الوحدة 1
الجبر
Algebra

مفهوم أساسي — المتطابقات التكعيبية

أضف إلى مطويتك

المتطابقة	الصيغة
مجموع مكعبين	$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
الفرق بين مكعبين	$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
مكعب مجموع حدين	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
مكعب الفرق بين حدين	$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

ملخص المفهوم — طرائق التحليل

أضف إلى مطويتك

عدد الحدود	طريقة التحليل	نموذج
أيّ عدد	إخراج العامل المشترك الأكبر	$xy+xa=x(y+a)$
حدّان	الفرق بين مربعين مجموع مكعبين الفرق بين مكعبين	$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
ثلاثة حدود	ثلاثية حدود في صورة مربع كامل	$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
	ثلاثية الحدود في الصورة العامة	$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$
أربعة حدود أو أكثر	تجميع الحدود	$ax+bx+ay+by=x(a+b)+y(a+b)$ $=(a+b)(x+y)$

مفهوم أساسي — قسمة كثيرات الحدود

أضف إلى مطويتك

عند قسمة كثيرة الحدود $P(x)$ على الحدودية غير الصفرية $D(x)$ ، فإن :

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \ , D(x) \neq 0$$

حيث إن $P(x)$ تمثل المقسوم ، و $D(x)$ تمثل المقسوم عليه، و $Q(x)$ تمثل خارج القسمة، و $R(x)$ تمثل باقي القسمة؛

أي أن : $P(x) = Q(x) \, . \, D(x) + R(x)$

حيث درجة $R(x)$ تكون أقل من درجة $D(x)$

مفهوم أساسي — القسمة التركيبية

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1 : اكتب معاملات المقسوم بعد ترتيب حدوده تنازليًا حسب درجتها، وتأكد من أن المقسوم عليه في الصورة $x-r$ ، ثم اكتب الثابت r في الصندوق، واكتب المعامل الأول أسفل الخط الأفقي.

الخطوة 2 : اضرب المعامل الأول في r، واكتب الناتج أسفل المعامل الذي يليه.

الخطوة 3 : اجمع ناتج الضرب إلى المعامل الذي فوقه.

الخطوة 4 : كرِّر الخطوتين 3 , 2 مع ناتج الجمع في الخطوة السابقة؛ حتى تصل إلى ناتج جمع العددين في العمود الأخير.

الأعداد في الصف الأخير تمثل معاملات ناتج القسمة، ودرجة الحد الأول أقل بواحد من درجة المقسوم، والعدد الأخير هو الباقي.

مفهوم أساسي — نظرية الباقي

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي : عند قسمة كثيرة حدود $P(x)$ على $x - r$ ، فإن الباقي يكون ثابتًا ويساوي $P(r)$.

بالرموز : $R = P(r)$

مثال : باقي قسمة $P(x) = x^2 + 6x + 2$ على $x + 10$ هو $P(-10) = 42$.

مفهوم أساسي — نظرية العامل

أضف إلى مطويتك

تكون ثنائية الحد $x - r$ عاملًا من عوامل كثيرة الحدود $P(x)$ ، إذا وفقط إذا كان $P(r) = 0$.

مفهوم أساسي — نظرية الأصفار النسبية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي : إذا كانت: $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود درجتها $n \geq 1$ وعواملها أعداد صحيحة، وكانت $a_0 \neq 0$ ، فإن كل جذر (صفر) نسبي لكثيرة الحدود سيكون في الصورة $\frac{p}{q}$، حيث:

- العامل المشترك الأكبر لـ p, q يساوي 1
- p عامل من عوامل a_0
- q عامل من عوامل a_n

مثال : افترض أن دالة كثيرة الحدود هي: $P(x) = 1x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$،
فإن الأعداد النسبية التي يمكن أن تكون أصفارًا لكثيرة الحدود $p(x)$ تكون قواسم للعدد 12؛
أي أن: $\pm 1 , \pm 2 , \pm 3 , \pm 4 , \pm 6 , \pm 12$

ملخص المفهوم — خصائص الأسس

أضف إلى مطويتك

لأي عددين حقيقيَّين x , y وعددين صحيحين m , n:

الخاصية	التعريف	مثال
ضرب القوى	$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$	$3^2 \times 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$ $p^2 \cdot p^9 = p^{2+9} = p^{11}$
قسمة القوى	$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} , x \neq 0$	$\frac{9^5}{9^2} = 9^{5-2} = 9^3$ $\frac{b^6}{b^4} = b^{6-4} = b^2$
قوة القوة	$(x^m)^n = x^{mn}$	$(3^3)^2 = 3^{3\times 2} = 3^6$ $(d^2)^4 = d^{2\times 4} = d^8$
الأسّ السالب	$x^{-m} = \frac{1}{x^m} , \frac{1}{x^{-m}} = x^m , x \neq 0$	$3^{-5} = \frac{1}{3^5}$ $\frac{1}{b^{-7}} = b^7$
قوة حاصل الضرب	$(xy)^m = x^m y^m$	$(2k)^4 = 2^4 k^4 = 16k^4$ $(ab)^3 = a^3 b^3$
قوة ناتج القسمة	$\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m} , y \neq 0,$ $\left(\frac{x}{y}\right)^{-m} = \left(\frac{y}{x}\right)^m = \frac{y^m}{x^m} , x \neq 0, y \neq 0$	$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-5} = \frac{b^5}{a^5}$
القوة الصفرية	$x^0 = 1, x \neq 0$	$7^0 = 1$

مفهوم أساسي — تعريف الجذر النوني

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: لأيّ عددين حقيقيَّين a , b ، ولأيّ عدد صحيح n، حيث $n > 1$ ، إذا كان $a^n = b$ ، فإن a يكون جذرًا نونيًا للعدد b.

مثال: بما أن $81 = (-3)^4$، فإن -3 جذر رابع للعدد 81، وكذلك $(3)^4 = 81$ ، وعليه فإن 3 هو جذر رابع للعدد 81 أيضًا.

مفهوم أساسي — الجذر النوني الحقيقي

أضف إلى مطويتك

ليكن n عددًا صحيحًا أكبر من 1 و a عددًا حقيقيًا.

a	n عدد زوجي	n عدد فردي
$a > 0$	يوجد جذر حقيقي موجب، وجذر حقيقي سالب: ويُعبَّر عنهما بالشكل $\pm\sqrt[n]{a}$ ، علمًا بأن الجذر الموجب هو الجذر الرئيس.	هناك جذر حقيقي موجب وحيد، وليس هناك جذر حقيقي سالب، ويُعبَّر عنه بالشكل: $\sqrt[n]{a}$.
$a < 0$	لا يوجد جذور حقيقية.	ليس هناك جذور حقيقية موجبة، وهناك جذر حقيقي سالب وحيد فقط، ويُعبَّر عنه بالشكل: $\sqrt[n]{a}$
$a = 0$	هناك جذر حقيقي واحد فقط هو: $\sqrt[n]{0} = 0$	

خصائص الجذر النوني: الجدول التالي يُبيِّن أهم خصائص الجذر النوني.

لأيِّ عددين حقيقيَّين a , b ، ولأي عدد صحيح n حيث $n > 1$ ، فإن:

الخاصية	التعريف	مثال
ضرب الجذور	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$، إذا كانت n عددًا زوجيًّا، و a , b عددين غير سالبين، أو إذا كان n عددًا فرديًّا.	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{27} = 3$
قسمة الجذور	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} , b \neq 0$ ، وذلك إذا كانت جميع الجذور مُعرَّفة.	$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3$ $\sqrt[3]{\frac{x^6}{8}} = \frac{\sqrt[3]{x^6}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}x^2$
جذر الجذر	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[mn]{b}$ ، وذلك إذا كانت جميع الجذور معرفة.	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{4096}} = \sqrt[12]{4096}$ $= 12\sqrt{(2)^{12}} = 2$

مفهوم أساسي — تبسيط العبارات الجذرية

أضف إلى مطويتك

تكون العبارة الجذرية في أبسط صورة إذا تحققت جميع الشروط الآتية:

- إذا كان دليل الجذر n أصغر ما يمكن.
- إذا لم يتضمن ما تحت الجذر عوامل (غير العدد 1) يمكن أن تُكتب في صورة قوى نونية لعدد صحيح أو لكثيرة حدود.
- إذا لم يتضمن ما تحت الجذر كسورًا.
- إذا لم توجد جذور في المقام.

إذا كان المقام	فاضرب البسط والمقام في	مثال
$\sqrt{b}$	$\sqrt{b}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\sqrt[n]{b^{x}}$	$\sqrt[n]{b^{n-x}}$	$\frac{5}{\sqrt[3]{2}}=\frac{5}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}}=\frac{5\sqrt[3]{4}}{2}$

مفهوم أساسي — الأسس النسبية

أضف إلى مطويتك

	$(b^{\frac{1}{n}})$	$(b^{\frac{m}{n}})$
بالرموز:	$\sqrt[n]{b}=b^{\frac{1}{n}}$ ، حيث $b>0$ إذا كان n عددًا زوجيًا، $n\in N, n>1$	$(\sqrt[n]{b})^{m}=b^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{b^{m}}, b\in\mathbb{R}-\{0\}, n, m\in Z,$ حيث $n>1$ وَ $b>0$ إذا كان n عددًا زوجيًا.
مثالان:	$(-27)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-27}=-3$ $(16)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{16}=2$	$27^{\frac{2}{3}}=\left((27)^{\frac{1}{3}}\right)^{2}=(\sqrt[3]{27})^{2}=3^{2}=9$ $(25)^{\frac{3}{2}}=\left((25)^{\frac{1}{2}}\right)^{3}=(\sqrt{25})^{3}=5^{3}=125$

إذا كان $x , y > 0 , b \neq 1 , b > 0$	
الخاصية	مثال
$\log_b b = 1$	$\log_5 5 = 1$
$\log_b 1 = 0$	$\ln 1 = 0$
$\log_b b^x = x$	$\log_3 3^2 = 2$
$\log_b x = \log_b y \Leftrightarrow x = y$	$\log_3 (x+1) = \log_3 6 \Leftrightarrow x + 1 = 6$

مفهوم أساسي

بعض خصائص اللوغاريتمات

أضف إلى مطويتك

إذا كانت x, y, b أعدادًا حقيقيةً موجبةً حيث $b \neq 1$ ، فإن:

الخاصية	التعبير اللفظي	الرموز	مثال
الضرب	لوغاريتم حاصل الضرب هو مجموع لوغاريتمات عوامله.	$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$	$\log_2 [(5)(6)] = \log_2 5 + \log_2 6$
القسمة	لوغاريتم ناتج القسمة يساوي لوغاريتم المقسوم مطروحًا منه لوغاريتم المقسوم عليه.	$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$	$\log_2 \frac{5}{6} = \log_2 5 - \log_2 6$
لوغاريتم القوة	لوغاريتم القوة يساوي حاصل ضرب الأس في لوغاريتم أساسها.	$\log_b x^m = m \log_b x$	$\log_2 6^5 = 5 \log_2 6$

مفهوم أساسي

صيغة تغيير الأساس

أضف إلى مطويتك

الرموز: لأي أعداد موجبة a , b , n ، حيث $a \neq 1$ و $b \neq 1$ ،

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

$\log_b n$ ⟵ لوغاريتم العدد الأصلي n للأساس b

$\log_b a$ ⟵ لوغاريتم الأساس القديم a للأساس b

مثال: $\log_3 11 = \frac{\log_b 11}{\log_b 3} = \frac{\ln 11}{\ln 3}$

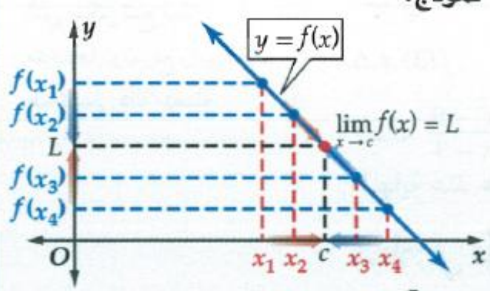
الوحدة 2
النهايات والاتصال
Limits and Continuity

مفهوم أساسي — النهايات

أضف إلى مطويتك

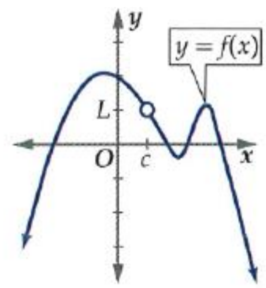
التعبير اللفظي : إذا كانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L عندما تقترب x من c من الجهتين، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c باطراد هي L .

نموذج:

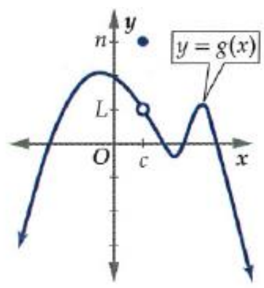


الرموز : $\lim_{x\to c} f(x) = L$ ،

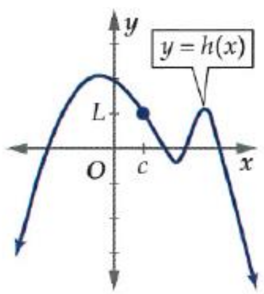
وتُقرأ: نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c تساوي L .



الشكل (3)



الشكل (2)



الشكل (1)

النهاية:	$\lim_{x\to c} f(x) = L$	$\lim_{x\to c} g(x) = L$	$\lim_{x\to c} h(x) = L$
قيمة الدالة:	$f(c)$ غير معرفة	$g(c) = n$	$h(c) = L$

مفهوم أساسي — النهايات من جهة واحدة

أضف إلى مطويتك

النهاية عن اليمين (limit from the right)

إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L_1 ، عند اقتراب قيم x من العدد c عن اليمين، فإن:

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = L_1$$

وتُقرأ: نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c عن اليمين تساوي L_1

النهاية عن اليسار (limit from the left)

إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L_2 ، عند اقتراب قيم x من العدد c عن اليسار، فإن:

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = L_2$$

وتُقرأ: نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c عن اليسار تساوي L_2

مفهوم أساسي — النهاية عند نقطة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تكون نهاية $f(x)$ موجودة وتساوي L عندما تقترب x من c ، إذا وفقط إذا كانت النهايتان عن اليمين واليسار موجودتين وتساويان L

الرموز: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L$

مفهوم أساسي — النهاية عند المالانهاية

أضف إلى مطويتك

- إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد L_1 عند ازدياد قيم x بشكلٍ غير محدود، فإن:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L_1$$

وتُقرأ: "نهاية $f(x)$ عندما تقترب قيم x من موجب مالانهاية هي L_1".

- إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد L_2 عند نقصان قيم x بشكلٍ غير محدود، فإن:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L_2$$

وتُقرأ: "نهاية $f(x)$ عندما تقترب قيم x من سالب مالانهاية هي L_2".

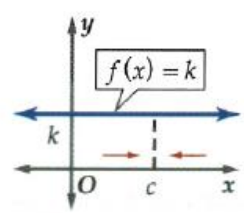
مفهوم أساسي — نهايات الدوال

أضف إلى مطويتك

نهايات الدوال الثابتة:

إذا كانت $f(x) = k$ دالة ثابتة، وكان c عددًا حقيقيًا،

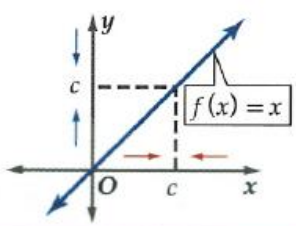
فإن $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} k = k$



نهايات الدالة المحايدة:

إذا كانت $f(x) = x$ دالة محايدة، وكان c عددًا حقيقيًا،

فإن $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} x = c$



مفهوم أساسي — خصائص النهايات

أضف إلى مطويتك

إذا كان c , k عددين حقيقيَّين، وn عددًا صحيحًا موجبًا، وكانت النهايتان $\lim_{x\to c} f(x)$, $\lim_{x\to c} g(x)$ موجودتين، فإن كلًّا من الخصائص الآتية تكون صحيحةً:

خاصية المجموع: $\lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$

خاصية الفرق: $\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$

خاصية الضرب في ثابت: $\lim_{x\to c}[k f(x)] = k\lim_{x\to c} f(x)$

خاصية الضرب: $\lim_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to c} f(x)\cdot \lim_{x\to c} g(x)$

خاصية القسمة: $\lim_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$, $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$

خاصية القوة: $\lim_{x\to c}[f(x)]^n = [\lim_{x\to c} f(x)]^n$

خاصية الجذر النوني: إذا كان $\lim_{x\to c} f(x) > 0$ ، حيث n عدد زوجي، فإن $\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$

وإذا كان n عددًا فرديًا، فإن $\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$

مفهوم أساسي — نهايات الدوال

أضف إلى مطويتك

نهايات دوال كثيرات الحدود: إذا كانت $f(x)$ دالة كثيرة حدود ، وكان c عددًا حقيقيًّا ، فإن $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

نهايات الدوال النسبية: إذا كانت $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ دالةً نسبيةً، وكان c عددًا حقيقيًّا،

فإن $g(c) \neq 0$, $\lim_{x\to c} h(x) = h(c) = \dfrac{f(c)}{g(c)}$.

مفهوم أساسي — نهايات دوال القوى عند المالانهاية

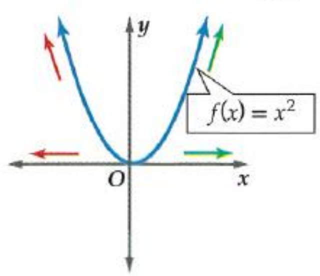
أضف إلى مطويتك

لأي عدد صحيح موجب n ،

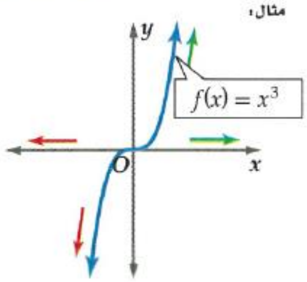
- إذا كانت $x \to \infty$ ، فإن $\lim_{x\to\infty} x^n = \infty$
- إذا كانت $x \to -\infty$ فإن

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} \infty , & n \text{ عدد زوجي} \\ -\infty , & n \text{ عدد فردي} \end{cases}$$

مثال:



مثال:



مفهوم أساسي — نهايات دوال كثيرات الحدود عند المالانهاية

أضف إلى مطويتك

إذا كانت $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود ، فإن:

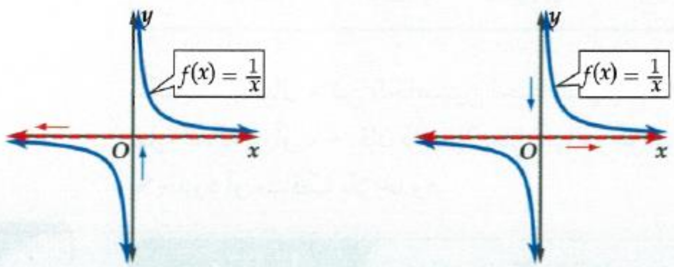
$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \lim_{x\to\infty} a_n x^n \;,\; \lim_{x\to-\infty} p(x) = \lim_{x\to-\infty} a_n x^n$$

مفهوم أساسي — نهايات دالة المقلوب عند المالانهاية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي : نهاية دالة المقلوب عند موجب أو سالب مالانهاية تساوي صفرًا.

الرموز: $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$



نتيجة : لأي عدد صحيح موجب n ، فإن $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

إذا كانت $f(x)$ دالة نسبية بحيث $f(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 + b_0}$، فإن:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad n < m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{if} \quad n = m \\ \infty \text{ or } -\infty & \text{if} \quad n > m \end{cases}$$

أي أنه توجد ثلاث حالات في حساب نهايات الدوال النسبية عندما تقترب x من المالانهاية وهي:

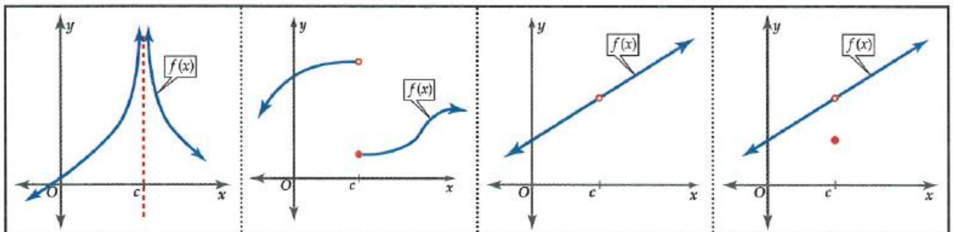
الحالة	مقارنه درجتي البسط والمقام	النهاية عند $\pm\infty$	مثال
1	درجة البسط أقل من درجة المقام	النهاية موجودة وتساوي صفرًا	$\lim_{x\to\infty} \frac{3-2x^2}{5x^3-1} = 0$
2	درجة البسط تساوي درجة المقام	النهاية موجودة وتساوي خارج قسمة معاملي الحدّين الرئيسين في البسط والمقام	$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{2x^2+5} = \frac{3}{2}$
3	درجة البسط أكبر من درجة المقام	النهاية تساوي ∞ أو $-\infty$، وذلك بحسب إشارة الحدّ الرئيس في كل من البسط والمقام	$\lim_{x\to\infty} \frac{3-2x^2}{3x-1} = -\infty$

مفهوم أساسي — نهايات المتتاليات

أضف إلى مطويتك

إذا كان L عددًا حقيقيًّا، و f دالة حقيقية بحيث $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ ، وكانت $\{a_n\}$ متتالية بحيث $f(n) = a_n$ لكل عدد صحيح موجب n ، فإن:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$



$\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة $f(c)$ معرّفة $\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$	$\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة $f(c)$ غير معرّفة	$\lim_{x\to c} f(x)$ غير موجودة $f(c)$ معرّفة	$\lim_{x\to c} f(x)$ غير موجودة $f(c)$ غير معرّفة

مفهوم أساسي — اختبار الاتصال

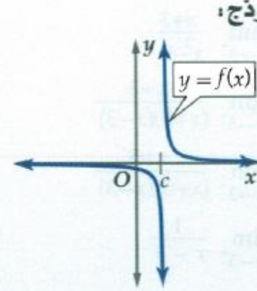
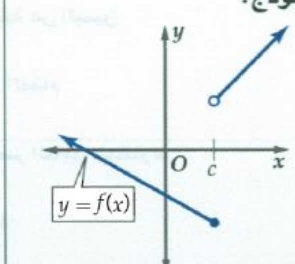
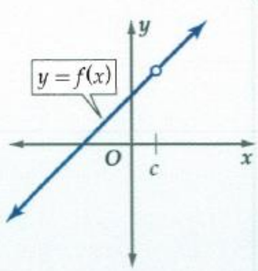
أضف إلى مطويتك

تكون الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا حقّقت الشروط الآتية:

- $f(x)$ معرّفة عند c ، أي أن $f(c)$ موجودة.
- $f(x)$ تقترب من القيمة نفسها عندما تقترب x من c من الجهتين. أي أن $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة.
- $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

مفهوم أساسي — أنواع عدم الاتصال

أضف إلى مطويتك

عدم اتصال لانهائي	عدم اتصال قفزي	عدم اتصال نقطي (قابل للإزالة)
للدالة عدم اتصال لانهائي عند $x = c$ إذا تزايدت قيم الدالة أو تناقصت بلا حدود عندما تقترب x من c عن اليمين أو اليسار (يكون للدالة خط تقارب رأسي عند $x = c$)	للدالة عدم اتصال قفزي عند $x = c$ إذا كانت نهايتا الدالة عندما تقترب x من c من اليمين ومن اليسار موجودتين، ولكنهما غير متساويتين.	للدالة عدم اتصال نقطي (قابل للإزالة) عند $x = c$ إذا كانت نهاية الدالة عندما تقترب x من c موجودة، ولا تساوي قيمة الدالة عند $x = c$ ، ويشار إليها بدائرة صغيرة (○) غير مظلّلة؛ لتعبر عن عدم اتصال عند هذه النقطة.
نموذج: 	نموذج: 	نموذج: 

الوحدة 3 حساب التفاضل

Differentiation

مفهوم أساسي: متوسط معدّل التغير

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي : متوسط معدل التغير بين أي نقطتين على منحنى الدالة f هو ميل القاطع المار بهاتين النقطتين، ويساوي ظل الزاوية التي يصنعها القاطع مع محور x الموجب.

الرموز : متوسط معدّل تغير الدالة $f(x)$ في الفترة $[x_1, x_2]$ هو

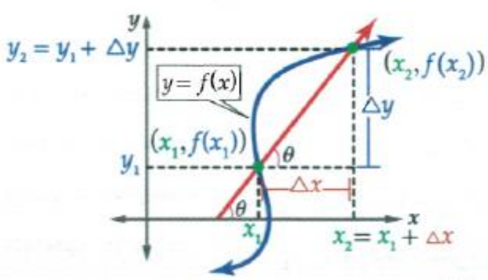
$$m_{sec} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$= \tan \theta$$

حيث θ زاوية ميل المستقيم القاطع على المحور x الموجب.

نموذج



مفهوم أساسي: السرعة المتوسطة المتجهة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا أُعطي موقع جسم متحرك بوصفه دالة في الزمن $f(t)$ ، فإن السرعة المتوسطة المتجهة للجسم v_{avg} في الفترة الزمنية $[a, b]$ تساوي ناتج قسمة التغير في المسافة على التغير في الزمن.

الرموز:

$$v_{avg} = \frac{\text{التغيّر في المسافة}}{\text{التغيّر في الزمن}} = \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

مفهوم أساسي — معدّل التغير اللحظي

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: معدّل التغير اللحظي عند نقطة على منحنى الدالة f هو نهاية متوسط معدّل التغير للدالة عندما يقترب طول الفترة من الصفر.

الرموز: مُعدل التغيّر اللحظي للدالة f عند النقطة $(a, f(a))$ هو

$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ، بشرط أن تكون النهاية موجودة.

مفهوم أساسي — مشتقة الدالة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت الدالة $f(x)$ معرّفة على $]a, b[$ ، فإن معدّل التغير اللحظي للدالة $f(x)$ عند أي x بحيث $x \in]a, b[$ يسمى مشتقة الدالة $f(x)$ ، ويُرمز لهذه المشتقة بالرمز $f'(x)$.

الرموز: إذا كانت $f(x)$ معرّفة على $]a, b[$ ، فإن:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة

يُرمز لمشتقة $y = f(x)$ أيضًا بالرموز $\frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, y'$ ، وإذا سبق الدالة المؤثر التفاضلي $\frac{d}{dx}$ ، فإن ذلك يعني إيجاد مشتقة الدالة.

قاعدة (1) — مشتقة الدالة الثابتة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: مشتقة الدالة الثابتة تساوي صفرًا.

بالرموز: إذا كانت $f(x) = c$ حيث c عدد ثابت، فإن $f'(x) = 0$ حيث $x \in \mathbb{R}$.

مثال: إذا كانت $f(x) = 5$ ، فإن $f'(x) = 0$

قاعدة (2) — مشتقة الدالة المحايدة $f(x) = x$

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: مشتقة الدالة المحايدة تساوي واحدًا.

بالرموز: إذا كانت $f(x) = x$ فإن $f'(x) = 1$ حيث $x \in \mathbb{R}$.

قاعدة (3) قاعدة مشتقة دالة القوة

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: في مشتقة دالة القوة تكون قوة x أقل بواحد من قوة x في الدالة الأصلية، ومعامل x في المشتقة يساوي قوة x في الدالة الأصلية.

بالرموز: إذا كان $f(x) = x^n$ حيث $n \in \mathbf{R}$، فإن: $f'(x) = nx^{n-1}$.

قاعدة (4) قاعدة الضرب بعدد ثابت

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: مشتقة ضرب دالة قابلة للاشتقاق في ثابت هي مشتقة هذه الدالة مضروبةً في العدد الثابت نفسه.

بالرموز: إذا كانت $f'(x)$ دالة في x قابلة للاشتقاق، وكان k عددًا حقيقيًا، فإن $kf(x)$ تكون دالة في x قابلة للاشتقاق.

$$\frac{d}{dx}\left(kf(x)\right) = k\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)$$

أي أن $\left(kf(x)\right)' = kf'(x)$

مثال: $f(x) = 6x^5 \rightarrow f'(x) = 6 \times 5x^{5-1} = 30x^4$

قاعدة (5) قاعدة المجموع أو الفرق

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: مشتقة مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق تساوي مجموع مشتقتَي الدالتين، وكذلك مشتقة الفرق بين دالتين تساوي الفرق بين مشتقتَي الدالتين.

بالرموز: إذا كانت f, g دالتين قابلتين للاشتقاق في x، فإن مجموعهما والفرق بينهما يكونان قابلين للاشتقاق عند كل نقطة تكون عندها كلٌّ من f, g قابلة للاشتقاق.

$$\frac{d}{dx}\left(f(x) \pm g(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(f(x)\right) \pm \frac{d}{dx}\left(g(x)\right)$$

أي أن $\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$

مثال:

$$h(x) = 6x^7 - 3x^2 + 5$$

$$h'(x) = \left(6x^7\right)' - \left(3x^2\right)' + (5)'$$

$$= 42x^6 - 6x + 0$$

$$= 42x^6 - 6x$$

قاعدة (6) مشتقة ضرب دالتين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي : نتيجة ضرب دالتين قابلتين للاشتقاق تكون دالة قابلة للاشتقاق، ومشتقتها تساوي:

مشتقة الدالة الأولى × الدالة الثانية + الدالة الأولى × مشتقة الدالة الثانية

الرموز :

$$\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x)) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

مثال : إذا كانت: $f(x) = x+1, g(x) = x$ ، فأوجد $\frac{d}{dx}\left((f\cdot g)(x)\right)$

$$\frac{d}{dx}\left((f\cdot g)(x)\right) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

$$= 1\,.\,(x) + (x+1)\,.\,(1)$$

$$= 2x+1$$

قاعدة (7) مشتقة قسمة دالتين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي : نتيجة قسمة دالتين قابلتين للاشتقاق تكون دالة قابلة للاشتقاق، ومشتقتها تساوي:

$$\frac{\text{مشتقة البسط} \times \text{المقام} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{\text{مربع المقام}}$$

بالرموز :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

مثال : إذا كانت: $f(x) = x+1, g(x) = x-1$ ، فأوجد $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{\frac{d}{dx}(x+1)\,.\,(x-1) - (x+1)\,.\,\frac{d}{dx}(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(1)\,.\,(x-1) - (x+1)\,.\,(1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{-2}{(x-1)^2}$$

نتيجة مشتقة عدد مقسوم على دالة

أضف إلى مطويتك

إذا كانت $g(x) = \frac{a}{f(x)}, f(x) \neq 0$ ، فإن: $\frac{d}{dx}g(x) = \frac{-a f'(x)}{(f(x))^2}, f(x) \neq 0$

قاعدة (8) — قاعدة السلسلة

أضف إلى مطويتك

إذا كانت $u = g(x)$ ، $y = f(u)$ دالتين قابلتين للاشتقاق، فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

قاعدة (9) — مشتقة تركيب دالتين

أضف إلى مطويتك

إذا كانت $g(x)$, $f(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق، فإن $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$.

نتيجة — قاعدة القوى العامة

أضف إلى مطويتك

إذا كانت $y = (f(x))^n$ حيث $f(x)$ قابلة للاشتقاق، وَ n عدد حقيقي، فإن $\frac{dy}{dx} = n\,f'(x)\,(f(x))^{n-1}$

نتيجة — مشتقة الجذر التربيعي والجذر النوني

أضف إلى مطويتك

- إذا كانت $f(x) = \sqrt{g(x)}$ ، حيث $g(x)$, $f(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق، فإن $f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$
- إذا كانت $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ ، حيث $g(x)$, $f(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق، فإن $f'(x) = \frac{g'(x)}{n\sqrt[n]{(g(x))^{n-1}}}$

قاعدة (10) — مشتقة دالة الأس الطبيعي

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي مشتقة دالة الأس الطبيعي $f(x) = e^x$ هي نفسها.

بالرموز إذا كانت $f(x) = e^x$ فإن: $f'(x) = e^x$

نتيجة — الصورة العامة لمشتقة دالة الأس الطبيعي

أضف إلى مطويتك

إذا كان $f(x) = A\,e^{g(x)}$ ، فإن : $f'(x) = A\,g'(x)\,e^{g(x)}$

مثال: إذا كانت $f(x) = 5e^{2x}$ ، فأوجد $f'(x)$.

$$f'(x) = 10e^{2x}$$

قاعدة (11)

أضف إلى مطويتك

مشتقة دالة اللوغاريتم الطبيعي

إذا كانت $f(x) = \ln x$ ، فإن: $f'(x) = \frac{1}{x}$.

نتيجة

أضف إلى مطويتك

الصورة العامة لمشتقة دالة اللوغاريتم الطبيعي

إذا كان $f(x) = \ln(g(x))$ ، فإن: $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

مثال: إذا كانت $f(x) = \ln(x^3 + 2x)$ ، فأوجد $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x}$$

قاعدة (12)

أضف إلى مطويتك

مشتقة $\sin x$

التعبير اللفظي : مشتقة الدالة $\sin x$ تساوي $\cos x$

الرموز : إذا كانت $f(x) = \sin x$ ، فإن $f'(x) = \cos x$

قاعدة (13)

أضف إلى مطويتك

مشتقة $\cos x$

التعبير اللفظي : مشتقة الدالة $\cos x$ تساوي $-\sin x$

الرموز : إذا كانت $f(x) = \cos x$ ، فإن $f'(x) = -\sin x$

قاعدة (14)

أضف إلى مطويتك

مشتقة $\tan x$

التعبير اللفظي : مشتقة الدالة المثلثية $\tan x$ يساوي $\sec^2 x$

الرموز : إذا كانت $f(x) = \tan x$ ، فإن $f'(x) = \sec^2 x$

قاعدة (15) الصورة العامة لمشتقات الدوال المثلثية الأساسية

أضف إلى مطويتك

إذا كانت $g(x)$, $f(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق، فإن:

- إذا كانت $f(x) = \sin(g(x))$، فإن $f'(x) = g'(x)\cos(g(x))$
- إذا كانت $f(x) = \cos(g(x))$، فإن $f'(x) = -g'(x)\sin(g(x))$
- إذا كانت $f(x) = \tan(g(x))$، فإن $f'(x) = g'(x)\sec^2(g(x))$

الاشتقاق الضمني: عندما يُطلب إيجاد المشتقة الأولى $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ لعلاقة ضمنية، نستعمل **الاشتقاق الضمني** (implicit defferentiation) الذي يعتمد على قاعدة السلسلة في الاشتقاق عند اشتقاق المتغير y بالنسبة للمتغير x، على أن تكون y معرفة بوصفها دالة ضمنية قابلة للاشتقاق في x، فمشتقة الحد cy^n بالنسبة للمتغير x بالاعتماد على قاعدة السلسلة في الاشتقاق هي:

$$\frac{d}{dx}\left[cy^n\right] = cny^{n-1}\frac{dy}{dx}$$

مفهوم أساسي: التسارع اللحظي

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يعرف التسارع اللحظي للجسم عند لحظة زمنية محددة t، بأنه معدل السرعة المتجهة اللحظية لمنحنى $v(t)$ عند تلك اللحظة.

الرموز: $a(t) = \frac{d}{dt}(v(t)) = \frac{d}{dt}(s'(t))$ (التسارع).

مفهوم أساسي: المشتقات العليا للدوال

أضف إلى مطويتك

إذا كانت $y = f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق، فإن المشتقات العليا للدالة $y = f(x)$ هي:

المشتقة الثانية: $f''(x) = \frac{d}{dx}(f'(x))$

والمشتقة الثالثة: $f'''(x) = \frac{d}{dx}(f''(x))$ ... وهكذا

والمشتقة النونية: $f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}(f^{(n-1)}(x))$

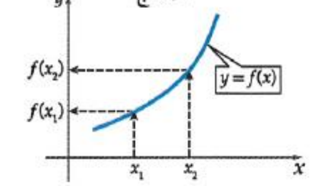
الوحدة 4 تطبيقات التفاضل
Applications of Differentiation

مفهوم أساسي — التزايد والتناقص والثبات للدوال

أضف إلى مطويتك

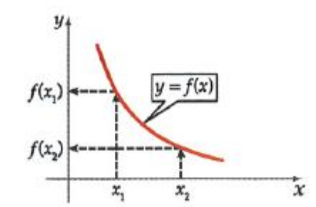
إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة على الفترة I وكان $x_1 , x_2 \in I$ فإنها تكون:

نماذج



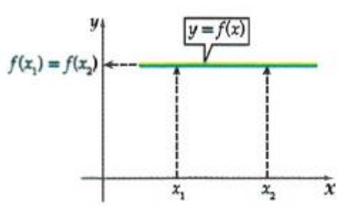
– متزايدة على الفترة I إذا وفقط إذا كان لكل $x_2 > x_1$ ، فإن $f(x_2) > f(x_1)$

(تزداد قيمة $f(x)$ بزيادة قيمة x).



– متناقصة على الفترة I إذا وفقط إذا كان لكل $x_2 > x_1$ ، فإن $f(x_2) < f(x_1)$

(تنقص قيمة $f(x)$ بزيادة قيمة x).



– ثابتة على الفترة I إذا وفقط إذا كان لكل x_1 , x_2 ، فإن $f(x_1) = f(x_2)$

(تبقى قيمة $f(x)$ ثابتة مهما تغيرت قيمة x).

نظرية — فترات التزايد والتناقص والثبات لدالة

أضف إلى مطويتك

إذا كانت الدالة $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق على الفترة $]a, b[$ فإننا نميز الحالات الثلاث التالية:

1) **التزايد:** تكون الدالة $f(x)$ متزايدة على $]a , b[$ ، إذا وفقط إذا كانت $f'(x) > 0$ لجميع قيم $x \in]a , b[$

2) **التناقص:** تكون الدالة $f(x)$ متناقصة على $]a , b[$ ، إذا وفقط إذا كانت $f'(x) < 0$ لجميع قيم $x \in]a , b[$

3) **الثبات:** تكون الدالة $f(x)$ ثابتة على $]a , b[$ ، إذا وفقط إذا كانت $f'(x) = 0$ لجميع قيم $x \in]a , b[$

خطوات إيجاد فترات التزايد والتناقص والثبات لدالة :

لإيجاد فترات التزايد والتناقص والثبات للدالة $f(x)$، اتَّبع الخطوات التالية:

الخطوة 1: أوجد المشتقة الأولى للدالة.

الخطوة 2: أوجد جميع قيم x التي تجعل $f'(x) = 0$، أو تجعل $f'(x)$ غير موجودة.

الخطوة 3: استعمل القيم التي أوجدتها في الخطوة 2 ؛ لتجزئة مجال الدالة إلى فترات جزئية، واختر عددًا (k) من كل فترة جزئية، وحدد إشارة المشتقة الأولى في كل منها، وذلك بالتعويض في دالة المشتقة.

- إذا كانت إشارة المشتقة موجبة، فالدالة متزايدة.
- إذا كانت إشارة المشتقة سالبة، فالدالة متناقصة.
- إذا كانت المشتقة تساوي صفرًا، فالدالة ثابتة.

مفهوم أساسي — النقاط الحرجة ونقاط الثبات

أضف إلى مطويتك

النقاط الحرجة : إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة عند $x = c$ ، فإن النقطة $(c, f(c))$ تسمى نقطة حرجة للدالة $f(x)$ إذا كانت:
$f'(c) = 0$ أو $f'(c)$ غير موجودة، حيث يسمى العدد c العدد الحرج، كما تسمى $f(c)$ القيمة الحرجة للدالة $f(x)$

نقاط الثبات: تسمى النقطة الحرجة $(c, f(c))$ نقطة ثبات للدالة $f(x)$ إذا كانت $f'(c) = 0$، ويسمى العدد c في هذه الحالة عدد الثبات، كما تسمى $f(c)$ قيمة الثبات.

مفهوم أساسي — القيم القصوى المحلية (العظمى والصغرى)

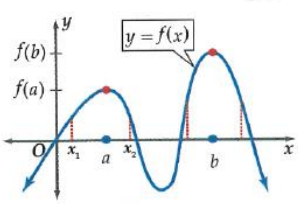
أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا وُجدت قيمة للدالة وكانت أكبر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة حولها، سُمِّيَت قيمةً عظمى محليةً.

الرموز: $f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f إذا وجدت فترة $]x_1, x_2[$ تحتوي a بحيث:

$$f(a) \geq f(x) \;;\; x \in]x_1, x_2[$$

نموذج:



$f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f

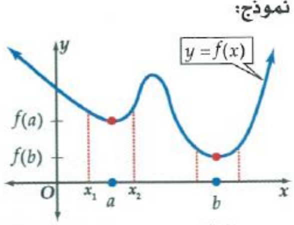
$f(b)$ قيمة عظمى محلية للدالة f

التعبير اللفظي: إذا وُجدت قيمة للدالة، وكانت أصغر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة حولها، سُمِّيَت قيمةً صغرى محليةً.

الرموز: $f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة f إذا وجدت فترة $]x_1, x_2[$ تحتوي a بحيث:

$$f(a) \leq f(x) \;;\; x \in]x_1, x_2[$$

نموذج:



$f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة f

$f(b)$ قيمة صغرى محلية للدالة f

نظرية **علاقة القيم القصوى بالنقاط الحرجة** أضف إلى مطويتك

إذا كانت $f(x)$ دالة معرفة على $[a, b]$ وكانت $f(c)$ قيمة قصوى للدالة f حيث $c \in [a, b]$

فإن $f'(c) = 0$ أو أن $f'(c)$ غير موجودة.

إيجاد القيم القصوى: سنقتصر في دراستنا على إيجاد القيم القصوى للدالة عند نقاط ثباتها فقط، ويتم ذلك وفقًا للخطوات الآتية:

الخطوة 1: أوجد المشتقة الأولى للدالة.

الخطوة 2: أوجد نقاط الثبات للدالة $f(x)$

الخطوة 3: استعمل اختبار المشتقة الأولى، لتحدّد ما إذا كان للدالة قيم قصوى عند نقاط الثبات التي أوجدتها، وما نوعها (إن وجدت)، وذلك بالبحث في إشارة $f'(x)$ قبل كل نقطة ثبات وبعدها.

نظرية **اختبار المشتقة الأولى لإيجاد القيم القصوى وتحديد نوعها** أضف إلى مطويتك

إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة على $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق على $]a, b[$، وكانت $(c, f(c))$ نقطة حرجة للدالة $f(x)$ حيث $c \in [a, b]$، فإن:

1) إذا كانت $f'(x) > 0$ لكل $x < c$، وكانت $f'(x) < 0$ لكل $x > c$ فإن $f(c)$ تكون قيمة عظمى محلية للدالة $f(x)$

2) إذا كانت $f'(x) < 0$ لكل $x < c$، وكانت $f'(x) > 0$ لكل $x > c$ فإن $f(c)$ تكون قيمة صغرى محلية للدالة $f(x)$

نظرية **اختبار المشتقة الثانية لتحديد نوع القيم القصوى** أضف إلى مطويتك

إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة على $[a, b]$، وكانت الدالتان $f'(x), f''(x)$ مُعرَّفتين على $]a, b[$، وكانت $c \in]a, b[$ بحيث $f'(c) = 0$؛ أي أن النقطة $(c, f(c))$ هي نقطة ثبات للدالة $f(x)$، فإنه:

1) إذا كانت $f''(c) > 0$ (موجبة)، فإن $f(c)$ تكون قيمة صغرى محلية للدالة $f(x)$.

2) إذا كانت $f''(c) < 0$ (سالبة)، فإن $f(c)$ تكون قيمة عظمى محلية للدالة $f(x)$.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

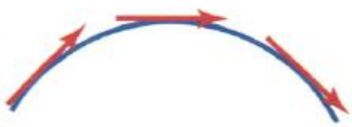
التقعُّر هندسيًا

إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق على الفترة $]a, b[$ فإن:

نماذج

— منحنى الدالة $f(x)$ مقعرًا إلى أعلى إذا كان يقع فوق جميع مماساته في هذه الفترة.

— منحنى الدالة $f(x)$ مقعرًا إلى أسفل إذا كان يقع تحت جميع مماساته في هذه الفترة .



نظرية

أضف إلى مطويتك

فترات التقعر

التقعر إلى أعلى: يكون منحنى الدالة $f(x)$ القابلة للاشتقاق مرتين على الفترة $]a, b[$ مقعرًا إلى أعلى إذا كانت $f''(x) > 0$.

التقعر إلى أسفل: يكون منحنى الدالة $f(x)$ القابلة للاشتقاق مرتين على الفترة $]a, b[$ مقعرًا إلى أسفل إذا كانت $f''(x) < 0$.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

نقاط الانعطاف (الانقلاب)

التعبير اللفظي : للدالة $f(x)$ المتصلة على الفترة $]a, b[$ وَ $x_0 \in]a, b[$ ، تكون النقطة $(x_0 , f(x_0))$ نقطة انعطاف (انقلاب) للدالة $f(x)$ إذا تغيرت إشارة المشتقة الثانية للدالة حولها، بحيث تكون المشتقة الثانية موجبة عن يسار النقطة مباشرة وسالبة عن يمينها مباشرة، أو العكس.

بالرموز: $(x_0 , f(x_0))$ نقطة انعطاف للدالة $f(x)$ إذا كان:

$$f''(x) > 0 : x \in]a, x_0[\text{ and } f''(x) < 0 : x \in]x_0, b[$$

or

$$f''(x) < 0 : x \in]a, x_0[\text{ and } f''(x) > 0 : x \in]x_0, b[$$

مفهوم أساسي — أنواع نقاط الانعطاف

أضف إلى مطويتك

إذا كانت $(x_o, f(x_o))$ نقطة انعطاف للدالة $f(x)$ فإن:

- $(x_o, f(x_o))$ نقطة انعطاف أفقي إذا كانت $f'(x_o) = 0$.
- $(x_o, f(x_o))$ نقطة انعطاف غير أفقي إذا كانت $f'(x_o) \neq 0$.

ملخص المفاهيم — دراسة التقعر ونقاط الانعطاف

أضف إلى مطويتك

لدراسة التقعر وإيجاد نقاط الانعطاف، قُمْ بالخطوات التالية:

- أوجد مجال الدالة.
- أوجد المشتقة الثانية للدالة.
- أوجد قيم x التي تجعل المشتقة الثانية مساوية للصفر، أو غير معرفة.
- ادرس إشارة المشتقة الثانية حول الأعداد التي ظهرت من الخطوة السابقة على خط الأعداد، وذلك من خلال تقسيم خط الأعداد إلى فترات أطرافها هي هذه الأعداد، واختيار عدد عشوائي داخل كل فترة، وحساب قيمة المشتقة الثانية عند هذه الأعداد.
- حدِّد التقعر إلى أعلى إذا كانت المشتقة الثانية أكبر من الصفر، وإلى أسفل إذا كانت المشتقة الثانية أصغر من الصفر.
- حدِّد نقاط الانعطاف، وهي النقاط التي تكون الدالة عندها معرَّفة، وتغيِّر تقعُّر الدالة حولها (عوِّض عن قيم x بالدالة الأصلية لإيجاد الإحداثي y).
- حدِّد نقاط الانعطاف الأفقي وهي النقاط التي تكون عندها المشتقة الأولى للدالة مساوية للصفر.

رسم الدوال كثيرات الحدود: لرسم الدالة كثيرة الحدود $f(x)$ استعمل الإرشادات الآتية:

1) حدّد مجال الدالة، ويكون $\mathbb{R}$ إلا إذا أشير صراحة إلى غير ذلك في نص السؤال.

2) أوجد نقاط تقاطع الدالة مع المحور x، بحل المعادلة $f(x) = 0$ (إن أمكن)، ونقاط تقاطعها مع المحور y بإيجاد قيمة $f(0)$ إذا كانت موجودة.

3) أوجد $f'(x)$، واستعملها في إيجاد: نقاط الثبات، والقيم القصوى المحلية عند نقاط الثبات، وتحديد نوع كل منها (إن وجدت)، وفترات التزايد والتناقص.

4) أوجد $f''(x)$، واستعملها في إيجاد: فترات التقعر إلى الأعلى وإلى الأسفل، ونقاط الانعطاف.

5) أنشئ مخططًا توضيحيًّا يبين فترات التزايد والتناقص والتقعر والقيم القصوى ونقاط الانعطاف.

6) عيِّن نقاط التقاطع مع المحورين، والنقاط القصوى المحلية ونقاط الانعطاف التي أوجدتها، وبعض النقاط المساعدة (إذا كان ذلك ضروريًّا) في المستوى الإحداثي، ثم صل بينها بخطوط منحنية ملساء مستفيدًا من المخطط التوضيحي الذي أوجدته في الخطوة **5**، وأكمل رسم المنحنى.
ثم تحقق أن سلوك المنحنى الذي رسمته يتفق مع فترات التزايد والتناقص والتقعر والنقاط القصوى المحلية ونقاط الانعطاف التي أوجدتها، وقم بإجراء التعديلات اللازمة لتوضيحها (إذا كان ذلك ضروريًّا).

خطوات إيجاد الحل الأمثل لمسائل القيم القصوى:

الخطوة 1 اقرأ المسألة وافهمها جيدًا (حدد المعطيات والمطلوب)، ثم عرّف جميع المتغيرات فيها برموز مناسبة (يفضل استعمال الرموز الشائعة مثل V للحجم، وA للمساحة، وهكذا)، ثم ارسم شكلًا توضيحيًّا (إن أمكن).

الخطوة 2 حدد المتغير الذي يراد إيجاد (أكبر/ أصغر) قيمة له، واكتبه في صورة دالة بمتغير مستقل واحد، وحدد مجاله (إن امكن).

الخطوة 3 أوجد المشتقة الأولى للدالة التي أوجدتها بالنسبة للمتغير المستقل فيها، وأوجد نقاط الثبات لها.

الخطوة 4 اختبر نقاط الثبات التي أوجدتها باستعمال اختبار المشتقة الأولى أو الثانية؛ للتأكد من القيم القصوى المطلوب التحقق عندها.

الخطوة 5 أوجد القيمة / القيم المطلوبة.

خطوات حل مسائل المعدلات المرتبطة بالزمن

يُمكنك حل مسائل المعدَّلات المرتبطة بالزمن باتباع الخطوات التالية:

الخطوة 1: ارسم شكلًا توضيحيًّا للمسألة إذا أمكن، وحدِّد عليه جميع البيانات المحدَّدة في المسألة.

الخطوة 2: حدِّدِ المتغيرات والثوابت والمعدّلات الزمنية المعطاة والمطلوبة.

الخطوة 3: ابحث عن علاقة رياضية تربط بين المتغيرات والثوابت في المسألة، بحيث تكون معدلات جميع متغيراتها معلومة باستثناء المتغير المطلوب إيجاد معدل تغيُّره.

الخطوة 4: اشتقَّ طرفَي العلاقة ضمنيًّا بالنسبة للزمن.

الخطوة 5: عوِّض في العلاقة بعد الاشتقاق بالقيم المعلومة لإيجاد المطلوب.