حقيبة اولمبياد الرياضيات

للمرحلة الثانوية

تجميع وإعداد :

زهور الجهني

عبير خياري

فوزية المغامسي

إشراف : أ . لمياء خان

مراجعة : أ . طارق الصيعري

المحتويات

اولاً : الجبر

المفردات

- المتتابعات والمتسلسلات
- كثيرات الحدود
- علاقات فيتا
- المتباينات

مراجعة لبعض الحقائق الجبرية

العمليات على الكسور :

جمع الكسور	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$	$\frac{3}{5}+\frac{2}{7}=\frac{3\cdot7+5\cdot2}{5\cdot7}=\frac{21+10}{35}=\frac{31}{35}$
طرح الكسور	$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$	$\frac{3}{5}-\frac{2}{7}=\frac{3\cdot7-5\cdot2}{5\cdot7}=\frac{21-10}{35}=\frac{11}{35}$
ضرب الكسور	$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$	$\frac{6}{7}\times\frac{5}{3}=\frac{30}{21}=\frac{10}{7}$
قسمة الكسور	$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$	$\frac{6}{7}\div\frac{5}{3}=\frac{6}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{18}{35}$

خصائص التناسب :

إذا كان $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $\Leftarrow$ $ad=bc$ بحيث $b,d\neq0$ فإن :		
يبقى التناسب صحيحاً عند ضرب كل من البسط والمقام بعدد معين	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc$ $\frac{ak}{bk}=\frac{cr}{dr}\Rightarrow ak\cdot dr=bk\cdot cr$ $\Rightarrow ad\cdot kr=bc\cdot kr\Rightarrow ad=bc$	$\frac{5}{2}=\frac{15}{6}\Rightarrow 5\cdot6=2\cdot15$ $\frac{5\cdot3}{2\cdot3}=\frac{15\cdot2}{6\cdot2}\Rightarrow 15\cdot12=30\cdot6$
النسبة بين البسطين تساوي النسبة بين المقامين	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc$ $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\Rightarrow ad=bc$	$\frac{3}{5}=\frac{6}{10}\Rightarrow 3\cdot10=6\cdot5$ $\frac{3}{6}=\frac{5}{10}\Rightarrow 3\cdot10=6\cdot5$
عند جمع بسطي التناسب وجمع مقامي التناسب أو طرح بسطي التناسب وطرح مقامي التناسب فإن الناتج يساوي النسبتين	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$	$\frac{2}{5}=\frac{8}{20}=\frac{2+8}{5+20}=\frac{2-8}{5-20}$
التناسب الطردي : نقول عن كميتين يتناسبان طردياً إذا كان حاصل قسمتهما مقدار ثابت	نقول أن a يتناسب طردياً مع b إذا كان حاصل قسمتهما مقدار ثابت وليكن c وتكتب على الصورة : $\frac{a}{b}=c$	السرعة تتناسب طردياً مع المسافة فكلما زادت السرعة زادت المسافة المقطوعة
التناسب العكسي : نقول عن كميتين يتناسبان عكسياً إذا كان حاصل ضربهما مقدار ثابت	نقول أن a يتناسب عكسياً مع b إذا كان حاصل ضربهما مقدار ثابت وليكن c وتكتب على الصورة : $a\cdot b=c$	السرعة تتناسب عكسياً مع الزمن فكلما زادت السرعة نقص الزمن

الأسس

إذا كان n عدد صحيح موجب وَ a عدد حقيقي فإن :

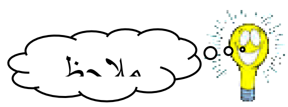
$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n من المرات}}$$

يسمى العدد a الأساس ، ويسمى n الأس أو القوة

فمثلاً : $2^9 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

خواص الأسس :

إذا كان $a, b > 0$ وَ $m, n \in \mathbb{R}$ فإن :	
$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$	$5^{-3} = \dfrac{1}{5^3} = \dfrac{1}{125}$
$a^0 = 1$	$13^0 = 1$
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$
$a^n \div a^m = \dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$2^7 \div 2^3 = 2^{7-3} = 2^4$
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(3 \cdot 5)^7 = 3^7 \cdot 5^7$
$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	$\left(\dfrac{3}{5}\right)^4 = \dfrac{3^4}{5^4}$
$(a^n)^m = (a^m)^n = a^{nm}$	$(3^2)^5 = (3^5)^2 = 3^{2 \cdot 5} = 3^{10}$
$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{-n}$	$\left(\dfrac{3}{7}\right)^5 = \left(\dfrac{7}{3}\right)^{-5}$
إذا كان الأساس متساوي فإن الأسس متساوية $a^n = a^m \Rightarrow n = m$	$2^5 = 2^m \Rightarrow m = 5$
إذا كان الأسس متساوية فإن الأساس متساوي $a^n = b^n \Rightarrow a = b$	$3^5 = a^5 \Rightarrow a = 3$



١) لا يمكن توزيع الأس على الجمع أو الطرح بمعنى أن $(a \pm b)^n \neq a^n \pm b^n$

٢) الأسس لا تجمع إلا في حالة تساوي الأساسات

اللوغاريتمات

إذا كان b , a عددين حقيقيين موجبين ($a \neq 1$) فإن $\quad a^n = b \iff \log_a b = n$

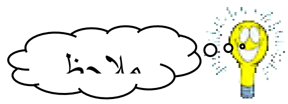
الأس n نسميه لوغاريتم العدد b للأساس a

فمثلاً : $2^5 = 32 \iff \log_2 32 = 5$

خواص اللوغاريتمات :

إذا كان $a,b,c,d > 0$ وَ $n \in \mathbb{R}$ فإن :

$\log_a 1 = 0$	$\log_5 1 = 0$
$\log_a a = 1$	$\log_5 5 = 1$
$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$	$\log_5 6 = \log_5 (2 \cdot 3) = \log_5 2 + \log_5 3$
$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$	$\log_5 \left(\frac{2}{3}\right) = \log_5 2 - \log_5 3$
$\log_a b^n = n \log_a b$	$\log_5 3^7 = 7 \cdot \log_5 3$
$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$	$\log_{5^3} 7 = \frac{1}{3} \log_5 7$
$\frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$	$\frac{\log_5 3}{\log_5 7} = \log_7 3$
$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$	$\log_3 5 = \frac{1}{\log_5 3}$
$\log_a b \cdot \log_c d = \log_a d \cdot \log_c b$	$\log_5 3 \cdot \log_2 7 = \log_5 7 \cdot \log_2 3$
$a^{\log_a b} = b$	$3^{\log_3 5} = 5$
$log_a a^b = b$	$log_3 3^5 = 5$



١) $\log_a (b + c) \neq \log_a b + \log_a c$

٢) $\log_a (b \cdot c) \neq \log_a b \cdot \log_a c$

٣) $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) \neq \log_a b \div \log_a c$

الجذور

إذا كان b , a عددين حقيقيين ، n عدد صحيح موجب فإننا نقول b جذر نوني للعدد a بحيث $a = b^n$

ونكتب ذلك $\sqrt[n]{a} = b$.

فمثلاً : $2^5 = 32 \Leftrightarrow \sqrt[5]{32} = 2$

ملاحظ

١) الرمز $\sqrt[n]{a}$ يسمى الجذر النوني ويسمى n دليل الجذر بينما a يسمى المجذور

فمثلاً : دليل الجذر في الجذر التربيعي $\sqrt{15}$ هو 2

دليل الجذر في العدد $\sqrt[7]{13}$ هو 7

٣) الجذر النوني ($\sqrt[n]{a}$) معرف لأي عدد حقيقي a إذا كان n عدد فردي ،

أما إذا كان n عدد زوجي فإن الجذر النوني ($\sqrt[n]{a}$) معرف لأي عدد حقيقي a غير سالب أي أن $a \geq 0$

٣) في الجذر التربيعي $\sqrt{a}$ يسمى جذر أصم إذا كان $a > 0$ وليس مربع كامل

فمثلاً : $\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$ جذر غير أصم ، بينما الأعداد التالية جذور صماء : $\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{3}\ ,\ \sqrt{5}\ ,\ \sqrt{6}, ...$

خواص الأسس :

إذا كان $a,b \in \mathbb{R}$ وَ m,n,k أعداد صحيحة موجبة ، وفي حالة m,n,k أعداد زوجية $a,b \geq 0$ فإن :	
$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$	$\sqrt[5]{7} = 7^{\frac{1}{5}}$
$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ حيث $ab \geq 0$	$\sqrt[7]{3 \times 5} = \sqrt[7]{3} \times \sqrt[7]{5}$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ حيث $b \neq 0$	$\sqrt[5]{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{7}}$
$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[5]{3^7} = 3^{\frac{7}{5}}$
$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[5]{13}} = \sqrt[3\times5]{13} = \sqrt[15]{13}$
$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^k = \sqrt[n]{a^{mk}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{mk}$	$\left(\sqrt[7]{5^3}\right)^2 = \sqrt[7]{5^{3\times2}} = \left(\sqrt[7]{5}\right)^{3\times2}$

ملاحظ

١) $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$

٢) $\sqrt{a^2} = |a|$ حيث $|a| = \begin{cases} a & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$

٣) $\sqrt{(a \pm b)^2} = |a \pm b|$

٤) **إنطاق المقام (تنسيب المقام) ويقصد به تخليص المقام من الجذور الصماء**

فعند إنطاق مقام العدد $\dfrac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ **نضرب بسطاً ومقاماً في مرافق المقام وهو :** $\sqrt{a}+\sqrt{b}$

وعند إنطاق مقام العد $\dfrac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ **نضرب بسطاً ومقاماً في مرافق المقام وهو :** $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

فمثلاً : $\dfrac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\times\dfrac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\dfrac{7(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2}=\dfrac{7\sqrt{5}+7\sqrt{2}}{3}$

قانون أبو كامل المصري :

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$$

(جذر الأول + جذر الثاني) = جذر [(الأول + الثاني) + ٢ جذر (الأول × الثاني)]

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$$

فمثلاً : بسط المقدار التالي : $\sqrt{9+2\sqrt{20}}$ **(نبحث عن عددين مجموعها 9 وحاصل ضربهما 20) هما 5 ،4**

$$\therefore \sqrt{9+2\sqrt{20}}=\sqrt{5}+\sqrt{4}=\sqrt{5}+2$$

أهم المتطابقات الأساسية

١) $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

٢) $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$

٣) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

٤) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$

٥) $(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$

٦) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3a\,b^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

٧) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3a\,b^2-b^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

٨) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

٩) $a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$

١٠) $a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+a\,b^3+b^4)$

١١) **وبصورة عامة لأي عدد صحيح n فإن :**

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+.....+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

١٢) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

١٣) $a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-a\,b^3+b^4)$

١٤) **وبصورة عامة لأي عدد صحيح فردي n فإن :**

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-.....+ab^{n-2}+(-1)^{n-1}b^{n-1})$$

الأعداد المركبة

مثال تمهيدي :

اوجد حل ما يلي في $\mathbb{R}$

$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1\in\mathbb{R}$$

$$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1\notin\mathbb{R}$$

نلاحظ في المعادلة الأخيرة ليس لها حل في حقل الأعداد الحقيقية لأنه لا يوجد عدد حقيقي X يكون مربعه (-1)

وهذا يقودنا إلى أن نبحث عن نظام أوسع من $\mathbb{R}$ يحقق حل المعادلة الأخيرة أي إننا نحتاج إلى توسيع نظام الأعداد الحقيقية إلى

حقل ما وليكن ($\oplus$ ، $\odot$، $\mathbb{C}$) حيث يمكن فرض أن $\sqrt{-1}=i$

تتكون مجموعة الأعداد المركبة (ويرمز لها بالرمز $\mathbb{C}$) من جميع التعبيرات التي على الشكل $\boxed{z=a+bi}$

حيث a و b عددان حقيقيان و $i=\sqrt{-1}$. أي أن $\mathbb{C}=\{z=a+bi \mid a,b\in\mathbb{R},\ i^2=-1\}$

العدد a يسمى الجزء الحقيقي للعدد المركب z والعدد b يسمى الجزء التخيلي. لاحظ أن العدد المركب الذي جزؤه التخيلي صفري سيكون عدداً حقيقياً. يمكن كتابة العدد المركب بعدة طرق ولكن الشكل القياسي للعد المركب هو $\boxed{\text{جزء حقيقي} + (\text{جزء تخيلي})\,i}$

فمثلاً : $2+3i$ الجزء الحقيقي 2 والتخيلي 3

تساوي عددان مركبان

يتساوى العددان المركبان إذا وفقط إذا كان لهما نفس الجزء الحقيقي ونفس الجزء التخيلي ، أي أن

$a+bi=c+di$ إذا وفقط إذا كان $a=c$ و $b=d$

حاصل جمع عددان مركبان

يعرَّف حاصل الجمع لعددين مركبين $z=a+bi$ وَ $w=c+di$ بالمعادلة $z+w=(a+c)+(b+d)i$

أي نجمع الحقيقي مع الحقيقي والجزء التخيلي مع التخيلي

مثال :

إذا كان $z=2+3i$ ، $w=-5+7i$ اوجدي $z+w$ ، $z-w$

الحل: $z+w=2+3i+(-5+7i)=2-5+3i+7i=-3+10i$

$$z-w=2+3i-(-5+7i)=2+5+3i-7i=7-4i$$

حاصل ضرب عددان مركبان

يعرَّف حاصل الضرب لعددين مركبين $z=a+bi$ و $w=c+di$ بالمعادلة $z+w=(a+c)+(b+d)i$

$$z\cdot w=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

(الأول × الأول – الثاني × الثاني) + (الأول × الثاني + الثاني × الأول) i

مثال :

إذا كان $z=2+3i$ ، $w=-5+7i$ اوجد $w\cdot z$

الحل: $w\cdot z=(-5+7i)\cdot(2+3i)=(-5\times 2)-(7\times 3)+((-5\times 3)+(7\times 2))i=-31-i$

مرافق العدد

مرافق العدد المركب $z=a+bi$ ، و يرمز له بالرمز $\bar{z}$ ، هو العدد المركب $\bar{z}=a-bi$.

أي ان مرافق العدد $2-3i$ هو $2+3i$ ، مرافق العدد $3+9i$ هو $3-9i$ ، مرافق العدد $-5i$ هو $5i$ ، مرافق العدد 2 هو 2

القيمة المطلقة للعدد

تعرّف *القيمة المطلقة* أو مقياس العدد المركب $z=a+bi$ بالمعادلة

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

فمثلاً القيمة المطلقة للعدد

$$w=3+4i$$

$$|w|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

$$z=2-5i$$

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2^2+(-5)^2}=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$$

ملاحظة

١) حاصل ضرب عدد مركب في مرافقه هو عدد حقيقي

$$z=a+bi \Rightarrow \text{مرافقه } \bar{z}=a-bi$$

(الأول)^2 + (الثاني)^2

$$\bar{z}z=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$$

٢) $i=\sqrt{-1} \Rightarrow i^2=-1$

i^5	i^4	i^3	i^2	i
i	1	$-i$	-1	$\sqrt{-1}$

وبصورة عامة $i^{4n}=1$

أي أن : $i^n =$

- n عدد زوجي:
  - 1 إذا كان n تقبل القسمة على 4
  - -1 إذا كان n لا تقبل القسمة على 4
- n عدد فردي:
  - i إذا كان $n-1$ تقبل القسمة على 4
  - $-i$ إذا كان $n-1$ لا تقبل القسمة على 4

قسمة عددين مركبين :

عند قسمة عدد مركب على عدد مركب نضرب في مرافق المقام

مثال : اوجد ناتج ما يلي $\dfrac{2+5i}{7-3i}$

$$\frac{2+5i}{7-3i}=\frac{2+5i}{7-3i}\times\frac{7+3i}{7+3i}=\frac{(2+5i)(7+3i)}{(7)^2+(3)^2}$$

$$=\frac{(2\times7)-(5\times3)+(2\times3+5\times7)i}{49+9}$$

$$=\frac{14-15+(6+35)i}{58}=\frac{-1}{58}+\frac{41}{58}i$$

المجموع $\sum$ (سيجما)

الرمز $\sum$ يستخدم لمجموع عدة حدود ويقرأ سيجما

$$\sum_{r=1}^{n} a_r = a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots\dots\dots + a_n$$

فمثلاً :

١) $\sum_{k=1}^{5} k = 1+2+3+4+5$

٢) $\sum_{r=1}^{12}(3r-1) = (3\times1-1)+(3\times2-1)+(3\times3-1)\dots\dots\dots+(3\times12-1) = 2+5+8+\dots\dots+35$

٣) $\sum_{r=1}^{\infty} a_r = a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots\dots\dots$

٤) $\sum_{r=0}^{\infty} 5^r = 5^0 + 5^1 + 5^2 + \dots\dots\dots\dots$

وكذلك لكتابة مقدار ما على صورة مجاميع باستخدام الرمز $\sum$

١) $1+4+9+16+25+36$

$$1+4+9+16+25+36 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2 = \sum_{r=1}^{6} r^2$$

٢) $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\dots\dots\dots\dots\dots\dots = \frac{1}{2\times1+1}+\frac{2}{2\times2+1}+\frac{3}{2\times3+1}+\dots\dots\dots\dots\dots\dots = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{r}{2r+1}$$

خصائص المجموع $\sum$

١) $\sum_{r=1}^{n} a = \underbrace{a+a+a+\dots\dots\dots\dots+a}_{n} = na$

٢) $\sum_{r=1}^{n} m\cdot a_r = m\sum_{r=1}^{n} a_r$

٣) $\sum_{r=1}^{n}(a_r+b_r) = \sum_{r=1}^{n} a_r + \sum_{r=1}^{n} b_r$

٤) $\sum_{r=1}^{n} a_r = \sum_{r=1}^{k} a_r + \sum_{r=k+1}^{n} a_r$

مثال :

إذا كان $\sum_{r=1}^{7} a_r = 15 , \sum_{r=1}^{7} b_r = 22$ اوجد قيمة $\sum_{r=1}^{7}(3a_r - 2b_r + 5)$

الحل :

$$\sum_{r=1}^{7}(3a_r-2b_r+5) = \sum_{r=1}^{7}3a_r - \sum_{r=1}^{7}2b_r + \sum_{r=1}^{7}5$$

$$= 3\sum_{r=1}^{7}a_r - 2\sum_{r=1}^{7}b_r + \sum_{r=1}^{7}5 = 3\times15 - 2\times22 + 5\times7 = 36$$

المتتابعات و المتسلسلات

المتتابعات

المتتابعة هي دالة مجالها مجموعة الأعداد الموجبة أو مجموعة جزئية منها ، ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها ، ومداها مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها وتسمى عناصر المدى حدود المتتابعة ، عادة ما نرمز للعدد المحدد بهذه المتتابعة للعدد

الصحيح الموجب n باستخدام a_n . وهي عبارة عن تتابع من الأعداد $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ وكل عدد منها يسمى حداً حيث a_1 يسمى الحد الأول ، ويسمى الحد الثاني a_2 وهكذا ....

قد تكون **المتتابعة منتهية** متى عُلم حدها الأخير نرمز لها بالرمز $\{a_r\}_{r=1}^{n}$ أو بالرمز $(a_r)_{r=1}^{n}$ وتكتب على الصورة :

$a_1, a_2, a_3, ..., a_n$

فمثلاً :

$3,6,9,12,15,18,21$ متتابعة منتهية ويمكن كتابة حدها النوني على الصورة $a_n = 3n$ ويمكن كتابة المتتابعة على الصورة $\{3n\}_{n=1}^{7}$

وقد تكون **المتتابعة غير منتهية** نرمز لها بالرمز $\{a_r\}_{r=1}^{\infty}$ وتكتب على الصورة $a_1, a_2, a_3, ...$

فمثلاً :

$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, ...$ متتابعة غير منتهية ويمكن كتابة حدها النوني على الصورة $a_n = \frac{1}{n^2}$

ويمكن كتابة المتتابعة على الصورة $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

ويمكن التعبير عن المتتابعة إما بذكر حدها النوني a_n أو بكتابة بعض حدودها .

المتسلسلات

إذا كانت المتتابعة $\{a_r\}_{r=1}^{n} = a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ متتابعة منتهية مكونة من n حداً (أي عدد حدودها n)

فإن مجموع حدودها :

$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ تسمى **متسلسلة منتهية**

ونستخدم المجموع $\sum$ والحد العام (الحد النوني) a_r للتعبير عن **المتسلسلة المنتهية** :

$$\sum_{r=1}^{n} a_r = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

وإذا كانت المتتابعة لانهائية $\{a_r\}_{r=1}^{\infty} = a_1, a_2, a_3, ...$ فيكون ناتج مجموع حدودها **متسلسلة لا نهائية**

قد يكون لها مجموع حقيقي وقد لا يكون لها مجموع حقيقي وتكتب على الصورة :

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r = a_1 + a_2 + a_3 + ...$$

ومن أشهر أنواع المتتابعات المتتابعة الحسابية والمتتابعة الهندسية .

المتتابعة الحسابية

مثال تمهيدي :

ليكن لدينا المتتابعتان :

$4, 9, 14, 19, ...$

$12, 8, 4, 0, ...$

نلاحظ أن :

المتتابعة الأولى يزيد كل حد عن الحد السابق له مباشرة بمقدار ثابت هو 5

المتتابعة الثانية ينقص كل حد عن الحد السابق له مباشرة بمقدار ثابت هو 4

تسمى كلاً من المتتابعتان متتابعة حسابية ويسمى المقدار الثابت الذي يزيد أو ينقص عن الحد السابق له مباشرة أساس المتتابعة أو الفرق العام أو الفرق الثابت

مما سبق تسمى المتتابعة **متتابعة حسابية** إذا كان الفرق بين حدين متتالين مقدار ثابت ويسمى الفرق بأساس المتتابعة ويرمز بالرمز d

ويكون حدود المتتابعة الحسابية هي :

$$a_1, \quad a_2 \quad , \quad a_3 \quad ,......, \quad a_n \qquad ,.........$$
$$a, a+d, a+2d, ..., a+(n-1)d.........$$

وعلى ذلك يمكن أن نستنتج الحد النوني a_n للمتتابعة الحسابية $\{a_n\}$ على الصورة : $\boxed{a_n = a+(n-1)d}$

حيث :

١) الحد الأول a

٢) الفرق الثابت أو الأساس d ويُعطى بالعلاقة $d = a_n - a_{n-1}$

٣) الحد النوني للمتتابعة الحسابية $a_n = a+(n-1)d$

فمثلاً الحد السابع $a_7 = a+6d$ ، $a_{100} = a+99d$

٤) يمكن إيجاد الفرق الثابت بمعلومية حدين a_k , a_r بالعلاقة التالية : $d = \dfrac{a_k - a_r}{k-r}$

٥) إذا كانت المتتابعة الحسابية منتهية فإن رتبة الحد الأخير فيه هو نفسه عدد حدود المتتابعة ، والعكس صحيح (أي عدد حدود المتتابعة هو نفسه رتبة ترتيب الحد الأخير)

مثال :

متتابعة حسابية حدها الخامس يساوي 30 وحدها العشرون 90 اوجد الفرق الثابت للمتتابعة

$\because a_5 = 30 , a_{20} = 90$

$\therefore$ لحساب الفرق الثابت

$$d = \frac{a_k - a_r}{k-r} \Rightarrow d = \frac{a_{20} - a_5}{20-5} = \frac{90-30}{20-5} = \frac{60}{15} = 4$$

الوسط الحسابي:

إذا كانت a,c حدين من متتابعة حسابية و بينهما وسط حسابي واحد b فإننا نحصل على متتابعة a,b,c

حيث b هو الوسط الحسابي بين الحدين a,c ويكون $b=\frac{a+c}{2}$

المتسلسلة الحسابية

يكون مجموع المتسلسلة الحسابية :

$$a_1 + \quad a_2 \quad + \quad a_3 \quad + ...+ \quad a_n$$

$$a+(a+d)+(a+2d)+......+(a+(n-1)d)$$

على الصورة :

$$s_n=\sum_{r=1}^{\infty} a_r = a_1+a_2+a_3+......+a_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$$

أو على الصورة :

$$s_n=\sum_{r=1}^{\infty} a_r = a_1+a_2+a_3+......+a_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$$

أي أن مجموع المتسلسلة الحسابية

$s_n=\frac{n}{2}(a+a_n)$	بدلالة عدد الحدود n الحد الأول a والحد الأخير a_n
$s_n=\frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$	بدلالة عدد الحدود n الحد الأول a وأساس المتتابعة d

مثال :

متتابعة حسابية حدودها : 2,5,8,......,59 اوجد a_{13} ، عدد حدودها ، مجموعها

الحل :

في المتتابعة نجد أن $a=2$ ، أساس المتتابعة $d=a_2-a=5-2=3$

$$\therefore a_{13}=a+12d=2+12\times 3=38$$

لإيجاد عدد حدودها نستنتجه من الحد الأخير $a_n=59$

$$\because a_n=a+(n-1)d$$

$$\therefore 59=2+(n-1)\times 3 \Rightarrow 57=3n-3 \Rightarrow 3n=60 \Rightarrow n=20$$

لإيجاد المجموع بدلالة عدد الحدود $n=20$ ، الحد الأول $a=2$ والحد الأخير $a_n=59$

$$s_n=\frac{n}{2}(a+a_n)$$

$$s_n=\frac{20}{2}(2+59)=610$$

المتتابعة الهندسية

مثال تمهيدي :

ليكن لدينا المتتابعتان :

$4, 8, 16, 32, \ldots\ldots\ldots\ldots$

$81, 27, 9, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots$

نلاحظ أن :

المتتابعة الأولى : نسبة أي حد من حدود المتتابعة الأولى والحد الذي يسبقه مباشرة بالترتيب يساوي مقدار ثابت يساوي 2

أي أن : $\frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \frac{32}{16} = 2$

المتتابعة الثانية : نسبة أي حد من حدود المتتابعة الثانية والحد الذي يسبقه مباشرة بالترتيب يساوي مقدار ثابت يساوي $\frac{1}{3}$

أي أن : $\frac{27}{81} = \frac{9}{27} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

تسمى كلاً من المتتابعتان متتابعة هندسية ويسمى المقدار الثابت أساس المتتابعة أو النسبة المشتركة r

ويكون حدود المتتابعة الهندسية هي :

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots\ldots$$
$$a, ar, ar^2, ar^3 \ldots\ldots, ar^{n-1} \ldots\ldots\ldots$$

وعلى ذلك يمكن أن نستنتج الحد النوني a_n **للمتتابعة الهندسية** $\{a_n\}$ **على الصورة :**

$$\boxed{a_n = ar^{n-1}}$$

حيث :

١) **الحد الأول** a

٢) **النسبة المشتركة أو الأساس** r **ويُعطى بالعلاقة** $r = a_n \div a_{n-1}$

٣) **الحد النوني للمتتابعة الهندسية** $a_n = ar^{n-1}$

فمثلاً الحد السابع $a_7 = ar^6$ ، $a_{100} = a + 99d$

٤) **يمكن إيجاد النسبة الثابتة بمعلومية حدين** a_n, a_m **بالعلاقة التالية :** $r = \sqrt[n-m]{\frac{a_n}{a_m}}$

٥) **إذا كانت المتتابعة الهندسية منتهية فإن رتبة الحد الأخير فيه هو نفسه عدد حدود المتتابعة ، والعكس صحيح (أي عدد حدود المتتابعة هو نفسه رتبة ترتيب الحد الأخير)**

الوسط الهندسي :

إذا كانت a, c **حدين من متتابعة هندسية بحيث** $ac > 0$ **و بينهما وسط هندسي واحد** b **فإننا نحصل على متتابعة** a, b, c

حيث b **هو الوسط الهندسي بين الحدين** a, c **ويكون**

$$b = \pm\sqrt{ac}$$

المتسلسلة الهندسية

يكون مجموع المتسلسلة الهندسية :

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots\ldots + a_n$$

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots + ar^{n-1}$$

على الصورة :

$$s_n = \sum_{r=1}^{\infty} a_r = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$$ حيث $r \neq 1$

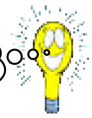
أي أن مجموع المتسلسلة الهندسية :

$$s_n = a \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

حيث $r \neq 1$

بدلالة عدد الحدود n الحد الأول a وأساس المتتابعة r

وفي حالة $r = 1$ فإن $s_n = n\,a$



ملاحظة

المتسلسلة الهندسية اللانهائية هي التي لها الشكل :

$$s_n = \sum_{r=1}^{\infty} a_r = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots$$

إذا كان $|r| < 1$ فإن للمتسلسلة الهندسية مجموع S كعدد حقيقي يُعطى بالعلاقة :

$$s = \frac{a}{1 - r}$$

مثال :

أوجد مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية التالية :

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{3^r} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

الحل :

واضح أن الحد الأول $a = 1$ ، أساس المتتابعة $r = \frac{1}{3} < 1$

$\therefore$ يكون مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية على الصورة $s = \frac{a}{1 - r}$

$$s = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{3}{3} - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

(١) بسط المقدار التالي :

$$\sqrt{1+2+3+........+99+100+99+98+..........+2+1}$$

الحل :

واضح أن المقدار عبارة عن متسلسلة حسابية $\sqrt{1+2+3+........+99+100+99+98+..........+2+1}$

بجمع الحدود من 1 إلى 99 $\sqrt{(1+2+3+........+99)+100+(99+98+..........+2+1)}$

عبارة عن متسلسلة حسابية مكونة من 99 حداً ، حدها الأول =1 ، حدها الأخير = 99

بتطبيق القانون $s_n = \frac{n}{2}(a+a_n)$ نجد أن :

$$\sqrt{1+2+3+........+99+100+99+98+..........+2+1}$$

$$= \sqrt{\frac{99}{2}(1+99)+100+\frac{99}{2}(1+99)}$$

$$\sqrt{99\times 50+100+99\times 50} = \sqrt{99\times 100+100} = \sqrt{9900+100} = \sqrt{10000} = 100$$

(٢) إذا كان a,b,c في تتابع حسابي اثبت أن a^2-bc, b^2-ac, c^2-ab في تتابع حسابي

الحل :

بما أن a,b,c في تتابع حسابي فإن $b = \frac{a+c}{2} \Rightarrow b^2 = \frac{(a+c)^2}{4}$

المطلوب إثبات أن a^2-bc, b^2-ac, c^2-ab في تتابع حسابي أي أن

$$b^2-ac = \frac{a^2-bc+c^2-ab}{2}$$

$$b^2 = \frac{a^2-bc+c^2-ab}{2}+ac \Rightarrow b^2 = \frac{a^2-bc+c^2-ab}{2}+\frac{2ac}{2}$$

$$b^2 = \frac{a^2+2ac+c^2-b(a+c)}{2} \Rightarrow b^2 = \frac{(a+c)^2-b(a+c)}{2} = \frac{(a+c)^2}{2} - b\left(\frac{a+c}{2}\right) = \frac{(a+c)^2}{2} - b^2$$

$$2b^2 = \frac{(a+c)^2}{2} \Rightarrow b^2 = \frac{(a+c)^2}{4}$$

$\therefore$ a^2-bc, b^2-ac, c^2-ab في تتابع حسابي

(٣) ليكن n عدد فردي احسب المجموع $s=1-2+3-4+.........+(-1)^{n+1}n$

الحل :

بما أن n عدد فردي فإن $n+1$ عدد زوجي وكذلك نجد أن $(-1)^{n+1}=1$

$\therefore$ يصبح المجموع $s=1-2+3-4+.........+(-1)^{n+1}n$ كالتالي :

$s=1-2+3-4+.........+n$ لاحظ مجموع حدين متتاليين = -1

$$s=\underbrace{1-2}_{-1}+\underbrace{3-4}_{-1}+.........+\underbrace{(n-2)-(n-1)}_{-1}+n$$

$$s=\underbrace{-1-1-1-.........-1}_{\frac{n-1}{2}\ times}+n\Rightarrow s=(-1)\frac{n-1}{2}+n=\frac{-n+1+2n}{2}=\frac{n+1}{2}$$

(٤) احسب المجموع التالي : $1+\frac{2008}{2009}+\left(\frac{2008}{2009}\right)^2+\left(\frac{2008}{2009}\right)^3\left(\frac{2008}{2009}\right)^4+\left(\frac{2008}{2009}\right)^5+.....$

الحل :

واضح أن المجموع السابق عبارة عن متسلسلة هندسية لانهائية فيها الحد الأول $a=1$ ، أساس المتتابعة $r=\frac{2008}{2009}<1$

$\therefore$ مجموع متسلسلة هندسية لانهائية فيها $r<1$ على الصورة : $s=\frac{a}{1-r}$

$$\therefore S_n=\frac{1}{1-\frac{2008}{2009}}=\frac{1}{\frac{2009}{2009}-\frac{2008}{2009}}=\frac{1}{\frac{1}{2009}}=\quad 2009$$

(٥) احسب المجموع $\frac{5}{4}+\frac{11}{4^2}+\frac{17}{4^3}+\frac{23}{4^4}+........$ التالي :

$$\frac{5}{4}+\frac{11}{4^2}+\frac{17}{4^3}+\frac{23}{4^4}+........$$

نفرض أن المجموع = T

$$T=\frac{5}{4}+\frac{11}{4^2}+\frac{17}{4^3}+\frac{23}{4^4}+.......$$

بالضرب في 4

$$4T=5+\frac{11}{4}+\frac{17}{4^2}+\frac{23}{4^3}+.......$$

$$4T=5+(\frac{6}{4}+\frac{5}{4})+(\frac{6}{4^2}+\frac{11}{4^2})+(\frac{6}{4^3}+\frac{17}{4^3})+......$$

لاحظ كل حد

$$4T=5+(\frac{5}{4}+\frac{11}{4^2}+\frac{17}{4^3}+\frac{23}{4^4}+......)+(\frac{6}{4}+\frac{6}{4^2}+\frac{6}{4^3}+.......)$$

$$4T=5+T+6(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+.......)$$

المقدار الأخير عبارة عن متسلسلة هندسية لانهائية

$a=\frac{1}{4},r=\frac{1}{4}<1$

مجموع متسلسلة هندسية لانهائية $s=\frac{a}{1-r}$

$$3T=5+6(\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}})=7\Rightarrow T=\frac{7}{3}$$

$$\therefore\frac{5}{4}+\frac{11}{4^2}+\frac{17}{4^3}+\frac{23}{4^4}+........=\frac{7}{3}$$

١) أوجد قيمة كل من (a,b) التي تحقق $3,a,b$ في تتابع هندسي وَ $a,b,9$ في تتابع حسابي .

٢) متتابعة حسابية فيها الحد $a,$ يساوي b والحد b يساوي $a,$ بحيث $a \neq b$ أوجد قيمة الحد $(a+b)$

٣) إذا كانت الأعداد $\frac{1}{z+y},\frac{1}{x+z},\frac{1}{x+y}$ في تتابع حسابي أثبت أن x^2,y^2,z^2 في تتابع حسابي

٤) إذا كانت a,b,c,d حدوداً متتالية في متتابعة هندسية ، فأثبت أن : $(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2=(a-d)^2$

٥) أثبت أن $1+3+5+.........+(2n-1)=n^2$

٦) ما مجموع الأعداد بين 50 و 350 التي خانة الآحاد بها 1 ؟

٧) لتكن $a_1,a_2,.........,a_{100}$ و $b_1,b_2,.........,b_{100}$ متتابعتين حسابيتين حيث $b_1=75$, $a_1=25$ ،
$a_{100}+b_{100}=1000$ فما مجموع 100 حد من المتتابعة (a_n+b_n) ؟

٨) في متتابعة هندسية حدودها موجبة كل حد يساوي مجموع الحدين التاليين ، ما لنسبة المشتركة ؟

٩) إذا كانت المتتابعة (a_n) كالتالي $a_1=1$ و $a_n=a_{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ حيث $n \geq 2$ أوجد قيمة a_{1000} ؟

١٠) ليكن $x \neq y$ ، x,a_1,a_2,y وَ x,b_1,b_2,b_3,y متتابعتين حسابيتين ، ما هي قيمة $\frac{b_2-b_1}{a_2-a_1}$ ؟

١١) احسب المجموع التالي : $i-i^2+i^3+i^4+i^5-i^6+i^7+i^8+.........+i^{997}-i^{998}+i^{999}+i^{1000}$

١٣) احسب مجموع المتسلسلة التالية $\frac{5}{4}+\frac{8}{4^2}+\frac{11}{4^3}+\frac{14}{4^4}+......$:

١٤) اوجد قيمة المقدار التالي : $2^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{3^2}}\cdot 8^{\frac{1}{3^3}}\cdot 16^{\frac{1}{3^4}}.........$

١٥) اكتب العدد الدوري $x=0.\overline{321}$ على شكل كسر .

١٦) إذا علمت أن $\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+.........$ حيث π هي نسبة محيط الدائرة إلى قطرها ،
فأوجد مجموع المتسلسلة $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+.........$

كثيرات الحدود

كثيرات الحدود

تُعبر كثيرة الحدود من الدرجة $n \geq 0$ على الصورة : $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

حيث $a_n \neq 0$ ، الأعداد الثابتة تسمى $a_0, a_1, ..., a_n$ المعاملات .

فمعامل x^n هو a_n ، ومعامل x^{n-1} هو a_{n-1} ، ....، ومعامل x هو a_1 والحد الثابت أو المطلق هو a_0

حيث a_n يسمى المعامل القائد ، وإذا كان $a_n = 1$ تسمى $f(x)$ كثيرة حدود واحدية

فمثلاً :

$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5$ كثيرة حدود غير واحدية من الدرجة الرابعة ،

بينما $p(x) = x^5 - 5x^4 + 3x^2 - 7$ كثيرة حدود واحدية من الدرجة الخامسة

جمع كثيرات الحدود

إذا كانت $f(x)_1, f(x)_2$ كثيرتي حدود فإن : $f(x)_1 + f(x)_2$ هي كثيرة الحدود التي فيها معاملات القوى المشتركة بين $f(x)_1, f(x)_2$ تساوي مجموع المعاملات المتناظرة في $f(x)_1, f(x)_2$ أما معاملات القوى غير المشتركة بينهما فهي المعاملات نفسها في كل من $f(x)_1, f(x)_2$

مثال :

إذا كانت $p(x) = 3x^5 - 7x^3 + 4x^2 + 3x - 1$ ، $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 2$ أوجد $p(x) + f(x)$

الحل :

$$p(x) + f(x) = (3x^5 - 7x^3 + 4x^2 + 3x - 1) + (2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 2)$$
$$= 3x^5 + 2x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 3x + 1$$

ضرب كثيرات الحدود

إذا كانت $p(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0$, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

$$f(x) \cdot p(x) = (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0)(b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0)$$
$$= a_n x^n (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0) + a_{n-1} x^{n-1}(b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0) + ... +$$
$$a_1 x (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0) + a_0 (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0)$$

كثيرتي حدود من الدرجة n, m على الترتيب فإن

هي كثيرة حدود من الدرجة $m + n$

مثال :

إذا كانت $p(x) = 3x^5 - 7x^3 + 3x - 1$ ، $f(x) = 2x^4 + 1$ أوجد $p(x) \cdot f(x)$

الحل :

$$p(x) \cdot f(x) = (3x^5 - 7x^3 + 3x - 1)(2x^4 + 1)$$
$$= 6x^9 + 3x^5 - 14x^7 - 7x^3 + 6x^5 + 3x - 2x^4 - 1$$
$$= 6x^9 - 14x^7 + 9x^5 - 2x^4 - 7x^3 + 3x - 1$$

قسمة كثيرات الحدود

إذا كانت $f(x), g(x)$ كثيرتي حدود من الدرجة n,m على الترتيب حيث $n \ge m$ ، $g(x) \neq 0$ فإنه عند قسمة $f(x)$ على $g(x)$ توجد كثيرتي حدود وحيدتين $r(x), q(x)$ بحيث : $f(x) = g(x)\cdot q(x) + r(x)$
حيث $r(x)=0$ أو درجة $r(x)$ أقل من درجة $g(x)$ ، تسمى كثيرة الحدود $q(x)$ بخارج القسمة و $r(x)$ بالباقي ،
وإذا كان $r(x)=0$ فإننا نقول أن $g(x)$ تقسم $f(x)$ أو $g(x)$ عامل من عوامل $f(x)$ وتكتب على الصورة :

$$f(x) = g(x)\cdot q(x)$$

مثال : اوجد خارج القسمة والباقي عند قسمة $f(x)$ على $g(x)$ حيث : $g(x) = x+1$, $f(x) = x^3+3x^2+x-4$

نلاحظ أن $\deg(f) > \deg(g)$ بإجراء طريقة مشابهة للقسمة المطولة على حقل الأعداد الحقيقية :

نقسم الحد الأول من المقسوم على الحد الأول من المقسوم عليه (نطرح الأسس) $x^3 \div x = x^2$ ونكتب الناتج في مكان خارج القسمة	x^2 $x+1 \;\big)\; x^3+3x^2+x-4$
نضرب خارج القسمة (x^2) في المقسوم علية $(x+1)$ ونكتب حاصل $x^2(x+1) = x^3+x^2$ الضرب تحت المقسوم	x^2 $x+1 \;\big)\; x^3+3x^2+x-4$ x^3+x^2
نطرح حاصل الضرب السابق من المقسوم ونكتب الناتج	x^2 $x+1 \;\big)\; x^3-3x^2+x-4$ x^3+x^2 $2x^2+x-4$
نقسم الحد الأول من ناتج الطرح على الحد الأول من المقسوم عليه $2x^2 \div x = 2x$ ثم نضرب ($2x$) في المقسوم عليه نطرح حاصل الضرب السابق من الذي قبله ونكتب الناتج نقسم الحد الأول من ناتج الطرح على الحد الأول من المقسوم عليه $-x \div x = -1$ ثم نضرب (-1) في المقسوم عليه نطرح حاصل الضرب السابق من الذي قبله ونكتب الناتج حتى يكون ناتج درجة الباقي اقل من درجة المقسوم عليه	خارج القسمة $q(x) \longrightarrow x^2+2x-1$ $x+1 \;\big)\; x^3+3x^2+x-4$ x^3+x^2 $2x^2+x-4$ $2x^2+2x$ $-x-4$ $-x-1$ الباقي $r(x) \longrightarrow -3$

من القسمة نجد أن:

خارج القسمة $q(x) = x^2+2x-1$ ، الباقي $r(x) = -3$

ملاحظة

خطوات القسمة المطولة لكثيرات الحدود :

١) نرتب المقسوم والمقسوم عليه ترتيباً تنازلياً طبقاً للأسس

٢) نقسم الحد الأول من المقسوم على الحد الأول من المقسوم عليه ونكتب الناتج في مكان خارج القسمة

٣) نضرب خارج القسمة في المقسوم عليه ونكتب الناتج تحت المقسوم مع مراعاة ترتيب الحدود

٤) نطرح حاصل الضرب السابق من المقسوم (نغير إشارته ونجمعها جمعاً جبرياً)

٥) نكرر الخطوات السابقة إلى أن تصبح درجة باقي القسمة اقل من درجة المقسوم عليه

مثال (٢)

اوجد خارج قسمة وباقي $f(x)=x^4+5x^3+3x^2+10x+2$ **على** $g(x)=x^2+2$

الحل :

خارج القسمة $q(x) \rightarrow x^2+5x+1$

$$x^2+2 \,\overline{\big)\, x^4+5x^3+3x^2+10x+2}$$
$$x^4+2x^2$$
$$\overline{5x^3+x^2+10x+2}$$
$$5x^3+10x$$
$$\overline{x^2+2}$$
$$x^2+2$$
$$\overline{0}$$

الباقي $r(x) \rightarrow 0$

من القسمة نجد أن:

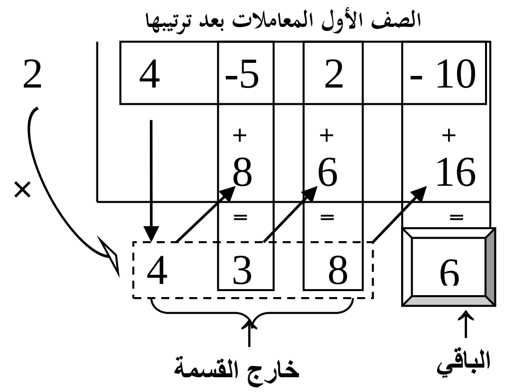
خارج القسمة $q(x)=x^2+5x+1$ ، الباقي $r(x)=0$ ، $\therefore$ $f(x)$ تقبل القسمة $g(x)$

$f(x)=g(x)\cdot q(x) \Rightarrow f(x)=(x^2+2)(x^2+5x+1)$ يمكن كتابة $f(x)$ على الصورة :

قسمة كثيرات الحدود بالطريقة التركيبية طريقة (هونر)

طريقة مبسطة لقسمة كثيرة حدود $f(x)$ من الدرجة n على $g(x)=x-a$ نوضحها بالمثال التالي :

مثال : أوجدي خارج القسمة والباقي عند قسمة $f(x)=4x^3-5x^2+2x-10$ على $g(x)=x-2$



خارج القسمة $p(x)=4x^2+3x+8$

باقي القسمة $r(x)=6$

١) الصف الأول من قسمين الأول نضع جذر $g(x)=x-2$ وجذرها يساوي 2 القسم الثاني من الصف الأول نرتب فيه المعاملات ابتداء من الدرجة الكبرى إلى الصغرى مع ملاحظة أي حد غير موجود معامله يساوي صفر .

٢) أول معامل دائما لـ $f(x)$ ننزله للصف الثالث ثم نضربه في جذر $g(x)$ وهو 2 فيكون الناتج 8 ونضعه أسفل المعامل الثاني وهو -5 ثم نجمع 3 = 8+5- ونضعه في الصف الثالث .

ثم نكرر نفس العملية فنضرب 6=3 ×2 ونضعه تحت المعامل الثالث وهو 2 فنجمع 8=2+6 ونضعه في الصف الثالث

أيضا نفس العملية فنضرب 16= 8×2 ونضعها أسفل 10-

في الصف الثاني فنجمع 6=16+10- ونضعها في الصف الثالث وبالتالي انتهت العملية

<u>الآن</u> : الصف الثالث يتكون من قسمين القيمة الأخيرة 6 تمثل الباقي وبقية القيم تمثل معاملات خارج القسمة

حيث خارج القسمة تقل درجته عن المقسوم بواحد ويتم توزيع المعاملات تنازلياً وهي :4,3,8 أول قيمة معامل x^2 وهي 4 ثاني قيمة معامل x وهي 3 وثالث قيمة الحد الثابت

مثال (٢)

أوجد خارج القسمة والباقي عند قسمة $f(x)$ **على** $g(x)$

١) $f(x)=3x^3+4x+5 \quad , \quad g(x)=x+3$ ، ٢) $f(x)=x^4-x^2-x-10 \quad , \quad g(x)=x-2$

الحل :

١) $f(x)=3x^3+4x+5 \quad , \quad g(x)=x+3$

يمكن كتابة $f(x)$ على الصورة : $f(x)=3x^3+0(x^2)+4x+5$

$\therefore$ معاملات $f(x)$: $3 \ , 0 \ , \ 4 \ , 5$

$g(x)=x+3 \Rightarrow g(x)=0 \Rightarrow x+3=0 \Rightarrow x=-3$

$\therefore$ جذر $g(x)$: -3

$\therefore$ خارج القسمة : $p(x)=3x^2-9x+31$

$\therefore$ الباقي : $r(x)=-88$

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 3 & 0 & 4 & 5 \\ \times & & -9 & 27 & -93 \\ \hline & 3 & -9 & 31 & -88 \end{array}$$

خارج القسمة: $3 \quad -9 \quad 31$ — الباقي: -88

٢) $f(x)=x^4-x^2-x-10 \quad , \quad g(x)=x-2$

يمكن كتابة $f(x)$ على الصورة : $f(x)=x^4+0(x^3)-x^2-x-10$

$\therefore$ معاملات $f(x)$: $1 \ , 0 \ , -1 \ , -1 \ , -10$

$g(x)=x-2 \Rightarrow g(x)=0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$

$\therefore$ **جذر** $g(x)$: 2

$\therefore$ خارج القسمة : $p(x)=x^3+2x^2+3x+5$

$\therefore$ الباقي : $r(x)=0$

أي أن $f(x)$ تقبل القسمة على $g(x)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 0 & -1 & -1 & -10 \\ \times & & 2 & 4 & 6 & 10 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{array}$$

خارج القسمة: $1 \quad 2 \quad 3 \quad 5$ — الباقي: 0

نظرية الباقي

عند قسمة كثيرة حدود $f(x)$ **على** $g(x)=x-a$ **حيث** $a \in \mathbb{R}$ **فإن باقي القسمة** $r(x)$ **هو دالة ثابتة وقيمتها تساوي** $f(a)$ **وهي قيمة** $f(x)$ عند $x=a$

فمثلاً :

باقي قسمة $f(x)=x^3-5x+8$ **على** $g(x)=x-2$ **هو** $f(2)=(2)^3-5(2)+8=6$

نظرية العوامل

تكون كثيرة الحدود $f(x)$ تقبل القسمة على $g(x)=x-a$ حيث $a \in \mathbb{R}$ إذا كان باقي القسمة 0 $f(a)=0$

فمثلاً :

الدالة $f(x)=x^3+4x^2-9$ **تقبل القسمة على** $g(x)=x+3$ **لأن باقي القسمة** $0=9-$ $f(-3)=(-3)^3+4(-3)^2-9=0$

النظرية الاساسية فى الجبر

تنص النظرية الأساسية للجبر على وجود جذر لكل كثيرة حدود ، ويمكن البرهنة على أن كثيرة حدود من الدرجة n لها على الأكثر n من الجذور المختلفة .

فمثلاً : $f(x) = x^5 + 3x - 2$ ، $f(x) = 7x^4 + 2x^2 - 3x + 6$ ، $f(x) = -4x^3 + 3x^2 + 5$

لها 5 جذور — لها 4 جذور — لها 3 جذور

ملاحظة

١) **يقال أن** a **هو (صفر أو جذر) لكثيرة الحدود** $f(x)$ **إذا كان** $f(a)=0$ ، **وتكون** $f(x)$ **تقبل القسمة على** $(x - a)$

أي أن a **لكثيرة الحدود** $f(x)$ $\left\{\begin{array}{l} f(a)=0 \\ f(x) \text{ تقبل القسمة على } (x-a) \end{array}\right.$

فمثلاً : جذري كثيرة الحدود $f(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ **هما** $2,3$ **وذلك لأن :**

$f(2) = 2^2 - 5(2) + 6 = 0$ **والدالة** $f(x)$ **تقبل القسمة على** $(x-2)$

$f(3) = 3^2 - 5(3) + 6 = 0$ **والدالة** $f(x)$ **تقبل القسمة على** $(x-3)$

٢) **يسمى** a **جذر بسيطاً لكثيرة الحدود** $f(x)$ **إذا كان** $f(x)$ **تقبل القسمة على** $(x - a)$ **ولا تقبل القسمة على** $(x - a)^2$

فمثلاً : في المثال السابق 2 **جذر بسيطاً لكثيرة الحدود** $f(x)$ **وكذلك** 3 **جذر بسيطاً لكثيرة الحدود** $f(x)$

٢) **يسمى** a **جذر مكرر مرتين لكثيرة الحدود** $f(x)$ **إذا كان** $f(x)$ **تقبل القسمة على** $(x - a)^2$ **ولا تقبل القسمة على** $(x - a)^3$

فمثلاً : $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4 = (x+2)(x+2)(x-1) = (x+2)^2(x-1)$

(-2) **جذر مكرر مرتين للدالة** $f(x)$ **بينما** 1 **جذر بسيط**

٤) **يسمى** a **جذر مكرر** n **مرة إذا كانت** $f(x)$ **تقبل القسمة على** $(x - a)^n$ **ولا تقبل القسمة على** $(x - a)^{n+1}$

٥) **إذا كانت** $a, b, c, d, \ldots r$ **جذور لكثيرة الحدود فإنه** $f(x)$ **تقبل القسمة على** $(x- a)(x - b)(x - c)(x - d)\ldots(x - r)$

ويمكن كتابه $f(x)$ **على الصورة** $f(x)= a_n (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)\ldots(x - r)$

فمثلاً : $1,2,-2$ **جذور لكثيرة الحدود** $f(x)$ **فإن** $f(x)$ **تقبل القسمة على** $(x - 1)(x - 2)(x + 2)$

٦) **إذا كانت** $f(x)$ **(دالة كثيرة الحدود الحقيقية) وكان** $(a + i b)$ **جذر لكثيرة الحدود** $f(x)$ **فإن مرافقه** $(a - i b)$ **هو جذر لكثيرة الحدود أي أن** $f(x)$ **تقبل القسمة على** $(x - (a + i b))$ **وكذلك** $(x - (a - i b))$

فمثلاً : في دالة كثيرة الحدود $f(x) = x^3 - 5x^2 + 17x - 13$ **نجد لها جذر حقيقي وهو** (1) **وجذرين مركبين مترافقين هما :** $2 + 3i$ و $2 - 3i$

نظرية الجذر النسبي :

إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_1 x + a_0$ **دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد صحيحة ،**

فإن أي صفر نسبي للدالة $f(x)$ **سيكون على صورة العدد النسبي** $\dfrac{p}{q}$ **في أبسط صورة حيث** p **أحد عوامل الحد الثابت ،** q **أحد عوامل المعامل الرئيسي**

فمثلاً : العدد النسبي $\dfrac{3}{2}$ **جذر للدالة** $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 17x + 12$ **حيث** 3 **أحد عوامل العدد** 12 ، 2 **أحد عوامل العدد** 2

نظرية الجذر الصحيح :

إذا كانت $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+.........+a_1x+a_0$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد صحيحة ، والمعامل الرئيسي يساوي 1 ، وحدها الثابت لا يساوي صفراً ، فإن أي صفر للدالة $f(x)$ يجب أن يكون أحد عوامل الحد الثابت .

فمثلاً : العددين 3 ,- 2 جذري الدالة $f(x)=x^2-x-6$ وهما من عوامل الحد الثابت 6

قاعدة دبكار ت للاشار ات :

إذا كانت $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.........+a_1x+a_0$ كثيرة حدود ذات معاملات حقيقية فإن :

- عدد الأصفار الحقيقية الموجبة لـ $P(x)$ سيكون أما مساويا لعدد التغيرات في إشارة $P(x)$ أو أقل من ذلك بعدد زوجي
- عدد الأصفار الحقيقية السالبة لـ $P(x)$ سيكون إما مساويا لعدد التغيرات في إشارة $P(-x)$ أو اقل من ذلك بعدد زوجي

عدد تغيرات الإشارة

فمثلاً : كثيرة الحدود $P(x)=x^5+4x^4-x^3-2x^2+3x-1$ لها 3 أو 1 جذر ر حقيقي موجب

عدد تغيرات الإشارة

وكذلك نجد أن $P(-x)=-x^5+4x^4+x^3-2x^2-3x-1$ فان لها إما 2 أو 0 صفر حقيقي سالب.

ملاحظة

من الحقائق الهامة عن كثيرة الحدود $P(x)$:

- $P(0)$ هو الحد الثابت في $P(x)$: $P(0)=a_n.0^n+...+a_1.0+a_0=a_0$
- $P(1)$ هو مجموع معاملات $P(x)$: $P(1)=a_n+...+a_1+a_0$

بعض طرق إيجاد جذور الدالة

أ) كثيرة الحدود من الدرجة الأولى $f(x)=ax+b$ نضع $f(x)=0$ ومنها نوجد قيمة x التي تمثل الجذر الوحيد للدالة

ب) كثيرة الحدود من الدرجة الثانية $f(x)=ax^2+bx+c$ يمكن الحصول على جذريها بالتحليل أو بالقانون العام

ويمكن إيجاد قيمة x باستخدام القانون العام التالي : $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ حيث $a\neq 0$ فإذا كان :

المميز : $\Delta=b^2-4ac>0$ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

المميز : $\Delta=b^2-4ac=0$ للمعادلة جذران حقيقيان متساويان

المميز : $\Delta=b^2-4ac<0$ للمعادلة جذران مركبان مترافقان

ج) بعض كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة يمكن حلها بالطريقة التالية :

نوجد قواسم (عوامل) الحد المطلق (الحد الثابت) للدالة $f(x)$

- ❖ نعوض بكل من هذه القواسم في الدالة ، والقاسم الذي يجعل الدالة $f(x)$ تساوي صفر هو جذر الدالة وليكن a
- ❖ وبالتالي يكون (x- a) قاسم من قواسم الدالة $f(x)$
- ❖ نقسم الدالة $f(x)$ على ذلك القاسم باستخدام القسمة التركيبية فيكون خارج القسمة دالة من الدرجة الثانية وهو قاسماً للدالة $f(x)$
- ❖ نوجد قواسم خارج القسمة باستخدام التحليل أو القانون العام لإيجاد جذريها فيكون هما أيضا جذور الدالة $f(x)$

مثال :

اوجد جذور $f(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$

الحل :

الحد الثابت : 8

قواسم الحد الثابت (عوامل الحد الثابت) : $\pm 1 , \pm 2, \pm 4, \pm 8$

نحاول بالتجربة نوجد $f(\pm 1), f(\pm 2), f(\pm 8)$ لإيجاد احد جذور الدالة

نوجد $f(1)$: $f(1) = 1^3 + 1^2 - 10(1) + 8 = 0$

$\therefore$ العدد 1 جذر لكثيرة الحدود $f(x)$ وبالتالي $f(x)$ تقبل القسمة على $x - 1$

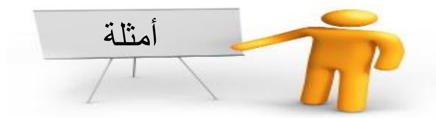
نوجد القواسم الأخرى للدالة $f(x)$ وذلك بقسمة $f(x)$ على $x - 1$ باستخدام القسمة التركيبية

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 1 & -10 & 8 \\ & & 1 & 2 & -8 \\ \hline & 1 & 2 & -8 & 0 \end{array}$$

من القسمة نجد أن : خارج القسمة $q(x) = x^2 + 2x - 8$

$\therefore f(x) = (x-1)(x^2+2x-8) = (x-1)(x-2)(x+4)$

$\therefore$ جذور $f(x)$: $1 , 2 , -4$



(١)عند قسمة كثيرة الحدود $f(x)$ على $(2x - 4)$ يكون الباقي 7 وعند قسمته على $(3x - 7)$ يكون الباقي 11

أوجد باقي قسمة $f(x)$ على $(3x - 7)(2x - 4)$

الحل :

$\because$ باقي قسمة $f(x)$ على $(2x - 4)$ يكون الباقي 7 $\therefore$من نظرية الباقي $f(2) = 7$ ...... (١)

$\because$ باقي قسمة $f(x)$ على $(3x - 7)$ يكون الباقي 11 $\therefore$من نظرية الباقي $f(\frac{7}{3}) = 11$ ...... (٢)

المطلوب باقي قسمة $f(x)$ على $(3x - 7)(2x - 4)$ ؟؟؟؟

نلاحظ باقي القسمة لابد أن يكون أقل من درجة المقسوم عليه أي أن اقل من الدرجة الثانية

$\therefore$ لابد أن يكون من الدرجة الأولى أو عدد ثابت وليكن $r(x) = ax + b$

ومن المعروف يمكن كتابة أي كثيرة حدود بدلالة المقسوم عليه $g(x)$ وخارج القسمة $q(x)$ والباقي $r(x)$ على الصورة :

$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$ أي أن $f(x) = (2x-4)(3x-7)q(x) + ax + b$

من المعادلتين (١) وَ (٢)

$$f(2) = (2(2)-4)(3(2)-7)\cdot q(2) + a(2) + b \Rightarrow f(2) = 2a + b \overset{f(2)=7}{\Rightarrow} 2a + b = 7$$

$$f\left(\frac{7}{3}\right) = \left(2\left(\frac{7}{3}\right)-4\right)\left(3\left(\frac{7}{3}\right)-7\right)\cdot q\left(\frac{7}{3}\right) + a\left(\frac{7}{3}\right) + b \Rightarrow f\left(\frac{7}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}\right)a + b \overset{f\left(\frac{7}{3}\right)=11}{\Rightarrow} \frac{7}{3}a + b = 11 \Rightarrow 7a + 3b = 33$$

بحل النظام : $2a+b=7$ ، $7a+3b=33$

$$\begin{cases} -6a+-3b=-21 \\ 7a+3b=33 \end{cases} \Rightarrow a=12 \quad ,24+b=7 \Rightarrow b=-17$$

$\therefore$ الباقي $r(x)=12x-17$

(٢) إذا كانت المتطابقة $(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+........+a_{2n}x^{2n}$ في x ،

أوجد المجموع $a_0+a_2+a_4+........+a_{2n}$ بدلالة في n

الحل :

من المعطيات : $(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+........+a_{2n}x^{2n}$

بوضع $x=1$:

$(1+1+1^2)^n=a_0+a_1(1)+a_2(1)^2+a_3(1)^3........+a_{2n}(1)^{2n} \Rightarrow 3^n=a_0+a_1+a_2+a_3+........+a_{2n}$ ...... (١)

بوضع $x=-1$:

$(1-1+(-1)^2)^n=a_0+a_1(-1)+a_2(-1)^2+a_3(1)^3+........+a_{2n}(-1)^{2n} \Rightarrow 1=a_0-a_1+a_2-a_3........+a_{2n}$ ...... (٢)

بجمع المعادلتين (١) وَ (٢)

$$3^n+1=2(a_0+a_2+a_4+........+a_{2n}) \Rightarrow a_0+a_2+a_4+........+a_{2n}=\frac{3^n+1}{2}$$

(٣) احسب $(2-r)(2-s)(2-t)$ بحيث r,s,t جذور لكثيرة الحدود $f(x)=2x^3-4x^2+3x-9$

الحل :

$\because$ r,s,t جذور للدالة $f(x)=2x^3-4x^2+3x-9$

$\therefore$ يمكن كتابة الدالة $f(x)$ على الصورة : $f(x)=2(x-r)(x-s)(x-t)$

بوضع $x=2$:

$f(2)=2(2-r)(2-s)(2-t)$ ولكن $f(2)=2(2)^3-4(2)^2+3(2)-9=-3$

$\therefore$ $-3=2(2-r)(2-s)(2-t)$ وبالتالي : $(2-r)(2-s)(2-t)=\frac{-3}{2}$

(٤) أوجد قيمة a الصحيحة بحيث يكون لكثيرة الحدود $1988x^2+ax+8891=0$ ، $8891x^2+ax+1988=0$ جذر مشترك

الحل :

$1988x^2+ax+8891=0.......(1)$

$8891x^2+ax+1988=0.......(2)$

بطرح المعادلتين

$$(1988-8891)x^2+(8891-1988)=0 \Rightarrow -(8891-1988)x^2=-(8891-1988)$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{-(8891-1988)}{-(8891-1988)}=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

بالتعويض $x=1$ في المعادلة (1) $1988+a+8891=0 \Rightarrow a=-10879$

١) حلل المقادير التالية :

أ) $X^{3}-19X-30$

ب) $X^{3}+9X^{2}+26X+24$

ج) $X^{4}-10X^{3}+35X^{2}-50X+24$

٢) أوجد كثيرة الحدود $P(x)$ ومن الدرجة الرابعة ولها الجذور ± 3 , $\pm\sqrt{5}$ ومعاملها القائد 7 .

٣) إذا كان $P(x)$ كثيرة حدود في x حيث :

$x^{23}+23x^{17}-18x^{16}-24x^{15}+108x^{14}=(x^{4}-3x^{2}-2x+9)\cdot P(x)$ أوجد مجموع معاملات $p(x)$

٤) إذا كانت $(3x-1)^{7}=a_7x^{7}+a_6x^{6}+...+a_1x+a_0$ أوجد قيمة $a_7+a_6+...+a_1+a_0$

٥) إذا كان $ax^{3}+bx^{2}+cx+d=\left(x^{2}+2x-8\right)\left(x-3\right)-\left(x-2\right)\left(x^{2}+5x+4\right)$ ، أوجد $a+b+c+d$.

٦) أوجد مجموع المعاملات لكثيرة الحدود التالية : $p(x)=\left(1-3x+3x^{2}\right)^{10}\left(1+3x-3x^{2}\right)^{11}$

٧) عند قسمة كثيرة الحدود $f(x)$ على $(x-19)$ يكون الباقي 99 وعند قسمته على $(x-99)$ يكون الباقي 19
أوجد باقي قسمة $f(x)$ على $(x-19)(x-99)$

٨) إذا كانت $x^{4}+4x^{3}+6px^{2}+4qx+r$ تقبل القسمة بدون باقي على $x^{3}+3x^{2}+9x+3$ فما قيمة $(p+q)r$ ؟

٩) حل المعادلة التالية : $2^{6x}+2^{3x}+5=11$

١٠)إذا كانت $f(x)=ax^{7}+bx^{5}+cx^{3}+dx-5$ وَ $f(2)=-2$ فاوجد $f(-2)$

١١)إذا كانت r حلاً للمعادلة $x^{6}-2=0$ فأوجد قيمة $(r-1)(r^{12}+r^{13}+.......+r^{41})$

١٢) أثبت أن العدد 1 جذر مكرر مرتين لكثيرة الحدود $f(x)=x^{n}-n(x-1)-1$

علاقات فيتا

هي العلاقة التي تربط بين جذور كثيرة الحدود $f(x)$ ومعاملاتها حيث يقابل المعامل مجموع متماثل لجذور كثيرة الحدود . وفي البداية سوف نناقش حالات خاصة لها ثم نستنتج منها الصورة العامة

١) علاقة فيتا لكثيرة حدود من الدرجة الثانية :

إذا كانت r_1 , r_2 جذري كثيرة الحدود : $f(x) = \boxed{ax^2 + bx + c}$ ......(1) فإنه يمكن كتابة $f(x)$ على الصورة :

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2) = ax^2 - axr_1 - axr_2 + ar_1r_2 = \boxed{ax^2 - a(r_1 + r_2)x + ar_1r_2} ......(2)$$

وبمقارنة المعاملات في المعادلتين (2) وَ (1) نجد أن :

$$-a(r_1 + r_2) = b \Rightarrow r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$$ حاصل جمع الجذرين

$$ar_1r_2 = c \Rightarrow r_1r_2 = \frac{c}{a}$$ حاصل ضرب الجذرين

فمثلاً :

$2 , 3$ جذري كثيرة الحدود $f(x) = (x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$ نلاحظ :

حاصل جمع الجذرين $2 + 3 = -(-5) = 5$ ، حاصل ضرب الجذرين $2 \cdot 3 = 6$

٢) علاقة فيتا لكثيرة حدود من الدرجة الثالثة :

إذا كانت r_1 , r_2 , r_3 جذور كثيرة الحدود : $f(x) = \boxed{ax^3 + bx^2 + cx + d}$ ......(1) فإنه يمكن كتابة $f(x)$ على الصورة :

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = \boxed{ax^3 - a(r_1 + r_2 + r_3)x^2 + a(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)x - ar_1r_2r_3} ...(2)$$

وبمقارنة المعاملات في المعادلتين (2) وَ (1) نجد أن :

$$-a(r_1 + r_2 + r_3) = b \Rightarrow r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a}$$

$$a(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3) = c \Rightarrow r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \frac{c}{a}$$ حاصل جمع الجذور مثنى مثنى

$$-ar_1r_2r_3 = d \Rightarrow r_1r_2r_3 = -\frac{d}{a}$$ حاصل ضرب الجذور

فمثلاً :

$1, 2, 3$ جذور كثيرة الحدود $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ نلاحظ :

حاصل جمع الجذور $1+2+3 = -(-6) = 6$ ، حاصل جمع الجذور مثنى مثنى $1\cdot2+1\cdot3+2\cdot3 = 6$

حاصل ضرب الجذرين $1\cdot2\cdot3 = -(-6) = 6$

وبصورة عامة ....

٣)علاقة فيتا لكثيرة حدود من الدرجة n:

لتكن $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ جذور كثيرة الحدود : $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$

فإنه يمكن كتابة $f(x)$ على الصورة :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0 = a_n (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\ldots(x - r_n)$$

$$= a_n x^n - a_n (r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n) x^{n-1} + a_n (r_1 r_2 + r_1 r_3 + \ldots + r_{n-1} r_n) x^{n-2} + \ldots + (-1)^n a_n r_1 r_2 r_3 \ldots r_n$$

وبمقارنة المعاملات نجد أن :

حاصل جمع الجذور
$$r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

حاصل جمع الجذور مثنى مثنى
$$r_1 r_2 + r_1 r_2 + \ldots + r_{n-1} r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

حاصل جمع الجذور ثلاثة ثلاثة
$$r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \ldots + r_{n-2} r_{n-1} r_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

وهكذا ....

$$\ldots\ldots\ldots$$

حاصل ضرب الجذور
$$r_1 r_2 \ldots\ldots r_{n-1} r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

يمكن كتابة هذه العلاقات على الصورة :
$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_K \le n}^{n} r_{i_1} r_{i_2} \ldots\ldots r_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

مجموع مقلوبات جذور كثيرة الحدود

إذا كانت كثيرة الحدود $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$ من الدرجة n لها الجذور $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$

فإن كثيرة الحدود $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n$ لها الجذور : $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \frac{1}{r_3}, \ldots, \frac{1}{r_n}$

فمثلاً :

$2, 3$ جذري كثيرة الحدود $f(x) = (x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$

فإن $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ جذري كثيرة الحدود $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 6x - 5x + 1$

(١) إذا كان a,b جذور لكثيرة الحدود $2x^2-3x+m=0$ وكان $a=2b$ أوجد قيمة m

الحل :

$$2x^2-3x+m=0 \overset{\text{بالقسمة على 2}}{\Longrightarrow} x^2-\frac{3}{2}x+\frac{m}{2}=0$$

حاصل جمع الجذرين $a+b=\dfrac{3}{2} \overset{a=2b}{\Longrightarrow} 2b+b=\dfrac{3}{2} \Rightarrow 3b=\dfrac{3}{2} \Rightarrow b=\dfrac{1}{2}$

$$\therefore\ a=2b \overset{a=2b}{\Longrightarrow} a=2\left(\frac{1}{2}\right)=1$$

حاصل ضرب الجذرين $\therefore\ ab=\dfrac{m}{2} \overset{a=1,\,b=\frac{1}{2}}{\Longrightarrow} 1\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{m}{2} \Rightarrow m=1$

(٢) إذا كان $f(x)=x^3-5x^2+12x-19$ بحيث a,b,c جذور $f(x)$ أوجد قيمة :

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\quad,\quad a^2+b^2+c^2$$

الحل :

$$\because f(x)=x^3-5x^2+12x-19 \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=5 & .....(1)\\ ab+ac+cb=12 & .....(2)\\ abc=19 & .....(3)\end{cases}$$

$$\underset{\uparrow\atop c}{\frac{1}{ab}}+\underset{\uparrow\atop a}{\frac{1}{bc}}+\underset{\uparrow\atop b}{\frac{1}{ca}}=\frac{c}{abc}+\frac{a}{abc}+\frac{b}{abc}=\frac{a+b+c}{abc}$$

نوحد المقامات

$$\therefore\quad \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{5}{19}$$

(٣) إذا كان حاصل ضرب ثلاثة جذور لكثيرة الحدود $f(x)=x^4-9x^3+21x^2+x-30$ يساوي -10 فما هو الجذر الرابع ؟

الحل :

لنفرض الجذور هي a,b,c,d حيث $a\cdot b\cdot c=-10$ من علاقة فيتا

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$$

$$\therefore (5)^2=a^2+b^2+c^2+2(12) \Rightarrow a^2+b^2+c^2=25-24=1$$

$$a \cdot b \cdot c \cdot d = -30 \xRightarrow{a \cdot b \cdot c = -10} -10d = -30 \Rightarrow d = 3$$

٤) أوجد حل المعادلة $27x^3 + 42x^2 - 28x - 8 = 0$ التي جذورها متتابعة هندسية

الحل :

$$27x^3 + 42x^2 - 28x - 8 = 0 \Rightarrow x^3 + \frac{42}{27}x^2 - \frac{28}{27}x - \frac{8}{27} = 0$$

لنفرض أن جذور المعادلة الثلاثة على الصورة : $ar \quad , \quad a \quad , \quad \frac{a}{r}$

$$\because x^3 + \frac{42}{27}x^2 - \frac{28}{27}x - \frac{8}{27} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{r} + a + ar = -\frac{42}{27} & .....(1) \\ \frac{a}{r} \cdot a + \frac{a}{r} \cdot ar + a \cdot ar = \frac{a^2}{r} + a^2 + a^2 r = -\frac{28}{27} & .....(2) \\ \frac{a}{r} \cdot a \cdot ar = a^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow a = \frac{2}{3} & .....(3) \end{cases}$$

المعادلة $\frac{a}{r} + a + ar = -\frac{42}{27} \xRightarrow{a = \frac{2}{3}} \frac{2}{3r} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}r = -\frac{14}{9}$

(1) نجد أن :

بالضرب في $\frac{9r}{2}$ والاختصار

$$\frac{9r}{2} \cdot \frac{2}{3r} + \frac{9r}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{9r}{2} \cdot \frac{2}{3}r = -\frac{9r}{2} \cdot \frac{14}{9} \Rightarrow 3 + 3r + 3r^2 = -7r$$

$$3r^2 + 10r + 3 = 0 \Rightarrow (3r+1)(r+3) = 0$$

$$3r + 1 = 0 \Rightarrow r = -\frac{1}{3}$$

$$r + 3 = 0 \Rightarrow r = -3$$

أما $3r + 1 = 0 \Rightarrow r = -\frac{1}{3}$ أو

$r + 3 = 0 \Rightarrow r = -3$

عندما $a = \frac{2}{3}, r = -\frac{1}{3}$ جذور المعادلة $ar \quad , \quad a \quad , \quad \frac{a}{r}$ على الصورة

: $-\frac{2}{9} \quad , \quad \frac{2}{3} \quad , \quad -2$

عندما $a = \frac{2}{3}, r = -3$ جذور المعادلة $ar \quad , \quad a \quad , \quad \frac{a}{r}$ على الصورة : $-2 \quad , \quad \frac{2}{3} \quad , \quad -\frac{2}{9}$

أي أن جذور المعادلة هي : $-\frac{2}{9} \quad , \quad \frac{2}{3} \quad , \quad -2$

١) أوجد حاصل ضرب الجذور لكثيرة الحدود : $50x^{50}+49x^{49}+\ldots+x+1=0$

٢) إذا كان $a\,,b$ هما جذرا المعادلة $x^2-5x+9=0$ فما قيمة $(a-1)(b-1)$ ؟

٣) أوجدي حل المعادلة $x^3-6x^2+11x-6=0$ التي جذورها متتابعة حسابية

٤) اوجد كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة التي جذورها الأعداد a,b,c حيث :

$$abc=-64$$
$$a^2+b^2+c^2=84$$
$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{-3}{32}$$

٥) إذا كانت الأعداد (α,β,γ) جذور للمعادلة : $x^3+3x^2-24x+1=0$ فأثبت أن : $\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\gamma}=0$

٦) أوجد مجموع مقلوبات جذور المعادلة $x^2+1+\dfrac{1}{x}=0$

٧) إذا كان a,b هما جذرا المعادلة $x^2+3x+1=0$ احسب $\left(\dfrac{a}{b+1}\right)^2+\left(\dfrac{b}{a+1}\right)^2$

٨) إذا كانت a,b,c جذور المعادلة $x^3-x-1=0$ احسب : $\dfrac{1-a}{1+a}+\dfrac{1-b}{1+b}+\dfrac{1-c}{1+c}$

٩) إذا كانت p,q,r جذور $f(x)=x^3-x^2+x-2$ أوجد $p^3+q^3+r^3$

١٠) إذا كانت r,s,t جذور للمعادلة $x^3-6x^2+5x-7=0$ أوجد $\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{1}{t^2}$

١١) أوجد مجموع جذور كثيرة الحدود $(2x+3)(x+4)+(2x+5)(x-6)$

المتباينات

خصائص أساسية للمتباينات

إذا كانت a,b,c,d أعداداً حقيقية فإن

١) $a > b,\quad b > c \quad \Rightarrow a > c$

٢) $a > b \Rightarrow \quad a \pm c > b \pm c$

٣) $a > b \quad , \quad c > d \quad \Rightarrow a + c > b + c$

٤) $a > b \quad , \quad c > 0 \quad \Rightarrow ac > bc$

٥) $a > b \quad , \quad c < 0 \quad \Rightarrow ac < bc$

٦) $ab > 0 \quad , \quad a > b \quad \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

٧) $ab < 0 \quad , \quad a > b \quad \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

٨) $a > b \Rightarrow a - b > 0$

خصائص اخرى للمتابينات

١) إذا $a > b > 0$ فإن $a^2 > b^2$ وبصورة عامة فإنه لأي عدد حقيقي n : $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n$

٢) إذا $a > b > 0$ حيث $n > 1$ فإن $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

٣) إذا كان $a > 1$ ، $n > m$ فإن $a^n > b^m$

ومنه نجد أن إذا كان $a > 1$ فإن $a > \sqrt{a}$

٤) إذا كان $0 < a < 1$ ، $n > m$ فإن $a^n < b^m$

ومنه نجد أن إذا كان $0 < a < 1$ فإن $\sqrt{a} > a$

متباينات مجموع المربعات

لكل عدد حقيقي a فإنه $a^2 \geq 0$ وبصورة عامة إذا كانت $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ أعداد حقيقية فإن :

$$a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2} + \ldots\ldots + a_n^{\,2} \geq 0$$

متباينات الأوساط

إذا كانت $a_1, a_2\ , a_3, ..., a_n > 0$ أعداد حقيقية موجبة فإن:

١) **الوسط الحسابي : AM** لهذه الأعداد هو حاصل جمعها مقسوماً على عددها n أي أن :

$$AM = \frac{a_1 + a_2\ + a_3 + ... + a_n}{n}$$

٢) **الوسط الهندسي : GM** لهذه الأعداد هو الجذر النوني لحاصل ضرب هذه الأعداد أي أن :

$$GM = \sqrt[n]{a_1 a_2\ a_3 ..... a_n}$$

٣) **الوسط التوافقي : HM** لهذه الأعداد هو مقلوب الوسط الحسابي لمقلوبات هذه القيم أي أن :

$$HM = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{an}}$$

٤) **الوسط التربيعي : QM** لهذه الأعداد هو الجذر التربيعي للوسط الحسابي لمربعات هذه القيم أي أن :

$$QM = \sqrt{\frac{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 + ... + a_n{}^2}{n}}$$

متباينة الوسط الحسابي – الوسط الهندسي AM-GM

إذا كانت $a_1, a_2\ , a_3, ..., a_n > 0$ **فإن** :

$$\frac{a_1 + a_2\ + a_3 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2\ a_3 ..... a_n}$$

وتتحقق المساواة إذا وإذا فقط إذا كان $a_1 = a_2\ = a_3 = ... = a_n$

متباينة الوسط الهندسي – الوسط التوافقي GM-HM

إذا كانت $a_1, a_2\ , a_3, ..., a_n > 0$ **فإن** :

$$\sqrt[n]{a_1 a_2\ a_3 ..... a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{an}}$$

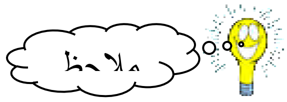
وتتحقق المساواة إذا وإذا فقط إذا كان $a_1 = a_2\ = a_3 = ... = a_n$

متباينة الوسط التربيعي – الوسط الحسابي QM-AM

إذا كانت $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n > 0$ فإن :

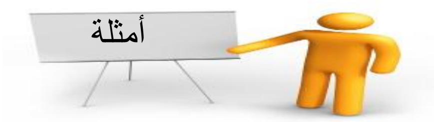
$$\sqrt{\frac{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2} + \ldots\ldots + a_n^{\,2}}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n}{n}$$

وتتحقق المساواة إذا وإذا فقط إذا كان $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots\ldots = a_n$



العلاقة بين الأوساط : **QM ≥ AM ≥ GM ≥ HM**

$$\sqrt{\frac{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2} + \ldots\ldots + a_n^{\,2}}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2\, a_3 \ldots\ldots a_n} \geq \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_3} + \ldots\ldots\ldots + \dfrac{1}{an}}$$



(١) إذا كانت a, b, c أعداد حقيقية أثبت أن : $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$

الحل :

من متباينة الوسط الحسابي – الوسط الهندسي **AM-GM**

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 \cdot b^2} \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{(ab)^2} = 2|\,ab\,| = 2ab$$

أي أن : $a^2 + b^2 \geq 2ab$

وكذلك بالمثل :

$a^2 + c^2 \geq 2ac$

$b^2 + c^2 \geq 2bc$

بالجمع

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2ac + 2bc \Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + ac + bc)$$

بالقسمة على 2

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

(٢) إذا كانت $a, b, c, d > 0$ اثبت أن : $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq 4$

الحل :

من متباينة الوسط الحسابي – الوسط الهندسي **AM-GM**

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq 4\sqrt[4]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{a}} = 4\sqrt[4]{1} = 4$$

(٣) إذا كانت

$a,b,c>0$ اثبت أن : $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$

من متباينة الوسط الحسابي – الوسط الهندسي **AM-GM**

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \quad ....(1)$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}=\frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \quad ....(2)$$

بضرب المعادلتين (1) و (2) :

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 3\sqrt[3]{abc}\cdot \quad 3\frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \quad =9$$

(٤) لتكن $a,b,c>0$ اثبت أن : $\frac{2ab}{a+b}+\frac{2bc}{b+c}+\frac{2ca}{c+a} \leq a+b+c$

من متباينة الوسط الحسابي – الوسط التوافقي **AM-HM**

$$\frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{2}{\frac{b+a}{ab}}=\frac{2ab}{a+b} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

أي أن : $\frac{2ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2}$

وكذلك بالمثل :

$$\frac{2ac}{a+c} \leq \frac{a+c}{2}$$

$$\frac{2bc}{b+c} \leq \frac{b+c}{2}$$

بالجمع

$$\frac{2ab}{a+b}+\frac{2bc}{b+c}+\frac{2ca}{c+a} \leq \frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+b}{2}=\frac{2(a+b+c)}{2}=a+b+c$$

(٥) أثبت صحة المتباينة : $(y-3)^2+(y-5)^2+(y+9)^2+(y+11)^2 \geq 200$

الحل :

بنشر المتباينة $(y-3)^2+(y-5)^2+(y+9)^2+(y+11)^2 \geq 200$

بالتبسيط $y^2-6y+9+y^2-10y+25+y^2+18y+81+y^2+22y+121-200 \geq 0$

$$\Rightarrow 4y^2+24y+36 \geq 0 \Rightarrow y^2+6y+9 \geq 0 \Rightarrow (y+3)^2 \geq 0$$

وهذه المتباينة صحيحة لأن المقدار موجب .

١) إذا كانت $a,b,c>0$ اثبت أن : $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3$

٢) إذا كانت $a,b,c>0$ بحيث $a+b+c=1$ اثبت أن : $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}<2$

٣) إذا كانت $a,b,c>0$ اثبت أن : $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$

٤) إذا كانت $x,y,z>0$ اثبت أن : $x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(x+y)\geq 6xyz$

٥) إذا كانت a,b,c أعداد حقيقية اثبت أن : $(a^2-b^2)(a^4-b^4)\leq(a^3-b^3)^2$

٦) إذا كانت a,b,c أعداد حقيقية اثبت أن : $a^4+b^4+c^4\geq abc(a+b+c)$

٧) إذا كانت $a,b>0$ أعداد حقيقية اثبت أن : $a^3+b^3\geq ab(a+b)$

٨) إذا كانت $a_1,a_2,.......,a_n>0$ ، حيث $a_1\cdot a_2\cdot.......\cdot a_n=1$ برهن أن :

$$(2+a_1)(2+a_2).........(2+a_n)\geq 3^n$$

٩) إذا كانت $a,b>0$ أعداد حقيقية اثبت أن : $\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{a^2+c^2}{a+c}+\frac{b^2+c^2}{b+c}\geq a+b+c$

١٠)ليكن n عدد صحيح موجب أثبت أن : $1\cdot 3\cdot 5.........\cdot(2n-1)<n^n$

١١) a,b,c,d أربع كميات موجبة في تتابع هندسي أثبت أن : $a+2d>3c$

١٢) a,b,c,d أربع كميات موجبة في تتابع حسابي أثبت أن : $b^4+c^4>bc(ab+cd)$

ثانياً : الهندسة

المفردات

- التوازي والتعامد
- المسافة بين المستقيمات
- خصائص المتوسطات والارتفاعات ومنصفات الزوايا والأعمدة المنصفة
- قانونا الجيب الموسع وجيب التمام والظل
- قوانين حساب المثلثات
- الدوائر الداخلية والخارجية
- التطابق والتشابه

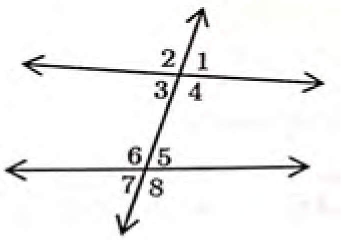
اولاً : التوازي والتعامد

❖ **تعاريف :**

- المستقيمان المتوازيان : هما المستقيمين الغير متقاطعين أو متخالفين ويقعان في مستوى واحد .
- المستقيمان المتخالفان : هما المستقيمين الغير متقاطعين ولا يقعان في مستوى واحد .
- المستقيم القاطع : هو المستقيم الذي يقطع مستقيمين أو اكثر في مستوى واحد .

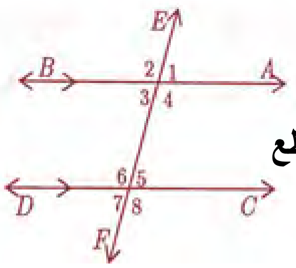
❖ إذا قطع المستقيم N المستقيمين L , M كما بالشكل فإنة ينتج ثماني زوايا يمكن تصنيفها إلى أزواج من الزوايا

- المتبادلة
- المتناظرة
- الداخلية وفي جهة واحدة من القاطع



❖ العلاقة بين أزواج الزوايا الناتجة من قطع مستقيم لمستقيمين متوازيين

- إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين متبادلتين متساويتان في القياس
- إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين متناظرتان متساويتان في القياس
- إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين داخليتين وفي جهة واحدة من القاطع متكاملتان



ملاحظات :

- المستقيم العامودي على أحد مستقيمين متوازيين في المستوى يكون عمودياً على الاخر والعكس صحيح
- إذا وازى مستقيمان ثالثاً كان هذان المستقيمان متوازيين
- إذا قطع مستقيم عدة مستقيمات متوازية ، وكانت أجزاء القاطع المحصورة بين هذة المستقيمات المتوازية متساوية في الطول ، فإن الأجزاء المحصورة بينها لأي قاطع آخر تكون متساوية في الطول

تدريب ١ :

من الشكل المجاور أوجدي

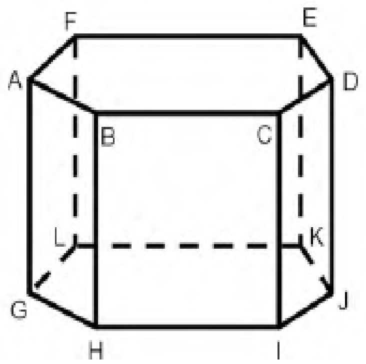
١) خمسة قطع مستقيمة توازي $\overline{}$

٢) ثلاث قطع مستقيمة توازي $\overline{AB}$

٣) أربعة قطع مستقيمة تخالف $\overline{AB}$

٤) مستويين توازيان $\overline{}$

٥) كم عدد المستويات المتوازية في الشكل



الحل :

١) ....

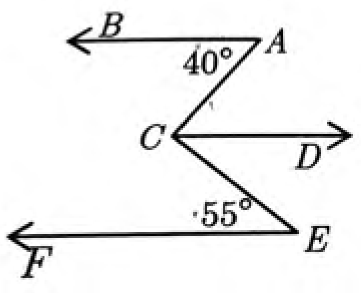
٢) ....

٣) ....

٤) ....

٥) ....

تدريب ٢ : في الشكل المقابل اذا كان



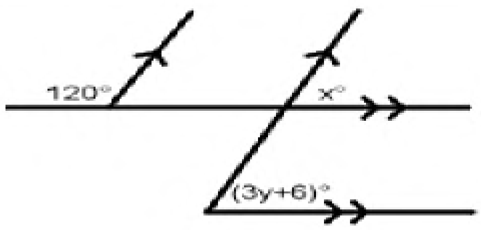
$m(\angle E) = 55^\circ$ ، $m(\angle A) = 40^\circ$

$\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{AB}$

أوجد : $m(\angle ACE\ )$

الحل :

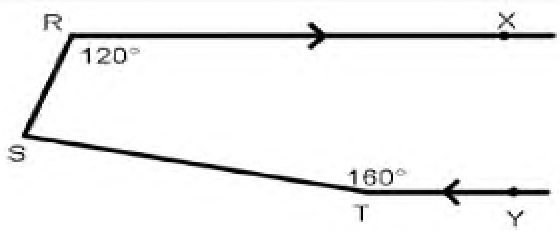
تدريب ٣ :



أوجد قيمة y , x في الشكل المجاور

الحل :

تدريب ٤ :

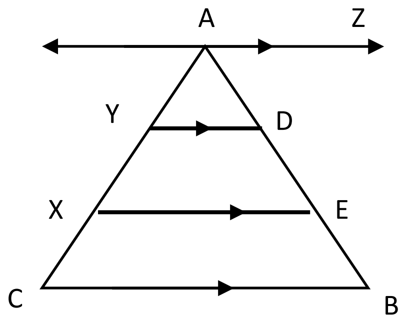


على الشكل المجاور أوجدي قياس $\angle RST$

الحل :

ثانياً : المسافة بين المستقيمات

تدريب ١ :



في الشكل المقابل : إذا كان $\overline{AZ} \parallel \overline{YD} \parallel \overline{XE} \parallel \overline{CB}$

وكان $AY = YX = XC$, $AB = 15$ cm أوجد طول $\overline{BD}$ مع بيان السبب

الحل :

....

....

....

....

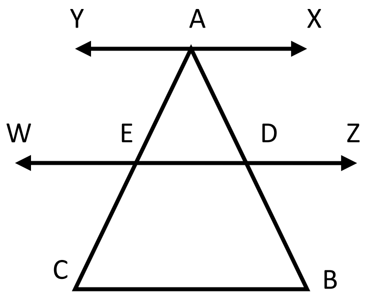
....

....

....

....

تدريب ٢ :



في الشكل المجاور $m(\angle XAD) = m(\angle B) = 60^\circ$

$AD = DB$, $m(\angle EDB) = 120^\circ$, $AC = 18$ cm

فاوجد طول $\overline{AE}$ مع بيان السبب

الحل :

....

....

....

....

....

....

....

....

ثالثاً: خصائص المتوسطات والارتفاعات ومنصفات الزوايا والأعمدة المنصفة

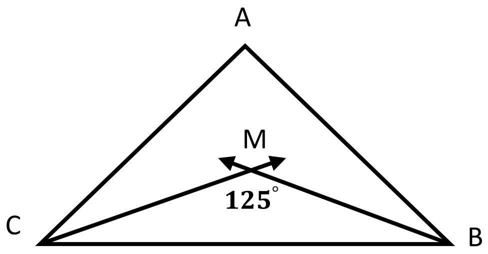
❖ تعاريف :

- المتوسط في المثلث هو القطعة المستقيمة الواصلة من رأس المثلث لمنتصف الضلع المقابل لهذا الرأس .
- المسافة من نقطة لمستقيم هي المسافة العامودية من هذه النقطة للمستقيم .
- العمود في المثلث هو القطعة المستقيمة العمودية النازلة من رأس المثلث للضلع المقابل له .
- منصف الزاوية هو الشعاع الذي ينصف زاوية المثلث لزاويتين متطابقتين .
- المنصف العمودي هو المستقيم العمودي على قطعة مستقيمة من منتصفها .
- المستقيم العمودي على قطعة مستقيمة من منتصفها محور تماثل لهذة القطع . وأي نقطة على محور تماثل قطعة مستقيمة تبعد البعد نفسة عن طرفيها .
- الضلعان المتطابقان في المثلث المتطابق الضلعين يسميان الساقين والضلع الثالث يسمى القاعدة ، أما الزاويتين على القاعدة فيسميان زاويتا القاعدة وتسمى الزاوية المقابلة للقاعدة بزاوية الرأس للمثلث المتطابق الساقين

❖ نظريات :

- مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمثلث 180°.
- قياس الزاوية الخارجية للمثلث أكبر من قياس أي زاوية داخلة عدا المجاورة لها .
- قياس أي زاوية خارجة للمثلث يساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخلتين البعيدتان عنها .
- إذا تطابقت زاويتان في مثلث فإن الضلعان المقابلين لهما متطابقان .
- المثلث المتطابق الأضلاع متطابق الزوايا .
- قياس زاوية المثلث المتطابق الأضلاع تساوي $\square^{\circ}$.
- القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث وطولها يساوي نصف طول هذا الضلع .
- طول المتوسط الخارج من رأس القائمة في المثلث القائم الزاوية يساوي نصف طول الوتر .
- متوسط المثلث المتطابق الضلعين المرسوم من الرأس ينصف زاوية الرأس ويكون عمودياً على القاعدة .
- منصف زاوية الرأس في المثلث المتطابق الساقين عمودي على القاعدة ويقطعها في المنتصف .
- النقطة الواقعة على منصف زاوية تبعد البعد نفسه عن ضلعي الزاوية والعكس صحيح .

تدريب ١ :



في الشكل المقابل : $\overrightarrow{BM}$ ينصف $\angle ABC$ ، $\overrightarrow{CM}$ ينصف $\angle ACB$

$m(\angle BMC) = 125^{\circ}$ ، أوجد $m(\angle A)$.

الحل :

....

....

....

....

....

....

....

....

تدريب ٢ :

رسم مثلث متطابق متطابق الأضلاع طول ضلعة(a cm) . أنشئ مثلث متطابق الأضلاع رؤوسة منتصفات أضلاع المثلث الأول . ثم أنشئ مثلث متطابق الأضلاع رؤوسة منتصفات اضلاع المثلث الثاني وهلم جراً . أوجدي مجموع جميع المحيطات

الحل :

....

....

....

....

....

....

....

تدريب ٣ :

رسم مثلث متطابق متطابق الأضلاع طول ضلعة(a cm) . أنشئ مثلث متطابق الأضلاع رؤوسة منتصفات أضلاع المثلث الأول . ثم أنشئ مثلث متطابق الأضلاع رؤوسة منتصفات اضلاع المثلث الثاني وهلم جراً . أوجدي مجموع جميع المحيطات

الحل :

....

....

....

....

....

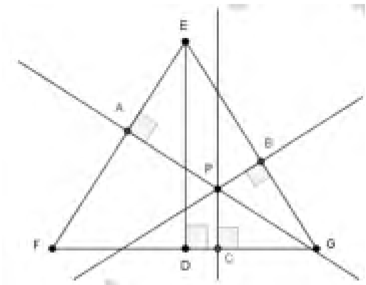
....

....

....

تدريب ٤ :

EFG مثلث متساوي الأضلاع والنقطة P داخله . ارتفاع المثلث EFG المار من E يقطع (FG) في النقطة D . اثبتي أن PB + PC + PA = ED



الحل :

....

....

....

....

....

....

....

....

....

تدريب ٥ : AHB مثلث بحيث : $\angle ABH = 120^{\circ}$ و $[BC$ هو منصف الزاوية $\angle ABH$ ($c \in [HA]$)
المستقيم المار من H والموازي للمستقيم (CB) يقطع المستقيم (AB) في النقطة D .

أثبتي أن $\frac{\square}{CB} = \frac{1}{AB} + \frac{\square}{BH}$

الحل :

....

....

....

....

....

....

....

رابعاً: التطابق والتشابة

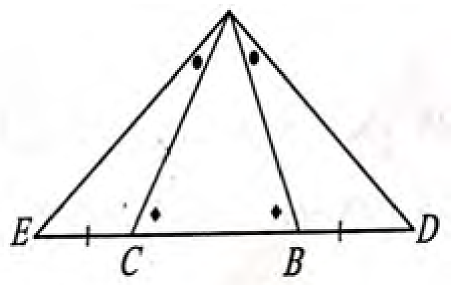
اولاً : التطابق

- المثلثات المتطابقة يجب أن تكتب بنفس ترتيب رؤوسهم المتناظرة .
- إذا تطابق مثلثان فإن كل عنصر من عناصر المثلثين تطابق العنصر المناظر له في المثلث الآخر .
- حالات تطابق مثلثين هي :
  - ❖ ضلعين وزاوية محصورة بينهما .
  - ❖ زاويتين وضلع .
  - ❖ الأضلاع الثلاثة .
  - ❖ وتر وضلع في المثلث القائم الزاوية .

تدريب ١ :

في الشكل المقابل : إذا كان $m(\angle ABC) = m(\angle ACB)$ ، $m(\angle BAD) = m(\angle CAE)$ BD = CE

أثبتي أن : AD = AE .



الحل :

....

....

....

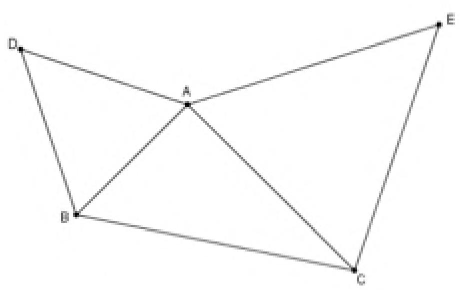
....

....

....

تدريب ٢ : في الشكل المجاور : المثلثان BAD ، ACE متساويا الأضلاع .

أثبتي أن : DC = BE



الحل :

....

....

....

....

....

....

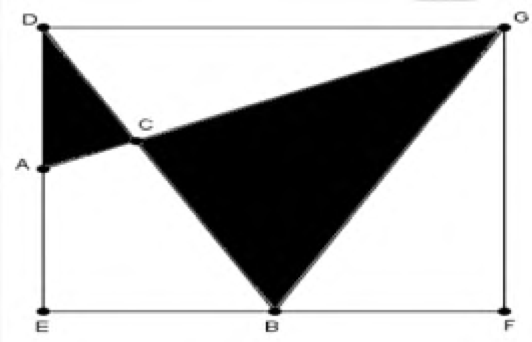
....

ثانياً : التشابة :

- يقال عن مضلعين لهما نفس العدد من الأضلاع أنهما متشابهين إذا تحقق الشرطان التاليين معاً:
  - ❖ زواياهما المتناظرة متساوية في القياس .
  - ❖ أضلاعهما المتناظرة متناسبة .
- ملاحظات
  - ❖ المربع والمستطيل غير متشابهين لأن أطوال أضلاعهما المتناظرة ليست بالضرورة متناسبة .
  - ❖ المربع والمعين غير متشابهين لأن زواياهما المتناظرة غير متساوية القياس .
  - ❖ يتشابة المثلثان القائما الزاوية إذا ساوى قياس زاوية حادة في أحدهما قياس نظيرتها في الآخر.
  - ❖ المثلثان المتطابقا الأضلاع متشابهان .
  - ❖ المثلثان المتطابقا الساقين يكونان متشابهين إذا ساوى قياس إحدى الزوايا في أحدى الزوايا في أحدهما قياس نظيرتها في الآخر.

تدريب ١ :

في الشكل المقابل : DGFE مربع بحيث ، DG= 8 cm ، النقطتان A وB هما على التوالي منتصفا $[DE]$ و[EF]



أحسب مساحة المنطقة المظللة

الحل :

....

....

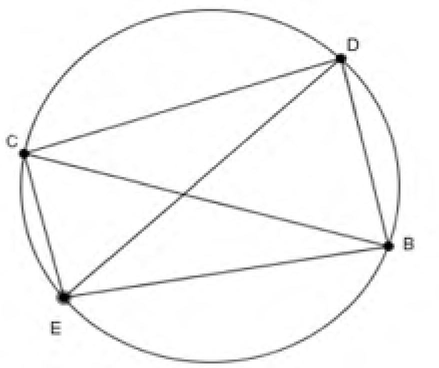
....

....

....

....

تدريب ٢ : ECDB رباعي محاط بدائرة ، بيني أن $\times EB = BC \times ED$



الحل :

....

....

....

....

....

....

....

....

قوانين حساب المثلثات

لجميع قيم θ فإن:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

وبقسمة هذه العلاقة على $\sin^2\theta$, $\cos^2\theta$: على الترتيب ينتج أن :

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$$

$$\sin(A+B) = \sin A \times \cos B + \cos A \times \sin B$$

وبوضع (-B) بدلا من B ينتج أن :

$$\sin(A-B) = \sin A \times \cos B - \cos A \times \sin B$$

وذلك لأن:

$$\cos(-B) = \cos B \qquad , \qquad \sin(-B) = -\sin B$$

كذلك بوضع B=A ينتج أن:

$$\sin 2A = 2\sin A \cdot \cos A$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B$$

وبوضع (-B) بدلا من B ينتج أن:

$$\cos(A-B) = \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B$$

كذلك بوضع B=A ينتج أن:

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 A - 1$$

وينتج من ذلك أن :

$$\sin^2 A = \frac{1-\cos 2A}{2} \quad , \quad \cos^2 A = \frac{1+\cos 2A}{2}$$

$$tan(A+B)=\frac{sin(A+B)}{cos(A+B)}=\frac{sin A\cdot cos B+cos A\cdot sin B}{cos A\cdot cos B+sin A\cdot sin B}$$

وبقسمة كل من البسط والمقام على cosA cosB ينتج أن:

$$tan(A+B)=\frac{tan A+tan B}{1-tan A\cdot tan B}$$

وبوضع (-B) بدلا من B ينتج أن:

$$tan(A-B)=\frac{tan A-tan B}{1+tan A\cdot tan B}$$

وذلك لأن tan(-B)=-tanB

وبوضع B=A ينتج أن :

$$tan 2A=\frac{2 tan A}{1-tan^2 A}$$

❖ بوضع 3A=A+2A يمكن إثبات أن:

$$sin 3A=3 sin A-4 sin^3 A$$

$$cos 3A=4 cos^3 A-3 cos A$$

$$tan 3A=\frac{3 tan A-tan^3 A}{1-3 tan^2 A}$$

❖ إذا كانت A>B فإن:

$$sin A+sin B=2 sin\frac{A+B}{2} cos\frac{A+B}{2}$$

وبوضع (-B) بدلا من B ينتج أن :

$$sin A-sin B=2 sin\frac{A-B}{2} cos\frac{A+B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$\cos A-\cos B=2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

كذلك:

$$2\sin A\cdot\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$$
$$2\cos A\cdot\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$$
$$2\cos A\cdot\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$$
$$2\sin A\cdot\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$$

ويمكن كتابة القوانين الأخيرة بالصورة التالية أيضا :

علاقات بين أضلاع المثلث وزواياه:

إذا كانت أضلاع المثلث ABC المقابلة للزوايا A B C هي a , b , c على التوالي

$$(1)\ \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$(2)\ a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cdot\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$$

$$(3)\ \Delta=\tfrac{1}{2}ab\cdot\sin C$$
$$\Delta=\tfrac{1}{2}bc\cdot\sin A$$
$$\Delta=\tfrac{1}{2}ca\cdot\sin B$$

وكانت مساحته Δفإن :

أي أن مساحة المثلث تساوي نصف حاصل ضرب أي ضلعين في جيب الزاوية المحصورة بينهما.

أمثلة

مثال ١/ احسبي

$$\cos\frac{5\pi}{7}\cos\frac{13\pi}{28}+\sin\frac{5\pi}{7}\sin\frac{13\pi}{28}$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

مثال ٢/ احسبي

$$\cos\left[x+\frac{5\pi}{7}\right]\cos x+\sin\left[x+\frac{5\pi}{7}\right]\sin x$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....

مثال ٣/ إذا كانت

$$\tan a = \frac{1}{2}, \tan b = \frac{1}{5}, \tan c = \frac{1}{8}$$

فاحسبي

$$\tan a + b + c$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

مثال ٤/ إذا كانت

$$x = y + z$$

فأثبتي أن

$$\cos x + \cos y + \cos z + 1 = 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2}$$

....
....
....
....
....
....

الدائرة

تعريف الدائرة :

هي المحل الهندسي لجميع النقاط التي تبعد بعد ثابت عن نقطة معينة .
هذه النقطة تدعى مركز الدائرة . بكلمات اخرى، اذا حددنا نقطة معينة ثم بدأنا بوضع نقاط في المستوى بشرط إن تكون هذه النقاط جميعا على نفس البعد من النقطة المعينة ووصلنا هذه النقاط معا ، فان الشكل الهندسي الناتج يدعى دائرة

نصف القطر : هو بعد مركز الدائرة عن أي نقطة تقع على الدائرة .

الوتر : هو قطعة تصل بين نقطتين على الدائرة .

القطر:- هو وتر يمر بمركز الدائرة

القوس : هو جزء من محيط الدائرة ونرمز له بالرمز

زاوية محيطية : هي زاوية رأسها يقع على الدائرة وساقيها اوتار في الدائرة .

زاوية مركزية : هي زاوية رأسها يقع في مركز الدائرة ، وساقيها انصاف اقطار في الدائرة .

نظريات:

نظرية ١ :-

الزوايا المركزية المتساوية في الدائرة تقابلها اقواس متساوية.

نظريه عكسيه:

الاقواس المتساوية في الدائرة تقابلها زوايا مركزية متساوية.

نظريه ٢ :-

الزوايا المركزية المتساوية في الدائرة تقابلها اوتار متساوية.

نظريه عكسيه:

الاوتار المتساوية في الدائرة تقابلها زوايا مركزية متساوية.

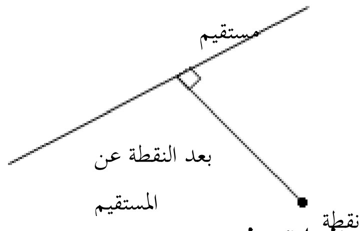
نظريه ٣ :-

الاقواس المتساوية في الدائرة تقابلها اوتار متساوية.

نظريه عكسيه:

الاوتار المتساوية في الدائرة تقابلها اقواس متساوية.

إن الزاوية المركزية تساوي القوس الذي يقابلها.



نظرية 4 :–

نصف قطر الدائرة المعامد للوتر ينصف الوتر وينصف القوس الملائم له .

تعريف:

بعد نقطة عن مستقيم ، هو الارتفاع النازل من النقطة على المستقيم .

نظرية ٥ :–

الاوتار المتساوية في الدائرة تبعد ابعاد متساوية عن المركز .

نظرية عكسية :

الاوتار التي تبعد ابعاداً متساوية عن المركز تكون متساوية .

الزوايا المركزية والزوايا المحيطية في الدائرة

نظرية ٦ :–

الزاوية المحيطية في الدائرة تساوي نصف الزاوية المركزية التي ترتكز على نفس القوس .

نظرية 7 :–

الزوايا المحيطية في الدائرة التي ترتكز على نفس القوس او ترتكز على اقواس متساوية تكون متساوية .

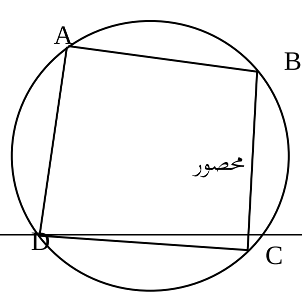
نظريه عكسية :

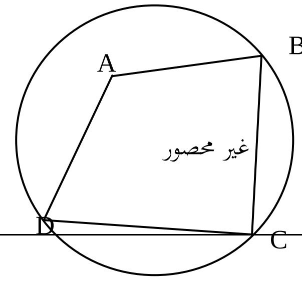
الزوايا المحيطية المتساوية في الدائرة تقابلها اقواس متساوية .

نظرية 8 :–

الزاوية المحيطية التي يقابلها قطر الدائرة تكون قائمة .

تعريف : شكل رباعي محصور داخل دائرة هو شكل رباعي جميع رؤوسه تقع على الدائرة .





نظرية 9 :-

اذا كان شكل رباعي محصور داخل دائرة فان مجموع زاويتين متقابلتين يساوي ١٨٠° .

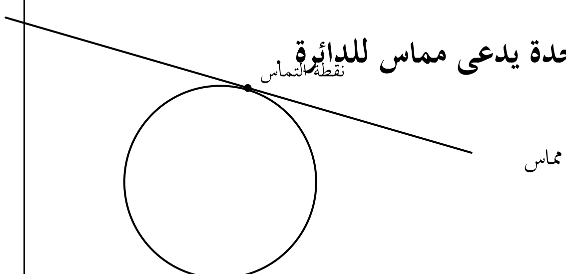
نظرية عكسية :

اذا كان مجموع زاويتين متقابلتين في شكل رباعي يساوي ١٨٠° فانه يمكن حصر الشكل داخل دائرة .

الدائرة والمماس

تعريف :

المستقيم الذي يشترك مع الدائرة في نقطة واحدة يدعى مماس للدائرة النقطة المشتركة تدعى نقطة التماس .

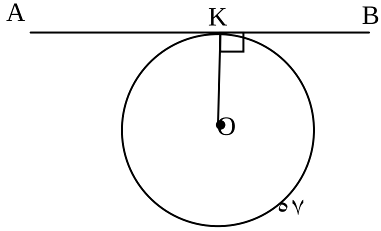


نظرية ١.

المستقيم المعامد لنصف قطر الدائرة في طرفه (ليس في الطرف الذي في المركز) هو مماس للدائرة .

نظرية عكسية :

نصف قطر الدائرة يعامد المماس في نقطة التماس .

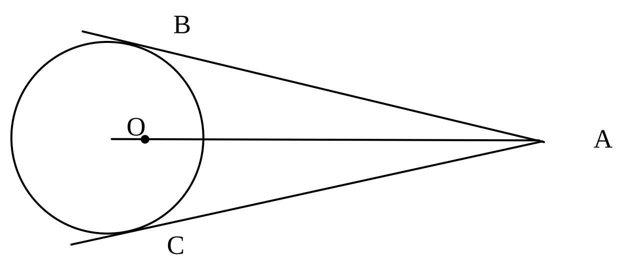


نظرية ٢.

اذا رسمنا مماسان لدائرة من نقطة $\mathbf{A}$ تقع خارج الدائرة فان :

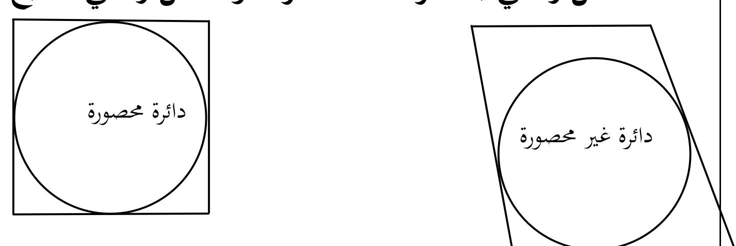
أ. المماسان متساويان .

ب. القطعة التي تصل النقطة $\mathbf{A}$ مع مركز الدائرة تنصف الزاوية المحصورة بين المماسين .



تعريف :

شكل رباعي يحصر داخله دائرة هو شكل رباعي جميع اضلاعه مماسات للدائرة .



نظرية ٣.

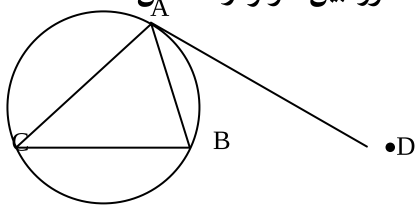
اذا كان شكل رباعي يحصر بداخله دائرة فان مجموع ضلعين متقابلين يساوي مجموع الضلعين الآخرين .

نظرية عكسية :

اذا كان مجموع ضلعين متقابلين في شكل رباعي يساوي مجموع الضلعين الآخرين فانه يمكن حصر دائرة داخل الشكل الرباعي .

نظرية ٤.

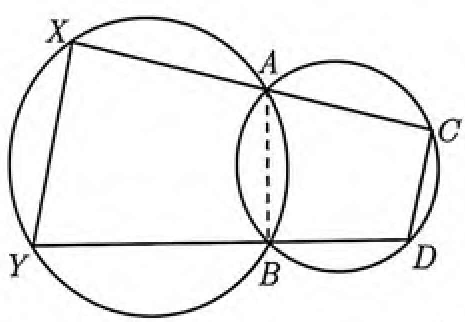
الزاوية المحصورة بين وتر ومماس مرسومان لدائرة في نفس النقطة تساوي الزاوية المحيطية التي ترتكز على القوس المحصور بين الوتر والمماس .



أمثلة

مثال ١/ دائرتان متقاطعتان في A,B رسم مستقيمان أحدهما يمر بالنقطة A والآخر يمر بالنقطة B ويقطعان إحدى الدائرتين في C,D ويقطعان الأخرى في X,Y

أثبت أن $\overline{XY} \parallel \overline{CD}$

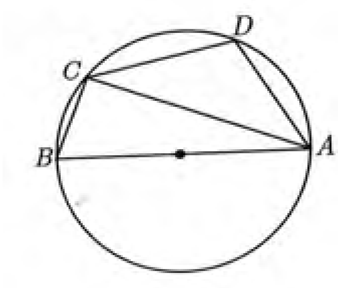


الحل:

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

....
....

مثال ٢ / في الشكل المقابل:



ABCD شكل رباعي مرسوم داخل دائرة

$\overline{AB}$ **قطر فيها** $AD = DC$ **فإذا كان**

$m(\angle CAB) = 35^\circ$ **فأوجد :**

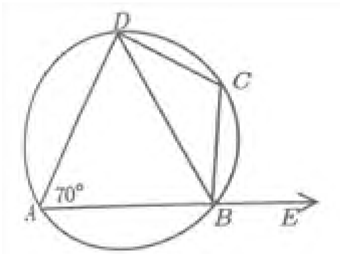
$1/\, m(\angle D)$

$2/\, m(\angle BCD)$

الحل:

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

مثال ٣ / في الشكل المقابل **ABCD** شكل رباعي مرسوم داخل دائرة فيه:



$$E \in \overrightarrow{AB}, m(\angle A) = 70^\circ$$

فإذا كان: $CD = DB, DB = DA$

أوجدي : $m(\angle EBC)$

الحل:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ثالثاً

نظرية الاعداد

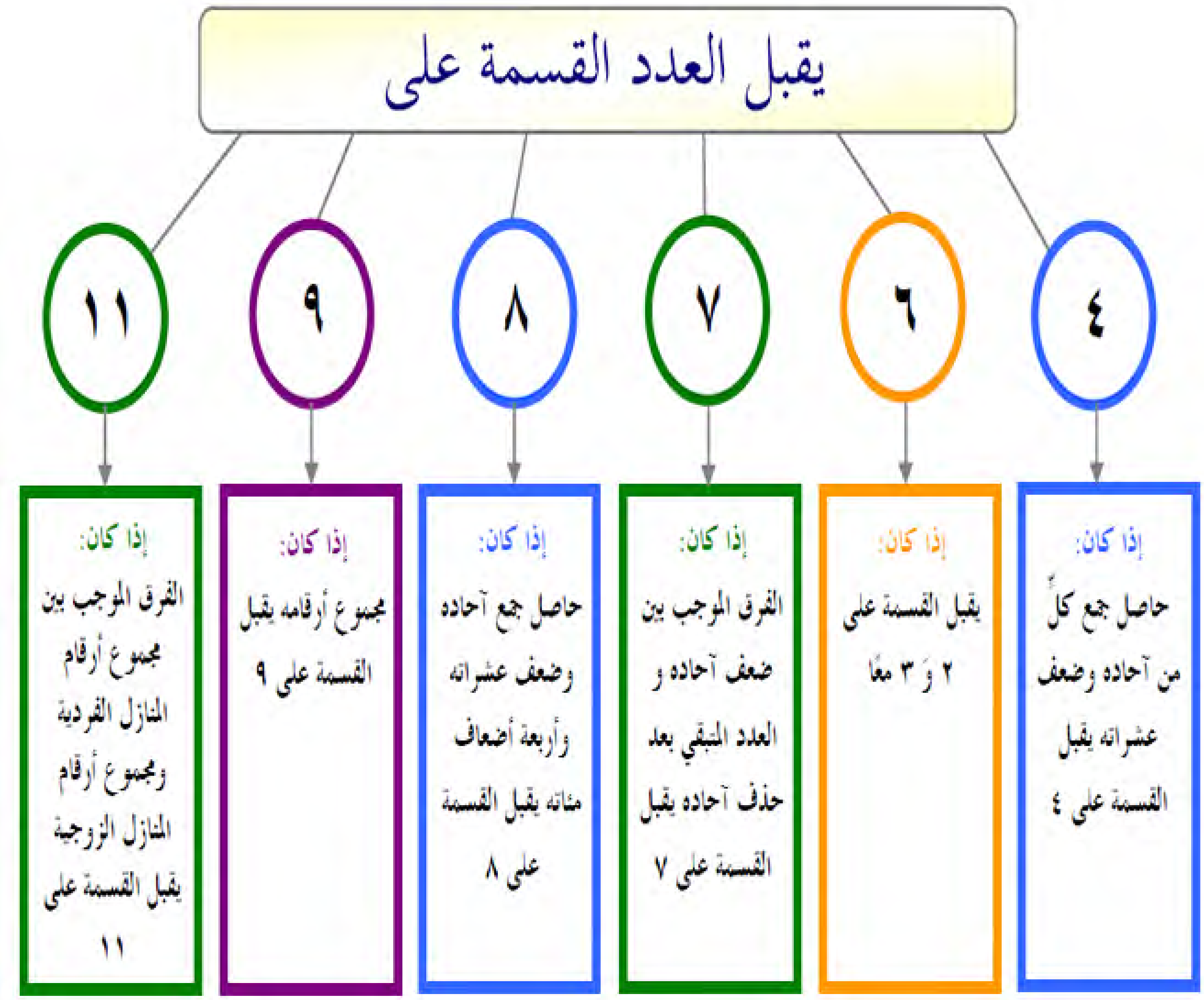
المفردات

- قواسم العدد الصحيح وخصائصه
- الأعداد الأولية وخصائصها
- خوارزمية أقليدس
- القاسم المشترك الأكبر وخصائصه
- المضاعف المشترك الأصغر وخصائصه
- قابلية القسمة على (٧,١١,١٣)
- النظرية الأساسية في الحساب
- عدد القواسم لعدد صحيح موجب ومجموعها

اولاً : قواسم العدد الصحيح وخصائصه :

ملاحظات :

- العدد يقبل القسمة على ٢ إذا كان آحاده عدد زوجي .
- العدد يقبل القسمة على ٣ إذا كان مجموع منازل العدد يقبل القسمة على ٣ .
- العدد يقبل القسمة على ٤ إذا كان آخر منزلتين من العدد (الآحاد والعشرات) تقبل القسمة على ٤ .
- العدد يقبل القسمة على ٥ إذا كان آحادة صفر أو ٥ .
- العدد يقبل القسمة على ٦ إذا كان يقبل القسمة على ٢ و٣ .
- لا توجد قاعدة لبحث قابلية القسمة على ٧ فقط استخدام القسمة المطولة .
- العدد يقبل القسمة على ٨ إذا كان آخر ثلاث منازل من العدد تقبل القسمة على ٨ .
- العدد يقبل القسمة على ٩ إذا كان مجموع منازل العدد تقبل القسمة على ٩ .
- العدد يقبل القسمة على ١٠ إذا كانت منزلة الآحاد صفر .
- العدد يقبل القسمة على ١١ عند جمع منازل العدد بالتناوب ومن ثم طرح المجموعتين ، إذا كانت النتيجة صفر أو النتيجة تقبل القسمة على ١١ فإن العدد يقبل القسمة على ١١ .



تدريب ١ :

تحقق من قابلية قسمة العدد ٣٤٣٥٨٦٤ على كل من ٢,٣,٤,٥,٦,٨,٩,١٠ .

الحل :

....

....

....

....

....

....

....

....

تدريب ٢ :

أي من الأعداد التالية تقبل القسمة على ١١ .

١) ٤٩٥ ٢) ٩٨٣٥ ٣) ١٤٨٠٦ ٤) ٩١٨٢٩١

الحل :

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

تدريب ٣ :

أوجدي قيمة K بحيث يصبح المقدار $45,2k8$ يقبل القسمة على كل من 8 ،3

الحل :

....

....

....

....

....

....

تدريب ٤ :

ما هو أصغر عدد مكون من 4 منازل يقسمة كل من 10 , 9 , 8 , 6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1 ؟

الحل :

....

....

....

....

....

....

تدريب ٥ :

بإستخدام الأعداد 4 , 3 , 2 , 1 مرة واحدة . كم عدد من أربعة منازل يمكن تكوينة يقبل القسمة على 11

الحل :

....

....

....

....

....

....

ثانياً : الاعداد الاولية وخصائصها ونظرية إقليدس :

تعاريف:

الأعداد الاولية : هي الأعداد الطبيعية $p > 1$ بحيث أن العدد p لا يقبل القسمة إلا على نفسة أو الواحد .

الأعداد المؤلفة : العدد المؤلف هو عدد طبيعي c بحيث يوجد قاسم بين العددين 1 ، c يقسم العدد c .

ملاحظات:

- أي عدد صحيح $n > 1$ إما أن يكون أولياً ، أو حاصل ضرب عدد منتهي من الأعداد الأولية .
- كل عدد صحيح $n > 1$ له قاسم أولي .
- إذا كان n عدداً مؤلفاً فإن له قاسم أولي P بحيث $p \leq \sqrt{n}$.
- إذا كان a , b عددين صحيحين وكان p أولي بحيث p/ab فإن p/a أو p/b .

نظرية إقليدس :

يوجد عدد غير منتهي من الأعداد الأولية .

لإختبار أن عدداً ما n أولي يكفي أن نختبر قابلية قسمته على الأعداد الأولية الأقل من $\sqrt{n}$.

تدريب ١ :

هل العدد ١٨١ هو عدد أولي ؟

الحل :

....

....

....

....

....

....

....

....

تدريب ٢ :

ما هو أصغر قاسم أولي يقسم العدد $7^{17} + 17^{23}$

الحل :

....

....

....

....

....

تدريب ٣ :

العدد ١٣ أولي ، إذا قمنا بتبدل المنازل نحصل على ٣١ أولي أيضاً . كم عدد الأعداد الأولية الأخرى المكونة من منزلتين تحقق ذلك .

الحل :

....

....

....

....

....

....

....

....

ثالثاً: القاسم المشترك الأكبروالمضاعف المشترك الأصغر وخصائصهما :

❖ **القاسم المشترك الاكبر :** لاي زوج من الاعداد الصحيحه a , b ليس كليهما صفر ، نقول لأكبر قاسم يقسم العددين معاً وليكن d بالقاسم المشترك الأكبر ونكتب $d=(a,b)$ أو $d=god(a,b)$

وإذا كان $god(a,b)=1$ فإن العددين أوليان نسبياً فيما بينهما .

❖ **المضاعف المشترك الأصغر :** أصغر مضاعف مشترك لأي زوج من الأعداد الصحيحة a,b ليس كليهما صفر . يسمى المضاعف المشترك الأصغر ويرمز له بالرمز $lcm(a,b)$

ملاحظة :

من أفضل الطرق لإيجاد القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر هي أشكال فن

تدريب 1 :

إذا كان $lcm\ [12, 15, 50, k]=2100$. ماهي أقل قيمة للمقدار k

الحل :

....

....

....

....

....

....

....

تدريب ٢ :

أوجدي أقل عدد صحيح موجب أكبر من الواحد عند قسمته على كل من ٩,٨,٧,٦,٥,٤,٣,٢ فإن الباقي يساوي واحداً .

الحل :

....

....

....

....

....

....

تدريب ٣ :

إذا كان god(a,b) = 6 ، lcm [a,b]= 72 أوجدي قيمة a+b إذا كان $a > b > 6$

الحل :

....

....

....

....

....

....

....

....

....

رابعاً: التركيبات

المفردات

- مضروب العدد
- التباديل
- التوافيق
- نظرية ذات الحدين ومثلث باسكال
- مبدأ برج الحمام

حقائق ومسائل في التركيبات

عد قائمة من الأعداد

إذا كان لدينا عددان a,b بحيث $b > a$ فإن عدد حدود قائمة من الأعداد تبدأ من a وتنتهي بالعدد b يساوي :

$$b - a + 1$$

فمثلاً : عدد الأعداد في القائمة : $9,10,11,.......,60$ هو $60 - 9 + 1 = 52$

مبادئ العدّ

١) مبدأ الضرب:

إذا كان عدد طرق إنجاز المهمة الأولى هو n عنصر وعدد عناصر المهمة الثانية m عنصر

فإن عدد طرق إنجاز المهمتين هو $n \cdot m$ ، أي أن :

إذا كان A,B مجموعتين بحيث عدد عناصر A يساوي n ، عدد عناصر B يساوي m

فإن عدد عناصر المجموعة $A \times B$ يساوي $n \cdot m$

كما يمكن تعميم هذا المبدأ لحساب عدد طرق إنجاز أكثر من مهمتين .

فمثلاً :

مطعم يقدم 4 أصناف من اللحم ، 3 أصناف من السلطة ، 6 أصناف من الحلوى كم عدد الوجبات المختلفة التي يمكن تقديمها ، وتتكون كل منها من لحم وسلطة وحلوى في هذا المطعم ؟

عدد الوجبات المختلفة التي يمكن تقديمها وتتكون كل منها من لحم وسلطة وحلوى في هذا المطعم : $4 \times 3 \times 6 = 72$

٢) مبدأ الجمع :

إذا كان لا يمكن إنجاز مهمتين في الوقت نفسه وكان عدد طرق إنجاز المهمة الأولى هو n عنصر

وعدد عناصر المهمة الثانية m عنصر فإن عدد طرق إنجاز المهمتين هو $n + m$ ، أي أن :

إذا كان A,B مجموعتين منفصلتين بحيث عدد عناصر A يساوي n ، عدد عناصر B يساوي m

فإن عدد عناصر اتحادهما يساوي $n + m$

فمثلاً :

خمس شركات نقل تقوم برحلات يومية من الرياض إلى جدة ، وثلاث شركات طيران تقوم برحلات يومية من الرياض إلى جدة

$\therefore$ عدد طرق الرحلات من الرياض إلى جدة تساوي $(5+3=8)$

ملاحظ

أحيانا تكون مسالة إيجاد عدد الطرق لإجراء معين مركبة من مبدأ الجمع ومبدأ الضرب

مضروب العدد

مضروب العدد الصحيح الموجب n هو حاصل ضرب الأعداد الصحيحة الموجبة من 1 إلى n ويرمز لها بالرمز $n\,!$

ويقرأ بمضروب n أي أن :

$$\boxed{n\,! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot.......\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

فمثلاً :

$$5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120 \quad ,4! = 4\cdot3\cdot2\cdot1 = 24\,, \quad 3! = 3\cdot2\cdot1 = 6 \quad ,2! = 2\cdot1 = 2\,,1! = 1$$

ملاحظ

١) $(n+1)\,! = (n+1)\cdot\overbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot.......\cdot 3\cdot 2\cdot 1}^{n\,!} = (n+1)n\,!$

فمثلاً : $6! = 6\cdot 5! = 720$

٢) مضروب الصفر = 1 أي أن : $0! = 1$

التباديل

التباديل هو الاختيار المرتب لمجموعة من العناصر سواء أخذت كلها أو بعضها أي أن :

إذا كانت لدينا مجموعة تحوي n من العناصر وأردنا اختيار r منها مع مراعاة الترتيب فإن عدد الاختيارات هو :

$$\boxed{{}_nP_r = p(n,r) = \frac{n\,!}{(n-r)\,!} = n\cdot(n-1)\cdot.......\cdot(n-r+1)}$$

عادة نرمز لها بالرمز : $p(n,r)$ أو p_r^n أو ${}_nP_r$

فمثلا :

$${}_{11}P_6 = p(11,6) = \frac{11!}{(11-6)!} = \frac{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}} = 332640$$

أو

$${}_{11}P_6 = p(11,6) = 11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6 = 332640$$

$${}_7P_3 = p(7,3) = 7\cdot6\cdot5 = 210$$

$${}_{10}P_2 = p(10,2) = 10\cdot9 = 90$$

$${}_5P_5 = p(5,5) = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 5! = 120$$

ملاحظ

١) ${}_nP_n = p(n,n) = n\cdot(n-1)\cdot......\cdot2\cdot1 = n!$

٢) ${}_nP_1 = p(n,1) = n$

التوافيق

التوافيق هو اختيار مجموعة من العناصر من مجموعة ما يكون الترتيب فيها غير مهم أي أن :

إذا كانت لدينا مجموعة تحوي n من العناصر وأردنا اختيار مجموعات جزئية منها تحوي r من العناصر فإن عدد الاختيارات هو :

$$ {}_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{{}_nP_r}{r\,!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\ldots\cdot(n-r+1)}{r\,!} = \frac{n\,!}{r\,!\,(n-r)\,!} $$

عادة نرمز لها بالرمز : ${}_nC_r$ **أو** $\binom{n}{r}$ **ويقرأ** n **توفيق** r **أو** n **فوق** r .

فمثلاً :

(١
$$\binom{8}{5} = \frac{8\,!}{5\,!\,(8-5)\,!} = \frac{8\,!}{5\,!\,3\,!} = \frac{8\cdot7\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot1} = 56$$

أو :

$$\binom{8}{5} = \frac{{}_8P_5}{5\,!} = \frac{8\cdot7\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}}{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot1} = 56$$

(٢
$$\binom{8}{3} = \frac{{}_8P_3}{3\,!} = \frac{8\cdot7\cdot\cancel{6}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot1} = 56$$

(٣
$$\binom{5}{5} = \frac{{}_5P_5}{5\,!} = \frac{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}} = 1$$

(٤
$$\binom{3}{1} = \frac{{}_3P_1}{1\,!} = \frac{3}{1} = 3$$

ملاحظ

١) $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-1}$ ٢) $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$ ٣) $\binom{n}{1} = n$

٢) **قاعدة باسكال** $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$

٣) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots\ldots\ldots + \binom{n}{n} = 2^n$

١) **كم عدد الأعداد الفردية المربعة المحصورة بين 5 إلى 211 ؟**

الحل:

بما أن $1^2 < 5 < 3^2$ ، $13^2 < 211 < 15^2$ **، بالتالي يصبح لدينا القائمة :** $3^2, 5^2, 7^2, ..., 13^2$

بالتالي عدد الأعداد الصحيحة الفردية المربعة المحصورة بين 5 ، 211 هي : $13 - 3 + 1 = 11$ **عدد .**

٢) **بكم طريقة يمكن ترتيب 5 كتب مختلفة على رف ؟**

الحل :

لاختيار الكتاب الأول 5 طرق ، وللكتاب الثاني 4 طرق ، وللكتاب الثالث 3 طرق ، وللكتاب الرابع طريقتان ، والكتاب الخامس له طريقة واحدة وعلى حسب مبدأ الضرب يكون لدينا $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ **طريقة**

وبصورة عامة **عدد التباديل** الممكنة لـ n عنصر هو $n\,!$

٣) **بكم طريقة ممكنه يمكن أن يجلس سبعة طلاب في الحالات التالية :**

أ) **في صف من الكراسي بحيث ألا يجلس خالد ومحمد في كرسيين متتالين ؟**

ب) **على طاولة مستديرة ؟**

الحل :

أ) **في صف من الكراسي بحيث ألا يجلس خالد ومحمد في كرسيين متتالين ؟**

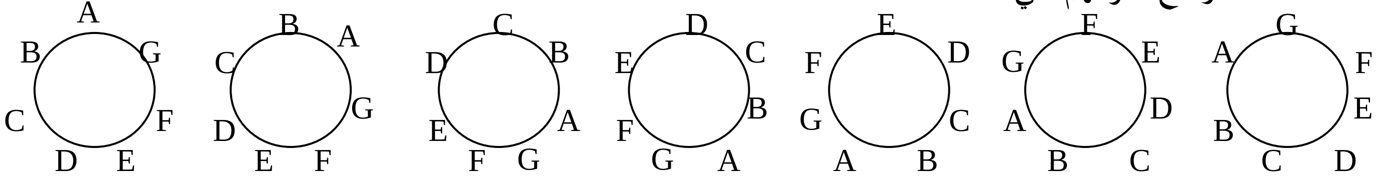
عدد طرق جلوس كل الطلاب بدون شروط هو $7!$.

عدد طرق جلوس الطلاب بشرط أن يجلس خالد ومحمد بجوار بعضهما هو $6! \times 2!$ **. حيث نستطيع أن نجعل خالد ومحمد شخص واحد وبذلك نستطيع ترتيبهم بعدد طرق** $6!$ **، ثم نرتب جلوس خالد ومحمد بعدد طرق** $2!$ **. بالتالي عدد طرق سبعة طلاب في صف من الكراسي بحيث ألا يجلس خالد ومحمد في كرسيين متتالين هو** $7! - 6! \times 2! = 3600$.

ب) **على طاولة مستديرة ؟**

يمكن للطلاب جلوسهم في صف واحد هو $7!$ **، ولنفرض أن الطلاب هم :** A, B, C, D, E, F, G

نلاحظ أن أوضاع جلوسهم هي :

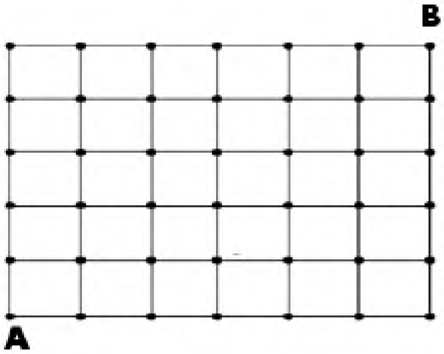


وكلها تمثل نفس الوضع وبالتالي كل وضع جلوس سيتكرر 7 مرات وبالتالي سوف نقسم $7!$ **على 7**

أي أن عدد طرق جلوس الطلاب على طاولة مستديرة : $\frac{7!}{7} = 6! = 720$

وبصورة عامة **عدد التباديل الدائرية** الممكنة لـ n عنصر هو $(n-1)\,!$

٤) إذا لدينا شبكة من نوع 6×5 كم مساراً من A إلى B يسير على خطوط الشبكة بحيث يكون السير لليمين أو للأعلى فقط



الحل :

عند رسم عدة مسارات مختلفة نجد أن كل مسار من A إلى B :

$6 + 5 = 11$ خطوة ، خمسة منها رأسية و ستة خطوات أفقية

عدد طرق المسارات يساوي عدد طرق اختيار 6 مواضع (الخطوات الأفقية) من 11 أي أن عدد المسارات هي : $\binom{11}{6} = \binom{6+5}{6}$

وبصورة عامة **عدد المسارات** الممكنة للوصول من النقطة A إلى B على الشبكة $m\times n$ هو $\binom{m+n}{m}$

٥) كم عدداً صحيحا زوجيا يمكن تكوينه من 4 خانات ؟

الحل :

لاحظ يمكن تكوين أي عدد بدون شروط من الأرقام التالية : $(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)$

ولكن يكون العدد زوجي إذا كانت خانة الآحاد تحتوي على احد الأرقام التالية : $(0,2,4,6,8)$ ويمكن اختيار ذلك بـ 5 طرق

وحيث أن العدد مكون من 4 خانات فلا يمكن أن يكون في خانة الآلاف العدد 0 ويمكن اختيار خانة الآلاف بـ 9 طرق

أما خانة العشرات فلها 10 طرق ، وكذلك خانة المئات لها 10 طرق ومن مبدأ العد :

عدد الأعداد الزوجية والمكونة من 4 خانات = $9\cdot 10\cdot 10\cdot 5 = 4500$ عدد

٦) في أحد نوادي الرياضيات عدد الأعضاء 10 تتكون من 4 رجال و 6 نساء يراد تكوين لجنة تحكيم للمسابقات مكونة من 4 أعضاء :

أ) بكم طريقة يمكن تكوين اللجنة وتعين رئيساً لها ومساعدا له ؟

ب) بكم طريقة يمكن تكوين اللجنة شريطة أن تتضمن رجل على الأقل ؟

الحل :

أ)بكم طريقة يمكن تكوين اللجنة وتعين رئيساً لها ومساعدا له ؟

عدد طرق اختيار اللجنة (4 أعضاء من 10) = $210 = \frac{10\cdot \overset{3}{\cancel{9}}\cdot \cancel{8}\cdot 7}{\cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1} = \frac{{}_{10}P_4}{4!} = \binom{10}{4}$

عدد طرق اختيار رئيس ومساعد من اللجنة (4 الأعضاء) = ${}_4P_2 = 4\cdot 3 = 12$

$\therefore$ عدد طرق تكوين اللجنة وتعين رئيساً لها ومساعدا له = $210\cdot 12 = 2520$

ب)بكم طريقة يمكن تكوين اللجنة شريطة أن تتضمن رجل على الأقل ؟

عدد طرق تكوين اللجنة شريطة أن تتضمن رجل على الأقل = عدد طرق اختيار اللجنة من الأعضاء – عدد طرق اختيار اللجنة من النساء

$$\binom{10}{4} - \binom{6}{4} = 210 - 15 = 19$$

تمارين

١) كم عدد المضاريب المحصورة بين $1!$ إلى $100!$ و تقبل القسمة على 9 ؟

٢) أوجد خانة الآحاد للمجموع : $1!+2!+3!+........+100!$

٣) كم عدد الأعداد المكونة من ثلاثة خانات التي ليست من مضاعفات العدد 7 ؟

٤) في مكتبة يوجد أربع أنواع من الدفاتر في كل نوع من الدفاتر يوجد 7 ألوان ومن كل منهما يوجد نوعين الأول مجلد والآخر أبو سلك فكم نوع من الدفاتر تحوي المكتبة ؟

٥) بكم طريقة مختلفة يمكن لـ 9 طلاب الجلوس على طاولة مستديرة ؟ إذا لم يقبل أثنين منهم بالجلوس بجانب بعض فبكم طريقة يمكنهم الجلوس ؟

٦)إذا كان خالد يمتلك ستة قمصان و ستة بنطلونات و ستة قبعات ، بحيث كل منها لها ستة ألوان ، إذا رفض خالد أن يلبس الطقم الذي يكون فيه الثلاثة أجزاء لها اللون نفسه . بكم طريقة يمكنه ذلك ؟

٧)إذا أردنا تكوين مجلس مكون سبعة أعضاء : ثلاثة طلاب و أربعة معلمين .
بكم طريقة يمكن أن يجلس الأعضاء في صف من الكراسي بحيث:
أ) المعلمين في بداية الصف ؟ ب) المعلمين بجوار بعضها البعض ؟

٨) كم عدد مكون من ثلاث خانات بحيث :
أ) له خانة زوجية فقط ب) له خانات زوجية فقط وبدون تكرار
ج) له خانات زوجية فقط وفيه خانتين فقط متكررة د) له خانة زوجية واحدة

٩) عائلة مكونة من أب وأم و **4** بنات و **3** أولاد بكم طريقة يمكن للعائلة الوقوف في صف واحد لأخذ صورة تذكارية :
أ) إذا كان الأب والأم متجاوران ويفصلان البنين والبنات
ب) إذا توسط الأب والأم الصف أبناؤهما وبقيا متجاوران

١٠) إذا كان $_{m-n}P_2 = 72$, $_{m+n}P_2 = 210$ فما قيمة كل من m,n ؟

١١) إذا كان $_7P_r = 2520$ فما قيمة كل من r ؟

١٢) اوجد المعادلة التالية حيث n عدد طبيعي $\dfrac{n!-(n-1)!}{(n+1)!} = \dfrac{1}{6}$

نظرية ذات الحدين ومثلث باسكال

مقدمة :

لقد درسنا سابقاً كيفية إيجاد مفكوك المتطابقات الآتية والمكونة من حدين حدها الأول a وحدها الثاني b

$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

الأطراف اليمنى فيما سبق هي نماذج لمفكوك ذات الحدين عندما يكون $n = 1, 2, 3, 4$ حيث أننا نلاحظ في هذه المفكوكات ما يأتي :

- عدد الحدود في كل مفكوك يزيد واحداً عن الأس في الطرف الأيسر .
- الحد الأول في المفكوك للعدد a مرفوعاً لنفس الأس في الطرف الأيسر ثم ينقص الأس للعدد a في الحدود التالية بمقدار الواحد على التوالي
- العدد b يبدأ ظهوره في الحد الثاني ثم يزيد أس العدد b بمقدار واحد على التوالي
- مجموع الأس للعددين a ، b في أي حد من حدود المفكوك ثابت ويساوي الأس في الطرف الأيسر
- معامل الحد الأول في المفكوك يساوي معامل الحد الأخير يساوي واحد ، ومعامل الحد الثاني يساوي معامل الحد ما قبل الأخير ، وهكذا ....
- وبصورة عامة مفكوك $(a+b)^n$ يتمتع بنفس الخواص السابقة

نظرية ذات الحدين

تنص نظرية ذات الحدين

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r}\, b^r = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n-1} a\, b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

مثال :

اوجد مفكوك ما يلي : ١) $(x+2)^4$ ٢) $(x+1)^5$ ٣) $(x-1)^5$

١) $$(x+2)^4 = \sum_{r=0}^{4} \binom{4}{r} x^{4-r} \cdot 2^r = \binom{4}{0} x^{4-0} \cdot 2^0 + \binom{4}{1} x^3 \cdot 2 + \binom{4}{2} x^2 \cdot 2^2 + \binom{4}{3} x \cdot 2^3 + \binom{4}{4} x^0 \cdot 2^4$$

$$= x^4 + 4 \cdot x^3 \cdot 2 + \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} x^2 \cdot 4 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} x \cdot 8 + 16 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$$

٢)

$$(x+1)^5=\sum_{r=0}^{5}\binom{5}{r}x^{5-r}\cdot 1^r=\sum_{r=0}^{5}\binom{5}{r}x^{5-r}=\binom{5}{0}x^5+\binom{5}{1}x^4+\binom{5}{2}x^3+\binom{5}{3}x^2+\binom{5}{4}x^1+\binom{5}{5}x^0$$
$$=x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1$$

$$(x-1)^5=\left(x+(1)\right)^5=\sum_{r=0}^{5}\binom{5}{r}x^{5-r}\cdot(-1)^r=\binom{5}{0}x^5\cdot(-1)^0+\binom{5}{1}x^4\cdot(-1)^1+\binom{5}{2}x^3\cdot(-1)^2+\binom{5}{3}x^2\cdot(-1)^3+\binom{5}{4}x^1\cdot(-1)^4+\binom{5}{5}x^0\cdot(-1)^5$$
$$=x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1$$

الحد a_{r+1} **في ما مفكوك** $(a+b)^n$ **هو** $\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$

مثال :

ما هو معامل الحد x^6y^2 **في مفكوك** $(2x^2-3y)^5$

لاحظ الحد $x^6y^2=(x^2)^3\cdot y^2$ **ينتج عندما** $r=2$ **في الحد** $\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$ **أي أن :**

$$\binom{5}{2}(2x^2)^{5-2}(-3y)^2=\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\cdot 8\cdot x^6\cdot 9\cdot y^2=720x^6y^2$$

$\therefore$ **معامل الحد** x^6y^2 **هو** 720

مثلث باسكال

$(a+b)^0$	1
$(a+b)^1$	1 1
$(a+b)^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1
$(a+b)^6$	1 6 15 20 15 6 1
$(a+b)^7$	1 7 21 35 35 21 7 1

العدد الصفري العدد الأول العدد الثاني العدد الثالث

عبارة عن مثلث من الأعداد له نمط محدد و مكون من صفوف متتابعة من الأعداد الصحيحة الموجبة ويبدأ المثلث بالعدد 1 في أول صف

ثم تتزايد الأعداد بمعدل عدد في كل صف ،كل عدد في صف معين ينتج من العددين اللذين على يمينه ويساره من الصف الأعلى منه مباشرة ماعدا أعداد ساقي المثلث فجميعها 1

لاحظ أعداد مثلث باسكال هي معاملات المفكوك في نظرية ذات الحدين

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

وهكذا ....

ملاحظ

١) لاحظ أن العدد ذو الترتيب k في الصف n هو $\binom{n}{k}$

فمثلاً : العدد الثالث في الصف السادس هو $20 = \binom{6}{3} = \frac{{}_6P_3}{3!} = \frac{\cancel{6}\cdot 5\cdot 4}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} = 20$

٢) من أهم ما يمكن استنتاجه من مثلث باسكال هو قاعدة باسكال :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

لاحظ : $\binom{2}{1} + \binom{2}{2} = \binom{3}{2}$ ....

فمثلاً : $\binom{59}{10} + \binom{59}{11} = \binom{60}{11}$ وبصورة عامة تنص قاعدة باسكال :

$$\boxed{\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}}$$

١) ما هو معامل الحد x^7y^3 في مفكوك $(x+2xy)^7$

الحل :

لاحظ الحد $x^7y^3 = x^4\cdot(xy)^3$ ينتج عندما $r=3$ في الحد $\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$ أي أن :

$$\binom{7}{3}(x)^{7-3}(2xy)^3 = \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}\cdot x^4\cdot8\cdot x^3y^3 = 280x^7y^3$$

$\therefore$ معامل الحد x^7y^3 هو 280

٢) اوجد قيمة $(11)^5$ باستخدام نظرية ذات الحدين

الحل :

$$(11)^5 = (10+1)^5 = \sum_{r=0}^{5}\binom{5}{r}10^{5-r}\cdot1^r = \sum_{r=0}^{5}\binom{5}{r}10^{5-r}$$

$$=\binom{5}{0}10^{5-0}+\binom{5}{1}10^{5-1}+\binom{5}{2}10^{5-2}+\binom{5}{3}10^{5-3}+\binom{5}{4}10^{5-4}+\binom{5}{5}10^{5-5}$$

$$=100000+5\cdot10000+\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot1000+\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot100+5\cdot10+1$$

$$=100000+50000+10000+1000+50+1=161050$$

٣)أحسب قيمة : $\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+........+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$

الحل :

من نظرية ذات الحدين

$$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}\,b^r=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+.......+\binom{n}{n-1}a\,b^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$$

بوضع $a=1, b=1$ نجد أن :

$$(1+1)^n=2^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}1^{n-r}\,1^r=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+.......+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$$

١) اكتب مفكوك كل مما يلي : $(x+\frac{1}{x})^4$ ، $(x\sqrt{y}-y\sqrt{x})^4$

٢) ما هو معامل الحد a^{16} في مفكوك $\left(a+\frac{2}{a}\right)^{30}$

٣) اثبت (باستخدام نظرية ذات الحدين) أن العدد $3^{2n}-8n-1$ يقبل القسمة على 64 حيث n عدد صحيح موجب

٤) اكتب مفكوك ذات الحدين قبل الفك :

$$\binom{8}{0}+\binom{8}{1}x^2+\binom{8}{2}x^4+\binom{8}{3}x^6+\ldots\ldots++\binom{8}{7}x^{14}++\binom{8}{8}x^{16}$$

٥) اكتب ما يلي كتوافيق :

أ) $\binom{19}{18}+\binom{19}{17}$

ب) $\binom{101}{50}-\binom{100}{50}$

٦) أثبت أن $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}\ldots\ldots\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$

٧) أثبت أن $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}\ldots\ldots+\binom{n}{m}=2^{n-1}$ حيث m هو اكبر عدد زوجي بحيث $m\le n$

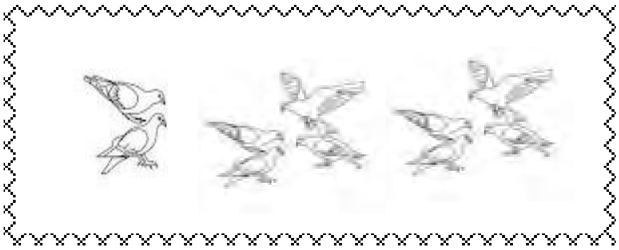
٨) اثبت أن : $\binom{11}{0}+\binom{11}{2}+\ldots\ldots+\binom{11}{10}=\binom{11}{1}+\binom{11}{3}+\ldots\ldots+\binom{11}{11}$

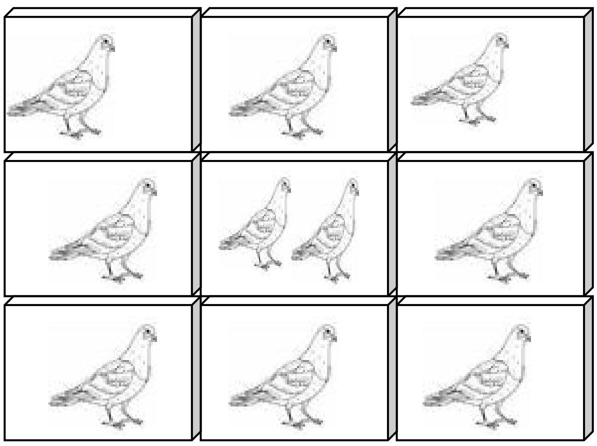
مبدأ برج الحمام

يعتبر مبدأ برج الحمام من المبادئ الحسابية التي قد ترد في الحياة اليومية وقد تتعرض لموقف أو تجربة وتستخلص منها النتيجة باستخدام هذا المبدأ .

ينص مبدأ برج الحمام (مبدأ درشليه) على أنه :

إذا كان لدينا $n+1$ حمامة ونريد وضعها في n صندوق فيوجد على الأقل صندوق به أكثر من حمامة





وبصورة عامة :

إذا كان لدينا $nk+1$ حمامة ونريد وضعها في n صندوق فيوجد على الأقل صندوق به أكثر من $k+1$ حمامة

ويكون النص الرياضي لمبدأ برج الحمام :

على أنه إذا كان لديك $n+1$ شيئا ونريد وضعها في n موضعا فإن أحد هذه المواضع على الأقل يحتوي على شيئين أو أكثر.

صيغة أخرى لمبدأ برج الحمام: إذا كان لدينا $nk+1$ شيئا ونريد وضعها في n موضعا فإن أحد هذه المواضع على الأقل يحتوي على $k+1$ شيئا أو أكثر.

مثال (١) :

اثبت انه إذا كان عدد طلاب فصلك 25 طالباً فإن ثلاثة منهم على الأقل ولدوا في الشهر نفسه .

الحل :

نفرض انه لدينا 12 موضعاً ، كل موضع يخص شهر من السنة بحيث يقف كل طالب في الموضع الخاص بشهر ميلاده

إذاً أحد هذه المواضع يوجد به على الأقل ثلاثة طلاب أو أكثر

مثال (٢)

اثبت أن كل تجمع فيه n من الأشخاص يوجد بينهما اثنان على الأقل لهما نفس العدد من المعارف (الأصدقاء) داخل هذا التجمع ،

هنا خذ في الاعتبار أن الشخص x صديق للشخص y ، وهذا يعني أن y صديق x .

الحل :

لننشئ n موضعا : $0,1,2,.....,k,....(n-2),(n-1)$

وكل موضع نحدد له رقم وحيد k من بين الأرقام ليتجمع في ذلك الموضع الأشخاص الذين لهم k من الأصدقاء

فمثلاً : الموضع ذو الرقم (0) سيجتمع فيه أولئك الذين لا يعرفون احد .

الموضع ذو الرقم (1) سيجتمع فيه أولئك الذين لكل فرد منهم صديق واحد فقط .

الموضع ذو الرقم (2) سيجتمع فيه أولئك الذين لكل فرد منهم صديقين .

الآن لننظر أولا للموضع رقم صفر: إذا كان هناك شخص على الأقل في هذا الموضع فهذا يعني أنه لا يعرف أحدا وبالتالي لا يعرفه أحد وبالتالي الموضع رقم $(n-1)$ ليس فيه أحد لأنه خاص بمن يعرف الكل وبذلك يتوزع n شخصا على $(n-1)$ موضعا.

أما إذا كان الموضع رقم صفر خاليا فإن n شخصا سيوزعون على بقية المواضع وعددها $(n-1)$.

إذا في كلتا الحالتين سيتوزع n شخصا على $(n-1)$ موضعا ومن مبدأ برج الحمام أحد هذه المواضع فيه شخصين أو أكثر، وهذا يبين أن شخصين على الأقل لهما نفس العدد من الأصدقاء.

مثال (٣)

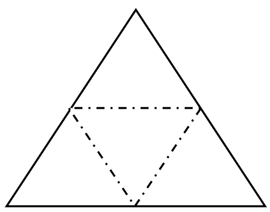
لدينا 5 نقط داخل مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 2 سنتمتراً ، أثبت وجود نقطتين على الأقل المسافة بينهما أقل من 1 سنتمتر .

الحل :

نقسم المثلث إلى أربع مثلثات كل منها طول ضلعه 1

من مبدأ برج الحمام عند توزيع النقاط الخمس على هذه الأجزاء

لابد من وجود نقطتين في نفس المثلث وبالتالي المسافة بينهما اقل من 1



١) حقيبة فيها 6 أقلام زرقاء و 8 حمراء و 11 سوداء ، ما هو أقل عدد من الأقلام التي يجب سحبها عشوائياً من الحقيبة حتى نضمن أن من بينها 5 أقلام على الأقل لون واحد ؟

٢) لنفرض أن مطار الملك فهد الدولي يستقبل 1500 طائرة يومياً . أثبت أنه يوجد طائرتان على الأقل تهبطان في غضون دقيقة في المطار .

٣) اختيرت 17 نقطة داخل مربع طول ضلعه 8 أثبت أنه يوجد نقطتان على الأقل المسافة بينهما أقل من أو تساوي $2\sqrt{2}$

٤) يعمل في شركة توزيع جرائد ما 505 عامل توزيع .كل عامل يوزع على الأقل 10 جرائد وعلى الأكثر 30 جريدة يومياً . اثبت أن هناك على الأقل 25 من العمال سيوزع نفس عدد الجرائد يومياً .

٥) 100 نقطة مرسومة داخل مكعب طول ضلعه 1 سم . أثبت أنه توجد أربع نقط على الأقل محتواه داخل مكعب حجمه $\frac{1}{27}$

٦) لتكن A مجموعة من الأعداد الصحيحة فيها 21 عدد . أثبت وجود عددين $x, y \in A$ بحيث أن : $x - y$ يقبل القسمة على 20

٧) تم تلوين جميع نقاط المستوى باستخدام لونين فقط الأحمر والأزرق . أثبت أن هناك نقطتان لهما نفس اللون المسافة بينهما 99 .

المراجع

[١] الجوعي، عبدالله محمد ، مسائل تحضيرية لأولمبياد الرياضيات ، مطابع الحميضي ، ١٤٣١ هـ / ٢٠١٠ م

[٢] فوزي الذكير ،أندريكا دورين ، رياضيات الأولمبياد – الجبر ،دار الخريجي للنشر والتوزيع ، ١٤٣٢ هـ/ ٢٠١١ م

[٣] د.صالح عبدالله ، د. معروف عبدالرحمن سمحان والسنوسي ،استراتيجيات المسائل ، دار الخريجي ، ٢٠١٥ م

[٤] د. معروف سمحان ، نظرية الاعداد وتطبيقاتها ،دار الخريجي للنشر والتوزيع ، ٢٠١٠ م

[٥] احمد حميد شراري والدكتور محمد الزهيري ، مقدمة في نظرية الاعداد ، جامعة الملك عبدالعزيز– دار الحميضي –٢٠١٢ م

[6] Richard Rusczyk, Introduction to Algebra , Aops Incorporated.2008

[٦] طارق الصيعري – فوزية المغامسي ، اولمبياد الرياضيات للمبتدئين ٢٠١٤

[٧] سلطان البركاتي – مبادئ اسلسية لاولمبياد الرياضيات