3 الدوال الأسية واللوغاريتمية

الاسم : ..... أ. غسان الشعبان

3-1 الدوال الأسية

المفهوم الأساسي الدالة الأسيّة

الدالة الأسيّة ذات الأساس b لها الصيغة $f(x) = ab^x$، حيث تمثل x أي عددٍ حقيقي وa وb ثابتان بحيث $a \neq 0$، وb موجبة و $b \neq 1$.

أمثلة

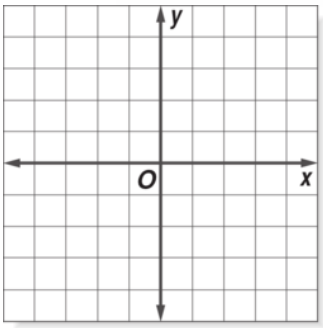
$f(x) = 4^x, f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x, f(x) = 7^{-x}$

أمثلة خارجة عن التعريف

$f(x) = 2x^{-3}, f(x) = 5^{\pi}, f(x) = 1^x$

1 مثّل كل دالة بيانيًا وحللها. ووضح المجال والمدى ونقاط التقاطع وخطوط التقارب والسلوك الطرفي، وفترات تزايد أو تناقص الدالة.

$f(x) = 2^x$



.....

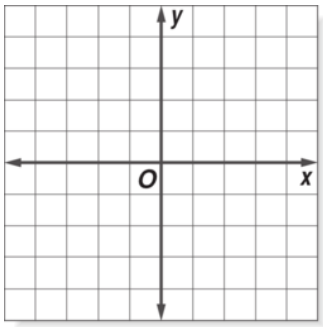
.....

.....

.....

.....

b. $g(x) = 2^{-x}$



.....

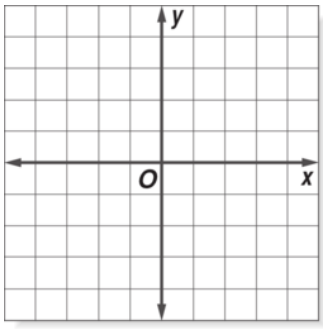
.....

.....

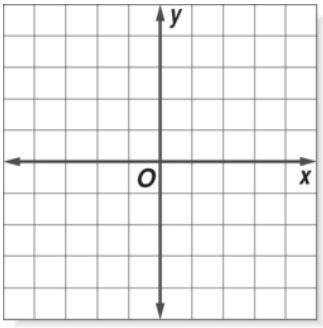
.....

.....

2 استخدم التمثيل البياني لـ $f(x) = 2^x$ لتصف التحول الذي ينتج عن كل دالة. ثم ارسم الدّوال بيانيًا.



a. $g(x) = 2^{x+1}$



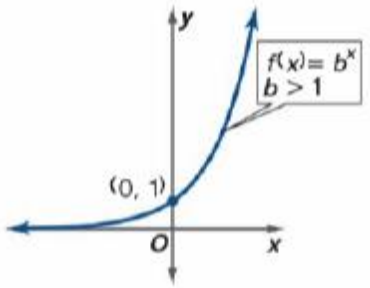
b. $h(x) = 2^{-x}$

3 الدوال الأسية واللوغاريتمية

الاسم : ..... أ. غسان الشعبان

المفهوم الأساسي خصائص الدوال الأسيّة

النمو الأسي



المجال: $(-\infty, \infty)$ **المدى:** $(0, \infty)$

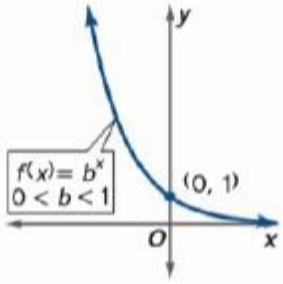
التقاطع مع المحور الرأسي y: 1 **التقاطع مع المحور الأفقي x:** لا يوجد

القيم القصوى: لا توجد **خط التقارب:** المحور الأفقي x

السلوك الطرفي: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

الاتصال: متصلة على الفترة $(-\infty, \infty)$

التضاؤل الأسي



المجال: $(-\infty, \infty)$ **المدى:** $(0, \infty)$

التقاطع مع المحور الرأسي y: 1 **التقاطع مع المحور الأفقي x:** لا يوجد

القيم القصوى: لا توجد **خط التقارب:** المحور الأفقي x

السلوك الطرفي: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

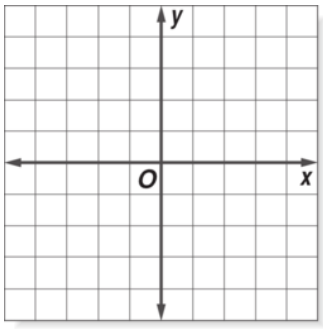
الاتصال: متصلة على الفترة $(-\infty, \infty)$

التمثيل البياني للدوال الأسيّة طبيعية الأساس

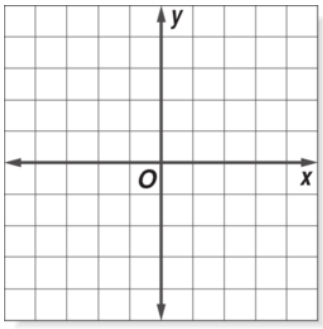
3 ستخدم التمثيل البياني لـ $f(x) = e^x$ لتصف التحول الذي ينتج في التمثيل البياني لكل دالة. ثم مثّل الدّوال بيانيًا.

تمرين موجه

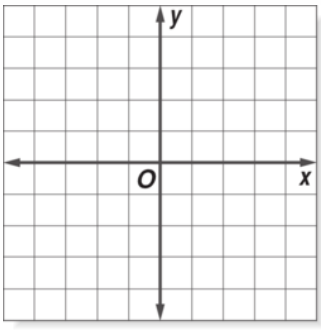
3A. $q(x) = e^{-x}$



3B. $r(x) = e^x - 5$



3C. $t(x) = 3e^x$



.....

.....

.....

الاسم: ..... أ. غسان الشعبان

النمو والتضاؤل الأسيان

المفهوم الأساسي قاعدة نسبة المرابحة المركبة

إذا تم استثمار رأس مال P بنسبة فائدة سنوية r مركبة (بصيغة عشرية) تتم إضافتها n مرات في العام، يكون الرصيد A في الحساب بعد t من السنوات كالتالي

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

تمرين موجه

4 **المعرفة المالية** إذا تم استثمار AED 1000 في حساب ادخاري عبر الإنترنت يحقق مكسبًا يبلغ 8% في العام، فكم سيبلغ الحساب في نهاية مدة 10 أعوام إذا لم تكن هناك أي إيداعات أو سحوبات أخرى وكانت الفائدة مركبة:

a. كل نصف عام؟ B. **كل** ربع عام؟ c. **يوميًا؟**

.....

.....

.....

.....

.....

المفهوم الأساسي قاعدة نسبة المرابحة المركبة المستمرة

إذا تم استثمار رأس مال P بنسبة نسبة المرابحة سنوية r مركبة (بصيغة عشرية) تتم إضافتها باستمرار، فحينها يتم احتساب الرصيد A في الحساب بعد t من الأعوام كالتالي

$$A = Pe^{rt}.$$

تمرين موجه

5 .5 **المعاملات البنكية عبر الإنترنت** إذا تم استثمار AED 1000 في حساب ادخاري يحقق مكسبًا يبلغ 8% في العام تتم إضافته كفائدة مركبة باستمرار، فكم سيبلغ الحساب في نهاية مدة 10 أعوام إذا لم تكن هناك أي إيداعات أو سحوبات أخرى؟

.....

.....

.....

.....

.....

المفهوم الأساسي المعادلات الأسيّة للنمو أو التضاؤل

إذا علمت أن المبلغ الأولي N_0 ينمو أو يتضاءل بمعدل أسي r أو k (في صورة كسر عشري). فحينها يمكن تمثيل المبلغ النهائي N بعد مدة t بالمعادلات التالية.

نمو أو تضاؤل أسي	نمو أو تضاؤل أسي مستمر
$N = N_0(1 + r)^t$	$N = N_0 e^{kt}$
إذا كان r يمثل معدل نمو. فعندما $r > 0$.	إذا كان k يمثل معدل نمو مستمر. فعندها $k > 0$.
إذا كان r يمثل معدل تضاؤل. فعندها $r < 0$.	إذا كان k يمثل معدل تضاؤل مستمر. فعندها $k < 0$.

6

تمرين موجه

6. **السكان** ينخفض عدد سكان إحدى المدن بمعدل 6%. فإذا كان عدد السكان حاليًا يبلغ 12,426 نسمة. فتوقع عدد السكان خلال 5 و10 أعوام باستخدام كل نموذج.

A. سنويًا B. باستمرار

.....

.....

.....

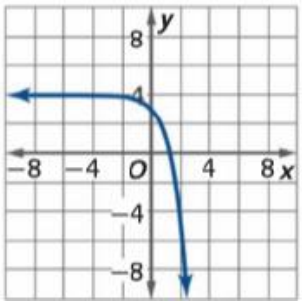
.....

.....

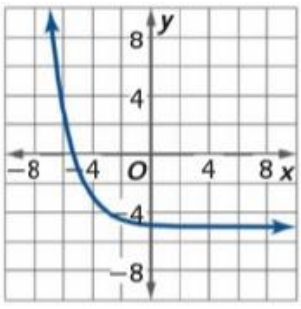
7

حدد التحولات في الدالة الأم المذكورة التي تؤدي إلى كل تمثيل بياني.

56. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



57. $f(x) = 3^x$



.....

.....

.....

.....

3–2 الدوال اللوغاريتمية

المفهوم الأساسي الربط بين التعبيرين اللوغاريتمي والأسي

إذا كان $b \neq 1$ ، $b > 0$ ، $x > 0$ ، فإن

الشكل اللوغاريتمي		الشكل الأسي
$\log_b x = y$ (أس، أساس)	فقط في حالة أن	$b^y = x$ (أس، أساس)

تمرين موجه 8

1A. $\log_8 512$ **1B.** $\log_4 4^{3.2}$ **1C.** $\log_2 \frac{1}{32}$ **1D.** $\log_{16} \sqrt{2}$

.....

.....

المفهوم الأساسي الخصائص الأساسية للوغاريتمات

إذا كانت $b > 0$ و $b \neq 1$ و x هو عدد حقيقي، فإن العبارات التالية صحيحة.

- $\log_b 1 = 0$
- $\log_b b = 1$
- $\log_b b^x = x$ } خصائص المعكوس
- $b^{\log_b x} = x,\ x > 0$ } خصائص المعكوس

تمرين موجه 9

2A. $\log_9 81$ **2B.** $3^{\log_3 1}$

.....

.....

المفهوم الأساسي الخصائص الأساسية للوغاريتمات العادية

إذا كان x عددًا حقيقيًا، فحينها تكون العبارات التالية صحيحة.

- $\log 1 = 0$
- $\log 10 = 1$
- $\log 10^x = x$ } خصائص المعكوس
- $10^{\log x} = x,\ x > 0$ } خصائص المعكوس

تمرين موجه 10

3A. $\log 10{,}000$ **3B.** $\log 0.081$ **3C.** $\log 0$ **3D.** $10^{\log 3}$

.....

3 الدوال الأسية واللوغاريتمية

الاسم: .....
أ. غسان الشعبان

المفهوم الأساسي الخصائص الأساسية للوغاريتمات الطبيعية

إذا كان x عددًا حقيقيًا، فإن العبارات التالية صحيحة.

- $\ln 1 = 0$
- $\ln e = 1$
- $\ln e^x = x$ (خصائص المعكوس)
- $e^{\ln x} = x,\ x > 0$ (خصائص المعكوس)

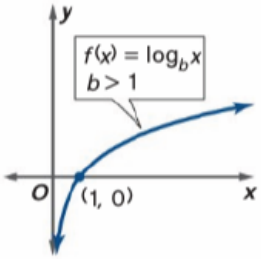
11 تمرين موجه

4A. $\ln 32$ **4B.** $e^{\ln 4}$ **4C.** $\ln\left(\frac{1}{e^3}\right)$ **4D.** $-\ln 9$

.....

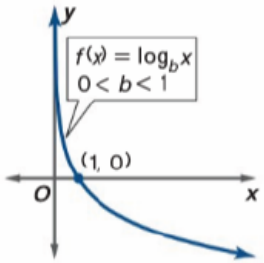
المفهوم الأساسي خصائص الدوال اللوغاريتمية

النمو اللوغاريتمي



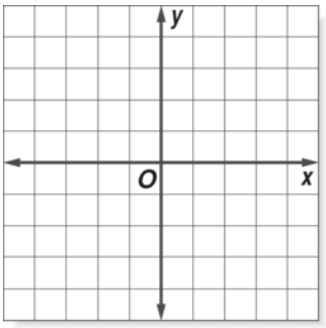
المجال: $(0, \infty)$ **المدى:** $(-\infty, \infty)$
التقاطع مع المحور الرأسي y: لا يوجد **التقاطع مع المحور الأفقي x:** 1
القيم القصوى: لا يوجد **خط التقارب:** المحور الرأسي
السلوك الطرفي:
$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$,
$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$
الاتصال: متصلة على الفترة $(0, \infty)$

التضاؤل اللوغاريتمي

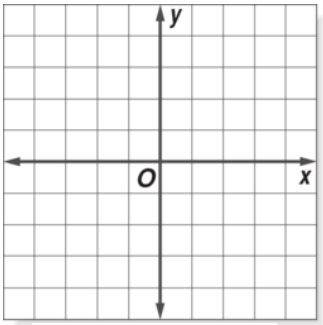


المجال: $(0, \infty)$ **المدى:** $(-\infty, \infty)$
التقاطع مع المحور الرأسي y: لا يوجد **التقاطع مع المحور الأفقي x:** 1
القيم القصوى: لا يوجد **خط التقارب:** المحور الرأسي y
السلوك الطرفي:
$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$,
$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$
الاتصال: متصلة على الفترة $(0, \infty)$

12 استخدم التمثيل البياني للدالة $f(x) = \log x$ لوصف التحويل الذي ينتج عنه كلّ دالة. ثم مثّل الدّوال بيانيًا.



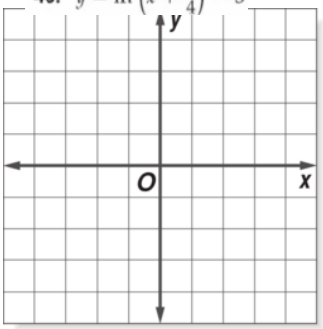
6C. $c(x) = \ln(x + 4) + 3$



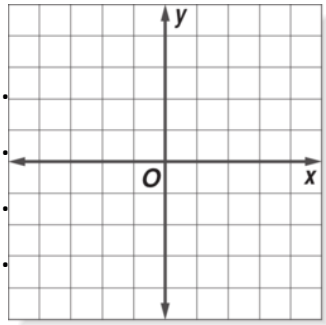
6A. $a(x) = \ln(x - 6)$

13 حدد المجال والمدى والتقاطع مع المحور الأفقي x وخط التقارب الرأسي

46. $y = \ln\left(x + \frac{1}{4}\right) - 3$



$y = \log x - 1$



.....

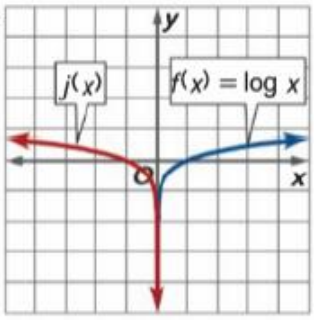
.....

.....

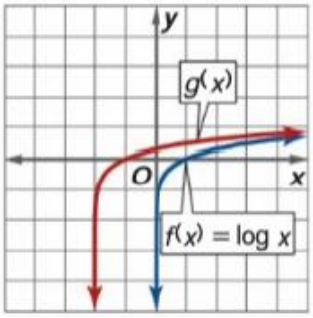
.....

13 استخدم التمثيل البياني الأصلي $f(x) = \log x$ للتوصل إلى المعادلة

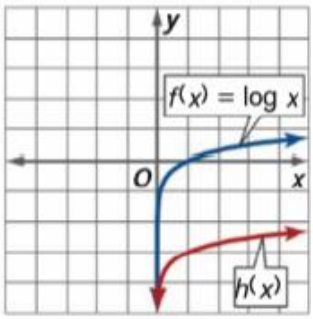
62.



60.



61.



.....

.....

المفهوم الأساسي خصائص اللوغاريتمات

إذا كان b وx وy أعدادًا حقيقية موجبة، و $b \neq 1$ وp رقم حقيقي، فإن العبارات التالية حقيقية.

خاصية ناتج الضرب $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$

خاصية ناتج القسمة $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$

خاصية الأس الثابت $\log_b x^p = p \log_b x$

14 **تمرين موجه**

عبّر عن كل لوغاريتم باستخدام log 5 وlog 3.

1A. log 75

1B. log 5.4

.....

.....

15 تمرين موجه

2A. $\log_6 \sqrt[3]{36}$ 2B. $\ln e^9 + 4 \ln e^3$

.....

.....

16 قم بتوسيع كل تعبير.

29. $\log_9 6x^3y^5z$

.....

.....

36. $\log_5 a^6b^{-3}c^4$

.....

.....

3A. $\log_{13} 6a^3bc^4$ **3B.** $\ln \frac{3y+2}{4\sqrt[3]{y}}$

.....

.....

.....

.....

17 قم بتبسيط كل تعبير مما يلي.

4A. $-5 \log_2 (x+1) + 3 \log_2 (6x)$ **4B.** $\ln (3x+5) - 4 \ln x - \ln (x-1)$

.....

.....

.....

.....

42. $4 \ln (x+3) - \frac{1}{5} \ln (4x+7)$ **46.** $\log_2 x - \log_2 y - 3 \log_2 z$

.....

.....

الاسم : ..... أ. غسان الشعبان

المفهوم الأساسي تغيير صيغة الأساس

بالنسبة لأي أعداد حقيقية موجبة a, b, و1 ≠ a, 1 ≠ b, x,

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

المعادلات الأسيّة واللوغاريتمية

المفهوم الأساسي خاصية "واحد لواحد" للدوال الأسيّة

الشرح تكون $b > 0$ و $b \neq 1$, $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كانت $x = y$.

الأمثلة بما أن $3^x = 3^5$، فإن $x = 5$ بما أن $\log x = 3$، فإن $10^{\log x} = 10^3$

18 حل المعادلات الآتية :

تمرين موجه

1A. $16^{x+3} = 4^{4x+7}$

1B. $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-5} = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3x}{4}}$

.....

.....

.....

.....

تمرين موجه

2A. $-3 \ln x = -24$

2B. $4 - 3 \log (5x) = 16$

2C. $\log_3 (x^2 - 1) = 4$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

19

تمرين موجه

3A. $\log_6 2x = \log_6 (x^2 - x + 2)$

3B. $\log_{12} (x + 3) = \log_{12} x + \log_{12} 4$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

20

تمرين موجه

حُـــلّ كل من المعادلات التالية.

6A. $e^{2x} + 2e^x = 8$

6B. $4e^{4X} + 8e^{2X} = 5$

.....

.....

.....

.....

21

تمرين موجه

حُلّ كل من المعادلات التالية.

8A. $\ln (6y + 2) - \ln (y + 1) = \ln (2y - 1)$

8B. $\log (x - 12) = 2 + \log (x - 2)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....