الشمال.**
كمية متجهة

b) **قطعت سيارة مسافة** 90 km .
كمية قياسية

c) **وزنُ عُمَر** 51N .
كمية متجهة

d) **يقود عبدالرحمن دراجته بسرعة** 18 km/h.
كمية قياسية

تحقق

صنف الكميات التالية إلى كميات قياسية أو كميات متجهة .

1A) تطير طائرة بسرعة 500 mil/h بزاوية °21 شرق الشمال.

1B) يحلق الصقر الشاهين بسرعة 389 km/h .

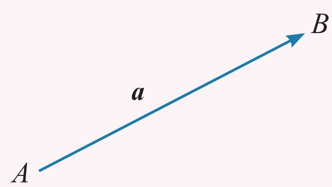
1C) كتلة وسام 38 kg.

1D) يركض خالد بسرعة 8 km/h باتجاه الغرب.

ويطلق اسم **متجه** (vector) على كل كمية متجهة ، والمفهوم التالي يبين تعريفه وكيفية كتابته:

مفهوم — المتجه

المتجه كمية لها مقدار واتجاه ، ويرمز له بحرف صغير غامق $\boldsymbol{a}$ أو $\vec{a}$ أو بحرفين كبيرين يعلوهما سهم $\overrightarrow{AB}$ حيث تمثل النقطة A بداية المتجه والنقطة B نهاية المتجه ، ويمكن تمثيله في المستوى بقطعة مستقيمة موجهة كما في النموذج المجاور.



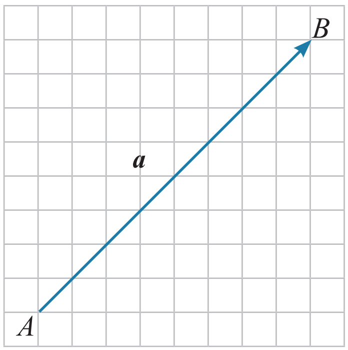
إرشاد

رمز طول المتجه:

من الرموز المستعملة للدلالة على طول المتجه $\|\vec{a}\|$ ، $\|\boldsymbol{a}\|$ ، $\|\overrightarrow{AB}\|$

تمثيل المتجهات في المستوى

لتمثيل المتجه في المستوى يلزم تعيين عنصرين هما : طول المتجه ، واتجاهه ، ويتم تمثيله بقطعة مستقيمة موجهة بحيث تكون بدايتها هي نقطة بداية المتجه A (ذيل المتجه)، ونهايتها نقطة نهايته B (رأس المتجه).

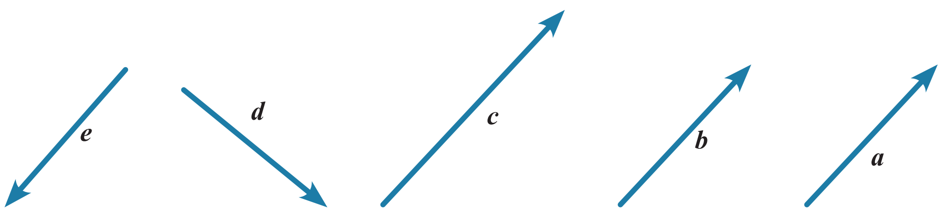


ويرمز **لطول المتجه** (vector magnitude) $\overrightarrow{AB}$ بالرمز $|\overrightarrow{AB}|$ أو $|\boldsymbol{a}|$

خصائص المتجهات :

- **تساوي المتجهات :** يسمى المتجهان $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ **متجهين متساويين** (equel vectors) إذا كان لهما الطول نفسه والاتجاه نفسه ونكتب $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$

في الشكل أدناه، نجد أن المتجهين $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ لهما الاتجاه والطول نفسيهما ، فهما متساويان ونكتب $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ ، بينما المتجه $\boldsymbol{a}$ والمتجه $\boldsymbol{c}$ لهما الاتجاه نفسه ولكنهما مختلفان في الطول ، فهما غير متساويين ، أما المتجهان $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{d}$ فلهما الطول نفسه ولكنهما مختلفان في الاتجاه، فهما غير متساويين أيضاً.

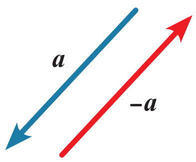


- **المتجهات المتوازية:** يسمى المتجهان $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ **متجهين متوازيين** (parallel vectors) إذا كان لهما الاتجاه نفسه أو متعاكسين في الاتجاه، ونكتب $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$

في الشكل السابق ، المتجهات $\boldsymbol{a, b, c, e}$ جميعها متوازية ونكتب : $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b} \parallel \boldsymbol{c} \parallel \boldsymbol{e}$ بينما المتجهان $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{d}$ غير متوازيين.

- **المتجه الصفري:** المتجه الذي طوله صفر وحدة ، وليس له اتجاه محدد يسـمى **المتجه الصفري** (the zero vector)،
ويرمز له بالرمز $\vec{0}$.
ومن السـهل تخيل المتجه الصفري من الناحية الفيزيائية إذا تخيلنا جسـيماً يتحرك مسـافة 3 cm باتجاه الشـمال ثم 3 cm باتجاه الجنوب ، فإن الجسيم سيعود لنقطة الانطلاق ويكون مقدار إزاحته عنها تساوي صفراً.

- **سـالب المتجـه** (معكوس المتجه) : يكون لـكل متجه غير صفري متجه معاكس له ، وهو متجـه له نفس الطول ولكنه معاكس له في الاتجاه ويسـمى **سـالب المتجه** (negative vector)، ويرمز لمعكوس المتجه $\boldsymbol{a}$ بالرمز $-\boldsymbol{a}$ ، والشـكل أدناه يوضح العلاقة بين المتجه ومعكوسه .



إرشـاد

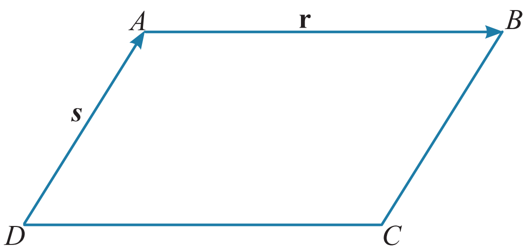
خصائص متوازي الأضلاع.

من خصائص متوازي الأضلاع أن كل ضلعيـن متقابليـن فيه يكونا متطابقين ومتوازيين.

مثال 2 : خصائص المتجهات

في الشكل المجاور ؛ ABCD متوازي أضلاع، فيه

$\overrightarrow{AB} = \mathbf{r}\ ,\ \overrightarrow{DA} = \mathbf{s}$



a) سمِّ زوجين من المتجهات المتساوية.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \quad , \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

b) سمِّ زوجين من المتجهات المتوازية.

$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC} \quad , \quad \overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$

c) عبِّر عن كل مما يأتي باستعمال r و s

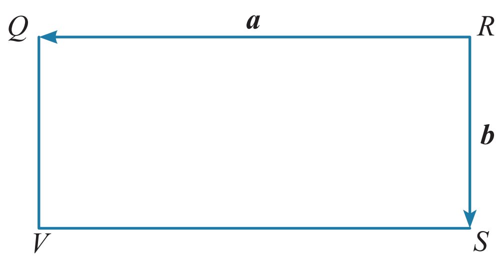
1. $\overrightarrow{DC}$ 2. $\overrightarrow{AD}$ 3. $\overrightarrow{CD}$ 4. $\overrightarrow{BC}$ 5. $\overrightarrow{AA}$

$\overrightarrow{DC} = \mathbf{r}$ $\overrightarrow{AD} = -\mathbf{s}$ $\overrightarrow{CD} = -\mathbf{r}$ $\overrightarrow{BC} = -\mathbf{s}$ $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

تحقق

في الشكل المجاور؛ $QRSV$ مستطيل، فيه

$\overrightarrow{RQ} = \boldsymbol{a}\ ,\ \overrightarrow{RS} = \boldsymbol{b}$



2A) سمِّ زوجين من المتجهات المتساوية.

2B) سمِّ زوجين من المتجهات المتوازية.

2C) عبِّر عن كل مما يأتي باستعمال $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$.

1. $\overrightarrow{VS}$ 2. $\overrightarrow{VQ}$ 3. $\overrightarrow{QR}$ 4. $\overrightarrow{SV}$ 5. $\overrightarrow{SS}$

العمليات على المتجهات في المستوى هندسياً :

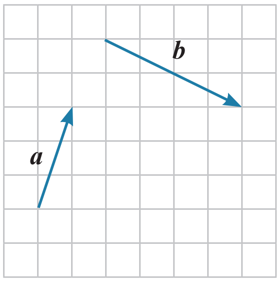
- **جمع المتجهات:**

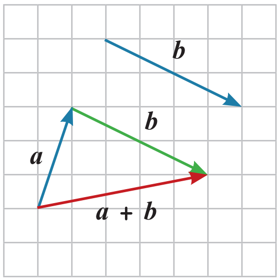
لإيجـاد نـاتـج **جمع متجهين** (vectors addition) هند سـيأ مثل $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ في المسـتوى، قم بتثبيت أحد المتجهين وليكـن $\boldsymbol{a}$ مثـلاً، اجر انسـحـابًا للمتجه $\boldsymbol{b}$ ، بحيث تكون نقطة بدايته هي نقطة نهايـة المتجه $\boldsymbol{a}$ ، ثم صل بداية $\boldsymbol{a}$ مع نهاية $\boldsymbol{b}$ والمتجه الناتج $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ يسمى هندسيا ناتج جمع المتجهين وفيزيائيا بالمحصلة.

مثال 3 : جمـع المتجهـات

أوجد ناتج جمع المتجهات الممثلة في المستوى في كل مما يلي هندسياً :

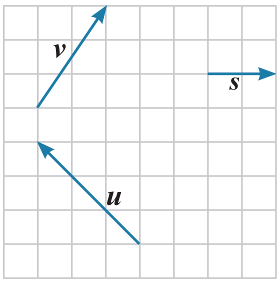
a) $a + b$

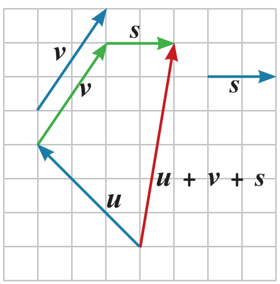




لإيجاد ناتج جمع المتجهين، ثَبِّت a ثم أجرِ انسحاباً للمتجه b بمقـدار وحـدة واحدة لليسـار ، ووحدتين إلى أسـفل ، بحيـث تكون بدايته هي نهاية المتجه a ، ثم ارسـم المتجه الذي يصل بداية a مع نهاية b والذي يمثل $a + b$.

b) $u + v + s$



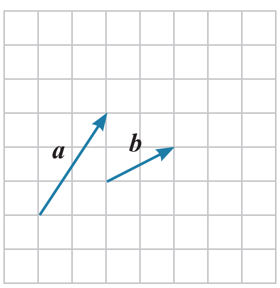


لإيجـاد ناتج جمع المتجهات الثلاث، ثبت المتجه u ثم أجر انسـحاباً للمتجـه v وحدةً واحدةً إلى أسـفل، بحيث تكون بدايتـه هـي نهاية المتجـه u ، ثم أجر انسـحاباً للمتجه s بمقدار 3 وحدات إلى اليسار ووحدة واحدة إلى أعلى بحيث تكـون بدايته هـي نهاية المتجه v ، ثم ارسـم المتجه الذي يصل بداية u مع نهاية s ، والذي يمثل ناتج $u + v + s$

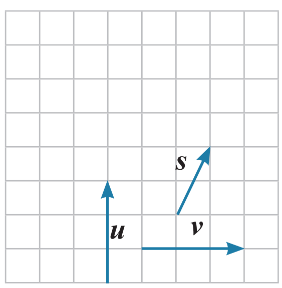
تحقق

أوجد ناتج جمع المتجهات الممثلة في المستوى في كل مما يلي هندسياً .

3A) $a + b$



3B) $u + v + s$



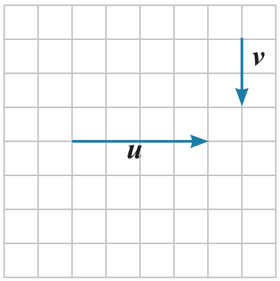
• **طرح المتجهات:**

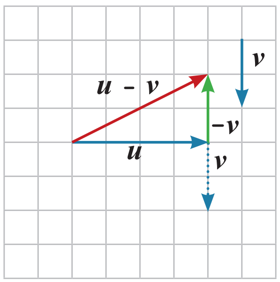
يمكـن تعريـف عمليـة **طـرح المتجهـات** (vectors subtraction) علـى أنهـا عمليـة جمـع للمعكـوس، أي أن $a - b = a + (-b)$ ولإيجاد ناتج الطرح هندسـياً في المسـتوى؛ قم بتثبيت المتجه a واجر انسـحاباً على المتجه $-b$ بحيث تكون بدايته نهاية المتجه a ، فتكون المحصلة هي المتجه الذي بدايته هي بداية a ، ونهايته هي نهاية $-b$.

مثال 4 : طرح المتجهات

أوجد ناتج طرح المتجهات الممثلة في المستوى في كل مما يلي هندسياً .

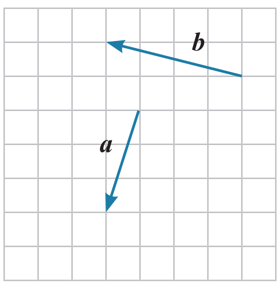
a) $u - v$

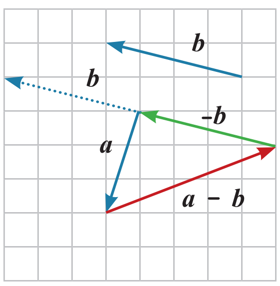




لإيجاد ناتج الطرح $u - v$ هندسياً في المستوى ، ثبت المتجه u ، ثم قـم بإجراء إزاحة للمتجه v بمقدار وحدة واحدة لليســار و3 وحدات إلى أسفل لتكون بدايته نهاية المتجه u ، ثـم مثل معكوس المتجه v وهو $(-v)$ وذلك بعكـس اتجاه المتجه v ، بحيث تكـون بدايته هي نهاية المتجـه u ، ارسـم المتجه الواصل بيـن بداية u ونهاية $(-v)$ والذي يمثل $u - v$.

b) $a - b$



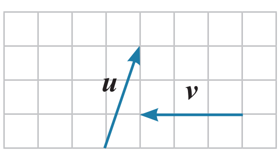


لإيجـاد ناتـج الطـرح $a - b$ هندسـياً في المسـتوى، ثبـت المتجه a ثـم قم بإجراء إزاحـة للمتجه b بمقدار 3 وحدات لليســار ثـم وحدة واحدة إلى أسـفل ، ثم مثل معكوس المتجه b وهو $(-b)$ وذلك بعكس اتجاه المتجه b ، بحيث تبقى نقطة البداية نفسها ، ارسم المتجه الذي يصل بداية a ونهاية $(-b)$ والذي يمثل $a - b$.

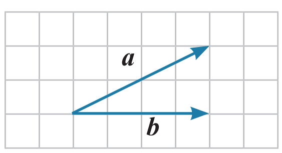
تحقق

أوجد ناتج طرح المتجهات الممثلة في المستوى في كل مما يلي هندسياً .

4A) $u - v$



4B) $a - b$



• ضرب المتجه بعددٍ حقيقي في المستوى:

عنـد **ضرب متجــهٍ بعدد حقيقــي** (scalar multiplication)، فإن الناتج يكون متجهاً أيضــاً ، لكنه قد يختلف في الطـول أو الاتجـاه أو كليهمــا معاً ،فمثلاً عند ضرب المتجــه $\boldsymbol{u}$ بعدد حقيقي k فإن الناتج هــو المتجه $k\,\boldsymbol{u}$ ويكون طوله مساوياً للمقدار $|\boldsymbol{u}|\,.\,|k|$

مفهوم: ضرب المتجه بعدد حقيقي

عند ضرب متجه $\boldsymbol{u}$ بعدد حقيقي k ، فإن الناتج هو المتجه $k\,\boldsymbol{u}$. بحيث إن $|k\boldsymbol{u}| = |k|\ |\boldsymbol{u}|$ وتؤثر قيمة k على المتجه كما يلي :

1) $k > 1$: يتمدد المتجه ويحافظ على الاتجاه نفسه.

2) $0 < k < 1$: يتقلص المتجه ويحافظ على الاتجاه نفسه.

3) $-1 < k < 0$: يتقلص المتجه ، وينعكس اتجاهه.

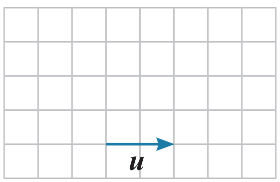
4) $k < -1$: يتمدد المتجه ، وينعكس اتجاهه.

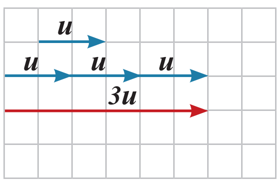
وعند ضرب المتجه بالعدد صفر (0) ، فإن الناتج هو المتجه الصفري $\vec{0}$ ، أما ضرب المتجه بالعدد 1 فهو لا يغير من طول أو اتجاه المتجه .

مثال 5: ضرب المتجه بعدد حقيقي

استعمل المتجه $\boldsymbol{u}$ المُمثل في المستوى لتمثيل كل من المتجهات التالية:

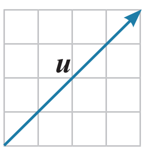
a) $3\boldsymbol{u}$

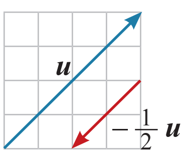




إن ضرب المتجه $\boldsymbol{u}$ بالعدد 3 ، يمدد المتجه $\boldsymbol{u}$ فيتضاعف طولــه ثلاث مرات ، ويحافظ علــى اتجاهه ، وهذا يكافئ عملية جمع المتجه $\boldsymbol{u}$ إلى نفسه ثلاث مرات.

b) $-\frac{1}{2}\,\boldsymbol{u}$



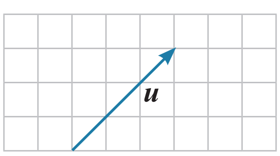


إن ضــرب المتجــه $\boldsymbol{u}$ بالعدد $-\frac{1}{2}$ ، يقلــص المتجه ويصبح طوله إلى نصف طوله الأصلي ، ويعكس اتجاهه،

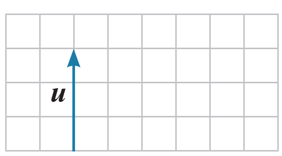
تحقق

استعمل المتجه $\boldsymbol{u}$ المُمثل في المستوى لتمثيل كل من المتجهات التالية:

5A) $2\boldsymbol{u}$



5B) $-1.5\ \boldsymbol{u}$



إرشــاد

طول المتجه

فــي الفــرع $\boldsymbol{b}$ يمكــن استعمال المسطرة لقياس طول المتجــه $\boldsymbol{u}$ ثم ضربه بالعــدد $-\frac{1}{2}$ لمعرفة طول المتجــه الناتج، والإشــارة الســالبة تعنــي أن المتجه الناتــج مرســوما بعكــس اتجاه المتجه $\boldsymbol{u}$.

يمكـن اسـتعمال خصائص المتجهات في تبسـيط العبـارات المتجهية وهي العبـارات الرياضية التي تحتـوي على متجه أو أكثر.

مثال 6: تبسيط العبارات المتجهية

أوجد متجهاً وحيداً مكافئاً لكل مما يلي:

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

2. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DC}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC}\\ &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DC}\\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}\\ &= \overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

3. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}\\ &= \overrightarrow{AA}\\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

تحقق

أوجد متجهاً وحيداً مكافئاً لكل مما يأتي:

6A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$

6B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$

6C) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$

إرشـاد

جمع وطرح المتجهات

- عنـد إجـراء عمليـة جمـع متجهيـن هندسـياً $a + b$ مثلاً ، يجب مراعاة أن يكون اتصالهما رأساً بذيل ، بحيث أن نقطة نهايـة a هي نقطة بداية b .
- عنـد إيجـاد ناتـج الطـرح $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$ نجـد معكـوس المتجه $\overrightarrow{CB}$ ثم نجمع، أي :

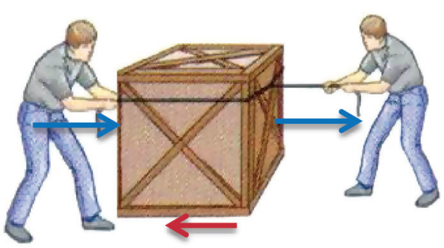
$$\begin{aligned}&\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}\\ &= \overrightarrow{AB} - (-\overrightarrow{CB})\\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

فـي كثيـر مـن الأحيان يكـون تمثيـل المقادير والكميـات بأبعادهـا الحقيقية مسـتحيلاً، لذلـك يتم التمثيـل بأبعاد تتناسـب مـع الأبعـاد الأصلية وتجعـل تمثيلهـا سـهلاً ، كالمخططـات الهندسـية للبيـوت أو المـدن أو الـدول، وهذا ما يسمى بمقياس الرسم .

مثال 7: تطبيقات فيزيائية

عامـلان يُريـدان تغيير موقع صندوق ، فقام الأول بالتأثير عليه بقوة سـحب مقدارها 40N باتجاه الشـرق، بينمـا كان العامل الآخر يدفـع الصندوق بقوة مقدارها 30 N باتجاه الشرق أيضاً ، فإذا علمت ان هنالك قوة احتكاك مقدارها 20 N تُعيـق حركة الصندوق. مثّل القوى المؤثرة على الصندوق في المسـتوى، ثم أوجد محصلتها هندسياً.

(استعمل مقياس رسم 1 unit : 10 N)



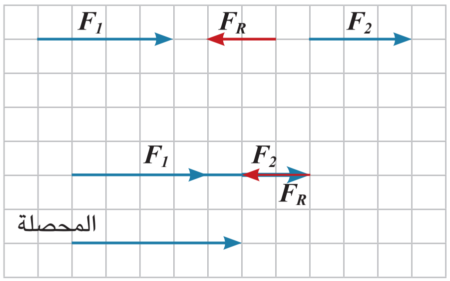
• مثل القوى المؤثرة على الصندوق ، باستعمال مقياس الرسم **1 unit : 10 N**

القوة المؤثرة من العامل الأول: $F_1 = 40\text{ N}$ يمثلها متجه طوله 4 وحدات في المستوى وباتجاه الشرق.

القوة المؤثرة من العامل الثاني: $F_2 = 30\text{ N}$ يمثلها متجه طوله 3 وحدات في المستوى وباتجاه الشرق.

قوة الاحتكاك : $F_R = 20\text{ N}$ يمثلها متجه طوله وحدتا طول في المستوى وباتجاه الغرب (اتجاه قوة الاحتكاك هو عكس اتجاه الحركة)

• **أوجد محصلة القوى على الجسم هندسياً**

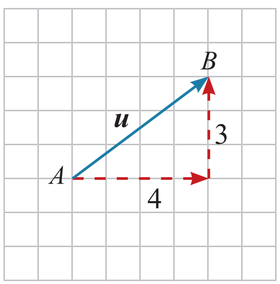


كما تلاحظ أن محصلة القوة المؤثرة على الصندوق ستكون بمقدار 5 وحدات باتجاه الشرق، وبالرجوع إلى مقياس الرسم ، فإن مقدار القوة المؤثرة تساوي 50N ، واتجاهها باتجاه قوتي السحب والدفع (الشرق).

تحقق

7) ينطلق قطار بخط مستقيم من المحطة A ويقطع مسافة 100 km باتجاه الشمال وصولاً إلى المحطة B ، ثم يقطع مسافة 60 km باتجاه الغرب ليصل إلى المحطة C . مثل حركة القطار باستخدام المتجهات في المستوى مستعملاً مقياس الرسم 1 unit : 20 km ، ثم أوجد محصلة الإزاحة من المحطة A إلى المحطة C .

الصورة التركيبية للمتجه:



تعلمت سابقاً موضوع التحويلات الهندسية، ومنها الانسحاب أو الإزاحة والذي يعني وصف الحركة الأفقية والعمودية التي تنقل نقطة ما من موقع إلى آخر في المستوى الإحداثي، ويمكن التعبير عن المتجه المرسوم في المستوى على أنه تحويل هندسي يصف موقع نقطة النهاية للمتجه من نقطة بدايته ، فمن خلال الشكل المجاور ، نجد أن التحويل الهندسي الذي ينقل نقطة بداية المتجه A إلى نقطة نهايته B هو إزاحة لليمين بمقدار 4 وحدات وتسمى إزاحة أفقية ، ثم إزاحة للأعلى بمقدار 3 وحدات، وتسمى الإزاحة الرأسية.

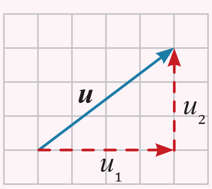
ويمكن كتابة المتجه بدلالة هذا التحويل الهندسي (الإزاحة) على النحو $\boldsymbol{u} = \binom{4}{3}$ ، حيث يُسمى المقدار 4 بالمركبة الأفقية للمتجه، و المقدار 3 بالمركبة الرأسية للمتجه، وبالتالي فإن هذه الصورة من صور المتجه تسمى **الصورة التركيبية** للمتجه (component form).

مفهوم — الصورة التركيبية للمتجه

يمكن التعبير عن المتجه على أنه محصلة مركبتيه الأفقية والرأسية، ويُكتب على إحدى الصورتين $\boldsymbol{u} = \langle u_1 , u_2 \rangle$ أو $\boldsymbol{u} = \binom{u_1}{u_2}$ حيث تمثل u_1 المركبة الأفقية، وتمثل u_2 المركبة الرأسية.

ويكون طول المتجه المكتوب بالصورة التركيبية $\boldsymbol{u} = \binom{u_1}{u_2}$ بدلالة مركبتيه كما يلي:

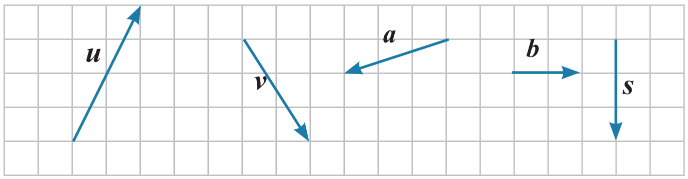
$$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$



بناءً على المفهوم السابق، فإنه يمكن التعبير عن المتجه بدلالة مركبتيه من خلال تمثيله البياني ، وحساب طوله باستعمال مركبتيه كما في المثال التالي.

مثال 8: الصورة التركيبية للمتجه وطوله

اكتب الصورة التركيبية لكل من المتجهات الممثلة في المستوى التالي، ثم أوجد طوله



$\boldsymbol{u} = \binom{2}{4}$

$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ units

$\boldsymbol{v} = \binom{2}{-3}$

$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$ units

$\boldsymbol{a} = \binom{-3}{-1}$

$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$ units

$\boldsymbol{b} = \binom{2}{0}$

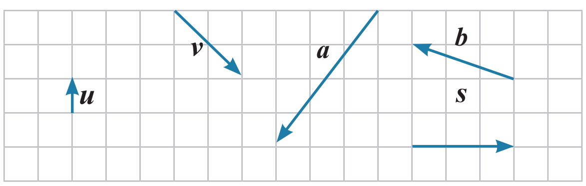
$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$ units

$\boldsymbol{s} = \binom{0}{-3}$

$|\boldsymbol{s}| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3$ units

تحقق

8) اكتب الصورة التركيبية لكل من المتجهات الممثلة في المستوى التالي، ثم أوجد طوله.



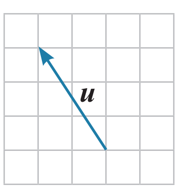
يمكن تمثيل المتجه المكتوب بالصورة التركيبية في المستوى الإحداثي ، كما في المثال التالي.

مثال 9: تمثيل المتجه بالصورة التركيبية هندسياً

9) مثل كلاً من المتجهات التالية في المستوى

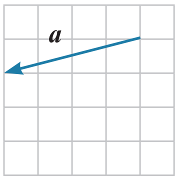
a) $\boldsymbol{u} = \binom{-2}{3}$

لتمثيل المتجه $\boldsymbol{u} = \binom{-2}{3}$ في المستوى ، عيّن نقطة بداية له بشكل اختياري ، ثم أجر إزاحة بمقدار وحدتين لليسار ثم 3 وحدات إلى أعلى وارسم المتجه الواصل بين نقطة البداية ونقطة النهاية.



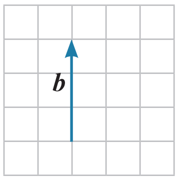
b) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

لتمثيل المتجه $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ في المستوى ، عيّن نقطة بداية له بشكل اختياري ، ثم أجر إزاحة بمقدار 4 وحدات لليسار ثم وحدة واحدة إلى أسفل وارسم المتجه الواصل بين نقطة البداية ونقطة النهاية.



c) $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

لتمثيل المتجه $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ في المستوى ، عيّن نقطة بداية له بشكل اختياري ، ثم أجر إزاحة بمقدار 3 وحدات إلى أعلى وارسم المتجه الواصل بين نقطة البداية ونقطة النهاية.



تحقق

مثل كلا من المتجهات التالية في المستوى

9A) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ **9B)** $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ **9C)** $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

تمارين 7-1

مثال 1 **1) صنف الكميات التالية إلى كميات قياسية أو كميات متجهة .**

a) رياح شمالية سرعتها 32 km/h.

b) طول مضمار السباق 2 mil .

c) يستطيع خالد أن يحمل جسماً كتلته 120 kg.

d) تطير طائرة حربية بسرعة 2000 km/h بزاوية غرب الشمال.

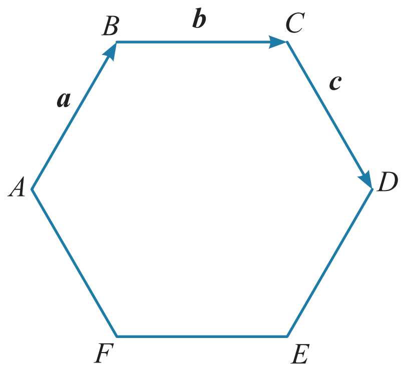
e) يستطيع النمر أن يعدو بسرعة 36 ميلاً في الساعة.

f) زمن اختبار مادة الرياضيات 3 ساعات.

g) يركض خالد بسرعة 8 km/h باتجاه الغرب.

مثال 2 **في الشكل المجاور؛ ABCDEF سداسي منتظم فيه**

$$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}\ ,\ \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}\ ,\ \overrightarrow{CD} = \boldsymbol{c}$$



2) سمِّ ثلاثة أزواج من المتجهات المتساوية.

3) سمِّ ثلاثة أزواج من المتجهات المتوازية.

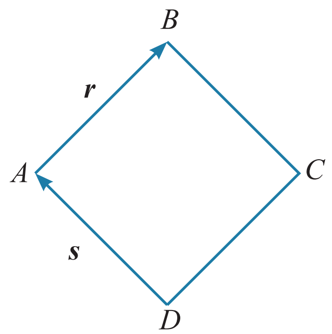
4) عبِّر عن كل مما يأتي باستعمال $\boldsymbol{a}\ ,\boldsymbol{b}\ ,\boldsymbol{c}$

a) $\overrightarrow{DE}$ b) $\overrightarrow{AF}$

c $\overrightarrow{BA}$ d) $\overrightarrow{EF}$

e) $\overrightarrow{BB}$ f) $\overrightarrow{FE}$

3) في الشكل المجاور؛ ABCD معيَّن فيه $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{r}\ ,\ \overrightarrow{DA} = \boldsymbol{s}$



5) سمِّ زوجاً من المتجهات المتساوية.

6) سمِّ زوجاً من المتجهات المتوازية.

7) عبِّر عن كل مما يأتي باستعمال $\boldsymbol{r}\ ,\boldsymbol{s}$

a) $\overrightarrow{BA}$ b) $\overrightarrow{AD}$

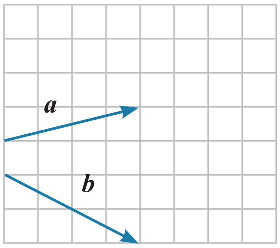
c $\overrightarrow{BC}$ d) $\overrightarrow{CC}$

e) $\overrightarrow{CD}$ f) $\overrightarrow{CB}$

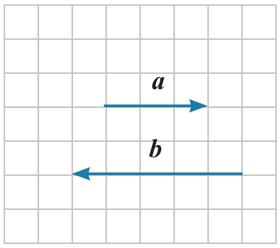
مثال 3 , 4

8) أوجد ناتج العمليات التالية على المتجهات الممثلة في المستوى:

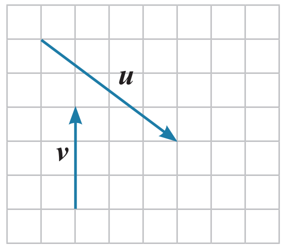
a) $a + b$



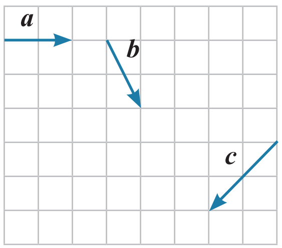
b) $a - b$



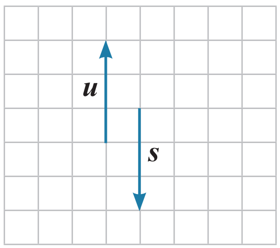
c) $u - v$



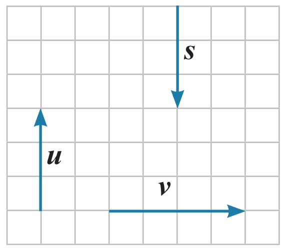
d) $a + b + c$



e) $u - s$



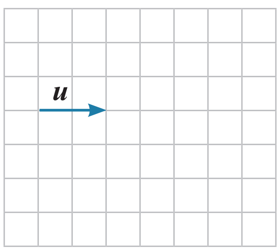
f) $u + v - s$



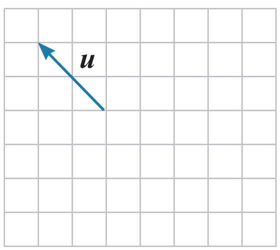
مثال 5

9) استعمل المتجه المُمثل في المستوى لتمثيل كل من المتجهات التالية

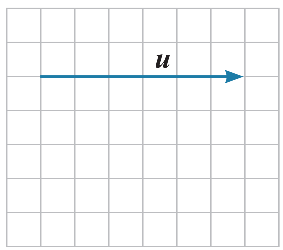
a) $2.5\, u$



b) $-2\, u$



c) $\frac{1}{2}\, u$



مثال 6

10) أوجد متجهاً وحيداً مكافئاً لكل مما يأتي:

a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{ED}$

c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{ED}$

d) $\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CA}$

e) $-\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA}$

f) $-\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$

g) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DC}$

h) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}$

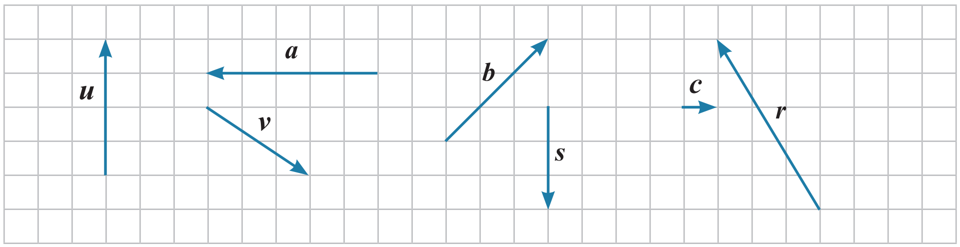
i) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{AE}$

مثال 7

11) يجري عداء مسافة 4 km باتجاه الشمال، ثم يجري مسافة 5 km باتجاه الغرب ، مثل حركة العدّاء باستخدام المتجهات في المستوى مستعملاً مقياس الرسم 1 unit : 1 km ، ثم أوجد محصلة إزاحة العدّاء .

12) يسحب رجل صندوقاً على سطح أملس بقوة أفقية مقدارها 80 N ، بينما تؤثر على الصندوق قوة شدٍّ إلى أعلى مقدارها 40 N ، احسب مقدار محصلة القوة المؤثرة على الصندوق.

مثال 8　13) اكتب الصورة التركيبية لكل من المتجهات الممثلة في المستوى التالي، ثم أوجد طوله



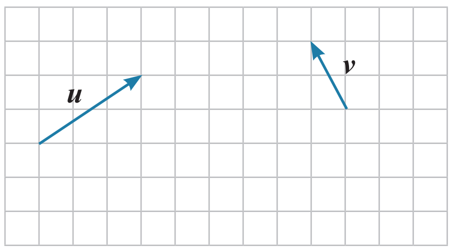
مثال 9　14) مثل كلاً من المتجهات التالية في المستوى

a) $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$　b) $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$　c) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$　d) $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

e) $\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$　f) $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$　g) $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$　h) $\boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

مسائل مهارات التفكير العليا

15) أوجد هندسياً ناتج $\boldsymbol{u} - 2\,\boldsymbol{v}$ للمتجهات الممثلة هندسيا أدناه.



16) يضرب أحمد الكرة البيضاء في لعبة البلياردو لتقطع مسافة 90 cm وتصطدم بحافة الطاولة بزاوية 45° ، ثم ترتد عنها مسافة 40 cm، لتصطدم بكرة سوداء. احسب مقدار إزاحة الكرة البيضاء لحظة اصطدامها بالكرة السوداء.

7-2 المتجهات في المستوى الإحداثي
Vectors in the Coordinate Plane

أفكار الدرس

- تعرف متجه الموضع واستعماله.
- تعرف متجه الوحدة واستعماله.
- تعرف خصائص المتجهات في المستوى الإحداثي واستعمالها.
- تعرف توازي المتجهات واستعماله.

المعايير:

11A.10.1 , 11A.10.2
11A.10.6 , 12A.13.1
12A.13.3

المصطلحات:

متجه الموضع القياسي
standard position vector
متجه الموضع
position vector
متجه الوحدة
unit vector

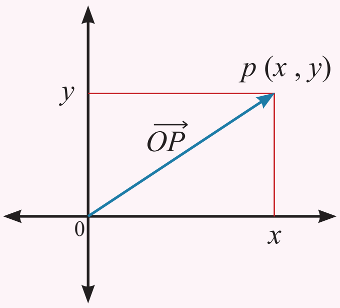
تمهيد

في كثير من المواقف الحياتية ، يتم الاستدلال على الاتجاهات من خلال الرجوع إلى نقطة إسناد ، كأن نقول يقع المسجد على بُعد 200 m غرب المدرسة ، ويقع المستشفى على بُعد 800 m جنوب المدرسة ، فيصبح موقع المدرسة بمثابة نقطة إسنادٍ يُستدلُّ بها على المواقع الأخرى، ومثل هذا المستوى يسمى مستوى إحداثي ، والمستوى الإحداثي المعروف هو مثال على المستويات الإحداثية حيث تكون نقطة الإسناد فيه هي النقطة (0 , 0) في معظم الأحيان.

كما هو الحال في المستويات بشكل عام ، فإن المتجه في المستوى الإحداثي هو قطعة مستقيمة متجهة لها نقطة بداية ونقطة نهاية، واتجاهه هو اتجاه القطعة المستقيمة المتجهة، والمتجه الذي تكون نقطة بدايته هي نقطة الأصل يسمى **متجه الموضع القياسي** (standard position vector) ويعبر متجه الموضع القياسي للنقطة $P\ (x\ ,\ y)$ عن إزاحتها بالنسبة إلى نقطة الأصل $O\ (0\ ,\ 0)$.

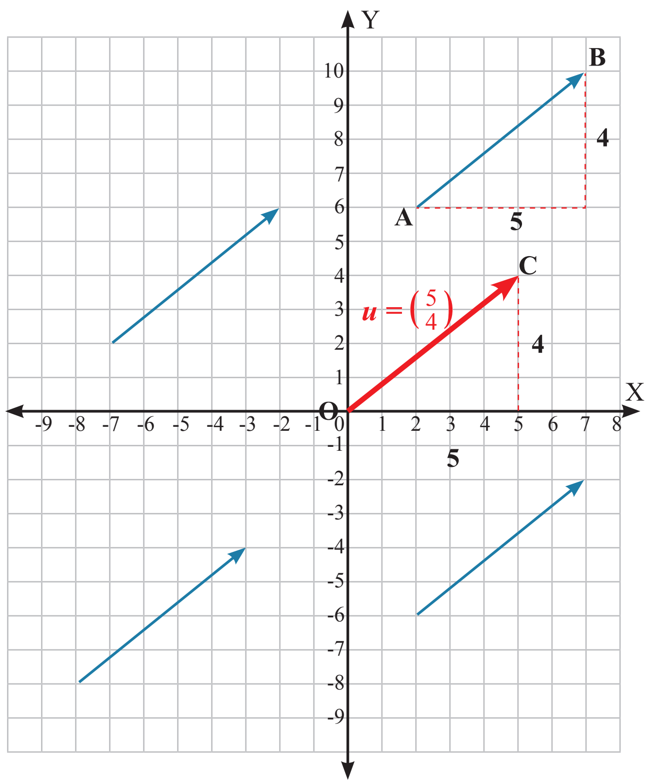
مفهوم — متجه الموضع القياسي

متجه الموضع هو متجه تكون نقطة بدايته نقطة الأصل $O\ (0\ ,\ 0)$ ، ونهايته النقطة $P\ (x\ ,\ y)$ ، ويكتب على الصورة التركيبية على النحو $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



كما تعلم فإن هنالك عدد لا نهائي من المتجهات المتساوية التي يمكن تمثيلها في المستوى الإحداثي، ويمكن التعبير عنها جميعاً **بمتجه موضع** (position vector) واحد يعبر $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ عنها جميعاً. ومتجه الموضع له دور كبير في تسهيل إجراء العمليات على المتجهات وتمثيلها هندسياً.

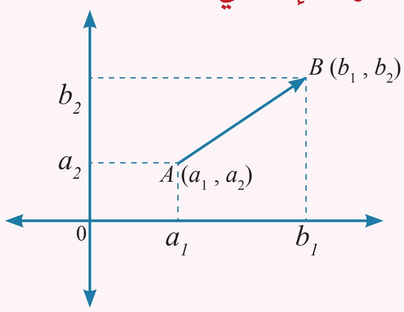
كما تلاحظ في الشكل المجاور ، فإن جميع المتجهات المتساوية (التي لها نفس المقدار والاتجاه) يمكن تمثيلها بمتجه موضع قياس واحد له نفس الطول والاتجاه وبدايته نقطة الأصل (0 , 0)



مفهوم — متجه الموضع بين نقطتين في المستوى الإحداثي

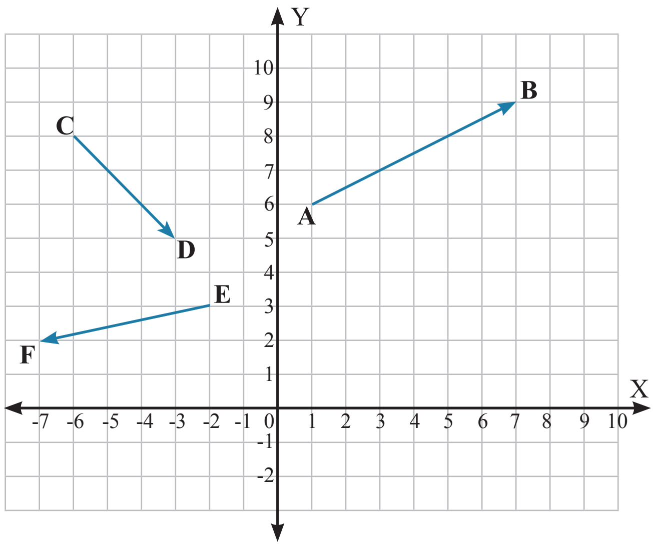
إذا كانت A , B نقطتين في المستوى الإحداثي، حيث $A\ (a_1 , a_2) , B\ (b_1 , b_2)$ ، فإننا نعرف متجه موضع النقطة B من النقطة A على أنه المتجه الواصل بين نقطة بدايته A ونقطة نهايته B واتجاهه من A إلى B ويكتب على الصورة التركيبية كما يلي :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$



مثال 1 : متجه الموضع

مثل متجه الموضع القياسي لكل من المتجهات الممثلة هندسياً في المستوى الإحداثي أدناه.



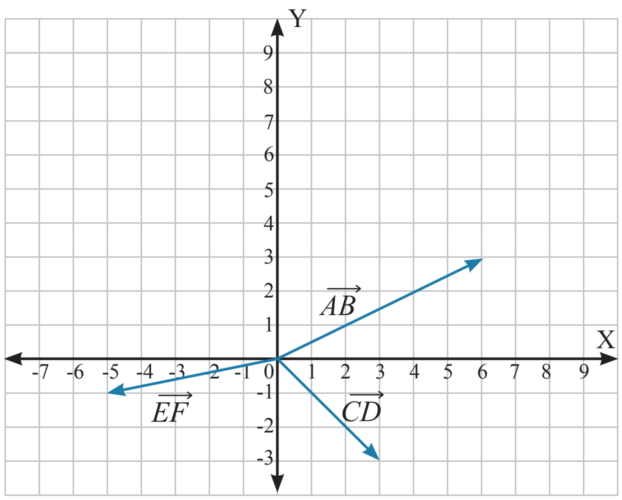
• اكتب متجهات الموضع $\overrightarrow{AB}\ , \overrightarrow{CD}\ , \overrightarrow{EF}$

A (1,6) , B (7,9) → $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7-1 \\ 9-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

C (− 6,8) , D (−3,5) → $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -3-(-6) \\ 5-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

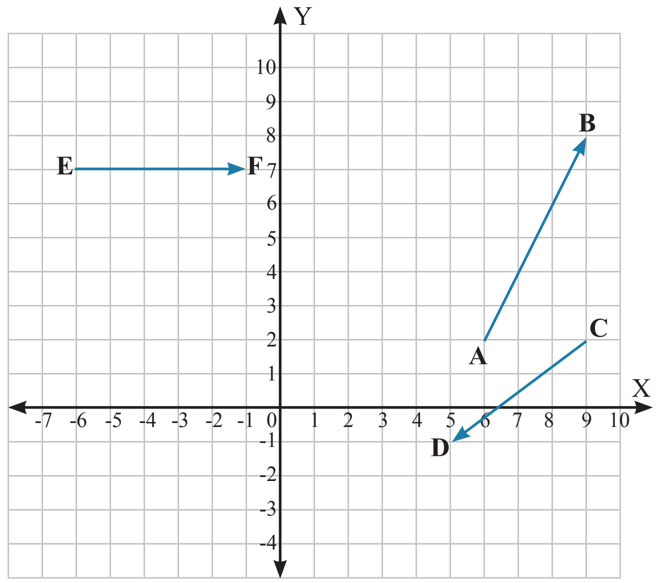
E (−2,3) , F (−7,2) → $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} -7-(-2) \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$

مثل متجهات الموضع القياسية في المستوى الإحداثي



تحقق

1) مثل متجه الموضع القياسي لكل من المتجهات الممثلة هندسياً في المستوى الإحداثي أدناه.



تعلمت سابقاً كيفية حساب طول المتجه ، فمثلا المتجه $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ نجد أن طوله وحدة واحدة وأي متجه طوله وحدة واحدة يسمى **متجه الوحدة** (unit vector)

مفهوم — متجه الوحدة

يسمى المتجه $\boldsymbol{u}$ متجه وحدة إذا كان طوله وحدة واحدة أي أن $|\boldsymbol{u}| = 1$

مثال 2 : متجه الوحدة

أي من المتجهات التالية هو متجه وحدة؟

$$a)\ \ \boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{s}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}$$

$$= \sqrt{1} = 1$$

بما أن $|\boldsymbol{s}| = 1$ unit ، إذن $\boldsymbol{s}$ متجه وحدة.

$$b)\ \ \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{p}| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2}$$

$$= \sqrt{2}$$

بما أن $|\boldsymbol{p}| \neq 1$ unit ، إذن $\boldsymbol{p}$ ليس متجه وحدة.

c) $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$|\boldsymbol{p}| = \sqrt{(0)^2 + (-1)^2}$$
$$= \sqrt{1}$$

بما أن $= 1$ $|\boldsymbol{q}| = 1$ unit ، إذن $\boldsymbol{q}$ متجه وحدة.

تحقق

أي من المتجهات التالية هو متجه وحدة؟

2A) $\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ 2B) $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ 2C) $\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

مثال 3: استعمال متجه الوحدة

أوجد قيمة n في كل من متجهات الوحدة التالية:

a) $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}$

$$|\boldsymbol{p}| = 1$$
$$\sqrt{n^2 + (1)^2} = 1$$
$$\sqrt{n^2 + 1} = 1$$
$$n^2 = 0$$
$$n = 0$$

إذن قيمة n تساوي 0

b) $\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ n \end{pmatrix}$

$$|\boldsymbol{q}| = 1$$
$$\sqrt{(\tfrac{-3}{2})^2 + n^2} = 1$$
$$\sqrt{\tfrac{9}{25} + n^2} = 1$$
$$\frac{9}{25} + n^2 = 0$$
$$n^2 = \frac{16}{25}$$
$$n = \pm\frac{4}{5}$$

إذن قيم n تساوي $-\frac{4}{5}$ ، $\frac{4}{5}$.

تحقق

أوجد قيمة n في كل من متجهات الوحدة التالية:

3A) $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix}$ 3B) $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} n \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ 3C) $\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} \\ n \end{pmatrix}$

تعرفت على خصائص المتجهات في المســتوى، والان ســتتعرف على خصائص المتجهات في المســتوى الإحداثي، وسيتم التعامل معها جبرياً من خلال كتابة المتجه بالصورة التركيبية.

خصائص المتجهات في المستوى الإحداثي

- **تساوي متجهين :** يكون المتجهان متساويين إذا وفقط إذا كانت مركباتهما المتناظرة متساوية.

فإذا كان $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ فإن : $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b} \Leftrightarrow a_1=b_1 \text{ and } a_1=b_1$

- **معكوس المتجه :** معكوس المتجه $\overrightarrow{AB}$ هو المتجه $\overrightarrow{BA}$ حيث أن : $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$

فإذا كان $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ فإن : $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$

- **المتجه الصفري :** $\vec{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

مثال 4 : استعمال خصائص المتجهات في المستوى الإحداثي

إذا كانت $A(-2,1), B(1,-1), C(0,3), D(4,-3), E(3,1)$ نقاطاً في المستوى الإحداثي، عين المتجهات المتساوية والمتعاكسة من بين المتجهات التالية : $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CD}$

- أوجد متجه الموضع لكل من المتجهات

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} 1-(-2) \\ -1-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{EC}=\begin{pmatrix} 0-3 \\ 3-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BD}=\begin{pmatrix} 4-1 \\ -3-(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix} 4-0 \\ -3-3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

- حدد المتجهات المتساوية .

المتجهان $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}$ متساويان ونكتب $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$

- حدد المتجهات المتعاكسة .

المتجه $\overrightarrow{EC}$ يعاكس المتجه $\overrightarrow{AB}$ ونكتب $\overrightarrow{EC}=-\overrightarrow{AB}$

المتجه $\overrightarrow{EC}$ يعاكس المتجه $\overrightarrow{BD}$ ونكتب $\overrightarrow{EC}=-\overrightarrow{BD}$

تحقق

4) إذا كانت $A(3,-2), B(8,-3), C(-1,0), D(4,-1), E(-6,1)$ نقاطاً في المســتوى الإحداثي، عين المتجهات المتساوية والمتعاكسة من بين المتجهات التالية : $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CE}, \overrightarrow{BC}$

عند تســاوي متجهين ، فإن مركباتهما المتناظرة تكون متســاوية ، ويمكن استعمال هذه الخاصية في إيجاد قيم المجاهيل في المتجهات المتساوية ، كما في المثال التالي:

مثال 5: **استعمال تساوي المتجهات**

أوجد قيمة n , m في كل مما يلي:

a) $\begin{pmatrix} 2n-1 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \end{pmatrix}$

بما أن المتجهين متساويان ، إذن مركباتهما المتناظرة متساوية أي أن:

$$2n - 1 = 11$$
$$2n = 12$$
$$n = 6$$

إذن قيمة n تساوي 6 .

b) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{n}-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{m}+1 \\ 2\boldsymbol{m}+4 \end{pmatrix}$

بما أن المتجهين متساويان ، إذن مركباتهما المتناظرة متساوية، أي أن

$n = m + 1 \quad \longrightarrow \quad (1)$

$n - 3 = 2m + 4 \quad \longrightarrow \quad (2)$

حُل نظام المعادلتين بالتعويض

$$m + 1 - 3 = 2m + 4$$
$$m = -6$$

عوض $m = -6$ في المعادلة (1)

$$n = -6 + 1 = -5$$

إذن قيمة m تساوي 6- ، وقيمة n تساوي 5-

تحقق

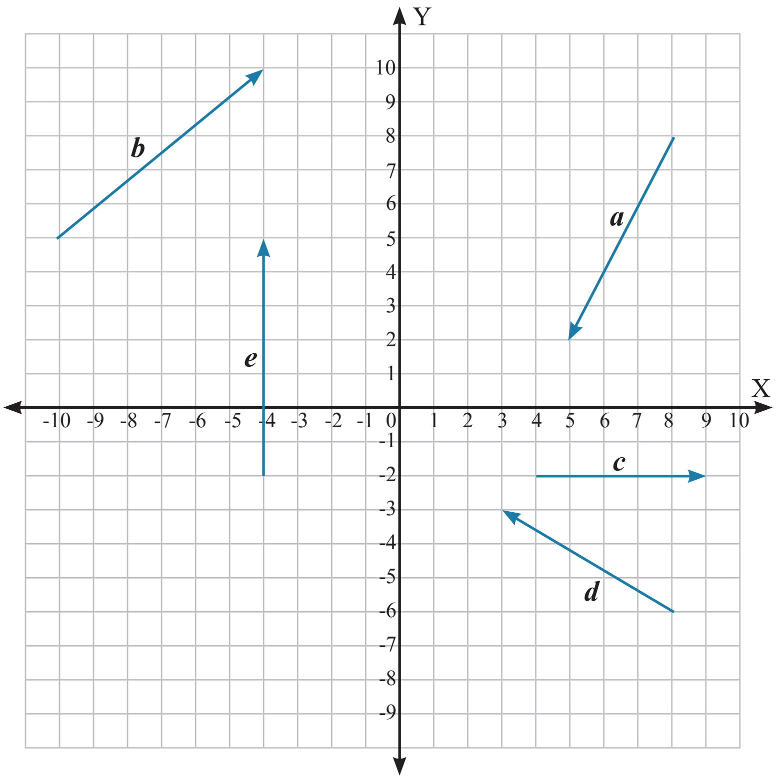
5) أوجد قيمة n , m في كل من أزواج المتجهات المتساوية التالية

5A) $\begin{pmatrix} 3n \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 15 \end{pmatrix}$

5B) $\begin{pmatrix} n+m \\ 2n-m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

تمارين 2-7

مثال 1 — 1) مثل متجه الموضع القياسي لكل من المتجهات الممثلة هندسياً في المستوى الإحداثي أدناه .



مثال 2 — 2) بيِّن أيّاً من المتجهات التالية هو متجه وحدة؟

c) $c = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$ b) $b = \begin{pmatrix} \frac{-1}{7} \\ \frac{4\sqrt{3}}{7} \end{pmatrix}$ a) $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

f) $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e) $u = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ d) $q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

مثال 3 — 3) أوجد قيمة n في كل من متجهات الوحدة التالية:

c) $c = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $u = \begin{pmatrix} n \\ \frac{2\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$ a) $a = \begin{pmatrix} n \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

f) $w = \begin{pmatrix} 0 \\ n-1 \end{pmatrix}$ e) $s = \begin{pmatrix} n^2 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ d) $d = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix}$

مثال 4 — 4) إذا كانت $A(-5,1)$, $B(-2,-1)$, $C(-8,3)$, $D(-11,5)$, $E(1,-3)$ نقاطاً في المســتوى الإحداثي، عين المتجهات المتساوية والمتعاكسة من بين المتجهات التالية $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{EC}$

مثال 5

5) أوجد قيمة n , m في كل مما يلي:

a) $\begin{pmatrix} 2n \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2m+1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3n-4 \\ m-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} n+m \\ n-m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} n \\ 2m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m-3 \\ n+2 \end{pmatrix}$

مسائل مهارات التفكير العليا

13) أوجد معادلة المستقيم الموازي للمتجه $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ ، ويمر بالنقطة $(2,-3)$

14) إذا كان $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 4n \\ n+15 \end{pmatrix}$ ، أوجد المتجه u إذا علمت أن $\boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{v}$.

7-3 العمليات على المتجهات في المستوى الإحداثي
Operations with Vectors in the Coordinate Plane

أفكار الدرس

- إجـراء العمليـات عـلى المتجهات في المســتوى الإحداثــي وتمثيلهـا هندسياً.
- إجـراء العمليـات عـلى المتجهات جبرياً.
- تعـرف خصائـص العمليات على المتجهات جبرياً.
- حل مسائل حياتية على العمليات على المتجهات.

المعايير:

11A.10.3 , 11A.10.4
11A.10.6 , 12A.13.2
12A.13.4

تمهيد

تعلمت ســابقاً كيفية إجراء بعض العمليات على المتجهات في المســتوى بشكل عام ودون الحاجة إلى تعيين مســتوى إحداثي بعينه لإجرائها وهذه العمليات هي: جمع المتجهات ، طرح المتجهات ، وضرب المتجه بعدد حقيقي ، ومن خلال متجهات الموضع يمكن إجراء هذه العمليات بسهولة في المستوى الإحداثي.

جمع المتجهات هندسياً في المستوى الإحداثي

لا تختلف عملية جمع المتجهات في المســتوى الإحداثي عنها في المســتوى بشــكل عام ، ولإجراء عملية جمع متجهين في المستوى الإحداثي ، يمكن إيجاد متجه الموضع لكل منهما وتمثيله هندسيا في الوضع القياسي، ثم إيجاد محصلة جمعهما هندسياً كما ورد سابقاً في جمع المتجهات هندسياً في المستوى.

مثال 1: جمع المتجهات هندسياً في المستوى الإحداثي

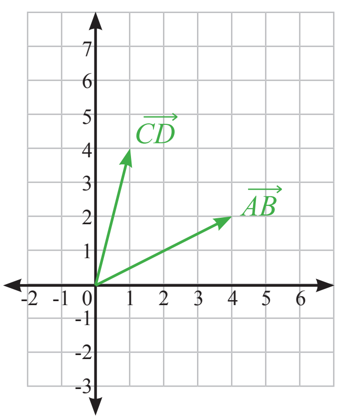
إذا كانت $A\ (3,-3)\ ,\ B\ (7,-1)\ ,\ C\ (-2,2)\ ,\ D\ (-1,6)$ **نقاطاً في المســتوى الإحداثي ، أوجد** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ **هندسياً .**

- أوجد متجه الموضع لكل من المتجهين $\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{CD}$

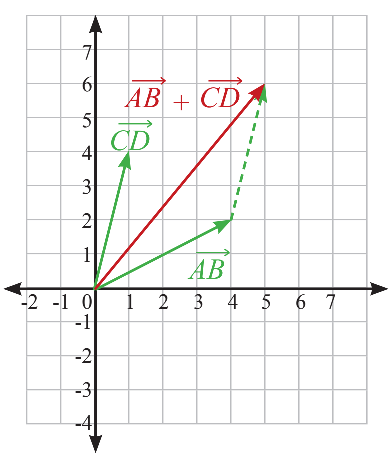
$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}7-3\\-1-(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}-1-(-2)\\6-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$$

- مثـل متجـه الموضـع القياسـي لـكل مـن المتجهيـن $\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{CD}$ في المستوى الإحداثي:



- ثبت المتجه $\overrightarrow{AB}$ ، ثم أجر انسحاباً للمتجه $\overrightarrow{CD}$ بحيث تكون بدايته هي نهاية $\overrightarrow{AB}$ كما في الشـكل التالي، ثم ارسم المتجه الذي يصل بين بداية $\overrightarrow{AB}$ ونهاية $\overrightarrow{CD}$ والذي يمثل ناتج الجمع $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$



تحقق

1) **إذا كانت** $A\ (-4,-5)\ ,\ B\ (1,-4)\ ,\ C\ (5,-5)\ ,\ D\ (2,-1)$ نقاطاً في المستوى الإحداثي ،

أوجد $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}$ هندسياً في المستوى الإحداثي.

طرح المتجهات في المستوى الإحداثي

لا تختلف عملية طرح المتجهات في المستوى الإحداثي عن عملية الجمع، حيث أن عملية الطرح هي بالأصل عملية جمع للمعكوس ، وبالتالي فإن الخطوات ستكون متشابهة فيهما.

مثال 2 : طرح المتجهات هندسياً في المستوى الإحداثي

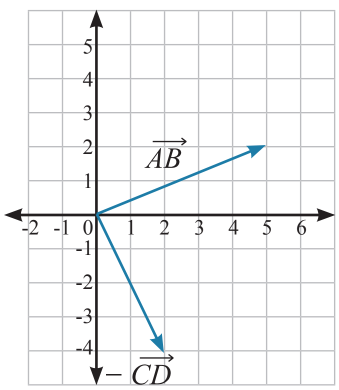
إذا كانت $A\ (-4,5)\ ,\ B\ (1,7)\ ,\ C\ (-4,-6)\ ,\ D\ (-6,-2)$ نقاطاً في المستوى الإحداثي ، أوجد $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$ هندسياً .

- أوجد متجه الموضع لكل من المتجهين $\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{CD}$

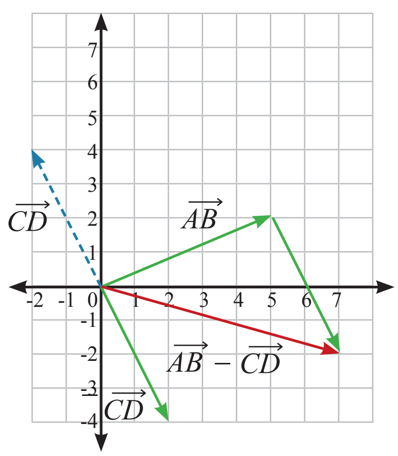
$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1-(-4)\\7-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}-6-(-4)\\-2-(-6)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$$

- مثل متجه الموضع القياسي لكل من المتجهين $\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{CD}$ في المستوى الإحداثي:



- أوجد ناتج طرح المتجهين $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})$



تحقق

2) إذا كانت $A\ (-2,-5)\ ,\ B\ (-6,-1)\ ,\ C\ (0,6)\ ,\ D\ (5,6)$ نقاطاً في المستوى الإحداثي ،

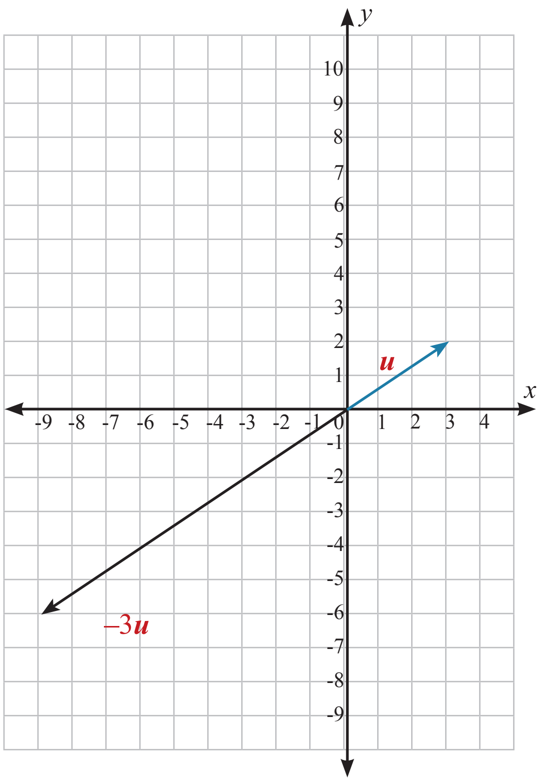
أوجد $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$ هندسياً في المستوى الإحداثي.

ضرب المتجه بعدد حقيقي في المستوى الإحداثي

تعلمت سابقاً أن ضرب متجه بعدد حقيقي قد يغير طول المتجه أو يعكس اتجاهه أو كليهما معاً

مثال 3 : **ضرب المتجه بعدد حقيقي**

إذا كان $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ مثّل كلاً من المتجه u والمتجه $-3u$ في المستوى الإحداثي



- من نقطة الأصل، ارسم المتجه $\boldsymbol{u}$ لتكون نهايته في النقطة $(3,2)$.
- من نقطة الأصل ، ارسم المتجه $-3\boldsymbol{u}$ ، وذلك بعكس اتجاه المتجه $\boldsymbol{u}$ ، ومضاعفة طوله 3 مرات ، وكما تلاحظ من التمثيل الهندسي فإن نقطة نهاية المتجه $-3\boldsymbol{u}$ هي النقطة $(-9,-6)$.

تحقق

3) إذا كان $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ، مثِّل كلاً من المتجه $\mathbf{u}$ والمتجه $-2\boldsymbol{u}$ في المستوى الإحداثي.

العمليات على المتجهات جبرياً:

تعلمت كيفية إجراء العمليات على المتجهات هندسياً، وستتعرف الآن على كيفية إجراء العمليات على المتجهات جبرياً من خلال استخدام الصورة التركيبية للمتجهات.

مفهوم **العمليات على المتجهات جبرياً**

إذا كان $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ، $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ متجهين ، فإننا نعرف العمليات التالية على المتجهات جبرياً :

1) جمع المتجهات : $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$

2) طرح المتجهات: $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$

3) ضرب المتجه بعدد حقيقي k : $k.\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} k\,a_1 \\ k\,a_2 \end{pmatrix}$

مثال 4 : العمليات على المتجهات جبرياً

إذا كان $c = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ أوجد ما يلي:

a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}$

c) $-3\boldsymbol{a} \; = 3\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}$

d) $5\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} \; = 5\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 10 \\ -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 17 \\ 0 \end{pmatrix}$

تحقق

4) إذا كان $s = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix}$ ، أوجد ما يلي:

4A) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{s}$

4B) $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{s}$

4C) $-4\boldsymbol{u}$

4D) $\boldsymbol{u} - 5\boldsymbol{v} + 3\boldsymbol{s}$

توازي المتجهات :

تعلمت أن المتجهين المتوازيين إما ان يكون لهما الاتجاه نفسه أو أنهما متعاكسان في الاتجاه، وهذا يرتبط بمفهوم ضرب المتجه بعدد حقيقي $k \neq 0$ ، إذ يبقَ المتجهان بنفس الاتجاه إذا كانت $k > 0$ ، بينما ينعكس المتجه إذا كانت $k < 0$ ، أي أن المتجهين متوازيان إذا وفقط إذا كان أحدهما حاصل ضرب الآخر بعدد حقيقي غير الصفر ، أي

$$\boldsymbol{u} \parallel \boldsymbol{v} \Leftrightarrow \mathbf{u} = k.\boldsymbol{v} \, , \, k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

مثال 5 : توازي المتجهات

إذا كان $b = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ متجهين في المستوى الإحداثي، بين أن المتجهان a و b متوازيين أم لا .

اكتب أحد المتجهين على صورة ناتج ضرب المتجه الآخر بعدد حقيقي إن أمكن

$b = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

أخرج -3 عاملاً مشتركاً من مركبتي المتجه b $\qquad = -3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

عوض $a = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad = -3a$

إذن $a \parallel b$

تحقق

6) إذا كان $s = \begin{pmatrix} 9 \\ -15 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ متجهين في المستوى الإحداثي، بين أن المتجهين متوازيان .

مثال 6 : استعمال توازي المتجهات

إذا كان a , b متجهين حيث $a \parallel b$ وكان $b = \begin{pmatrix} n \\ -4 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}$ ، أوجد قيمة n .

استعمل تعريف التوازي

$\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} n \\ -4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kn \\ -4k \end{pmatrix}$

استعمل مفهوم تساوي متجهين $\qquad -6 = kn\ ,\ 8 = -4k$

حل المعادلة $8 = -4k$ لإيجاد قيمة k $\qquad k = -2$

أوجد قيمة n بالتعويض عن قيمة k $\qquad -2n = -6$

$n = 3$

إذن قيمة n تساوي 3

تحقق

7) إذا كان $a \parallel b$ ، حيث $b = \begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} 10 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ ، أوجد قيمة m .

خصائص العمليات على المتجهات جبرياً :

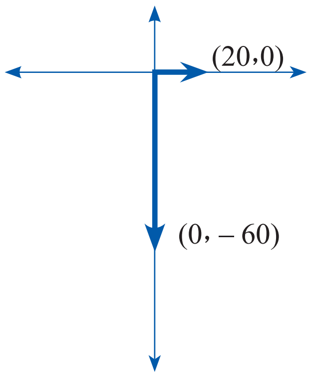
كما هو الحال في الجبر ، فإن العمليات على المتجهات لها خصائص عديدة، ونذكر منها ما يلي :

1	عملية جمع المتجهات إبدالية	$a + b = b + a$
2	عملية جمع المتجهات تجميعية	$(a + b) + c = a + (b + c)$
3	خاصية العنصر المحايد لعملية جمع المتجهات	$a + \vec{0} = \vec{0} + a = a$
4	خاصية النظير الجمعي لعملية الجمع في المتجهات	$a + (-a) = (-a) + a = \vec{0}$
5	خاصية توزيع الضرب بعدد حقيقي على عملية جمع وطرح المتجهات من اليسار واليمين.	$k(a \pm b) = k.a \pm k.b$ $(a \pm b)k = a.k \pm b.k$

مثال 7 : من واقع الحياة

يُبحر قارب في نهر باتجاه الجنوب بسرعة 60 km/h ، بينما يتجه التيار r في النهر باتجاه الشرق بسرعة 20 km/h ، كما هو موضح في الشكل المجاور .

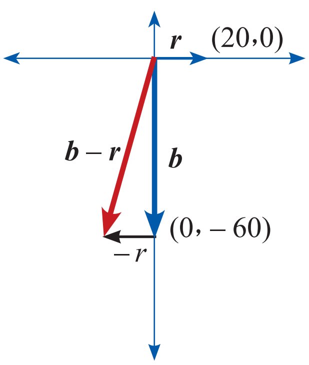
أوجد سرعة القارب المكافئة في النهر الجاري والتي تبقيه يبحر بسرعة فعلية مقدارها 60 km/h باتجاه الجنوب.



الحل

يمكن تمثيل السرعة المتجهة باستعمال المتجهات ، كما في الشكل المجاور ، ومن خلال متجهات الوحدة يمكن إجراء عملية الطرح بين السرعة المتجهة للقارب والسرعة المتجهة للتيار.

بفرض أن متجه الموضع بالنسبة للقارب هو $\boldsymbol{b}$ وأن متجه الموضع بالنسبة للتيار هو $\boldsymbol{r}$ ، فإن :



$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -60 \end{pmatrix} , \ \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ولإيجاد محصلة سرعة القارب التي تجعله يبحر بشكل فعلي في النهر بسرعة 60 km/h نقوم بعملية الطرح التالية :

$$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -60 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -60 \end{pmatrix}$$

والآن نجد مقدار السرعة المتجهة من خلال إيجاد طول المتجه الذي يمثلها :

$$|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{r}| = \sqrt{(-20)^2 + (-60)^2} = 63.25 \ km/h$$

إذن على القارب أن يبحر بسرعة $63.25 \ km/h$ لتكون سرعته الفعلية في النهر $60 \ km/h$.

تحقق

5) تطير طائرة بسرعة $600 \ km/h$ باتجاه الشرق، في حين أن سرعة الرياح $50 \ km/h$ باتجاه الشمال. أوجد سرعة الطائرة المتجهة التي تبقيها في مسارها وتطير بسرعة فعلية مقدارها $600 \ km/h$.

تمارين 3-7

مثال 3-1	1) إذا كانت A (–3,2) , B (–1,7) , C (3,0) , D (7,4) , E (4,1) , F (–5,0) نقاطاً في المســتوى الإحداثي ، أوجد ناتج كلٍّ مما يلي هندسياً في المستوى الإحداثي.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

b) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$

c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{EA}$

d) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD}$

e) $2\overrightarrow{BC}$

f) $-3\overrightarrow{CD}$

مثال 4	2) إذا كان $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 20 \\ -10 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix}$ ، فأوجد ما يلي:

a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$	b) $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$	c) $3\boldsymbol{a}$

d) $2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{c}$	e) $\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} + 5\boldsymbol{c}$	f) $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}$

g) $-5\boldsymbol{c} + 3\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a}$	h) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} - 2\boldsymbol{b}$	i) $-2(\boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{c}) - 6\boldsymbol{b}$

3) إذا كان $\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix}$ ، أوجد ما يلي :

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$	b) $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DB}$	c) $\overrightarrow{DA}$

d) $\overrightarrow{EA}$	e) $\overrightarrow{CD} + 4\,\overrightarrow{DB} + 7\,\overrightarrow{AA}$	f) $2\,\overrightarrow{BE} + 5\,\overrightarrow{CB}$

4) إذا كان $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ، تحقق من صحة خاصيتي الإبدال والتجميع على العمليات على المتجهات، بإيجاد ما يلي:

a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$	b) $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$	c) $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a})$	d) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$

مثال 5	5) إذا كان $\boldsymbol{b}$ و $\boldsymbol{a}$ متجهين في المستوى الإحداثي، بين إن كان المتجهان $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ متوازيين أم لا في كل مما يلي:

a) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -15 \end{pmatrix}$	b) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

مثال 6	6) إذا كان $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ متجهين حيث $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$ وكان $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ، أوجد قيمة n .

7) إذا كان $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} m \\ 6 \end{pmatrix}$ ، أوجد قيمة m إذا علمت أن $u \parallel v$.

8) إذا كان $s = \begin{pmatrix} 12 \\ 2n \end{pmatrix}$, $r = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ ، أوجد قيمة m إذا علمت أن $r \parallel s$.

9) إذا كان a , b متجهين متوازيين حيث $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$ ، أوجد قيمة n .

10) اكتب متجهاً يوازي المتجه $v = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -2.5 \end{pmatrix}$.

11) إذا كانت $q = \begin{pmatrix} -8 \\ 20 \end{pmatrix}$, $p = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $s = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, $r = \begin{pmatrix} -8 \\ 20 \end{pmatrix}$ متجهاتٍ في المستوى الإحداثي، حدد المتجهات المتساوية والمتجهات المتعاكسة والمتجهات المتوازية منها.

مثال 7

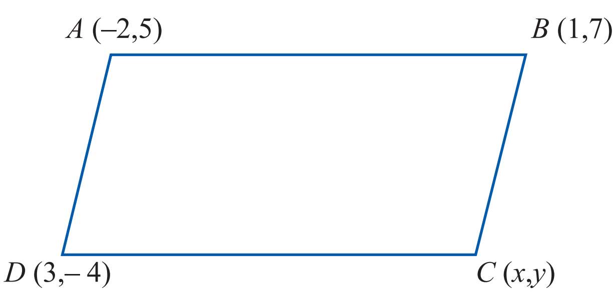
12) يبحر قارب شراعي في نهر يمتد شرقاً معتمداً على سرعة الرياح التي بلغت 40 km/h باتجاه الشرق، في حين أن سرعة تيار الماء في النهر تبلغ 10 km/h شرقاً ، احسب مقدار سرعة القارب في النهر واتجاه حركته.

13) تطير طائرة بسرعة 500 km/h باتجاه الشمال ، وتواجه مقاومة الرياح التي بلغت سرعتها 60 km/h باتجاه الجنوب الغربي، احسب محصلة سرعة الطائرة المتجهة .

مسائل مهارات التفكير العليا

14) أثبت أن النقاط A (–1,1) , B (0,3) , C (1,5) تقع على استقامة واحدة ، مستخدماً المتجهات.

15) $ABCD$ متوازي أضلاع كما هو موضح في الشكل أدناه ، أوجد إحداثيات النقطة $C\ (x, y)$ مستخدماً المتجهات.



16) إذا كان $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ متجهاً ، أثبت أن $|k\, u| = |k|.|u|$ حيث k عدد حقيقي غير الصفر.

7-4

المتجهات فى الفضاء الثلاثي الأبعاد
Vectors in 3-D Space

أفكار الدرس

- التعبير عن المتجه في الفضاء ثلاثي الأبعاد بالصورة التركيبية.
- تعرف متجه الموضع، متجه الإزاحة في الفضاء ثلاثي الأبعاد واستعمالها.
- ايجاد طول المتجه.
- تعرف خصائص المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد واستعمالها.
- إجراء العمليات على المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد جبرياً.
- ايجاد احداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة بمعرفة متجه الموقع لكل من طرفيها.
- حل تطبيقات هندسية بسيطة على المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد.

المعايير:

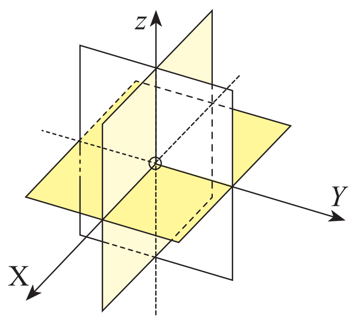
11A.10.1 – 11A.10.3 – 11A.10.4 – 12A.13.1 – 12A.13.2 – 12A.13.3 – 12A.13.4 – 12A.13.7

المصطلحات:

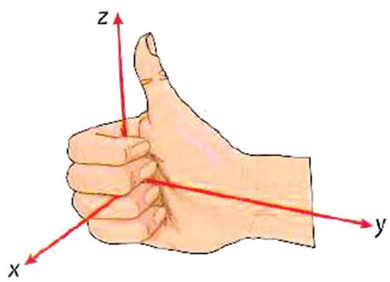
الفضاء ثلاثي الأبعاد
three dimensional space

تمهيد

درست سابقًا المتجهات فى المستوى الإحداثى. والآن سنناقش المتجهات والعمليات عليها فى **الفضاء ثلاثى الأبعاد** (three dimensional speace).

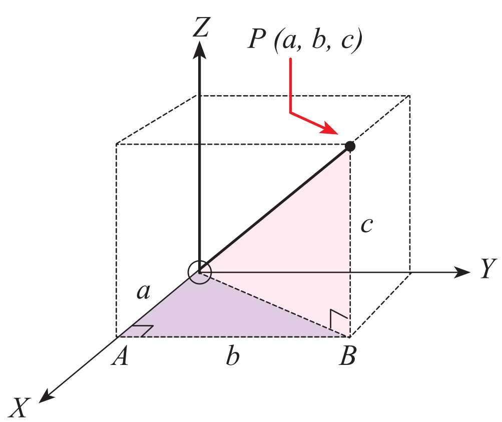


فى الشكل المجاور يظهر الفضاء بثلاث محاور متعامدة سوف تكون بمثابة مرجع لنا وهي X , Y , Z ودوران هذا النظام حسب اليد اليمنى، أى أنك إذا قبضت يدك اليمنى كما هو موضح فى صورة اليد فإن أصبع الإبهام يمثل محور Z ويكون عموديًا على المستوى الإحداثي XY



لأى نقطة p فى الفضاء يعبر عنها بثلاثي مرتب $P(x , y , z)$ حيث x , y , z تمثل بعد النقطة باتجاه المحاور عن نقطة الأصل. ويعبر عن متجه الموضع القياسى للنقطة p كما يلى

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



في الشكل المجاور نجد أن:

a تمثل المسافة العمودية بين النقطة P والمستوى الإحداثي YZ

و b تمثل المسافة العمودية بين النقطة P والمستوى الإحداثي XZ

و c تمثل المسافة العمودية بين النقطة P والمستوى الإحداثي XY

متجه الموضع بين نقطتين في الفضاء:

يعرف متجه موضع النقطة B من النقطة A على انه المتجه الواصل بين النقطة A والنقطة B واتجاهه من A إلى B، حيث B , A نقطتين فى الفضاء ثلاثي الأبعاد.

مفهوم — متجه الموضع بين نقطتين في الفضاء

إذا كانت A و B نقطتين في الفضاء ثلاثي الأبعاد ، حيث $A\,(a_1, a_2, a_3)\,,\,B\,(b_1, b_2, b_3)$،

فإن متجه موضع النقطة B من النقطة A هو

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

مثال 1 — متجه الموضع بين نقطتين في الفضاء

إذا كانت $A\,(\mathbf{3, -1, 2})\,,\,B\,(\mathbf{1, 0, -2})$ نقطتين في الفضاء، فأوجد كلاً من $\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{OA}$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 0-(-1) \\ -2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3-0 \\ -1-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

تحقق

1) إذا كانت $P\,(0, -1, 4)\,,\,Q\,(5, 0, 1)$ نقطتين في الفضاء، فأوجد كلاً من $\overrightarrow{PQ}\,,\,\overrightarrow{OP}$

طول متجه في الفضاء ثلاثي الأبعاد :

طول أي متجه يساوي طول القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطة بدايته ونقطة نهايته، فإذا كان $\overrightarrow{AB}$ متجهًا نقطة بدايته $A\,(x_1, y_1, z_1)$ ونقطة نهايته $B\,(x_2, y_2, z_2)$ فإن طول المتجه $\overrightarrow{AB}$ يمكن إيجاده من خلال طول القطعة المستقيمة AB ونكتب :

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

مفهوم — طول متجه في الفضاء ثلاثي الأبعاد

إذا كان $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ متجها في الفضاء ثلاثي الأبعاد فإنه يمكن إيجاد طوله كما يلي :

$$|\,\boldsymbol{u}\,| = \sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2} + u_3^{\,2}}$$

مثال 2 — طول متجه في الفضاء ثلاثي الأبعاد

أوجد طول كل من المتجهات التالية :

a) $r = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$|\,\boldsymbol{r}\,| = \sqrt{(1)^2 + (4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

b) $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$|v| = \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (1)^2} = 1$

c) $s = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$|s| = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2 + (3)^2} = \sqrt{10}$

تحقق

2) أوجد طول كل من المتجهات التالية :

2A) $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **2B)** $b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **2C)** $s = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

والجدير بالذكر أن خصائص المتجهات التي طبقتها في المستوى الإحداثي تستطيع أيضًا تطبيقها على المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد.

خصائص المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد جبريًا :

تساوي متجهين: يكون المتجهان متساويين إذا وفقط إذا كانت المركبات المتناظرة لكل منهما متساوية.

فإذا كان $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ فإن :

$$a = b \Leftrightarrow a_1 = b_1 , a_2 = b_2 \text{ and } a_3 = b_3$$

معكوس المتجه: معكوس المتجه $\overrightarrow{AB}$ هو المتجه $\overrightarrow{BA}$ حيث أن $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

فإذا كان المتجه $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ فإن $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$

مثلاً : إذا كان المتجه $m = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ فإن معكوس المتجه m هو $-m = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

المتجه الصفري: $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

مثال 3 **استعمال تساوي متجهين**

إذا كان $\begin{pmatrix} 9 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s \\ 6 \\ d+1 \end{pmatrix}$ **، فأوجد قيمة كل من** s , t , d

بما أن المتجهين متساويان اذن المركبات المتناظرة متساوية:

$d + 1 = 0$ $d = -1$	$t = 6$	$3s = 9$ $s = 3$

إذًا القيم هي $s = 3 ,\ t = 6 ,\ d = -1$

تحقق

3) إذا كان $\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3n+2 \\ m-2 \end{pmatrix}$ **، فأوجد قيمة كل من** m , n , r

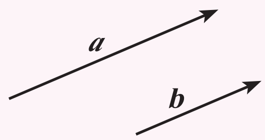
توازي المتجهات: عندما نضرب المتجه $\boldsymbol{a}$ بالثابت k فإنه ينتج متجه آخر يوازي المتجه $\boldsymbol{a}$، وقد حصل له تمدد أو تقلص.

مفهوم: توازي المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد

يكون المتجهان $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ **في الفضاء ثلاثي الأبعاد** متوازيين إذا وفقط اذا

وجد عدد حقيقي k بحيث أن: $\boldsymbol{a} = k\,\boldsymbol{b}\,,\ k \in \mathbb{R} - \{0\}$

ويكون طوله: $|\,\boldsymbol{b}\,| = |\,k\,|\,|\,\boldsymbol{b}\,|$



مثال 4: استعمال توازي متجهين

إذا علمت أن $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} s \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ، $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ r \end{pmatrix}$ وأن $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$ فأوجد قيمة كل من $r\,,\,s$

بما أن المتجهين متوازيان فإن $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ r \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} s \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ وينتج $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ks \\ 2k \\ -3k \end{pmatrix}$

من تساوي المتجهين $r = -3k \quad , \quad -1 = 2k \quad , \quad 2 = ks$

وبحل المعادلة $-1 = 2k$ ينتج أن $k = \frac{-1}{2}$

وبتعويض قيمة k في المعادلتين: $r = -3k \quad , \quad 2 = ks$ نجد أن

$$r = -3\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$2 = \left(\frac{-1}{2}\right) s \qquad 2\left(\frac{2}{-1}\right) = s \qquad -4 = s$$

إذن $s = -4 \quad , \quad r = \frac{3}{2}$

تحقق

4) إذا علمت أن $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ r \\ s \end{pmatrix}$ ، $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ وأن $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$ فأوجد قيمة كل من $r\,,\,s$

العمليات على المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد جبرياً :

تعلمت في الدروس السابقة كيف تجري العمليات على المتجهات في المستوى الاحداثي جبرياً وبيانياً. والآن ستتعلم كيفية إجراء تلك العمليات على المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد جبرياً.

مفهوم: العمليات على المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد

إذا كان $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ، $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ **متجهين، فإننا نعرف العمليات التالية على المتجهات:**

1) جمع متجهين:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

2) طرح متجهين:

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

3) ضرب متجه بعدد حقيقي k :

$$k.\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}$$

مثال 5 العمليات على المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد

إذا كان $c=\begin{pmatrix}-1\\7\\2\end{pmatrix}$ ، $b=\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}$ ، $a=\begin{pmatrix}4\\1\\-3\end{pmatrix}$ فأوجد ما يلي :

a) $a+b$

$$a+b=\begin{pmatrix}4+1\\1+0\\-3+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix}$$

b) $a-b$

$$a-b=\begin{pmatrix}4-1\\1-0\\-3-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\-8\end{pmatrix}$$

c) $3(a-b)+c$

$$3(a-b)+c=3\begin{pmatrix}4\\1\\-3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\7\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\10\\-22\end{pmatrix}$$

d) $b-b$

$$b-b=\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

تحقق

إذا كان $c=\begin{pmatrix}10\\-1\\9\end{pmatrix}$ ، $b=\begin{pmatrix}0\\8\\3\end{pmatrix}$ ، $a=\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$ فأوجد ما يلي :

5A) $a+b$ 5B) $a-b$ 5C) $-2b$

5D) $2a-2b+5c$ 5E) $c-c$

إرشاد

خواص العمليات على المتجهات

- $a+b=b+a$
- $a+\vec{0}=\vec{0}+a=a$
- $(a+b)+c=a+(b+c)$
- $a+(-a)=(-a)+a=\vec{0}$
- $k(a\pm b)=ka\pm kb$

إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء :

تعلمت سابقاً كيفية إيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة بين نقطتين في المستوى الإحداثي، والآن تستطيع ان تستعمل نفس القانون لإيجاد إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة بمعرفة متجه الموضع القياسي لكل من طرفيها في الفضاء.

فإذا كانت $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ نقطتين في الفضاء ثلاثي الأبعاد، فإن إحداثيات نقطة المنتصف M هي:

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

مثال 6 إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء

إذا كانت $A(-1, 2, 4), B(1, 0, -1)$ نقطتين في الفضاء، فأوجد إحداثيات نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة AB .

$$M=\left(\frac{-1+1}{2},\frac{2+0}{2},\frac{4+-1}{2}\right)=\left(0,1,\frac{3}{2}\right)$$

تحقق

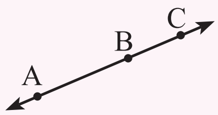
6) إذا كانت $A(2, 0, 1), B(0, 8, -1)$ نقطتين في الفضاء، فأوجد إحداثيات نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة AB .

من التطبيقات الهندسية للمتجهات استعمالها في إثبات وقوع أي عدد من النقاط على استقامة واحدة.

مفهوم نقاط على استقامة واحدة

ثلاث نقاط A , B , C تقع على استقامة واحدة إذا وفقط اذا كانت

$\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{BC}\ ,\ k \in \mathbb{R} - \{0\}$



مثال 7 إثبات نقاط على استقامة واحدة

أثبت أن النقاط $A(-1, 2, 3), B(4, 0, -1), C(14, -4, -9)$ تقع على استقامة واحدة .

- أوجد متجهات الموضع $\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{CD}$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} ، \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

- اكتب أحد المتجهين على صورة ناتج ضرب المتجه الآخر بعدد حقيقي إن أمكن.

$$\begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = 2\ \overrightarrow{AB}$$

و بما أن $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BC}$ والنقطة B مشتركة بينهما إذن النقاط A , B , C تقع على استقامة واحدة.

تحقق

7) أثبت أن النقاط $A(-2, 1, 4), B(4, 3, 0), C(19, 8, -10)$ تقع على استقامة واحدة.

إرشــاد

في حل مثال 7

عند تحديد متجهات الموضع يمكنك اختيار أي متجهين بحيث يشتركان بنقطة واحدة، مثل $\overrightarrow{AC}\ ,\ \overrightarrow{CB}$

تمارين 7-4

مثال 1 أوجد كلاً من $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{PQ}$ في كل مما يلي :

1) $P(3, -1, -1)\quad , \quad Q(-1, 0, 1)$

2) $P(0, 0, 0)\quad , \quad Q(2, -1, 3)$

مثال 2 أوجد طول كل من المتجهات التالية :

3) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

4) $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

5) $\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

مثال 3 أوجد قيمة كل من a , b و c إذا كان :

6) $\begin{pmatrix} a-4 \\ b-3 \\ c+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} a-5 \\ b-2 \\ c+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-a \\ 2-b \\ 5-c \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c-1 \\ 2 \end{pmatrix}$

مثال 4 **9)** إذا علمت أن $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ r \\ s \end{pmatrix}$ وأن $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$ أوجد قيمة r , s

10) أوجد قيمة كل من a و c إذا علمت أن $\boldsymbol{u} \,//\, \boldsymbol{v}$ حيث $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ و $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ b \end{pmatrix}$

مثال 5 **11)** إذا كان $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، فأوجد ما يلي :

a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ **b)** $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ **c)** $3\boldsymbol{a}$

d) $2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{c}$ **e)** $\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} + 5\boldsymbol{c}$ **f)** $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}$

12) إذا كان $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ، فأوجد ما يلي :

a) $|\boldsymbol{p}|$ **b)** $|\boldsymbol{q}|$ **c)** $|\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}|$

d) $|\boldsymbol{p}| + |\boldsymbol{q}|$ **e)** $|\boldsymbol{p}|\,\boldsymbol{q}$ **f)** $\frac{1}{|\boldsymbol{p}|}\boldsymbol{p}$

مثال 6 اذا كانت النقطتان A و B في الفضاء ثلاثي الأبعاد، فأوجد احداثيات نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة AB في كل مما يلي :

13) $A\,(2, 3, -1)\,,\, B\,\,(1, 0, 3)$

14) $A\,(-1, 5, 1)\,,\, B\,\,(1, 0, 2)$

مثال 7 **15)** أثبت أن النقاط $A\,(2\,,1\,,1)\,,\,B\,(5\,,-5\,,-2)\,,\,C\,(-1\,,7\,,4)$ تقع على استقامة واحدة.

16) إذا كانت النقاط $P\,(1\,,-1\,,0)\,,\,Q\,(4\,,-3\,,7)\,,\,R\,(a\,,2\,,b)$ تقع على استقامة واحدة، فأوجد قيمة كل من $a\,,\,b$

أوجد قيمة كل من n و m في كل مما يلي:

17) $m\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\-27\\0\end{pmatrix}$

18) $m\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}1\\7\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-19\\2\end{pmatrix}$

19) إذا كانت $A\,(-1\,,3\,,4)\,,B\,(2\,,5\,,-1)\,,C\,(-1\,,2\,,-2)\,,D\,(r\,,s\,,t)$ أربع نقاط في الفضاء،

فأوجد قيمة كل من $r\,,\,s\,,\,t$ اذا كان :

a) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$

b) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

20) إذا كانت $A\,(-1, 3, 4)\,,B\,(2, 5, -1)\,,C\,(-1, 2, -2)\,,D\,(r\,,s\,,t)$ تمثل رؤوس شكل رباعي منتظم،

فأوجد كلاً من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$

مسائل مهارات التفكير العليا

21) افترض أن النقاط $A\,,B\,,C\,,D$ لا تقع على استقامة واحدة بحيث $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

A) حدد نوع الشكل الرباعي $ABCD$

B) اثبت أن $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

C) بين أن $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BD}$ ينصف كل منهما الآخر.

ما الذي يمكن استنتاجه من كل مما يلي :

22) $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{CD}$

23) $\overrightarrow{RS}=\frac{1}{2}\overrightarrow{KL}$

24) $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BC}$

25) $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

26) اكتب متى يكون المتجهان متوازيين.

7-5 متجهات الوحدة الأساسية
The Unit Vectors

تمهيد

إذا كان لديك المتجهات التالية : $d = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ، $c = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ، $b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ، $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1) أوجد طول كل متجه من هذه المتجهات.

2) هل هناك متجهات لها الطول نفسه؟

3) أي من المتجهات يمثل متجه وحدة؟

لاحظت من إجابات الأسئلة السابقة أن $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ هو متجه وحدة لأن طوله يساوي $\sqrt{1^2+0^2+0^2} = 1$

$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ هو متجه وحدة لأن طوله يساوي $\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + 0^2 + (-\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1$

ولو أوجدنا طول كل من المتجهات التالية $k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ، $j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، $i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ستجد أن طول كل منها وحدة واحدة :

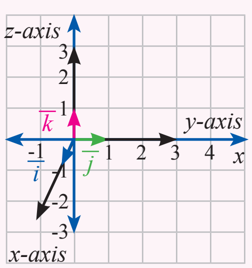
لذلك هي متجهات وحدة خاصة باتجاه كل من المحاور الموجبة X, Y, Z على الترتيب.

وتسمى **بمتجهات الوحدة الأساسية** (unit vectors)

مفهوم — متجهات الوحدة الأساسية

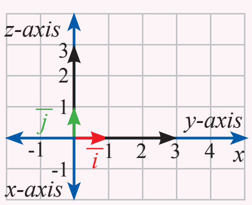
- متجهات الوحدة الأساسية في الفضاء ثلاثي الأبعاد :

$$i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



- متجهات الوحدة الأساسية في المستوى الإحداثي :

$$i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



أفكار الدرس

- التعرف على متجهات الوحدة الأساسية واستعمالها.
- التعبير عن متجه على الصورة التركيبية باستعمال متجهات الوحدة الأساسية والعكس.
- إيجاد متجه يوازي متجهًا معلومًا.
- حل تطبيقات فيزيائية على المتجهات.

المعايير:

- 11A.10.6
- 12A.13.1

المصطلحات:

متجهات الوحدة الأساسية
unit vectors

السرعة المتجهة
velocity

السرعة
speed

لأي متجه مثل $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ مكتوب على الصورة التركيبية يمكن كتابته باستعمال متجهات الوحدة الأساسية كما يلي:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= a_1\, \boldsymbol{i} + a_2 \boldsymbol{j} + a_3\, \boldsymbol{k}$$

مفهوم كتابة المتجه باستعمال متجهات الوحدة الأساسية

لأي متجه a مكتوب على **الصورة التركيبية** يمكن كتابته باستعمال **متجهات الوحدة الأساسية** كما يلي:

• في الفضاء ثلاثي الأبعاد $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ فإن :

$$\boldsymbol{a} = a_1\, \boldsymbol{i} + a_2 \boldsymbol{j} + a_3\, \boldsymbol{k}$$

• في المستوى الإحداثي $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ فإن :

$$\boldsymbol{a} = a_1\, \boldsymbol{i} + a_2 \boldsymbol{j}$$

مثال 1 كتابة المتجه باستعمال متجهات الوحدة الأساسية

اكتب كلاً من المتجهات التالية باستعمال متجهات الوحدة الأساسية :

a) $a = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$a = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$

b) $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$b = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$

تحقق

اكتب كلاً من المتجهات التالية باستعمال متجهات الوحدة الأساسية :

1A) $q = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$

1B) $p = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

ويمكن التعبير عن المتجه المكتوب باستعمال متجهات الوحدة الأساسية وكتابته على الصورة التركيبية.

مثال 2 كتابة المتجه باستعمال الصورة التركيبية

a) اكتب المتجه $q = i + 2j - k$ بالصورة التركيبية.

$$q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) اكتب المتجه $p = 6i - j$ بالصورة التركيبية في المستوى الإحداثي.

$$p = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

تحقق

2A) اكتب المتجه $a = 3i + j + 2k$ بالصورة التركيبية.

2B) اكتب المتجه $b = i + 2j$ بالصورة التركيبية في المستوى الإحداثي.

المتجهات المكتوبة باستعمال متجهات الوحدة الأساسية ينطبق عليها كل ما ينطبق على المتجه المكتوب بالصورة التركيبية مثل إيجاد طول متجه وإجراء العمليات على المتجهات و خصائصها .

مثال 3 إيجاد طول متجه

أوجد طول كل من المتجهات التالية :

a) $a = 5i + j + 4k$

$$|a| = \sqrt{(5)^2 + (1)^2 + (4)^2}$$

$$|a| = \sqrt{42}$$

b) $v = 3j - k$

$$|v| = \sqrt{(0)^2 + (3)^2 + (-1)^2}$$

$$|v| = \sqrt{10}$$

تحقق

أوجد طول كل من المتجهات التالية :

3A) $b = \mathbf{i} - 3k$

3B) $v = i - j + 2k$

مثال 4 متجه الوحدة في الفضاء ثلاثي الأبعاد

أوجد قيمة y في كل من متجهات الوحدة التالية :

a) $u = (2y)\, i$

$$|u| = \sqrt{(2y)^2 + (0)^2 + (0)^2} = 1$$

$$|2y| = 1$$

$$|y| = \frac{1}{2}$$

$$y = \pm\frac{1}{2}$$

b) $v = yi + \frac{2}{3} j - \frac{1}{3} k$

$$|v| = \sqrt{(y)^2 + (\tfrac{2}{3})^2 + (\tfrac{-1}{3})^2} = 1$$

$$y^2 + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = 1$$

$$y^2 = (1 - \frac{5}{4})$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{4}{9}} = \pm\frac{2}{3}$$

تحقق

أوجد قيمة x في كل من متجهات الوحدة التالية :

4A) $p = x\, j$

4B) $w = \frac{-1}{2} i + xj + \frac{1}{4} k$

إرشـاد

خصائص الجذور

$\sqrt{x^2} = |x|$

إيجاد متجه يوازي متجهًا معلومًا :

لإيجـاد متجـه باتجاه متجه آخر معلوم مثل a نأخذ نسـبة طوله إلى طول المتجه a ونضربهـا في المتجه a ، وهذا يقودنا الى المفهوم التالي :

مفهوم — إيجاد متجه يوازي متجهًا معلومًا

إذا كان المتجه b طوله k ويوازي المتجه a فإن :

$$b = \pm \frac{k}{|a|} \times a$$

أي أنه :

- اذا كان المتجه b بنفس اتجاه المتجه a فإن : $b = \frac{k}{|a|} \times a$
- اذا كان المتجه b بعكس اتجاه المتجه a فإن : $b = \frac{-k}{|a|} \times a$

مثال 5 — إيجاد متجه يوازي متجهًا معلومًا

a) أوجد متجه الوحدة v الموازي للمتجه $p = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

بما أن v متجه وحدة فإن $k = 1$ ونجد طول المتجه p كما يلي :

$$|p| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

ثم نعـوض في القانون

$$v = \pm \frac{k}{|p|} \times p$$

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \pm \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

b) أوجد المتجه b اذا كان له نفس اتجاه المتجه $a = i - j + 4k$ و طوله 3 وحدات.

$$b = \frac{k}{|a|} \times a$$

$$b = \frac{3}{\sqrt{1+1+16}}(i - j + 4k)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(i - j + 4k) = \frac{1}{\sqrt{2}} i - \frac{1}{\sqrt{2}} j - \frac{4}{\sqrt{2}} k$$

تحقق

5A) أوجد متجه الوحدة الموازي للمتجه $p = -i - 4j$

5B) أوجد المتجه b اذا كان له عكس اتجاه المتجه $a = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ و طوله 5 وحدات.

تطبيقات فيزيائية :

عندما تؤثر قوة أو مجموعة قوى على جسم ما متحرك أو ثابت، فإنها قد تغير في اتجاه حركته أو مقدار سرعته، ويكون اتجاه حركته باتجاه محصلة القوى المؤثرة عليه، **والسرعة المتجهة** (velocity) لجسم ما يمكن ان تمثل بمتجه اتجاهه هو اتجاه حركة الجسم و مقدارها هو **متوسط سرعة الجسم** (speed)، ونمثل حركته بمتجه الازاحة بحيث يعتمد على نقطة بداية الحركة و نقطة نهايتها.

مثال 6 تطبيقات فيزيائية

جسيم يتحرك بسرعة ثابتة v من A الى B . اذا كان : $a = i + 2j - 2k$ يمثل متجه الموقع للنقطة A، $b = 5i - 7j - k$ يمثل متجه الموقع للنقطة B

A) احسب متجه الإزاحة من النقطة A الى النقطة B

B) إذا كانت المسافة مقاسة بالمتر، أثبت أن المسافة من A الى B تساوي $7\sqrt{2}$ m

C) إذا استغرق الجسيم ثانيتين لقطع المسافة من A الى B ، احسب سرعته المتوسطة (s).

A) $\overrightarrow{AB} = (5-1)\,\boldsymbol{i} + (-7-2)\,\boldsymbol{j} + (-1-2)\,\boldsymbol{k}$

$\overrightarrow{AB} = 4\boldsymbol{i} - 9\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

B) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(4)^2 + (-9)^2 + (1)^2}$

$= \sqrt{98}$

$= 7\sqrt{2}$

C) $s = \frac{d}{t} = \frac{7\sqrt{2}}{2}\ m/s$

إرشاد

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

تحقق

6) جسيم يتحرك بسرعة ثابتة v من A الى B . اذا كان :

$a = i - 2j + k$ يمثل متجه الموقع للنقطة A، $b = 3i - j - k$ يمثل متجه الموقع للنقطة B

A) احسب متجه الإزاحة من النقطة A الى النقطة B

B) إذا كانت المسافة مقاسة بالمتر، أثبت ان المسافة من A الى B تساوي 3m

C) إذا استغرق الجسيم ثانيتين لقطع المسافة من A الى B ، احسب سرعته المتوسطة (s).

تمارين 5-7

مثال 1 اكتب المتجهات التالية باستعمال متجهات الوحدة الأساسية :

1) $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ 2) $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ 3) $t = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 4) $s = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

اكتب المتجهات التالية بالصورة التركيبية.

5) $a = 3i - j + 4k$ 6) $b = i - 5k$

مثال 2 اكتب المتجهات التالية بالصورة التركيبية في المستوى الإحداثي :

7) $a = 5i + j$ 8) $s = i - 3j$

مثال 3 أوجد طول كل من المتجهات التالية :

9) $b = 3i + 5j - k$ 10) $v = -j - 3k$

مثال 4 أوجد قيمة x في كل من متجهات الوحدة التالية :

11) $a = (3x)j + k$ 12) $b = \frac{-1}{5}i + xj + \frac{1}{5}k$

13) $u = xi + \frac{2}{3}j - \frac{1}{3}k$ 14) $v = xi + k$

عبر عن المتجهات التالية بالصورة التركيبية وأوجد طولها :

15) $b = i - j + 3k$ 16) $v = \frac{1}{2}(j + k)$

مثال 5 17) أوجد المتجه b إذا كان له عكس اتجاه المتجه $a = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ وطوله 5 وحدات.

18) أوجد متجه الوحدة الموازي للمتجه $p = -i - 4j$.

19) أوجد متجه الوحدة الذي له عكس اتجاه المتجه $a = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

20) أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

21) إذا علمت أن $a = 2i - j + k$, $b = i + 2k$, $c = j - k$ أوجد ما يلي:

(اكتب الإجابة باستعمال متجهات الوحدة الأساسية)

a) $a + b$ b) $a - b$ c) $|-2a|$

d) $3a - 5b$ e) $a - b + 4c$ f) $|a - c|$

مثال 6

22) جسيم يتحرك بسرعة ثابتة v من A إلى B . إذا كان $a = 5i + j - k$ يمثل متجه الموقع لنقطة A ، $b = i + j + 2k$ يمثل متجه الموقع لنقطة B :

A) احسب متجه الازاحة من النقطة A إلى النقطة B

B) إذا كانت المسافة مقاسة بالمتر. أثبت أن المسافة من A إلى B تساوي 5m

C) إذا استغرق الجسيم ثانيتين لقطع المسافة من A إلى B . احسب سرعته المتوسطة.

23) عند الساعة 12:00 ظهرًا، رصد موقع سفينة في البحر فكان متجه موضعها $r = 3i + 4j$ ، ثم تحركت بسرعة متجهة ثابتة $v = 4i - 5j$:

A) أوجد متجه موضع السفينة في تمام الساعة 3:00 بعد الظهر.

B) أوجد مقدار سرعة السفينة.

مسائل مهارات التفكير العليا

24) اكتشف الخطأ : أوجد كل من خالد وعمر طول المتجه $v = 2i + 3j - k$ ، فأي منهما إجابته صحيحة؟ وضح إجابتك.

خالد	عمر
$\lvert v \rvert = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}$ $= \sqrt{14}$	$\lvert v \rvert = \sqrt{2^2 + 3^2 - 1^2}$ $= \sqrt{12}$

25) إذا كان $a = xi - 8j + 2k$ ، $\lvert a \rvert = 2\sqrt{19}$ ، فأوجد قيمة x

26) إذا كان $b = x_2 i + y_2 j$ ، $a = x_1 i + y_1 j$ ، فأثبت أن $a + b = b + a$

7-6 الضرب القياسي لمتجهين
Scalar Product

أفكار الدرس
- إيجاد الضرب القياسي لمتجهين.
- تعرف خصائص الضرب القياسي لمتجهين واستعمالها.
- إيجاد الزاوية بين متجهين باستعمال الضرب القياسي.
- إيجاد الزوايا الاتجاهية لمتجه ما.
- تمييز المتجهين (غير الصفريين) المتعامدين باستعمال الضرب القياسي.
- حل تطبيقات هندسية على الضرب القياسي للمتجهات.

المعايير:
11A.10.5
11A.10.6
12A.13.3
12A.13.5
12A.13.6

المصطلحات:
الضرب القياسي
scalar product

الضرب النقطي
dot product

الزوايا الاتجاهية
the direction angles

تمهيد
تعلمت سابقًا كيفية جمع وطرح المتجهات، وضرب المتجهات بقيمة عددية. وقد تبين أن هذه العمليات لديها استخدامات تطبيقية، وعلى سبيل المثال يستخدم ضرب متجه بعدد حقيقي غير صفري في التوازي وإيجاد متجهات الوحدة الاساسية. والآن ستتعلم عملية ضرب متجهين معًا و تطبيقاتها العملية.

ضرب المتجهات:

لأي عددين مثل a و b يمكننا إيجاد حاصل ضربهما ونكتبه على صورة ab أو $a \times b$. ولها نفس الناتج. أما بالنسبة للمتجهات فإنه يوجد نوعين من الضرب: الضرب الاتجاهي **والضرب القياسي** (scalar product) سنقتصر في هذا الدرس على دراسة الضرب القياسي فقط وهو حاصل ضرب متجهين بحيث يعطي كمية قياسية، لذلك سمي بالضرب القياسي، ويرمز له $(\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b})$ وتقرأ $(\boldsymbol{a}$ dot $\boldsymbol{b})$.
ويسمى أيضًا **بالضرب النقطي** (dot product).

مفهوم — الضرب القياسي

إذا كان
$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$
فإن
$$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

مثال 1: إيجاد الضرب القياسي

a) إذا كان $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ، فأوجد $\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \\ &= 2(-1) + 3(0) + (-1)(2) \\ &= -4 \end{aligned}$$

إذن $\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = -4$

b) إذا كان $\boldsymbol{q} = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$ ، فأوجد $\boldsymbol{p} \bullet \boldsymbol{q}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} \bullet \boldsymbol{q} &= (\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}) \bullet (3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{j}) \\ &= (1)(3) + (-1)(2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

إذن $\boldsymbol{p} \bullet \boldsymbol{q} = 1$

إرشاد
الضرب القياسي في المستوى الإحداثي:

إذا كان $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

فإن $\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

تحقق

1A) إذا كان $q=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ ، $p=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ ، فأوجد $p \cdot q$

1B) إذا كان $u=-i+7j$ ، $v=i+j$ ، فأوجد $u \cdot v$

عند تطبيق الضرب القياسي على متجهات الوحدة الأساسية سنجد ما يلي:

$$i \cdot j = (1)(0)+(0)(1)+(0)(0)=0$$
$$i \cdot k = (1)(0)+(0)(0)+(0)(1)=0$$
$$i \cdot i = (1)(1)+(0)(0)+(0)(0)=1$$

نتيجة

1) $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$ 2) $i \cdot j = i \cdot k = j \cdot k = 0$

خصائص الضرب القياسي: درست خصائص جمع وطرح المتجهات وضرب المتجهات بعدد حقيقي، والآن ستتعلم خصائص الضرب القياسي على المتجهات.

	الخاصية	التمثيل الجبري
1	ضرب متجه في نفسه	$a \cdot a = \|a\|^2$
2	الضرب القياسي عملية إبدالية	$a \cdot b = b \cdot a$
3	ضرب متجه بالمتجه الصفري	$a \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot a = 0$
4	خاصية التوزيع	$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$ $(b \pm c) \cdot a = b \cdot a \pm c \cdot a$
5	الضرب بعدد حقيقي	$k(a \cdot b) = ka \cdot b = a \cdot kb$

مثال 2: استعمال خصائص الضرب القياسي

إذا كان $c=\begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix}$ ، $b=\begin{pmatrix}-1\\5\\1\end{pmatrix}$ ، $a=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ ، فأوجد كلًا مما يلي:

a) $a \cdot a$

$$a \cdot a = |a|^2$$
$$= \left(\sqrt{2^2+1^2+3^2}\right)^2$$
$$= 14$$

b) $a \cdot (b+c)$

$$a \cdot (b+c) = a \cdot \left(\begin{pmatrix}-1\\5\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix}\right)$$
$$= \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1\\4\\5\end{pmatrix}$$
$$= (2)(-1)+(1)(4)+(3)(5) = 17$$

c) $\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{c}$

$$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{c} = [\,(2)(-1) + (1)(5) + (3)(1)\,] + [\,(2)(0) + (1)(-1) + (3)(4)\,]$$
$$= 6 + 11 = 17$$

d) $\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b} \bullet \boldsymbol{c})$

$$\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b} \bullet \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\,[\,(-1)(0) + (5)(-1) + (4)(1)\,]$$
$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}(-1)$$
$$= \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

تحقق

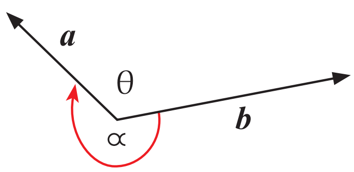
2) إذا كان $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، فأوجد كلًّا مما يلي :

a) $\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{u}$ b) $|\boldsymbol{u}|^2$ c) $\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{w}$

d) $\boldsymbol{w} \bullet \boldsymbol{u}$ e) $(\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v})\boldsymbol{w}$

الزاوية بين متجهين : لأي متجهين $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ لهما نقطة البداية نفسها ، فإنهما يكوّنان زاويتين محصورتين بينهما α , θ وتكون الزاوية بينهما هي الزاوية الأصغر (θ).

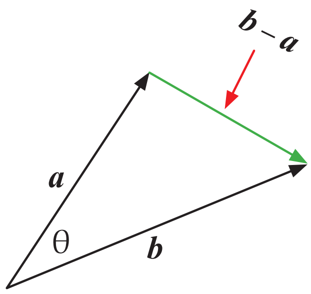
حيث $0 \le \theta \le 180^\circ$ كما في الشكل المجاور



ولاستنتاج صيغة لقياس زاوية بين متجهين.

افرض أن $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

متجهان و θ الزاوية المحصورة بينهما



والرسم البياني يوضح عملية جمع $-\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ وناتجها المتجه $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$

والذي طوله يساوي $|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}|$ وباستعمال قانون جيب التمام **نجد أن :**

$$|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

$$(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2 = a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2} + b_1^{\,2} + b_2^{\,2} + b_3^{\,2} - 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

وبعد التبسيط نحصل على :

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

$$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$$

إرشـاد

قانون جيب التمام :

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$

مفهوم — الضرب القياسي بدلالة الزاوية بين المتجهين

إذا كان b , a متجهين غير صفريين و θ الزاوية المحصورة بينهما فإن :

- $\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos \theta \quad , \quad 0 \le \theta \le 180^{\circ}$
- $\cos \theta = \dfrac{\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} \quad , \quad 0 \le \theta \le 180^{\circ}$

مثال 3 : إيجاد الضرب القياسي بدلالة الزاوية بين المتجهين

إذا كان b , a متجهين بحيث أن $\theta = 67^{\circ}$, $|b| = 7$, $|a| = 12$ ، فأوجد $a \bullet b$ لأقرب جزء من عشرة.

$$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos \theta$$
$$= (12)\,(7) \cos 67^{\circ}$$
$$= 32.8$$

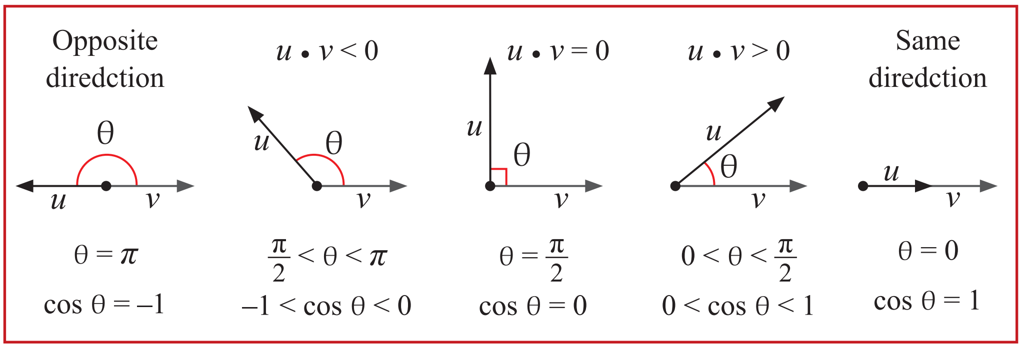
إذن $\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = 32.8$

تحقق

3) إذا كان b , a متجهين بحيث أن $\theta = 70^{\circ}$, $|b| = 8$, $|a| = 3$ ، فأوجد $a \bullet b$ لأقرب جزء من عشرة

لاحظ أن : $|b|$, $|a|$ موجبان دائمًا وبالتالي فإن كلًا من $a \bullet b$ و $\cos \theta$ لهما نفس الإشارة.

والشكل التالي يوضح العلاقة بين المتجهين ونوع الزاوية بينهما.



مثال 4 : إيجاد الزاوية بين متجهين

أوجد الزاوية بين المتجهين a , b في كل مما يلي لأقرب درجة

A) إذا كان $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

- أوجد قيمة الضرب القياسي للمتجهين.

$$\boldsymbol{a} \bullet \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$
$$= 2(1) + 3(1) + (-2)0$$
$$= 5$$

- أوجد كلًا من $|b|$, $|a|$

$$|a| = \sqrt{4 + 9 + 4} = \sqrt{17}$$
$$|b| = \sqrt{1 + 1 + 0} = \sqrt{2}$$

• أوجد الزاوية باستعمال الصيغة.

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{5}{\sqrt{17}\ \sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{34}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right)$$

$$\theta \approx 30.96^{\circ}$$

إذن قياس الزاوية بين المتجهين يساوي 31° تقريبًا.

B) إذا كان $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

• أوجد قيمة الضرب القياسي للمتجهين.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ &= (-1)(1) + (-3)(2) + (2)0 \\ &= -7\end{aligned}$$

• أوجد كلًا من $|\boldsymbol{b}|$, $|\boldsymbol{a}|$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$$
$$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{1+4+0} = \sqrt{5}$$

• أوجد الزاوية باستعمال الصيغة.

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{-7}{\sqrt{1+9+4}\ \sqrt{1+4+0}} = \frac{-7}{\sqrt{70}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-7}{\sqrt{70}}\right)$$

$$\theta \approx 146.79^{\circ}$$

إذن قياس الزاوية بين المتجهين يساوي 147° تقريبًا.

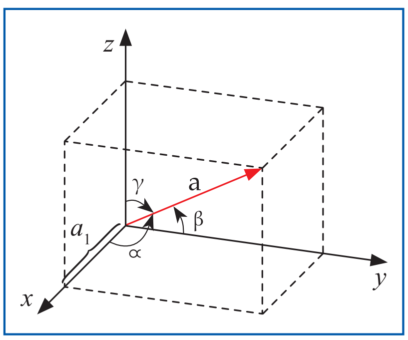
تحقق

أوجد الزاوية بين المتجهين $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ في كل مما يلي لأقرب درجة.

4A) إذا كان $\boldsymbol{p} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{q} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

4B) إذا كان $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

الزوايا الاتجاهية :



إذا كان $\boldsymbol{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ متجهًا غير صفري في فضاء ثلاثي الأبعاد مرسوم في الوضع القياسي كما في الشكل المجاور، وكانت الزوايا γ , β , α هي قياسات الزوايا الثلاث التي يصنعها المتجه $\boldsymbol{a}$ مع المحاور الإحداثية الموجبة X , Y , Z على الترتيب، فإن هذه الزوايا تسمى **الزوايا الاتجاهية** (the direction angles) للمتجه $\boldsymbol{a}$ وهي التي تحدد اتجاه المتجه في الفضاء ثلاثي الأبعاد بالنسبة للمحاور.

ولإيجاد هذه الزوايا الاتجاهية يمكننا تطبيق قانون الضرب القياسي مع متجهات الوحدة الأساسية $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

فمثلًا: لإيجـاد الزاويــة الاتجاهية $\propto$ والتي يصنعها المتجه $\boldsymbol{a}$ مع محور X الموجب نسـتعمل قانون الضرب القياسـي كما يلي :

$$\cos\propto = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{i}|} = \frac{a_1(1)+a_2(0)+a_3(0)}{|a|\cdot(1)} = \frac{a_1}{|a|}$$

وبالمثـل يمكـن إيجاد الزوايا الاتجاهية β , γ التي يصنعها المتجه $\boldsymbol{a}$ مـع المحورين Y , Z على الترتيب. وهذا يقودنا للمفهوم التالي :

نتيجة

لأي متجه غير صفري $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ فإن الزوايا بين المتجه $\boldsymbol{a}$ والمحاور الإحداثية X , Y , Z الموجبة هي $\propto , \beta , \gamma$ على الترتيب تحسب كالتالي:

$$\cos\propto = \frac{a_1}{|a|} \quad , \quad \cos\beta = \frac{a_2}{|a|} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|a|}$$

مثال 5 : إيجاد الزوايا الاتجاهية

أوجـد الزاويــة بيـن المتجه $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ وكل من المحاور الإحداثية الموجبة X , Y , Z لأقرب جزء من عشر.

الحل :

لتكن الزوايا $\propto , \beta , \gamma$ هي الزوايا التي يصنعها المتجه v مع المحاور X , Y , Z على الترتيب. فإن :

$$\cos\propto = \frac{v_1}{|v|} = \frac{2}{\sqrt{4+9+16}} = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

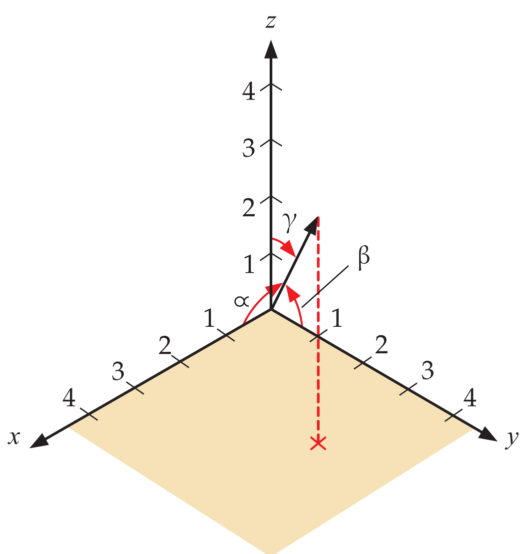
$$\propto = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right) \approx 68.2^\circ$$

$$\cos\beta = \frac{v_2}{|v|} = \frac{3}{\sqrt{4+9+16}} = \frac{3}{\sqrt{29}}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{29}}\right) \approx 56.1^\circ$$

$$\cos\gamma = \frac{v_3}{|v|} = \frac{4}{\sqrt{4+9+16}} = \frac{4}{\sqrt{29}}$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{29}}\right) \approx 42.0^\circ$$



تحقق

5) أوجد الزاوية بين المتجه $\mathbf{a} = -\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ وكل من المحاور الإحداثية الموجبة X , Y , Z

تعامد المتجهات:

إذا تعامد المتجهان $\boldsymbol{a} , \boldsymbol{b}$ فإن :

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(90) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|(0) = 0$$

نتيجة

يتعامد المتجهان غير الصفريين a و b إذا وفقط إذا كان $a \bullet b = 0$

مثال 6 : **المتجهات المتعامدة**

أي مما يلي يمثل متجهين متعامدين ؟

A) $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} a \bullet b &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ &= (0)(1) + (1)(0) + (1)(1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

إذن المتجهان غير متعامدين.

B) $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} a \bullet b &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ &= (3)(3) + (2)(-2) + (-1)(5) \\ &= 0 \end{aligned}$$

إذن المتجهان متعامدان.

تحقق

أي مما يلي يمثل متجهين متعامدين؟

6A) $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

6B) $p = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

مثال 7 : **استعمال تعامد المتجهات**

أوجد قيمة k التي تجعل المتجه $v = \begin{pmatrix} 2+k \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ عموديًا على المتجه $u = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ k \end{pmatrix}$

بما أن المتجهين متعامدان فإن $u \bullet v = 0$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ k \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2+k \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} &= 0 \\ 5(2+k) + 2(3) + (-7)k &= 0 \\ 10 + 5k + 6 - 7k &= 0 \\ 2k &= 16 \\ k &= 8 \end{aligned}$$

تحقق

7) أوجد قيمة m التي تجعل المتجه $v = \begin{pmatrix} m \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ عموديًا على المتجه $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ m \end{pmatrix}$

يمكن استعمال الضرب القياسي في بعض التطبيقات الهندسية.

مثال 8 : **تطبيقات هندسية**

إذا كانت $A(5, 1, 2), B(6, -1, 0), C(3, 2, 0)$ هي رؤوس مثلث ، باستعمال الضرب القياسي أثبت أن المثلث ABC قائم الزاوية.

الخطوة 1 : أوجد متجهات الموضع التي تمثل أضلاع المثلث ABC

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

الخطوة 2 : أوجد الضرب القياسي.

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC} = 1(-3) + (-2)(3) + (-2)(0) = -9$$

$$\overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{CA} = (-3)(2) + (3)(-1) + (0)(2) = -9$$

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CA} = 1(2) + (-2)(-1) + (-2)(2) = 0$$

بما أن $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{CA} = 0$ فإن $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CA}$ وبالتالي فإن المثلث ABC مثلث قائم الزاوية في A

تحقق

8) إذا كانت $P(5, 7, -5), Q(4, 7, -3), R(2, 7, -4)$ رؤوس مثلث ، باستعمال الضرب القياسي أثبت أن المثلث PQR قائم الزاوية. ناقش طريقة أخرى لإثبات ذلك.

تمارين 7-6

مثال 1 أوجد $a \cdot b$ في كل مما يلي :

1) $a = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

2) $a = 2i - 3j$, $b = 4i - j$

3) $a = -6i$, $b = -2i + 2\sqrt{3}\, j$

4) $a = 2i + 2j$, $b = -4i - 4j$

مثال 2 إذا علمت أن $u = 3i - 2j$, $v = i + 3j$, $w = 4i + 5j$ ، فأوجد ناتج كل مما يلي :

5) $u \cdot (v + w)$

6) $u \cdot v + u \cdot w$

7) $|a|^2$

8) $u \cdot u$

9) $u\, (v \cdot w)$

10) $(u \cdot v)\, w$

11) $(u \cdot v)\, (u \cdot w)$

12) $(u + v) \cdot (u - v)$

مثال 3 إذا كان $p \cdot q$ متجهين ، أوجد :

13) $|p| = 2$, $|q| = 5$, $\theta = 60^\circ$

14) $|p| = 6$, $|q| = 3$, $\theta = 120^\circ$

مثال 4 أوجد الزاوية بين المتجهين p , q في كل مما يلي لأقرب درجة إذا كان :

15) $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

16) $p = i - j + k$, $q = -i + 3j$

17) $p = 4i - j$, $q = 2i - 3j$

18) $p = -2i + 2\sqrt{3}\, j$, $q = -6j$

مثال 5 19) أوجد الزاوية بين المتجه $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ وكل من المحاور الإحداثية الموجبة X , Y , Z

20) أوجد الزاوية بين المتجه $a = 2i + 3j$ وكل من المحاور الإحداثية الموجبة X , Y , Z

مثال 6 أي مما يلي يمثل متجهين متعامدين؟

21) $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

22) $q = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $p = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

23) $q = 2j - 3j$, $p = 4i - j$

24) $q = 2i - j$, $p = i + 2j$

مثال 7 25) أوجد قيمة m إذا علمت أن $a = mj - 3j$ و $b = 5i + 7j$ متعامدان.

26) ما قيمة b التي تجعل المتجهين $\begin{pmatrix} -6 \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ b^2 \end{pmatrix}$ متعامدين .

مثال 8 27) إذا كانت $A(1, -3), B(2, 0), C(6, -2)$ هي رؤوس مثلث في المستوى XY ،
باستعمال الضرب القياسي بين فيما إذا كان المثلث ABC مثلث قائم الزاوية أم لا.

28) استعمل الضرب القياسي لإيجاد قياس $\angle ABC$ حيث $A(5, 4, 3), B(9, 3, -2), C(4, -1, 2)$

29) إذا كانت $A(1, 2), B(3, 4), C(2, 5)$ هي رؤوس مثلث ، باستعمال الضرب القياسي
أوجد قياسات الزوايا الداخلية للمثلث ABC

30) حدد ما اذا كان المتجهان v و u متعامدين أم متوازيين أم غير ذلك في كل مما يلي :

A) $u = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

B) $u = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \end{pmatrix}$

C) $u = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

31) إذا علمت ان قياس الزاوية بين المتجهين $u = i + 3j - pk$, $v = 2i - j + 3k$ تساوي $\frac{\pi}{3}$ ، فأوجد قيمة p

32) إذا علمت أن $A(0, 1, 1), B(-2, 2, 3), C(1, -1, 2)$ ، فأوجد مساحة المثلث ABC

مسائل مهارات التفكير العليا

33) أوجد متجه الوحدة الذي يصنع زاوية مقدارها 60^o مع المتجه $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

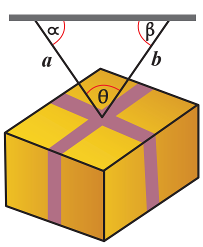
34) أوجد متجهًا بحيث يكون عموديًا على المتجه u في كل من الحالتين التاليتين : (يوجد أكثر من إجابة)

A) $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

B) $u = \frac{1}{2}i - \frac{3}{4}j$

35) أثبت أن أقطار المعين متعامدة.

36) في الشكل المجاور جسم مثبت بقوتين $b = \begin{pmatrix} 200 \\ 600 \end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix} -200 \\ 400 \end{pmatrix}$ ،
إذا كان الجسم في حالة اتزان. أوجد كلًا من الزوايا γ , β , α الموضحة في الشكل.



اختبار الوحدة السابعة

اختر الإجابة الصحيحة لكل سؤال من الأسئلة 1-8 :

1) أيٌّ من الكميات التالية متجهة.

A درجة الحرارة B الوزن

C المسافة D الحجم

2) ما متجه الموضع للنقطة $(-2\ ,\ 4)$ ؟

A $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ B $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ D $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

3) إذا كان u متجهاً بحيث أن $|u| = 7$ units ، فما طول المتجه $-3\ u$ ؟

A -21 B 4

C 10 D 21

4) أي من المتجهات التالية هو متجه وحدة؟

A $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ B $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ D $\begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

5) اكتب المتجه $\overrightarrow{AA}$ بالصورة التركيبية .

A $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ B $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ D $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

6) أوجد طول المتجه $r = \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \end{pmatrix}$.

A $|r| = 13$ B $|r| = 7$

C $|r| = 17$ D $|r| = 169$

7) إذا كان s متجهاً في المستوى الإحداثي بحيث إن $|s| = 3$ units فما قيمة $S.S$ ؟

A 0 B 3

C 6 D 9

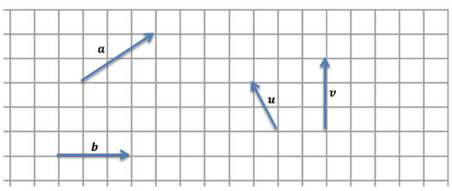
8) إذا كانـت $A\ (2,0)\ ,\ B\ (4,-7)\ ,\ C\ (3,2y)\ ,\ D\ (3x,-1,9)$ ، وكان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ، فما قيمة كل من $x\ ,y$ ؟

A $x = 2\ ,\ y = 8$ B $x = 1\ ,\ y = 1$

C $x = 2\ ,\ y = 1$ D $x = -2\ ,\ y = -8$

9) مثل ناتج العمليات التالية على المتجهات في المستوى

A $a + b$ B u - $2v$ C $2b$



10) إذا كان $b = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}\ ,\ a = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ أوجد

a) $2\ a$ b) $a + b$

c) $-\ a + 3\ b$ d) $|\ 2\ a\ |$

e) $|\ 3\ a + b|$

11) إذا كان $v = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}\ ,\ u = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ، أوجد ناتج كل مما يلي هندسياً في المستوى الإحداثي

a) $u + v$ b) $u - v$ c) $2a$

12) أوجد متجهاً وحيداً يكافئ العبارة المتجهية

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{EC}$

13) إذا كان $v = \begin{pmatrix} -5 \\ m \end{pmatrix}\ ,\ u = \begin{pmatrix} 2n-1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ، أوجـد قيمـة كل من m و n إذا علمت أن $u = v$.

14) إذا كان $v = \begin{pmatrix}-12\\20\end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix}3\\2n\end{pmatrix}$ ، أوجد قيمة كل من m و n

إذا علمت أن $v \parallel u$.

15) إذا كان $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix}10\\8\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}2\\-7\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-6\\-1\end{pmatrix}$

أوجد ما يلي:

a) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$

b) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DB}$

c) $\overrightarrow{DA}$

16) تطير طائرة بسرعة 900 km/h باتجاه الغرب ، وتواجه مقاومة الرياح التي بلغت سرعتها 100 km/h باتجاه الشمال ، احسب سرعة الطائرة الفعلية والتي تبقيها تطير باتجاه الشمال بسرعة 900 km/h .

17) إذا كانت $P(7,9)$, $Q(-4,3)$ أوجد كلاً من :

a) P

b) $\overrightarrow{PQ}$

c) $\overrightarrow{QP}$

d) $p - q$

e) $q - p$

18) أوجد قيمة t إذا علمت أن $\begin{pmatrix}t\\4\\t+1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2-t\\3\\t\end{pmatrix}$ متجهان متعامدان.

19) إذا كان $v = \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix}-4\\2\\1\end{pmatrix}$ ، فأوجد :

a) $u \bullet v$

b) الزاوية بين المتجهين u و v

20) إذا كان $r = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}$, $p = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ ، فأوجد:

a) $p \bullet q$

b) $p + 2q - r$

c) الزاوية ين المتجهين p و r

21) إذا كان $a = b$ حيث $b = \begin{pmatrix}1\\3y-2\\-2\end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix}x\\2y-1\\z-9\end{pmatrix}$ ،

فأوجد قيمة كل من x , y, z

22) إذا علمت أن $b = \begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$, $a = \begin{pmatrix}5\\2\\-3\end{pmatrix}$ ، فأوجد

a) $a + b$

b) $a - b$

c) $2a$

d) $2a + 5b$

e) $|a + b|$

f) $b - b$

23) أوجد المتجه b إذا كان :

a) له نفس اتجاه المتجه $a = -i + 4j + k$ وطوله 5 وحدات.

b) له عكس اتجاه المتجه $a = \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$ وطوله 3 وحدات.

24) إذا كان $u = 4i + 3j + 12k$, $v = 2i + 4j + 4k$ ، فأوجد $\cos\theta$ ، حيث θ هي الزاوية المحصورة بين المتجهين u, v .

25) إذا كان $|u| = 2$, $|v| = 3$ وكانت الزاوية بينهما تساوي $45°$،

فأوجد $u \bullet v$

26) أوجد قياس الزاوية المحصورة بين كل زوج من المتجهات التالية:

a) $u = 2i + 3j + k$, $v = 2i - 3k$

b) $p = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}$

27) أوجد قياس $\angle ABC$ في المثلث ABC حيث

$A(5,1,2), B(6,-1,0), C(3,2,0)$

27) تؤثر على جسيم قوتان $F_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $F_2 = \begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}$ أوجد

محصلة القوتين و مقدار تأثيرهما على الجسيم.

التصويبات

رقم الصفحة	الملاحظة	التعديل