الفصل 1 ملاحظات

مشروع الفصل

أسلوب العمل

يستعمل الطلاب ما تعلموه لإيجاد قيم الدوال.

- اطلب إليهم اختيار دالة من اهتماماتهم؛ فمثلًا، يهتم الطلاب بكرة القدم، لذا بإمكانهم رصد عدد الأهداف التي سُجِّلت عبر الزمن خلال موسم كروي.
- عندما يقرر الطلاب ماهية الدالة التي سوف يكتبونها، اطلب إليهم جمع البيانات اللازمة لكتابة قاعدتها.
- اطلب إلى الطلاب تمثيل الدالة وتحديد مجالها، مداها، قيمها القصوى، مقطع المحور y لها ، وأصفارها. واطلب إليهم كتابة المعاني العملية لهذه القيم.
- اطلب إلى الطلاب إيجاد الدالة العكسية الخاصة بدالة كل منهم إن وجدت، وكتابة فائدتها. ثم تحديد مجال الدالة العكسية ومناقشة دلالتها في سياق المسألة.

المفردات: قدِّم مفردات الفصل مستعملًا الخطوات الآتية:

تعريف: يقال لعلاقتين بأنهما متعاكستان، إذا وفقط إذا كان كل زوج (b, a) ينتمي إلى إحدى العلاقتين فإن (a, b) ينتمي إلى العلاقة الأخرى.

مثال: العلاقة العكسية لِـ $f(x) = x^2 + 1$ هي $y = \pm\sqrt{x - 1}$

سؤال: ما العلاقة بين منحنى دالة ومنحنى الدالة العكسية لها؟ منحنى الدالة ومنحنى الدالة العكسية لها متماثلان حول المستقيم $y = x$.

الفصل 1 تحليل الدوال
Analyzing Functions

فيما سبق:

درستُ الدوال وتمثيلاتها البيانية.

والآن:

- أستكشف تماثل منحنيات الدوال.
- أبحثُ الاتصال وأجدُ متوسط معدل تغير دالة.
- أستعملُ النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.
- أجدُ الدالة العكسية جبريًا وبيانيًا.

لماذا؟

إدارة أعمال: تُستعملُ الدوالُ في عالم الأعمال والتجارة لتحليل التكلفة، والتنبُّؤ بالمبيعات، وحساب الأرباح، وتوقُّع التكاليف، وتقدير الانخفاض في القوة الشرائية ... إلخ.

قراءة سابقة: كوِّن قائمة بالأشياء التي تعرفها عن الدوال، ثم تنبأ بما ستتعلمه في هذا الفصل.

8 الفصل 1 تحليل الدوال

قراءة سابقة

شجِّع الطلاب على الإعداد المسبق لكل درس بطريقة جيدة تتم من خلال قراءته قراءة سريعة، ثم قراءة متأنية، وأعطهم الوقت الكافي؛ لمناقشة ما يحتويه الدرس من أفكار ومفردات أساسية، واطلب إليهم كتابة استفساراتهم التي لم يتوصلوا إلى الإجابة عنها، وما صعب عليهم فهمه؛ وذلك لمناقشتها في أثناء تقديم الدرس.

تنويع التعليم

نموذج بناء المفردات، ص (9) .

يكمل الطلاب هذا النموذج بكتابة تعريف كل مفردة جديدة تظهر لهم في أثناء دراسة الفصل أو مثال عليها، ويستفيدون من ذلك في أثناء المراجعة والاستعداد لاختبار الفصل.

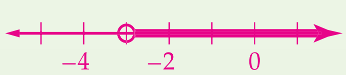
المعالجة

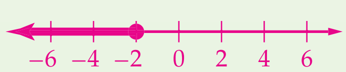
استعمل نتائج الاختبار السريع ومخطط المعالجة أدناه؛ لمساعدتك على تحديد مستوى المعالجة المناسب. كما تساعد العبارة " إذا ... فقم"، في المخطط على تحديد المستوى المناسب للمعالجة، واقتراح مصادر لكل مستوى.

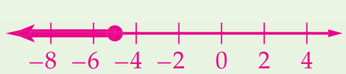
مخطط المعالجة

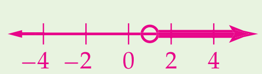
المستوى 1	ضمن المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب فيما لا يزيد على 25% تقريبًا من الأسئلة.
فقم	بمراجعة تمثيل المتباينات على خط الأعداد، وحل المعادلات بالنسبة لمتغير، وإيجاد قيمة عبارة عند قيمة معطاة للمتغير.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة.
فقم	بتحديد أخطائهم، ووضع أنشطة علاجية لذلك.
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com

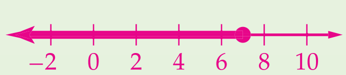
إجابات:

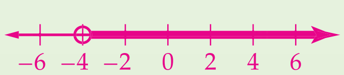
1)


2)


3)


4)


5)


6)


التهيئة للفصل 1

تشخيص الاستعداد: هناك بديلان للتأكد من المتطلبات السابقة.

البديل 1

أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

مثّل كلًّا من المتباينات الآتية على خط الأعداد:

1) $x > -3$
2) $x \le -2$
3) $x \le -5$
4) $x > 1$
5) $7 \ge x$
6) $-4 < x$

(1–6) انظر الهامش.

حلّ كلًّا من المعادلات الآتية بالنسبة إلى y:

7) $y - 3x = 2$ $y = 2 + 3x$
8) $y + 4x = -5$ $y = -5 - 4x$
9) $2x - y^2 = 7$ $y = \pm\sqrt{2x - 7}$
10) $y^2 + 5 = -3x$ $y = \pm\sqrt{-3x - 5}$
11) $9 + y^3 = -x$ $y = \sqrt[3]{-x - 9}$
12) $y^3 - 9 = 11x$ $y = \sqrt[3]{11x + 9}$

13) **حلوى:** يستعملُ صانع حلوى المعادلة $n = 12D$ ، حيث D عدد العبوات الكرتونية من الحلوى، و n العدد الكلي من قطع الحلوى التي تم بيعها. كم عبوة كرتونية من الحلوى تم بيعها إذا كان عدد القطع المبيعة 312 قطعة؟ $D = \frac{n}{12}$؛ 26 عبوة

أوجد قيمة كل من العبارات الآتية عند القيمة المعطاة للمتغير بجانبها:

14) $3y - 4, y = 2$ 2
15) $2b + 7, b = -3$ 1
16) $x^2 + 2x - 3, x = -4a$ $16a^2 - 8a - 3$
17) $5z - 2z^2 + 1, z = 5x$ $-50x^2 + 25x + 1$
18) $-4c^2 + 7, c = 7a^2$ $-196a^4 + 7$
19) $2 + 3p^2, p = -5 + 2n$ $12n^2 - 60n + 77$

20) **درجات حرارة:** تُستعملُ المعادلة $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ للتحويل بين درجات الحرارة بالقياس الفهرنهايتي والسيليزي، حيث تمثّل C الدرجات السيليزية، و F الدرجات الفهرنهايتية، فإذا كانت درجة الحرارة $73°F$، فأوجد درجة الحرارة السيليزية المقابلة لها مقربة إلى أقرب جزء من عشرة. $22.8°C$

البديل 2

أسئلة تهيئة إضافية على الموقع www.obeikaneducation.com

مراجعة المفردات

القانون العام (quadratic formula):

تعطى حلول المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ بالصيغة:

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ، حيث $a \neq 0$

الميل (slope):

نسبة التغير في الإحداثي y إلى التغير في الإحداثي x .

كثيرة الحدود بمتغير واحد (polynomial in one variable):

هي عبارة جبرية على الصورة:

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ،

حيث $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ أعداد حقيقية، $a_n \neq 0$ ،

n عدد صحيح غير سالب.

الدالة النسبية (rational function):

هي دالة على الصورة $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ ؛ حيث $a(x), b(x)$ دالتا كثيرتا حدود، و $b(x) \neq 0$

الجذر النوني (nth root):

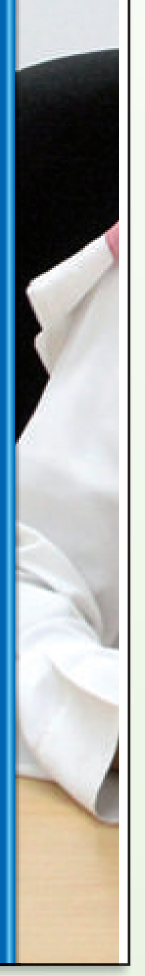
العملية العكسية لرفع عدد لقوة (n) هي إيجاد الجذر النوني للعدد.

ويشير الرمز $\sqrt[n]{\ }$ إلى الجذر النوني.

الدليل — رمز الجذر

$$\sqrt[n]{81}$$

ما تحت الجذر



تنويع التعليم

دون ضمن

قائمة اطلب إلى الطلاب عمل قائمة بالتعريفات الواردة، وكتابة مثال على كل منها في أثناء دراستهم للفصل؛ لاستعمالها كوسيلة مراجعة لاختبار الفصل.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-1

دراسة المجموعات ورموزها.

الدرس 1-1

وصف مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

تعرّف الدوال وحساب قيمها وإيجاد مجالاتها.

ما بعد الدرس 1-1

تعيين مدى الدالة ومقطعها y وأصفارها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

و اسأل:

- أعطِ مثالًا على متغير يعطي الزيادة في أحدهما زيادة في الآخر.
  إجابة ممكنة: زيادة طول أرض الغرفة يعطي زيادة في مساحتها.
- أعطِ مثالًا على متغيرين تعطي الزيادة في أحدهما نقصانًا في الآخر.
  إجابة ممكنة: زيادة التكاليف تعطي نقصًا في الأرباح.
- هل يمكن أن تعطي الزيادة في أحد المتغيرين زيادة ونقصانًا في المتغير الآخر؟ نعم. إجابة ممكنة: زيادة الإنتاج لتغطية الطلب في السوق يزيد الربح، لكن زيادة الإنتاج أكثر من طلب السوق يؤدي إلى نقصان الربح .

1-1 الدوال
Functions

فيما سبق:

درستُ مجموعات الأعداد ورموزها. (مهارة سابقة)

والآن:

- أصفُ مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.
- أتعرف الدوال، وأحسب قيمها، وأجد مجالاتها.

المفردات:

الصفة المميزة للمجموعة
set-builder notation

رمز الفترة
interval notation

الدالة
function

رمز الدالة
function notation

المتغير المستقل
independent variable

المتغير التابع
dependent variable

الدالة المتعددة التعريف
piecewise-defined function

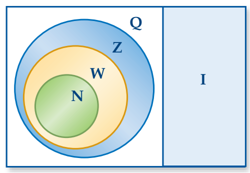
www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تتضمن الكثير من الأحداث في حياتنا كميتين مرتبطتين معًا؛ فقيمة فاتورة الكهرباء مثلًا تعتمد على كمية الاستهلاك؛ لذا يمكنك تخفيض قيمة فاتورة منزلكم والابتعاد عن الإسراف المنهي عنه بترشيد الاستهلاك.

وصف مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية: تستعملُ الأعداد الحقيقية لوصف كميات مثل النقود، والزمن والمسافة، وتحتوي مجموعة الأعداد الحقيقية R على المجموعات الجزئية الآتية:

مفهوم أساسي — الأعداد الحقيقية



الرمز	المجموعة	أمثلة
Q	الأعداد النسبية	$0.125, -\frac{7}{8}, \frac{2}{3} = 0.666...$
I	الأعداد غير النسبية	$\pi, \sqrt{3} = 1.73205...$
Z	الأعداد الصحيحة	$-5, 17, -23, 8$
W	الأعداد الكلية	$0, 1, 2, 3...$
N	الأعداد الطبيعية	$1, 2, 3, 4...$

يمكن وصف هذه المجموعات ومجموعات جزئية أخرى من الأعداد الحقيقية باستعمال **الصفة المميزة للمجموعة**؛ إذ تستعملُ الصفة المميزة للمجموعة خصائص الأعداد ضمن المجموعة لتعريفها. ويقرأ الرمز " | " حيث، والرمز " ∈ " ينتمي إلى أو عنصر في .

$$\{x \mid -3 \le x \le 16, x \in Z\}$$

الأعداد x حيث...

x لها هذه الخصائص...

x ينتمي إلى مجموعة الأعداد المعطاة.

مثال 1 استعمال الصفة المميزة

اكتب كلًّا من مجموعات الأعداد الآتية باستعمال الصفة المميزة للمجموعة:

a) $\{8, 9, 10, 11, ...\}$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الكلية الأكبر من أو تساوي 8.

$\{x \mid x \ge 8, x \in W\}$ وتقرأ مجموعة الأعداد x، حيث x أكبر من أو تساوي 8، وَ x تنتمي إلى مجموعة الأعداد الكلية.

b) $x < 7$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الحقيقية التي تقل عن 7.

$\{x \mid x < 7, x \in R\}$

c) $-2 < x < 7$

تتكون المجموعة من كل الأعداد الحقيقية التي تزيد على -2 وتقل عن 7.

$\{x \mid -2 < x < 7, x \in R\}$

تحقق من فهمك

1A) $\{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ $\{x \mid x \ge 1, x \in W\}$

1B) $x \le -3$ $\{x \mid x \le -3, x \in R\}$

1C) $-1 \le x \le 5$ $\{x \mid -1 \le x \le 5, x \in R\}$

مصادر الدرس 1-1

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (12)	• تنويع التعليم ص (12)	• تنويع التعليم ص (17)
كتاب التمارين	• ص (4)	• ص (4)	• ص (4)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (6) • تدريبات حل المسألة، ص (8)	• تدريبات حل المسألة، ص (8) • التدريبات الإثرائية، ص (9)	• تدريبات حل المسألة، ص (8) • التدريبات الإثرائية، ص (9)

قراءة الرياضيات

غير محدودة: تسمى الفترة غير محدودة إذا كانت قيمها تزداد أو تنقص دون حدود (دون توقف).

تُستعملُ **رموز الفترات** لوصف المجموعات الجزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية، فيُستعمل الرمزان "[" أو "]" للدلالة على انتماء طرف الفترة إليها، بينما يُستعملُ الرمزان "(" أو ")" للدلالة على عدم انتماء طرف الفترة إليها. أما الرمزان "$-\infty$" أو "∞" فيُستعملان للدلالة على أن الفترة غير محدودة.

فترات محدودة		فترات غير محدودة	
المتباينة	رمز الفترة	المتباينة	رمز الفترة
$a \le x \le b$	$[a, b]$	$x \ge a$	$[a, \infty)$
$a < x < b$	(a, b)	$x \le a$	$(-\infty, a]$
$a \le x < b$	$[a, b)$	$x > a$	(a, ∞)
$a < x \le b$	$(a, b]$	$x < a$	$(-\infty, a)$
		$-\infty < x < \infty$	$(-\infty, \infty)$

مثال 2 استعمال رمز الفترة

اكتب كلًّا من المجموعات الآتية باستعمال رمز الفترة:

a) $-8 < x \le 16$ $\quad (-8, 16]$

b) $x < 11$ $\quad (-\infty, 11)$

c) $x > 5$ أو $x \le -16$ $\quad (-\infty, -16] \cup (5, \infty)$

إرشادات للدراسة

الرمزان $\cup$، $\cap$: يُقرأ الرمز "$\cup$" (اتحاد)، ويعني: جميع العناصر المنتمية إلى كلا المجموعتين. يُقرأ الرمز "$\cap$" (تقاطع)، ويعني: جميع العناصر المشتركة بين المجموعتين.

تحقق من فهمك

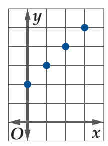
2A) $-4 \le y < -1$ $\quad [-4, -1)$ 2B) $a \ge -3$ $\quad [-3, \infty)$ 2C) $x > 9$ أو $x < -2$ $\quad (-\infty, -2) \cup (9, \infty)$

تمييز الدالة: تذكَّر أن العلاقة هي قاعدة تربط عناصر مجموعة مثل A (المدخلات) مع عناصر من مجموعة مثل B (المخرجات)، حيث تُسمى A مجال العلاقة، وأما المجموعة B فتتضمن عناصر المدى جميعها، وهناك أربع طرق لتمثيل العلاقة بين مجموعتين من الأعداد الحقيقية هي:

1) **لفظيًا:** جملة تصف كيفية ارتباط عناصر المجال بعناصر المدى.
مثلًا: يرتبط كل عنصر من المجال بالعنصر الذي يزيد عليه قيمةً بمقدار 2 من المدى.

2) **عدديًا:** جدول من القيم أو مخطط سهمي أو مجموعة من الأزواج المرتبة تربط عنصرًا من المجال (قيمة x) بعنصر من المدى (قيمة y).
مثلًا: $\{(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5)\}$

3) **بيانيًا:** تحديد نقاط في المستوى الإحداثي تمثّل الأزواج المرتبة.



4) **جبريًا:** معادلة جبرية تربط بين الإحداثيين x, y لكل زوج من الأزواج المرتبة. مثلًا: $y = x + 2$

أما **الدالة** فهي حالة خاصة من العلاقة.

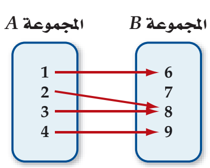
إرشادات للدراسة

المجال والمدى: في هذا المفهوم الأساسي، يمكن أن يستعمل الرمز D للتعبير عن المجال، والرمز R للتعبير عن المدى، أي أن:
D = {1, 2, 3, 4}
R = {6, 8, 9}

مفهوم أساسي الدالة

التعبير اللفظي: الدالة f من مجموعة A إلى مجموعة B هي علاقة تربط كل عنصر x من المجموعة A بعنصر واحد فقط y من المجموعة B.

مثال: العلاقة من المجموعة A إلى المجموعة B الممثَّلة في المخطط المجاور تمثّل دالةً.
حيث تمثّل المجموعة A مجال الدالة.
المجال = $\{1, 2, 3, 4\}$.
وتتضمن المجموعة B مدى الدالة.
المدى = $\{6, 8, 9\}$.



وصف مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية

مثال 1 يبيِّن كيفية التعبير عن مجموعات من الأعداد بالصفة المميزة للمجموعة.

مثال 2 يبيِّن كيفية التعبير عن مجموعات من الأعداد باستعمال رمز الفترة.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثالان إضافيان

1 اكتب كلًّا من مجموعات الأعداد الآتية باستعمال الصفة المميزة للمجموعة.

a) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
$\{x \mid 2 \le x \le 7, x \in W\}$

b) $x > -17$.
$\{x \mid x > -17, x \in R\}$

c) مضاعفات العدد 7 جميعها.
$\{x \mid x = 7n, n \in Z\}$

2 اكتب كلًّا من المجموعات الآتية باستعمال رمز الفترة:

a) $-2 \le x \le 12$
$[-2, 12]$

b) $x > -4$ $\quad (-4, \infty)$

c) $x < 3$ أو $x \ge 54$
$(-\infty, 3) \cup [54, \infty)$

المحتوى الرياضي

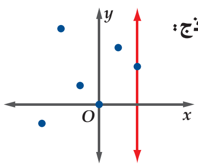
رمز الفترة يُستعمل الرمزان "(" أو ")" عندما لا يكون طرف الفترة إحدى نقاطها، في حين يُستعمل الرمزان "[" أو "]" عندما يكون طرف الفترة إحدى نقاطها. لاحظ أن (a, a) و $(a, a]$ و $[a,a)$ تمثّل المجموعة الخالية، في حين تمثل $[a, a]$ المجموعة $\{a\}$.

كما يمكن تعريف الدالة على أنها مجموعة من الأزواج المرتبة التي لا يتساوى فيها الإحداثي x لزوجين مختلفين، وهندسيًّا لا يمكن لنقطتين من نقاط الدالة أن تقعا على مستقيم رأسي واحد في المستوى الإحداثي .

مفهوم أساسي اختبار الخط الرأسي

التعبير اللفظي: تُمَثِّل مجموعة من النقاط في المستوى الإحداثي دالة إذا لم يقطع أي خط رأسي تمثيلها البياني في أكثر من نقطة.

النموذج:



إرشادات للدراسة

جدوليًا: إذا قطع الخط الرأسي التمثيل البياني في أكثر من نقطة، فإن إحدى قيم x ترتبط بأكثر من قيمة من قيم y ، كما يوضح الجدول أدناه:

x	y
−2	−4
3	−1
3	4
5	6
7	9

مثال 3 تحديد العلاقات التي تمثِّل دوالّ

في كل علاقة مما يأتي، حدّد ما إذا كانت y تمثِّل دالةً في x أم لا:

a) تمثِّل قيم x رقم الطالب، وقيم y درجته في اختبار الفيزياء.

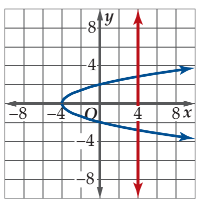
ترتبط كل قيمة لـ x بقيمة واحدة لـ y ؛ إذ لا يمكن للطالب الحصول على درجتين مختلفتين في اختبار واحد؛ لذا فإن y تمثِّل دالة في x .

b)

x	y
−8	−5
−5	−4
0	−3
3	−2
6	−3

ترتبط كل قيمة لـ x بقيمة واحدة فقط لـ y ، وعليه فإن y تمثِّل دالةً في x .

c)



بما أنه يوجد خط رأسي مثل: $x = 4$ يقطع التمثيل البياني في أكثر من نقطة ، فإنّ y لا تمثِّل دالةً في x .

d) $y^2 - 2x = 5$

كي تحدّد ما إذا كانت y تمثِّل دالةً في x ، حلّ المعادلة بالنسبة لـ y.

$y^2 - 2x = 5$ المعادلة الأصلية

$y^2 = 5 + 2x$ أضف $2x$ لكلا الطرفين

$y = \pm\sqrt{5 + 2x}$ خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

y لا تمثِّل دالةً في x؛ لأن كل قيمة من قيم x الأكبر من -2.5 ترتبط بقيمتين لـ y، إحداهما موجبة ، والأخرى سالبة.

إرشادات للدراسة

دوال تتكرر فيها قيم y: لا يمكن أن ترتبط أكثر من قيمة لـ y بقيمة واحدة لـ x في الدالة، بينما يمكن أن ترتبط قيمة واحدة لـ y بأكثر من قيمة لـ x كما في المثال 3b .

تحقق من فهمك

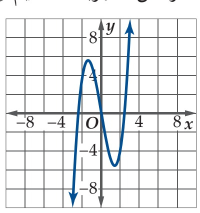
3A) تمثّل قيم x كمية الاستهلاك الشهري لأسرة من الكهرباء، أما قيم y فتمثِّل المبلغ المستحق مقابل الاستهلاك. دالة

3B)

x	y
−6	−7
2	3
5	8
5	9
9	22

ليست دالة

3C)



دالة

3D) $3y + 6x = 18$ دالة

مثال إضافي

3 في كل علاقة مما يأتي، حدّد ما إذا كانت y تمثِّل دالةً في x أم لا:

a) تمثل قيم المدخلات x طول الطالب بالبوصات، وقيم المخرجات y عدد الكتب التي يمتلكها الطالب.

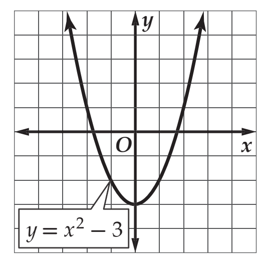
ليست دالة؛ لأنه ربما ترتبط أكثر من قيمة لـ y بقيمة واحدة لـ x.

b)

x	y
1	0
1	1
4	−2
4	2
9	−3

ليست دالة؛ لأن القيمتين $2, -2$ من y ترتبطان بالقيمة 4 من x .

c)



دالة؛ لأن أي خط رأسي يقطع التمثيل البياني في نقطة واحدة فقط .

d) $x = 3y^2$

ليست دالة؛ لأنه عند حل المعادلة بالنسبة إلى y نجد أن كل قيمة لـ x أكبر من الصفر ترتبط بقيمتين لـ y

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون الطبيعيون: اطلب إلى الطلاب تسمية ثلاثة أشياء لكل منها وجه واحد على الأقل على شكل مربع، واطلب إليهم تدوين معلومات عن طول ضلع المربع ومساحته. ثم انقل هذه البيانات على السبورة وتحدَّ الطلاب بالبحث عن دالة تمثل العلاقة بين طول ضلع المربع ومساحته. $A(s) = s^2$

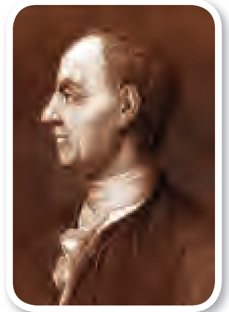
التعليم باستعمال التقنيات

السبورة التفاعلية: قسّم طلاب الصف إلى مجموعات ثنائية أو ثلاثية، واطلب إليهم إعطاء دالتين وعلاقتين لا تمثلان دوال، ثم اطلب إليهم تمثيل العلاقات الأربع بيانيًّا لتوضيح أي منها تمثل دوالًّ. لاحظ أن العلاقات التي لا تمثل دوالَّ تُمثَّل بشكل انتشار.

يُستعملُ $f(x)$ **رمزًا للدالة**، ويُقرأ (f الـ x) ويعني قيمة الدالة f عند x . وبما أن $f(x)$ تمثّل قيمة y التي ترتبط بقيمة x، فإننا نكتب: $y = f(x)$.

الدالة المرتبطة بالمعادلة	المعادلة
$f(x) = -6x$	$y = -6x$

يمثّل المتغير x قيم المجال ويسمى **متغيرًا مستقلاً**. ويمثل المتغير y قيم المدى ويسمى **متغيّرًا تابعًا**.



الربط مع تاريخ الرياضيات

ليونارد أويلر (1707م – 1783م)
عالم رياضي سويسري كتب أكثر من 800 بحث في الرياضيات، وهو أول من استعمل رمز الدالة $f(x)$.

مثال 4 إيجاد قيم الدالة

إذا كان $f(x) = x^2 + 8x - 24$، فأوجد قيمة الدالة في كل مما يأتي:

a) $f(6)$

لإيجاد $f(6)$، عوّض 6 مكان x في الدالة $f(x) = x^2 + 8x - 24$.

$f(x) = x^2 + 8x - 24$ الدالة الأصلية

$f(6) = (6)^2 + 8(6) - 24$ عوّض 6 مكان x

$= 36 + 48 - 24$ بسّط

$= 60$ بسّط

b) $f(-4x)$

$f(x) = x^2 + 8x - 24$ الدالة الأصلية

$f(-4x) = (-4x)^2 + 8(-4x) - 24$ عوّض $-4x$ مكان x

$= 16x^2 - 32x - 24$ بسّط

c) $f(5c + 4)$

$f(x) = x^2 + 8x - 24$ الدالة الأصلية

$f(5c + 4) = (5c + 4)^2 + 8(5c + 4) - 24$ عوّض $(5c + 4)$ مكان x

$= 25c^2 + 40c + 16 + 40c + 32 - 24$ فك الأقواس $(5c + 4)^2$ و $8(5c + 4)$

$= 25c^2 + 80c + 24$ بسّط

تحقق من فهمك

إذا كانت $f(x) = \frac{2x + 3}{x^2 - 2x + 1}$، فأوجد قيمة الدالة في كل مما يأتي:

4A) $f(12)$ $\frac{27}{121}$ **4B)** $f(6x)$ $\frac{12x + 3}{36x^2 - 12x + 1}$ **4C)** $f(-3a + 8)$ $\frac{-6a + 19}{9a^2 - 42a + 49}$

إذا لم يذكر مجال الدالة فإنه يكون مجموعة الأعداد الحقيقية، مع استثناء القيم التي تجعل مقام الكسر صفرًا أو تجعل ما تحت الجذر عددًا سالبًا إذا كان دليل الجذر زوجيًا.

مثال 5 تحديد مجال الدالة جبريًا

حدِّد مجال كلٍّ من الدوال الآتية:

a) $f(x) = \frac{2 + x}{x^2 - 7x}$

تكون العبارة $\frac{2 + x}{x^2 - 7x}$ غير معرّفة إذا كان المقام صفرًا، وبحل المعادلة $x^2 - 7x = 0$، فإن القيم المستثناة من المجال هي $x = 0$ و $x = 7$، وعليه يكون مجال الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية عدا $x = 0$ و $x = 7$، أي $D = \{x \mid x \neq 0, x \neq 7, x \in R\}$ أو $D = (-\infty, 0) \cup (0, 7) \cup (7, \infty)$.

b) $g(t) = \sqrt{t - 5}$

بما أن الجذر التربيعي للعدد السالب غير معرف، فيجب أن تكون $t - 5 \geq 0$ ؛ أي أن مجال الدالة g هو مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي 5 أي أن $D = \{x \mid x \geq 5, x \in R\}$ أو $D = [5, \infty)$.

إرشادات للدراسة

تسمية الدوال:
يمكنك التعبير عن الدالة ومتغيرها المستقل برموز أخرى فمثلاً، $f(x) = \sqrt{x - 5}$ و $g(t) = \sqrt{t - 5}$ يعبران عن الدالة نفسها.

تحديد الدالة

مثال 3 يبيِّن كيفية تحديد العلاقات التي تمثل دوالّ.

مثال 4 يبيِّن كيفية إيجاد قيم دالة عند نقط معطاة.

مثال 5 يبيِّن كيفية تحديد مجال الدالة جبريًّا.

مثال 6 يبيِّن كيفية إيجاد قيم دالة متعددة التعريف عند نقط معطاة.

مثالان إضافيان

4 إذا كان $f(x) = x^2 - 2x - 8$، فأوجد قيمة الدالة في كل مما يأتي:

a) $f(3)$ -5

b) $f(-3d)$ $9d^2 + 6d - 8$

c) $f(2a - 1)$ $4a^2 - 8a - 5$

5 حدِّد مجال كلٍّ من الدوال الآتية:

a) $g(x) = \sqrt{4x - 1}$

$D = \left\{x \middle| x \geq \frac{1}{4}, x \in R\right\}$

أو $D = \left[\frac{1}{4}, \infty\right)$

b) $h(t) = \frac{3t^2}{t^2 - 1}$

$D = \{t \mid t \neq \pm 1, t \in R\}$

أو

$D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$

c) $f(x) = \frac{x - 5}{\sqrt{2x - 3}}$

$D = \left\{x \middle| x > \frac{3}{2}, x \in R\right\}$

أو $D = \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$

c) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$

تكون هذه الدالة معرّفة إذا كان المقام معرّفًا، وقيمته لا تساوي صفرًا، وهذا يعني أنها معرفة عندما يكون $x^2 - 9 > 0$ ، وعليه فإن مجال $h(x)$ هو $D = \{x \mid x < -3$ أو $x > 3, x \in R\}$ أو $D = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$.

5A) $(-\infty, -4) \cup (-4, -3) \cup (-3, \infty)$ أو $\{x | x \neq -4, x \neq -3, x \in R\}$

5B) $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$ أو $\{x | x \leq -2$ أو $x \geq 2, x \in R\}$

تحقق من فهمك

5A) $f(x) = \frac{5x - 2}{x^2 + 7x + 12}$ 5B) $h(a) = \sqrt{a^2 - 4}$ 5C) $g(x) = \frac{8x}{\sqrt{2x + 6}}$

5C) $(-3, \infty)$ أو $\{x | x > -3, x \in R\}$

تُعرَّف بعض الدوال بقاعدتين أو أكثر وعلى فترات مختلفة ، وتُسمّى مثل هذه الدوال **الدوال المتعددة التعريف**.

مثال 6 من واقع الحياة — إيجاد قيم الدالة المتعددة التعريف

طول: إذا كانت العلاقة بين أكبر معدل لطول الطفل $h(x)$ بالبوصة، وأكبر طول لوالديه x بالبوصة معطاة بالدالة:

$$h(x) = \begin{cases} 1.6x - 41.6 \ , & 63 < x < 66 \\ 3x - 132 \ , & 66 \leq x \leq 68 \\ 2x - 66 \ , & x > 68 \end{cases}$$

فأوجد أكبر معدل لطول الطفل في كل من الحالتين الآتيتين :

a) أكبر طول لوالديه 67 بوصة.

بما أن 67 واقعة بين 66 و 68 ، فإننا نستعمل القاعدة $h(x) = 3x - 132$ لإيجاد $h(67)$.

$h(x) = 3x - 132$ — تعريف الدالة في الفترة $66 \leq x \leq 68$

$h(67) = 3(67) - 132$ — عوّض 67 مكان x

$= 201 - 132 = 69$ — بسّط

بناءً على هذه الإجابة فإن الطفل الذي يبلغ أكبر طول لوالديه 67 بوصة، يكون أكبر معدل ممكن لطوله 69 بوصة.

b) أكبر طول لوالديه 72 بوصة.

بما أن 72 أكبر من 68، فإننا نستعمل القاعدة $h(x) = 2x - 66$ لايجاد $h(72)$.

$h(x) = 2x - 66$ — تعريف الدالة في الفترة $x > 68$

$h(72) = 2(72) - 66$ — عوّض 72 مكان x

$= 144 - 66 = 78$ — بسّط

بناءً على هذه الإجابة، فإن الطفل الذي يبلغ أكبر طول لوالديه 72 بوصة، يكون أكبر معدل ممكن لطوله 78 بوصة.

تحقق من فهمك

6) **سرعة :** إذا كانت سرعة مركبة $v(t)$ بالميل لكل ساعة تُعطَى بالدالة المتعددة التعريف الآتية، حيث الزمن t بالثواني:

$$v(t) = \begin{cases} 4t \ , & 0 \leq t \leq 15 \\ 60 \ , & 15 < t < 240 \\ -6t + 1500 \ , & 240 \leq t \leq 250 \end{cases}$$

فأوجد كلًّا مما يأتي:

6A) $v(5)$ **20 mi/h** 6B) $v(15)$ **60 mi/h** 6C) $v(245)$ **30 mi/h**

إرشادات للدراسة

سرعة السيارة: تقاس سرعة السيارة عادة بالميل أو بالكيلومتر لكل ساعة، ويمكن أن تتغير كل ثانية ما لم يستعمل مثبت السرعة.

مثال إضافي

6 **موارد مالية :** تبيّن الدالة المتعددة التعريف معدل سعر المتر المربع الواحد بالريال من الأراضي التجارية بدلالة المساحة الكلية للأرض a .

$$p(a) = \begin{cases} \frac{a - 1000}{40} + 75 \ , & 1000 \leq a < 2600 \\ \frac{-(a - 2600)}{100} + 110 \ , & 2600 \leq a < 4000 \\ \frac{a - 4000}{25} + 98 \ , & a \geq 4000 \end{cases}$$

أوجد معدل سعر المتر المربع الواحد في كل من الحالتين الآتيتين:

a) مساحة الأرض 4000 متر مربع. **98 ريالًا**

b) مساحة الأرض 3200 متر مربع. **104 ريالات**

14 الفصل 1 تحليل الدوال

تدرب وحل المسائل

اكتب كل مجموعة مما يأتي باستعمال الصفة المميزة للمجموعة، وباستعمال رمز الفترة إن أمكن: (المثالان 1, 2) **(1-10)** انظر الهامش.

1) $x > 50$
2) $x < -13$
3) $x \leq -4$
4) $\{-3, -2, -1, \ldots\}$
5) $-31 < x \leq 64$
6) $x > 21$ أو $x < -19$
7) $x \geq 67$ أو $x \leq 61$
8) $x > 86$ أو $x \leq -45$
9) المضاعفات الموجبة للعدد 5
10) $x \geq 32$

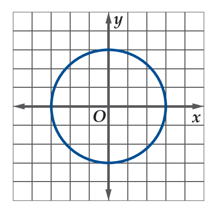
في كل علاقة مما يأتي، حدد ما إذا كانت y تمثل دالةً في x أم لا: (مثال 3)

11) المتغير المستقل x يمثِّل رقم الحساب في البنك، والمتغير y يمثّل الرصيد في الحساب. **دالة**

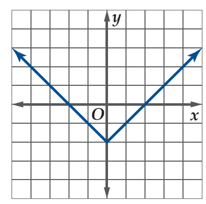
12) **ليست دالة**

x	0.01	0.04	0.04	0.07	0.08	0.09
y	423	449	451	466	478	482

13) $\frac{1}{x} = y$ **دالة**
14) $x^2 = y + 2$ **دالة**
15) $\sqrt{48y} = x$ **دالة**
16) $\frac{x}{y} = y - 6$ **ليست دالة**

17) 

ليست دالة

18) 

دالة

أوجد قيم كل دالة من الدوال الآتية: (مثال 4)

19) $g(x) = 2x^2 + 18x - 14$
a) $g(9)$ **310**
b) $g(3x)$ **$18x^2 + 54x - 14$**
c) $g(1 + 5m)$ **$50m^2 + 110m + 6$**

20) $h(y) = -3y^3 - 6y + 9$
a) $h(4)$ **-207**
b) $h(-2y)$ **$24y^3 + 12y + 9$**
c) $h(5b + 3)$ **$-375b^3 - 675b^2 - 435b - 90$**

21) $f(t) = \frac{4t + 11}{3t^2 + 5t + 1}$ **انظر ملحق الإجابات.**
a) $f(-6)$
b) $f(4t)$
c) $f(3 - 2a)$

22) $g(x) = \frac{3x^3}{x^2 + x - 4}$ **انظر ملحق الإجابات.**
a) $g(-2)$
b) $g(5x)$
c) $g(8 - 4b)$

23) $g(m) = 3 + \sqrt{m^2 - 4}$
a) $g(-2)$ **3**
b) $g(3m)$ **$3 + \sqrt{9m^2 - 4}$**
c) $g(4m - 2)$ **$3 + 4\sqrt{m^2 - m}$**

24) $t(x) = 5\sqrt{6x^2}$
a) $t(-4)$ **$20\sqrt{6}$**
b) $t(2x)$ **$10|x|\sqrt{6}$**
c) $t(7 + n)$ **$5|7 + n|\sqrt{6}$**

25) **مبيعات:** مُثِّلت مبيعات شركة للسيارات خلال خمس سنوات بالدالة: $f(t) = 24t^2 - 93t + 78$، حيث t الزمن بالسنوات، وكانت المبيعات الفعلية موضحة في الجدول المجاور. (مثال 4)

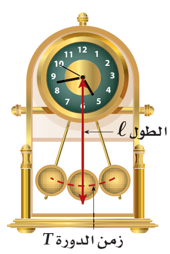
السنة	المبيعات بملايين الريالات
1	1
2	3
3	14
4	74
5	219

a) أوجد $f(1)$. **9 ملايين**
b) أوجد $f(5)$. **213 مليونًا**
c) هل تعتقد أن القاعدة $f(t)$ أكثر دقة في السنة الأولى، أم في السنة الأخيرة؟ برِّر إجابتك. **انظر الهامش.**

حدّد مجال كل دالة مما يأتي: (مثال 5) **(26-31)** انظر ملحق الإجابات.

26) $f(x) = \frac{8x + 12}{x^2 + 5x + 4}$
27) $g(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 3x - 40}$
28) $g(a) = \sqrt{1 + a^2}$
29) $h(x) = \sqrt{6 - x^2}$
30) $f(a) = \frac{5a}{\sqrt{4a - 1}}$
31) $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{4}{x + 1}$

32) **فيزياء:** يعطى زمن الدورة T لبندول ساعة بالصيغة $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{9.8}}$، حيث ℓ طول البندول، فهل تمثّل T دالة في ℓ؟ إذا كانت كذلك فحدّد مجالها، وإذا لم تكن دالة فبيِّن السبب. (مثال 5) **انظر الهامش.**



3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1-35 للتأكد من فهم الطلاب.

ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه!

خطأ شائع: إذا احتاج الطلاب إلى مساعدة لحل المسألة 9، فاكتب المتتالية الآتية:
$5(\mathbf{1}), 5(\mathbf{2}), 5(\mathbf{3}), \ldots$
يوضح هذا أن n هي $1, 2, 3, \ldots$

إجابات:

1) $\{x \mid x > 50, x \in R\}$; $(50, \infty)$
2) $\{x \mid x < -13, x \in R\}$; $(-\infty, -13)$
3) $\{x \mid x \leq -4, x \in R\}$; $(-\infty, -4]$
4) $\{x \mid x \geq -3, x \in Z\}$
5) $\{x \mid -31 < x \leq 64, x \in R\}$; $(-31, 64]$
6) $\{x \mid x < -19$ أو $x > 21, x \in R\}$; $(-\infty, -19) \cup (21, \infty)$
7) $\{x \mid x \leq 61$ أو $x \geq 67, x \in R\}$; $(-\infty, 61] \cup [67, \infty)$
8) $\{x \mid x \leq -45$ أو $x > 86, x \in R\}$; $(-\infty, -45] \cup (86, \infty)$
9) $\{x \mid x = 5n, n \in N\}$
10) $\{x \mid x \geq 32, x \in R\}$; $[32, \infty)$

25c) إجابة ممكنة: إن القاعدة $f(t)$ أكثر دقة في السنة الأخيرة، والتي حققت أعلى مبيعات، حيث إن 213 قريبة بنسبة 3% من 219؛ بينما 9 أكبر بنسبة 800% من 1

32) نعم، إجابة ممكنة: لأن لكل قيمة للطول (l) توجد قيمة واحدة للزمن (T). ومجال الدالة هو: $[0, \infty)$.

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1–35، 53، 54، 56–74
ضمن المتوسط	1–37 (فردي)، 38–40، 41–47 (فردي)، 49، 50، 52–54، 56–74
فوق المتوسط	36–74

أوجد $f(-5)$ و $f(12)$ لكل من الدالتين الآتيتين: (مثال 6)

33) $f(x)=\begin{cases}-4x+3 & , x<3\\ -x^3 & , 3\le x\le 8\\ 3x^2+1 & , x>8\end{cases}$ **23; 433**

34) $f(x)=\begin{cases}-15 & , x<-5\\ \sqrt{x+6} & , -5\le x\le 10\\ \frac{2}{x}+8 & , x>10\end{cases}$ $1; 8\frac{1}{6}$

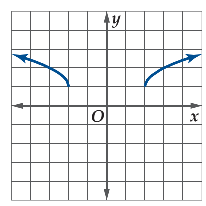
35) **عمل:** تمثل الدالة $T(x)$ أدناه الربح (بالريال) الذي تكسبه شركة توزيع لأجهزة هاتف:

$$T(x)=\begin{cases}2.1x & , 0<x\le 7000\\ 500+2.4x & , 7000<x\le 20000\\ 800+3x & , 20000<x\le 80000\end{cases}$$

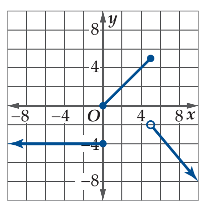
حيث x تمثّل عدد الأجهزة الموزَّعة، فأوجد: $T(7000)$, $T(10000)$, $T(50000)$.
14700 , 24500 , 150800

معتمدًا على اختبار الخط الرأسي ، حدِّد ما إذا كان كل من التمثيلين الآتيين يمثل دالة أم لا، وبرِّر إجابتك. (36, 37 انظر الهامش.

36)



37)



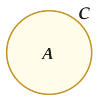
38) **رياضة:** تتكون مسابقة رياضية من ثلاث مراحل: سباحة مسافة 0.4 mi ، وقيادة دراجة هوائية مسافة 5 mi ، وجري مسافة 2.6 mi . فإذا كان معدل سرعة عزام في كل مرحلة من المراحل الثلاث كما في الجدول أدناه:

المرحلة	معدل السرعة
السباحة	4 mi/ h
قيادة الدراجة	20 mi/ h
الجري	6 mi/ h

a) اكتب دالة متعددة التعريف تمثّل المسافة D التي قطعها عزام بدلالة الزمن t. مقرّبًا t إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك. انظر الهامش.

b) حدِّد مجال الدالة. **[0, 0.78]**

39) **هندسة:** يمثّل الشكل أدناه دائرة مساحتها A ومحيطها C.



a) اكتب المساحة كدالة في المحيط. $A(c)=\frac{C^2}{4\pi}$

b) أوجد $A(4)$, $A(0.5)$ مقربًا إلى أقرب جزء من مئة. **1.27, 0.02**

c) ما تأثير زيادة المحيط في المساحة؟ كلما زاد المحيط زادت المساحة.

40) **حسابات:** تتناقص قيمة أجهزة الحاسوب بعد شرائها مع مرور الزمن. وتُستعملُ الدوال الخطية لتمثيل هذا التناقص. فإذا كانت $v(t)=1800-30t$ تمثّل قيمة حاسوب بالريال، بعد t شهر من شراءه. فحدِّد مجال هذه الدالة.
$D=\{t\mid 0\le t\le 60, t\in N\}$

أوجد $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, $f(a)$, $f(a+h)$ ، حيث $h\neq 0$ لكل مما يأتي: (41-48 انظر الهامش.

41) $f(x)=-5$

42) $f(x)=\sqrt{x}$

43) $f(x)=\frac{1}{x+4}$

44) $f(x)=x^2-6x+8$

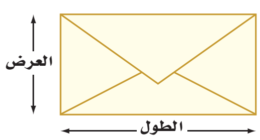
45) $f(x)=-14x+6$

46) $f(x)=x^3+9$

47) $f(x)=5x^2$

48) $f(x)=x^3$

49) **صناعة:** في أحد المعامل الوطنية يتم صنع أغلفة بريدية متفاوتة الأبعاد، بحيث تكون نسبة طول الغلاف إلى عرضه من 1.3 إلى 2.5، فإذا كانت أصغر قيمة لطول الأغلفة المنتجة 5 in ، وأكبر قيمة $11\frac{1}{2}$ in ، فأجب عما يأتي: (a,b انظر الهامش.



a) اكتب مساحة الغلاف A كدالة في طوله ℓ ، إذا كانت نسبة طول الغلاف إلى عرضه 1.8 ، ثم اكتب مجال الدالة.

b) اكتب مساحة الغلاف A كدالة في عرضه h، إذا كانت نسبة طول الغلاف إلى عرضه 2.1 ، ثم اكتب مجال الدالة.

c) أوجد مساحة الغلاف عند أكبر طول ممكن له ، وأكبر نسبة بين طوله وعرضه. **52.9 in²**

في كل من العلاقتين الآتيتين، حدد ما إذا كانت y تمثل دالة في x أم لا. برِّر إجابتك. (50, 51 انظر ملحق الإجابات.

50) $x=|y|$

51) $x=y^3$

تنبيه!

خطأ شائع: ذكّر الطلاب بقاعدتين أساسيتين تتعلقان بالمسائل 26-31 وهما:

1) لا يجوز أن يكون المقام صفرًا.

2) لا يوجد حل حقيقي للجذر التربيعي لعدد سالب.

إرشادات للمعلم الجديد

العلاقات والدوال: في المسألتين 50 و 51، يمكن الكشف عن العلاقات التي تمثّل دوالَّ بسرعة، وذلك بتعيين أزواج مرتبة للعلاقة، لذا فإنه لا حاجة لتمثيل كل علاقة بيانيًّا.

إجابات :

36) دالة، لا يقطع أي خط رأسي المنحنى أكثر من مرة .

37) ليست دالة؛ لأن الخط الرأسي (المحور y) يقطع التمثيل البياني في النقطتين $(0,-4)$, $(0,0)$.

38a) $D(t)=\begin{cases}4t , & 0\le t\le 0.1\\ 20t-1.6 , & 0.1<t\le 0.35\\ 6t+3.32 , & 0.35<t\le 0.78\end{cases}$

41) -5 , -5 , 0

42) $\sqrt{a}$, $\sqrt{a+h}$, $\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$

43) $\frac{1}{a+4}$, $\frac{1}{a+h+4}$, $\frac{-1}{a^2+ah+8a+4h+16}$

44) $a^2-6a+8, a^2+2ah+h^2-6a-6h+8, 2a-6+h$

45) $-14a+6, -14a-14h+6, -14$

46) $a^3+9 , a^3+3a^2h+3ah^2+h^3+9, 3a^2+3ah+h^2$

47) $5a^2 , 5a^2+10ah+5h^2 , 10a+5h$

48) $a^3 , a^3+3a^2h+3ah^2+h^3 , 3a^2+3ah+h^2$

49a) $A(\ell)=\frac{\ell^2}{1.8}$; [5,11.5]

49b) $A(h)=2.1h^2$, [2.4, 5.5]

52) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة مدى الدالة $f(x) = x^n$ حيث $n \in N$. **(a–d) انظر ملحق الإجابات.**

a) **بيانيًا:** استعمل الحاسبة البيانيّة لتمثل الدالة $f(x) = x^n$ بيانيًّا لقيم n الصحيحة من 1 إلى 6.

b) **جدوليًا:** تنبأ بمدى كل دالة من الدوال التي مثّلتها في الفرع **a**، واعرضه في جدول يتضمن قيم n، والمدى المرتبط بكل منها.

c) **لفظيًا:** خمّن مدى الدالة $f(x)$ عندما يكون n زوجيًا.

d) **لفظيًا:** خمّن مدى الدالة $f(x)$ عندما يكون n فرديًا.

مسائل مهارات التفكير العليا

53) **اكتشف الخطأ:** أراد كلّ من عبد الله وسلمان تحديد مجال الدالة $f(x) = \frac{2}{x^2 - 4}$. فقال عبد الله: إن المجال هو $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$. في حين قال سلمان: أن المجال هو $\{x \mid x \neq -2, x \neq 2, x \in R\}$. فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك. **انظر ملحق الإجابات.**

54) اكتب مجال الدالة $f(x) = \frac{1}{(x+3)(x+1)(x-5)}$ باستعمال كل من رمز الفترة والصفة المميزة للمجموعة. أي الطريقتين تفضل؟ ولماذا؟ **انظر ملحق الإجابات.**

55) **تحدٍّ:** إذا كانت $G(x)$ دالة فيها $G(1) = 1, G(2) = 2, G(3) = 3$ و $G(x+1) = \frac{G(x-2)\,G(x-1) + 1}{G(x)}$ لكل $x \geq 3$، فأوجد $G(6)$. $\frac{4}{7}$

تبرير: أيُّ الجمل الآتية تصف الدالة المعرَّفة من المجموعة X إلى المجموعة Y بشكل صحيح، وأيها خاطئة، وإذا كانت خاطئة، فأعد كتابتها لتصبح صحيحة.

56) يرتبط كل عنصر من Y بعنصر واحد من X. **انظر الهامش.**

57) لا يرتبط عنصران أو أكثر من X بالعنصر نفسه من Y. **انظر الهامش.**

58) لا يرتبط عنصران أو أكثر من Y بالعنصر نفسه من X. **صحيحة**

اكتب: وضّح كيف يمكنك تحديد الدالة من خلال:

59) جملة لفظية تبيّن العلاقة بين عناصر المجال وعناصر المدى.

60) مجموعة أزواج مرتبة. **(59-63) انظر ملحق الإجابات.**

61) جدول قيم.

62) تمثيل بياني.

63) معادلة.

مراجعة تراكمية

(64-72) انظر الهامش.

بسّط كل عبارة مما يأتي: (مهارة سابقة)

64) $\frac{2r - 4}{r - 2}$

65) $\frac{r^2 - 7r - 30}{r^2 - 5r - 24}$

66) $\frac{y}{4} - \frac{4y}{3x} + \frac{3y}{4x}$

67) $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{16}}$

68) $\frac{6x^2 - 11x + 4}{6x^2 + x - 2} \cdot \frac{12x^2 + 11x + 2}{8x^2 + 14x + 3}$

حل كلًّا من المعادلتين الآتيتين: (مهارة سابقة)

69) $\frac{8}{x} = 1 + \frac{2}{x - 2}$

70) $x - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

حل كلًّا من المتباينتين الآتيتين: (مهارة سابقة)

71) $\frac{x + 1}{x - 3} - 1 \leq 2$

72) $\frac{6}{x} + 2 \geq 0$

تدريب على اختبار

73) أي العبارات الآتية صحيحة دائمًا: **B**

A الدالة لا تمثل علاقة.

B كل دالة تمثل علاقة.

C كل علاقة تمثل دالة.

D العلاقة لا تكون دالة.

74) أيٌّ مما يأتي يمثل مجال الدالة: **C**

$h(x) = \frac{\sqrt{2x - 3}}{x - 5}$

A $x \neq 5$

B $x \geq \frac{3}{2}$

C $x \geq \frac{3}{2}, x \neq 5$

D $x \neq \frac{3}{2}$

تمثيلات متعددة

في السؤال 52 يستعمل الطلاب التمثيل البياني، والجداول، والتعبير اللفظي لاستقصاء مدى الدالة.

تنبيه!

اكتشف الخطأ: إجابة عبدالله على السؤال 53 أغفلت عناصر من المجال. لذا ذكّر الطلاب بأن قيم x التي لا تنتمي إلى مجال الدالة هي التي تجعل المقام صفرًا.

4 التقويم

بطاقة مكافأة: اطلب إلى الطلاب حل المسألة التالية: إذا كانت $f(x) = \frac{-4x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ فأوجد قيمة $f(3)$.

$-3\sqrt{2}$

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرس 1-1، بإعطائهم اختبارًا قصيرًا

الاختبار القصير 1، ص (11)

إجابات:

56) خطأ؛ إجابة ممكنة: ليس بالضرورة ارتباط كل عنصر من Y بعنصر مختلف من X.

57) خطأ؛ إجابة ممكنة: يمكن لعنصرين أو أكثر من X الارتباط بالعنصر نفسه من Y.

64) 2

65) $\frac{r - 10}{r - 8}$

66) $\frac{3xy - 7y}{12x}$

67) $\frac{4a}{4 - a}$

68) $\frac{3x - 4}{2x + 3}$

69) 4

70) 2

71) $x < 3$ أو $x \geq 5$

72) $x \leq -3$ أو $x > 0$

تنويع التعليم

فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات، وإيجاد مثالين على دالتين مجال كلّ منهما هو $(-\infty, -3) \cup (-3, 1) \cup (1, \infty)$.

إجابة ممكنة: $g(x) = \frac{x - 4}{x^2 + 2x - 3}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$.

1-2 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-2

تعيين الدوال وإيجاد قيمها.

الدرس 1-2

استعمال التمثيل البياني لتقدير قيم الدالة، وإيجاد مجالها، ومداها، ومقطعها y وأصفارها.

استكشاف تماثل منحنيات الدوال وتحديد الدوال الزوجية والدوال الفردية.

ما بعد الدرس 1-2

استكشاف الاتصال وسلوك نهاية الدالة والنهايات.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

و اسأل:

- ما نوع الدالة $f(x)$؟
  كثيرة حدود
- ماذا تمثل القيمة $f(1)$؟
  قيمة المخصصات سنة 1423 بمليارات الريالات

1-2

تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

Analyzing Graphs of Functions and Relations

فيما سبق:

درست الدوال وكيفية إيجاد قيمها. (الدرس 1-1)

والآن:

- أستعملُ التمثيل البياني لتقدير قيم الدالة، وإيجاد مجالها ومداها، ومقطعها y، وأصفارها.
- أستكشف تماثل منحنيات الدوال، وأحدد الدوال الزوجية والدوال الفردية.

المفردات:

الأصفار
zeros

الجذور
roots

التماثل حول مستقيم
line symmetry

التماثل حول نقطة
point symmetry

الدالة الزوجية
even function

الدالة الفردية
odd function

www.obeikaneducation.com

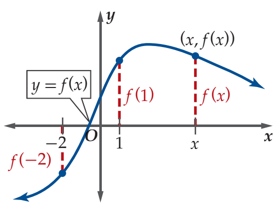
لماذا؟

تُولي المملكة أهمية متزايدة للقطاع الصحي، وينعكس ذلك على الميزانية المخصصة له. فمثلًا يمكن تقدير مخصصات الصحة والهلال الأحمر (بمليارات الريالات) خلال الفترة من (1423 – 1430) هـ بالدالة:

$$f(x) = -0.0015x^4 + 0.0145x^3 + 0.3079x^2 - 0.5654x + 14.07 , 1 \le x \le 8$$

حيث تمثل x رقم السنة منذ عام 1422هـ . ويساعدك التمثيل البياني لهذه الدالة على فهم العلاقات بين المتغيرات في هذا الموقف الحياتي.

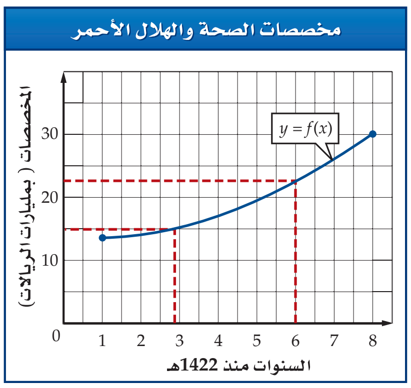
تحليل التمثيل البياني للدالة: التمثيل البياني للدالة f هو مجموعة الأزواج المرتبة $(x, f(x))$ ، حيث x أحد عناصر مجال f . وبمعنى آخر فإن التمثيل البياني للدالة f هو منحنى المعادلة $y = f(x)$. ومن ثم تكون القيمة المطلقة لقيمة الدالة مساوية طول العمود الواصل من نقطة على المحور x إلى منحنى الدالة، كما هو موضح في الشكل المجاور.



يُستعملُ التمثيل البياني للدالة في كثير من الأحيان لتقدير قيم الدالة.

مثال 1 من واقع الحياة تقدير قيم الدوال

مخصصات: استعمل التمثيل البياني المجاور للدالة f الواردة في فقرة "لماذا؟" للإجابة عما يأتي:



a) قدّر قيمة المخصصات سنة 1428 هـ ، ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.

السنة 1428 هـ هي السنة السادسة بعد 1422 هـ، لذا تُقدَّر قيمة الدالة عند $x = 6$ بـ 23 مليار ريال، وعليه تكون المخصصات سنة 1428هـ هي 23 مليار ريال تقريبًا.

وللتحقّق من ذلك جبريًّا، أوجد قيمة $f(6)$ بالتعويض في الدالة.

$$f(6) = -0.0015(6)^4 + 0.0145(6)^3 + 0.3079(6)^2 - 0.5654(6) + 14.07 \approx 22.95$$

لذا يُعدُّ التقريب 23 مليارًا باستعمال التمثيل البياني معقولًا.

b) قدّر السنة التي كانت فيها قيمة المخصصات 15 مليار ريال، ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.

يُبين التمثيل البياني أن قيمة الدالة تكون 15 مليارًا عندما تكون قيمة x قريبة من العدد 3 ، لذا تكون المخصصات 15 مليارًا في سنة 1425 هـ . وللتحقق جبريًّا أوجد $f(3)$.

$$f(3) = -0.0015(3)^4 + 0.0145(3)^3 + 0.3079(3)^2 - 0.5654(3) + 14.07 \approx 15.4149$$

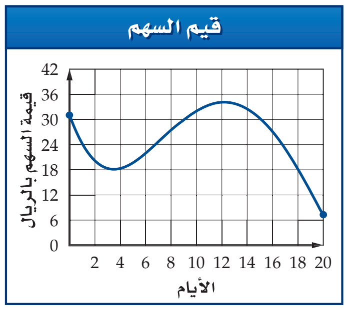
لذا تعد السنة التقريبية 1425هـ معقولة.

مصادر الدرس 1-2

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (21)	• تنويع التعليم ص (21)	• تنويع التعليم ص (23 , 27)
كتاب التمارين	• ص (5)	• ص (5)	• ص (5)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (10) • تدريبات حل المسألة، ص (12)	• تدريبات حل المسألة، ص (12) • التدريبات الإثرائية، ص (13)	• تدريبات حل المسألة، ص (12) • التدريبات الإثرائية، ص (13)

تحقق من فهمك

1) **أسهم:** تابع مستثمر قيمة سهم خلال عشرين يومًا، فوجد أنه يمكن تقدير قيمة السهم بالدالة: $v(d) = 0.002d^4 - 0.11d^3 + 1.77d^2 - 8.6d + 31,\ 0 \le d \le 20$ ، حيث $v(d)$ قيمة السهم بالريال في اليوم d.



1A) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة السهم في اليوم العاشر. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.

1B) استعمل التمثيل البياني لتحديد الأيام التي بلغت فيها قيمة السهم 30 ريالًا. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.

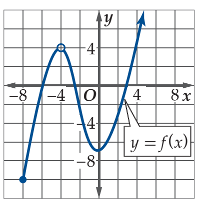
1A) 32 ريالًا

1B) في كلٍّ من اليومين التاسع والخامس عشر تقريبًا.

لا يقتصر استعمال منحنى الدالة على تقدير قيمها، إذ من الممكن استعماله لإيجاد مجال الدالة ومداها. حيث يُعدُّ منحنى الدالة ممتدًّا من طرفيه إلا إذا حُدِّد بنقطة أو دائرة.

مثال 2 إيجاد المجال والمدى

أوجد مجال الدالة f ومداها باستعمال التمثيل البياني المجاور.



المجال:

- تدل النقطة عند $(-8, -10)$ على أن المجال يبدأ عند $x = -8$.
- تدل الدائرة عند النقطة $(-4, 4)$ على أن $x = -4$ ليست في مجال f.
- يدل السهم على الجهة اليمنى من المنحنى على استمرارية المنحنى من اليمين دون حدود (دون توقف).

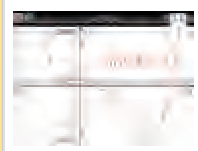
مما سبق يكون مجال الدالة f هو $[-8, -4) \cup (-4, \infty)$. وباستعمال الصفة المميزة للمجموعة يكون المجال هو $\{x \mid -8 \le x,\ x \ne -4,\ x \in \mathbb{R}\}$.

المدى:

إن أقل قيمة للدالة هي $f(-8)$ أو -10، وتزداد قيم $f(x)$ بلا حدود عندما تزداد قيم x، لذا فإن مدى الدالة f هو $[-10, \infty)$.

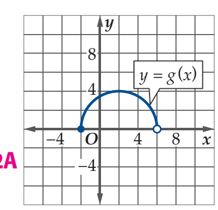
إرشادات للدراسة

اختيار التدريج المناسب: اختر تدريجًا مناسبًا لكل من المحورين x, y للتمكن من رؤية منحنى الدالة بوضوح. لاحظ اختلاف التمثيل الظاهر للدالة $f(x) = x^4 - 20x^3$ أدناه.

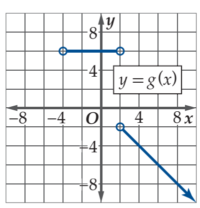


تحقق من فهمك

2A)



2B)



2A) $D = [-2, 6)$
$R = [0, 4]$

2B) $D = [-4, 2) \cup (2, \infty)$
$D = (-\infty, -2) \cup \{6\}$

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

تحليل التمثيل البياني للدالة

مثال 1 يبيِّن كيفية تقدير قيم الدالة باستعمال التمثيل البياني.

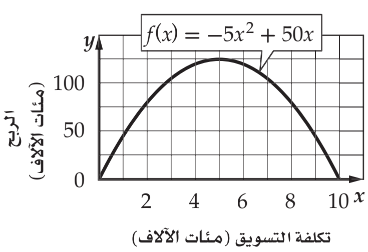
مثال 2 يبيِّن كيفية إيجاد مجال دالة ومداها باستعمال التمثيل البياني.

مثال 3 يبيِّن كيفية إيجاد المقطع y لدالة من التمثيل البياني.

مثال 4 يبيِّن كيفية إيجاد أصفار دالة من التمثيل البياني.

مثال إضافي

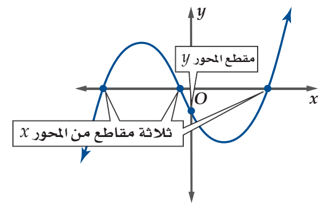
1 **إعلان:** إذا كانت العلاقة بين أرباح شركة كبرى وتكلفة التسويق x مقدّرة بمئات الآلاف من الريالات معطاةً بالدالة: $f(x) = -5x^2 + 50x$ وممثّلة بالشكل أدناه، فأجب عمّا يأتي:



a) استعمل التمثيل البياني لتقدير ربح الشركة إذا كانت التكلفة 300000 ريال. وتحقق من إجابتك جبريًّا.
10500000 ريال

b) استعمل التمثيل البياني لتقدير التكلفة إذا كان الربح 12500000 ريال. وتحقق من إجابتك جبريًّا.
500000 ريال

النقطة التي يتقاطع عندها المنحنى مع المحور x أو المحور y تسمى المقطع من ذلك المحور. ويمكن الحصول على المقطع x بتعويض $y = 0$ في معادلة الدالة، كما يمكن الحصول على المقطع y بالتعويض عن $x = 0$ في معادلة الدالة. وبشكل عام فإنه ليس من الضروري أن يكون للدالة مقطع x، وقد يكون هناك مقطع x واحد أو أكثر، وأما بالنسبة للمقطع y فإن للدالة مقطع واحد على الأكثر.

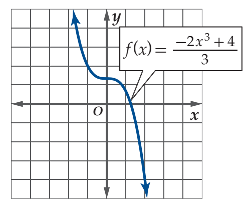


ولإيجاد المقطع y لمنحنى الدالة f جبريًّا، فإننا نجد $f(0)$.

مثال 3 إيجاد المقطع y

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين أدناه، لإيجاد قيمة تقريبية للمقطع y، ثم أوجده جبريًّا:

a)



التقدير من التمثيل البياني:

يتضح من الشكل أن $f(x)$ يقطع المحور y عند النقطة $(0, 1\frac{1}{3})$ تقريبًا، وعليه فإن المقطع y هو $1\frac{1}{3}$ تقريبًا.

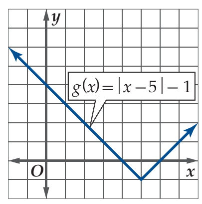
الحل جبريًّا:

أوجد قيمة $f(0)$.

$$f(0) = \frac{-2(0)^3+4}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

أي أن المقطع y هو $\frac{4}{3}$ أو $1\frac{1}{3}$.

b)



التقدير من التمثيل البياني:

يتضح من الشكل أن $g(x)$ يقطع المحور y عند النقطة $(0, 4)$، وعليه فإن المقطع y هو 4.

الحل جبريًّا:

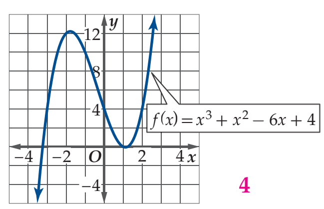
أوجد قيمة $g(0)$.

$$g(0) = |0 - 5| - 1 = 4$$

أي أن المقطع y هو 4.

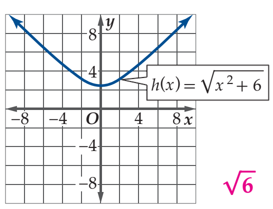
تحقق من فهمك

3A)



4

3B)

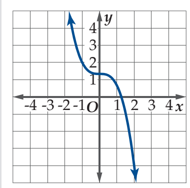


$\sqrt{6}$

تُسمى المقاطع x لمنحنى الدالة **أصفار** الدالة، وتُسمى حلول المعادلة المرافقة للدالة **جذور** المعادلة. ولإيجاد أصفار دالة f، فإننا نحل المعادلة $f(x) = 0$ بالنسبة للمتغير المستقل.

إرشادات للدراسة

تدريج المحورين y, x: إذا لم يظهر التدريج على المحورين y, x في التمثيل البياني، فذلك يعني أن التدريج بالوحدات. انظر المثال 3a:

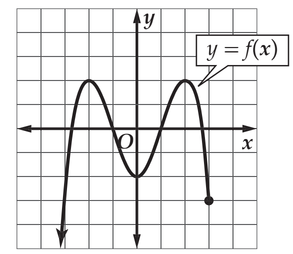


إرشادات للدراسة

تسمية المحورين في التمثيل البياني: عندما تُسمى المحورين في التمثيل البياني، فإن المتغير الذي يدل على المجال يكون على المحور x، والمتغير الذي يدل على المدى يكون على المحور y. ويمكن أن تستعمل متغيرات كثيرة لكل من المجال والمدى. ولكن للتسهيل نسمي عادة المحور الأفقي x والرأسي y.

مثالان إضافيان

2 أوجد مجال الدالة f ومداها باستعمال التمثيل البياني أدناه.

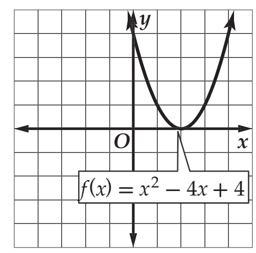


المجال: $(-\infty, 3]$

المدى: $(-\infty, 2]$

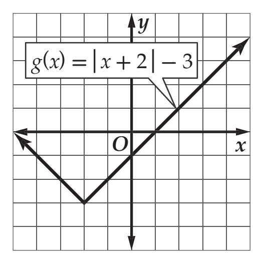
3 استعمل التمثيل البياني لكلٍّ من الدالتين الآتيتين أدناه؛ لإيجاد قيمة تقريبية للمقطع y، ثم أوجده جبريًّا.

a)



4

b)



-1

التعليم باستعمال التقنيات

التقنية والتمثيل البياني: اطلب إلى الطلاب تتبع مسار منحنى الدالة بتحريك مؤشر الفأرة على المنحنى لرؤية الإحداثيات في أثناء الحركة، تقدم هذه التقنية إلى الطلاب تغذية راجعة سريعة حول تقديراتهم لقيم الدالة.

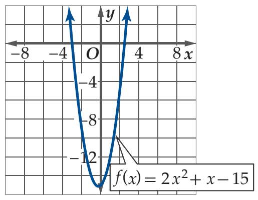
المحتوى الرياضي

تمثيل الدوال: يُعطي التمثيل البياني والجبري للدوال كمًّا كبيرًا من المعلومات عن العلاقة بين المتغيرين.

- يقدم التمثيل البياني معلومات سهلة عن القيم العظمى، والقيم الصغرى، وأصفار الدوال، والمقاطع y.
- تعطي الصيغة الجبرية القيم الدقيقة للدالة.

مثال 4 إيجاد الأصفار

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = 2x^2 + x - 15$ لإيجاد قيم تقريبيّة لأصفارها، ثم أوجد هذه الأصفار جبريًّا.



التقدير من المنحنى:
يتضح من التمثيل البياني أن مقطعي المحور x هما -3 وَ 2.5 تقريبًا.
لذا فإن صفري الدالة f هما -3 وَ 2.5

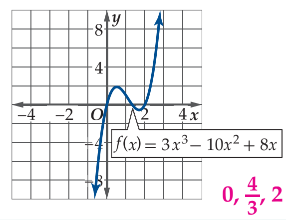
الحل جبريًّا:

$2x^2 + x - 15 = 0$	ضع $f(x) = 0$
$(2x - 5)(x + 3) = 0$	حلّل
$2x - 5 = 0$ أو $x + 3 = 0$	خاصية الضرب الصفري
$x = 2.5$ أو $x = -3$	حل كل معادلة

أي أن جذري المعادلة $2x^2 + x - 15 = 0$ هما -3 وَ 2.5 وهما صفرا الدالة f.

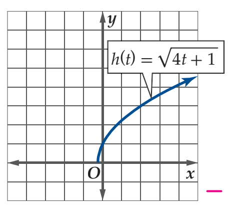
تحقق من فهمك

4A)



$0, \frac{4}{3}, 2$

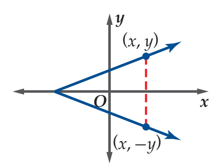
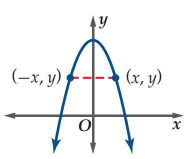
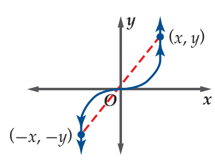
4B)



$-\frac{1}{4}$

التماثل: يوجد لتمثيلات العلاقات البيانية نوعان من التماثل: **التماثل حول مستقيم**، حيث يمكن طي الشكل على المستقيم لينطبق نصفا المنحنى تمامًا، و **التماثل حول نقطة** أي إذا تم تدوير الشكل بزاوية قياسها $180°$ حول النقطة فإنه لا يتغير. وفيما يأتي تلخيص لأنواع التماثل:

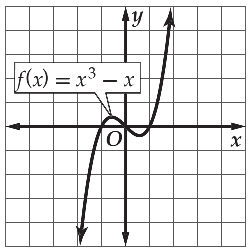
مفهوم أساسي اختبارات التماثل

اختبار التمثيل البياني	النموذج	الاختبار الجبري
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلاً حول المحور x، إذا وفقط إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(x, -y)$ تقع عليه أيضًا.		إذا كان تعويض $-y$ مكان y يعطي معادلة مكافئة.
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلاً حول المحور y، إذا وفقط إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(-x, y)$ تقع عليه أيضًا.		إذا كان تعويض $-x$ مكان x يعطي معادلة مكافئة.
يكون تمثيل العلاقة البياني متماثلاً حول نقطة الأصل، إذا وفقط إذا كانت النقطة (x, y) واقعة على التمثيل البياني، فإن النقطة $(-x, -y)$ تقع عليه أيضًا.		إذا كان تعويض $-x$ مكان x و $-y$ مكان y يعطي معادلة مكافئة.

إرشادات للدراسة
تماثل العلاقات والدوال: يكون التماثل حول المحور x للعلاقات فقط. أما التماثل حول المحور y ونقطة الأصل فيكون للعلاقات والدوال.

مثال إضافي

4 استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^3 - x$؛ لإيجاد قيم تقريبية لأصفارها، ثم أوجد هذه الأصفار جبريًّا. $-1, 0, 1$



إرشادات للمعلم الجديد

إيجاد القيم باستعمال التمثيل البياني: عند استعمال التمثيل البياني للدالة لإيجاد قيمها، يجب على الطلاب استعمال حافة مستقيمة لمدّ كلا المحورين؛ لتسهيل عملية إيجاد القيم بدقة.

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون البصريون: اطلب إلى الطلاب البحث عن متغيرات مستقلة وغير مستقلة ضمن اهتماماتهم، ثم اطلب إليهم وصف هذه المتغيرات وتحديد مجال الدالة المكونة منها ومداها.
ثم اطلب إليهم تمثيل الدوال التي حصلوا عليها. ولاحظ أن المجال الذي فيه أعداد سالبة مناسب لدرجات الحرارة، ولكنه غير مناسب للزمن المحدد لإجراء مباراة.

التماثل

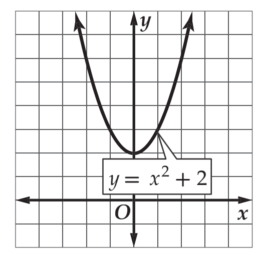
مثال 5 يبيِّن كيفية اختبار تماثل منحنيات الدوال حول مستقيم وحول نقطة.

مثال 6 يبيِّن كيفية تحديد دالة من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك.

مثال إضافي

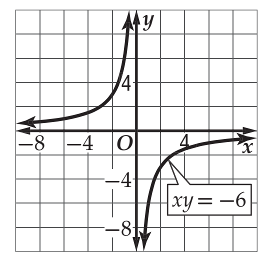
5 استعمل التمثيل البياني لكلٍّ من المعادلتين الآتيتين؛ لاختبار التماثل حول المحور x والمحور y ونقطة الأصل. وعزِّز إجابتك عدديًّا ثمَّ تحقق منها جبريًّا:

a)



متماثل حول محور y

b)



متماثل حول نقطة الأصل

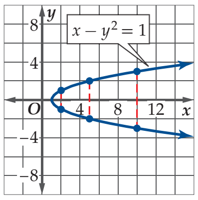
إرشادات للدراسة

التماثل: من الممكن أن يكون للتمثيل البياني الواحد أكثر من نوع تماثل.

مثال 5 اختبار التماثل

استعمل التمثيل البياني لكلٍّ من المعادلتين الآتيتين لاختبار التماثل حول المحور x والمحور y ونقطة الأصل. عزِّز إجابتك عدديًّا، ثم تحقَّق منها جبريًّا.

a) $x - y^2 = 1$



التحليل بيانيًّا:

يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور x ؛ لأنه لكل نقطة (x, y) على المنحنى، فإن النقطة $(x, -y)$ تقع أيضًا على المنحنى.

التعزيز عدديًّا:

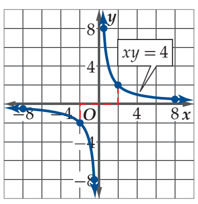
يبين الجدول أدناه وجود تماثل حول المحور x :

x	2	2	5	5	10	10
y	1	-1	2	-2	3	-3
(x, y)	$(2, 1)$	$(2, -1)$	$(5, 2)$	$(5, -2)$	$(10, 3)$	$(10, -3)$

التحقق جبريًّا:

بما أن المعادلة $x - (-y)^2 = 1$ تكافئ $x - y^2 = 1$، فإن المنحنى متماثل حول المحور x .

b) $xy = 4$



التحليل بيانيًّا:

يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل؛ لأنه لكل نقطة (x, y) على المنحنى، فإن النقطة $(-x, -y)$ تقع أيضًا على المنحنى.

التعزيز عدديًّا:

يبين الجدول الآتي وجود تماثل حول نقطة الأصل:

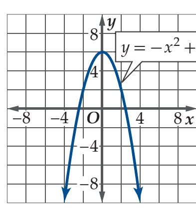
x	-8	-2	-0.5	0.5	2	8
y	-0.5	-2	-8	8	2	0.5
(x, y)	$(-8, -0.5)$	$(-2, -2)$	$(-0.5, -8)$	$(0.5, 8)$	$(2, 2)$	$(8, 0.5)$

التحقق جبريًّا:

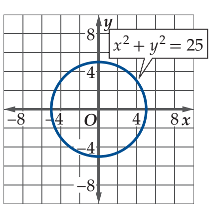
بما أن المعادلة $(-x)(-y) = 4$ تكافئ $xy = 4$، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

تحقق من فهمك

5A) انظر الهامش.



5B) انظر الهامش.



إجابة (تحقق من فهمك):

5A) يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور y ؛ لأن لكل نقطة (x, y) على المنحنى، تقع النقطة $(-x, y)$ على المنحنى نفسه.

التحقق عدديًّا:

يبين الجدول الآتي وجود تماثل حول المحور y :

x	2	-2	3	-3
y	2	2	-3	-3
(x, y)	$(2, 2)$	$(-2, 2)$	$(3, -3)$	$(-3, -3)$

التحقق جبريًّا:

بما أن المعادلة $y = -(-x)^2 + 6$ تكافئ $y = -x^2 + 6$ ، فإن المنحنى متماثل حول المحور y .

5B) يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور x ؛ لأن لكل نقطة (x, y) على المنحنى، تقع النقطة $(x, -y)$ على المنحنى نفسه. وهو متماثل حول المحور y أيضًا؛ لأن لكل نقطة (x, y) على المنحنى، تقع النقطة $(-x, y)$ على المنحنى نفسه. وهو متماثل حول نقطة الأصل؛ لأن لكل نقطة (x, y) على المنحنى، تقع النقطة $(-x, -y)$ على المنحنى نفسه. ويمكن التحقق من ذلك عدديًّا وجبريًّا.

يمكن أن تتماثل منحنيات الدوال حول المحور y فقط أو حول نقطة الأصل فقط؛ ولهذين النوعين من الدوال اسمان خاصان.

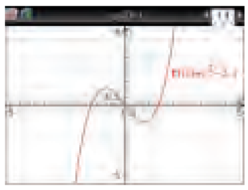
مفهوم أساسي **الدوال الزوجية والدوال الفردية**

نوع الدالة	الاختبار الجبري
تُسمى الدوال المتماثلة حول المحور y الدوال الزوجية.	لكل x في مجال f، فإن $f(-x) = f(x)$.
تُسمى الدوال المتماثلة حول نقطة الأصل الدوال الفردية.	لكل x في مجال f، فإن $f(-x) = -f(x)$.

مثال 6 تحديد الدوال الزوجية والدوال الفردية

استعمل الحاسبة البيانية لتمثل كل دالة مما يأتي بيانيًّا. ثمَّ حلّل منحناها لتحدّد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقق من إجابتك جبريًّا.

a) $f(x) = x^3 - 2x$



يتضح من التمثيل البياني أن الدالة متماثلة حول نقطة الأصل، لذا فهي دالة فردية، وللتحقق من ذلك جبريًّا نجد:

$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x)$ عوّض $-x$ مكان x

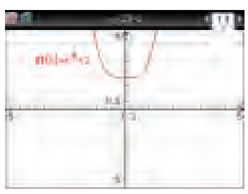
$= -x^3 + 2x$ بسّط

$= -(x^3 - 2x)$ خاصية التوزيع

$= -f(x)$ الدالة الأصلية $f(x) = x^3 - 2x$

أي أن الدالة فردية؛ لأن $f(-x) = -f(x)$.

b) $f(x) = x^4 + 2$



يتضح من التمثيل البياني أن الدالة متماثلة حول المحور y، لذا فهي دالة زوجية، وللتحقق من ذلك جبريًّا نجد:

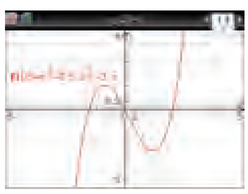
$f(-x) = (-x)^4 + 2$ عوّض $-x$ مكان x

$= x^4 + 2$ بسّط

$= f(x)$ الدالة الأصلية $f(x) = x^4 + 2$

أي أن الدالة زوجية؛ لأن $f(-x) = f(x)$.

c) $f(x) = x^3 - 0.5x^2 - 3x$ انظر الهامش.



يتضح من التمثيل البياني أن الدالة قد تكون متماثلة حول نقطة الأصل، وللتحقق من ذلك جبريًّا نجد:

$f(-x) = (-x)^3 - 0.5(-x)^2 - 3(-x)$ عوّض $-x$ مكان x

$= -x^3 - 0.5x^2 + 3x$ بسّط

وبما أن $-f(x) = -x^3 + 0.5x^2 + 3x$،

فإن $f(-x) \neq f(x)$، وكذلك $f(-x) \neq -f(x)$؛

لذا فالدالة ليست زوجية وليست فردية.

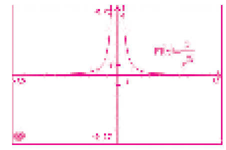
إرشادات للدراسة

الدوال الزوجية والدوال الفردية: قد تُظهر لك بعض التمثيلات البيانية تماثلًا والحقيقة غير ذلك؛ لذا عليك التأكد من التماثل جبريًّا في كل مرة.

تحقق من فهمك

6A) $f(x) = \frac{2}{x^2}$ 6B) $g(x) = 4\sqrt{x}$ 6C) $h(x) = x^5 - 2x^3 + x$ 6C) انظر الهامش.

6A)

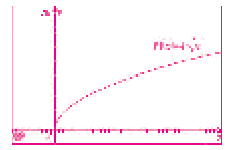


يتضح من التمثيل البياني أن الدالة زوجية، لأنها متماثلة حول المحور y.

$f(-x) = \frac{2}{(-x)^2} = \frac{2}{x^2} = f(x)$،

وهذا يعني أن الدالة زوجية؛ لأن $f(-x) = f(x)$

6B)



يتضح من التمثيل البياني أن الدالة ليست زوجية وليست فردية؛ لأنها غير متماثلة حول المحور y، وغير متماثلة حول نقطة الأصل.

$f(-x) = 4\sqrt{-x}$،

$-f(x) = -4\sqrt{x}$

إذن $f(-x) \neq f(x)$

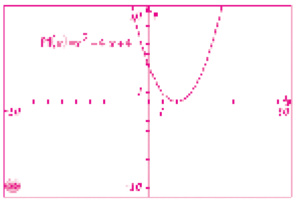
وكذلك $f(-x) \neq -f(x)$

وهذا يعني أن الدالة ليست زوجية وليست فردية.

مثال إضافي

6 استعمل الحاسبة البيانية لتمثل كل دالة مما يأتي بيانيًّا. ثمَّ حلّل منحناها لتحدّد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا. وإذا كانت الدالة زوجية أو فردية فصف تماثل منحناها:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 4$

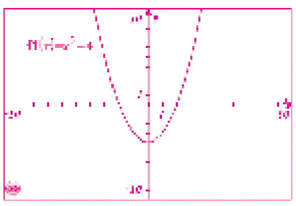


$f(-x) = (-x)^2 - 4(-x) + 4$

$= x^2 + 4x + 4$

الدالة ليست زوجية وليست فردية.

b) $f(x) = x^2 - 4$

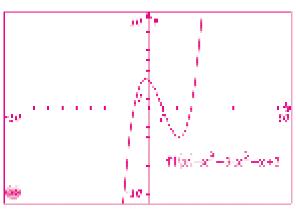


$f(-x) = (-x)^2 - 4$

$= x^2 - 4$

الدالة زوجية، ومنحناها متماثل حول المحور y.

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$



$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 - (-x) + 3$

$= x^3 - 3x^2 + x + 3$

الدالة ليست زوجية وليست فردية.

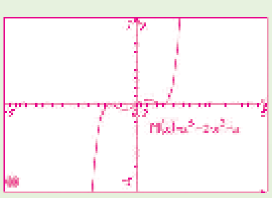
تنويع التعليم

فوق

المتعلمون السمعيون: اطلب إلى الطلاب الاستماع إلى ضربات قلوبهم باستعمال سمّاعات كالتي يستعملها الأطباء. إن القلب ينبض باستمرار وتكون نبضاته متناسقة بين انقباض الأذينين والبُطينين، ثم اطلب إليهم تمثيل ذلك بيانيًّا، ووصف التماثل (إن وجد)، وهل الدالة زوجية أم فردية.

إجابة:

6C)



يتضح من التمثيل البياني أن الدالة فردية؛ لأنها متماثلة حول نقطة الأصل.

$h(-x) = (-x)^5 - 2(-x)^3 + (-x) = -x^5 + 2x^3 - x$،

إذن $h(-x) = -h(x)$؛ وهذا يعني أن الدالة فردية.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 30–1 للتأكد من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إرشاد

المسطرة: عندما يستعمل الطلاب التمثيل البياني لتقدير قيم الدالة في الأسئلة 4–1، ذكّرهم باستعمال مسطرة للحصول على إجابات دقيقة.

إجابات:

6) المجال: $\{x \mid x \in R\}$، المدى: $[-3, \infty)$

7) المجال: $(-4, 4]$، المدى: $[-1, 6]$

8) المجال: $[-5, \infty)$، المدى: $[-2, \infty)$

9) المجال: $(-\infty, 7]$، المدى: $\{-1\} \cup (1, \infty)$

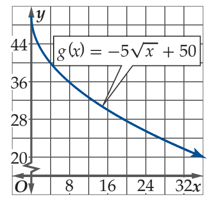
10a) إجابة ممكنة: النحاس: $\{x \mid -150 \le x \le 150, x \in R\}$، $\{y \mid y = 1.75\}$
الألومنيوم: $\{x \mid -150 \le x \le 150, x \in R\}$، $\{y \mid 0.6 \le y \le 1.5, y \in R\}$
الزنك: $\{x \mid -150 \le x \le 150, x \in R\}$، $\{y \mid 0.5 \le y \le 1.25, y \in R\}$
الفولاذ: $\{x \mid -150 \le x \le 150, x \in R\}$، $\{y \mid 0.2 \le y \le 1.75, y \in R\}$

10b) إجابة ممكنة: النحاس ≈ 1.75 جول، الألومنيوم: ≈ 1.2 جول، الزنك ≈ 0.5 جول، الفولاذ ≈ 1.5 جول.

تدرب وحل المسائل

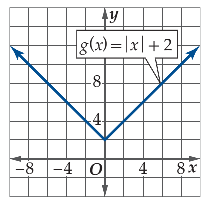
استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي؛ لتقدير قيمها المطلوبة، ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا. وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك: (مثال 1)

(1



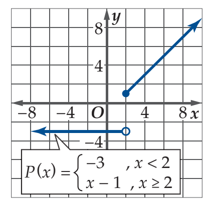
a) $g(6)$ **37.75**   b) $g(12)$ **32.68**   c) $g(19)$ **28.21**

(2



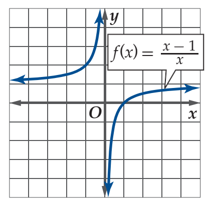
a) $g(-8)$ **10**   b) $g(-3)$ **5**   c) $g(0)$ **2**

(3



a) $P(-6)$ **−3**   b) $P(2)$ **1**   c) $P(9)$ **8**

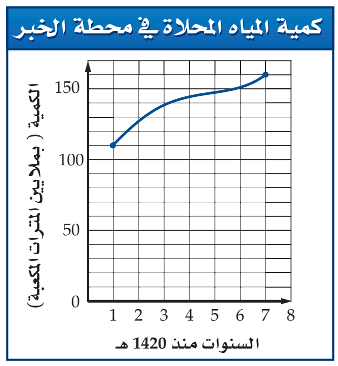
(4



a) $f(-3)$ $\mathbf{\frac{4}{3}}$ b) $f(0.5)$ **−1**   c) $f(1)$ **0**

5) مياه: إذا كانت كمية المياه المحلاة في محطة الخبر (بملايين المترات المكعبة) في الفترة (1421هـ إلى 1427هـ) معطاة بالدالة $f(x) = 0.0509x^4 - 0.3395x^3 - 2.28x^2 + 25.35x + 88.27$ حيث تمثل x رقم السنة منذ عام 1420 هـ. (مثال 1)

كمية المياه المحلاة في محطة الخبر



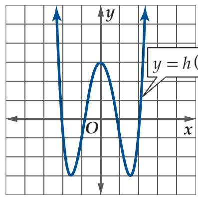
a) قدّر كمية المياه المحلاة في سنة 1425 هـ باستعمال التمثيل البياني. **145 مليون متر مكعب**

b) أوجد كمية المياه المحلاة في سنة 1425 هـ جبريًّا مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة. **147.4 مليون متر مكعب**

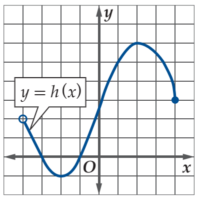
c) قدّر السنة التي كانت كمية المياه المحلاة فيها 130 مليون متر مكعب باستعمال التمثيل البياني، وتحقق من إجابتك جبريًّا. **1422**

استعمل التمثيل البياني للدالة h في كلٍّ مما يأتي لإيجاد كل من مجال الدالة ومداها. (مثال 2) **9-6 انظر الهامش.**

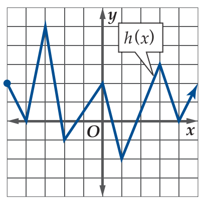
(6



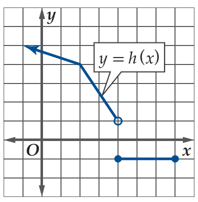
(7



(8

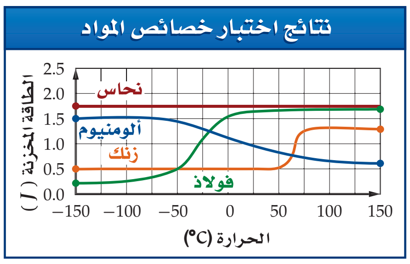


(9



10) هندسة: أُجريت اختبارات على الخصائص الفيزيائية لعينات من أربع قطع معدنية، حيث أُخضعت لدرجات حرارة سيليزية مختلفة. فإذا كانت الطاقة المخزَّنة أو الممتصة في العينة خلال الاختبار مقاسة بالجول (J) كما هو موضّح في الشكل أدناه، فأجب عما يأتي: (مثال 2)

نتائج اختبار خصائص المواد

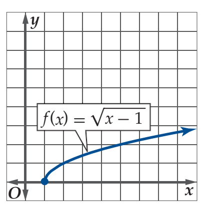


a) أوجد المجال والمدى لكل دالة. **a-b انظر الهامش.**

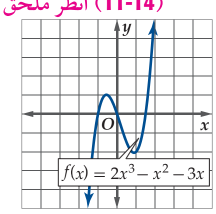
b) استعمل التمثيل البياني لتقدير الطاقة المخزنة في كل معدن عند الصفر السيليزي.

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي؛ لإيجاد مقطع المحور y، وأصفار الدالة، ثم أوجد أصفار الدالة جبريًّا. (المثالان 3, 4) **(11-14) انظر ملحق الإجابات.**

(11

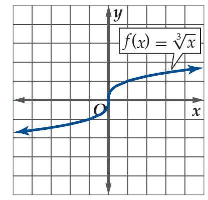


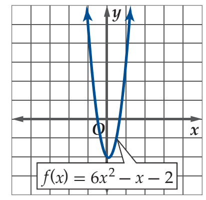
(12

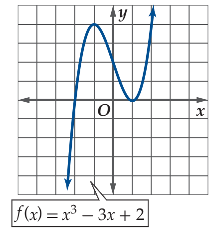


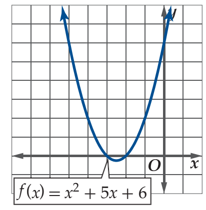
تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	30–1، 54–50، 82–56
ضمن المتوسط	31–1 (فردي)، 34–32، 39–35 (فردي)، 43–41، 54–50، 82–56
فوق المتوسط	82–31

13) 

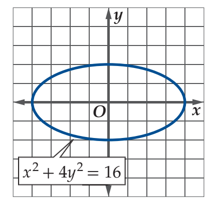
14) 

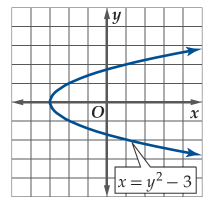
15) 

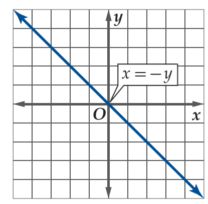
16) 

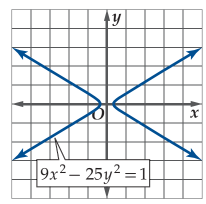
15, 16) انظر الهامش.

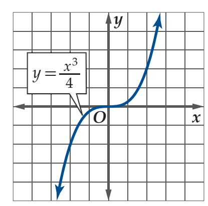
استعمل التمثيل البياني لكل معادلة مما يأتي لاختبار التماثل حول المحور x ، والمحور y ، ونقطة الأصل. عزِّز إجابتك عدديًّا، ثم تحقّق منها جبريًّا: (مثال 5) **17-24) انظر ملحق الإجابات.**

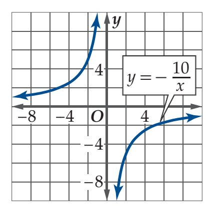
17) 

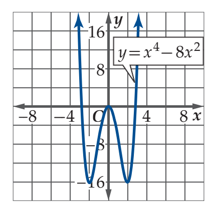
18) 

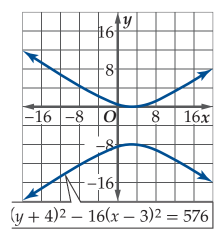
19) 

20) 

21) 

22) 

23) 

24) 

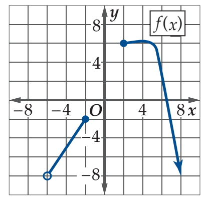
الحاسبة البيانية: استعمل الحاسبة البيانيّة لتمثّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا، ثم حلّل منحناها لتحدّد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا. واذا كانت الدالة زوجيّة أو فردية فصف تماثل منحناها: (مثال 6) **25-30) انظر ملحق الإجابات.**

25) $f(x) = x^2 + 6x + 10$ 26) $f(x) = -2x^3 + 5x - 4$

27) $g(x) = \sqrt{x + 6}$ 28) $h(x) = |8 - 2x|$

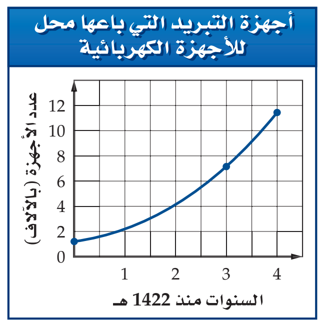
29) $f(x) = |x^3|$ 30) $g(x) = \frac{x^2}{x + 1}$

31) استعمل التمثيل البياني للدالة f لتقدير قيمها المطلوبة:



a) $f(-2)$ **−2** b) $f(-4)$ **−5** c) $f(2)$ **6**

32) **مبيعات:** إذا كان عدد أجهزة التبريد التي باعها محل للأجهزة الكهربائية مقدرًا بالآلاف خلال الفترة من 1422هـ إلى 1426هـ يُعطى بالدالة $h(x) = 0.5x^2 + 0.5x + 1.2$ ، حيث x رقم السنة منذ 1422 هـ. **32a-d) انظر الهامش.**



a) اكتب مجال الدالة، ثم قرّب مداها .

b) استعمل المنحنى لتقدير عدد الأجهزة المبيعة سنة 1424هـ. ثم أوجد ذلك جبريًّا.

c) استعمل المنحنى لتقدير قيمة المقطع y للدالة ثم أوجده جبريًّا. ماذا يمثّل المقطع y؟

d) هل لهذه الدالة أصفار؟ إذا كانت الإجابة نعم، فأوجد قيمة تقريبية لهذه الأصفار، وفسّر معناها. وإذا كانت الإجابة لا، فوضّح السبب.

إجابات :

15) المقطع y هو 2 ، صفرا الدالة هما -2 وَ 1

$0 = x^3 - 3x + 2$

$0 = (x + 2)(x - 1)(x - 1)$

$x + 2 = 0$ أو $x - 1 = 0$

$x = -2$ أو $x = 1$

16) المقطع y هو 6 ; صفرا الدالة هما -3 وَ -2

$0 = x^2 + 5x + 6$

$0 = (x + 2)(x + 3)$

$x + 2 = 0$ أو $x + 3 = 0$

$x = -2$ أو $x = -3$

32a) المجال: $\{x \mid 0 \le x \le 4, x \in W\}$

المدى:

$\{y \mid 1200 \le y \le 11200, y \in R\}$

32b) إجابة ممكنة : 4500 جهاز. وجبريًّا: 4200 جهاز.

32c) إجابة ممكنة : 1100 ، وجبريًّا: 1200 . ويمثل المقطع y عدد الأجهزة المبيعة سنة 1422 هـ .

32d) لا يوجد لهذه الدالة أصفار؛ لأنه لكل سنة من سنوات المجال يوجد عدد من الأجهزة المبيعة.

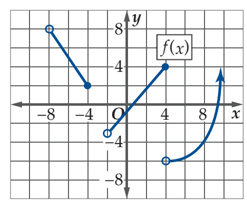
33) **دوال:** إذا كانت $f(x) = x^n$، حيث $n \in \mathrm{N}$ فأجب عن الأسئلة الآتية:
a) استعمل الحاسبة البيانيّة لتمثل $f(x)$ بيانيًّا لكل قيمة من قيم n في الفترة $1 \le n \le 6$.
b) اكتب المجال والمدى لكل دالة.
c) صف التماثل لكل دالة.
d) تنبّأ بمجال الدالة $f(x) = x^{35}$، ومداها، وتماثلها، ثم برّر إجابتك.
33a–d) انظر ملحق الإجابات.

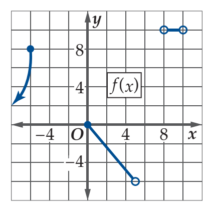
34) **صيدلة:** إذا كان عدد ملجرامات الدواء في دم مريض بعد x ساعة من تناوله الدواء يعطى بالدالة :
$$f(x) = 0.5x^4 + 3.45x^3 - 96.65x^2 + 347.7x$$
34a–b) انظر الهامش.
a) استعمل الحاسبة البيانيّة لتمثل الدالة بيانيًّا .
b) اكتب المجال المناسب للدالة، وفسّر إجابتك.
c) ما أكبر عدد من ملجرامات الدواء يكون موجودًا في دم المريض وفق هذه الدالة؟ **346 ملجرام تقريبًا**

الحاسبة البيانيّة: مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا، وحدّد أصفارها، ثم تحقّق من أصفار الدالة جبريًّا: 35-38) انظر ملحق الإجابات.

35) $f(x) = \frac{4x-1}{x}$
36) $f(x) = \frac{x^2+9}{x+3}$
37) $h(x) = 2\sqrt{x+12} - 8$
38) $g(x) = -12 + \frac{4}{x}$

استعمل التمثيل البياني للدالة f لتحدد مجالها ومداها في كل مما يأتي: **39-41) انظر الهامش.**

39)


40)


41) **فيزياء:** إذا كان مسار أحد المذنبات حول الشمس يُعطى بالعلاقة:
$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{10} = 1$$
a) صف تماثل منحنى مسار المذنب.
b) استعمل التماثل لتمثيل منحنى العلاقة.
c) إذا مر المذنب بالنقطة $(2, \sqrt{5})$، فعيّن ثلاث نقاط أخرى يجب أن يمر بها المذنب.

42) **أسهم:** افترض أن النسبة المئوية للتغير في سعر سهم خلال سنة واحدة تعطى بالدالة : **42a–d) انظر الهامش.**
$$p(x) = 0.0005x^4 - 0.0193x^3 + 0.243x^2 - 1.014x + 1.04$$
حيث x رقم الشهر بدءًا من شهر يناير.
a) استعمل الحاسبة البيانية لتمثل الدالة بيانيًّا.
b) أوجد مجال الدالة، ثم قدّر مداها.
c) استعمل المنحنى لتقريب قيمة المقطع y، وماذا يمثّل؟
d) أوجد أصفار الدالة، ووضّح معناها.

43) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة مدى قيم الدالة $f(x) = \frac{1}{x-2}$ عندما تقترب x من العدد 2.
a) **جدوليًّا:** انقل الجدول الآتي إلى دفترك. وأضف قيمًا أخرى للمتغير x إلى يمين العدد 2 وإلى يساره. ثم أكمل الجدول.

x	1.99	1.999	2	2.001	2.01
$f(x)$	-100	-1000	غير معرف	1000	100

b) **تحليليًّا:** معتمدًا على جدولك، ما القيمة أو القيم التي تقترب منها الدالة عندما تقترب x من العدد 2؟ **43b–d) انظر ملحق الإجابات.**
c) **بيانيًّا:** مثّل الدالة بيانيًّا. وهل يؤكد التمثيل البياني تخمينك في الفرع **b**؟ وضح إجابتك.
d) **لفظيًّا:** خمّن القيمة التي تقترب منها الدالة من خلال التمثيل البياني في الفرع **c** ووضح إجابتك .

الحاسبة البيانيّة: مثِّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا. و حدّد ما إذا كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. 44–49) انظر ملحق الإجابات.

44) $h(x) = x^5 - 17x^3 + 16x$
45) $f(x) = x^2 - x - 6$
46) $h(x) = x^6 + 4$
47) $f(g) = g^9$
48) $g(x) = x^4 + 8x^2 + 81$
49) $f(z) = z^3 - 4z^2 + 4z$

مسائل مهارات التفكير العليا

50–54) انظر ملحق الإجابات.

مسألة مفتوحة: مَثِّل بيانيًّا منحنًى يحقق الشروط في كل حالة مما يأتي:

50) منحنى يمر بالنقاط $(-8, 1), (-5, 2), (-4, 4), (-3, 8)$ ، ومتماثل حول المحور y .

51) منحنى يمر بالنقاط $(0, 0), (2, 6), (3, 12), (4, 24)$ ، ومتماثل حول المحور x .

52) منحنى يمر بالنقاط $(-3, -18), (-2, -9), (-1, -3)$ ، ومتماثل حول نقطة الأصل.

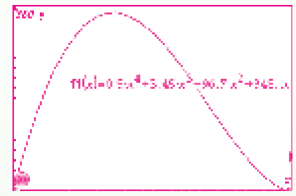
53) منحنى يمر بالنقاط $(4, -16), (6, -12), (8, -8)$ ويمثّل دالة زوجية.

54) **اكتب:** وضّح لماذا يمكن أن يكون للدالة 0 أو 1 أو أكثر من مقاطع x ، بينما يوجد لها مقطع y واحد على الأكثر .

تمثيلات متعددة

في السؤال 43 يستعمل الطلاب الجداول والتحليل والتمثيل البياني والتعبير اللفظي لاستقصاء مدى دالة عندما تقترب x من عدد ما.

إجابات :

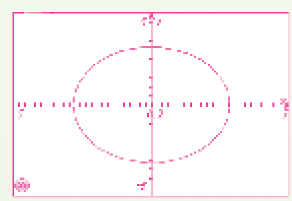
34a)


34b) المجال: $\{x \mid 0 \le x \le 6, x \in W\}$ ، يبقى مسكّن الألم في الدم من صفر إلى 6 ساعات.

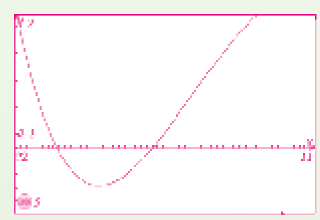
39) المجال: $(-8, -4] \cup (-2, \infty)$
المدى : $(-6, \infty)$

40) المجال :
$(-\infty, -6] \cup [0, 5) \cup (8, 10)$
المدى: $(-\infty, 8) \cup \{10\}$

41a) المنحنى متماثل حول نقطة الأصل، وحول المحور x، وحول المحور y .

41b)


41c) $(2, -\sqrt{5}), (-2, \sqrt{5}), (-2, -\sqrt{5})$

42a)


42b) المجال: $\{x \mid 0 \le x \le 11, x \in W\}$
المدى: $\{y \mid -0.5 \le y \le 1, y \in R\}$

42c) 1.04، إجابة ممكنة: يمثل المقطع y نسبة التغير المئوية الابتدائية في الأسعار.

42d) 1.5, 5.2، تمثل الأصفار خط الأساس أو الوقت الذي تكون فيه نسبة التغير صفرًا. فمثلًا النقطة التي تكون عندها نسبة الزيادة 60% هي أكبر بمقدار 60% من خط الأساس.

55) **تحدٍ:** أوجد مجال الدالة $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-2}{x^3-4x^2-12x}$، ومداها. برِّر إجابتك، ثم تحقّق منها بيانيًّا. **55-68 انظر ملحق الإجابات.**

تبرير: أي العبارات الآتية صحيحة، وأيها خاطئة. برِّر إجابتك.

56) مدى الدالة $f(x)=nx^2$، حيث n عدد صحيح، هو $\{y \mid y\geq 0, y\in R\}$

57) مدى الدالة $f(x)=\sqrt{nx}$، حيث n عدد صحيح، هو $\{y \mid y\geq 0, y\in R\}$

58) جميع الدوال الفردية متماثلة حول المستقيم $y=-x$.

59) إذا دارت دالة زوجية $180°n$ حول نقطة الأصل، حيث n عدد صحيح، فإنها تبقى زوجية.

تبرير: إذا كانت $a(x)$ دالة فردية، فحدّد ما إذا كانت الدالة $b(x)$ فردية، أم زوجية، أم غير ذلك في كل مما يأتي، وبرِّر إجابتك:

60) $b(x)=a(-x)$

61) $b(x)=-a(x)$

62) $b(x)=[a(x)]^2$

63) $b(x)=a(|x|)$

64) $b(x)=[a(x)]^3$

تبرير: هل يمثّل المنحنى المعطى تماثله في كل مما يأتي دالة دائمًا أم أحيانًا أم لا يمثّل دالة؟ وبرِّر إجابتك.

65) متماثل حول المستقيم $x=4$.

66) متماثل حول المستقيم $y=2$.

67) متماثل حول كل من المحورين x, y .

68) **اكتب:** وضّح لماذا لا تكون العلاقة المتماثلة حول المحور x دالة.

مراجعة تراكمية

أوجد القيم المطلوبة لكل دالة مما يأتي: (الدرس 1-1)

69) $g(x)=x^2-10x+3$

a) $g(2)$ $\mathbf{-13}$

b) $g(-4x)$ $\mathbf{16x^2+40x+3}$

c) $g(1+3n)$ $\mathbf{9n^2-24n-6}$

70) $p(x)=\dfrac{2x^3+2}{x^2-2}$

a) $p(3)$ $\mathbf{8}$

b) $p(x^2)$ $\mathbf{\dfrac{2x^6+2}{x^4-2}}$

c) $p(x+1)$ $\mathbf{\dfrac{2x^3+6x^2+6x+4}{x^2+2x-1}}$

71) $h(x)=2x^2+4x-7$

a) $h(-9)$ $\mathbf{119}$

b) $h(3x)$ $\mathbf{18x^2+12x-7}$

c) $h(2+m)$ $\mathbf{2m^2+12m+9}$

أوجد مجال كل دالة من الدوال الآتية (الدرس 1-1)

72) $f(x)=x^2-\sqrt{2}$ $\mathbf{\{x \mid x\in R\}}$

73) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-16}$ $\mathbf{\{x \mid x\neq \pm 4, x\in R\}}$

74) $f(x)=\sqrt{3x+18}$ $\mathbf{\{x \mid x\geq -6, x\in R\}}$

بسِّط كلًّا مما يأتي: (مهارة سابقة)

75) $27^{\frac{1}{3}}$ $\mathbf{3}$

76) $64^{\frac{5}{6}}$ $\mathbf{32}$

77) $49^{-\frac{1}{2}}$ $\mathbf{\frac{1}{7}}$

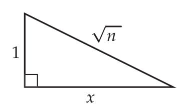
78) $16^{-\frac{3}{4}}$ $\mathbf{\frac{1}{8}}$

79) $25^{\frac{3}{2}}$ $\mathbf{125}$

80) $36^{-\frac{3}{2}}$ $\mathbf{\frac{1}{216}}$

تدريب على اختبار

81) إذا كان n عددًا حقيقيًّا أكبر من 1، فأوجد قيمة x بدلالة n في الشكل أدناه. **B**



A $\sqrt{n^2-1}$

B $\sqrt{n-1}$

C $\sqrt{n+1}$

D $n-1$

82) ما مدى الدالة $f(x)=x^2+1$، إذا كان مجالها $-2<x<3$ ؟ **D**

A $5<f(x)<9$

B $5<f(x)<10$

C $1<f(x)<9$

D $1\leq f(x)<10$

4 التقويم

فهم الرياضيات: اكتب الخطوات اللازمة لتحديد الدالة من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك.

1) إذا كان $f(-x)=f(x)$، فإن الدالة زوجية.

2) إذا كان $f(-x)=-f(x)$، فإن الدالة فردية.

3) إذا كان $f(-x)\neq f(x)$ أو $f(-x)\neq -f(x)$، فإن الدالة غير ذلك.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرسين 2-1،1-1 بإعطائهم:

الاختبار القصير 1، ص (11)

تنويع التعليم

فوق

توسّع: إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية و $g(x)$ دالة فردية، وكان $h(x)=f(x)\bullet g(x)$ ، فهل $h(x)$ دالة زوجية أو فردية أو ليست أيًّا منهما؟ وضِّح إجابتك. دالة فردية؛ لأن: $h(-x)=f(-x)\bullet g(-x)=f(x)\bullet(-g(x))=-f(x)\bullet g(x)=-h(x)$.

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-3

إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني.

الدرس 1-3

استعمال النهايات للتحقق من اتصال دالة، وتطبيق نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.

استعمال النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

ما بعد الدرس 1-3

إيجاد القيم القصوى لدالة.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- أوجد الحد الأدنى للخصم عند الشراء بقيمة 400 ريال. 20 ريالًا تقريبًا
- أوجد الحد الأدنى للخصم عند الشراء بقيمة 1200 ريال. 80 ريالًا
- ماذا تعني الدوائر الصغيرة المظللة والمفتوحة على التمثيل البياني؟ تعني الدوائر المظللة أن النقطة تنتمي إلى الدالة، وتعني الدوائر المفتوحة أن النقطة لا تنتمي إلى الدالة.

1-3 الاتصال والنهايات
Continuity and Limits

فيما سبق:

درستُ إيجاد مجال الدالة ومداها باستعمال تمثيلها البياني. (الدرس 1-2)

والآن:

- أستعملُ النهايات للتحقق من اتصال دالة، وأطبقُ نظرية القيمة المتوسطة على الدوال المتصلة.
- أستعمل النهايات لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة.

المفردات:

الدالة المتصلة continuous function

النهاية limit

الدالة غير المتصلة discontinuous function

عدم الاتصال اللانهائي infinite discontinuity

عدم الاتصال القفزي jump discontinuity

عدم الاتصال القابل للإزالة removable discontinuity

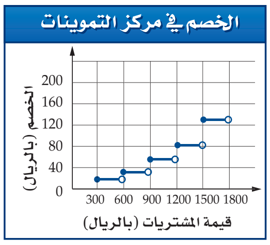
عدم الاتصال غير القابل للإزالة nonremovable discontinuity

سلوك طرفي التمثيل البياني end behavior

www.obeikaneducation.com

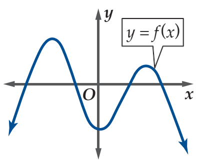
لماذا؟

بمناسبة الافتتاح، قدّم مركز للتموينات بطاقات خصم للمتسوقين وفقًا لقيمة مشترياتهم كما هو مبين في التمثيل البياني المجاور. يتضح من التمثيل البياني أن هناك نقاط انقطاع (قفزات) عند بعض القيم كما هو الحال عند $x=600$, $x=900$.



الاتصال: تكون **الدالة متصلة** إذا لم يكن في تمثيلها البياني أيُّ انقطاع أو قفزة. وعليه يمكنك تتبع مسار المنحنى دون أن ترفع القلم عنه.

إن أحد شروط اتصال دالة مثل $f(x)$ عند $x = c$ هو أن تقترب قيم الدالة من قيمة واحدة عندما تقترب قيم x من c من جهتي اليمين واليسار. إن مفهوم اقتراب قيم الدالة من قيمة دون الحاجة إلى الوصول إلى تلك القيمة يُسمى **النهاية**.

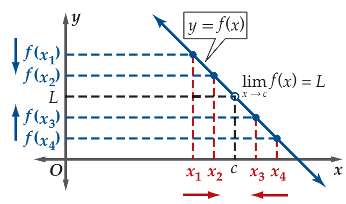


$f(x)$ متصلة لجميع قيم x.

مفهوم أساسي — النهايات

التعبير اللفظي: إذا كانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L عندما تقترب x من c من الجهتين، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.

الرموز: نقول: إن $\lim_{x \to c} f(x) = L$، وتُقرأ نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.

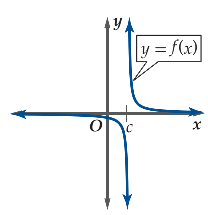


إن التمثيل البياني **للدالة غير المتصلة** يساعدك على فهم المعنى الجبري للاتصال. وفيما يأتي ملخص لأهم حالات عدم اتصال الدالة:

مفهوم أساسي — أنواع عدم الاتصال

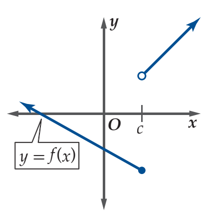
للدالة **عدم اتصال لانهائي** عند $x = c$ إذا تزايدت قيم الدالة أو تناقصت بلا حدود عندما تقترب x من c من اليمين أو اليسار.

مثال:



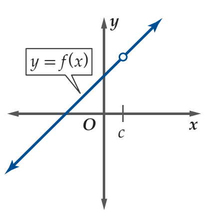
للدالة **عدم اتصال قفزي** عند $x = c$ إذا كانت نهايتا الدالة عندما تقترب x من c من اليمين ومن اليسار موجودتين، ولكنهما غير متساويتين.

مثال:



للدالة **عدم اتصال قابل للإزالة** عند $x = c$ إذا كانت نهاية الدالة عندما تقترب x من c موجودة، ولا تساوي قيمة الدالة عند $x = c$، ويشار إليها بدائرة صغيرة (○) غير مظلّلة؛ لتعبر عن عدم اتصال عند هذه النقطة.

مثال:



مصادر الدرس 1-3

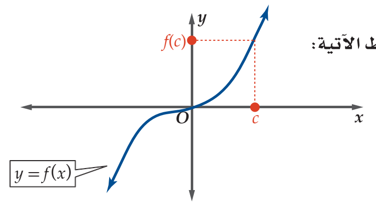
المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (32، 33)	• تنويع التعليم ص (32)	• تنويع التعليم ص (35)
كتاب التمارين	• ص (6)	• ص (6)	• ص (6)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (14) • تدريبات حل المسألة، ص (16)	• تدريبات حل المسألة، ص (16) • التدريبات الإثرائية، ص (17)	• تدريبات حل المسألة، ص (16) • التدريبات الإثرائية، ص (17)

تقودنا الملاحظات السابقة إلى اختبار الاتصال الآتي:

ملخص المفهوم — اختبار الاتصال

يقال: إن الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا حقّقت الشروط الآتية:

- $f(x)$ معرّفة عند c، أي أن $f(c)$ موجودة.
- $f(x)$ تقترب من القيمة نفسها عندما تقترب x من c من الجهتين. أي أن $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ موجودة.
- $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.



إرشادات للدراسة

النهايات: إن وجود قيمة للدالة $f(x)$ عند $x = c$ أو عدم وجودها، لا يؤثر في وجود نهاية للدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c.

مثال 1 — التحقق من الاتصال عند نقطة

حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ متصلة عند $x = 2$. برّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

تحقّق من شروط الاتصال الثلاثة.

1) هل $f(2)$ موجودة؟

$f(2) = 1$، أي أن الدالة معرفة عند $x = 2$.

2) هل $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ موجودة؟

كوّن جدولًا يبين قيم $f(x)$ عندما تقترب x من 2 من اليسار واليمين.

x	1.9	1.99	1.999	2.0	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.52	0.95	0.995		1.005	1.05	1.52

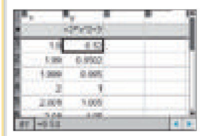
يُبين الجدول أنه عندما تقترب قيم x من 2 من اليسار ومن اليمين، فإن قيمة $f(x)$ تقترب من 1، أي أن $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$.

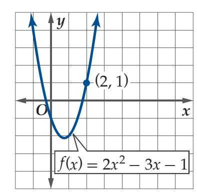
3) هل $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$ ؟

بما أن $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$ ، $f(2) = 1$ ، نستنتج أن $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$ ، إذن الدالة متصلة عند $x = 2$. ويوضّح منحنى الدالة $f(x)$ في الشكل 1.3.1 اتصال الدالة عند $x = 2$.

إرشاد تقني

جداول: لإنشاء جدول باستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire، أدخل الدالة إلى الحاسبة باستعمال قائمة، ثم اختر تطبيق القوائم وجداول البيانات بالضغط على . ثم اكتب قيم x للاقتراب من قيمة محددة.





الشكل 1.3.1

تحقق من فهمك

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلتين عند $x = 0$. برّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال:

(1A $f(x) = x^3$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ ؛ فالدالة متصلة عند $x = 0$.

(1B $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} &, \ x < 0 \\ x &, \ x \geq 0 \end{cases}$

(1B الدالة غير متصلة عند $x = 0$ ؛ لأن $f(x)$ تقترب من قيمتين مختلفتين عندما تقترب x من 0 .

الاتصال

المثالان 1 , 2 يبيِّنان كيفية تحديد نقاط الاتصال ونقاط عدم الاتصال للدوال ونوعها.

المثال 3 يبين كيفية إزالة عدم الاتصال في حالة عدم الاتصال القابل للإزالة.

المثالان 4 , 5 يبيِّنان كيفية تقريب أصفار الدالة في فترة معطاة.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ متصلة عند $x = \frac{1}{2}$. وبرّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

(1 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

(2 $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$ موجودة .

(3 $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{2}$.

أي أن الدالة متصلة عند $x = \frac{1}{2}$.

المحتوى الرياضي

غير محدد وغير معرف: نقول: إن القيمة غير محددة بمعنى أنه لا يمكن تحديد قيمتها. وسنعتبر في هذا الكتاب أن "غير معرف" تعني أنها غير موجودة.

إذا لم يتحقّق أي من شروط الاتصال عند نقطة معينة تكون الدالة غير متصلة عند تلك النقطة، فاختبار اتصال الدالة يساعدك على تحديد نوع عدم الاتصال عند تلك نقطة.

مثـال 2 تحديد نوع عدم الاتصال عند نقطة

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند قيم x المعطاة. برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال، واذا كانت الدالة غير متصلة، فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي ، قفزي ، قابل للإزالة.

a) $f(x)=\begin{cases}3x-2 & , \ x>-3\\ 2-x & , \ x\le -3\end{cases}$ عند $x=-3$.

1) $f(-3)$ موجودة؛ لأن $f(-3)=5$.

2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من -3 .

x	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$	5.1	5.01	5.001		-10.997	-10.97	-10.7

يُظهر الجدول أن قيم $f(x)$ تقترب من 5 عندما تقترب x من -3 من اليسار، في حين تقترب قيم $f(x)$ من -11 عندما تقترب x من -3 من اليمين. و بما أن قيم $f(x)$ تقترب من قيمتين مختلفتين عندما تقترب x من -3 فإن للدالة $f(x)$ عدم اتصال قفزي عند $x=-3$. ويوضّح منحنى الدالة $f(x)$ في الشكل 1.3.2 عدم اتصال الدالة عند $x=-3$.

b) $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-9}$ عند $x=-3$, $x=3$.

عند $x=3$

1) $f(3)=\frac{6}{0}$ ، وهي غير معرفة، أي أن $f(3)$ غير موجودة، وعليه تكون $f(x)$ غير متصلة عند $x=3$.

2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من 3.

x	2.9	2.99	2.999	3.0	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	-10	-100	-1000		1000	100	10

يُظهر الجدول أن قيم $f(x)$ تتناقص بلا حدود عندما تقترب x من 3 من اليسار، وأن قيم $f(x)$ تتزايد بلا حدود عندما تقترب x من 3 من اليمين، وعليه، فإن $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ غير موجودة.

3) للدالة $f(x)$ عدم اتصال لانهائي عند $x=3$ ؛ لأن قيم $f(x)$ تتناقص دون توقف عندما تقترب x من 3 من اليسار، وتتزايد بلا توقف عندما تقترب x من 3 من اليمين. ويوضّح المنحنى في الشكل 1.3.3 هذا السلوك.

عند $x=-3$

1) $f(-3)=\frac{0}{0}$ وهي غير معرفة، أي أن $f(-3)$ غير موجودة. وعليه تكون $f(x)$ غير متصلة عند $x=-3$.

2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من -3 .

x	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$	-0.164	-0.166	-0.167		-0.167	-0.167	-0.169

يُظهر الجدول أن قيم الدالة $f(x)$ تقترب من -0.167 عندما تقترب x من -3 من الجهتين، أي أن $\lim\limits_{x\to -3} f(x)\approx -0.167\approx -\frac{1}{6}$.

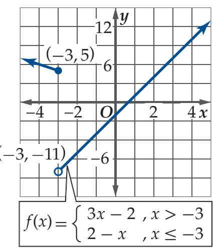
3) $f(x)$ غير متصلة عند $x=-3$ ؛ لأن $f(-3)$ غير موجودة، وبما أن $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ موجودة، فإن عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x=-3$. ويوضّح المنحنى في الشكل 1.3.3 هذا السلوك.

تحقق من فهمك

2A) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ ، عند $x=0$.

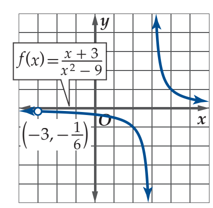
2B) $f(x)=\begin{cases}5x+4 & , \ x>2\\ 2-x & , \ x\le 2\end{cases}$ ، عند $x=2$.

2A) غير متصلة عند $x=0$ ، بما أن $f(0)=\frac{1}{0}$ هذه القيمة غير معرفة، فإن للدالة عدم اتصال لا نهائي عند $x=0$.



الشكل 1.3.2

2B) غير متصلة عند $x=2$ ، $f(2)=0$ ، وبما أن $f(x)$ تقترب من 0 عندما تقترب x من 2 من جهة اليسار، في حين تقترب من 14 عندما تقترب x من 2 من جهة اليمين، لذا فإن $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ غير موجودة. وللدالة عدم اتصال قفزي عند $x=2$.



الشكل 1.3.3

مثال إضافي

2 حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند قيم x المعطاة. برِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال، و إذا كانت الدالة غير متصلة، فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي ، قفزي ، قابل للإزالة.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ ؛ عند $x=1$

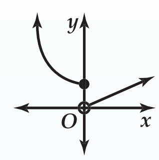
$f(x)$ غير متصلة عند $x=1$ ، وعدم الاتصال لا نهائي.

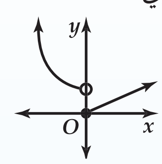
b) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ ؛ عند $x=2$

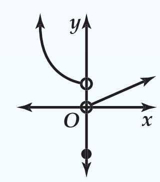
$f(x)$ غير متصلة عند $x=2$ ، وعدم الاتصال قابل للإزالة.

المحتوى الرياضي

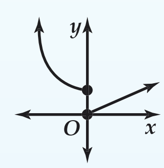
الاتصال: أنواع أخرى من عدم الاتصال القفزي.







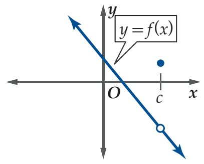
أما هذا التمثيل: فلا يمثل عدم اتصال قفزيّ؛ لأنه لا يمثل دالة.



وبالمثل إذا كان عدم الاتصال قابلًا للإزالة، فيمكن أن تكون الدالة معرّفة عند نقطة عدم الاتصال، وقد لا تكون.

التعليم باستعمال التقنيات

أدوات التمثيل البياني: توفّر أدوات التمثيل مثل الحاسبة البيانية والبرامج المحوسبة طرقًا سهلة وسريعة لاستكشاف خصائص الدوال، لذا اطلب إلى الطلاب استعمال أدوات التمثيل البياني؛ لمعرفة كيفية تغير النهايات لدوالٍ نهاياتُها موجودة.



لاحظ أنه في حالة عدم الاتصال القابل للإزالة؛ يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند تلك النقطة. وفي هذه الحالة تكون النهاية عند $x = c$ موجودة، ولكن الدالة غير معرفة عند $x = c$ أو أن $f(c)$ لا تساوي قيمة نهاية الدالة عند $x = c$. كما في الشكل المجاور.

يصنّف كل من عدم الاتصال اللانهائي وعدم الاتصال القفزي على أنهما **عدم اتصال غير قابل للإزالة**؛ لأنه لا يمكن إعادة تعريف الدالة لتصبح متصلة عند تلك النقطة، حيث إن قيم الدالة تقترب من قيم مختلفة إلى يمين نقطة عدم الاتصال وإلى يسارها، أو أن قيم الدالة لا تقترب من قيمة محدّدة عند هذه النقطة، أي تزداد قيم الدالة أو تتناقص بلا حدود.

مثال 3 إزالة عدم الاتصال

أعد تعريف الدالة $f(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$؛ لتصبح متصلة عند $x = 4$.

1) $f(4) = \frac{0}{0}$، أي أن $f(4)$ غير موجودة.

2) ابحث في قيم الدالة عندما تقترب x من 4.

x	3.9	3.99	3.999	4.0	4.001	4.01	4.1
$f(x)$	7.9	7.99	7.999		8.001	8.01	8.1

يظهر الجدول أعلاه أن قيم $f(x)$ تقترب من 8 عندما تقترب x من 4 من الجهتين، أي أن $\lim_{x\to 4} f(x) = 8$.

3) $f(x)$ غير متصلة عند $x = 4$؛ لأن $f(4)$ غير موجودة، وبما أن $\lim_{x\to 4} f(x)$ موجودة، فإن عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x = 4$

4) بما أن عدم الاتصال قابل للإزالة عند $x = 4$، لذا أعد تعريف الدالة لتصبح

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{x-4}, & x \neq 4 \\ 8, & x = 4 \end{cases}$$

لاحظ أن هذه الدالة أصبحت متصلة عند $x = 4$؛ لأن $f(4)$ موجودة وتساوي 8

تحقق من فهمك

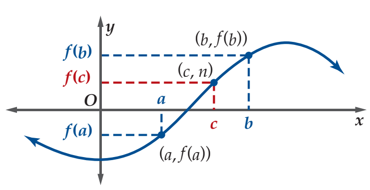
3) أعد تعريف الدالة $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$؛ لتصبح متصلة عند $x = 1$. انظر الهامش.

تستعمل نظرية القيمة المتوسطة ونتيجتها لتقريب أصفار الدوال المتصلة على فترة مغلقة، حيث تكون الدالة f متصلة على (a, b)، إذا كانت متصلة عند كل نقطة تنتمي إلى هذه الفترة، وتكون متصلة على $[a, b]$ إذا كانت متصلة عند كل نقطة من نقاطها، وكانت متصلة من اليمين عند a $(\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a))$ ، ومتصلة من اليسار عند b $(\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b))$. ومن الجدير بالذكر أن الدوال الكثيرة الحدود والجذرية والنسبية، تكون متصلة على مجالها دائمًا.

نظرية — نظرية القيمة المتوسطة

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a, b]$، وكانت $a < b$ ووجدت قيمة n بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد c بين a و b، بحيث $f(c) = n$.

نتيجة (موقع صفر الدالة): إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة وكان $f(a)$ و $f(b)$ مختلفين في الإشارة، فإنه يوجد عدد واحد على الأقل c بين a و b ، بحيث $f(c) = 0$. أي يوجد صفر للدالة بين a و b .



مثال إضافي

3 أعد تعريف الدالة $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$؛ لتصبح متصلة عند $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2}, & x \neq 2 \\ 12, & x = 2 \end{cases}$$

إجابة تحقق من فهمك:

3) $$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

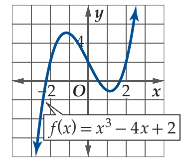
31 الدرس 3-1 الاتصال والنهايات

مثال 4 تقريب الأصفار عند تغيير الإشارة

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = x^3 - 4x + 2$ في الفترة $[-4, 4]$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-46	-13	2	5	2	-1	2	17	50

تعلم أن الدالة f متصلة على $[-4, 4]$؛ لأنها كثيرة حدود، وبما أن $f(-3)$ سالبة و $f(-2)$ موجبة، وبحسب النتيجة السابقة، فإنه يوجد صفر للدالة $f(x)$ بين -2, -3 . لاحظ أن قيم الدالة تتغير إشاراتها أيضًا في الفترة $0 < x < 1$ وفي الفترة $1 < x < 2$. وهذا يدل على أن الأصفار الحقيقية للدالة تنحصر بين العددين -3 وَ -2 ، والعددين 0 وَ 1 والعددين 1 وَ 2. ويوضح منحنى الدالة $f(x)$ في الشكل 1.3.4 هذه النتيجة.



الشكل 1.3.4

تحقق من فهمك

4A) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x + 3$ ، $[-6, 4]$

بين العددين -5 وَ -4، وبين 0 وَ 1، وبين 1 وَ 2

4B) $f(x) = \frac{x^2 - 6}{x + 4}$ ، $[-3, 4]$

بين العددين -3 وَ -2 وبين 2 وَ 3

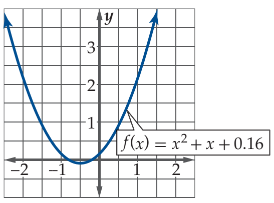
إن تغير إشارات قيم الدالة في فترة ما يحدّد موقعًا تقريبيًّا لصفر الدالة الحقيقي. أمَّا الفترات التي لا تتغير فيها الإشارة فإنها لا تنفي وجود أصفار للدالة، ويُعدُّ تمثيل الدالة من أفضل طرق التحقّق من ذلك.

مثال 5 تقريب الأصفار دون تغير الإشارة

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = x^2 + x + 0.16$ في الفترة $[-3, 3]$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.16	2.16	0.16	0.16	2.16	6.16	12.16

تعلم أن الدالة f متصلة على $[-3, 3]$ ؛ لأنها كثيرة حدود، وأن قيمها لا تغير إشارتها عند قيم x المعطاة، ولكن $f(x)$ تتناقص عندما تقترب قيم x من العدد -1 من اليسار، وتبدأ $f(x)$ بالتزايد عن يمين $x = 0$؛ لذا فإن من المحتمل وجود صفر حقيقي للدالة بين العددين المتتاليين -1 و 0. مثّل الدالة بيانيًّا للتحقق من ذلك.



يقطع منحنى الدالة المحور x مرتين في الفترة $[-1, 0]$؛ لذا فإنه يوجد صفرين حقيقيين للدالة في هذه الفترة.

تحقق من فهمك

5A) $f(x) = 8x^3 - 2x^2 - 5x - 1$ ، $[-5, 5]$

للدالة صفر حقيقي عند $x = 1$، وصفران حقيقيان بين العددين -1 وَ 0

5B) $f(x) = x^3 - 7x^2 + 18x - 14$ ، $[0, 4]$

للدالة صفر حقيقي بين العددين 1 وَ 2

سلوك طرفي التمثيل البياني: يصف **سلوك طرفي التمثيل البياني** شكل الدالة عند طرفي منحناها، أي أنه يصف قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم x أو تنقص بلا حدود، أي عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$. ولوصف سلوك طرفي التمثيل البياني يمكنك استعمال مفهوم النهاية.

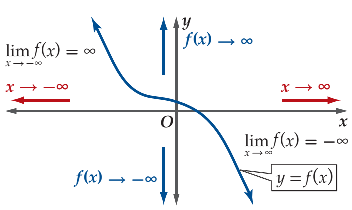
سلوك طرف التمثيل البياني من اليسار

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)$$

سلوك طرف التمثيل البياني من اليمين

$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$

أحد إمكانات سلوك طرفي التمثيل البياني هو زيادة قيم $f(x)$ أو نقصانها دون حدود. ويمكن وصف هذا السلوك بأن $f(x)$ تقترب من موجب ما لانهاية أو من سالب ما لانهاية على الترتيب.



إرشاد تقني

قد يُظهر التمثيل البياني للدالة صفرًا واحدًا؛ لذا اختر التدريج المناسب لترى جميع أصفار الدالة بوضوح.

قراءة الرياضيات

النهايات: تقرأ العبارة $\lim_{x \to \infty} f(x)$ نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من موجب ما لانهاية. وتقرأ العبارة $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من سالب ما لانهاية.

مثالان إضافيان

4 حدد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقة للدالة $f(x) = x^2 - x - \frac{3}{4}$ في الفترة $[-2, 2]$.

يوجد للدالة صفران ، بين -1 والعدد صفر، وبين 1 وَ 2

5 حدد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = x^3 + 2x + 5$ في الفترة $[-2, 2]$.

يوجد للدالة صفر واحد بين العددين -2 وَ -1

إرشادات للمعلم الجديد

تغير الإشارة: وضح للطلاب أن الدالة $f(x) = (x - 1)^2$ لا تغير إشارتها عند عددين صحيحين متتاليين ، في حين أنه يوجد للدالة صفر مكرر عند $x = 1$.

تنويع التعليم

دون ضمن

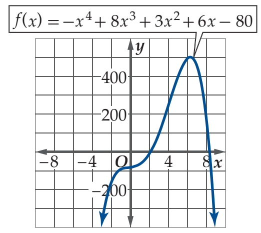
المتعلمون المنطقيون: اطلب إلى الطلاب تطوير قواعد عامة لتمثيل الدوال أو تذكّرها ، واطلب إليهم اختبار قواعدهم بتمثيل بعض الدوال دون استعمال أدوات التمثيل، ثم باستعمالها ، واطلب إليهم التفكير فيما يحدد خطوط التقارب الرأسية والأفقية.

إرشادات للدراسة

في المثال 6 ، أوجدت قيم تقريبية لـ $f(x)$ لأن ما يهمنا هو استقصاء نهاية الدالة $f(x)$ عندما تزداد $|x|$ بلا حدود، وليس حساب القيم الدقيقة لـ $f(x)$.
وكذلك في المثال 7.

مثال 6 المنحنيات التي تقترب من ما لانهاية

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = -x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 6x - 80$ لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني، ثم عزز إجابتك عدديًا.



التحليل بيانيًا:

يتضح من التمثيل البياني أن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ،
وأن $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.

التعزيز عدديًا:

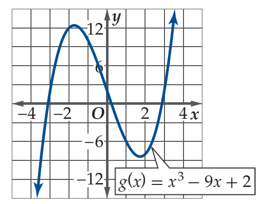
كوّن جدولًا لاستقصاء قيم $f(x)$ عندما تزداد $|x|$، أي استقصِ قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم x بلا حدود أو تتناقص بلا حدود.

x	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000
$f(x)$	$-1 \cdot 10^{16}$	$-1 \cdot 10^{12}$	$-1 \cdot 10^{8}$	-80	$-1 \cdot 10^{8}$	$-1 \cdot 10^{12}$	$-1 \cdot 10^{16}$

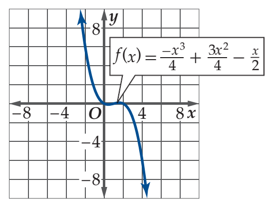
لاحظ أنه عندما $x \to -\infty$ ، فإن $f(x) \to -\infty$. وبالمثل عندما $x \to \infty$ ، فإن $f(x) \to -\infty$. وهذا يعزز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

تحقق من فهمك انظر الهامش.

(6A



(6B



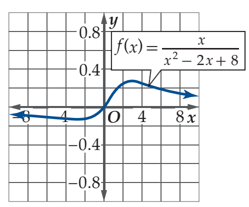
6A) يتضح من التمثيل البياني أنه عندما $x \to -\infty$ ، فإن $g(x) \to -\infty$. وعندما $x \to \infty$ ، فإنّ $g(x) \to \infty$. أي أنَّ $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$.

x	$g(x)$
-10000	$-1 \cdot 10^{12}$
-1000	$-1 \cdot 10^{9}$
0	2
1000	9999.9×10^{5}
10000	10^{12}

لاحظ أن بعض الدوال تقترب قيمها من ∞ أو $-\infty$ عندما تزداد $|x|$ بلا حدود، على حين تقترب قيم بعض الدوال من أعداد حقيقية دون أن تصل إليها بالضرورة.

مثال 7 منحنيات دوال تقترب من قيمة محددة

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 8}$ لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني. ثم عزز إجابتك عدديًا.



التحليل بيانيًا:

يتضح من التمثيل البياني أن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ وأن $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

التعزيز عدديًا:

x	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000
$f(x)$	$-1 \cdot 10^{-4}$	-0.001	-0.01	0	0.01	0.001	$1 \cdot 10^{-4}$

لاحظ أنه عندما $x \to -\infty$ ، فإن $f(x) \to 0$ و عندما $x \to \infty$ ، فإن $f(x) \to 0$. وهذا يعزز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

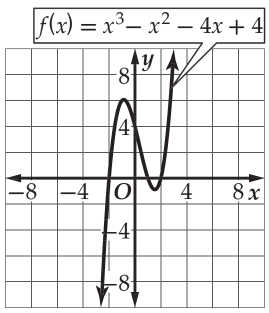
سلوك طرفي التمثيل البياني

مثال 6 يبيِّن كيفية معرفة سلوك نهاية الدالة عندما تقترب $f(x)$ من المالانهاية.

المثالان 8 , 7 يبيِّنان كيفية معرفة سلوك نهاية الدالة عندما تقترب $f(x)$ من قيمة محددة.

مثال إضافي

6 استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك عدديًا.



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
وَ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$
يتضح من التمثيل البياني أنه عندما:
$x \to -\infty, f(x) \to -\infty$
$x \to \infty, f(x) \to \infty$

x	$f(x)$
-10000	$-1 \cdot 10^{12}$
-1000	$-1 \cdot 10^{9}$
0	4
1000	99.9×10^{7}
10000	999.9×10^{9}

إجابة:

6B) يتضح من التمثيل البياني أنه عندما $x \to -\infty$ ، فإنَّ $f(x) \to \infty$. وعندما $x \to \infty$ ، فإنَّ $f(x) \to -\infty$. أي أن: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.

x	$f(x)$
$-10,000$	$-1 \cdot 10^{11}$
-1000	$-1 \cdot 10^{8}$
0	0
1000	$-2.5 \cdot 10^{8}$
$10,000$	$-2.5 \cdot 10^{11}$

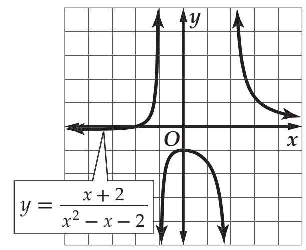
تنويع التعليم

دون

المتعلمون البصريون / المكانيون: اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات صغيرة لعمل شبكة مربعات على ورقة كبيرة، واطلب إليهم تدريج المحورين من -50 إلى 50 ، ثم اطلب إليهم اختيار دالة غير متصلة ، وتمثيل نقاطها عند كل مضاعفات الخمسة على المحور x ، وكذلك اختيار دالة أخرى نهايتها محددة ، وتمثيل مجموعة من نقاطها. واطلب إليهم وصف عدم الاتصال وسلوك نهاية الدوال باستعمال تمثيلاتها البيانية.

مثالان إضافيان

7 استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-x-2}$ لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك عدديًّا.



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ و $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

8 **فيزياء:** دالة تماثُل الطاقة هي $E = \dfrac{x^2+y^2}{2}$. فإذا كانت قيمة y ثابتة، فماذا يحدث لقيم دالة تماثل الطاقة عندما تتناقص قيم x ؟

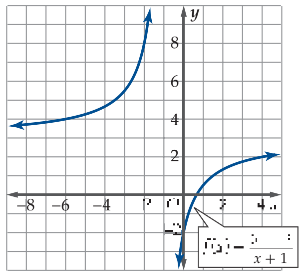
$\lim\limits_{x\to-\infty} E = \infty$

7A) يتضح من التمثيل البياني أنه عندما $x \to -\infty$، فإنَّ $f(x) \to 3$. وعندما $x \to \infty$، فإنَّ $f(x) \to 3$.
أي أنَّ: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$ و $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 3$.

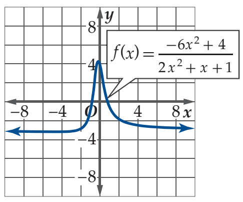
7B) يتضح من التمثيل البياني أنه عندما $x \to -\infty$، فإنَّ $f(x) \to -3$. وعندما $x \to \infty$، فإنَّ $f(x) \to -3$.
أي أنَّ: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -3$ و $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -3$.

تحقق من فهمك

(7A



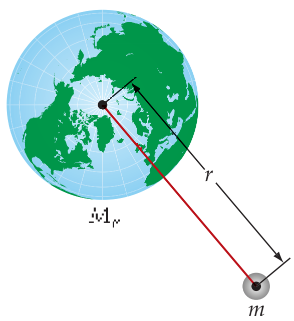
(7B

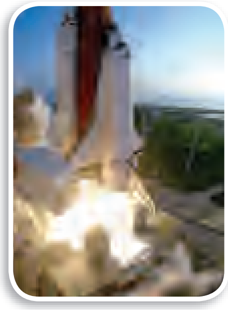


إن معرفة سلوك طرفي التمثيل البياني يساعد على حل بعض المسائل الحياتية.

مثال 8 من واقع الحياة تطبيقات سلوك طرفي التمثيل البياني

فيزياء: تُعطى قيمة طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لجسم بالقاعدة $U(r) = -\dfrac{GmM_e}{r}$ ، حيث G ثابت نيوتن للجذب الكوني، و m كتلة الجسم، و M_e كتلة الأرض، و r المسافة بين الجسم ومركز الأرض كما في الشكل المجاور. ماذا يحدث لطاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لجسم عندما يتحرك مبتعدًا عن الأرض مسافة كبيرة جدًّا؟





الربط مع الحياة

غالبًا ما تُستعمل العلاقة $U(r) = -\dfrac{GmM_e}{r}$ لإيجاد طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لقياس السرعة المطلوبة للتخلص من الجاذبية الأرضية وهي 25000 mi/h .
المصدر: The Mechanical Universe

المطلوب من المسألة وصف سلوك طرف التمثيل البياني لـ $U(r)$ عندما تزداد قيم r كثيرًا، أي إيجاد $\lim\limits_{r\to\infty} U(r)$.

وبما أن كلًّا من G, m, M_e ثوابت، فإن ناتج الضرب GmM_e عدد ثابت أيضًا. وعندما تزداد قيم r فإن قيمة الكسر $-\dfrac{GmM_e}{r}$ تقترب من الصفر؛ لذا فإن $\lim\limits_{r\to\infty} U(r) = 0$ ، ومن ثم إذا تحرك جسم مبتعدًا عن الأرض بصورة كبيرة، فإن طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لهذا الجسم تقترب من الصفر.

تحقق من فهمك

عندما تستمر سرعة جزيئات الغاز في التزايد، فإن الضغط الديناميكي يؤول إلى ∞ .

8) **فيزياء:** الضغط الديناميكي هو قياس الضغط الناتج عن حركة جزيئات الغاز ويعطى بالقاعدة $q(v) = \dfrac{\rho v^2}{2}$، حيث ρ (ويقرأ روه) كثافة الغاز، و v السرعة التي يتحرك بها الجزيء. ماذا يحدث للضغط الديناميكي لجزيئات الغاز عندما تستمر سرعة الجزيئات في التزايد؟

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1–23، 37، 36، 43–58
ضمن المتوسط	1–27 (فردي)، 28، 30، 31، 33–58
فوق المتوسط	23–58

تدرب وحل المسائل

حدد ما إذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة عند قيمة x المعطاة. وبرر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي، قفزي، قابل للإزالة. (المثالان 1, 2)

1) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ ، عند $x=-5$. 1-7) انظر الهامش.

2) $f(x)=\sqrt{x+5}$ ، عند $x=8$.

3) $h(x)=\dfrac{x^2-36}{x+6}$ ، عند $x=-6$, $x=6$.

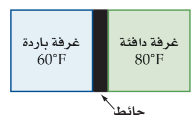
4) $g(x)=\dfrac{x}{x-1}$ ، عند $x=1$.

5) $h(x)=\dfrac{x-4}{x^2-5x+4}$ ، عند $x=1$, $x=4$.

6) $h(x)=\dfrac{x(x-6)}{x^3}$ ، عند $x=0$, $x=6$.

7) $f(x)=\begin{cases}4x-1 & , \quad x\le -6\\ -x+2 & , \quad x>-6\end{cases}$ ، عند $x=-6$.

8) **فيزياء:** غرفتان درجتا حرارتهما مختلفتان يفصل بينهما حائط. تنتقل الحرارة بين الغرفتين عبر الحائط بحسب العلاقة $f(w)=\dfrac{7.4}{w}$ ، حيث تمثل $f(w)$ المعدل الزمني لانتقال الحرارة بالواط، و w سمك الحائط بالمتر. (المثالان 1,2)



a) حدد ما إذا كانت الدالة متصلة عند $w=0.4$. وبرِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.
8) انظر ملحق الإجابات.

b) حدّد نقاط عدم الاتصال للدالة (إن وجدت)، وما نوعه؟

c) مثّل الدالة بيانيًّا للتحقق مما توصلت إليه في الفرع b.

9) أعد تعريف الدالة $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ لتصبح متصلة عند $x=-3$ (المثال 3) انظر الهامش.

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكل دالة مما يأتي في الفترة المعطاة: (المثالان 4, 5)

10) $f(x)=x^3-x^2-3, [-2,4]$ بين 1 وَ 2

11) $g(x)=-x^3+6x+2, [-4,4]$

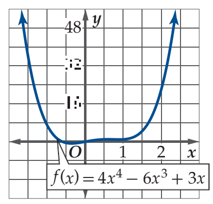
12) $f(x)=2x^4-3x^3+x^2-3, [-3,3]$ بين -1 وَ 0، وبين 1 وَ 2

13) $h(x)=\dfrac{x^2+4}{x-5}, [-2,4]$ لا يوجد أصفار للدالة في الفترة المعطاة.

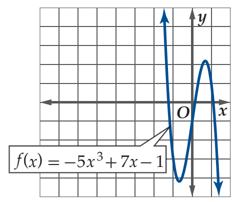
14) $g(x)=\sqrt{x^3+1}-5, [0,5]$ بين 2 وَ 3

استعمل التمثيل البياني لكل من الدوال الآتية لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني، ثم عزز إجابتك عدديًا. (المثالان 6, 7)

15)

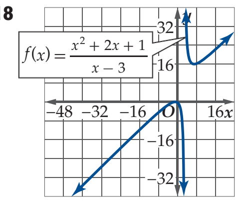


16)

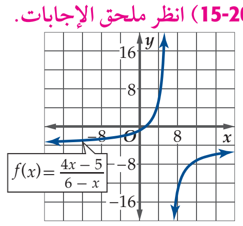


15-20) انظر ملحق الإجابات.

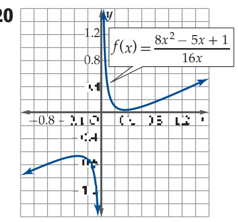
17)



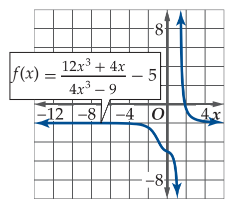
18)



19)



20)



21) **كيمياء:** يعطى معدل التفاعل R في تجربة كيميائية بالدالة $R(x)=\dfrac{0.5x}{x+12}$ ، حيث x تركيز المحلول بالملجرام لكل لتر. (مثال 7) انظر ملحق الإجابات.

a) مثّل الدالة بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية.

b) صف سلوك طرفي التمثيل البياني، وماذا يعني في التجربة؟ عزِّز إجابتك عدديًّا.

استعمل التبرير المنطقي لتحديد سلوك طرف التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي، عندما تقترب x من ∞ . برِّر إجابتك. (مثال 8)
22-25) انظر ملحق الإجابات.

22) $f(u)=\dfrac{12}{u}$

23) $q(x)=-\dfrac{24}{x}$

24) $f(x)=\dfrac{0.8}{x^2}$

25) $h(r)=\dfrac{-1}{r^2+1}$

26) **فيزياء:** تُعطى طاقة الحركة لجسم متحرك بالدالة $E(m)=\dfrac{p^2}{2m}$ ، حيث p الزخم (حاصل ضرب كتلة الجسم في سرعته المتجهة)، m كتلة الجسم. إذا وضع رمل في شاحنة متحركة، فماذا سيحدث إذا استمرت m في الازدياد؟ (مثال 8) انظر الهامش.

تنويع التعليم

فوق

توسّع: أوجد قيم كل من b, m التي تجعل الدالة $f(x)$ متصلة.

$$f(x)=\begin{cases}-x^2, & x\le 0\\ mx+b, & 0<x<1\\ x^2, & x\ge 1\end{cases}$$

إجابة ممكنة: $m=1, b=0$.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1–23 للتأكد من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات :

1) الدالة معرفة عند $x=-5$ ، تؤول قيم الدالة إلى 4.58 عندما تقترب x من -5 من الجهتين؛ $f(-5)=4.58$. الدالة متصلة عند -5.

2) الدالة معرفة عند $x=8$، تؤول قيم الدالة إلى 3.61 عندما تقترب x من 8 من الجهتين؛ $f(8)=3.61$. الدالة متصلة عند 8.

3) للدالة عدم اتصال قابل للإزالة عند $x=-6$ ، الدالة معرفة عند $x=6$, تقترب قيم الدالة إلى 0 عندما تقترب x إلى 6 من الجهتين. $h(6)=0$ الدالة متصلة عند $x=6$.

4) للدالة عدم اتصال لا نهائي عند $x=1$.

5) للدالة عدم اتصال قابل للإزالة عند $x=4$. للدالة عدم اتصال لا نهائي عند $x=1$، قيم الدالة تقترب من $\frac{1}{3}$ عندما تقترب x من 4 من الجهتين.

6) للدالة عدم اتصال لا نهائي عند $x=0$، الدالة معرفة عند $x=6$، وتقترب قيم الدالة من 0 عندما تقترب x من 6 من الجهتين؛ $h(6)=0$ ، الدالة متصلة عند $x=6$.

7) للدالة عدم اتصال قفزي عند $x=-6$، حيث $f(x)$ تقترب من -25 عندما تقترب x من -6 من جهة اليسار، وتقترب من 8 عندما تقترب x من -6 من جهة اليمين .

9)
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x+3} & , \quad x\ne -3\\ -6 & , \quad x=-3\end{cases}$$

11) بين -3 وَ -2 ، وبين -1 وَ 0 ، وبين 2 وَ 3

26) إجابة ممكنة: عندما تتزايد كتلة الجسم، فإن طاقة السيارة الحركية تقترب من 0.

خطأ شائع: في السؤال 36 فرع c، قد يحدث لبس عند بعض الطلاب بأن يظنوا أن للدالة عدة متغيرات؛ لذا ذكّرهم بأن x هو المتغير المستقل الوحيد، وأن a, b, c, d ثوابت.

تمثيلات متعددة

في السؤال 36 يستعمل الطلاب الجداول والتحليل لاستقصاء النهايات.

4 التقويم

تعلم سابق: اطلب إلى الطلاب كتابة كيف ساعدهم تحليل التمثيلات البيانية للعلاقات والدوال على فهم الاتصال والسلوك النهائي للدالة.

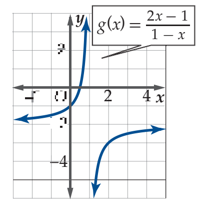
إجابات:

27) للدالة نقطة عدم اتصال لا نهائي عند $x = 1$. عندما $x \to \mp\infty$ فإن $g(x) \to -2$.

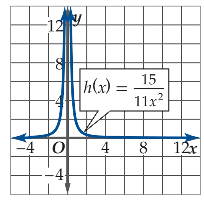
28) للدالة نقطة عدم اتصال لا نهائي عند $x = 0$. عندما $x \to \mp\infty$ فإن $h(x) \to 0$.

استعمل كلًّا من التمثيلين البيانيين الآتيين لتحديد قيمة أو قيم x التي تكون الدالة غير متصلة عندها، وحدد نوع عدم الاتصال، ثم استعمل المنحنى لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني. برِّر إجابتك. **(27, 28)** انظر الهامش.

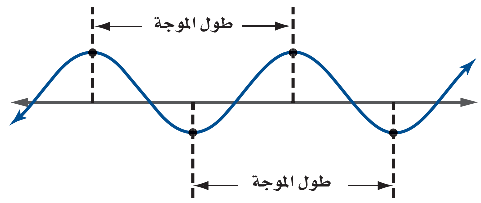
27)



28)



29) **فيزياء:** تُسمّى المسافة بين نقطتين متناظرتين على موجتي ضوء متتاليتين بطول الموجه λ (ويقرأ لامدا)، و يُسمى عدد الموجات الكاملة التي تمر بنقطة خلال مدة زمنية محددة بالتردد f. انظر ملحق الإجابات



وتصف الدالة $f(\lambda) = \frac{c}{\lambda}$ العلاقة بين طول الموجة والتردد، حيث c سرعة الضوء ومقدارها $2.99 \cdot 10^8\,m/s$.

a) مثّل الدالة بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية.

b) استعمل المنحنى لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني. وعزز إجابتك عدديًا.

c) هل الدالة متصلة؟ إذا كان الجواب لا، فعيّن نقاط عدم الاتصال. لا، عدم اتصال لا نهائي عند $\lambda = 0$

الحاسبة البيانية: مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًا، ثم حدد ما إذا كانت متصلة أم لا. وإذا كانت غير متصلة، فحدد نوع عدم الاتصال، وحدد نقاطه. ثمّ صف سلوك طرفي التمثيل البياني، وعيّن أصفار الدالة إن وجدت. **(30-32)** انظر ملحق الإجابات.

30) $f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$

31) $h(x) = \frac{4x^2 + 11x - 3}{x^2 + 3x - 18}$

32) $h(x) = \frac{x^3 - 5x^2 - 26x + 120}{x^2 + x - 12}$

الحاسبة البيانية: مثّل بيانيًا كلًّا من الدوال الآتية وَ صِف سلوك طرفي التمثيل البياني، وعزز إجابتك عدديًا. **(33, 34)** انظر ملحق الإجابات.

33) $g(x) = x^5 - 20x^4 + 2x^3 - 5$

34) $f(x) = \frac{16x^2}{x^2 + 15x}$

35) **أعمال:** بدأ حمد مشروعًا تجاريًّا صغيرًا بالطباعة على القمصان وبيعها. إذا كانت تكلفة الطباعة على القميص الواحد 9 ريالات وتكلفة المعدات اللازمة 12000 ريال. فأجب عما يأتي: انظر ملحق الإجابات.

a) اكتب دالة تبيّن معدّل تكلفة الطباعة على القميص الواحد على صورة دالة في عدد القمصان المنتجة n.

b) استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة.

c) إذا استمر ازدياد عدد القمصان المنتجة بشكل كبير، فكم سيصبح معدل تكلفة الطباعة على القميص الواحد؟

36) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة النهايات. افترض أن $f(x) = \frac{ax^3 + b}{cx^3 + d}$، حيث a و c عددان صحيحان لا يساويان الصفر، و b و d عددان صحيحان. انظر ملحق الإجابات.

a) **جدوليًا:** افترض أن $c = 1$ و اختر ثلاث مجموعات مختلفة لقيم a, b, d. ثم اكتب الدالة في كل حالة وأكمل الجدول أدناه:

$c = 1$				
a	b	d	$\lim_{x\to\infty} f(x)$	$\lim_{x\to-\infty} f(x)$
3	2	4	3	3
−1	5	7	−1	−1
9	−6	8	9	9

b) **جدوليًا:** اختر ثلاث مجموعات مختلفة من القيم لكل متغير، مجموعة فيها $a > c$، ومجموعة فيها $a < c$، ومجموعة فيها $a = c$. ثم اكتب كل دالة، وكوِّن جدولًا كما في الفرع **a**.

c) **تحليليًا:** خمّن قيمة نهاية الدالة $f(x) = \frac{ax^3 + b}{cx^3 + d}$ عندما تقترب x من $-\infty$ ومن $+\infty$.

37) **الحاسبة البيانية:** مثّل 6 دوال مختلفة على الصورة $f(x) = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2}$ بيانيًّا، حيث n, a, b أعداد صحيحية غير سالبة. انظر ملحق الإجابات.

a) خمّن سلوك طرفي التمثيل البياني عندما تكون n عددًا زوجيًا موجبًا، ثم عزز إجابتك بيانيًّا.

b) خمّن سلوك طرفي التمثيل البياني عندما تكون n عددًا فرديًا موجبًا ، ثم عزز إجابتك بالتمثيل البياني.

مسائل مهارات التفكير العليا

(38-44) انظر الهامش.

تبرير: بيّن إذا كان لكل من الدالتين الآتيتين عدم اتصال لانهائي، أم قفزي، أم قابل للإزالة عند $x = 0$. برر إجابتك.

38) $f(x) = \frac{x^5 + x^6}{x^5}$ 39) $f(x) = \frac{x^4}{x^5}$

40) **تحدٍّ:** أوجد قيمة كلٍّ من a, b التي تجعل الدالة f متصلة.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & , \quad x \ge 3 \\ bx + a & , \quad -3 < x < 3 \\ -b - x & , \quad x \le -3 \end{cases}$$

تبرير: أوجد $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ في كلٍّ من الحالات الآتية، وبرِّر إجابتك.

41) $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ حيث f دالة زوجية.

42) $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ حيث f دالة فردية.

43) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ حيث f دالة متماثلة حول نقطة الأصل.

44) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ حيث f دالة متماثلة حول المحور y.

45) **اكتب:** أعطِ مثالًا على دالة لها عدم اتصال قابل للإزالة، ثم بيّن كيف يمكن إزالته. وكيف تؤثر إزالة عدم الاتصال في الدالة؟ انظر ملحق الإجابات.

مراجعة تراكمية

استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل كلٍّ من الدوال الآتية بيانيًّا، وتحديد أصفارها. ثم تحقق من إجابتك جبريًّا: (الدرس 1-2)

46) $f(x) = \frac{2x + 1}{x}$ (46-48) انظر ملحق الإجابات.

47) $g(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 1}$

48) $h(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$

حدد مجال كل من الدوال الآتية: (الدرس 1–1)

49) $f(x) = \frac{4x + 6}{x^2 + 3x + 2}$ $(-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, \infty)$

50) $g(x) = \frac{x + 3}{x^2 - 2x - 10}$

$(-\infty, 1 - \sqrt{11}) \cup (1 - \sqrt{11}, 1 + \sqrt{11}) \cup (1 + \sqrt{11}, \infty)$

51) $g(a) = \sqrt{2 - a^2}$ $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

إذا كانت $f(x) = \frac{2x - 5}{x^2 - 3x + 1}$ فأوجد قيمة الدالة في كل مما يأتي: (الدرس 1-1)

52) $f(9)$ $\frac{13}{55}$

53) $f(3b)$ $\frac{6b - 5}{9b^2 - 9b + 1}$

54) $f(2a - 3)$ $\frac{4a - 11}{4a^2 - 18a + 19}$

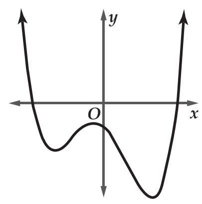
مثل بيانيًّا كلٍّ من الدوال الآتية باستعمال الحاسبة البيانية، ثم حلل منحناها لتحدّد إن كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. ثم تحقق من إجابتك جبريًّا. وإن كانت زوجية أو فردية فصف تماثل منحناها. (الدرس 1-2)

55) $h(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ (55, 56) انظر ملحق الإجابات.

56) $f(x) = \frac{x + 4}{x - 2}$

تدريب على اختبار

57) يبين التمثيل البياني أدناه منحنى دالة كثيرة الحدود $f(x)$. أي الأعداد الآتية يمكن أن يكون درجة للدالة $f(x)$؟ **D**



A 1

B 2

C 3

D 4

58) في أي الفترات الآتية يقع صفر الدالة $f(x) = \sqrt{x^2 - 6} - 6$؟ **A**

A $[6, 7]$

B $[7, 8]$

C $[8, 9]$

D $[9, 10]$

إجابات:

38) عدم اتصال قابل للإزالة. إجابة ممكنة: بما أن الدالة متصلة دائمًا إلا عندما يكون $x = 0$ وذلك لأن النهاية موجودة والدالة غير معرفة عند تلك النقطة، لذا فإن عدم الاتصال قابل للإزالة.

39) عدم اتصال لا نهائي؛ إجابة ممكنة: للدالة عدم اتصال لا نهائي؛ لأنه عندما تقترب x من 0 من الجهتين، تؤول قيم الدالة إلى ∞ أو $-\infty$.

40) الدالة f متصلة على كلٍّ من الفترات $(-\infty, -3)$ ، $(-3, 3)$ ، $(3, \infty)$، وحتى تكون متصلة على $(-\infty, +\infty)$ يجب أن تكون متصلة عند كلٍّ من العددين -3 وَ 3 وهذا يعني أن

1) $\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^-} f(x)$

$b \times -3 + a = -b - (-3)$

$-3b + a = -b + 3$

2) $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^-} f(x)$

$\to (3)^2 + a = b \times 3 + a$

$9 + a = 3b + a$

وبحل المعادلتين الآتيتين

$-3b + a = -b + 3$

$9 + a = 3b + a$، نجد أن

$a = 9 , b = 3$

41) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$، التمثيل البياني لسلوك الدالة عند $-\infty$ يجب أن يكون مشابهًا لسلوكها عند ∞ للدالة الزوجية.

42) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$، التمثيل البياني لسلوك الدالة عند $-\infty$ يجب أن يكون معاكسًا لسلوكها عند ∞ للدالة الفردية.

43) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$؛ لأن $(x, y) \to (-x, -y)$ في التماثل حول نقطة الأصل.

44) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$، لأن $y = f(-x) = f(x)$ في التماثل حول المحور y.

1-4 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-4

إيجاد قيم الدوال .

الدرس 1-4

تحديد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة ، ثابتة ، متناقصة. وتحديد القيم العظمى والصغرى لها.

إيجاد متوسط معدّل التغير للدالة.

ما بعد الدرس 1-4

تمثيل الدوال الرئيسة (الأم) ووصفها.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما المواقف التي تُفَضّل فيها الدوال المتزايدة على الدوال المتناقصة؟
إجابة ممكنة: تزايد درجات الاختبار مع الزمن، والتزايد في المبيعات السنوية.
- عمل أحد رجال الأعمال على تحسين أداء مصنعه بعدما تراجعت أرباحه. فإذا أثمر هذا التحسن خلال الأشهر شوال وذي القعدة وذي الحجة، فمتى يتغير منحنى دالة الربح من التناقص إلى التزايد؟
إجابة ممكنة: خلال شوال وذي القعدة وذي الحجة أو بعدها بفترة قصيرة.
- إذا تذبذبت معدلات الإيراد الشهرية لأحد المصانع بين الزيادة والنقصان خلال السنة الأخيرة، فكيف تحسب متوسط معدّل التغير خلال شهرين؟
أجد مقدار التغير بين شهرين ثم أقسم على 2.

1-4 القيم القصوى ومتوسط معدل التغير

Extrema and Average Rates of Change

فيما سبق:

درستُ كيفية إيجاد قيم الدوال. (الدرس 1-1)

والآن:

- أستعمل التمثيل البياني لدالة؛ لأحدد الفترات التي تكون فيها الدالة: متزايدة، ثابتة، متناقصة. وأحددُ القيم العظمى والصغرى لها.
- أجدُ متوسط معدل التغير للدالة.

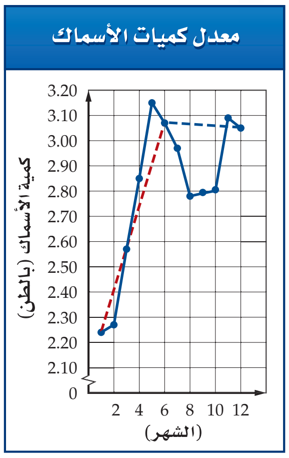
المفردات:

المتزايدة
increasing
المتناقصة
decreasing
الثابتة
constant
النقطة الحرجة
critical point
العظمى
maximum
الصغرى
minimum
القصوى
extrema
متوسط معدل التغير
average rate of change
القاطع
secant line

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يبيِّن التمثيل البياني المجاور معدل كميات الأسماك التي اصطادها أحد الصيادين في المملكة خلال أشهر عام 1431 هـ .



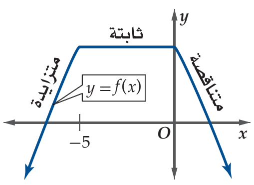
يتضح من التمثيل أن المعدل أخذ في التزايد من شهر محرم وحتى جمادى الأولى، ثم تناقص حتى شعبان، وبقي ثابتًا تقريبًا حتى شوال، ثم تزايد مرة أخرى حتى ذي القعدة، وأخيرًا تناقص قليلًا بين شهري ذي القعدة وذي الحجة.

كما يتضح أن أعلى معدل للصيد بلغ 3.15 أطنان، وذلك في شهر جمادى الأولى، ويلاحظ من ميلي الخطين المنقطين بالأحمر والأزرق أن معدل التغيّر في النصف الأول من عام 1431 هـ أكثر منه في النصف الثاني.

التزايد والتناقص: خاصية من خصائص الدوال التي تساعد على دراسة الدالة، حيث تحدّد الفترات التي تتزايد أو تتناقص الدالة فيها أو تبقى ثابتة.

ففي الشكل المجاور ، إذا تتبعت منحنى الدالة $f(x)$ من اليسار إلى اليمين فإنك تلاحظ أن:

- $f(x)$ متزايدة في الفترة $(-\infty, -5)$
- ثابتة في الفترة $(-5, 0)$
- متناقصة في الفترة $(0, \infty)$



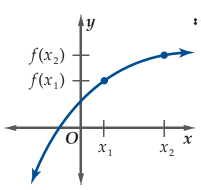
يمكن التعبير عن خصائص الدالة من حيث كونها متزايدة أو متناقصة أو ثابتة جبريًّا على النحو الذي يلخصه المفهوم الآتي:

مفهوم أساسي — الدوال المتزايدة، المتناقصة ، الثابتة

التعبير اللفظي: تكون الدالة f متزايدة على فترة ما إذا وفقط إذا زادت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة.

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) < f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.

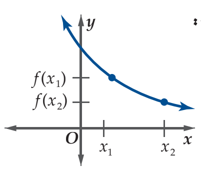
النموذج:



التعبير اللفظي: تكون الدالة f متناقصة على فترة ما إذا وفقط إذا تناقصت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة .

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) > f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.

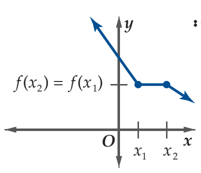
النموذج:



التعبير اللفظي: تكون الدالة f ثابتة على فترة ما إذا وفقط إذا لم تتغير قيم $f(x)$ لأي قيم x في الفترة.

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) = f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.

النموذج:



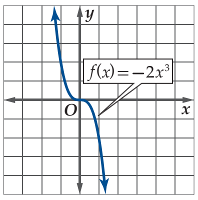
مصادر الدرس 1-4

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (43)	• تنويع التعليم ص (43)	• تنويع التعليم ص (46)
كتاب التمارين	• ص (7)	• ص (7)	• ص (7)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (18) • تدريبات حل المسألة، ص (20)	• تدريبات حل المسألة، ص (20) • التدريبات الإثرائية، ص (21)	• تدريبات حل المسألة، ص (20) • التدريبات الإثرائية، ص (21)

مـثال 1 تحديد التزايد والتناقص

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقربةً إلى أقرب 0.5 وحدة، ثم عزّز إجابتك عدديًّا.

a) $f(x) = -2x^3$



التحليل بيانيًّا:

يبين التمثيل البياني أن قيم $f(x)$ تتناقص كلما ازدادت قيم x؛ لذا فإن الدالة متناقصة في الفترة $(-\infty, \infty)$.

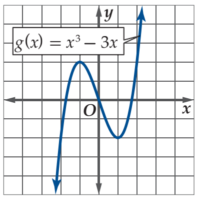
التعزيز عدديًّا:

كوّن جدولًا يتضمن قيمًا للمتغير x في الفترة.

x	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
$f(x)$	1024	432	128	16	0	-16	-128	-432	-1024

يوضّح الجدول أنه عندما تتزايد قيم x، تتناقص قيم $f(x)$؛ وهذا يعزّز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

b) $g(x) = x^3 - 3x$



التحليل بيانيًّا:

يبين التمثيل البياني أن g متزايدة في الفترة $(-\infty, -1)$، ومتناقصة في الفترة $(-1, 1)$ ومتزايدة في الفترة $(1, \infty)$.

التعزيز عدديًّا:

كوّن جدولًا يتضمن قيمًا للمتغير x في كل فترة من الفترات الثلاث السابقة.

$(-\infty, -1)$:

x	-11	-9	-7	-5	-3	-1
$g(x)$	-1298	-702	-322	-110	-18	2

$(-1, 1)$:

x	-1	-0.5	0	0.5	1
$g(x)$	2	1.375	0	-1.375	-2

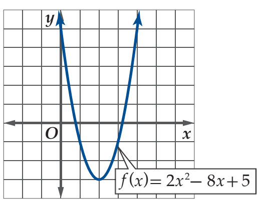
$(1, \infty)$:

x	1	3	5	7	9	11
$g(x)$	-2	18	110	322	702	1298

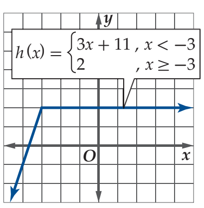
توضح الجداول السابقة أنه عندما تزداد x إلى -1، فإن $g(x)$ تزداد، وعندما تزداد x من -1 إلى 1، فإن $g(x)$ تتناقص، أما عندما تزداد x ابتداءً من 1، فإن $g(x)$ تزداد. وهذا يعزّز ما توصلنا إليه من التمثيل البياني.

تحقق من فهمك (1A-1B) انظر ملحق الإجابات.

1A)



1B)



بينما يستعمل التمثيل البياني لإيجاد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة ويمكن تعزيز ذلك عدديًّا، إلا أننا نحتاج إلى حساب التفاضل لإثبات صحة هذه الخصائص.

تنبيه!

فترات: لا يمكن وصف دالة بأنها متناقصة أو متزايدة عند نقطة؛ لذلك يستعمل القوسين (,) عند تحديد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة.

إرشادات للدراسة

الدوال المتزايدة، المتناقصة، الثابتة: إذا كانت الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة لكل قيم x في مجالها تسمى دالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة على الترتيب. فالدالة في المثال 1a متناقصة، بينما الدالة في المثال 1b لا يمكن تصنيفها على أنها متزايدة أو متناقصة؛ لأنها متزايدة على فترة ومتناقصة على فترة أخرى.

التزايد والتناقص

مثال 1 يبيِّن كيفية تقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة أ و متناقصة أو ثابتة.

الأمثلة 2 - 4 تبيِّن كيفية إيجاد القيم القصوى المحلية والمطلقة واستعمالها.

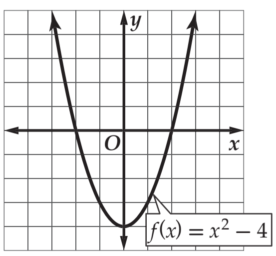
التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

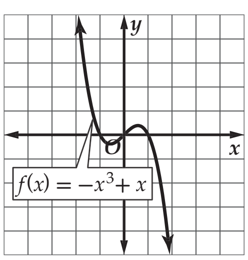
1 استعمل التمثيل البياني لكل دالة من الدالتين أدناه؛ لتقدير الفترات (قرّب إلى أقرب 0.5 وحدة) التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة، ثم عزّز إجابتك عدديًّا.

a) $f(x) = x^2 - 4$



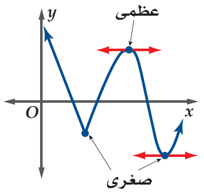
$f(x)$ متناقصة في الفترة $(-\infty, 0)$ ومتزايدة في الفترة $(0, \infty)$.

b) $f(x) = -x^3 + x$



$f(x)$ متناقصة في الفترة $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ أو $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$، ومتزايدة في الفترة $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

لاحظ أن النقاط التي تغير الدالة عندها سلوك تزايدها أو تناقصها تكوّن قمة أو قاعًا في منحنى الدالة وتُسمّى **نقاطًا حرجة**. ويكون المماس المرسوم للمنحنى عند هذه النقاط إما أفقيًا أو عموديًا (أي أن ميله صفر أو غير معرف)، أو أنه لا يوجد عندها مماس، وقد يدل ذلك على وجود قيمة **عظمى** أو **صغرى** للدالة.



يمكن أن يكون للدالة أشكال مختلفة من القيم العظمى والقيم الصغرى (**القيم القصوى**).

إرشادات للدراسة

القيم القصوى: ليس من الضروري أن توجد قيمة قصوى عند كل نقطة حرجة.

مفهوم أساسي — القيم القصوى المحلية والمطلقة

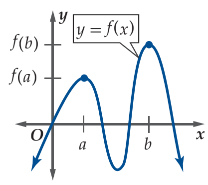
التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة للدالة وكانت أكبر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة سُمِّيَت قيمةَ عظمى محلية.

الرموز: تكون $f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f إذا وجدت فترة (x_1, x_2) تحتوي a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2)، $f(a) \geq f(x)$.

التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة عظمى محلية للدالة، وكانت أكبر قيمة للدالة في مجالها، سُمِّيَت قيمة عظمى مطلقة.

الرموز: تكون $f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f إذا كان لكل قيم x في مجالها، $f(b) \geq f(x)$.

النموذج:



$f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f
$f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f

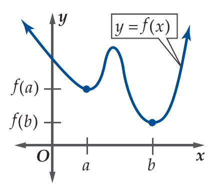
التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة للدالة، وكانت أصغر من جميع القيم الأخرى في فترة من مجال الدالة، سُمِّيَت قيمةَ صغرى محلية.

الرموز: تكون $f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة f إذا وجدت فترة (x_1, x_2) تحتوي a على أن يكون لكل قيم x في الفترة (x_1, x_2)، $f(a) \leq f(x)$.

التعبير اللفظي: إذا وجدت قيمة صغرى محلية للدالة وكانت أصغر قيمة للدالة في مجالها سُمِّيَت قيمةَ صغرى مطلقة.

الرموز: تكون $f(b)$ قيمة صغرى مطلقة للدالة f إذا كان لكل قيم x في مجالها $f(b) \leq f(x)$.

النموذج:

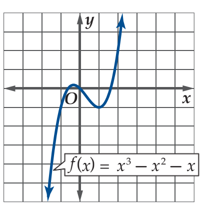


$f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة f
$f(b)$ قيمة صغرى مطلقة للدالة f

إرشادات للدراسة

قيمة قصوى محلية: يُستعمل مصطلح قيمة قصوى محلية بدلًا من قيمة عظمى محلية أو صغرى محلية.

مثال 2 — تقدير القيم القصوى للدالة وتحديدها



استعمل التمثيل البياني لتقدير قيم x التي يكون للدالة $f(x)$ عندها قيم قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبين نوع القيم القصوى، ثم عزِّز إجابتك عدديًّا.

التحليل بيانيًّا:

يوضّح التمثيل البياني أن للدالة قيمة عظمى محلية عند $x = -0.5$، ومقدارها صفر تقريبًا. كما يوجد للدالة قيمة صغرى محلية عند $x = 1$، ومقدارها -1 . لاحظ كذلك أن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ ، وعليه لا يوجد قيم قصوى مطلقة للدالة.

التعزيز عدديًّا:

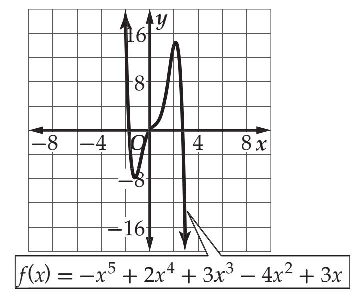
اختر قيمًا للمتغير x على طرفي قيمة x المتوقع أن يكون عندها قيمة قصوى محلية، ثمّ اختر قيمتين إحداهما كبيرة جدًّا، والأخرى صغيرة جدًّا.

x	-100	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	100
$f(x)$	$-1.0 \cdot 10^6$	-1.00	0.13	0	-0.63	-1	-0.38	$9.9 \cdot 10^5$

بما أن $f(-0.5) > f(-1)$ و $f(-0.5) > f(0)$، فيوجد للدالة قيمة عظمى محلية عند إحدى قيم x القريبة من -0.5 في الفترة $(-1, 0)$. وبما أن $f(-0.5) \approx 0.13$ فإن تقدير القيمة العظمى المحلية بالقيمة 0 يعد معقولًا.

مثال إضافي

2 قدّر قيم x التي يكون للدالة $f(x)$ عندها قيم قصوى مقربَة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبيِّن نوع القيم القصوى، ثم عزِّز إجابتك عدديًّا.



صغرى محلية عند $x = -1$
عظمى محلية عند $x = 2$. لا يوجد قيم قصوى مطلقة.

المحتوى الرياضي

القيم القصوى المحلية والمطلقة

ترتبط القيم الصغرى المحلية أو العظمى المحلية بفترة، وقد تجد أن للدالة أكثر من قيمة صغرى أو عظمى محلية، لكن القيم الصغرى المطلقة والعظمى المطلقة لا ترتبط بفترة بل هي قصوى مطلقة على المجال كله ، ويوجد للدالة على الأكثر قيمة صغرى مطلقة واحدة وقيمة عظمى مطلقة واحدة.

إرشادات للمعلم الجديد

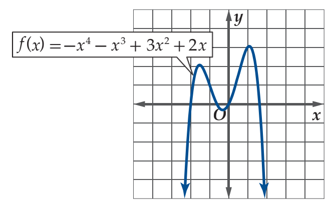
المماسات: سيتم دراسة ميل المماس لمنحنى الدالة عند قيم محددة لاحقًا.

بالطريقة نفسها، بما أن $f(1) < f(0.5)$, $f(1) < f(1.5)$، فتوجد قيمة صغرى محلية عند إحدى قيم x القريبة من العدد 1 في الفترة $(0.5, 1.5)$ و بما أن $f(1) = -1$، فإن تقدير القيمة الصغرى بالقيمة -1 يعد معقولاً.

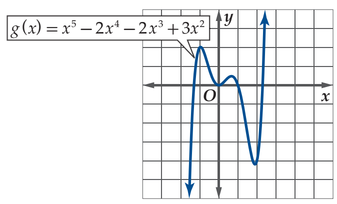
وبما أن $f(100) > f(-0.5)$, $f(-100) < f(1)$، فهذا يعزز تخميننا بأنه لا توجد قيم قصوى مطلقة.

تحقق من فهمك

(2A



(2B



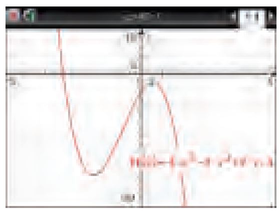
نحتاج إلى حساب التفاضل لاختبار تزايد الدالة وتناقصها، ونحتاج إليه أيضًا لتحديد القيم القصوى المحلية والمطلقة للدالة والذي ستتم دراستها في الفصل الثامن (النهايات والاشتقاق). كما يمكن استعمال الحاسبة البيانية لتحديد مواقع القيم القصوى، وإيجاد قيمها.

مثال 3 استعمال الحاسبة البيانية لتقدير القيم القصوى

الحاسبة البيانية: استعمل الحاسبة البيانية لتجد القيم القصوى المحلية والمطلقة للدالة $f(x) = -4x^3 - 8x^2 + 9x - 4$ مقربة إلى أقرب جزء من مئة، وحدِّد قيم x التي تكون عندها هذه القيم.

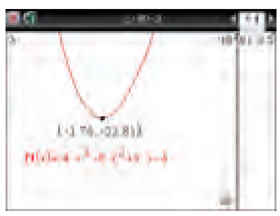
مثّل الدالة بيانيًا، واختر التدريج المناسب بحسب الحاجة لتتمكن من رؤية خصائص الدالة.

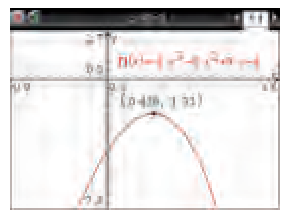
بالضغط على المفاتيح: ، on ، ثم اكتب الدالة واضغط enter



يوضّح التمثيل البياني أن للدالة قيمة صغرى محلية واحدة في الفترة $(-2, -1)$، وقيمة عظمى محلية واحدة في الفترة $(0, 1)$، أما سلوك طرفي التمثيل البياني فيدلّ على عدم وجود قيم قصوى مطلقة للدالة.

اضغط على مفتاح menu، ثم على 6: تحليل الرسم البياني، واختر منها 3: القيمة العظمى أو 2: القيمة الصغرى، ثم مرِّر المؤشر أفقيًا على الشاشة من اليسار إلى اليمين فتظهر نقطة القيمة الصغرى المحلية تقدر بـ -22.81 وتكون عند $x = -1.76$، وتقدر القيمة العظمى المحلية بـ -1.93 وتكون عند $x = 0.43$





تحقق من فهمك

$h(x) = 7 - 5x - 6x^2$ (3A

$g(x) = 2x^3 - 4x^2 - x + 5$ (3B

2A) يوضح التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية عند $x = -1.5$، ومقدارها 2 . كما توجد قيمة صغرى محلية عند $x = -0.5$، ومقدارها -0.3 . وقيمة عظمى مطلقة عند $x = 1$، ومقدارها 3 .

2B) يوضح التمثيل البياني أن للدالة $g(x)$ قيمة عظمى محلية عند $x = -1$، ومقدارها 2 . وقيمة صغرى محلية عند $x = 0$، ومقدارها 0 . وقيمة عظمى محلية عند $x = 0.5$، ومقدارها 0.5 . وقيمة صغرى محلية عند $x = 2$، ومقدارها -4 . وسلوك طرفي التمثيل البياني يدل على عدم وجود قيم قصوى مطلقة للدالة.

إرشاد تقني

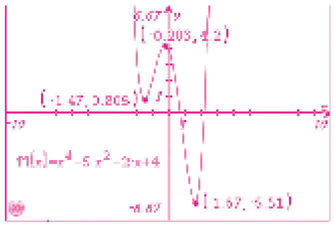
ضبط: عند البحث عن القيم العظمى والصغرى تأكد من اختيار التدريج المناسب، لتتمكن من رؤية منحنى الدالة كاملاً.

3A) تقدر القيمة العظمى المطلقة بـ 8.04 وتكون عند $x = -0.42$

3B) تقدر القيمة العظمى المحلية بـ 5.06 وتكون عند $x = -0.12$ ، وتقدر القيمة الصغرى المحلية بـ 1.24 وتكون عند $x = 1.45$

مثال إضافي

3 الحاسبة البيانية: استعمل الحاسبة البيانية لتجد القيم القصوى المحلية والمطلقة للدالة $f(x) = x^4 - 5x^2 - 2x + 4$ مقربة إلى أقرب جزء من مئة، وحدِّد قيم x التي تكون عندها هذه القيم.



قيمة عظمى محلية مقدارها 4.20 عند $x = -0.20$ تقريبًا، قيمة صغرى محلية مقدارها 0.80 عند $x = -1.47$ تقريبًا، وأخرى مقدارها -5.51 تقريبًا عند $x = 1.67$ تقريبًا.

التعليم باستعمال التقنيات

الجداول الإلكترونية: إن استعمال خصائص الجداول الإلكترونية يوفر طريقة سريعة وسهلة لعمل الجداول؛ لذا اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات صغيرة واستعمال الجداول الإلكترونية لعمل جداول قيم لإيجاد القيم الصغرى والعظمى المحلية.

إن البحث عن الحل الأمثل هو أحد التطبيقات الحياتية على القيم القصوى في الرياضيات، حيث يتم التعبير عن المسائل الحياتية بدوال توضع عليها بعض الشروط الخاصة ثم تُحسب القيمة الأمثل.

مثال 4 من واقع الحياة — تطبيقات القيم القصوى

زراعة: يتم قطف 400 حبة برتقال من كل شجرة في الموسم الواحد عندما يكون عدد أشجار البرتقال في الحقل 75 شجرة. فإذا علمت أنه عند زراعة كل شجرة جديدة ينقص إنتاج كل شجرة في البستان بمقدار حبتين. فكم شجرة إضافية يجب زراعتها للحصول على أكبر إنتاج ممكن؟

الربط مع الحياة

تشير بعض الدراسات الحديثة إلى أن شرب عصير البرتقال يساعد في الوقاية من أمراض القلب.

اكتب الدالة $f(x)$ لتصف الإنتاج الكلي للبستان، بحيث تمثّل x عدد أشجار البرتقال الجديدة التي سيتم زراعتها.

الإنتاج الكلي للبستان	=	عدد الأشجار في البستان	×	إنتاج الشجرة الواحدة من البرتقال
$f(x)$	=	$(75 + x)$	×	$(400 - 2x)$

المطلوب هو إيجاد أكبر إنتاج ممكن للبستان أو القيمة العظمى للدالة $f(x)$.

لذا مثّل الدالة بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم اضغط على مفتاح menu، ثم 6: تحليل الرسم البياني، واختر منها 3: القيمة العظمى، ثم مرّر المؤشر أفقيًّا على الشاشة من اليسار إلى اليمين فتظهر نقطة القيمة العظمى، تقدر بـ 37812.5 وتكون عند $x \approx 62.5$.

لذا يكون إنتاج البستان أكبر ما يمكن عند زراعة 62 أو 63 شجرة جديدة، ويكون مقدار الإنتاج 37812 حبة برتقال تقريبًا.

تحقق من فهمك

4) **صناعة:** يرغب صاحب مصنع زجاج في إنتاج كأس أُسطوانية الشكل مفتوحة من أعلى مساحتها الكلية $10\pi \text{ in}^2$. أوجد طول نصف قطر الكأس وارتفاعه اللذين يجعلان حجمها أكبر ما يمكن.

4) نصف القطر ≈ 1.83 in، الارتفاع ≈ 1.83 in

متوسط معدل التغير: تعلمت في دراستك السابقة أن الميل بين أي نقطتين واقعتين على دالة خطية يمثّل مقدارًا ثابتًا. إلا أنه يتغير عند التعامل مع دوال غير خطية، إذ يختلف الميل باختلاف النقاط؛ لذا فإننا نتحدثُ عن متوسط معدل تغير الدالة بين أي نقطتين.

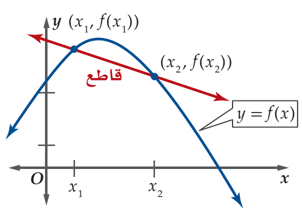
مفهوم أساسي — متوسط معدل التغير

التعبير اللفظي: متوسط معدل التغير بين أي نقطتين على منحنى الدالة f هو ميل المستقيم المار بهاتين النقطتين.

هندسيًّا: يُسمى المستقيم المار بنقطتين على منحنى الدالة قاطعًا، و يرمز لميل القاطع بالرمز m_{sec}.

الرموز: متوسط معدل تغير الدالة $f(x)$ في الفترة $[x_1, x_2]$ هو

$$m_{sec} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



إذا كان متوسط معدل التغير على فترة موجبًا، فإن الدالة تكون متزايدة في المتوسط على الفترة. وأما إذا كان سالبًا، فإن الدالة تكون متناقصة في المتوسط على الفترة.

مثال إضافي

4 وقود اقتصادي: أعلنت إحدى شركات السيارات أن خزان وقود سيارة جديدة يكفي لنقل السائق وثلاثة ركاب مسافة 360 mi، وفي أثناء بحثك في الإنترنت وجدت أن المسافة بالميل التي تقطعها هذه السيارة لكل خزان مملوء بالوقود هي:

$$f(x) = -4x^2 + 44x + 240$$

حيث $x + 55$، سرعة السيارة بالميل لكل ساعة. فما سرعة السيارة التي تجعل المسافة التي تقطعها السيارة لكل خزان وقود أكبر ما يمكن؟ وما المسافة المقطوعة في هذه الحالة؟

المسافة المقطوعة أكبر ما يمكن عندما تكون السرعة 60.5 mi/h.

المسافة المقطوعة 361 mi.

المحتوى الرياضي

متوسط معدّل التغير: إيجاد متوسط معدّل التغير بين نقطتين لدالة غير خطية يماثل إيجاد ميل مستقيم، لاحظ أن التغير بين نقطتين للدوال غير الخطية يتغير بتغير النقطتين. عند حساب ميل المستقيم أوجد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

وعند حساب متوسط معدّل التغير لدالة أوجد $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.

42 الفصل 1 تحليل الدوال

مـثال 5 إيجاد متوسط معدل التغير

أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = -x^3 + 3x$ الممثلة في الشكل (1.4.1) في كلٍّ من الفترتين الآتيتين:

a) $[-2, -1]$

استعمل قاعدة حساب متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[-2, -1]$.

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(-1)-f(-2)}{-1-(-2)} \quad \text{عوِّض } -1 \text{ مكان } x_2 \text{، } -2 \text{ مكان } x_1$$

$$= \frac{[-(-1)^3+3(-1)]-[-(-2)^3+3(-2)]}{-1-(-2)} \quad \text{عوِّض } f(-1) \text{، } f(-2)$$

$$= \frac{-2-2}{-1-(-2)} = -4 \quad \text{بسِّط}$$

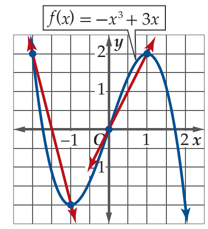
أي أن متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[-2, -1]$ هو -4 .

b) $[0, 1]$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} \quad \text{عوِّض } 1 \text{ مكان } x_2 \text{، } 0 \text{ مكان } x_1$$

$$= \frac{2-0}{1-0} = 2 \quad \text{عوِّض } f(1) \text{، } f(0) \text{ وبسِّط}$$

أي أن متوسط معدل التغير للدالة f في الفترة $[0, 1]$ هو 2.



الشكل 1.4.1

تحقق من فهمك

5A) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2,\ [2, 3]$ **6**

5B) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4x,\ [-5, -3]$ **−220**

يُستعمل متوسط معدل التغير في تطبيقات حياتية كثيرة، ومنها السرعة المتوسطة r لجسم يقطع مسافة d في زمن مقداره t.

مثال 6 من واقع الحياة إيجاد السرعة المتوسطة

فيزياء: إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم ساقط من مكان مرتفع تعطى بالدالة $d(t) = 16t^2$، حيث t الزمن بالثواني بعد سقوط الجسم، $d(t)$ المسافة المقطوعة بالأقدام. إذا أهملت مقاومة الهواء، فأوجد السرعة المتوسطة في كل من الفترتين الآتيتين.

a) من 0 إلى 2 ثانية

$$\frac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{d(2)-d(0)}{2-0} \quad \text{عوِّض 2 مكان } t_2 \text{، 0 مكان } t_1$$

$$= \frac{64-0}{2} = 32 \quad \text{عوِّض } d(2) \text{، } d(0) \text{، وبسِّط}$$

متوسط تغير الدالة في الفترة المعطاة يساوي 32 ft/s . وهذا يعني أن سرعة الجسم المتوسطة في أول ثانيتين من السقوط هو 32 ft/s .

b) من 2 إلى 4 ثوانٍ

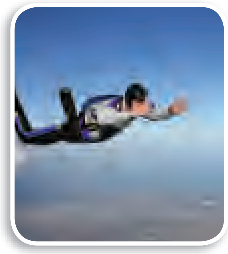
$$\frac{d(t_2)-d(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{d(4)-d(2)}{4-2} \quad \text{عوِّض 4 مكان } t_2 \text{، 2 مكان } t_1$$

$$= \frac{256-64}{2} = 96 \text{ ft/sec} \quad \text{عوِّض } d(4) \text{، } d(2) \text{، وبسِّط}$$

متوسط معدل تغير الدالة في الفترة المعطاة يساوي 96 ft/s، وهذا يعني أن سرعة الجسم المتوسطة في الثانيتين التاليتين هو 96 ft/s .

تحقق من فهمك

6) **فيزياء:** قُذِفَ جسم إلى أعلى من ارتفاع 4 ft عن سطح الأرض، فإذا كان ارتفاعه عن سطح الأرض يُعطى بالدالة $d(t) = -16t^2 + 20t + 4$، حيث t الزمن بالثواني بعد قذفه و $d(t)$ المسافة التي يقطعها، إذا أهملت مقاومة الهواء، فأوجد السرعة المتوسطة للجسم في الفترة من 0.5 إلى 1 ثانية.



الربط مع الحياة

إن الأجسام الساقطة تصل أخيرًا إلى سرعة ثابتة تُسمّى السرعة الحديّة. ويصل المظلي إلى السرعة الحديّة (120-150 mi/h) عندما تكون مظلته مغلقة.

المصدر: الموسوعة العالمية MSN

تنبيه!

السرعة المتوسطة: يوجد فرق بين مفهومي السرعة المتوسطة والسرعة المتوسطة المتجهة؛ فالسرعة المتوسطة تعني المقدار فقط (كمية قياسية)، بينما السرعة المتوسطة المتجهة تعني المقدار والاتجاه (كمية متجهة).

6) −4 ft/s، سرعة الجسم المتوسطة تتناقص في الفترة من 0.5 إلى 1 ثانية.

متوسط معدّل التغير

المثالان 6 , 5 يبيِّنان كيفية إيجاد متوسط معدّل التغير.

مثالان إضافيان

5 أوجد متوسط معدّل التغير للدالة $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$ في كل من الفترتين الآتيتين:

a) $[-3, -1]$ **12**

b) $[2, 5]$ **−10**

6 **الجاذبية:** إذا كانت المسافة المقطوعة للأجسام الساقطة على سطح القمر يُعبّر عنها بالقاعدة $d(t) = 2.7t^2$، حيث d المسافة بالأقدام، و t الزمن بالثواني. فأوجد السرعة المتوسطة لجسم ساقط في كل من الفترتين الآتيتين:

a) من 1 إلى 2 ثانية. **8.1 ft/s**

b) من 2 إلى 3 ثوانٍ. **13.5 ft/s**

تنويع التعليم

دون ضمن

المتعلمون البصريون / المكانيون: اطلب إلى الطلاب البحث في شبكة الإنترنت عن صور لجبال من الطبيعة يظهر فيها منحنى خط الأفق، ثم اطلب إلى كلٍّ منهم تحديد هذا المنحنى في الصور التي أحضروها، وتعيين القيم العظمى المحلية والمطلقة لمنحنى الأفق.

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 24–1 للتأكد من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه!

خطأ شائع: في السؤالين 18 و 29، قد يحاول الطلاب إيجاد دالة بمتغير مستقل واحد؛ لذا ذكّرهم بأن استعمال نظام من المعادلات وطريقة التعويض يقلل عدد المتغيرات المستقلة.

إجابات:

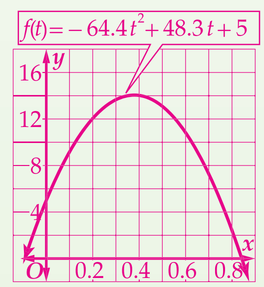
1) f متزايدة في الفترة، $(-\infty, -0.5)$، ومتناقصة في الفترة $(-0.5, 1)$، ومتزايدة في الفترة $(1, \infty)$.

2) f متناقصة في الفترة، $(-\infty, 2.5)$، ومتزايدة في الفترة $(2.5, \infty)$.

3) f متزايدة في الفترة $(-\infty, 0)$، ومتزايدة في الفترة $(0, \infty)$.

4) f متزايدة في الفترة $(-\infty, \infty)$.

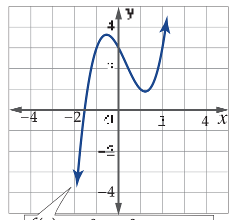
5a)



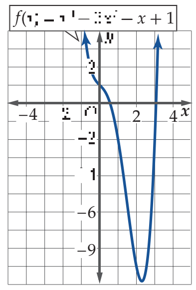
تدرب وحل المسائل

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة. ثم عزّز إجابتك عدديًا: (مثال 1) **1–4 انظر الهامش.**

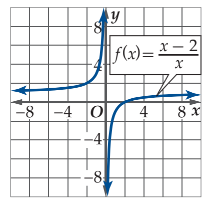
1)



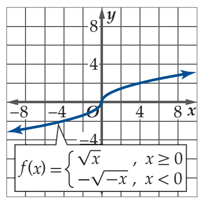
2)



3)



4)



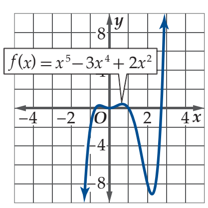
5) **كرة سلة:** يعطى ارتفاع كرة سلة $f(t)$ عن سطح الأرض في الرمية الحرة بالدالة $f(t) = -64.4t^2 + 48.3t + 5$، حيث t الزمن بالثواني، و $f(t)$ الارتفاع بالأقدام. (مثال 2)

a) مَثِّل الدالة بيانيًا. **انظر الهامش.**

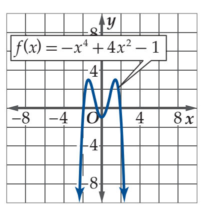
b) أوجد قيمة تقريبية لأعلى ارتفاع تصل إليه الكرة. ثم عزز إجابتك عدديًا. **14 ft**

قدّر قيم x التي يكون لكلٍّ من الدوال الآتية عندها قيم قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبيِّن نوع القيم القصوى، ثم عزّز إجابتك عدديًا. (مثال 2) **11–6 انظر ملحق الإجابات.**

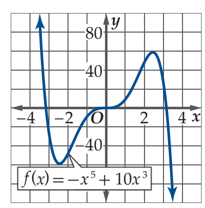
6)



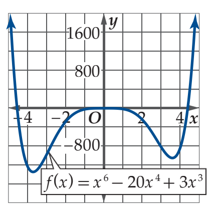
7)



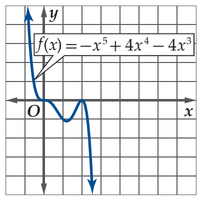
8)



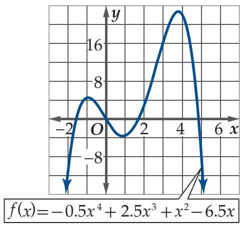
9)



10)



11)



الحاسبة البيانية: أوجد القيم القصوى المحلية والمطلقة مقربة إلى أقرب جزء من مئة لكل دالة فيما يأتي، وحدد قيم x التي تكون عندها هذه القيم: (مثال 3) **12-17 انظر ملحق الإجابات.**

12) $g(x) = -2x^3 + 7x - 5$

13) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5x$

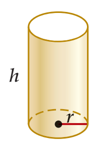
14) $f(x) = -x^5 + 3x^2 + x - 1$

15) $g(x) = x^6 - 4x^4 + x$

16) $f(x) = 0.008x^5 - 0.05x^4 - 0.2x^3 + 1.2x^2 - 0.7x$

17) $f(x) = 0.025x^5 - 0.1x^4 + 0.57x^3 + 1.2x^2 - 3.5x - 2$

18) **هندسة:** أوجد كلًّا من طول نصف قطر الأسطوانة وارتفاعها في الشكل المجاور؛ ليكون حجمها أكبر ما يمكن (قرب إلى أقرب جزء من عشرة). (مثال 4)



المساحة الجانبية + مساحة القاعدة تساوي 20.5π بوصة مربعة

نصف القطر = 2.6 بوصة، الارتفاع = 2.6 بوصة

أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة فيما يأتي في الفترة المعطاة. (مثال 5)

19) $g(x) = 3x^2 - 8x + 2, [4, 8]$ **28**

20) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 6x - 1, [5, 9]$ **4430**

21) $f(x) = -2x^4 - 5x^3 + 4x - 6, [-1, 5]$ **−309**

22) $h(x) = -x^5 - 5x^2 + 6x - 9, [3, 6]$ **−2550**

23) $f(x) = \frac{x-3}{x}, [5, 12]$ **0.05**

24) $f(x) = \sqrt{x+8}, [-4, 4]$ **0.183**

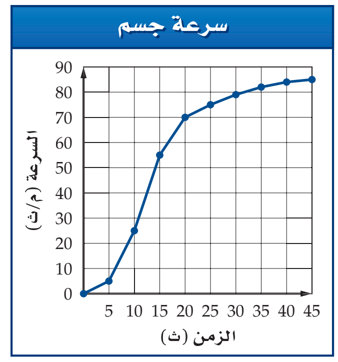
25) **طقس:** إذا كان متوسط درجات الحرارة السيليزية لكل شهر في المدينة المنورة في سنة ما معطى بالدالة: $f(x) = -0.5455x^2 + 7.09x + 21.45$، حيث x تمثّل رقم الشهر، فمثلًا $x = 1$ تمثّل شهر يناير، فأوجد متوسط معدل التغير في كل من الفترتين الآتيتين: وبرر إجابتك. (مثال 6)

a) من أبريل إلى مايو. **2.18**   b) من يوليو إلى أكتوبر. **−2.18**

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1–24، 42–44، 49–62
ضمن المتوسط	1–25 (فردي)، 26–29، 31–41 (فردي)، 47–62
فوق المتوسط	26–62

26) استعمل التمثيل البياني أدناه للإجابة عما يأتي:



a) أوجد متوسط معدل التغير في كلٍّ من الفترات $[5, 15]$, $[15, 20]$, $[25, 45]$.
5 3 0.5

b) قارن بين سرعات الجسم في هذه الفترات الزمنية. **انظر الهامش.**

27) **تكنولوجيا:** تبين لفريق بحث في إحدى شركات الحاسوب أن الربح الذي تكسبه الشركة من بيع منتج جديد من الشرائح الإلكترونية يعطى بالدالة $P(x) = -x^3 + 5x^2 + 8x$ ، حيث x ثمن بيع الشريحة الواحدة بمئات الريالات، $0 \le x \le 6$.

a) مثّل الدالة بيانيًّا. **27a-c) انظر الهامش.**

b) أوجد أفضل سعر للشريحة الواحدة والذي يعطي أكبر ربح.

c) أوجد ربح الشريحة الواحدة عند بيعها بالسعر الأفضل.

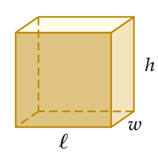
28) **دخل:** افترض أن الدخل السنوي (بالريال) لشخص منذ عام 1420هـ وحتى عام 1430 هـ يعطى بالدالة:
$I(x) = -1.465x^5 + 35.51x^4 - 277.99x^3 + 741.06x^2 + 847.8x + 25362, 0 \le x \le 10$
حيث x رقم السنة. **28-35) انظر ملحق الإجابات.**

a) مثّل الدالة بيانيًّا.

b) أوجد متوسط معدل تغير الدخل من عام 1423 إلى عام 1430 هـ. وماذا تعني قيمة متوسط معدل التغير في هذه الفترة؟

c) حدّد السنوات الأربع التي يكون فيها متوسط معدل التغير أكبر ما يمكن، والسنوات الأربع التي يكون فيها أقل ما يمكن.

29) **صندوق:** يرغب سالم في عمل صندوق مغلق من الكرتون حجمه 3024 قدمًا مكعبة. إذا كانت قاعدة الصندوق مربعة الشكل، فأوجد أبعاده التي تجعل مساحة سطحه أقل ما يمكن. وضّح إجابتك.



مثِّل بيانيًّا الدالة $f(x)$ في كل حالة مما يأتي:

30) $f(x)$ متصلة ومتزايدة.

31) $f(x)$ متصلة ومتناقصة.

32) $f(x)$ متصلة ومتزايدة، $f(x) > 0$ لجميع قيم x.

33) $f(x)$ متصلة ومتناقصة، $f(x) > 0$ لجميع قيم x.

34) $f(x)$ متصلة، ومتزايدة لجميع قيم $-2 < x$ ، و متناقصة لجميع قيم $x > -2$.

35) $f(x)$ متصلة، ومتناقصة لجميع قيم $x < 0$، و متزايدة لجميع قيم $x > 0$.

الحاسبة البيانية: حدّد إحداثيي النقطة التي يكون عندها لكل دالة مما يأتي قيمة قصوى مطلقة إن وجدت، وبيِّن نوعها:

36) $f(x) = 2(x-3)^2 + 5$ **(3, 5) ، صغرى**

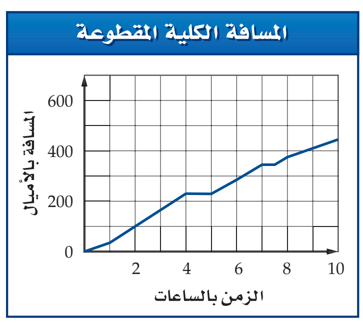
37) $f(x) = -0.5(x+5)^2 - 1$ **(−5, −1) ، عظمى**

38) $f(x) = -4|x-22| + 65$ **(22, 65) ، عظمى**

39) $f(x) = (36 - x^2)^{0.5}$ **(0, 6) ، عظمى**

40) $f(x) = x^3 + x$ **لا توجد قيم قصوى**

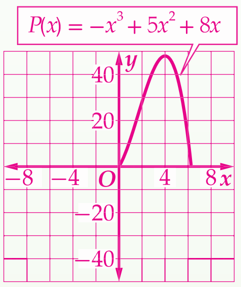
41) **سفر:** قام عبد الله بتسجيل المسافة الكلية التي قطعها في إحدى الرحلات ومثّلها بيانيًّا. أعطِ أسبابًا توضح اختلاف متوسط معدل التغير، ولماذا يكون ثابتًا في فترتين؟ **انظر ملحق الإجابات.**



إجابات:

26b) تتزايد سرعة الجسم أو يتسارع الجسم في الفترات الثلاث، وأكبر معدّل تسارع للجسم في الفترة $[5, 15]$. ويبطئ التسارع في الفترة $[25, 45]$، لكن تبقى سرعة الجسم في تزايد .

27a)



27b) 400 ريال.

27c) 48 ريالًا.

مسائل مهارات التفكير العليا

مسألة مفتوحة: مثل بيانيًا الدالة $f(x)$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين.

42) متصلة **(42-48) انظر ملحق الإجابات.**
متزايدة على $(-\infty, 4)$
ثابتة على $[4, 8]$
متناقصة على $(8, \infty)$
$f(5) = 3$

43) لها نقطة عدم اتصال لانهائي عند $x = -2$
متزايدة على $(-\infty, -2)$
متزايدة على $(-2, \infty)$
$f(-6) = -6$

44) **تبرير:** f دالة متصلة لها قيمة صغرى محلية عند $x = c$ ومتزايدة عندما $x > c$. صِف سلوك الدالة عندما تزداد x لتقترب من c. وضّح إجابتك.

45) **تحدٍّ:** إذا كانت g دالة متصلة، وكان $g(a) = 8$ و $g(b) = -4$، فأعطِ وصفًا لقيمة $g(c)$ حيث $a < c < b$. وبرِّر إجابتك.

46) **تحدٍّ:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $f(x) = \sin x$ بيانيًا، ثم صف القيم القصوى المحلية للدالة.

47) **تبرير:** أوجد ميل القاطع المار بالنقطتين $(a, f(a))$، $(b, f(b))$ إذا كانت $f(x)$ ثابتة في الفترة (a, b). وضّح إجابتك.

48) **اكتب:** صف متوسط معدل تغير الدالة إذا كانت متزايدة أو متناقصة أو ثابتة في فترة معينة.

مراجعة تراكمية

حدد ما إذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة عند قيمة أو قيم x المعطاة معتمدًا على اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة، فبيِّن نوع عدم الاتصال: لانهائي، قفزي، قابل للإزالة. (الدرس 1-3)

49) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2}\ ,\ x = -3$ **(49-54) انظر الهامش.**

50) $f(x) = \sqrt{x+1}\ ,\ x = 3$

51) $h(x) = \frac{x^2 - 25}{x + 5}\ ;\ x = -5\ ,\ x = 5$

مثّل كل دالة مما يأتي بيانيًا مستعملًا الحاسبة البيانية، ثم حدّد ما إذا كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك. وتحقّق من إجابتك جبريًّا، و إذا كانت الدالة زوجية أو فردية فصف تماثل منحنى الدالة. (الدرس 1-2)

52) $f(x) = |x^5|$

53) $f(x) = \frac{x + 8}{x - 4}$

54) $g(x) = \frac{x^2}{x + 3}$

أوجد مجال كل دالة مما يأتي: (الدرس 1-1)

55) $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 5}$ $\{x \mid x \neq \pm\sqrt{5}, x \in R\}$

56) $g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

57) $h(x) = \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 - 7}}$ $(-\infty, -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}, \infty)$

صف سلوك طرفي التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي: (الدرس 1-3)

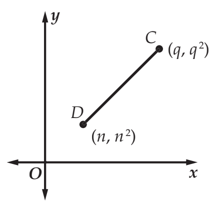
58) $f(x) = x^{10} - x^9 + 5x^8$
عندما $x \to -\infty$ فإن $f(x) \to \infty$، عندما $x \to \infty$ فإن $f(x) \to \infty$

59) $g(x) = \frac{x^2 + 5}{7 - 2x^2}$
عندما $x \to -\infty$ فإن $g(x) \to -\frac{1}{2}$، عندما $x \to \infty$ فإن $g(x) \to -\frac{1}{2}$

60) $h(x) = |(x - 3)^2 - 1|$
عندما $x \to -\infty$ فإن $h(x) \to \infty$، عندما $x \to \infty$ فإن $h(x) \to \infty$

تدريب على اختبار

61) في الشكل أدناه، إذا كان $q \neq n$، فأوجد ميل القطعة المستقيمة CD. **A**



A $q + n$
B $q - n$
C $\frac{q^2 + q}{n^2 - n}$
D $\frac{1}{q + n}$

62) يوجد للدالة $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 6$ قيمة عظمى محلية، وقيمة صغرى محلية. أوجد قيم x التي تكون عندها هذه القيم. **C**

A عظمى محلية عند $x \approx -0.7$
صغرى محلية عند $x \approx 2$

B عظمى محلية عند $x \approx -0.7$
صغرى محلية عند $x \approx -2$

C عظمى محلية عند $x \approx -2$
صغرى محلية عند $x \approx 0.7$

D عظمى محلية عند $x \approx 2$
صغرى محلية عند $x \approx 0.7$

4 التقويم

تعلم لاحق اطلب إلى الطلاب وصف كيفية الربط بين درس اليوم والدرس اللاحق حول الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرسين 4-1 و 3-1 بإعطائهم:
الاختبار القصير 2، ص (11)

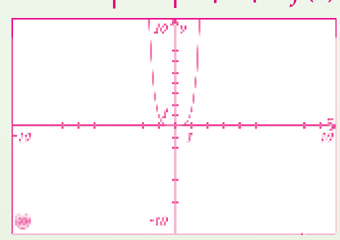
إجابات:

49) الدالة معرفة عند $x = -3$، وتقترب الدالة من 2.65 عندما تقترب x من -3 من الجهتين، و $f(-3) = 2.65$؛ لذا فإن الدالة متصلة عند $x = -3$.

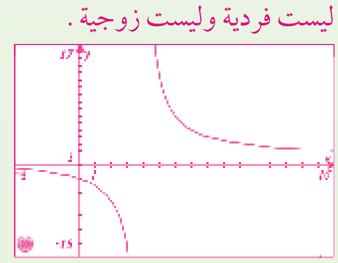
50) الدالة معرفة عند $x = 3$، وتقترب قيمة الدالة من 2 عندما تقترب x من 3 من الجهتين، و $f(3) = 2$؛ لذا فإن الدالة متصلة عند 3.

51) للدالة نقطة عدم اتصال قابلة للإزالة عند $x = -5$، ومعرفة عند $x = 5$، وتقترب الدالة من 0 عندما تقترب x من 5 من الجهتين، أي أن $h(5) = 0$؛ إذن الدالة متصلة عند $x = 5$.

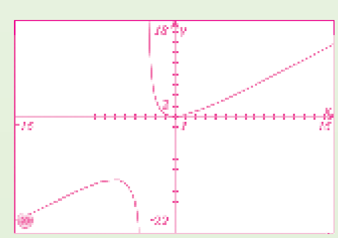
52) دالة زوجية، متماثلة حول المحور y
$f(-x) = |(-x)^5|$
$= |-x^5| = |x^5| = f(x)$



53) ليست فردية وليست زوجية.



54) ليست فردية وليست زوجية.



تنويع التعليم

فوق

توسّع: ماذا يحدث لميل القاطع عندما تقترب النقطتان اللتان تحددان القاطع قربًا كافيًا من القيمة العظمى المحلية؟ وما علاقة القاطع في هذه الحالة مع مماس منحنى الدالة عند نقطة القيمة العظمى المحلية؟
يقترب القاطع من الخط الأفقي، ويقترب ميله من 0. عندما يقترب القاطع من نقطة القيمة العظمى المحلية قربًا كافيًا، فإنه يصبح مماسًّا لمنحنى الدالة.

الفصل 1 اختبار منتصف الفصل

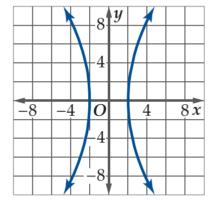
الدروس من 1–1 إلى 1–4

في كل علاقة مما يأتي، حدد ما إذا كانت y تمثل دالة في x: (الدرس 1-1)

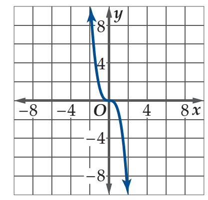
1) $3x + 7y = 21$ دالة

2) دالة

x	y
−1	−1
1	3
3	7
5	11
7	15

3) 

ليست دالة

4) 

دالة

5) إذا كانت $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 2 \\ x & , x \geq 2 \end{cases}$ ، فأوجد $f(2)$. (الدرس 1-1)

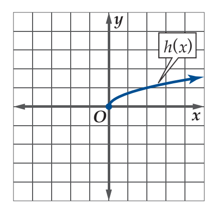
2

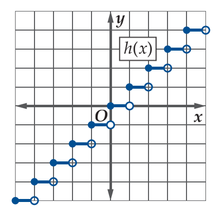
6) **كرة قدم:** يعطى ارتفاع كرة قدم عن سطح الأرض عند ضربها من قبل حارس مرمى بالدالة $h(t) = -8t^2 + 50t + 5$ ، حيث h ارتفاع الكرة بالأقدام، و t الزمن بالثواني. (الدرس 1-1)

a) أوجد ارتفاع الكرة بعد 3 ثوانٍ. 83 ft

b) ما مجال هذه الدالة؟ برِّر إجابتك. انظر الهامش.

استعمل التمثيل البياني للدالة h أدناه لإيجاد مجالها ومداها في كل مما يأتي: (الدرس 1-2) 7-10 انظر الهامش.

7) 

8) 

أوجد المقطع y والأصفار لكلٍّ من الدالتين الآتيتين: (الدرس 1-2)

9) $f(x) = x^3 - 16x$

10) $f(x) = 5 - \sqrt{x}$

اختبر تماثل كلٍّ من المعادلتين الآتيتين حول المحور x ، والمحور y ، و نقطة الأصل. (الدرس 1-2)

11) $x^2 + y^2 = 9$

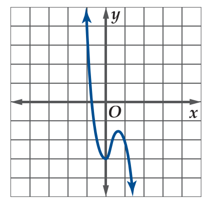
12) $xy = 4$

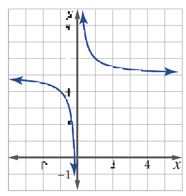
حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند $x = 5$. وبرِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. (الدرس 1–3)

13) $f(x) = \sqrt{x^2 - 36}$ 13-14 انظر الهامش.

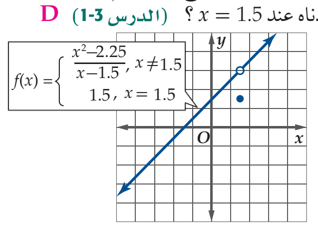
14) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+5}$

صف سلوك طرفي كلٍّ من التمثيلين البيانيين الآتيين. ثم عزِّز إجابتك عدديًّا. (الدرس 1–3) 15-16 انظر الهامش.

15) 

16) 

17) **اختيار من متعدد:** ما نوع نقطة عدم الاتصال للدالة الممثلة في الشكل أدناه عند $x = 1.5$ ؟ (الدرس 1-3) D



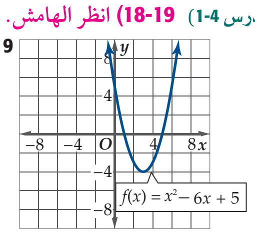
A غير معرف

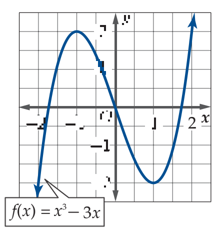
B لانهائي

C قفزي

D قابل للإزالة

استعمل التمثيل البياني لكل دالة أدناه لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة. وعزِّز إجابتك عدديًّا. (الدرس 1-4) 18-19 انظر الهامش.

18) 

19) 

20) استعمل التمثيل البياني للدالة في السؤال 18 أعلاه، وقدِّر قيمة x التي يكون للدالة عندها قيمة قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيمة الدالة عندها، وبيِّن نوعها، ثم عزِّز إجابتك عدديًّا. (الدرس 1-4)

21) **فيزياء:** إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم ساقط من مكان مرتفع تعطى بالدالة $d(t) = 16t^2$ ، حيث t الزمن بالثواني، $d(t)$ المسافة المقطوعة بالأقدام. إذا أهملت مقاومة الهواء فأوجد متوسط السرعة في الفترة $[0, 3]$. (الدرس 1-4) 48 ft/s

مخطط المعالجة

المستوى 1	ضمن المتوسط	المستوى 2	دون المتوسط
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% تقريبًا من الأسئلة	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة
فاختر	أحد المصدرين الآتيين:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس 1-1,1-2,1-3,1-4	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (8)		

الفصل 1 اختبار منتصف الفصل

الدروس من 1-1 إلى 1-4

التقويم التكويني

استعمل اختبار منتصف الفصل؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للأسئلة التي لم يجيبوا عنها بشكل صحيح. اطلب إلى الطلاب مراجعة الدروس المشار إليها بعد كل سؤال.

التقويم الختامي

اختبار منتصف الفصل، ص (13) .

إجابات

6b) [0, 6.35] ، إجابة ممكنة: الزمن لا يمكن أن يكون سالبًا، وارتفاع الكرة لا يجب أن يكون سالبًا في هذه الحالة.

7) المجال: $[0, \infty)$ ، والمدى: $[0, \infty)$

8) المجال: $\{x | x \in R\}$ ، والمدى: $\{y | y \in Z\}$

9) المقطع y: 0 ، الأصفار: $0, 4, -4$.

10) المقطع y: 5 ، الأصفار: 25 .

11) حول المحور x ، حول المحور y ، حول نقطة الأصل.

12) حول نقطة الأصل.

13) غير متصلة: الدالة غير معرَّفة عند $x=5$.

14) متصلة: الدالة معرفة عند $x = 5$. وتقترب قيمة الدالة من 2.5 عندما تقترب x من 5 من الجهتين؛ $f(5) = 2.5$.

15) يتضح من التمثيل البياني أن: $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to \infty$ ، $f(x) \to \infty$ عندما $x \to -\infty$.

16) يتضح من التمثيل البياني أن: $f(x) \to 5$ عندما $x \to \infty$ ، $f(x) \to 5$ عندما $x \to -\infty$.

18) f متناقصة في الفترة $(-\infty, 3)$ ، ومتزايدة في الفترة $(3, \infty)$.

19) f متزايدة في $(-\infty, -1)$ ، ومتناقصة في $(-1, 1)$ ، ومتزايدة في $(1, \infty)$.

20) يتضح من التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية ومطلقة ومقدارها -4 وتكون عند $x = 3$ ،

$f(3) = 3^2 - 6 \times 3 + 5$

$= 9 - 18 + 5 = -4$

1-5 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-5

تحليل التمثيل البياني للدوال.

الدرس 1-5

تعيين الدوال الرئيسة (الأم) ووصفها وتمثيلها بيانيًّا.

تعيين التحويلات الهندسية للدوال الرئيسة (الأم) وتمثيلها بيانيًّا.

مابعد الدرس 1-5

إجراء عمليات على الدوال وتركيب الدوال.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما أوجه الشبه والاختلاف بين الدالتين $f(x) = x$ و $g(x) = x + 2$؟
  المستقيمان لهما الميل نفسه، والدالة $g(x)$ ناتجة عن انسحاب $f(x)$ وحدتين إلى الأعلى.
- صف أثر قيم a المختلفة في الدالة $f(x) = x + a$. تعمل قيم a في انسحاب المستقيم إلى أعلى أو إلى أسفل بمقدار a من الوحدات.
- ما أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين الدالتين $f(x) = x^2$ و $g(x) = x^2 + 2$؟
  الدالتان لهما الشكل البياني نفسه ؛ الدالة $g(x)$ ناتجة عن انسحاب $f(x)$ وحدتين إلى أعلى.

1-5 الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية

Parent Functions and Transformations

فيما سبق:

درستُ التمثيلات البيانية للدوال وتحليلها. (الدرس 1-4)

والآن:

- أقومُ بتعيين الدوال الرئيسة (الأم)، وأصفها، وأمثلها بيانيًا.
- أقومُ بتعيين التحويلات الهندسية للدوال الرئيسة، وأمثلها بيانيًا.

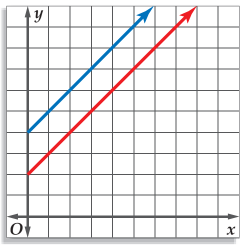
المفردات:

الدالة الرئيسة (الأم) parent function
الدالة الثابتة constant function
الدالة المحايدة identity function
الدالة التربيعية quadratic function
الدالة التكعيبية cubic function
دالة الجذر التربيعي square root function
دالة المقلوب reciprocal function
دالة القيمة المطلقة absolute value function
الدالة الدرجية step function
دالة أكبر عدد صحيح greatest integer function
التحويل الهندسي transformation
الإزاحة (الانسحاب) translation
الانعكاس reflection
التمدد dilation

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

استشارت شركة عددًا من المختصين حول سبل خفض تكلفة سلعة تنتجها. ويبيِّن التمثيلان البيانيان في الشكل المجاور تكلفة إنتاج x قطعة من السلعة قبل الاستشارة (الخط الأزرق) وبعد الاستشارة (الخط الأحمر). هذان التمثيلان مثال على التحويلات الهندسية.

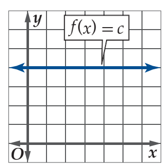


الدوال الرئيسة (الأم): عائلة الدوال هي مجموعة دوال تشترك منحنياتها في صفة أو أكثر. وتُعرَّفُ **الدالة الرئيسة (الأم)** على أنها أبسط دالة في العائلة، إذ يمكن إجراء تحويلات هندسية عليها لإيجاد باقي دوال العائلة.

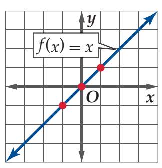
ستدرس في هذا الدرس ثمانيةَ أنواع من الدوال الرئيسة (الأم) الأكثر شيوعًا. ومنها الدوال الخطية ودوال كثيرات الحدود.

مفهوم أساسي — الدوال الرئيسة (الأم) للدوال الخطية ودوال كثيرات الحدود

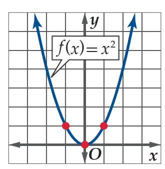
تكتب **الدالة الثابتة** على الصورة $f(x) = c$ حيث c عدد حقيقي، وتُمثَّل بمستقيم أفقي.



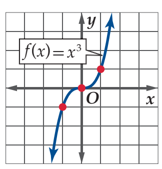
تمر **الدالة المحايدة** $f(x) = x$ بجميع النقاط التي إحداثياتها (a, a).



يأخذ منحنى **الدالة التربيعية** $f(x) = x^2$ شكل الحرف U.



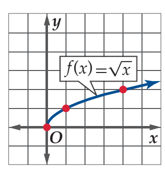
الدالة التكعيبية $f(x) = x^3$ متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل.



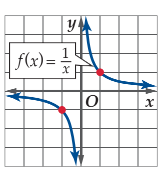
كما ستدرسُ أيضًا منحنيات دوال الجذر التربيعي ودوال المقلوب.

مفهوم أساسي — الدالة الرئيسة (الأم) لكلٍّ من: دالتي الجذر التربيعي والمقلوب

تكتب **دالة الجذر التربيعي** على الصورة $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$.



تكتب **دالة المقلوب** على الصورة $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$، وتكون متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل.



مصادر الدرس 1-5

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (51 , 53)	• تنويع التعليم ص (51 , 53)	• تنويع التعليم ص (53 , 56)
كتاب التمارين	• ص (8)	• ص (8)	• ص (8)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (22) • تدريبات حل المسألة، ص (24)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)	• تدريبات حل المسألة، ص (24) • التدريبات الإثرائية، ص (25)

الدوال الرئيسة (الأم)

مثال 1 يبيِّن كيفية وصف الخصائص المهمة للدالة.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 صف خصائص منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)=\frac{1}{x}$: المجال والمدى والمقطع x والمقطع y والتماثل والاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني وفترات التزايد والتناقص.

المجال والمدى $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$؛ لا يقطع المحور x، ولا يقطع المحور y، والمنحنى متماثل حول نقطة الأصل؛ لذا فالدالة فردية. الدالة متصلة على مجالها، ويوجد لها نقطة عدم اتصال لا نهائية عند $x=0$. الدالة متناقصة على فترتي المجال.

كما تُعَدُّ دالة القيمة المطلقة إحدى الدوال الرئيسة (الأم).

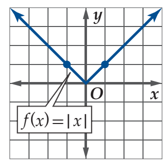
مفهوم أساسي — **دالة القيمة المطلقة الرئيسة (الأم)**

التعبير اللفظي: يُرمز لدالة القيمة المطلقة، بالرمز $f(x)=|x|$، ويأخذ منحناها شكل الحرف V ، وتعرَّف على النحو الآتي:

$$f(x)=\begin{cases}-x & , \quad x<0\\ x & , \quad x\ge 0\end{cases}$$

أمثلة: $|-5|=5,\ |0|=0,\ |4|=4$

النموذج



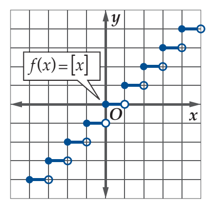
أما **الدالة الدرجية**، فهي دالة متعددة التعريف يُشبهُ تمثيلها البياني الدرج، ومن الأمثلة المشهورة على هذا النوع دالة أكبر عدد صحيح.

مفهوم أساسي — **دالة أكبر عدد صحيح**

التعبير اللفظي: يرمز لدالة أكبر عدد صحيح بالرمز $f(x)=[\![x]\!]$، وتعرف بأنها أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x .

أمثلة: $[\![-4]\!]=-4,\ [\![-1.5]\!]=-2,\ [\![\frac{1}{3}]\!]=0$

النموذج



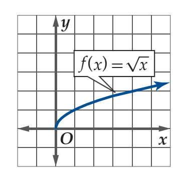
باستعمال ما تعلمته في الدروس السابقة، فإنه يمكنك وصف خصائص كل دالة من الدوال الرئيسة (الأم). ممّا يساعدك على تعرف منحنيات دوال أكثر تعقيدًا من العائلة نفسها وتحليلها.

مثال 1 — وصف خصائص الدالة الرئيسة (الأم)

صف خصائص منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)=\sqrt{x}$ (في الشكل 1.5.1): المجال والمدى والمقطع x والمقطع y والتماثل والاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني وفترات التزايد والتناقص.

خصائص منحنى دالة الجذر التربيعي (الشكل 1.5.1) هي:

- مجال الدالة $[0,\infty)$، ومداها $[0,\infty)$.
- للمنحنى مقطع واحد عند $(0,0)$.
- المنحنى غير متماثل؛ لذا فإن الدالة ليست زوجية ولا فردية.
- المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.
- يبدأ المنحنى عند $x=0$ وتكون $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$.
- المنحنى متزايد في الفترة $(0,\infty)$.



الشكل 1.5.1

تحقق من فهمك

1) $f(x)=|x|$

التحويلات الهندسية: تؤثر **التحويلات الهندسية** في شكل منحنى الدالة الرئيسة (الأم). فبعضُ التحويلات تغيّر موقع المنحنى فقط، ولا تغير أبعاده أو شكله، وتسمى تحويلات قياسية. وبعضها الآخر يغير شكل المنحنى وتسمى تحويلات غير قياسية .

---

1) مجال الدالة: $\{x \mid x\in R\}$، ومداها: $\{y \mid 0\le y<\infty, y\in R\}$

للمنحنى مقطع واحد عند $(0,0)$.

المنحنى متماثل حول المحور y؛ لذا فالدالة زوجية.

المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.

المنحنى متناقص في الفترة $(-\infty,0)$، ومتزايد في الفترة $(0,\infty)$.

يبدأ المنحنى عند $x=0$.

وينتهي بـ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ وَ $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

التعليم باستعمال التقنيات

الحاسبة البيانية اطلب إلى الطلاب استعمال الحاسبة البيانية وكتابة المَعْلَمات في الدالة الرئيسة (الأم) بشكل صحيح. مثل: الثابت، التربيعية التكعيبية وهكذا. على أن يلاحظوا أثر تغير كل معلمة. وبعد أن يكملوا ملاحظاتهم؛ عليهم مقارنتها بملاحظات زملائهم.

التحويلات الهندسية

مثال 2 يبيِّن كيفية تمثيل التحويلات الهندسية.

مثال 3 يبيِّن كيفية وصف الدالة وعلاقتها بالدالة الرئيسة (الأم) وكتابة معادلة الدالة بعد التحويل.

مثال 4 يبيِّن كيفية وصف التمثيل البياني للدالة بعد التحويل.

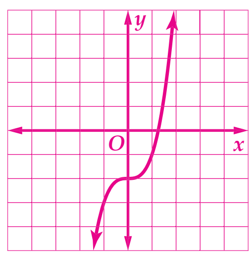
مثال 5 يبيِّن كيفية تمثيل الدالة متعددة التعريف.

المثالان 6 , 7 يبيِّنان كيفية استعمال التحويلات الهندسية للدوال ووصفها وتمثيلها.

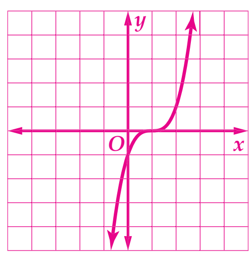
مثال إضافي

2 استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^3$ لتمثيل كل دالة من الدوال الآتية بيانيًّا:

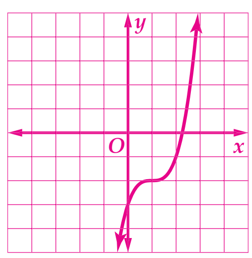
a) $g(x) = x^3 - 2$



b) $g(x) = (x - 1)^3$



c) $g(x) = (x - 1)^3 - 2$

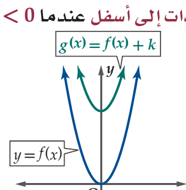


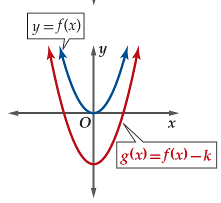
الانسحاب (الإزاحة) أحد التحويلات القياسية التي تنقل منحنى الدالة. فالانسحاب الرأسي ينقل منحنى الدالة f إلى أعلى أو إلى أسفل، بينما ينقل الانسحاب الأفقي منحنى الدالة إلى اليمين أو إلى اليسار.

مفهوم أساسي — الانسحاب الرأسي والانسحاب الأفقي

الانسحاب الرأسي

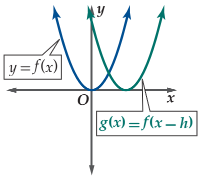
منحنى $g(x) = f(x) + k$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:
- k وحدة إلى أعلى عندما $k > 0$.
- $|k|$ من الوحدات إلى أسفل عندما $k < 0$.

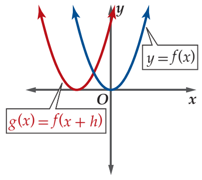




الانسحاب الأفقي

منحنى $g(x) = f(x - h)$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:
- h من الوحدات إلى اليمين عندما $h > 0$.
- $|h|$ من الوحدات إلى اليسار عندما $h < 0$.





مثال 2 انسحاب منحنى الدالة

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = |x|$ لتمثيل كلّ دالة من الدوال الآتية بيانيًّا:

a) $g(x) = |x| + 4$

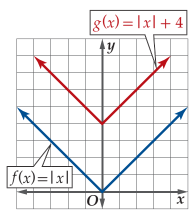
هذه الدالة على الصورة $g(x) = f(x) + 4$، وعليه فإن منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x) = |x|$ مزاحًا 4 وحدات إلى أعلى كما في الشكل 1.5.2.

b) $g(x) = |x + 3|$

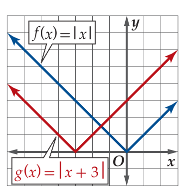
هذه الدالة على الصورة $g(x) = f(x + 3)$ أو $g(x) = f[x - (-3)]$، وعليه فإن منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x) = |x|$ مزاحًا 3 وحدات إلى اليسار كما في الشكل 1.5.3.

c) $g(x) = |x - 2| - 1$

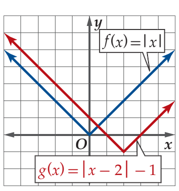
هذه الدالة على الصورة $g(x) = f(x - 2) - 1$، أي أن منحنى $g(x)$ هو منحنى الدالة $f(x) = |x|$ مزاحًا وحدتين إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أسفل كما في الشكل 1.5.4.



الشكل 1.5.2



الشكل 1.5.3



الشكل 1.5.4

تحقق من فهمك استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^3$ لتمثيل كل دالة من الدوال الآتية بيانيًّا:

2A) $h(x) = x^3 - 5$ **2B)** $h(x) = 8 + x^3$ **2C)** $h(x) = (x + 2)^3 + 4$

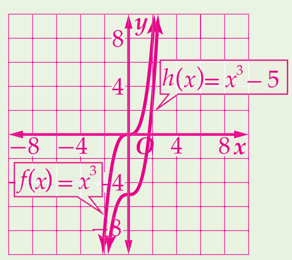
إرشاد تقني

الانسحاب: يمكنك إجراء انسحاب لمنحنى دالة باستعمال الحاسبة البيانية TI–nspire ، بعد تمثيل الدالة الرئيسة (الأم) $f1(x)$:
- لإجراء انسحاب مقداره k وحدة لأعلى أو لأسفل اضغط على المفاتيح: enter $f1(x) \pm k$ ctrl tab
- لإجراء انسحاب مقداره h وحدة لليمين أو اليسار اضغط على المفاتيح : enter $f1(x \pm h)$ ctrl tab

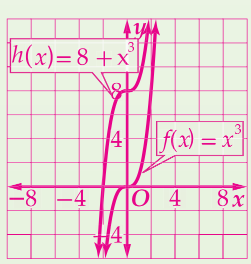
ستقوم الحاسبة برسم كلا الدالتين الرئيسة (الأم) والدالة المزاحة على الشاشة نفسها.

2A-C) انظر الهامش

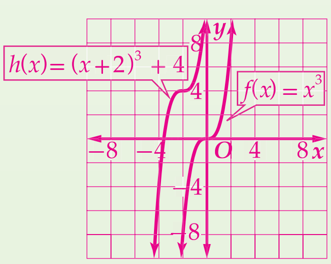
2A)



2B)



2C)

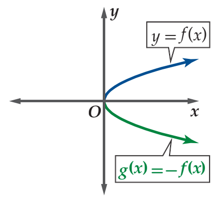


من التحويلات القياسية الأخرى **الانعكاس**، والذي يُكوِّن لمنحنى الدالة صورة مرآة بالنسبة لمستقيم محدّد.

مفهوم أساسي — الانعكاس حول المحورين الإحداثيين

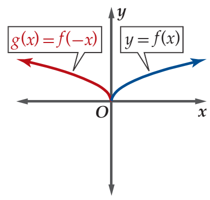
الانعكاس حول المحور x

منحنى الدالة $g(x) = -f(x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور x.

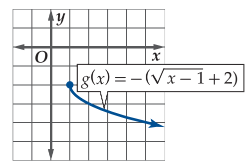


الانعكاس حول المحور y

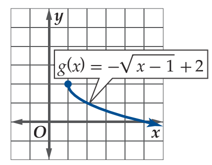
منحنى الدالة $g(x) = f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور y.



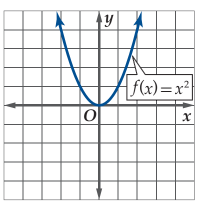
كن دقيقًا عند كتابة المعادلة الناتجة عن التحويل الهندسي لدالة، فمثلًا منحنى الدالة $g(x) = -\sqrt{x-1} + 2$ يختلف عن منحنى الدالة $g(x) = -(\sqrt{x-1} + 2)$.



انسحاب لمنحنى الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ وحدة إلى اليمين وحدتين إلى أعلى، ثم انعكاس حول المحور x.



انسحاب وحدة إلى اليمين، ثم انعكاس لمنحنى الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ حول المحور x، ثم انسحاب وحدتين إلى أعلى.

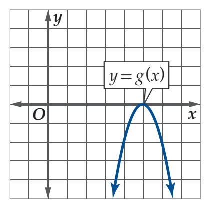


الشكل 1.5.5

مثال 3 — كتابة معادلات التحويل

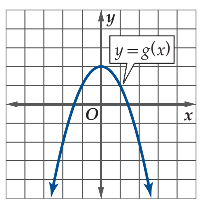
صف العلاقة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2$ (في الشكل 1.5.5) ومنحنى $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم اكتب معادلة $g(x)$:

a)



منحنى الدالة g هو انسحاب لمنحنى $f(x) = x^2$ بمقدار 5 وحدات إلى اليمين ثم انعكاس حول المحور x، أي أن $g(x) = -(x - 5)^2$.

b)

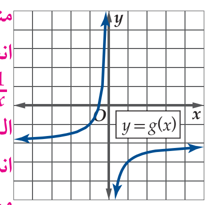


منحنى الدالة g هو انعكاس لمنحنى $f(x) = x^2$ حول المحور x ثم انسحاب وحدتين إلى أعلى، أي أن $g(x) = -x^2 + 2$.

تحقق من فهمك

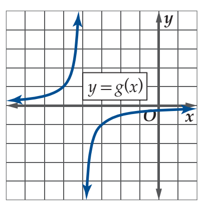
صف العلاقة بين منحنيي $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x)$ ثم اكتب معادلة $g(x)$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

3A)



منحنى الدالة هو انعكاس لمنحنى $f(x) = \frac{1}{x}$ حول المحور x، ثم انسحاب بمقدار وحدتين إلى الأسفل؛ $g(x) = -\frac{1}{x} - 2$

3B)

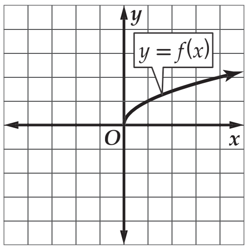


منحنى الدالة هو انسحاب لمنحنى $f(x) = \frac{1}{x}$ بمقدار 4 وحدات إلى اليسار، ثم انعكاس حول المحور y.

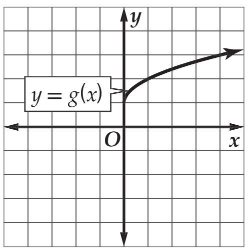
$g(x) = \frac{-1}{x+4}$

مثال إضافي

3 صف العلاقة بين منحنى الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ في الشكل أدناه ومنحنى $g(x)$، في كلٍّ شكل مما يأتي ثم اكتب معادلة $g(x)$.

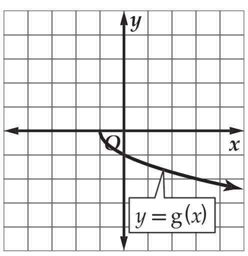


a)



انسحاب المنحنى بمقدار وحدة واحدة إلى أعلى $g(x) = \sqrt{x} + 1$.

b)



انسحاب المنحنى وحدة إلى اليسار، ثم انعكاس حول المحور x. $g(x) = -\sqrt{x+1}$.

تنويع التعليم

دون — ضمن

المتعلمون البصريون: اطلب إلى الطلاب عمل ملصقات يعرضون فيها الدوال الرئيسة (الأم) الثماني التي تم دراستها في هذا الدرس، وكيفية إجراء التحويلات الهندسية عليها.

المحتوى الرياضي

التحويلات الهندسية للدوال عند إجراء انعكاس لمنحنى الدالة، تحصل على الشكل نفسه، لكن إذا حصل تمدد لمنحنى الدالة، فإنك تحصل على شكل مختلف. من منظور هندسي، يحافظ الانسحاب والانعكاس لمنحنيات الدوال على شكلها؛ لذا فالصورة مطابقة لمنحنى الدالة الرئيسة (الأم)، في حين لا يحافظ التمدد على الشكل؛ لذا فالصورة لا تشبه منحنى الدالة الرئيسة (الأم).

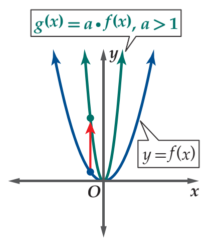
التمدد هو تحويل غير قياسي يؤدي إلى تضيق (ضغط) أو توسع (مط) منحنى الدالة رأسيًا أو أفقيًا.

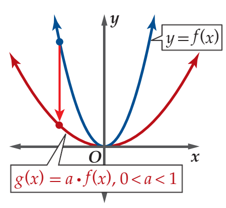
مفهوم أساسي — التمدد الرأسي والتمدد الأفقي

التمدد الرأسي

إذا كان a عددًا حقيقيًا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = a\,f(x)$ هو:

- توسع رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.
- تضيق رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$

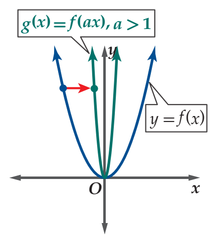


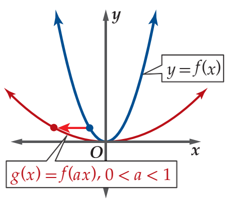


التمدد الأفقي

إذا كان a عددًا حقيقيًا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = f(ax)$ هو:

- تضيق أفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.
- توسع أفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$



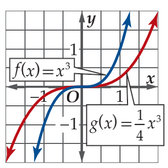


مثال 4 وصف التحويلات الهندسية وتمثيلها

عيِّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم صف العلاقة بين المنحنيين، ومثلهما بيانيًا في المستوى الإحداثي.

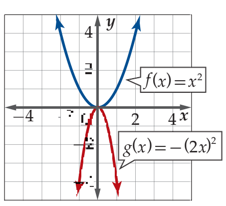
a) $g(x) = \frac{1}{4}x^3$

منحنى الدالة $g(x)$ هو تضيق رأسي لمنحنى $f(x) = x^3$؛ لأن $g(x) = \frac{1}{4}x^3 = \frac{1}{4}f(x)$ وَ $0 < \frac{1}{4} < 1$.



b) $g(x) = -(2x)^2$

منحنى الدالة $g(x)$ هو تضيق أفقي، ثم انعكاس حول المحور x لمنحنى $f(x) = x^2$؛ لأن $g(x) = -(2x)^2 = -f(2x)$ وَ $2 > 1$.



✓ **تحقق من فهمك** (4A-4B) انظر الهامش

4A) $g(x) = \frac{1}{2}[x]$

4B) $g(x) = \frac{5}{x} + 3$

يمكنك تمثيل الدالة المتعددة التعريف بيانيًا باستعمال التحويلات الهندسية التي درستها .

إرشادات للدراسة

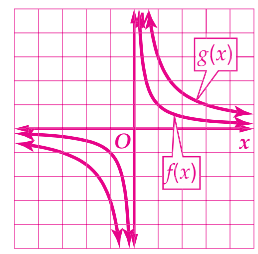
التمدد: يظهر التمددان متشابهين أحيانًا مثل التوسع الرأسي والتضيق الأفقي؛ لذا يصعب وصف التمدد الذي طبق على المنحنى، وفي هذه الحالة عليك المقارنة بين معادلة الدالة الناتجة عن التحويل والدالة الرئيسة (الأم).

مثال إضافي

4 عيّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كلٍّ مما يأتي، ثمَّ صِف العلاقة بين المنحنيين، ومثلهما بيانيًّا في المستوى الإحداثي نفسه.

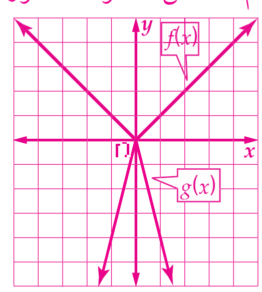
a) $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \frac{3}{x}$

منحنى $g(x)$ هو توسع رأسي لمنحنى $f(x)$ بمعامل مقداره 3.



b) $f(x) = |x|, g(x) = -|4x|$

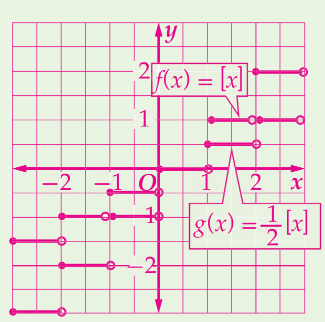
منحنى $g(x)$ هو تضيق أفقي لمنحنى $f(x)$ بمعامل مقداره 4، ثم انعكاس له حول المحور x .



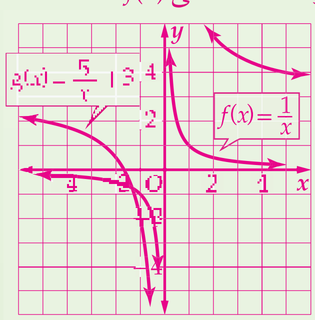
إجابات (تحقق من فهمك):

4A) $f(x) = [x]; g(x) = \frac{1}{2}[x]$

$g(x)$ تضييق رأسي لمنحنى $f(x)$.

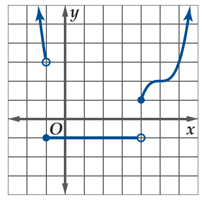


4B) $f(x) = \frac{1}{x}$; منحنى $g(x)$ توسع رأسي بمقدار 5 وحدات، ثمَّ انسحاب إلى الأعلى بمقدار 3 وحدات لمنحنى $f(x)$.



مثال 5 تمثيل الدوال متعددة التعريف بيانيًّا

مثّل الدالة بيانيًّا: $f(x)=\begin{cases}3x^2 & , x<-1\\ -1 & , -1\le x<4\\ (x-5)^3+2 & , x\ge 4\end{cases}$.



في الفترة $(-\infty,-1)$، أمثّل الدالة $y=3x^2$.

في الفترة $[-1,4)$، أمثّل الدالة الثابتة $y=-1$.

في الفترة $[4,\infty)$ أمثّل الدالة $y=(x-5)^3+2$.

ضع دائرة مفتوحة عند كل من النقطتين $(-1,3)$ و $(4,-1)$ ونقطة عند كل من $(-1,-1)$ و $(4,1)$ لأن $f(-1)=-1$ و $f(4)=1$.

✓ **تحقق من فهمك** (5A-B انظر الهامش

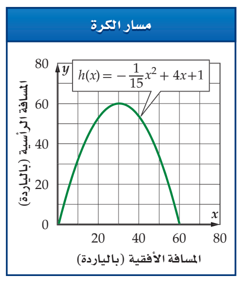
5A) $g(x)=\begin{cases}x-5 & , x\le 0\\ x^3 & , 0<x\le 2\\ \frac{2}{x} & , x>2\end{cases}$

5B) $h(x)=\begin{cases}(x+6)^2 & , x<-5\\ 7 & , -5\le x\le 2\\ |4-x| & , x>2\end{cases}$

يمكنك استعمال التحويلات الهندسية التي تعلمتها على الدوال التي تمثّل مواقف من واقع الحياة.

مثال 6 من واقع الحياة التحويلات الهندسية على الدوال

كرة قدم: ضرب لاعب كرة قدم، فكان مسارها معطى بالدالة $h(x)=-\frac{1}{15}x^2+4x+1$ ، حيث $h(x)$ يمثل ارتفاع الكرة بالياردة عن سطح الأرض، وتمثل x المسافة الأفقية بالياردة التي تقطعها الكرة حيث $x=0$ ترتبط بخط منتصف الملعب. صف التحويلات التي تمت على الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)=x^2$ للحصول على $h(x)$.



الربط مع الحياة

تأسس الاتحاد السعودي لكرة القدم عام 1956 م، وقد انضم إلى الفيفا والاتحاد الآسيوي في العام نفسه.

أعد كتابة الدالة لتصبح على الصورة $h(x)=a(x-h)^2+k$ باستعمال إكمال المربع.

$h(x)=-\frac{1}{15}x^2+4x+1$ الدالة الأصلية

$=-\frac{1}{15}(x^2-60x)+1$ حلّل $-\frac{1}{15}x^2+4x$

$=-\frac{1}{15}(x^2-60x+900)+1+\frac{1}{15}(900)$ أكمل المربع

$=-\frac{1}{15}(x-30)^2+61$ اكتب $x^2-60x+900$ على صورة مربع كامل ثم بسّط

أي أن منحنى $h(x)$ ينتج من منحنى $f(x)$ من خلال التحويلات الآتية على الترتيب: انسحاب 30 وحدة إلى اليمين، وتضييق رأسي بمقدار $\frac{1}{15}$ ، ثم انعكاس حول المحور x، وانسحاب 61 وحدة إلى أعلى.

✓ **تحقق من فهمك**

6) **كهرباء:** إذا كانت شدة التيار $I(x)$ بالأمبير الذي يمر بجهاز DVD تعطى بالدالة $I(x)=\sqrt{\frac{x}{11}}$ ، حيث x القدرة بالواط والعدد 11 هو المقاومة بالأوم.

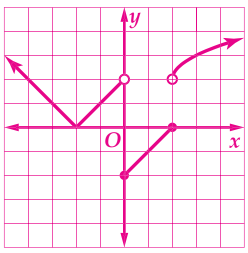
A) صف التحويلات التي تمت على الدالة $f(x)=\sqrt{x}$ للحصول على الدالة $I(x)$. توسع أفقي

B) اكتب دالة تصف مرور تيار في مصباح مقاومته 15 أوم. $I(x)=\sqrt{\frac{x}{15}}$

مثالان إضافيان

5 مثّل الدالة بيانيًّا:

$$f(x)=\begin{cases}|x+2|, x<0\\ |x|-2, 0\le x\le 2\\ \sqrt{x-2}+2, x>2\end{cases}$$



6 **مدينة الألعاب:** يتخذ جزء من سكة حديد العجلة الدوّارة في مدينة الألعاب شكل منحنى الدالة: $g(x)=\frac{-x^2}{30}+\frac{10x}{3}-\frac{100}{3}$ ، حيث تمثل $g(x)$ ارتفاع السكة عن سطح الأرض بالياردات ، و x المسافة الأفقية بالياردة من نقطة انطلاق القطار على العجلة.

a) صف التحويلات الهندسية التي تمت على الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)=x^2$ للحصول على $g(x)$.

منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x)$ مسحوبًا 50 وحدة إلى اليمين و 50 وحدة إلى الأعلى، وتضييق رأسيّ، وانعكاس حول المحور x .

b) إذا قرر مصممو سكة الحديد رفع أعلى نقطة فيها لتصبح 70 ياردة عن سطح الأرض ، فأعد كتابة $g(x)$ للتوافق مع هذا التعديل.

$g(x)=-\frac{1}{30}(x-50)^2+70$

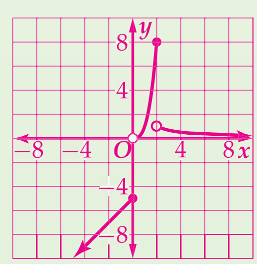
تنويع التعليم

دون ضمن فوق

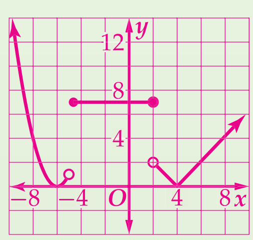
المتعلمون المتفاعلون: اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات لتحديد إن كانت مجموعات من الدوال لها تماثلات تشابه تماثلات الدوال الرئيسة (الأم). وشجِّعهم على استعمال الحاسوب أو الحاسبة البيانية لاختبار تخميناتهم حول التماثل.

إجابات (تحقق من فهمك):

5A)



5B)

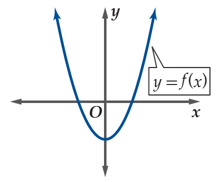


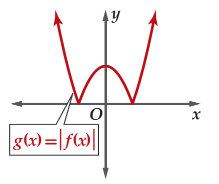
تُستعملُ تحويلات هندسية أخرى غير قياسية تتضمن القيمة المطلقة .

مفهوم أساسي — التحويلات الهندسية مع دوال القيمة المطلقة

$g(x) = |f(x)|$

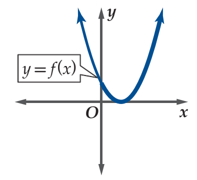
يُغير هذا التحويل الهندسي أي جزء من منحنى الدالة يقع تحت المحور x ليصبح فوقه بالانعكاس حول المحور x.

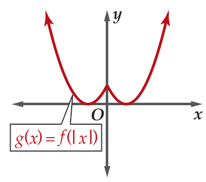




$g(x) = f(|x|)$

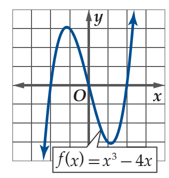
يغير هذا التحويل الهندسي جزء منحنى الدالة الموجود إلى يسار المحور y ويضع مكانه صورة جزء المنحنى الواقع إلى يمين المحور y بالانعكاس حول المحور y .





إرشاد تقني

تحويلات القيمة المطلقة يمكنك التحقق من أثر التحويل الهندسي على منحنى القيمة المطلقة باستعمال الحاسبة البيانيّة. ويمكنك أيضًا تمثيل كلا الدالتين في المستوى الإحداثي نفسه .



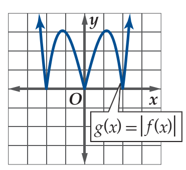
الشكل 1.5.6

مثال 7 — وصف التحويلات الهندسية وتمثيلها

استعمل منحنى الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ المبين في الشكل 1.5.6 لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين بيانيًا:

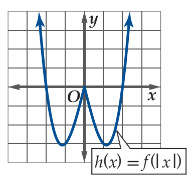
a) $g(x) = |f(x)|$

يقع الجزء السالب من منحنى $f(x)$ في الفترتين $(-\infty, -2)$ و $(0, 2)$؛ لذا يتم عكس هذين الجزأين حول المحور x ويترك الجزء الباقي من المنحنى دون تغيير.



b) $h(x) = f(|x|)$

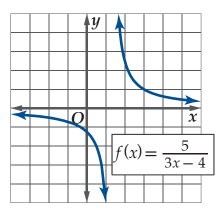
ضع مكان جزء المنحنى الموجود إلى يسار المحور y انعكاس الجزء الموجود إلى يمينه حول المحور y.



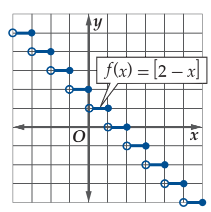
✓ تحقق من فهمك

استعمل منحنى الدالة $f(x)$ في كلٍّ من الشكلين أدناه؛ لتمثيل كلٍّ من الدالتين $g(x) = |f(x)|$ و $h(x) = f(|x|)$ بيانيًّا: **(7A-B** انظر الهامش.

7A)

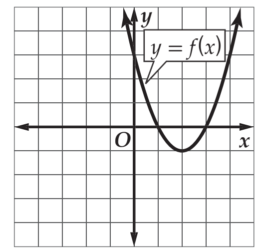


7B)

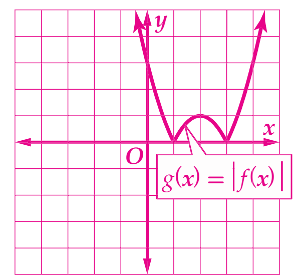


مثال إضافي

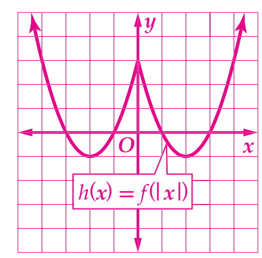
7 استعمل منحنى الدالة $f(x) = x^2 - 4x + 3$ المبين في الشكل أدناه؛ لتمثيل كلٍّ من الدالتين الآتيتين بيانيًّا:



a) $g(x) = |f(x)|$

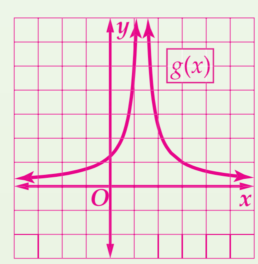


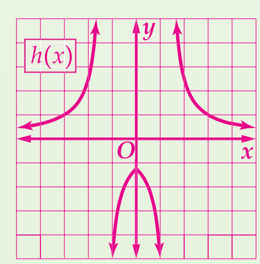
b) $h(x) = f(|x|)$



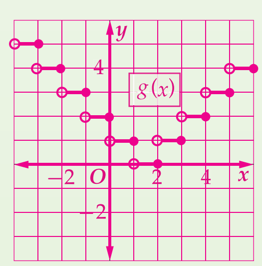
إجابات (تحقق من فهمك):

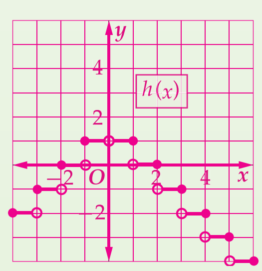
7A)





7B)





تدرب وحل المسائل

صف خصائص كل دالة من الدوال الرئيسة (الأم) الآتية: المجال، والمدى، والمقطع x، والمقطع y، والتماثل، والاتصال، وسلوك طرفي التمثيل البياني، وفترات التزايد والتناقص: (مثال 1) **1-6) انظر الهامش.**

1) $f(x)=[x]$ 2) $f(x)=\frac{1}{x}$ 3) $f(x)=x^3$

4) $f(x)=x^2$ 5) $f(x)=c$ 6) $f(x)=x$

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)=\sqrt{x}$ لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين: (مثال 2) **7-8) انظر ملحق الإجابات.**

7) $g(x)=\sqrt{x-4}$

8) $g(x)=\sqrt{x-7}+3$

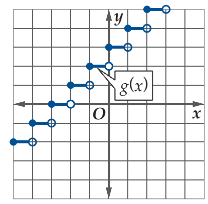
استعمل الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)=\frac{1}{x}$ لتمثيل كل من الدالتين الآتيتين: (مثال 2) **9-10) انظر ملحق الإجابات.**

9) $g(x)=\frac{1}{x}+4$

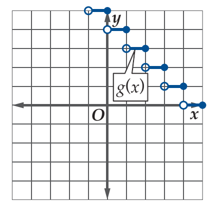
10) $g(x)=\frac{1}{x+7}-4$

صف العلاقة بين منحنى $f(x)=[x]$ و $g(x)$ في كلٍّ من الحالتين الآتيتين، ثم اكتب معادلة الدالة $g(x)$. (مثال 3) **11-12) انظر ملحق الإجابات.**

11)

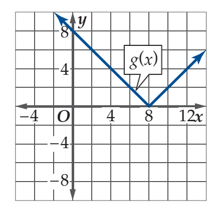


12)

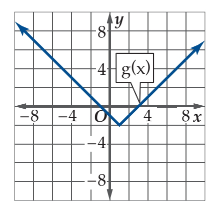


صف العلاقة بين منحنى $f(x)=|x|$ و $g(x)$ في كل من الحالتين الآتيتين، ثم اكتب معادلة الدالة $g(x)$: (مثال 3) **13-14) انظر ملحق الإجابات.**

13)



14)



اكتب الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، وصف العلاقة بين المنحنيين، ومثِّلهما في مستوى إحداثي واحد. (مثال 4)

15) $g(x)=3|x|-4$ 16) $g(x)=3\sqrt{x+8}$

17) $g(x)=\frac{4}{x+1}$ 18) $g(x)=2[x-6]$

19) $g(x)=\frac{1}{6x}+7$ 20) $g(x)=\frac{\sqrt{x+3}}{4}$

مثِّل منحنى كل من الدوال الآتية بيانيًّا: (مثال 5) **15-24) انظر ملحق الإجابات.**

21) $f(x)=\begin{cases}-x^2, & x<-2\\ 3, & -2\le x<7\\ (x-5)^2+2, & x\ge 7\end{cases}$

22) $g(x)=\begin{cases}x+4, & x<-6\\ \frac{1}{x}, & -6\le x<4\\ 6, & x\ge 4\end{cases}$

23) $h(x)=\begin{cases}|x-5|, & x<-3\\ 4x-3, & -1\le x<3\\ \sqrt{x}, & x\ge 4\end{cases}$

24) $g(x)=\begin{cases}2, & x<-4\\ x^4-3x^3+5, & -1\le x<1\\ [x]+1, & x\ge 3\end{cases}$

25) **أسعار:** يبين الجدول أدناه سعر سلعة منذ عام 1411هـ حتى 1431هـ . استعمل هذه البيانات لتمثيل دالة درجية. (مثال 5)

العام	1411	1413	1416	1420	1424	1426	1427	1431
السعر (بالريال)	15	17	22	30	32	33	40	55

انظر ملحق الإجابات.

26) **أعمال:** قدمت إحدى شركات الهواتف المحمولة عرضًا لمشتركي شبكتها بحيث يدفع المشترك مبلغًا ثابتًا شهريًّا مقداره 20 ريالًا، ويدفع 0.2 ريال مقابل كل دقيقة اتصال. إن تكلفة هذا العرض على المشترك تعطى بالدالة $c(x)=20+0.2\,[x]$، حيث x عدد دقائق الاتصال. (مثال 6) **انظر ملحق الإجابات.**

a) صف التحويلات الهندسية التي تطبق على الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)=[x]$ لتمثيل الدالة $c(x)$.

b) إذا قدمت الشركة عرضًا آخر بحيث يدفع المشترك فيه 30 ريالًا شهريًّا، ويدفع 0.1 ريال عن كل دقيقة اتصال. فاكتب الدالة التي تصف تكلفة هذا العرض.

c) هل يمكن أن تتساوى التكلفة في العرضين؟ وكم يكون عدد دقائق الاتصال في هذه الحالة؟

27) **فيزياء:** إذا علمت أن الطاقة المختزنة في نابض ما، تعطى بالدالة $E(x)=4x^2$ حيث تقاس الطاقة E بالجول، وتقاس المسافة x بالمتر . (مثال 6)

a) صف التحويل الهندسي الذي تم على الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)=x^2$ للحصول على الدالة $E(x)$. **توسع رأسي**

b) إذا كانت الطاقة المختزنة في نابض ما، آخر تعطى بالدالة $E(x)=2x^2$، فمثِّل بيانيًّا كلًّا من الدالتين على الشاشة نفسها باستعمال الحاسبة البيانية. **انظر ملحق الإجابات.**

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1–31، 50–53، 55–67
ضمن المتوسط	1–31 (فردي)، 32–50 (زوجي)، 49–54 ، 55–67
فوق المتوسط	29–67

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1–31 للتأكد من فهم الطلاب. ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

إجابات:

1) المجال: $\{x \mid x\in R\}$، المدى: $\{y \mid y\in z\}$. يقطع المنحنى المحور y عند (0.0) ويقطع المحور x عند $\{x \mid 0\le x<1, x\in R\}$. لا يوجد لمنحنى الدالة تماثلات، أي أنها ليست فردية وليست زوجية. للدالة عدم اتصال قفزي عند $\{x \mid x\in z\}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$. الدالة ثابتة عند $\{x \mid x\notin z\}$. متزايدة عند $\{x \mid x\in z\}$.

2) المجال $\{x \mid x\ne 0, x\in R\}$ المدى $\{y \mid y\ne 0, y\in R\}$. المنحنى لا يقطع أيًّا من المحورين، منحنى الدالة متماثل حول نقطة الأصل؛ لذا فالدالة فردية ، للدالة عدم اتصال لا نهائي عند $x=0$. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$. الدالة متناقصة في $(-\infty,0)$ و $(0,\infty)$.

3) المجال $\{x \mid x\in R\}$ ، المدى $\{y \mid y\in R\}$. المنحنى يقطع المحورين عند $(0,0)$ ، المنحنى متماثل حول نقطة الأصل؛ لذا فالدالة فردية ومتصلة.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ ، الدالة متزايدة على الفترة $(-\infty,\infty)$.

4) المجال $\{x \mid x\in R\}$ ، المدى $\{y \mid y\ge 0, y\in R\}$. يقطع المنحنى المحورين عند (0.0) المنحنى متماثل حول المحور y؛ لذا فالدالة زوجية، ومتصلة.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ ،

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ ، الدالة متناقصة على الفترة $(-\infty,0)$ ، ومتزايدة على الفترة $(0,\infty)$.

5) المجال: $\{x \mid x\in R\}$، المدى: $\{y \mid y=c, c\in R\}$. إذا كان $c=0$ ، يقطع المنحنى المحور x عند عدد لانهائي من النقاط. وعدا ذلك فالمنحنى لا يقطع المحور x، يقطع المنحنى المحور y عند النقطة $(0,c)$، والدالة متماثلة حول المحور y؛ لذا فهي زوجية ومتصلة.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=c$ و $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=c$، وثابتة على الفترة $(-\infty,\infty)$.

6) المجال: $\{x \mid x\in R\}$ ، المدى: $\{y \mid y\in R\}$. يقطع المنحنى المحورين عند (0.0). المنحنى متماثل حول نقطة الأصل؛ لذا فالدالة فردية ومتصلة.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ ومتزايدة على الفترة $(-\infty,\infty)$.

تمثيلات متعددة
في السؤال 49 يستعمل الطلاب الجداول والتعبير اللفظي والجبر لاستقصاء بعض العمليات على الدوال.

4 التقويم

بطاقة مكافأة اطلب إلى الطلاب وصف العلاقة بين الدالة $g(x) = -\frac{1}{4}(x+3)^2 + 4$ ودالتها الرئيسة (الأم).

منحنى $g(x)$ هو صورة منحنى $f(x) = x^2$ بالانعكاس حول المحور x، ويتبعه انسحاب بمقدار 3 وحدات إلى اليسار، و 4 وحدات إلى أعلى، وتوسع مقداره 4.

تنبيه
خطأ شائع في الأسئلة 31–28 قد يجد بعض الطلاب صعوبة في معرفة التغيرات التي تسببها القيمة المطلقة؛ لذا اقترح عليهم تمثيل منحنى الدالة دون قيمة مطلقة، ثم إجراء الانعكاس على أجزاء من منحنى الدالة في المحور المناسب.

إجابة:

38) إن منحنى $g(x)$ ناتج عن التحويلات الهندسية الآتية لمنحنى $f(x) = x^3$.
- انسحاب 5 وحدات إلى اليمين.
- تضييق رأسي معامله 0.5.
- انعكاس حول المحور x.
- انسحاب 8 وحدات إلى الأسفل.

لذا فمعادلة $g(x)$ هي:
$g(x) = -0.5(x-5)^2 - 8$

(28-31) انظر ملحق الإجابات.

استعمل منحنى الدالة $f(x)$ في كل مما يأتي لتمثيل الدالتين $g(x) = |f(x)|,\ h(x) = f(|x|)$ بيانيًا: **(مثال 7)**

28) $f(x) = \frac{2}{x}$

29) $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2$

30) $f(x) = \frac{1}{x-3} + 5$

31) $f(x) = \sqrt{x+2} - 6$

اكتب الدالة الناتجة عن إجراء التحويلات الهندسية المعطاة على الدالة الرئيسة (الأم) في كل من السؤالين الآتيين:

32) $f(x) = \frac{1}{x}$: انسحاب 5 وحدات إلى أعلى، و 7 وحدات إلى اليسار، وتوسع رأسي معامله 2 $\quad g(x) = \frac{2}{x+7} + 5$

33) $f(x) = [x]$: انعكاس في المحور x و انسحاب 4 وحدات إلى أسفل، وتوسع رأسي معامله 3 $\quad g(x) = -3[x] - 4$

فيزياء: إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم تعطى بالدالة $g(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$، حيث x_0 المسافة الابتدائية، و v_0 السرعة الابتدائية و a تسارع الجسم. صف التحويلات الهندسية التي تمت على الدالة الرئيسة (الأم) $f(t) = t^2$ للحصول على $g(t)$ في كل مما يأتي:

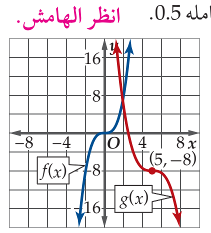
34) $x_0 = 0, v_0 = 2, a = 2$ **(34-37) انظر ملحق الإجابات.**

35) $x_0 = 10, v_0 = 0, a = 2$

36) $x_0 = 1, v_0 = 8, a = 4$

37) $x_0 = 3, v_0 = 5, a = 3$

38) اكتب معادلة الدالة $g(x)$ إذا علمت أن منحناها ناتج عن عدة تحويلات هندسية لمنحنى الدالة $f(x)$، وأحد هذه التحويلات هو تضييق رأسي معامله 0.5. **انظر الهامش.**



39) **تسوق:** توقعت إدارة أحد المجمعات التجارية الجديدة أن يعطى عدد المتسوقين بالآلاف بالدالة $f(x) = \sqrt{7x}$ خلال أول ستين يومًا من الافتتاح، حيث x رقم اليوم بعد الافتتاح، $x = 1$ يرتبط بيوم الافتتاح. اكتب دالة $g(x)$ بدلالة $f(x)$ لكل حالة من الحالات الآتية:

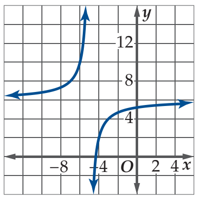
a) زاد عدد الحضور 12% على المتوقع. $\quad g(x) = 1.12f(x)$

b) تأخر موعد الافتتاح 30 يومًا بسبب تأخر أعمال البناء.

c) نقص عدد المتسوقين 450 عن المتوقع. $\quad g(x) = f(x) - 0.45$

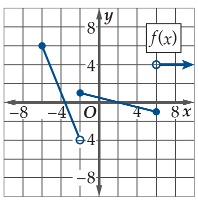
b) $g(x) = f(x - 30)$

40) اكتب دالة تمثّل المنحنى المرسوم:



$f(x) = -\frac{4}{x+5} + 6$

استعمل منحنى $f(x)$ لتمثيل منحنى $g(x)$ لكل مما يأتي:



(41-44) انظر ملحق الإجابات.

41) $g(x) = 0.25f(x) + 4$

42) $g(x) = 3f(x) - 6$

43) $g(x) = f(x - 5) + 3$

44) $g(x) = -2f(x) + 1$

(45-48) انظر ملحق الإجابات.

استعمل $f(x) = \frac{8}{\sqrt{x+6}} - 4$ لتمثيل كل دالة مما يأتي:

45) $g(x) = 2f(x) + 5$ $\qquad$ **46)** $g(x) = -3f(x) + 6$

47) $g(x) = f(4x) - 5$ $\qquad$ **48)** $g(x) = f(2x + 1) + 8$

49) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة بعض العمليات على الدوال معتمدًا على الدوال الآتية:
- $f(x) = x^2 + 2x + 7$
- $g(x) = 4x + 3$
- $h(x) = x^2 + 6x + 10$

a) **جدوليًا:** اختر ثلاث قيم لـ a، وأكمل الجدول الآتي:

a	$f(a)$	$g(a)$	$f(a) + g(a)$	$h(a)$
3	22	15	37	37
−4	15	−13	2	2
15	262	63	325	325

b) **لفظيًا:** ما العلاقة بين $f(x)$، $g(x)$، $h(x)$؟

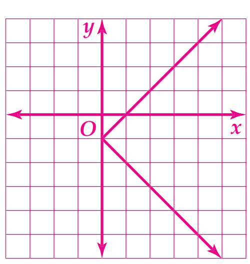
c) **جبريًا:** أثبت صحة العلاقة التي حصلت عليها في الفرع b جبريًا. **(49b-c) انظر ملحق الإجابات.**

تنويع التعليم

فوق

توسّع: مثّل الدالة $x = |y+1|$. ثم صف علاقتها بالدالة $y = |x|$.

منحنى هذه الدالة هو تدوير لمنحنى الدالة $y = |x|$ بزاوية قياسها 90° مع اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل، ثم إزاحة وحدة واحدة إلى أسفل.



مسائل مهارات التفكير العليا

(50-56) انظر ملحق الإجابات.

50) **اكتشف الخطأ:** وَصَف كل من محمد وعبد الملك التحويلات الهندسية التي تمت للوصول إلى الدالة $g(x) = [x + 4]$. فقال محمد: أنه تم سحب منحنى الدالة الرئيسة (الأم) 4 وحدات إلى اليسار. وقال عبد الله: إنه تم سحب الدالة 4 وحدات إلى أعلى. فمن منهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.

51) **تبرير:** إذا كانت $f(x)$ دالة فردية وكانت $g(x)$ انعكاسًا للدالة $f(x)$ حول المحور x و $h(x)$ انعكاسًا للدالة $g(x)$ حول المحور y، فما العلاقة بين $f(x)$, $h(x)$؟ برِّر إجابتك.

تبرير: تحقّق ما إذا كانت كل من الجملتين صحيحة أحيانًا أو صحيحة دائمًا أو ليست صحيحة. وبرِّر إجابتك.

52) إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية فإن $f(x) = |f(x)|$

53) إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية فإن $f(-x) = -|f(x)|$

54) **تحدٍّ:** صف التحويلات الهندسية التي تمت على الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ للوصول إلى دالة يمر منحناها بالنقطة $(-2, -6)$.

55) **تبرير:** وضِّح الفرق بين التوسع الرأسي بمعامل مقداره 4، والتوسع الأفقي بمعامل مقداره $\frac{1}{4}$. ما النتيجة النهائية بعد إجراء كلٍّ من التحويلين الهندسيين على الدالة نفسها؟

56) **اكتب:** وضح أهمية الترتيب في تحويلات الانعكاس والانسحاب.

مراجعة تراكمية

أوجد متوسط معدل التغير لكلٍّ من الدوال الآتية في الفترة المعطاة: (الدرس 1-4)

57) $g(x) = -2x^2 + x - 3, [-1, 3]$ **−3**

58) $g(x) = x^2 - 6x + 1, [4, 8]$ **6**

59) $f(x) = -2x^3 - x^2 + x - 4, [-2, 3]$ **−14**

حدِّد سلوك طرف التمثيل البياني لكلٍّ من الدوال الآتية عندما تقترب x من لانهاية، مستعملًا التبرير المنطقي، وبرِّر إجابتك. (الدرس 1-3)

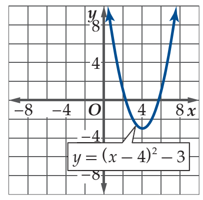
60) $q(x) = -\frac{12}{x}$ **(60-62) انظر الهامش.**

61) $f(x) = \frac{0.5}{x^2}$

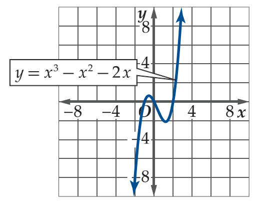
62) $p(x) = \frac{x + 2}{x - 3}$

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتقدير قيمة كلٍّ من: المقطع y، والأصفار إلى أقرب جزء من مئة (كلما لزم ذلك) لكل دالة من الدوال الآتية، ثم أوجد هذه القيم جبريًّا: (الدرس 1-2) **(63-65) انظر الهامش.**

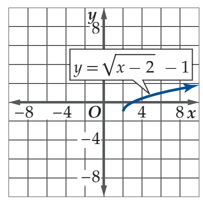
63)



64)

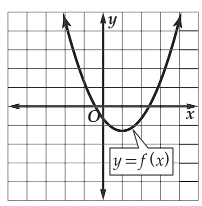


65)



تدريب على اختبار

66) ما الفترة التي تتزايد فيها الدالة الممثلة في الشكل أدناه؟ **D**



A $(0, \infty)$

B $(-\infty, 1)$

C $(-1, \infty)$

D $(1, \infty)$

67) ما مدى الدالة $y = \frac{x^2 + 8}{2}$؟ **B**

A $\{y \mid y \neq \pm 2\sqrt{2}\}$

B $\{y \mid y \geq 4\}$

C $\{y \mid y \geq 0\}$

D $\{y \mid y \leq 0\}$

تنبيه

اكتشف الخطأ في السؤال 50 كلا التفسيرين صحيح، اطلب إلى الطلاب التحقق من ذلك بسحب الدالة الأصلية 4 وحدات إلى أعلى من جهة، ثم كلِّفهم بسحب الدالة الأصلية 4 وحدات إلى اليسار، سيلاحظون أن النتيجة واحدة في الحالتين.

إجابات:

60) 0؛ إجابة ممكنة: عندما $x \to \infty$، تتناقص قيمة الكسر لتؤول $q(x)$ إلى 0.

61) 0؛ إجابة ممكنة: عندما $x \to \infty$، تتناقص قيمة الكسر لتؤول $f(x)$ إلى 0.

62) 1؛ إجابة ممكنة: عندما $x \to \infty$، تقترب الدالة من $\frac{x}{x}$؛ لذا فإن قيم $p(x)$ تؤول إلى 1.

63) المقطع y هو 13، وأصفار الدالة هي 2.25,5.75 تقريبًا. المقطع y عندما $x = 0$ ويساوي $y = (-4)^2 - 3 = 13$

أصفار الدالة:

$$0 = (x - 4)^2 - 3$$
$$3 = (x - 4)^2$$
$$\pm\sqrt{3} = x - 4$$
$$x = 4 \pm \sqrt{3}$$
$$x = 5.73 , 2.27$$

64) المقطع y هو 0 ؛ الأصفار $-1, 0, 2$

$$x^3 - x^2 - 2x = 0$$
$$x(x^2 - x - 2) = 0$$
$$x(x + 1)(x - 2) = 0$$

$x = 0$ أو $x + 1 = 0$ أو $x - 2 = 0$

$x = 0$ أو $x = -2$ أو $x = 2$

65) المنحنى لا يقطع المحور y.

صفر الدالة هو 3

$$0 = \sqrt{x - 2} - 1$$
$$1 = \sqrt{x - 2}$$
$$1^2 = x - 2$$
$$1 + 2 = x$$
$$x = 3$$

1-6 ملاحظات الدرس

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-6

إيجاد قيم الدوال.

الدرس 1-6

إجراء العمليات على الدوال.

إيجاد تركيب الدوال.

ما بعد الدرس 1-6

إيجاد معكوس العلاقات والدوال العكسية جبريًّا وبيانيًّا.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- إذا تم بيع منتجين بمتوسط شهري مختلف، فكيف يمكنك المقارنة بين المتوسطين؟ اطرح مبيعات أحد المنتجين من مبيعات الآخر.
- تهتم شركة بالنسبة بين عدد البيوت التي تم بيعها والبيوت المعروضة للبيع، فما العبارة التي تدل على هذه النسبة؟ قسمة عدد البيوت التي تم بيعها على عدد البيوت المعروضة للبيع.

1-6 العمليات على الدوال وتركيب دالتين

Function Operations and Composition of Functions

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم الدوال. (الدرس 1-1)

والآن:

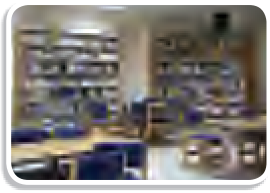
- أُجري العمليات على الدوال.
- أجدُ تركيب الدوال.

المفردات:

تركيب الدالتين
composition of functions

www.obeikaneducation.com

لماذا؟



بلغ عدد الكتب المستعارة من مكتبة الأمير سلمان المركزية في جامعة الملك سعود عام 1432هـ 330000 كتاب، وبلغ إجمالي عدد الكتب المفهرسة 2065863 كتابًا.

إذا كانت $A(t)$ و $B(t)$ تمثّلان عدد الكتب المفهرسة وعدد الكتب المستعارة على الترتيب و t تمثّل السنة منذ 1425هـ، فإن عدد الكتب المفهرسة غير المعارة يعطى بالدالة $A(t) - B(t)$.

العمليات على الدوال: درست في الصف الثاني الثانوي عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة على كثيرات الحدود، وفي هذا الدرس ستتعلمُ إجراءَ العمليات نفسها على الدوال.

مفهوم أساسي — العمليات على الدوال

إذا كانت f, g دالتين يتقاطع مجالاهما، فإننا نعرف عمليات الجمع، والضرب، والطرح، والقسمة لجميع قيم x الموجودة في تقاطع المجالين على النحو الآتي:

الجمع: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ **الضرب:** $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

الطرح: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ **القسمة:** $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0$

في كل من الحالات السابقة مجال الدالة الجديدة يساوي تقاطع مجالي الدالتين f و g، باستثناء القيم التي تجعل $g(x) = 0$ في دالة القسمة.

مثال 1 العمليات على الدوال

إذا كانت $f(x) = x^2 + 4x,\ g(x) = \sqrt{x+2},\ h(x) = 3x - 5$، فأوجد كلًّا من الدوال الآتية، ثم حدد مجالها:

a) $(f+g)(x)$

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x)\\ &= (x^2+4x) + (\sqrt{x+2})\\ &= x^2 + 4x + \sqrt{x+2}\end{aligned}$$

مجال الدالة f هو $(-\infty, \infty)$، ومجال الدالة g هو $[-2, \infty)$؛ لذا فإن مجال الدالة $(f+g)$ هو تقاطع مجالي f, g، وهو $[-2, \infty)$.

b) $(f-h)(x)$

$$\begin{aligned}(f-h)(x) &= f(x) - h(x)\\ &= (x^2+4x) - (3x-5)\\ &= x^2 + 4x - 3x + 5\\ &= x^2 + x + 5\end{aligned}$$

مجال كل من f, h هو $(-\infty, \infty)$، لذا فإن مجال $(f-h)$ هو $(-\infty, \infty)$.

c) $(f \cdot h)(x)$

$$\begin{aligned}(f \cdot h)(x) &= f(x) \cdot h(x)\\ &= (x^2+4x)(3x-5)\\ &= 3x^3 - 5x^2 + 12x^2 - 20x\\ &= 3x^3 + 7x^2 - 20x\end{aligned}$$

مجال كل من f, h هو $(-\infty, \infty)$؛ لذا فإن مجال $(f \cdot h)$ هو $(-\infty, \infty)$.

d) $\left(\frac{h}{f}\right)(x)$

$$\left(\frac{h}{f}\right)(x) = \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{3x-5}{x^2+4x}$$

مجال كل من f و h هو $(-\infty, \infty)$ ولكن $x = 0$ أو $x = -4$ تجعلان مقام الدالة $\left(\frac{h}{f}\right)$ صفرًا؛ لذا فإن مجال $\left(\frac{h}{f}\right)$ هو $\{x \mid x \neq 0, x \neq -4, x \in R\}$.

مصادر الدرس 1-6

المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (60, 61)	• تنويع التعليم ص (60, 63)	• تنويع التعليم ص (63, 64)
كتاب التمارين	• ص (9)	• ص (9)	• ص (9)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (26) • تدريبات حل المسألة، ص (28)	• تدريبات حل المسألة، ص (28) • التدريبات الإثرائية، ص (29)	• تدريبات حل المسألة، ص (28) • التدريبات الإثرائية، ص (29)

تحقق من فهمك

انظر الهامش

أوجد $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$, $(f \bullet g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f+g)(x)$ في كل مما يأتي، ثم أوجد مجال كل دالة من الدوال الناتجة.

1A) $f(x) = x - 4,\ g(x) = \sqrt{9 - x^2}$

1B) $f(x) = x^2 - 6x - 8,\ g(x) = \sqrt{x}$

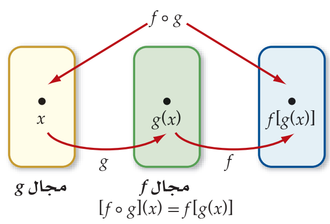
تركيب الدوال: تنتج الدالة $y = (x-3)^2$ من دمج الدالة الخطية $y = x - 3$ والدالة التربيعية $y = x^2$، لاحظ أن هذا الدمج لم ينتج عن جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة. ويسمى هذا الدمج تركيب الدالتين، وملخصه إيجاد قيمة دالة عند قيمة دالة أخرى.

مفهوم أساسي — تركيب دالتين

يعرف تركيب الدالتين f و g على النحو الآتي:

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

ويتكون مجال الدالة $f \circ g$ من جميع قيم x في مجال الدالة g على أن تكون $g(x)$ في مجال f.



تقرأ الدالة $f \circ g$ على النحو f تركيب g أو f بعد g، حيث تُطبَّق الدالة g أولًا ثم الدالة f.

مثال 2 — تركيب دالتين

إذا كانت $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x - 4$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

a) $[f \circ g](x)$

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$	تعريف $f \circ g$
$= f(x - 4)$	$g(x) = x - 4$
$= (x-4)^2 + 1$	عوّض $(x - 4)$ بدلًا من x في $f(x)$
$= x^2 - 8x + 16 + 1$	بسّط
$= x^2 - 8x + 17$	

b) $[g \circ f](x)$

$[g \circ f](x) = g[f(x)]$	تعريف $g \circ f$
$= g(x^2 + 1)$	$f(x) = x^2 + 1$
$= (x^2 + 1) - 4$	عوّض $(x^2 + 1)$ بدلًا من x في $g(x)$
$= x^2 - 3$	بسّط

c) $[f \circ g](2)$

أوجد قيمة الدالة $[f \circ g](x)$ التي حصلت عليها في الفرع a عندما $x = 2$.

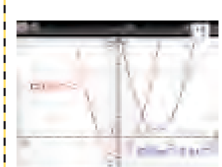
$[f \circ g](2) = (2)^2 - 8(2) + 17 = 5$ عوّض 2 مكان x في $x^2 - 8x + 17$

إرشادات للدراسة

العمليات على الدوال وتركيب دالتين:
يختلف تركيب الدوال عن العمليات عليها، حيث يتم دمج الدالتين معًا، وليس مجرد إجراء عمليات مثل الجمع أو الطرح أو الضرب أو القسمة.

تنبيه!

ترتيب الدوال عند التركيب
في معظم الأحيان $g \circ f$ ، $f \circ g$ دالتان مختلفتان. بمعنى آخر إن تركيب الدوال ليس إبداليًا. ففي المثال 2
$[f \circ g](x) = x^2 - 8x + 17$
لكن $[g \circ f](x) = x^2 - 3$ وهما دالتان مختلفتان. والتمثيل البياني أدناه يبيّن ذلك.



العمليات على الدوال

مثال 1 يبيِّن كيفية إجراء العمليات على الدوال.

التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

1 إذا كانت $f(x) = x^2 - 2x$ و $h(x) = -2x^2 + 1$ و $g(x) = 3x - 4$ فأوجد الدالة وحدد مجالها في كل مما يأتي:

a) $(f+g)(x)$
$(f+g)(x) = x^2 + x - 4$
المجال: $(-\infty, \infty)$

b) $(f-h)(x)$
$(f-h)(x) = 3x^2 - 2x - 1$
المجال: $(-\infty, \infty)$

c) $(f \bullet g)(x)$
$(f \bullet g)(x) = 3x^3 - 10x^2 + 8x$
المجال: $(-\infty, \infty)$

d) $\left(\frac{h}{f}\right)(x)$
$\left(\frac{h}{f}\right)(x) = \frac{-2x^2+1}{x^2-2x}$
المجال:
$\{x | x \neq 0, x \neq 2, x \in R\}$

تركيب الدوال

المثالان 2 , 3 يبيِّنان كيفية تركيب دالتين وإيجاد ناتج التركيب بوجود قيود على مجالها.

مثال 4 يبيِّن كيفية تجزئة دالة مركبة.

مثال 5 يبيِّن كيفية استعمال دالة مركبة.

إجابات (تحقق من فهمك):

1A) $(f+g)(x) = x - 4 + \sqrt{9-x^2}$, $D = [-3, 3]$; $(f-g)(x) = x - 4 - \sqrt{9-x^2}$, $D = [-3, 3]$;
$(f \bullet g)(x) = x\sqrt{9-x^2} - 4\sqrt{9-x^2}$, $D = [-3, 3]$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x-4}{\sqrt{9-x^2}}$, $D = (-3, 3)$

1B) $(f+g)(x) = x^2 - 6x - 8 + \sqrt{x}$, $D = [0, \infty)$; $(f-g)(x) = x^2 - 6x - 8 - \sqrt{x}$, $D = [0, \infty)$;
$(f \bullet g)(x) = x^2\sqrt{x} - 6x\sqrt{x} - 8\sqrt{x}$, $D = [0, \infty)$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2-6x-8}{\sqrt{x}}$, $D = (0, \infty)$

تحقق من فهمك

أوجد $[f \circ g](3)$, $[g \circ f](x)$, $[f \circ g](x)$ في كل مما يأتي:

2A) $f(x) = 3x + 1, g(x) = 5 - x^2$
$-3x^2 + 16, -9x^2 - 6x + 4, -11$

2B) $f(x) = 6x^2 - 4, g(x) = x + 2$
$6x^2 + 24x + 20, 6x^2 - 2, 146$

بما أن مجال كل من f, g في المثال 2 هو مجموعة الأعداد الحقيقية، فإن مجال $f \circ g$ هو $\{x \mid x \in R\}$.

عند وجود قيود على مجال f أو مجال g فإن مجال $f \circ g$ يكون مقيدًا بكل قيم x في مجال g التي تكون صورها $g(x)$ موجودةً في مجال f.

إرشادات للدراسة

تحديد مجالي الدالتين: من المهم تعرّف مجالي الدالتين قبل تركيبهما؛ لأن القيود على مجالات الدوال قد لا تكون واضحة بعد إجراء عملية التركيب وتبسيطها.

مثال 3 إيجاد دالة التركيب بوجود قيود على المجال

حدّد مجال الدالة $f \circ g$ متضمنًا القيود الضرورية، ثم أوجد $f \circ g$ في كل من الحالتين الآتيتين:

a) $f(x) = \frac{1}{x+1}, g(x) = x^2 - 9$

لإيجاد مجال $f \circ g$ فإننا نجد قيم $g(x) = x^2 - 9$ لجميع الأعداد الحقيقية، ثم نجد قيم $f(x) = \frac{1}{x+1}$ لجميع قيم $g(x)$، التي يمكن حسابها عندما $g(x) \neq -1$؛ لذا فإننا نستثني من المجال جميع قيم x التي تجعل $x^2 - 9 = -1$ ، وهي $x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$ ، وعليه يكون مجال $f \circ g$ هو $\{x \mid x \neq \pm 2\sqrt{2}, x \in R\}$.

نجد الآن $[f \circ g](x)$:

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$ تعريف $f \circ g$

$= f(x^2 - 9)$ $g(x) = x^2 - 9$

$= \frac{1}{x^2 - 9 + 1} = \frac{1}{x^2 - 8}$ عوّض $(x^2 - 9)$ بدلًا من x في $f(x)$

لاحظ أن $\frac{1}{x^2 - 8}$ غير معرّفة عندما $x^2 - 8 = 0$، أو عندما $x = \pm 2\sqrt{2}$. ومن ثم يمكن كتابة $f \circ g$ على الصورة $[f \circ g](x) = \frac{1}{x^2 - 8}$ ومجالها $\{x \mid x \neq \pm 2\sqrt{2}, x \in R\}$.

b) $f(x) = x^2 - 2, g(x) = \sqrt{x - 3}$

لإيجاد $f \circ g$ فإننا نجد قيم $g(x)$، لجميع قيم x حيث $x \geq 3$. ثم نربع كل قيمة من قيم $g(x)$، ونطرح منها 2. لذا فإن مجال $f \circ g$ هو $\{x \mid x \geq 3, x \in R\}$.

نجد الآن $[f \circ g](x)$:

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$ تعريف $f \circ g$

$= f(\sqrt{x - 3})$ $g(x) = \sqrt{x - 3}$

$= (\sqrt{x - 3})^2 - 2$ عوّض $\sqrt{x - 3}$ بدلًا من x في $f(x)$

$= x - 3 - 2 = x - 5$ بسّط

لاحظ أن مجال الدالة $x - 5$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية، إلا أن مجال $f \circ g$ في مثالنا مقيد بالشرط $x \geq 3$؛ لذا فإن دالة التركيب هي $[f \circ g](x) = x - 5$ ومجالها $\{x \mid x \geq 3, x \in R\}$.

مثالان إضافيان

2 إذا كانت $f(x) = 2x^2 - 1$ و $g(x) = \sqrt{x + \frac{1}{2}}$ فأوجد كلًّا مما يأتي:

a) $[f \circ g](x)$
$[f \circ g](x) = 2x$

b) $[g \circ f](x)$
$[g \circ f](x) = \sqrt{2x^2 - \frac{1}{2}}$

c) $[f \circ g](2)$
$[f \circ g](2) = 4$

3 أوجد مجال الدالة $f \circ g$، متضمنًا القيود الضرورية. ثم أوجد $f \circ g$ في الحالتين الآتيين:

a) $f(x) = \sqrt{x} - 1,$ $g(x) = (x - 1)^2$.

المجال :
$\{x \mid x \leq 0$ أو $x \geq 2, x \in R\}$
$[f \circ g](x) = \sqrt{x^2 - 2x}$

b) $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

المجال :
$\{x \mid x < -1$ أو $x > 1, x \in R\}$
$[f \circ g](x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - 1}$

المحتوى الرياضي

تركيب الدوال عملية تركيب الدوال بشكل عام ليست إبدالية، لكن هناك بعض أزواج من الدوال يكون فيها $f(g(x)) = g(f(x))$. إذا كان $f(g(x)) = g(f(x)) = x$، فإن كلًّا من f و g دالة عكسية للأخرى.

التعليم باستعمال التقنيات

الجداول الإلكترونية

اطلب إلى الطلاب استعمال الجداول الإلكترونية، واختر أحد أمثلة الدرس، واطلب إليهم أيضًا العمل في مجموعات لعمل قائمة بالمدخلات (المجال)، والمخرجات (المدى) للدالة الأولى ، ثم اطلب إليهم استعمال مدى هذه الدالة مجالًا للدالة الثانية. وعليهم إبراز أية قيود على مجال الدالة المركبة على الجداول الإلكترونية.

تنويع التعليم

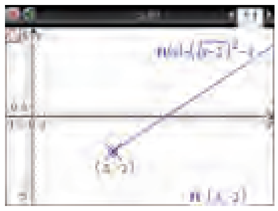
دون ضمن

المتعلمون المتفاعلون: اطلب إلى الطلاب العمل في مجموعات ثنائية، بحيث يفكر كل طالب بدالة ، ثم يعمل الطالبان معًا لإيجاد مجموع الدالتين والفرق بينهما، وحاصل ضربهما، وقسمتهما، ثم ناتج تركيبهما.

60 الفصل 1 تحليل الدوال

3A) إجابة ممكنة:
$[f \circ g](x) = |x|$ ،
المجال: $\{x \mid x \in \mathbf{R}\}$

3B) إجابة ممكنة:
$[f \circ g](x) = \dfrac{5}{x^2 + x}$ ،
المجال:
$\{x \mid x \neq 0, x \neq -1, x \in \mathbf{R}\}$



التحقق: استعمل الحاسبة البيانية لاختبار الإجابة. أدخل الدالة $f1(x) = (\sqrt{x-3})^2 - 2$. فيظهر التمثيل جزءًا من المستقيم $y = x - 5$. استعمل الإمكانات المتاحة في الحاسبة البيانيّة بالضغط على مفتاح menu، ثم على 5: تتبع المسار ، واختر منها 1: تتبع مسار التمثيل ؛ لمساعدتك على تحديد مجال $f \circ g$ والذي يبدأ عند $x = 3$ ويمتد إلى ∞ .

✓ تحقق من فهمك

3A) $f(x) = \sqrt{x+1}\,, g(x) = x^2 - 1$

3B) $f(x) = \frac{5}{x}\,, g(x) = x^2 + x$

إحدى المهارات المهمة عند دراسة التفاضل والتكامل هي إعادة تفكيك الدالة إلى دالتين أبسط منها. أي أنه لتفكيك دالة مثل h، فإنك تجد دالتين (f, g مثلًا) بحيث يكون تركيبهما هو h .

مثال 4 كتابة الدالة كتركيب دالتين

أوجد دالتين f, g بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$ ، وعلى ألّا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$ في كلٍّ مما يأتي:

a) $h(x) = \sqrt{x^3 - 4}$

لاحظ أن h هو الجذر التربيعي للدالة $x^3 - 4$؛ لذا فإننا نختار $f(x) = \sqrt{x}\,, g(x) = x^3 - 4$. أي أنه يمكننا كتابة h كتركيب للدالتين $f(x) = \sqrt{x}\,, g(x) = x^3 - 4$ ، وعندئذ:

$$h(x) = \sqrt{x^3 - 4} = \sqrt{g(x)} = f[g(x)] = [f \circ g](x)$$

b) $h(x) = 2x^2 + 20x + 50$

بالتحليل إلى العوامل نكتب الدالة بالشكل: $h(x) = 2(x^2 + 10x + 25) = 2(x+5)^2$

أي أنه يمكننا كتابة $h(x)$ كتركيب للدالتين $f(x) = 2x^2\,, g(x) = x + 5$ ، وعندئذٍ:

$$h(x) = 2(x+5)^2 = 2[g(x)]^2 = f[g(x)] = [f \circ g](x)$$

✓ تحقق من فهمك

4A) $h(x) = x^2 - 2x - 1$ $f(x) = x^2\,, g(x) = x - 1$

4B) $h(x) = \dfrac{1}{x+7}$ $f(x) = \frac{1}{x}\,, g(x) = x + 7$

يمكنك استعمال تركيب دالتين لحل مسائل من واقع الحياة.

مثال 5 من واقع الحياة على شكل تركيب دالتين

مؤثرات حركية: **تُصمَّمُ إحدى ألعاب الحاسوب بحيث تبدأ بصورة مستطيلة بعداها 60 بكسل في 20 بكسل. ثم يزداد كل بُعد بمقدار 15 بكسل لكل ثانية.**

a) أوجد دالتين تعطي إحداهما مساحة المستطيل A كدالة في عرضه L ، وتعطي الأخرى عرضه بعد t ثانية.

حيث إن طول المستطيل يزيد على عرضه بمقدار 40 بكسل؛ لذا يمكننا كتابة الطول على الصورة $L + 40$. أي أن مساحة المستطيل $A(L) = L(L+40) = L^2 + 40L$ ، حيث $L \geq 20$. وبما أن عرض المستطيل يزداد بمقدار 15 بكسل في الثانية الواحدة، إذن: $L(t) = 20 + 15t$ ، حيث t الزمن بالثواني $t \geq 0$.

b) أوجد $A \circ L$. وماذا تمثل هذه الدالة؟

$A \circ L = A[L(t)]$	تعريف $A \circ L$
$= A(20 + 15t)$	$L(t) = 20 + 15t$
$= (20 + 15t)^2 + 40(20 + 15t)$	عوّض $(20 + 15t)$ بدلًا من L في $A(L)$
$= 225t^2 + 1200t + 1200$	بسّط

تمثّل الدالة $A \circ L$ مساحة المستطيل كدالة في الزمن.

الربط مع الحياة

مؤثرات حركية

يعمل المصممون في العديد من الأعمال لتصميم مؤثرات حركية تستعمل في التلفاز وألعاب الفيديو؛ لذا يجب أن يكون مصممو الألعاب فنانين، ويتلقى أغلبهم تدريبًا في كليات متخصصة.

تنويع التعليم

دون

المتعلمون الحركيون: قسّم الطلاب إلى مجموعات عدد عناصرها من 2 إلى 4. واكتب الأعداد الصحيحة من 10– إلى 10 على بطاقات رقمية منفصلة. واطلب إلى أحدهم القيام بدور استقبال للدالة الأولى في الدالة المركبة ، ويقوم باقي الطلاب بتمرير البطاقات الرقمية إلى موظف الاستقبال الذي يقوم بدوره برفض البطاقة أو قبولها اعتمادًا على ما إذا كان رقم البطاقة عنصرًا من مجال الدالة الأولى أم لا. وبعد المراجعة يقوم طالب آخر بدور موظف استقبال للدالة الثانية. يمكن للطلاب تطبيق هذه الطريقة لتحديد مجال الدالة المركبة.

مثالان إضافيان

4 أوجد دالتين f و g بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$. وعلى ألّا تكون أيٌّ منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$.

a) $h(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$

إجابة ممكنة: $g(x) = x + 2$ ، $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

b) $h(x) = 3x^2 - 12x + 12$

إجابة ممكنة: $g(x) = x - 2$ ، $f(x) = 3x^2$

5 **رسوم متحركة:** صمم رسّام صورةً على شكل دائرة طول نصف قطرها 25 بكسل. ثم بدأ بزيادة طول نصف القطر بمقدار 10 بكسل في الثانية.

a) اكتب دوالَّ توضح عمل المصمّم.

$R(t) = 25 + 10t; A(R) = \pi R^2$

b) أوجد $A \circ R$. وماذا تمثل هذه الدالة؟

$A \circ R = 100\pi t^2 + 500\pi t + 625\pi$

الدالة تمثل مساحة الدائرة كدالة في الزمن.

c) ما الوقت اللازم لتصبح مساحة الدائرة أربعة أضعاف مساحتها الأصلية؟ 2.5 ثانية

إجابات (تحقق من فهمك):

5A) $c(x) = x - 100$ ، $d(x) = 0.85x$

5B) $[c \circ d](x) = 0.85x - 100,$
$[d \circ c](x) = 0.85x - 85$
$[c \circ d](x)$ تمثل سعر الحاسوب بالاستفادة من الخصم أولًا ثم القسيمة، $[d \circ c](x)$ تمثل سعر الحاسوب بالاستفادة من القسيمة أولًا ثم الخصم.

5C) إجابة ممكنة: الاستفادة من الخصم أولًا ثم القسيمة أو $[c \circ d](x)$ يجعل السعر أقل. فمثلًا إذا أراد طالب شراء حاسوب سعره 1000 ريال، فإنه يدفع 750 ريالًا إذا استفاد من الخصم أولًا ثم القسيمة ، ويدفع 765 ريالًا إذا استفاد من القسيمة أولًا ثم الخصم.

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1–31 للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه!

خطأ شائع: في الأسئلة 11–20 إذا وجد الطلاب الدالة المركبة بشكل خاطئ بسبب التعويض غير الصحيح ، فأكد لهم أن الدالة الثانية تعوض في الدالة الأولى.

خطأ شائع: في الأسئلة 22–29 ، ذكّر الطلاب بأنه يوجد عدة حلول للمسألة الواحدة؛ لمساعدتهم على التحقق من صحة حلولهم؛ لذا اطلب إليهم إيجاد الدالة المركبة وطريقة إيجادها.

إجابات:

1) $(f+g)(x)=x^2+\sqrt{x}+4;$
المجال: $\{x \mid x \geq 0, x \in R\}$
$(f-g)(x)=x^2-\sqrt{x}+4$
المجال: $\{x \mid x \geq 0, x \in R\}$
$(f \cdot g)(x)=x^{\frac{5}{2}}+4x^{\frac{1}{2}}$
المجال: $\{x \mid x \geq 0, x \in R\}$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=x^{\frac{3}{2}}+4x^{-\frac{1}{2}}$
المجال: $\{x \mid x > 0, x \in R\}$

2) $(f+g)(x)=-x^3+x+5$
المجال: $\{x \mid x \in R\}$
$(f-g)(x)=-x^3-x+11$
المجال: $\{x \mid x \in R\}$
$(f \cdot g)(x)=-x^4+3x^3+8x-24$
المجال: $\{x \mid x \in R\}$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{8-x^3}{x-3}$
المجال: $\{x \mid x \neq 3, x \in R\}$

3) $(f+g)(x)=x^2+6x+8$
المجال: $\{x \mid x \in R\}$
$(f-g)(x)=x^2+4x+4$
المجال: $\{x \mid x \in R\}$
$(f \cdot g)(x)=x^3+7x^2+16x+12$
المجال: $\{x \mid x \in R\}$
$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=x+3$
المجال: $\{x \mid x \neq -2, x \in R\}$

c) كم من الوقت يلزم لتصبح مساحة المستطيل 3 أضعاف مساحته الأصلية؟

مساحة المستطيل الأصلي 60×20 وتساوي 1200 بكسل. وتصبح مساحة المستطيل 3 أضعاف مساحته الأصلية عندما $[A \circ L](t) = 225t^2 + 1200t + 1200 = 3600$. وبحل المعادلة بالنسبة إلى t تجد أن $t \approx 1.55$ أو $t = -6.88$. وبما أن الزمن السالب ليس جزءًا من مجال $L(t)$، وكذلك ليس جزءًا من مجال دالة التركيب، فإن مساحة المستطيل تتضاعف 3 مرات بعد 1.6 ثانية تقريبًا.

تحقق من فهمك

5) **أعمال:** أعلن محل تجاري عن خصم مقداره 15% على ثمن أجهزة الحاسوب لطلاب الجامعات، كما وزّع قسائم يستفيد حاملها بخصم مقداره 100 ريال من ثمن الحاسوب. انظر الهامش.

5A) عبّر عن هذه البيانات بدالتين c و d .

5B) أوجد $[c \circ d](x)$ و $[d \circ c](x)$. وماذا يعني كلٌّ منهما؟

5C) أي التركيبين $c \circ d$ أو $d \circ c$ يعطي سعرًا أقل؟ وضح إجابتك.

تدرب وحل المسائل

1-3 انظر الهامش.

أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x)$, $g(x)$ في كل مما يأتي، وحدد مجال كل من الدوال الناتجة: (مثال 1) 4-10 انظر ملحق الإجابات.

1) $f(x) = x^2 + 4$
$g(x) = \sqrt{x}$

2) $f(x) = 8 - x^3$
$g(x) = x - 3$

3) $f(x) = x^2 + 5x + 6$
$g(x) = x + 2$

4) $f(x) = x^2 + x$
$g(x) = 9x$

5) $f(x) = x - 7$
$g(x) = x + 7$

6) $f(x) = \frac{6}{x}$
$g(x) = x^3 + x$

7) $f(x) = \frac{x}{4}$
$g(x) = \frac{3}{x}$

8) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
$g(x) = 4\sqrt{x}$

9) $f(x) = \sqrt{x+8}$
$g(x) = \sqrt{x+5} - 3$

10) $f(x) = \sqrt{x+6}$
$g(x) = \sqrt{x-4}$

أوجد $[f \circ g](x)$, $[g \circ f](x)$, $[f \circ g](6)$ لكل زوج من الدوال الآتية. (مثال 2) 11-14 انظر ملحق الإجابات.

11) $f(x) = 2x - 3$
$g(x) = 4x - 8$

12) $f(x) = -2x^2 - 5x + 1$
$g(x) = -5x + 6$

13) $f(x) = x^2 - 16$
$g(x) = x^2 + 7x + 11$

14) $f(x) = 2 + x^4$
$g(x) = -x^2$

15-20 انظر ملحق الإجابات.

حدّد مجال $f \circ g$، ثم أوجد $f \circ g$ لكل زوج من الدوال الآتية: (مثال 3)

15) $f(x) = \frac{1}{x+1}$
$g(x) = x^2 - 4$

16) $f(x) = \frac{2}{x-3}$
$g(x) = x^2 + 6$

17) $f(x) = \sqrt{x+4}$
$g(x) = x^2 - 4$

18) $f(x) = \frac{5}{x}$
$g(x) = \sqrt{6-x}$

19) $f(x) = -\frac{4}{x}$
$g(x) = \sqrt{x+8}$

20) $f(x) = \sqrt{x+5}$
$g(x) = x^2 + 4x - 1$

21) **النظرية النسبية:** في النظرية النسبية، $m(v) = \frac{100}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ ، حيث c سرعة الضوء وتساوي 300 مليون متر في الثانية، و m كتلة جسم يسير بسرعة v متر في الثانية، وكتلته الأصلية 100 kg. (مثال 4) 21a-d انظر ملحق الإجابات.

a) هل توجد قيود على مجال الدالة m؟ برِّر إجابتك.

b) أوجد $m(10)$, $m(10000)$, $m(1000000)$.

c) صف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة $m(v)$ عندما تقترب v من c من اليسار.

d) اكتب الدالة على صورة تركيب دالتين.

62 الفصل 1 تحليل الدوال

تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1–31، 65–68، 73، 74–82
ضمن المتوسط	1–57 (فردي)، 58، 64، 65–68، 73، 74–82
فوق المتوسط	32–82

31a) $h[f(x)]$؛ تحسب العمولة بعد طرح الحد الأدنى المطلوب من المبيعات الفعلية.

22-29) انظر ملحق الإجابات.

أوجد دالتين f , g لكل مما يأتي بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$، على ألا تكون أيّ منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$. (مثال 4)

22) $h(x) = \sqrt{4x+2} + 7$

23) $h(x) = \frac{6}{x+5} - 8$

24) $h(x) = |4x+8| - 9$

25) $h(x) = [-3(x-9)]$

26) $h(x) = \sqrt{\frac{5-x}{x+2}}$

27) $h(x) = (\sqrt{x}+4)^3$

28) $h(x) = \frac{8}{(x-5)^2}$

29) $h(x) = \frac{\sqrt{4+x}}{x-2}$

30) **ميكانيكا الكم:** يُعطى طول الموجة λ لجسم كتلته m kg، ويتحرك بسرعة v متر في الثانية بالدالة $\lambda = \frac{h}{mv}$، حيث h ثابت يساوي $6.626 \cdot 10^{-34}$. **30b, d) انظر ملحق الإجابات.**

a) أوجد دالة تمثّل طول الموجة لجسم كتلته 25 kg بدلالة سرعته. $f(v) = \frac{h}{25v}$

b) هل توجد قيود على مجال الدالة؟ برر إجابتك.

c) إذا تحرك الجسم بسرعة 8 أمتار في الثانية، فأوجد طول الموجة بدلالة h. $\lambda = \frac{h}{200}$

d) اكتب الدالة في الفقرة a على صورة تركيب دالتين.

31) **وظائف:** يعمل شخص في قسم المبيعات في إحدى الشركات ويتقاضى راتبًا وعمولة سنوية مقدارها 4% من المبيعات التي تزيد قيمتها على 300000 ريال. افترض أن $f(x) = x - 300000$ ، $h(x) = 0.04x$. (مثال 5) **31a) انظر الهامش.**

a) إذا كانت قيمة المبيعات (x) تزيد على 300000 ريال، فهل تُمثّل العمولة بالدالة $f[h(x)]$ أم بالدالة $h[f(x)]$؟ برِّر إجابتك.

b) أوجد قيمة العمولة التي يتقاضاها الشخص، إذا كانت مبيعاته 450000 ريال في تلك السنة. **6000 ريال**

أوجد دالتين f , g لكلٍّ مما يأتي بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$، على ألا تكون أي من الدالتين الدالة المحايدة $I(x) = x$.

32-34) انظر الهامش.

32) $h(x) = \sqrt{x-1} - \frac{4}{x}$

33) $h(x) = \sqrt{-7x} + 9x$

34) $h(x) = \frac{x}{2x-1} + \sqrt{\frac{4}{x}}$

أوجد $f(0.5) , f(-6) , f(x+1)$ في كلٍّ مما يأتي مقربًا الناتج إلى أقرب جزء من عشرة إذا لزم ذلك: **35-37) انظر الهامش.**

35) $f(x) - g(x) = x^2 + x - 6, g(x) = x + 4$

36) $f(x) + g(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{3}, g(x) = 2x$

37) $g(x) = f(x) - 18x^2 + \frac{\sqrt{2}}{x}, g(x) = \sqrt{1-x}$

أوجد $[f \circ g \circ h](x)$ في كل مما يأتي: **38, 39) انظر الهامش.**

38) $f(x) = x + 8$
$g(x) = x^2 - 6$
$h(x) = \sqrt{x} + 3$

39) $f(x) = \sqrt{x+5}$
$g(x) = x^2 - 3$
$h(x) = \frac{1}{x}$

40) إذا كانت $f(x) = x + 2$ ، فأوجد $g(x)$ في كل حالة مما يأتي:

a) $(f+g)(x) = x^2 + x + 6$ **$g(x) = x^2 + 4$**

b) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{4}$ **$g(x) = 4x + 8$**

41) إذا كانت $f(x) = \sqrt{4x}$ ، فأوجد $g(x)$ في كلٍّ حالة مما يأتي:

a) $[f \circ g](x) = |6x|$ **$g(x) = 9x^2$**

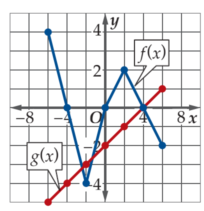
b) $[g \circ f](x) = 200x + 25$ **$g(x) = 50x^2 + 25$**

42) إذا كان $f(x) = 4x^2$ ، فأوجد $g(x)$ في كلٍّ حالة مما يأتي:

a) $[f \cdot g](x) = x$ **$g(x) = \frac{1}{4x}$**

b) $[f \cdot g](x) = 4x$ **$g(x) = \frac{1}{x}$**

باستعمال منحنيي الدالتين $f(x) , g(x)$ الممثلين في الشكل أدناه، أوجد:



43) $(f+g)(2)$ **1**

44) $(f-g)(-6)$ **9**

45) $(f \cdot g)(4)$ **0**

46) $\left(\frac{f}{g}\right)(-2)$ **$\frac{4}{3}$**

47) $(f \circ g)(-4)$ **0**

48) $(g \circ f)(6)$ **−3**

إجابات:

32-37) إجابات ممكنة للمسائل.

32) $f(x) = x - \frac{4}{x^2+1}; g(x) = \sqrt{x-1}$

33) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{9x}{7}; g(x) = -7x$

34) $f(x) = \frac{x-4}{2x-9} + \sqrt{\frac{4}{x-4}};$
$g(x) = x + 4$

35) $f(0.5) = -0.75, f(-6) = 22,$
$f(x+1) = x^2 + 4x + 1$

36) $f(0.5) = 8.7, f(-6) = 11.6,$
$f(x+1) = \frac{2}{x^2+2x+1} + \frac{1}{x+1} - 2x - \frac{7}{3}$

37) $f(0.5) = 2.4, f(-6) = 650.9,$
$f(x+1) = \sqrt{-x} + 18x^2 + 36x + 18 - \frac{\sqrt{2}}{x+1}$

38) $[f \circ g \circ h](x) = x + 6\sqrt{x} + 11$

39) $[f \circ g \circ h](x) = \sqrt{\frac{1}{x^2} + 2}$

49a) $\{m | m > 0, m \in R\}$؛ لا يمكن أن تكون كتلة جسم ما سالبة أو صفرًا.

49b) 7.22 m/s تقريبًا

49c) تتناقص سرعتها.

49d) إجابة ممكنة:
$v(m) = f(g(x)); f(m) = \sqrt{m}$
$g(m) = \frac{(24.9435)(303)}{m}$

50) $f(x) = x^2; g(x) = \sqrt{x} + 4;$
$h(x) = x - 7$

51) $f(x) = \sqrt{x}; g(x) = x^2 + 8;$
$h(x) = x - 5$

52) $f(x) = \frac{3}{x}; g(x) = x^2 + 4;$
$h(x) = x - 3$

53) $f(x) = \frac{4}{x+1}; g(x) = x^2;$
$h(x) = \sqrt{x} + 3$

تنويع التعليم

ضمن فوق

المتعلمون الفرديون: اطلب إلى الطلاب استعمال المكتبة أو الإنترنت لإيجاد أمثلة تطبيقية على استعمال العمليات على الدوال وتركيبها. بعد تحديد الأمثلة، عليهم تطوير أمثلة من واقع الحياة خاصة بهم على أن يقوم كل طالب بتكوين مثال باستعمال إحدى العمليات ، ومثال آخر باستعمال تركيب الدوال.

49) **كيمياء:** إذا كان $v(m)$ معدل سرعة جزيئات غاز عند درجة $30°C$ بالمتر لكل ثانية تُعطى بالدالة $v(m) = \sqrt{\frac{(24.9435)(303)}{m}}$، حيث m الكتلة المولية للغاز مقاسة بالكيلوجرام لكل مول. **(49a-d) انظر الهامش.**

a) هل توجد قيود على مجال الدالة؟ فسِّر معناها.

b) أوجد معدل سرعة جزيئات الغاز إذا كانت كتلته المولية 145 كيلوجرامًا لكل مول عند درجة $30°C$.

c) كيف يتغير معدل سرعة جزيئات غاز عندما تزداد كتلة الغاز المولية؟

d) اكتب الدالة على صورة تركيب دالتين.

أوجد ثلاث دوال f, g, h، بحيث يكون $a(x) = [f \circ g \circ h](x)$ في كلٍّ مما يأتي: **(50-53) انظر الهامش.**

50) $a(x) = (\sqrt{x-7} + 4)^2$

51) $a(x) = \sqrt{(x-5)^2 + 8}$

52) $a(x) = \frac{3}{(x-3)^2 + 4}$

53) $a(x) = \frac{4}{(\sqrt{x}+3)^2 + 1}$

أوجد $f \circ g, g \circ f$ لكل زوج من الدوال الآتية، وحدّد أية قيود على مجال دالة التركيب في كل حالة: **(54-57) انظر ملحق الإجابات.**

54) $f(x) = x^2 - 6x + 5$، $g(x) = \sqrt{x+4} + 3$

55) $f(x) = \sqrt{x+6}$، $g(x) = \sqrt{16 + x^2}$

56) $f(x) = \sqrt{x}$، $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$

57) $f(x) = \frac{6}{2x+1}$، $g(x) = \frac{4}{4-x}$

58) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة سوف تستقصي الدالة العكسية. **انظر ملحق الإجابات.**

a) **جبريًا:** أوجد $f \circ g$ لكل زوج من الدوال في الجدول المجاور.

$f(x)$	$g(x)$
$x+3$	$x-3$
$4x$	$\frac{x}{4}$
x^3	$\sqrt[3]{x}$

b) **لفظيًا:** صف العلاقة بين تركيب كل زوج من الدوال.

c) **بيانيًا:** مثّل كل زوج من الدوال في المستوى الإحداثي نفسه، ثم ارسم محور الانعكاس بإيجاد منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقاط المتناظرة.

d) **لفظيًا:** خمّن معادلة محور الانعكاس.

e) **تحليليًا:** ما الدالة الرئيسة (الأم) التي تساوي كل من $[f \circ g](x), [g \circ f](x)$؟

f) **تحليليًا:** أوجد $g(x)$ بحيث يكون $[f \circ g](x) = [g \circ f](x) = x$ في كلٍّ مما يأتي.

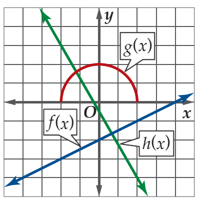
a) $f(x) = x - 6$

b) $f(x) = \frac{x}{3}$

c) $f(x) = x^5$

d) $f(x) = 2x - 3$

مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الشكل المجاور. ففي السؤال 60 مثّل الدوال $f, h, f+h$ في المستوى الإحداثي نفسه، وهكذا في الأسئلة 61-63:



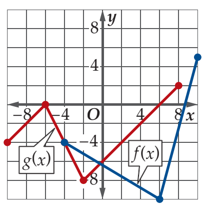
59) $(f+h)(x)$ **انظر ملحق الإجابات.**

60) $(h-f)(x)$

61) $(f+g)(x)$

62) $(h+g)(x)$

حدّد مجال كل من دالتي التركيب الآتيتين، باستعمال الشكل الآتي:



(63, 64) انظر الهامش.

63) $(f \circ g)(x)$

64) $(g \circ f)(x)$

مسائل مهارات التفكير العليا

تبرير: في كلٍّ مما يأتي، حدّد ما إذا كانت الدالة $(f \circ g)(x)$ زوجية، أم فردية أم غير ذلك.

65) الدالتان f, g فرديتان. **فردية**

66) الدالتان f, g زوجيتان. **زوجية**

67) f زوجية، g فردية. **زوجية**

68) f فردية، g زوجية. **زوجية**

تمثيلات متعددة

السؤال 58 يستعمل الطلاب التحليل الجبري والتعبير اللفظي والتمثيل البياني لاستقصاء الدالة العكسية.

4 التقويم

تعلم سابق اطلب إلى الطلاب الكتابة حول ما تعلموه في الدرس 5 – 1 عن الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية عليها، وكيف ساعدتهم هذه المعلومات في تعلم العمليات على الدوال.

التقويم التكويني

تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرسين 1–5, 1–6 بإعطائهم:

الاختبار القصير 3، ص (12)

إجابات:

63) $g(x)$ و $f(x)$ معرّفة على $[-10, 8]$ غير معرفة عند قيم $g(x)$ حيث $x \in (-4, 2)$، لذا فإن مجال الدالة هو: $\{x \mid -10 \le x \le -4$ أو $2 \le x \le 8, x \in R\}$

64) $f(x)$ معرّفة على $[-4, 10]$ و $g(x)$ معرفة عند جميع قيم $f(x)$، لذا فإن مجال الدالة $(g \circ f)(x)$ هو: $\{x \mid -4 \le x \le 10, x \in R\}$

تنويع التعليم

فوق

توسّع: اطلب إلى الطلاب استعمال دالة واحدة لإيجاد تركيب الدالة مع نفسها حيث تُسمى هذه العملية التكرار. وإذا كانت $f(x)$ دالة، و x_0 قيمة ابتدائية، فعندئذٍ تُسمَّى $f(x_0) = x_1$ التكرار الأول، وتُسمى $f(f(x_0)) = f(x_1) = x_2$ التكرار الثاني وهكذا، اطلب إلى كل طالب إيجاد التكرار الثالث لدالته.

تحدَّ: في كل مما يأتي، أوجد دالة f لا تساوي الدالة $I(x) = x$ بحيث تحقق الشرط المعطى. **69-72 انظر الهامش.**

69) $(f \cdot f)(x) = x$

70) $(f + f)(x) = x$

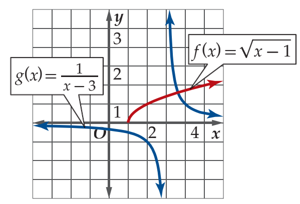
71) $[f \circ f](x) = x$

72) $[f \circ f \circ f](x) = x$

73) **تبرير:** حدّد ما إذا كانت الجملة الآتية صحيحة أحيانًا، أم صحيحة دائمًا، أم ليست صحيحة أبدًا. وبرِّر إجابتك.

"إذا كانت f دالة جذر تربيعي و g دالة تربيعية، فإن $f \circ g$ دالة خطية". **انظر ملحق الإجابات.**

74) **اكتب:** كيف تحدد مجال الدالة $[f \circ g](x)$ باستعمال الشكل الآتي: **انظر ملحق الإجابات.**



مراجعة تراكمية

أوجد القيم القصوى المحلية والمطلقة لكلٍّ من الدوال الآتية مقرَّبة إلى أقرب جزء من مئة، ثم حدِّد قيم x التي تقع عندها هذه القيم: (الدرس 1-4)

75) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$ **75-77 انظر الهامش.**

76) $g(x) = -x^3 + 5x - 3$

77) $f(x) = x^4 + x^3 - 2$

حدِّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية لكل دالة مما يأتي في الفترة المعطاة: (الدرس 1-3)

78) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 4}, [-3, 3]$ **بين −2 وَ −1 ، وبين 1 وَ 2**

79) $g(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 3x}, [1, 5]$ **بين 2 وَ 3**

80) **علاقة:** في إحصائية أجريت لعدد الموظفين من الجنسين في أحد المستشفيات لعدة سنوات متتالية، كانت نتائجها كما في الجدول الآتي: (الدرس 1-1)

السنة	1427	1428	1429	1430	1431
عدد الإناث (x)	43	48	54	54	48
عدد الذكور (y)	150	148	137	156	146

a) مثّل البيانات التي تربط عدد الإناث بعدد الذكور والموجودة في الجدول بيانيًّا. **80a-c انظر الهامش**

b) اكتب مجال العلاقة ومداها.

c) هل تمثّل هذه العلاقة دالة؟ برِّر إجابتك.

تدريب على اختبار

81) إذا كانت $g(x) = x^2 + 9x + 21$ ، $h(x) = 2(x-5)^2$ ، فإن $h[g(x)]$ تساوي: **B**

A $x^4 + 18x^3 + 113x^2 + 288x + 256$

B $2x^4 + 36x^3 + 226x^2 + 576x + 512$

C $3x^4 + 54x^3 + 339x^2 + 864x + 768$

D $4x^4 + 72x^3 + 452x^2 + 1152x + 1024$

82) إذا كان $g(2)=5$, $f(3)=4$, $g(3)=2$, $f(2)=3$، فما قيمة $[f \circ g](3)$؟ **B**

A 2 **C** 4

B 3 **D** 5

إجابات:

69) إجابة ممكنة: $f(x) = \sqrt{x}$.

70) إجابة ممكنة: $f(x) = \frac{x}{2}$

71) إجابة ممكنة: $f(x) = \frac{1}{x}$

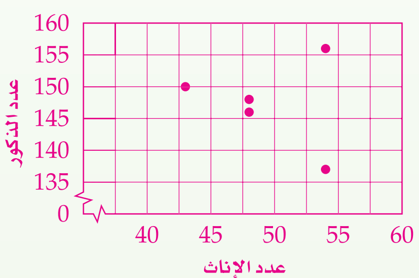
72) إجابة ممكنة: $f(x) = |x|$

75) $(0, 4)$ عظمى محلية، $(1, 3)$ صغرى محلية.

76) $(1.29, 1.3)$ عظمى محلية، $(-1.29, -7.3)$ صغرى محلية.

77) $(-0.75, -2.11)$ عظمى مطلقة.

80a)



80b) المجال: $\{43, 48, 54\}$
المدى: $\{137, 146, 148, 150, 156\}$

80c) لا، ترتبط القيمتان 48 وَ 54 من المجال بقيمتين من المدى.

الدرس 1-6 العمليات على الدوال وتركيب دالتين 65

1 التركيز

الترابط الرأسي

ما قبل الدرس 1-7

إيجاد تركيب دالتين .

الدرس 1-7

استعمال الخط الأفقي على منحنى الدالة؛ لتحديد إن كانت العلاقة العكسية تمثل دالة أم لا .

إيجاد الدالة العكسية جبريًّا وبيانيًّا.

ما بعد الدرس 1-7

تحليل التمثيلات البيانية لدوال كثيرات الحدود. والدوال النسبية.

2 التدريس

أسئلة التعزيز

اطلب إلى الطلاب قراءة فقرة "لماذا؟".

واسأل:

- ما الدالة التي تعطي مساحة المربع؟ $A(s) = s^2$
- إذا كان طول ضلع مربع 5 وحدات، فأوجد مساحته. 25 وحدة مربعة
- اكتب دالة لحساب طول ضلع المربع إذا عُلمت مساحته. ثم أوجد طول ضلع مربع مساحته 100. $S = \sqrt{A}$; 10
- اكتب دالة لحساب المسافة إذا كانت السرعة ثابتة، والزمن متغيرًا ، ثم اكتب دالة لإيجاد الزمن إذا كانت المسافة متغيرة، والسرعة ثابتة. المسافة: $d = f(t) = rt$، الزمن: $t = f(d) = \frac{d}{r}$

1-7 العلاقات والدوال العكسية
Inverse Relations and Functions

فيما سبق:

درستُ إيجاد تركيب دالتين.
(الدرس 6–1)

والآن:

- أستعملُ اختبار الخط الأفقي على منحنى الدالة لتحديد إن كانت العلاقة العكسية تمثل دالة أم لا.
- أجدُ الدالة العكسية جبريًّا وبيانيًّا.

المفردات:

العلاقة العكسية
inverse relation

الدالة العكسية
inverse function

الدالة المتباينة
one-to-one function

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

يربط الجدول A عدد تذاكر دخول مدينة ألعاب بسعرها، في حين يربط الجدول B السعر بعدد التذاكر. لاحظ أن تبديل صفي الجدول A يُعطي الجدول B.

الجدول A

عدد التذاكر	1	2	3	4	5
السعر بالريال	5	10	15	20	25

الجدول B

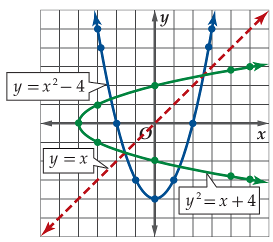
السعر بالريال	5	10	15	20	25
عدد التذاكر	1	2	3	4	5

الدالة العكسية: العلاقة في الجدول A تمثل علاقة عكسية للعلاقة في الجدول B. يقال: إن العلاقة A **علاقة عكسية** للعلاقة B إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: إذا كان الزوج المرتب (b, a) موجودًا في إحدى العلاقتين، فإن (a, b) يكون موجودًا في الأخرى. وإذا مُثِّلت العلاقة بمعادلة، فيمكن إيجاد علاقتها العكسية بتبديل المتغير المستقل بالمتغير التابع، فمثلًا

العلاقة

$y = x^2 - 4$

x	y
−3	5
−2	0
−1	−3
0	−4
1	−3
2	0
3	5



العلاقة العكسية

$y^2 = x + 4$ أو $x = y^2 - 4$

x	y
5	−3
0	−2
−3	−1
−4	0
−3	1
0	2
5	3

لاحظ أن كل علاقة من هاتين العلاقتين المتعاكستين هي انعكاس للأخرى حول المستقيم $y = x$. هذه العلاقة صحيحة بين كل منحنيات العلاقات ومنحنيات علاقاتها العكسية.

يتضح من تعريف العلاقة العكسية أنه لكل علاقة يوجد علاقة عكسية، إلا أن اهتمامنا ينصب على الدوال التي تمثّل علاقاتها العكسية دوالَّ. فإذا كانت العلاقة العكسية لدالة f تمثّل دالة سميت **الدالة العكسية** لـf، ويرمز لها بالرمز f^{-1}.

لاحظ في التمثيل البياني أعلاه أن العلاقة الأصلية دالة؛ لأنها تحقق اختبار الخط الرأسي، إلا أن علاقتها العكسية لا تحقق هذا الاختبار فهي ليست دالة. وبشكل عام، ليس من الضروري أن تكون العلاقة العكسية دالة.

يقودنا تمثيل العلاقة وعلاقتها العكسية إلى اختبار آخر لتحديد وجود دالة عكسية.

قراءة الرياضيات

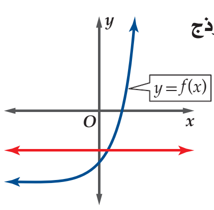
رمز الدالة العكسية: يجب ألا يحدث لبس بين رمز الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ ومقلوب الدالة $\frac{1}{f(x)}$.

مفهوم أساسي — اختبار الخط الأفقي

التعبير اللفظي: يوجد للدالة f دالة عكسية f^{-1} إذا وفقط إذا كان كل خط أفقي يتقاطع مع منحنى الدالة عند نقطة واحدة على الأكثر.

مثال: بما أنه لا يوجد خط أفقي يقطع منحنى الدالة f بأكثر من نقطة، فإن الدالة العكسية f^{-1} موجودة.

نموذج



مصادر الدرس 1-7

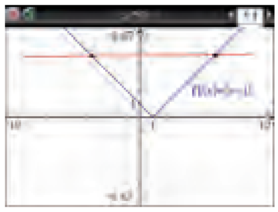
المصدر	دون المتوسط	ضمن المتوسط	فوق المتوسط
دليل المعلم	• تنويع التعليم ص (70)	• تنويع التعليم ص (70)	• تنويع التعليم ص (73)
كتاب التمارين	• ص (10)	• ص (10)	• ص (10)
مصادر المعلم للأنشطة الصفية	• تدريبات إعادة التعليم، ص (30) • تدريبات حل المسألة، ص (32)	• تدريبات حل المسألة، ص (32) • التدريبات الإثرائية، ص (33)	• تدريبات حل المسألة، ص (32) • التدريبات الإثرائية، ص (33)

> **تنبيه!**
> **اختبار الخط الأفقي** عند استعمال الحاسبة البيانية، اختبر بدقة المواقع التي يفشل فيها اختبار الخط الأفقي باستعمال 4: تكبير/تصغير النافذة
> واختر منها 3: تكبير
> أو 4: تصغير
> أو اضبط الشاشة للتأكد.

مثال 1 تطبيق اختبار الخط الأفقي

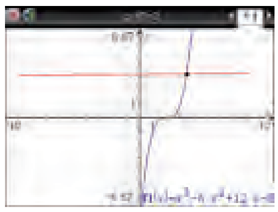
مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانيّة، ثم طبّق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة أم لا.

a) $f(x) = |x-1|$



يوضّح التمثيل البياني للدالة في الشكل المجاور أنه من الممكن إيجاد خط أفقي يقطع منحنى $f(x)$ في أكثر من نقطة، وعليه فإن f^{-1} غير موجودة.

b) $g(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$



يوضّح التمثيل البياني للدالة $g(x)$ في الشكل المجاور أنه من غير الممكن إيجاد خط أفقي يقطع منحنى الدالة $g(x)$ في أكثر من نقطة، وعليه فإن g^{-1} موجودة.

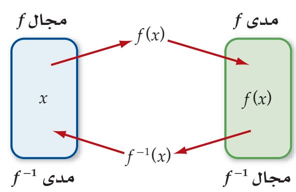
تحقق من فهمك

1A) $h(x) = \frac{4}{x}$ نعم

1B) $f(x) = x^2 + 5x - 7$ لا

إيجاد الدالة العكسية: إذا حقّقت الدالة اختبار الخط الأفقي سُميت **دالة متباينة**؛ لأن كل قيمة لـ x ترتبط بقيمة واحدة فقط لـ y. ولا توجد قيمة لـ y ترتبط بأكثر من قيمة لـ x.

إذا كانت الدالة متباينة، فإن لها دالة عكسية على أن يكون مجال f مساويًا لمدى f^{-1} ومدى f مساويًا لمجال f^{-1}.



لإيجاد الدالة العكسية جبريًّا، نتبع الخطوات الآتية:

مفهوم أساسي إيجاد الدالة العكسية

الخطوة 1: تحقّق من وجود دالة عكسية للدالة المعطاة بالتحقق من أنها متباينة بالاعتماد على اختبار الخط الأفقي.

الخطوة 2: ضع y مكان $f(x)$، ثم بدّل موقعي x, y.

الخطوة 3: حل المعادلة بالنسبة للمتغير y، ثم ضع $f^{-1}(x)$ مكان y.

الخطوة 4: اذكر أية شروط على مجال f^{-1}. وبيّن أن مجال f يساوي مدى f^{-1}، وأن مدى f يساوي مجال f^{-1}.

يظهرُ من الخطوة الأخيرة أن جزءًا فقط من الدالة التي أوجدتها جبريًّا قد يكون دالة عكسية للدالة f؛ لذا يجب دراسة مجال f عند إيجاد f^{-1}.

الدوال العكسية

مثال 1 يبيِّن كيفية اختبار لتحديد وجود دالة عكسيَّة بيانيًّا.

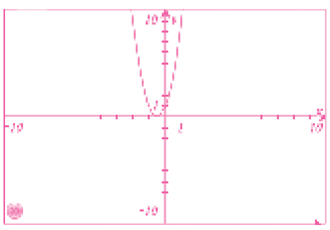
التقويم التكويني

استعمل تدريبات "تحقق من فهمك" بعد كل مثال؛ للتحقق من مدى فهم الطلاب للمفاهيم.

مثال إضافي

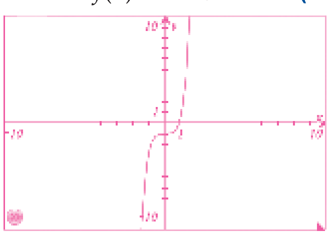
1 مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الآلة الحاسبة البيانية، ثم طبّق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة أم لا؟

a) $y = 4x^2 + 4x + 1$



لا

b) $f(x) = x^5 + x^3 - 1$



نعم

إيجاد الدوال العكسية

مثال 2 يبيِّن كيفية إيجاد الدالة العكسية جبريًّا.

مثال 3 يبيِّن كيفية التحقق من أن دالتين متعاكستان.

مثال 4 يبيِّن كيفية إيجاد معكوس دالة هندسيًّا.

مثال 5 يبيِّن كيفية استعمال الدوال العكسية.

مثال إضافي

2 في كل مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن، وحدد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب غير موجودة.

(a $f(x) = \frac{x}{2x-1}$، f^{-1} موجودة ، $f^{-1}(x) = \frac{x}{2x-1}$

(b $f(x) = 2\sqrt{x-1}$، f^{-1} موجودة ومجالها $[0, \infty)$ ، $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{4} + 1$

التعليم باستعمال التقنيات

الحاسبة البيانية: قسِّم الطلاب إلى مجموعات ثنائية بحيث تستعمل كل مجموعة حاسبة بيانية واحدة ، على أن يقوم أحدهما باختيار دالة لها معكوس، ويقوم الثاني بتمثيلها ، فإذا حققت الدالة اختبار الخط الأفقي. يقوم الطالب الأول بإيجاد الدالة العكسية جبريًّا ، ويقوم الثاني بتمثيلها؛ للتحقق من أنها هي ومعكوسها متماثلان حول المستقيم $y = x$. اطلب إلى المجموعات أن تتبادل الأدوار فيما بينها ، ويتعين على كل منها أن تجد أربع دوال لكلٍّ منها معكوس.

مثـال 2 إيجاد الدالة العكسية جبريًّا

قراءة الرياضيات

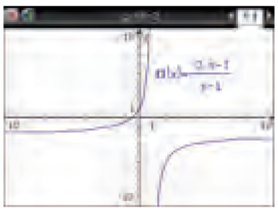
الدوال القابلة للعكس: يقال للدالة التي تكون دالتها العكسية موجودة: دالة قابلة للعكس.

في كل مما يأتي أوجد الدالة العكسية f^{-1} إن أمكن، وحدد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب غير موجودة.

(a $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$

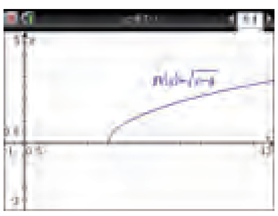
يوضّح التمثيل البياني المجاور أن منحنى الدالة يحقق اختبار الخط الأفقي؛ لذا فإن f دالة متباينة، وعليه فإن لها دالة عكسية. مجال الدالة f هو $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$ ، ومداها هو $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.
والآن أوجد f^{-1} .

$f(x) = \frac{x-1}{x+2}$	الدالة الأصلية
$y = \frac{x-1}{x+2}$	عوّض y بدلًا من $f(x)$
$x = \frac{y-1}{y+2}$	بدّل بين x, y
$xy + 2x = y - 1$	اضرب الطرفين في $(y+2)$ ، ثم طبق خاصية التوزيع
$xy - y = -2x - 1$	ضع الحدود التي تحوي y في طرف واحد
$y(x-1) = -2x - 1$	خاصية التوزيع
$y = \frac{-2x-1}{x-1}$	حل بالنسبة لـ y
$f^{-1}(x) = \frac{-2x-1}{x-1}$	عوّض $f^{-1}(x)$ بدلًا من y ، لاحظ أن $x \neq 1$



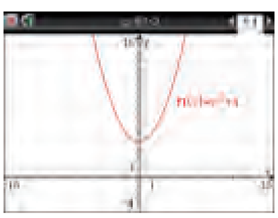
يظهر من التمثيل البياني أن مجال f^{-1} هو $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ ، ومداها هو $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$. أي أن مجال ومدى f يساويان مدى ومجال f^{-1} على الترتيب.
لذا لا حاجة لفرض قيود على مجال f^{-1} .

(b $f(x) = \sqrt{x-4}$



يوضّح الشكل المجاور أن منحنى الدالة يحقق اختبار الخط الأفقي؛ لذا فإن الدالة f متباينة، وعليه فإن لها دالة عكسية. مجال الدالة f هو $[4, \infty)$ ومداها $[0, \infty)$. أوجد f^{-1} .

$f(x) = \sqrt{x-4}$	الدالة الأصلية
$y = \sqrt{x-4}$	عوّض y بدلًا من $f(x)$
$x = \sqrt{y-4}$	بدّل بين x و y
$x^2 = y - 4$	ربّع الطرفين
$y = x^2 + 4$	حل بالنسبة إلى y
$f^{-1}(x) = x^2 + 4$	عوّض $f^{-1}(x)$ بدلًا من y



يظهر من التمثيل البياني المجاور أن مجال f^{-1} هو $(-\infty, \infty)$ ، ومداها $[4, \infty)$. ومن ثم فإننا نفرض قيودًا على مجالها بحيث يكون مساويًا لمدى f وهو $[0, \infty)$، ويبقى مداها $[4, \infty)$. والآن يصبح مجال f ومداها مساويان لمدى f^{-1} ومجالها على الترتيب؛ لذا فإن $f^{-1}(x) = x^2 + 4$ ومجالها $\{x \mid x \geq 0, x \in R\}$.

تحقق من فهمك

(2A $f(x) = -16 + x^3$ $\quad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+16}$ (2A

(2B $f(x) = \frac{x+7}{x}$ $\quad f^{-1}(x) = \frac{7}{x-1}; x \neq 1$

(2C $f(x) = \sqrt{x^2 - 20}$ $\quad$ غير موجودة

إن الدالة العكسية f^{-1} تلغي عمل الدالة f والعكس صحيح؛ لذا فإنه يمكننا تعريف الدوال العكسية باستعمال عملية التركيب بينهما.

مفهوم أساسي **تركيب الدالة ودالتها العكسية**

تكون كل من الدالتين f و f^{-1}، دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان:

- $f[f^{-1}(x)] = x$ لجميع قيم x في مجال $f^{-1}(x)$.
- $f^{-1}[f(x)] = x$ لجميع قيم x في مجال $f(x)$.

لاحظ أن تركيب f و f^{-1} هو الدالة المحايدة. وتُستعملُ هذه الحقيقة للتحقق من أن كلًا من الدالتين دالة عكسية للأخرى.

مثال 3 إثبات أن كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى

أثبت جبريًّا أن كلًّا من الدالتين $f(x) = \frac{6}{x-4}$ و $g(x) = \frac{6}{x} + 4$ دالة عكسية للأخرى.

أثبت أن $f[g(x)] = x$ وَ $g[f(x)] = x$.

$$f[g(x)] = f\left(\frac{6}{x} + 4\right) = \frac{6}{\left(\frac{6}{x}+4\right) - 4} = \frac{6}{\left(\frac{6}{x}\right)} = x$$

$$g[f(x)] = g\left(\frac{6}{x-4}\right) = \frac{6}{\left(\frac{6}{x-4}\right)} + 4 = x - 4 + 4 = x$$

بما أن $f[g(x)] = g[f(x)] = x$، فإن كلًّا من الدالتين $f(x), g(x)$ تكون دالة عكسية للأخرى. ويؤكد التمثيل البياني المجاور هذه الإجابة حيث تنتج كل دالة من الأخرى بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.

تحقق من فهمك

أثبت جبريًّا أن كلًّا من الدالتين f, g تمثل دالة عكسية للأخرى في كل مما يأتي:

3A) $f(x) = 18 - 3x,\ g(x) = 6 - \frac{x}{3}$

3B) $f(x) = x^2 + 10,\ x \geq 0,\ g(x) = \sqrt{x - 10}$

3A) $f(g(x)) = 18 - 3\left(6 - \frac{x}{3}\right) = 18 - 18 + x = x;$
$g(f(x)) = 6 - \frac{18-3x}{3} = 6 - 6 + x = x$

3B) $f(g(x)) = \left(\sqrt{x-10}\right)^2 + 10 = x - 10 + 10 = x;$
$g(f(x)) = \sqrt{x^2 + 10 - 10} = x$

من الصعب إيجاد الدالة العكسية جبريًّا لمعظم الدوال المتباينة، إلا أنه يمكننا تمثيل منحنى الدالة العكسية بانعكاس الدالة الأصلية حول المستقيم $y = x$.

إرشادات للدراسة

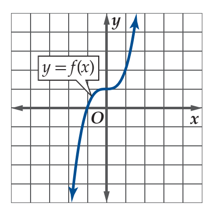
الدالة العكسية والقيم القصوى

يكون للدالة المتصلة دالة عكسية، إذا وفقط إذا لم يكن لها قيم عظمى أو صغرى محلية. فإذا كان للدالة قيم عظمى أو صغرى محلية فإن الدالة تفشل باختبار الخط الأفقي، ومن ثم لا تكون دالة متباينة.

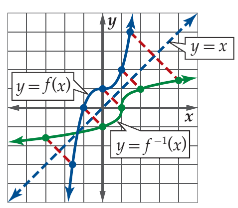
مثال 4 إيجاد الدالة العكسية بيانيًّا

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x)$ في الشكل 1.7.3 لتمثيل $f^{-1}(x)$.

مثِّل بيانيًّا المستقيم $y = x$. وعيّن بعض النقاط على منحنى $f(x)$. أوجد صور هذه النقاط بالانعكاس حول المستقيم $y = x$. ثم صل بينها بمنحنى كصورة في مرآة لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المستقيم $y = x$ (الشكل 1.7.4).



الشكل 1.7.3



الشكل 1.7.4

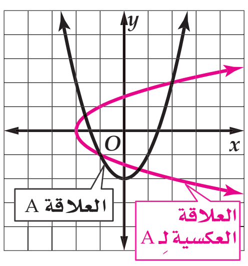
مثالان إضافيان

3 أثبت جبريًّا أن كلًّا من الدالتين $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$، $g(x) = \frac{3}{2}(x-2)$ دالة عكسية للأخرى.

$f(g(x)) = f\left(\frac{3}{2}(x-2)\right)$
$= \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}(x-2)\right) + 2$
$= x - 2 + 2$
$= x$

$g(f(x)) = g\left(\frac{2}{3}x + 2\right)$
$= \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}x + 2 - 2\right)$
$= \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}x\right)$
$= x$

4 استعمل التمثيل البياني للعلاقة A لتمثيل معكوسها.



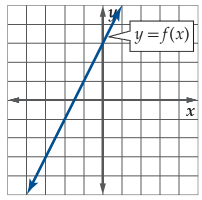
المحتوى الرياضي

اختبار الخط الأفقي التمثيل البياني للدالة العكسية هو انعكاس للتمثيل البياني للدالة الأصلية في المستقيم $y = x$. وبما أن اختبار الخط الرأسي يختبر إن كانت العلاقة دالة أم لا، فيمكن إيجاد صورة الخط الرأسي بالانعكاس في المستقيم $y = x$. وصورة ناتج هذا الانعكاس هو خط أفقي يمكن استعماله في اختبار إن كان للدالة معكوس.

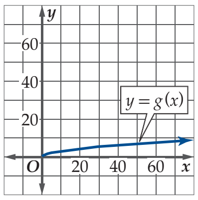
تحقق من فهمك

استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي لتمثيل الدالة العكسية لها بيانيًا: **4A-B) انظر الهامش.**

4A)



4B)



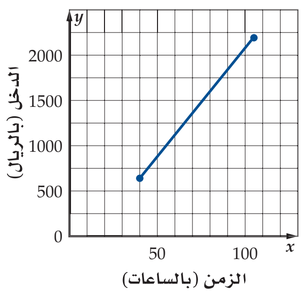
مثال 5 من واقع الحياة — استعمال الدالة العكسية

الربط مع الحياة

ينص نظام العمل في المملكة على أنه "لا يجوز تشغيل العامل تشغيلًا فعليًا أكثر من 8 ساعات في اليوم الواحد إذا اعتمد صاحب العمل المعيار اليومي، أو أكثر من 48 ساعة إذا اعتمد المعيار الأسبوعي".

أعمال: يتقاضى شخص 16 ريالًا عن كل ساعة عمل، ويعمل في الأسبوع عددًا من الساعات لا يقل عن 40 ساعة ولا يزيد على 105 ساعات، ويتقاضى أجرًا إضافيًا مقداره 24 ريالًا عن كل ساعة عمل إضافية تزيد على الـ 40 ساعة. ويمكن حساب دخله الأسبوعي مقابل x ساعة عمل بالدالة $f(x) = 640 + 24(x - 40)$.

الدخل الأسبوعي لعامل



a) أثبت أن $f^{-1}(x)$ موجودة، ثمَّ أوجدها.

يمكننا تبسيط الدالة لتصبح $f(x) = 640 + 24x - 960$ أو $f(x) = 24x - 320$.

يحقق منحنى الدالة $f(x)$ اختبار الخط الأفقي؛ لذا فإن الدالة $f(x)$ متباينة، وعليه تكون دالتها العكسية موجودة. أوجد $f^{-1}(x)$:

$f(x) = 24x - 320$	الدالة الأصلية
$y = 24x - 320$	عوّض y بدلًا من $f(x)$
$x = 24y - 320$	بدّل بين x و y
$x + 320 = 24y$	أضف 320 إلى الطرفين
$y = \frac{x + 320}{24}$	حل بالنسبة إلى y
$f^{-1}(x) = \frac{x + 320}{24}$	عوّض $f^{-1}(x)$ بدلًا من y

b) ماذا تمثّل كل من x و $f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية؟

في الدالة العكسية تمثّل x الدخل الأسبوعي بالريال، وتمثّل $f^{-1}(x)$ عدد ساعات العمل الأسبوعية.

c) حدّد القيود المفروضة على مجال $f(x)$ ومجال $f^{-1}(x)$ إن وجدت؟ وضِّح إجابتك.

الحد الأدنى لساعات العمل الأسبوعية هو 40 ساعة. والحد الأعلى 105 ساعات؛ لذا فإن مجال $f(x)$ هو $[40, 105]$. و بما أن $f(40) = 640$ ، $f(105) = 2200$ ، فإن مدى $f(x)$ هو $[640, 2200]$ ، وهو مجال الدالة $f^{-1}(x)$.

d) أوجد عدد الساعات التي عملها الشخص في أسبوع كان دخله فيه 760 ريالًا.

$f^{-1}(760) = \frac{760 + 320}{24} = 45$ أي أن الشخص عمل 45 ساعة في هذا الأسبوع.

تحقق من فهمك

5) **توفير:** يتبقى لأحمد بعد سداد أقساط منزله وبعض الالتزامات 65% من راتبه الشهري، فإذا خصّص منها 1800 ريال لنفقات المعيشة، وقدّر أن بإمكانه توفير 20% من المبلغ المتبقي تقريبًا، فإن مقدار التوفير الشهري يعطى بالدالة: $f(x) = 0.2(0.65x - 1800)$ ، حيث x الراتب الشهري.

5A) أثبت أن $f^{-1}(x)$ موجودة، ثم أوجدها.

5B) ماذا تمثّل كل من x , $f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية؟

5C) حدد أية قيود على كل من مجال $f(x)$, $f^{-1}(x)$ إن وجدت. وبرِّر إجابتك.

5D) إذا وفّر أحمد 500 ريال في الشهر، فأوجد راتبه الشهري.

5A) يحقق منحنى الدالة اختبار الخط الأفقي، لذا فإن $f(x)$ دالة متباينة، وبذلك تكون دالتها العكسية موجودة، $f^{-1}(x) = \frac{x + 360}{0.13}$.

5B) في الدالة العكسية تمثل x مقدار التوفير الشهري، $f^{-1}(x)$ الراتب الشهري.

5C) $x \geq 2769.23$

5D) 6615.38 ريالًا تقريبًا

مثال إضافي

5) **صناعة:** تتكون تكلفة صناعة نوع من السيارات من قسمين ؛ ثابت ومقداره 96000 ريال، ومتغير مقداره 800 ريال عن كلِّ سيارة يتم صنعها. أي أن التكلفة الكلية $f(x)$ لصناعة x من السيارات يُعبر عنها بالدالة: $f(x) = 96000 + 800x$.

a) أثبت أن $f^{-1}(x)$ موجودة، ثم أوجدها.

تحقق الدالة $f^{-1}(x)$ اختبار الخط الأفقي. $f^{-1}(x) = \frac{x - 96000}{800}$

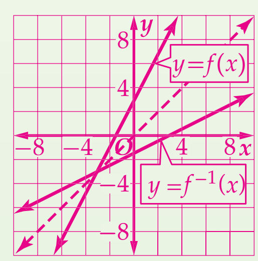
b) ماذا تمثّل كلٌّ من x و $f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية ؟ تمثل x التكلفة الكلية، بينما تمثل $f^{-1}(x)$ عدد السيارات.

c) حدد القيود المفروضة على مجال $f(x)$ ومجال $f^{-1}(x)$ إن وجدت؟ وضح إجابتك. يجب أن يكون مجال $f(x)$ الأعداد الصحيحة غير السالبة. ومجال $f^{-1}(x)$ من مضاعفات 800 وأكبر من 96000.

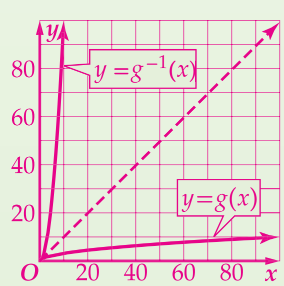
d) أوجد عدد السيارات إذا كانت التكلفة الكلية 216000 ريال. 150 سيارة

إجابات (تحقق من فهمك):

4A)



4B)



تنويع التعليم

دون — ضمن

المتعلمون الحركيون: اطلب إلى الطلاب تمثيل الدالة المحايدة $f(x) = x$ على مستوى بياني كبير مستعملين ألوانًا واضحة، ثم اطلب إليهم تعيين نقاط من الدالة $f(x) = x^3$ عند قيم x الآتية: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. ومن ثم تمثيل الدالة العكسية بإيجاد هذه النقاط بالانعكاس في المستقيم $y = x$. واطلب إليهم عمل جدول بقيم الدالتين واستعماله لتفسير سبب استبدال المتغيرين x,y في الدالة الأصلية عند إيجاد الدالة العكسية.

تدرب وحل المسائل

مثّل كلًّا من الدوال الآتية بيانيًّا باستعمال الحاسبة البيانية، ثم طبق اختبار الخط الأفقي لتحديد إن كانت الدالة العكسية موجودة، أم لا. (مثال 1)

1) $y = x^2 + 6x + 9$ لا
2) $y = x^2 - 16x + 64$ لا
3) $y = 3x - 8$ نعم
4) $y = 4$ لا
5) $y = \sqrt{x+4}$ نعم
6) $y = -4x^2 + 8$ لا
7) $y = \frac{8}{x+2}$ نعم
8) $y = \frac{1}{4}x^3$ نعم

أوجد الدالة العكسية f^{-1} في كلٍّ مما يأتي إن أمكن، وحدد مجالها والقيود عليه، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب غير موجودة. (مثال 2)

9) $g(x) = -3x^4 + 6x^2 - x$
10) $f(x) = 4x^5 - 8x^4$
11) $f(x) = \sqrt{x+8}$
12) $f(x) = \sqrt{6-x^2}$
13) $f(x) = |x-6|$
14) $g(x) = \frac{x-6}{x}$
15) $f(x) = \frac{6}{\sqrt{8-x}}$
16) $g(x) = \frac{7}{\sqrt{x+3}}$
17) $h(x) = \frac{x+4}{3x-5}$
18) $g(x) = |x+1| + |x-4|$

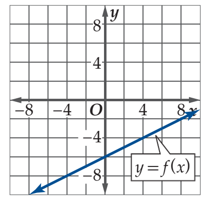
19) **سرعة:** تُعطى سرعة جسم y بالكيلومتر لكل ساعة بالدالة $y = 1.6x$ حيث x سرعة الجسم بالميل لكل ساعة. (مثال 2) **9-19) انظر الهامش.**
a) أوجد الدالة العكسية لـ y، وماذا يمثّل كل متغير فيها؟
b) مَثّل كلًّا من الدالتين في المستوى الإحداثي نفسه.

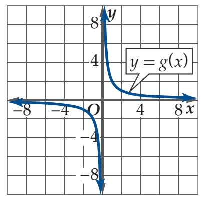
أثبت جبريًّا أن كلًّا من الدالتين f, g تمثل دالة عكسية للأخرى في كل مما يأتي: (مثال 3) **20-25) انظر ملحق الإجابات.**

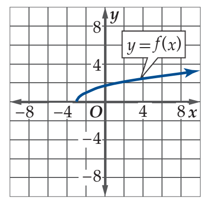
20) $f(x) = 4x + 9$ ، $g(x) = \frac{x-9}{4}$
21) $f(x) = -3x^2 + 5, x \geq 0$ ، $g(x) = \sqrt{\frac{5-x}{3}}$
22) $f(x) = \frac{x^2}{4} + 8, x \geq 0$ ، $g(x) = \sqrt{4x - 32}$
23) $f(x) = (x+8)^{\frac{3}{2}}$ ، $g(x) = x^{\frac{2}{3}} - 8, x \geq 0$
24) $f(x) = 2x^3 - 6$ ، $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+6}{2}}$
25) $f(x) = \frac{x-6}{x+2}$ ، $g(x) = \frac{2x+6}{1-x}$

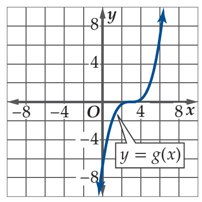
26) **فيزياء:** تُعطى طاقة الحركة لجسم متحرك بالجول بالدالة $f(x) = 0.5mx^2$ حيث m كتلة الجسم بالكيلوجرام و x سرعة الجسم بالمتر لكل ثانية. (مثال 3) **26a-c) انظر ملحق الإجابات.**
a) أوجد $f^{-1}(x)$ للدالة $f(x)$. وماذا يعني كل متغير فيها؟
b) أثبت أن كلًّا من الدالتين $f(x)$ وَ $f^{-1}(x)$ التي حصلت عليها تمثل دالة عكسية للأخرى.
c) مَثِّل كلًّا من $f(x), f^{-1}(x)$ على الشاشة نفسها من الحاسبة البيانية عندما تكون كتلة الجسم كيلو جرام واحد.

استعمل التمثيل البياني أدناه المعطى لكل دالة لتمثل الدالة العكسية لها: (مثال 4) **27-30) انظر ملحق الإجابات.**

27)


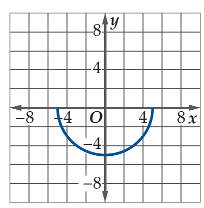
28)


29)


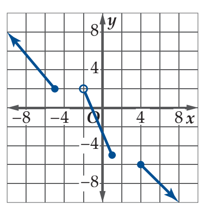
30)


31) **وظائف:** يعمل فالح في أحد محلات بيع الأحذية خارج أوقات دوامه الرسمي مقابل راتب مقداره 420 ريالًا في الأسبوع، ويتقاضى أيضًا عمولة مقدارها 5% من قيمة المبيعات. أي أن ما يتقاضاه أسبوعيًّا يُعطى بالدالة $f(x) = 420 + 0.05x$ حيث تمثل x قيمة المبيعات. (مثال 5) **31a-d) انظر ملحق الإجابات.**
a) أثبت أن الدالة $f^{-1}(x)$ موجودة، ثم أوجدها.
b) ماذا تمثّل كل من $x, f^{-1}(x)$ في الدالة العكسية؟
c) حدد أية قيود على كل من مجال $f(x), f^{-1}(x)$ إن وجدت. وبرر إجابتك.
d) أوجد قيمة مبيعات فالح في الأسبوع الذي يتقاضى فيه 720 ريالًا.

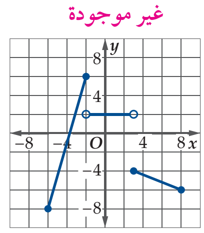
حدد ما إذا كانت الدالة العكسية موجودة في كلٍّ مما يأتي أم لا.

32)


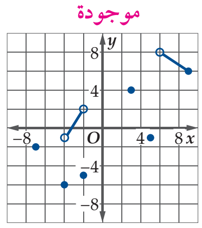
غير موجودة

33)


موجودة

34)


غير موجودة

35)


موجودة

3 التدريب

التقويم التكويني

استعمل الأسئلة 1–31 للتأكد من فهم الطلاب، ثم استعمل الجدول أسفل هذه الصفحة؛ لتعيين الواجبات المنزلية للطلاب بحسب مستوياتهم.

تنبيه!

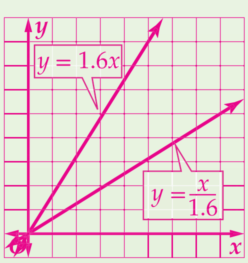
خطأ شائع: قد يخطئ بعض الطلاب في إيجاد $f^{-1}(x)$ باعتبارها $\frac{1}{f(x)}$. لذا ذكّرهم بأن f^{-1} رمز وليس متغيرًا مرفوعًا للأس -1؛ بمعنى آخر، f^{-1} هي معكوس الدالة f في حين أن $\frac{1}{f}$ مقلوب f.

خطأ شائع: في المسائل 20–25 ساعد الطلاب على استعمال التعويض وإجراء عمليات الاختصار بتذكيرهم باستعمال الأقواس على نحوٍ صحيح عند التعويض.

إجابات:

9) غير موجودة.
10) غير موجودة.
11) نعم، $f^{-1}(x) = x^2 - 8;\ x \geq 0$
12) غير موجودة.
13) غير موجودة.
14) نعم، $g^{-1}(x) = \frac{6}{1-x};\ x \neq 1$
15) نعم، $f^{-1}(x) = 8 - \frac{36}{x^2};\ x > 0$
16) نعم، $g^{-1}(x) = -3 + \frac{49}{x^2};\ x > 0$
17) نعم، $h^{-1}(x) = \frac{5x+4}{3x-1};\ x \neq \frac{1}{3}$
18) غير موجودة.

19a) $y = \frac{x}{1.6}$، y السرعة بالميل لكل ساعة، x السرعة بالكيلو متر لكل ساعة.

19b)


تنويع الواجبات المنزلية

المستوى	الأسئلة
دون المتوسط	1–31 ، 56–58 ، 60–69
ضمن المتوسط	1–37 (فردي)، 38، 39، 41، 43، 48، 51–54 (فردي) ، 55–58، 60–69
فوق المتوسط	32–69

كون جدولاً للدالة f^{-1} في كل مما يأتي إذا كانت موجودة، وإذا لم تكن موجودة، فاذكر السبب. **(36-37) انظر الهامش.**

(36

x	-6	-4	-1	3	6	10
$f(x)$	-4	0	3	5	9	13

(37

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	14	11	8	10	11	16

(38 **درجات حرارة:** تُستعمل الدالة $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$ للتحويل من درجات الحرارة السيليزية إلى درجات الحرارة الفهرنهايتية، وتُستعمل الدالة $k(x) = \frac{5}{9}(x + 459.67)$ للتحويل من درجات الحرارة الفهرنهايتية إلى درجات الحرارة المطلقة (كلفن).

a) أوجد f^{-1}، وماذا تمثّل هذه الدالة؟

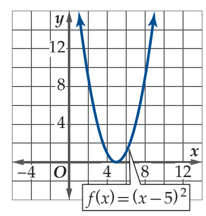
b) أثبت أن كلاً من f, f^{-1} دالة عكسية للأخرى، ومثّل منحناهما على الشاشة نفسها في الحاسبة البيانية.

c) أوجد $(k \circ f)(x)$، وماذا تمثّل هذه الدالة؟

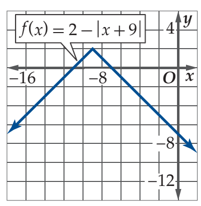
d) إذا كانت درجة الحرارة $60°C$، فأوجد درجة الحرارة المطلقة المقابلة لها. **(38a-d) انظر الهامش.**

ضع قيودًا على مجال كل دالة من الدوال الآتية حتى تصبح دالة متباينة. ثم أوجد الدالة العكسية لها: **(39-40) انظر الهامش.**

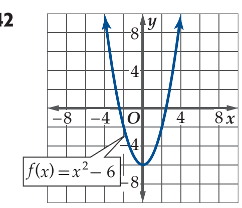
(39



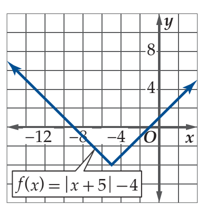
(40



(41



(42



(43 **أزهار:** تحتاج فاطمة إلى 75 زهرة لتزيين قاعة في إحدى المناسبات، فإذا كان بإمكانها شراء قرنفل بسعر 3 ريالات للزهرة الواحدة وشراء جوري بسعر 5 ريالات للزهرة الواحدة، فأجب عما يأتي:

a) اكتب دالة تمثّل التكلفة الكلية لشراء الأزهار.

b) أوجد الدالة العكسية لدالة التكلفة. وماذا يمثّل كل متغير فيها؟

c) حدّد مجال دالة التكلفة، ومجال الدالة العكسية لها.

d) إذا كانت التكلفة الكلية لشراء الأزهار 305 ريالات، فكم زهرة من القرنفل اشترت؟ **(43a-d) انظر ملحق الإجابات.**

إذا كانت الدالة f^{-1} موجودة، فاكتب المجال والمدى لكل من f, f^{-1}: **(44-47) انظر الهامش.**

(44 $f(x) = \sqrt{x-6}$

(45 $f(x) = x^2 + 9$

(46 $f(x) = \frac{3x+1}{x-4}$

(47 $f(x) = \frac{8x+3}{2x-6}$

أوجد الدالة العكسية في كلٍّ مما يأتي، إن أمكن، ثم مثّل f, f^{-1} في مستوى إحداثي واحد. و اذكر أية قيود على المجال:

(48 $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad -4 \geq x \\ -2x+5 & , \quad -4 < x \end{cases}$ **انظر ملحق الإجابات.**

(49 $f(x) = \begin{cases} -4x+6 & , \quad -5 \geq x \\ 2x-8 & , \quad -5 < x \end{cases}$ **$f^{-1}(x)$ غير موجودة.**

(50 **اتصالات:** أعلنت شركة لبيع أجهزة الهاتف المحمول عن عرض مبين في الشكل أدناه. فكانت الشركة تخصم 50 ريالًا وتمنح تخفيضًا مقداره 10% من سعر الجهاز الأصلي.

a) اكتب دالة r لسعر الجهاز بدلالة سعره الأصلي إذا تم خصم 50 ريالًا فقط. **$r(x) = x - 50$**

b) اكتب دالة d لسعر الجهاز بدلالة سعره الأصلي إذا تم منح التخفيض (10%) فقط. **$d(x) = 0.9x$**

c) اكتب قاعدة تمثّل $T = r \circ d$ إذا تم التخفيض ثم الخصم.

d) أوجد T^{-1}، وماذا تمثّل؟ **(c-d) انظر الهامش.**

e) إذا كانت التكلفة الكلية لشراء جهاز بعد التخفيض ثم الخصم 760 ريالًا، فكم يكون سعره الأصلي؟ **900 ريال تقريبًا.**

(51-54) انظر ملحق الإجابات.

إذا كانت $f(x) = 8x - 4, g(x) = 2x + 6$ فأوجد:

(51 $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$

(52 $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

(53 $(f \circ g)^{-1}(x)$

(54 $(g \circ f)^{-1}(x)$

تنبيه!

خطأ شائع: في المسائل 38–36، قد يجد الطلاب صعوبة في التحقق من وجود دالة عكسية: لعدم وجود التمثيل البياني للدوال، لذا اطلب إليهم تمثيل $f(x)$ وتطبيق اختبار الخط الأفقي.

إجابات:

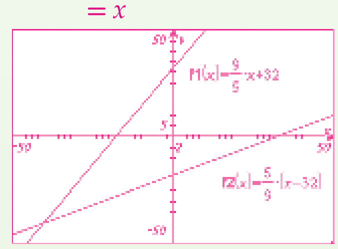
(36 f^{-1} موجودة.

x	-4	0	3	5	9	13
$f^{-1}(x)$	-6	-4	-1	3	6	10

(37 f^{-1} غير موجودة؛ لأن f غير متباينة.

(38a $f^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x-32)$ ؛ f^{-1} تمثل المعادلة المستعملة للتحويل من درجات فهرنهايتية إلى درجات سيليزية.

(38b
$$f[f^{-1}(x)] = \frac{9}{5}\left(\frac{5}{9}(x-32)\right) + 32$$
$$= x - 32 + 32$$
$$= x$$
$$f^{-1}[f(x)] = \frac{5}{9}\left(\left(\frac{9}{5}x + 32\right) - 32\right)$$
$$= \frac{5}{9}\left(\frac{9}{5}x\right)$$
$$= x$$



(38c $k[f(x)] = x + 273.15$ ؛ تمثل المعادلة المستعملة للتحويل من درجات سيليزية إلى درجات مطلقة (كلفن).

(38d 333.15 درجة مطلقة .

(39 إجابة ممكنة:
$x \geq 5; f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 5$

(40 إجابة ممكنة: $x \leq -9; f^{-1}(x) = x - 11$

(41 إجابة ممكنة: $x \geq 0; f^{-1}(x) = \sqrt{x+6}$

(42 إجابة ممكنة: $x \geq -5; f^{-1}(x) = x - 1$

(44 الدالة f، المجال: $\{x \mid x \geq 6, x \in R\}$،
المدى: $\{y \mid y \geq 0, y \in R\}$
الدالة f^{-1}،
المجال: $\{x \mid x \geq 0, y \in R\}$ ،
المدى: $\{y \mid y \geq 6, x \in R\}$

(45 f^{-1} غير موجودة.

(46 الدالة f المجال: $\{x \mid x \neq 4, x \in R\}$ ،
المدى: $\{y \mid y \neq 3, x \in R\}$
الدالة f^{-1}، المجال: $\{x \mid x \neq 3, \in R\}$ ،
المدى: $\{y \mid y \neq 4, x \in R\}$.

(47 الدالة f المجال: $\{x \mid x \neq 3, x \in R\}$ ،
المدى: $\{y \mid y \neq 4, x \in R\}$.
الدالة f^{-1}، المجال: $\{x \mid x \neq 4, x \in R\}$
المدى: $\{y \mid y \neq 3, x \in R\}$.

(50c $T(x) = 0.9x - 50$

(50d $T^{-1}(x) = \frac{x+50}{0.9}$ ؛ تمثل الدالة العكسية السعر الأصلي للجهاز كدالة في سعر الجهاز بعد الخصم وإجراء التخفيض.

(55a-d انظر ملحق الإجابات.

55) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة وجود أو عدم وجود دالة عكسية لكلٍّ من الدالة الزوجية والدالة الفردية.

a) **بيانيًا:** مثل بيانيًّا منحنيات ثلاث دوال زوجية مختلفة. هل تحقق هذه الدوال اختبار الخط الأفقي؟

b) **تحليليًا:** كون تخمينًا حول وجود أو عدم وجود دالة عكسية للدالة الزوجية. أثبت صحة تخمينك بالطريقة الجبرية أو انفه.

c) **بيانيًا:** مثل بيانيًّا منحنيات ثلاث دوال فردية مختلفة. هل تحقق هذه الدوال اختبار الخط الأفقي؟

d) **تحليليًا:** كون تخمينًا حول وجود أو عدم وجود دالة عكسية للدالة الفردية. أثبت صحة تخمينك بالطريقة الجبرية أو انفه.

مسائل مهارات التفكير العليا
(56-58 انظر ملحق الإجابات.

56) **تبرير:** إذا كان للدالة f صفرا عند 6، ولها دالة عكسية ، فما الذي يمكنك معرفته عن منحنى الدالة f^{-1}؟

57) **اكتب:** وضح القيود التي يجب وضعها على مجال الدالة التربيعية ليكون لها دالة عكسية. وضّح بمثال.

58) **تبرير:** هل العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة. برّر إجابتك.
"يوجد دالة عكسية لكل دالة خطية"

59) **تحدٍّ:** إذا كانت $f(x) = x^3 - ax + 8$ ، $f^{-1}(23) = 3$، فأوجد قيمة a. **4**

(60 انظر ملحق الإجابات.

60) **تبرير:** هل توجد دالة $f(x)$ تحقق اختبار الخط الأفقي، وتحقق المعادلتين $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ ، $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ في الوقت نفسه؟

مراجعة تراكمية

لكل زوج من الدوال الآتية، أوجد $f \circ g$ ، $g \circ f$، ثم أوجد مجال دالة التركيب: (الدرس 6-1) (61,62 انظر الهامش.

61) $f(x) = x^2 - 9$
$g(x) = x + 4$

62) $f(x) = \frac{1}{2}x - 7$
$g(x) = x + 6$

استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) المعطاة لوصف منحنى كل دالة مرتبطة بها لكل مما يأتي: (الدرس 5-1)

63) $f(x) = x^2$ (63-65 انظر الهامش.

a) $y = (0.2x)^2$

b) $y = (x - 5)^2 - 2$

c) $y = 3x^2 + 6$

64) $f(x) = x^3$

a) $y = |x^3 + 3|$

b) $y = -(2x)^3$

c) $y = 0.75(x + 1)^3$

65) $f(x) = |x|$

a) $y = |2x|$

b) $y = |x - 5|$

c) $y = |3x + 1| - 4$

أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة فيما يأتي في الفترة المعطاة: (الدرس 4-1)

66) $f(x) = x^3 - x, [0, 3]$ **8**

67) $f(x) = x^4 - 2x + 1, [-5, 1]$ **-106**

تدريب على اختبار

68) أي الدوال الآتية تمثّل الدالة العكسية للدالة $f(x) = \frac{3x-5}{2}$؟ **A**

A $g(x) = \frac{2x+5}{3}$

B $g(x) = \frac{3x+5}{2}$

C $g(x) = 2x + 5$

D $g(x) = \frac{2x-5}{3}$

69) إذا كان كل من m و n عددًا صحيحًا فرديًّا، فأي العبارات الآتية صحيحة؟ **D**

I) $m^2 + n^2$ عدد زوجي

II) $m^2 + n^2$ يقبل القسمة على 4

III) $(m + n)^2$ يقبل القسمة على 4

A كلها غير صحيحة

B I فقط

C I و II فقط صحيحتان

D I و III فقط صحيحتان

تنويع التعليم
فوق

توسّع: هل يوجد للدالة $f(x) = [x]$ دالة عكسية؟ فسّر إجابتك. لا؛ لأن الدالة $f(x)$ لا تحقق اختبار الخط الأفقي ؛ لذا فإنه يوجد عناصر في مجال العلاقة العكسية لِـ $f(x)$ ترتبط بأكثر من عنصر في المدى.

تمثيلات متعددة
في السؤال 55 يستعمل الطلاب التمثيل البياني والتحليل الجبري لاستقصاء معكوس كل من الدالة الفردية والدالة الزوجية.

4 التقويم

فهم الرياضيات اطلب إلى الطلاب وصف كيفية التحقق من وجود دالة عكسية لدالة معطاة. استعمال اختبار الخط الأفقي

التقويم التكويني
تحقق من مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم الواردة في الدرس 1-7 بإعطائهم:

الاختبار القصير 4، ص (12)

إجابات:

61) $[f \circ g] = x^2 + 8x + 7$ ، ومجالها $\{x \mid x \in R\}$.
$[g \circ f] = x^2 - 5$ ومجالها $\{x \mid x \in R\}$

62) $[f \circ g] = \frac{1}{2}x - 4$ ومجالها $\{x \mid x \in R\}$.
$[g \circ f] = \frac{1}{2}x - 1$ ومجالها $\{x \mid x \in R\}$

63a) توسع أفقي.

63b) انسحاب 5 وحدات إلى اليمين ووحدتين إلى أسفل.

63c) توسع رأسي بمقدار 3، وانسحاب بمقدار 6 وحدات إلى أعلى.

64a) انسحاب 3 وحدات إلى أعلى، وانعكاس حول المحور x، للجزء من المنحنى الموجود تحت المحور x.

64b) انعكاس حول المحور x، وتضيق أفقي.

64c) انسحاب وحدة واحدة إلى اليسار، وتضيق رأسي.

65a) تضيق أفقي.

65b) انسحاب 5 وحدات إلى اليمين.

65c) تضيق أفقي، وانسحاب 4 وحدات إلى أسفل، ثم انسحاب إلى اليسار بمقدار $\frac{1}{3}$ وحدة.

التقويم التكويني

المفردات

يشير رقم الصفحة بعد كل مفردة إلى الصفحة التي وردت فيها المفردة لأول مرة. فإذا واجه الطلاب صعوبات في حل الأسئلة 1–10، فذكرهم بأنه يمكنهم استعمال هذه الصفحات مرجعًا ليتذكروا المعلومات حول هذه المفردات.

التقويم الختامي

اختبار المفردات، ص (14) .

الفصل 1

دليل الدراسة و المراجعة

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

الدوال (الدرس 1–1)

- المجموعات الجزئية الشائعة من مجموعة الأعداد الحقيقية هي: الأعداد النسبية، الأعداد غير النسبية، الأعداد الصحيحة، الأعداد الكلية، الأعداد الطبيعية.
- الدالة هي علاقة تربط كل عنصر في مجالها بعنصر واحد فقط في مداها.
- يحقق منحنى أي دالة اختبار الخط الرأسي.

تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات (الدرس 1–2)

- قد تكون المنحنيات متماثلةً حول المحور y ، أو المحور x ، أو نقطة الأصل.
- الدالة الزوجية متماثلة حول المحور y ، والدالة الفردية متماثلة حول نقطة الأصل.

الاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني والنهايات (الدرس 1–3)

- إذا كانت قيم الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L عندما تقترب x من c من الجهتين، فنقول: إن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c تساوي L . وتكتب $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$.
- قد تكون الدالة غير متصلة، ونوع عدم الاتصال هو لانهائي، أو قفزي، أو قابل للإزالة.

القيم القصوى ومتوسط معدل التغير (الدرس 1–4)

- تكون الدالة إما متزايدةً أو متناقصةً أو ثابتةً على فترات معينة.
- تتضمن القيم القصوى القيمة العظمى المحلية، والصغرى المحلية، والعظمى المطلقة، والصغرى المطلقة.
- يعطى متوسط معدل التغير بين نقطتين بالقاعدة
$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

الدالة الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية (الدرس 1–5)

تتضمن التحويلات الهندسية على الدالة الرئيسة (الأم) : الانسحاب، الانعكاس، التمدد.

العمليات على الدوال وتركيب دالتين (الدرس 1–6)

إن حاصل جمع، وطرح، وضرب، وقسمة، وتركيب أي دالتين ينتج دوال جديدةً .

العلاقات والدوال العكسية (الدرس 1–7)

- تكون كلٌّ من العلاقتين A , B عكسية للأخرى إذا وفقط إذا وجد (b, a) في إحداهما فإنه يوجد (a, b) في الأخرى .
- تكون كلٌّ من الدالتين f, f^{-1} عكسية للأخرى إذا وفقط إذا كان $f[f^{-1}(x)] = x , f^{-1}[f(x)] = x$.

المفردات

- الصفة المميزة للمجموعة (ص. 10)
- رمز الفترة (ص. 11)
- الدالة (ص. 11)
- رمز الدالة (ص. 13)
- المتغير المستقل (ص. 13)
- المتغير التابع (ص. 13)
- الدالة متعددة التعريف (ص. 14)
- الأصفار (ص. 20)
- الجذور (ص. 20)
- التماثل حول مستقيم (ص. 21)
- التماثل حول نقطة (ص. 21)
- الدالة الزوجية (ص. 23)
- الدالة الفردية (ص. 23)
- الدالة المتصلة (ص. 28)
- النهاية (ص. 28)
- الدالة غير المتصلة (ص. 28)
- عدم الاتصال اللانهائي (ص. 28)
- عدم الاتصال القفزي (ص. 28)
- عدم الاتصال القابل للإزالة (ص. 28)
- عدم الاتصال غير قابل للإزالة (ص. 31)
- سلوك طرفي التمثيل البياني (ص. 32)
- المتزايدة (ص. 38)
- المتناقصة (ص. 38)
- الثابتة (ص. 38)
- النقطة الحرجة (ص. 40)
- العظمى (ص. 40)
- الصغرى (ص. 40)
- القصوى (ص. 40)
- متوسط معدل التغير (ص. 42)
- القاطع (ص. 42)
- الدالة الرئيسة (الأم) (ص. 48)
- الدالة الثابتة (ص. 48)
- الدالة المحايدة (ص. 48)
- الدالة التربيعية (ص. 48)
- الدالة التكعيبية (ص. 48)
- دالة الجذر التربيعي (ص. 48)
- دالة المقلوب (ص. 48)
- دالة القيمة المطلقة (ص. 49)
- الدالة الدرجية (ص. 49)
- دالة أكبر عدد صحيح (ص. 49)
- التحويل الهندسي (ص. 49)
- الانسحاب (ص. 50)
- الانعكاس (ص. 51)
- التمدد (ص. 52)
- تركيب دالتين (ص. 59)
- العلاقة العكسية (ص. 66)
- الدالة العكسية (ص. 66)
- الدالة المتباينة (ص. 67)

اختبر مفرداتك

حدّد ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحة أو خاطئة، وإذا كانت خاطئة، فاستبدل المفردة التي تحتها خط حتى تصبح صحيحة.

1) تعين الدالة لكل عنصر في مجالها عنصراً واحداً فقط في مداها. صحيحة
2) المنحنيات المتماثلة حول نقطة يمكن تدويرها $180°$ حول النقطة، فتبدو كأنها لم تتغير. صحيحة
3) للدالة الفردية نقطة تماثل. صحيحة
4) لا يتضمن منحنى الدالة المتصلة فجوةً أو انقطاعًا. صحيحة
5) الدالة الفردية متماثلة حول المحور y. خاطئة، الزوجية
6) الدالة $f(x)$ التي تتناقص قيمها مع تزايد قيم x تسمى دالةً متناقصةً. صحيحة
7) تتضمن القيم القصوى لدالة قيماً عظمى محليةً أو صغرى محليةً. صحيحة
8) انسحاب المنحنى عبارة عن صورة مرآة للمنحنى الأصلي حول مستقيم. خاطئة، انعكاس
9) تحقق الدالة المتباينة اختبار الخط الأفقي. صحيحة
10) الدالة المتباينة لها محور تماثل. خاطئة، الدالة العكسية

ملخص الدروس

1-1 الدوال (الصفحات 17 - 10)

في كل علاقة مما يأتي، حدد ما إذا كانت y دالة في x أم لا:

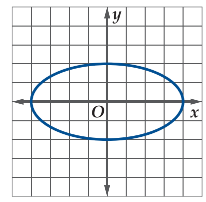
11) $3x - 2y = 18$ دالة

12) $y^3 - x = 4$ دالة

13)

x	y
5	7
7	9
9	11
11	13

دالة

14) 

ليست دالة

إذا كانت $f(x) = x^2 - 3x + 4$، فأوجد كلًّا من القيمتين الآتيتين:

15) $f(5)$ 14

16) $f(-3x)$ $9x^2 + 9x + 4$

أوجد مجال كل دالة من الدوال الآتية: 17-20) انظر الهامش.

17) $f(x) = 5x^2 - 17x + 1$

18) $g(x) = \sqrt{6x - 3}$

19) $h(a) = \frac{5}{a+5}$

20) $v(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$

مثال 1

في العلاقة $x = y^2 - 8$ حدد ما إذا كانت y تمثل دالة في x أم لا:

حل بالنسبة إلى y.

$y^2 - 8 = x$ الدالة الأصلية

$y^2 = x + 8$ أضف 8 للطرفين

$y = \pm\sqrt{x + 8}$ خذ الجذر التربيعي للطرفين

في هذه العلاقة، y لا تمثّل دالة في المتغير x؛ لأن كل قيمة لـ x أكبر من -8 ترتبط بقيمتين من قيم y.

مثال 2

إذا كانت $g(x) = -3x^2 + x - 6$، فأوجد $g(2)$.

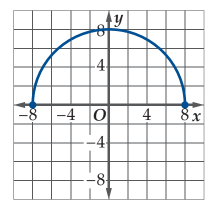
عوض 2 مكان x في العبارة: $-3x^2 + x - 6$.

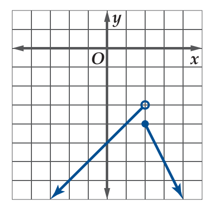
$g(2) = -3(2)^2 + 2 - 6$ $x = 2$

$= -12 + 2 - 6 = -16$ بسّط

1-2 تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات (الصفحات 27 - 18)

استعمل التمثيل البياني لإيجاد مجال كل دالة ومداها في كل مما يأتي: 21, 22) انظر الهامش

21) 

22) 

أوجد المقطع y ، والأصفار لكل دالة مما يأتي: 23-26) انظر الهامش.

23) $f(x) = 4x - 9$

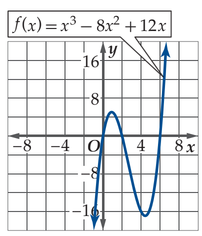
24) $f(x) = x^2 - 6x - 27$

25) $f(x) = x^3 - 16x$

26) $f(x) = \sqrt{x + 2} - 1$

مثال 3

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^3 - 8x^2 + 12x$ لإيجاد مقطعها y وأصفارها. ثم أوجد هذه القيم جبريًّا.



التقدير بيانيًّا:

يتضح من الشكل أن منحنى $f(x)$ يقطع المحور y عند $(0, 0)$؛ لذا فإن المقطع y هو 0 .

المقاطع x (أصفار الدالة) تبدو قريبة من 0, 2, 6 .

الحل جبريًّا:

لإيجاد المقطع y، أوجد $f(0)$.

$f(0) = 0^3 - 8 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0 = 0$

حلّ المعادلة المرتبطة بالدالة إلى العوامل x لإيجاد أصفار الدالة.

$0 = x(x^2 - 8x + 12)$

$= x(x - 2)(x - 6)$

أصفار الدالة f هي 0, 2, 6 .

مراجعة الدروس

مراجعة: إذا كانت الأمثلة المعطاة غير كافية لمراجعة الموضوعات التي تناولتها الأسئلة، فذكّر الطلاب بمرجع الصفحات الذي يدلهم أين يراجعون تلك الموضوعات في كتابهم المقرر.

نموذج التوقع

اطلب إلى الطلاب تعبئة نموذج التوقع للفصل 1 ص (8)، وناقشهم حول تغيّر إجاباتهم بعد إتمام دراسة الفصل عمّا كانت عليه عند بدايته.

إجابات:

17) المجال: $\{x | x \in R\}$

18) المجال: $\{x | x \geq \frac{1}{2}, x \in R\}$

19) المجال: $\{a | a \neq -5, a \in R\}$

20) المجال: $\{x | x \neq \pm 2, x \in R\}$

21) المجال: $[-8, 8]$
المدى: $[0, 8]$

22) المجال: $\{x | x \in R\}$
المدى: $(-\infty, -3)$

23) $-9 ; \frac{9}{4}$

24) $-27 ; -3, 9$

25) $0 ; 0, 4, -4$

26) $\sqrt{2} - 1 ; -1$

75 الفصل 1 دليل الدراسة والمراجعة

مراجعة حل المسائل

إذا احتاج الطلاب إلى تدريبات إضافية على حل المسألة فذكّرهم بخطوات حل المسألة وناقشهم فيها، وقدّم لهم مزيدًا من التدريبات على ورقة عمل.

1-3 الاتصال والنهايات (الصفحات 37 - 28)

حدد ما إذا كانت كل دالة مما يأتي متصلة عند قيم x المعطاة. وبرر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة فبيّن نوع عدم الاتصال لانهائي، قفزي، قابل للإزالة. **(27-31) انظر الهامش.**

27) $f(x) = x^2 - 3x\ ,\ x = 4$

28) $f(x) = \sqrt{2x - 4}\ ,\ x = 10$

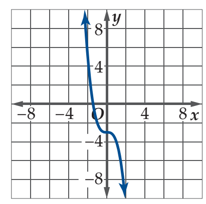
29) $f(x) = \frac{x}{x+7}\ ,\ x = 0\ ,\ x = 7$

30) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}\ ,\ x = 2\ ,\ x = 4$

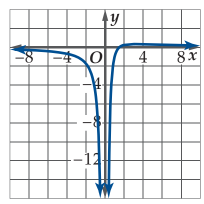
31) $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & ,\ x < 1 \\ 2x & ,\ x \ge 1 \end{cases}\ ,\ x = 1$

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني لكل منهما: **(32-33) انظر الهامش.**

32)



33)



مثال 4

حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = \frac{1}{x-4}$ متصلة عند $x = 0\ ,\ x = 4$. وبرر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال. وإذا كانت الدالة غير متصلة فحدد نوع عدم الاتصال: لانهائي، قفزي، قابل للإزالة.

$f(0) = -0.25$، لذلك f معرفة عند 0 . وتقترب قيم الدالة من -0.25 عندما تقترب x من 0 .

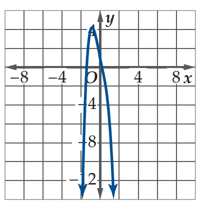
x	-0.1	-0.01	0	0.01	0.1
$f(x)$	-0.244	-0.249	-0.25	-0.251	-0.256

بما أن $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -0.25\ ,\ f(0) = -0.25$ فإن $f(x)$ متصلة عند $x = 0$.

بما أن f غير معرفة عند $x = 4$ فإن f غير متصلة عند 4 وهو عدم اتصال لا نهائي.

مثال 5

استعمل التمثيل البياني للدالة: $f(x) = -2x^4 - 5x + 1$ لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني.



اختبر منحنى $f(x)$.

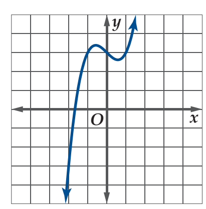
عندما $x \to \infty$ ، فإن $f(x) \to -\infty$

عندما $x \to -\infty$ ، فإن $f(x) \to -\infty$

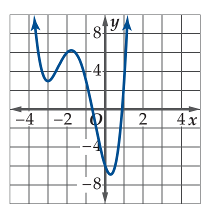
1-4 القيم القصوى ومتوسط معدل التغير (الصفحات 46 - 38)

استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين لتقدير الفترات إلى أقرب 0.5 وحدة التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة. ثم قدر إلى أقرب 0.5 وحدة القيم القصوى للدالة، وبيّن نوعها. **(34-35) انظر الهامش.**

34)



35)



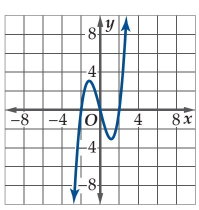
أوجد متوسط معدل التغير لكل من الدالتين الآتيتين في الفترة المعطاة:

36) $f(x) = -x^3 + 3x + 1,\ [0, 2]$ **-1**

37) $f(x) = x^2 + 2x + 5,\ [-5, 3]$ **0**

مثال 6

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = x^3 - 4x$ لتقدير الفترات إلى أقرب 0.5 وحدة التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة أو ثابتة. ثم قدر إلى أقرب 0.5 وحدة القيم القصوى للدالة، وبيّن نوعها.



الدالة متزايدة في الفترة $(-\infty, -1)$ ، ومتناقصة في الفترة $(-1, 1)$ ، ومتزايدة في الفترة $(1, \infty)$.

للدالة قيمة عظمى محلية عند $(-1, 3)$ ، وقيمة صغرى محلية عند $(1, -3)$.

إجابات:

27) متصلة عند $x = 4$؛ الدالة معرفة عند $x = 4$. تؤول الدالة إلى 4 عندما تؤول x إلى 4 من الجهتين $f(4) = 4$.

28) متصلة عند $x=10$ ؛ الدالة معرفة عند $x=10$. تؤول الدالة إلى 4 عندما تؤول x إلى 10 من الجهتين، $f(10) = 4$.

29) متصلة عند $x = 0$ ؛ الدالة معرفة عند $x = 0$. تؤول الدالة إلى 0 عندما تؤول x إلى 0 من الجهتين؛ $f(0) = 0$؛ متصلة عند $x = 7$ ؛ الدالة معرفة عند $x = 7$. الدالة تؤول إلى 0.5 عندما تؤول x إلى 7 ، $f(7) = 0.5$.

30) غير متصلة عندما $x = 2$ ؛ غير معرفة عند $x = 2$ عدم الاتصال لا نهائي. الدالة متصلة عند $x = 4$ ؛ الدالة معرفة عند $x = 4$. الدالة تؤول إلى $\frac{1}{3}$ عندما تؤول x إلى 4 من الجهتين $f(4) = \frac{1}{3}$.

31) متصلة عند 1؛ الدالة معرفة عند $x = 1$؛ تؤول الدالة إلى 2 عندما تؤول x إلى 1 من الجهتين، $f(1) = 2$

32) يوضح التمثيل البياني أنه عندما $x \to \infty$، فإن $f(x) \to -\infty$ ؛ وعندما $x \to -\infty$ ، فإن $f(x) \to \infty$.

33) يوضح التمثيل البياني أنه عندما $x \to \infty$، فإن $f(x) \to 0$ ؛ وعندما $x \to -\infty$ ، فإن $f(x) \to 0$.

34) f متزايدة على $(-\infty, -0.5)$، ومتناقصة على $(-0.5, 0.5)$، ثم متزايدة على $(0.5, \infty)$ ؛ يوجد قيمة عظمى محلية عند $(-0.5, 3.5)$ ؛ وقيمة صغرى محلية عند $(0.5, 2.5)$.

35) f متناقصة على $(-\infty, -3)$، ومتزايدة على $(-3, -1.5)$، ومتناقصة على $(-1.5, 0.5)$ ، ومتزايدة على $(0.5, \infty)$ ؛ يوجد قيمة صغرى محلية عند $(-3, 3)$، وقيمة عظمى محلية عند $(-1.5, 6)$، وأيضًا قيمة صغرى محلية عند $(0.5, -7)$.

1-5 الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية (الصفحات 57 - 48)

(38-41) انظر الهامش.

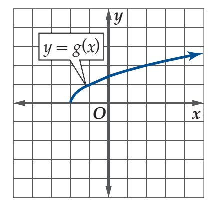
أوجد الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، وَصِف العلاقة بين منحنيي الدالتين، ثم مثِّلهما في مستوى إحداثي واحد.

(38 $g(x) = \sqrt{x-3} + 2$ (39 $g(x) = -(x-6)^2 - 5$

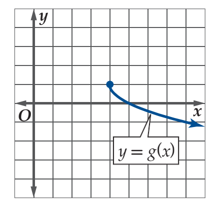
(40 $g(x) = \frac{1}{2(x+7)}$ (41 $g(x) = \frac{1}{4}[x] + 3$

صف العلاقة بين الدالتين $g(x)$, $f(x) = \sqrt{x}$ في كل مما يأتي، ثم اكتب معادلة الدالة $g(x)$. **(42, 43) انظر الهامش.**

(42



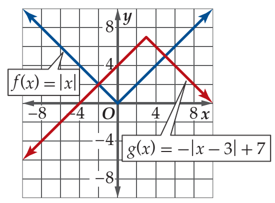
(43



مثال 7

أوجد الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x) = -|x-3| + 7$، وصف العلاقة بين منحنيي الدالتين، ثم مثِّلهما في مستوى إحداثي واحد.

الدالة الرئيسة (الأم) لِـ $g(x)$ هي $f(x) = |x|$. ينتج منحنى الدالة g من منحنى الدالة f بانعكاس حول المحور x، وانسحاب مقداره 3 وحدات إلى اليمين، وانسحاب مقداره 7 وحدات إلى أعلى.



1-6 العمليات على الدوال وتركيب دالتين (الصفحات 65 - 58)

(44-47) انظر ملحق الإجابات.

أوجد $(f+g)(x), (f-g)(x), (f \cdot g)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ لكل من الدالتين $f(x)$, $g(x)$ فيما يأتي. ثم اكتب مجال الدالة الناتجة.

(44 $f(x) = x + 3$، $g(x) = 2x^2 + 4x - 6$ (45 $f(x) = 4x^2 - 1$، $g(x) = 5x - 1$

(46 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$، $g(x) = 4x^2 - 3$ (47 $f(x) = \frac{1}{x}$، $g(x) = \frac{1}{x^2}$

(48-50) انظر ملحق الإجابات.

أوجد $[f \circ g](x), [g \circ f](x), [f \circ g](2)$ لكل دالتين من الدوال الآتية:

(48 $f(x) = 4x - 11, g(x) = 2x^2 - 8$

(49 $f(x) = x^2 + 2x + 8, g(x) = x - 5$

(50 $f(x) = x^2 - 3x + 4, g(x) = x^2$

(51,52) انظر ملحق الإجابات.

اكتب مجال $f \circ g$ متضمنًا أية قيود إذا لزم، ثم أوجد $f \circ g$.

(51 $f(x) = \frac{1}{x-3}$، $g(x) = 2x - 6$ (52 $f(x) = \sqrt{x-2}$، $g(x) = 6x - 7$

مثال 8

إذا كانت $f(x) = x^3 - 1, g(x) = x + 7$، فأوجد $(f+g)(x), (f-g)(x), (f \cdot g)(x), \left(\frac{f}{g}\right)(x)$، ثم اكتب مجال الدالة الناتجة.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$= (x^3 - 1) + (x + 7)$$
$$= x^3 + x + 6$$

مجال $(f+g)(x)$ هو $\{x \mid x \in R\}$.

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$= (x^3 - 1) - (x + 7)$$
$$= x^3 - x - 8$$

مجال $(f-g)(x)$ هو $\{x \mid x \in R\}$.

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$= (x^3 - 1)(x + 7)$$
$$= x^4 + 7x^3 - x - 7$$

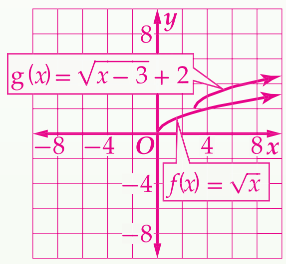
مجال $(f \cdot g)(x)$ هو $\{x \mid x \in R\}$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^3 - 1}{x + 7}$$

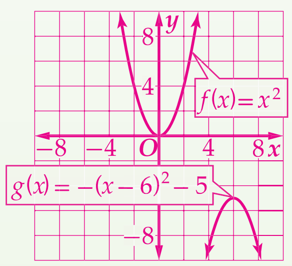
مجال $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ هو $\{x \mid x \neq -7, x \in R\}$.

إجابات:

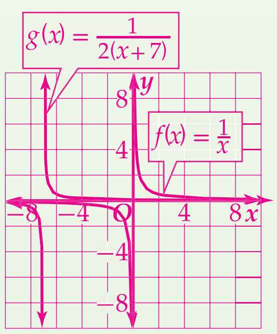
(38 $f(x) = \sqrt{x}$؛ منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x)$ بالانسحاب 3 وحدات إلى اليمين ووحدتين إلى أعلى.



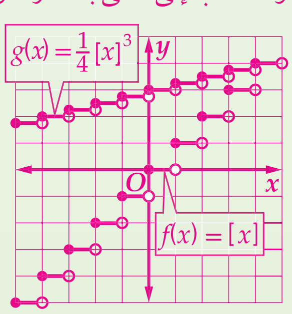
(39 $f(x) = x^2$؛ منحنى $g(x)$ هو صورة منحنى $f(x)$ بالانعكاس في المحور x، وانسحاب 6 وحدات إلى اليمين، و 5 وحدات إلى أسفل.



(40 $f(x) = \frac{1}{x}$؛ منحنى $g(x)$ هو صورة منحنى $f(x)$ بالانسحاب 7 وحدات إلى اليسار، وتضيق رأسي بمعامل مقدار $\frac{1}{2}$.



(41 $f(x) = [x]$؛ منحنى $g(x)$ هو تضيق رأسي لمنحنى $f(x)$ بمعامل $\frac{1}{4}$، وانسحاب إلى أعلى بمقدار 3 وحدات.



(42 ينتج منحنى الدالة $g(x)$ و بانسحاب مقداره وحدتان لليسار، $g(x) = \sqrt{x+2}$

(43 ينتج منحنى الدالة $g(x)$ بانعكاس حول المحور x، وانسحاب مقداره 4 وحدات لليمين، وانسحاب مقداره 1 وحدة إلى أعلى، $g(x) = -\sqrt{x-4} + 1$.

1-7 العلاقات والدوال العكسية (الصفحات 73 - 66)

أوجد الدالة العكسية في كلٍّ مما يأتي، إن أمكن، ثم مثل f, f^{-1} في مستوى إحداثي واحد. **53-55) انظر ملحق الإجابات.**

53) $y = 2x$ 54) $y = -4x + 8$

55) $y = 2\sqrt{x+3}$ 56) $y = \frac{1}{x} - 3$

مثّل كل دالة من الدوال الآتية باستعمال الحاسبة البيانية، واختبر ما إذا كان المعكوس يمثّل دالةً أم لا. **57-60) انظر ملحق الإجابات.**

57) $f(x) = |x| + 6$ 58) $f(x) = x^3$

59) $f(x) = -\frac{3}{x+6}$ 60) $f(x) = x^3 - 4x^2$

مثال 9

أوجد الدالة العكسية للدالة $y = x^3 - 9$.

بدّل مكاني x, y لتحصل على المعادلة $x = y^3 - 9$، ثم حل بالنسبة إلى y.

$$x = y^3 - 9$$
$$x + 9 = y^3$$
$$\sqrt[3]{x+9} = y$$

أي أن الدالة العكسية هي $y = \sqrt[3]{x+9}$.

تطبيقات ومسائل

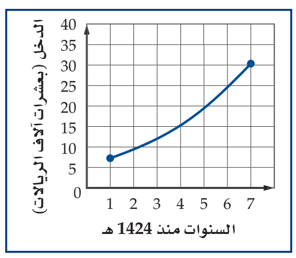
61) **الهواتف المحمولة:** قدمت إحدى شركات الاتصالات عرضًا على الهواتف المحمولة بحيث يدفع المشترك 40 ريالًا في الشهر. ويتضمن ذلك 500 دقيقة مكالمات نهارية مجانية كحد أقصى خلال الشهر، ويدفع 0.2 ريال عن كل دقيقة نهارية تزيد على 500 دقيقة. (الدرس 1-1)

a) اكتب الدالة $p(x)$ للتكلفة الشهرية لإجراء مكالمات نهارية مدتها x دقيقة. **61a-c) انظر الهامش.**

b) كم سيدفع مشترك إذا أجرى مكالمات نهارية مدتها 450 دقيقةً، 550 دقيقةً؟

c) مثّل الدالة $p(x)$ بيانيًّا.

62) **أعمال:** يبين التمثيل البياني أدناه الدخل الذي حققه متجر صغير في الفترة من عام 1425 هـ إلى 1431 هـ (الدرس 1-2)



a) قدِّر دخل المتجر سنة 1428 هـ. **إجابة ممكنة: 150 ألف ريال تقريبًا**

b) قدِّر السنة التي حقق فيها المتجر دخلًا مقداره 100000 ريال. **1427 هـ**

63) **رواتب:** بعد 5 سنوات من عمل وليد في إحدى الشركات تقاضى زيادةً على راتبه مقدارها 1500 ريال شهريًّا. هل الدالة التي تمثّل راتب وليد متصلة أم غير متصلة؟ برِّر إجابتك. (الدرس 1-3)

لا، إجابة ممكنة: في اللحظة التي ازداد فيه راتبه هناك انفصال قفزي في الدالة التي تمثل راتب وليد.

64) **كرة قدم:** يبين الجدول أدناه عدد الأهداف التي سجلها لاعب في خمسة مواسم كروية. (الدرس 1-4)

السنة	1424	1425	1426	1427	1428
عدد الأهداف	5	36	23	42	42

a) وضح لماذا يمثّل عدد الأهداف عام 1426 هـ قيمةً صغرى محليةً. **انظر الهامش.**

b) إذا كان متوسط معدل التغير لعدد الأهداف بين عامي 1428 و1431هـ يساوي 5 أهداف لكل عام. فكم هدفًا سجل اللاعب عام 1431 هـ؟ **57 هدفًا**

65) **فيزياء:** رُمي حجر أفقيًّا من على حافة جرف، وكان مقدار سرعته معطى بالدالة: $v(t) = \sqrt{(9.8t)^2 + 49}$. حيث t الزمن بالثواني، $v(t)$ السرعة بالمتر لكل ثانية. مثل بيانيًّا دالة السرعة خلال أول 6 ثوانٍ من رمي الحجر. (الدرس 1-5) **65) انظر الهامش.**

66) **ثقافة مالية:** إذا كان ثمن شريحة الإنترنت 500 ريال. وقدمت إحدى الشركات العرض التالي: خصم 10% من ثمن الشريحة و20 ريالًا عند تفعيلها. كم سيكون ثمن الشريحة بعد تفعيلها. (الدرس 1-6) **430 ريالًا**

67) **قياس:** تذكر أن 1 بوصةً تساوي 2.54 سم تقريبًا. (الدرس 1-7)

a) اكتب دالة $A(x)$ لتحويل مساحة مستطيل من البوصات المربعة إلى السنتمترات المربعة. **انظر الهامش.**

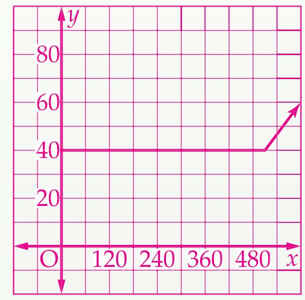
b) أوجد $A^{-1}(x)$ لتحويل مساحة مستطيل من السنتمترات المربعة إلى البوصات المربعة.

إجابات:

61a)
$$p(x) = \begin{cases} 40, & 0 \le x \le 500 \\ 40 + 0.2(x - 500), & x > 500 \end{cases}$$

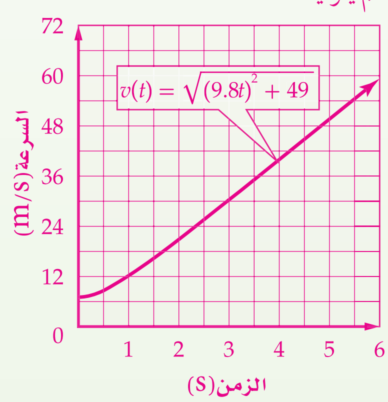
61b) 40 , 50

61c)



64a) إجابة ممكنة: لأن عدد الأهداف يتناقص ثم يتزايد.

65)



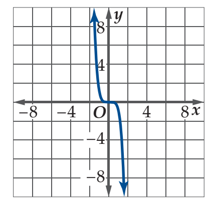
67a) $A(x) = 6.4516x \text{ cm}^2$

67b) $A^{-1}(x) = \frac{1}{6.4516} x \text{ in}^2$

الفصل 1 اختبار الفصل

في كل علاقة مما يأتي، حدد ما إذا كانت y تمثل دالة في x:

1) $x = y^2 - 5$ ليست دالة

2) 

دالة

3) $y = \sqrt{x^2+3}$ دالة

4a-c) انظر الهامش.

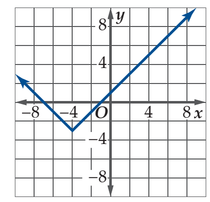
4) **موقف سيارات:** يتقاضى موقف للسيارات مبلغ 3 ريالات مقابل كل ساعة أو جزءٍ من الساعة لأول ثلاث ساعات، فإذا زادت المدة عن الثلاث ساعات، فإنه يتقاضى 15 ريالًا عن المدة كلها.

a) اكتب دالة $c(x)$ تمثّل تكلفة وقوف سيارة مدة x من الساعات.

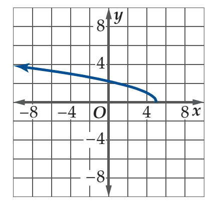
b) أوجد $c(2.5)$.

c) عيِّن مجال الدالة $c(x)$، وبرر إجابتك.

حدد مجال كل دالة من الدالتين الممثلتين أدناه ومداها:

5) 

المجال: $(-\infty, \infty)$، المدى $[-3, \infty)$

6) 

المجال: $(-\infty, 5]$، المدى $[0, \infty)$

أوجد المقطع y والأصفار لكل دالة من الدالتين الآتيتين:

7) $f(x) = 4x^2 - 8x - 12$ $-12; -1, 3$

8) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$ $0; -3, -1, 0$

9) **اختيار من متعدد:** أي العلاقات الآتية متماثلة حول المحور x؟ D

A $-x^2 - yx = 2$

B $x^3y = 8$

C $y = |x|$

D $-y^2 = -4x$

حدّد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند $x = 3$، وإذا كانت غير متصلة، فحدد نوع عدم الاتصال: لا نهائي، قفزي، قابل للإزالة.

10) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 3 \\ 9 - x, & x \geq 3 \end{cases}$ متصلة

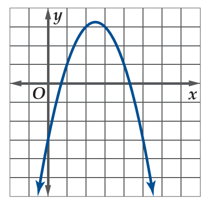
11) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-9}$ غير متصلة، عدم اتصال قابل للإزالة

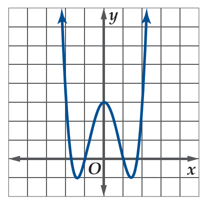
أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة من الدالتين الآتيتين في الفترة $[-2, 6]$:

12) $f(x) = -x^4 + 3x$ -157

13) $f(x) = \sqrt{x+3}$ $\frac{1}{4}$

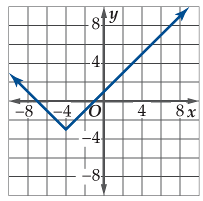
استعمل منحنى كل من الدالتين الآتيتين لتقدير الفترات التي تكون عندها الدالة متزايدة أو متناقصة إلى أقرب 0.5 وحدة. **14-15) انظر الهامش.**

14) 

15) 

16) استعمل التمثيل البياني للدالة في السؤال 14 أعلاه، وقدِّر قيمة x التي يكون للدالة عندها قيمة قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وبيِّن نوعها. انظر الهامش.

17) **اختيار من متعدد:** أي الدوال الآتية يمثّلها التمثيل البياني المجاور؟ C



A $f(x) = |x-4| - 3$

B $f(x) = |x-4| + 3$

C $f(x) = |x+4| - 3$

D $f(x) = |x+4| + 3$

18) عيِّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x) = -(x+3)^3$، ثم مثِّل الدالة $g(x)$ بيانيًّا. انظر الهامش.

إذا كانت $f(x) = x - 6$، $g(x) = x^2 - 36$، فأوجد كل دالة من الدالتين الآتيتين، ثم أوجد مجالها. **19, 20) انظر الهامش.**

19) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

20) $[g \circ f](x)$

21) **درجة الحرارة:** تستعمل معظم دول العالم الدرجات السيليزية C لقياس درجة الحرارة. والمعادلة التي تربط بين درجات الحرارة السيليزية C والفهرنهايتية F هي $F = \frac{9}{5}C + 32$.

a) اكتب C كدالة بالنسبة إلى F. $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

b) أوجد دالتين f و g بحيث يكون $C = [f \circ g](F)$. $g(x) = x - 32, f(x) = \frac{5}{9}x$

بيِّن ما إذا كان للدالة f دالة عكسية أم لا في كل مما يأتي، أوجدها في حالة وجودها، وحدِّد أية قيود على مجالها. **22-25) انظر الهامش.**

22) $f(x) = (x-2)^3$

23) $f(x) = \dfrac{x+3}{x-8}$

24) $f(x) = \sqrt{4-x}$

25) $f(x) = x^2 - 16$

79 الفصل 1 اختبار الفصل

المعالجة:

بناءً على نتائج اختبار الفصل استعمل مخطط المعالجة في مراجعة المفاهيم التي لا تزال تشكل تحديًّا للطلاب.

اختبار الفصل: نماذج متعددة ص (15–23).

إجابات:

4a) $c(x) = \begin{cases} 3x & 0 \leq x \leq 3 \\ 15 & x > 3 \end{cases}$

4b) 9 ريالات

4c) المجال: $[0, 24]$

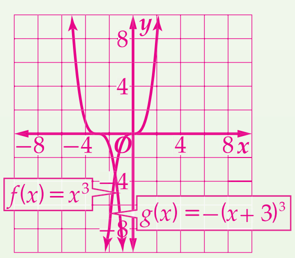
إجابة ممكنة: يجب أن يكون عدد الساعات أكبر من صفر وأقل من 24 ساعة.

14) f متزايدة على $(-\infty, 2.5)$، ومتناقصة على $(2.5, \infty)$.

15) f متناقصة على $(-\infty, -1.5)$، ومتزايدة على $(-1.5, 0)$، ثم متناقصة على $(0, 1.5)$ ومتزايدة على $(1.5, \infty)$.

16) 2.5، عظمى مطلقة.

18) $f(x) = x^3$



19) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{1}{x+6}$؛

المجال: $\{x \mid x \neq \pm 6 , x \in R\}$

20) $[g \circ f](x) = x^2 - 12x$؛

المجال: $\{x \mid x \in R\}$.

22) نعم؛ $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} + 2$

23) نعم؛ $f^{-1}(x) = \dfrac{8x+3}{x-1}, x \neq 1$

24) نعم؛ $f^{-1}(x) = 4 - x^2, x \geq 0$

25) لا يوجد.

مخطط المعالجة

المستوى 1 ضمن المتوسط		المستوى 2 دون المتوسط	
إذا	أخطأ بعض الطلاب في 25% أو أقل تقريبًا من الأسئلة،	إذا	أخطأ بعض الطلاب في 50% تقريبًا من الأسئلة،
فاختر	أحد المصادر الآتية:	فاختر	المصدر الآتي:
كتاب الطالب	الدروس 1-1، 1-2، 1-3، 1-4، 1-5، 1-6، 1-7	زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com
دليل المعلم	مشروع الفصل، ص (8)		
زيارة الموقع	www.obeikaneducation.com		

الدرس 1-1 ، ص (15 - 96)

21a) $\frac{-13}{79}$

21b) $\frac{16t+11}{48t^2+20t+1}$

21c) $\frac{-8a+23}{12a^2-46a+43}$

22a) 12

22b) $\frac{375x^3}{25x^2+5x-4}$

22c) $\frac{-192b^3+1152b^2-2304b+1536}{16b^2-68b+68}$

26) $\{x \mid x \neq -4, x \neq -1, x \in R\}$
أو $(-\infty, -4) \cup (-4, -1) \cup (-1, \infty)$

27) $\{x \mid x \neq -5, x \neq 8, x \in R\}$
أو $(-\infty, -5) \cup (-5, 8) \cup (8, \infty)$

28) $\{x \mid x \in R\}$ أو $(-\infty, \infty)$

29) $\{x \mid -\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6}, x \in R\}$ أو $\left[-\sqrt{6}, \sqrt{6}\right]$

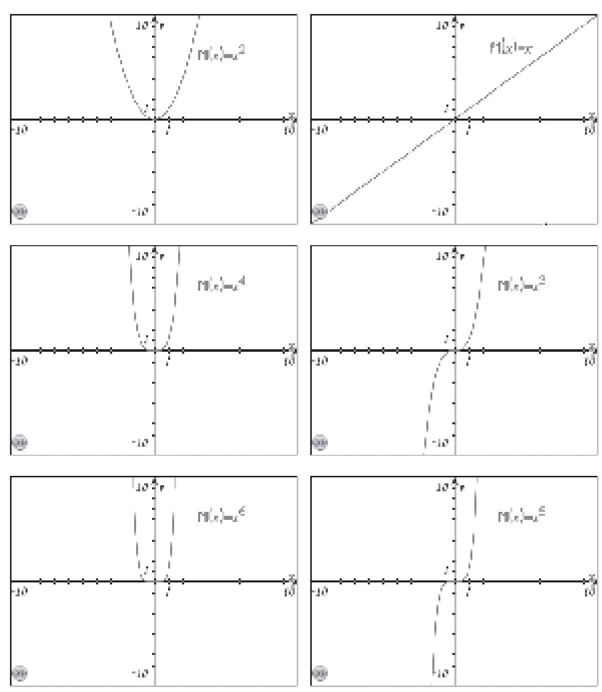
30) $\{x \mid x > 0.25, x \in R\}$ أو $(0.25, \infty)$

31) $\{x \mid x \neq -1, x \neq 0, x \in R\}$
أو $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, \infty)$

50) لا؛ إجابة ممكنة: لأن كل قيمة من قيم المدى ترتبط بقيمتين من المجال، ولحل المعادلة بالنسبة إلى y يكون هناك قيمتان موجبة وسالبة، والقيمة المطلقة لا تعطي قيمة y .

51) نعم؛ إجابة ممكنة: لأن كل قيمة في المدى ترتبط بقيمة واحدة من المجال، لذا تمثل دالة.

52a)



52b)

n	المدى
1	$(-\infty, \infty)$
2	$[0, \infty)$
3	$(-\infty, \infty)$
4	$[0, \infty)$
5	$(-\infty, \infty)$
6	$[0, \infty)$

52c) إجابة ممكنة: يكون المدى $[0, \infty)$ إذا كانت n زوجية.

52d) إجابة ممكنة: يكون المدى $(-\infty, \infty)$ إذا كانت n فردية.

53) سلمان, إجابة ممكنة: المجال هو
$(-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,\infty)$ أو
$\{x \mid x \neq -2, x = 2, x \in R\}$

54) $(-\infty,-3) \cup (-3,-1) \cup (-1, 5) \cup (5,\infty)$ أو
$\{x \mid x \neq -3, x \neq -1, x \neq 5, x \in R\}$؛
إجابة ممكنة: أفضل طريقة الصفة المميزة للمجموعة لأنه بدلًا من كتابة أربع فترات تقع ضمنها x نكتب ثلاث قيم غير ممكنة لـِ x، والمجموعة التي يمكن أخذ x منها، أي أنه عند تحديد قيمة ما على فترات متعددة، تكون الصفة المميزة للمجموعة أكثر فعالية.

59) إجابة ممكنة: تكون العلاقة دالة إذا ارتبطت كل قيمة x من المجال (مدخلة) بقيمة y واحدة فقط من المدى (مخرجة).

60) إجابة ممكنة: إذا ارتبط كل عنصر من المجال (إحداثي x) في مجموعة الأزواج المرتبة بعنصر واحد من المدى
(إحداثي y مختلف) تكون العلاقة دالة.

61) إجابة ممكنة: إذا ارتبطت كل قيمة لـِ x في الجدول بقيمة واحدة مختلفة لـِ y تكون العلاقة دالة.

62) إجابة ممكنة: إذا رسم خط رأسي عند أي قيمة x على التمثيل البياني وقطعه في نقطة واحدة تكون العلاقة دالة (اختبار الخط الرأسي)

63) إجابة ممكنة: تربط بين الإحداثيين x, y لكل زوج من الأزواج المرتبة.

الدرس 1-2 ، ص (24 - 27)

11) لا يوجد مقطع y، صفر الدالة هو 1 .

$$0 = \sqrt{x-1}$$
$$(0)^2 = \left(\sqrt{x-1}\right)^2$$
$$0 = x - 1$$
$$x = 1$$

12) المقطع y، هو 0 ،
أصفار الدالة $-1, 0, \frac{3}{2}$؛

$$0 = 2x^3 - x^2 - 3x$$
$$0 = x(2x^2 - x - 3)$$
$$0 = x(2x - 3)(x + 1)$$

$x = 0$ أو $2x - 3 = 0$ أو $x + 1 = 0$

$x = 0$ أو $x = \frac{3}{2}$ أو $x = -1$

13) المقطع y هو 0 ، صفر الدالة هو 0 .

$$0 = \sqrt[3]{x}$$
$$(0)^3 = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3$$
$$0 = x$$

14) المقطع y هو -2 , صفرا الدالة هما: $-\frac{1}{2}$ وَ $\frac{2}{3}$.

$0 = 6x^2 - x - 2$

$0 = (2x + 1)(3x - 2)$

$2x + 1 = 0$ أو $3x - 2 = 0$

$2x = -1$ أو $3x = 2$

$x = -\frac{1}{2}$ أو $x = \frac{2}{3}$

17)

x	y	(x,y)
1	$\frac{\sqrt{15}}{2}$	$\left(1, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$
1	$-\frac{\sqrt{15}}{2}$	$\left(1, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$
2	$\sqrt{3}$	$(2, \sqrt{3})$
2	$-\sqrt{3}$	$(2, -\sqrt{3})$
3	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\left(3, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$
3	$-\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\left(3, -\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$

يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور x ، والمحور y، ونقطة الأصل. وبما أن $x^2 + 4(-y)^2 = 16$ ، تكافئ $x^2 + 4y^2 = 16$، فإن منحنى الدالة متماثل حول المحور x .

x	y	(x,y)
-3	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\left(-3, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$
-2	$\sqrt{3}$	$(-2, \sqrt{3})$
-1	$\frac{\sqrt{15}}{2}$	$\left(-1, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$
1	$\frac{\sqrt{15}}{2}$	$\left(1, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$
2	$\sqrt{3}$	$(2, \sqrt{3})$
3	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\left(3, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$

بما أن $(-x)^2 + 4y^2 = 16$ تكافئ $x^2 + 4y^2 = 16$ ، فإن المنحنى متماثل حول المحور y .

x	y	(x, y)
0	-2	$(0, -2)$
-3	$-\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\left(-3, -\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$
-2	$-\sqrt{3}$	$(-2, -\sqrt{3})$
2	$\sqrt{3}$	$(2, \sqrt{3})$
3	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\left(3, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$
0	2	$(0, 2)$

بما أن $(-x)^2 + 4(-y)^2 = 16$ تكافئ $x^2 + 4y^2 = 16$ ، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

18) يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور x

x	y	(x, y)
1	2	$(1, 2)$
1	-2	$(1, -2)$
2	$\sqrt{5}$	$(2, \sqrt{5})$
2	$-\sqrt{5}$	$(2, -\sqrt{5})$
3	$\sqrt{6}$	$(3, \sqrt{6})$
3	$-\sqrt{6}$	$(3, -\sqrt{6})$

بما أن $x = (-y)^2 - 3$ تكافئ $x = y^2 - 3$ ، فإن المنحنى متماثل حول المحور x .

19) يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل

x	y	(x, y)
-4	4	$(-4, 4)$
-3	3	$(-3, 3)$
-2	2	$(-2, 2)$
2	-2	$(2, -2)$
3	-3	$(3, -3)$
4	-4	$(4, -4)$

بما أن $-x = -(-y)$ تكافئ $x = -y$ ، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

20) يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور x ، ومحور y ، ونقطة الأصل.

x	y	(x, y)
1	$\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\left(1, \frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$
1	$-\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\left(1, -\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$
2	$\frac{\sqrt{35}}{5}$	$\left(2, \frac{\sqrt{35}}{5}\right)$
2	$-\frac{\sqrt{35}}{5}$	$\left(2, -\frac{\sqrt{35}}{5}\right)$
3	$\frac{4\sqrt{5}}{5}$	$\left(3, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$
3	$-\frac{4\sqrt{5}}{5}$	$\left(3, -\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$

بما أن $9x^2 - 25(-y)^2 = 1$ تكافئ $9x^2 - 25y^2 = 1$ ، فإن المنحنى متماثل حول المحور x .

x	y	(x, y)
-3	$\frac{4\sqrt{5}}{5}$	$\left(-3, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$
-2	$\frac{\sqrt{35}}{5}$	$\left(-2, \frac{\sqrt{35}}{5}\right)$
-1	$\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\left(-1, \frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$
1	$\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\left(1, \frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$
2	$\frac{\sqrt{35}}{5}$	$\left(2, \frac{\sqrt{35}}{5}\right)$
3	$\frac{4\sqrt{5}}{5}$	$\left(3, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$

بما أن $9(-x)^2 - 25y^2 = 1$ تكافئ $9x^2 - 25y^2 = 1$. فإن المنحنى متماثل حول المحور y .

x	y	(x, y)
-3	$\frac{4\sqrt{5}}{5}$	$\left(-3, \frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$
-2	$\frac{\sqrt{35}}{5}$	$\left(-2, \frac{\sqrt{35}}{5}\right)$
-1	$\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\left(-1, \frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$
1	$-\frac{2\sqrt{2}}{5}$	$\left(1, \frac{-2\sqrt{2}}{5}\right)$
2	$-\frac{\sqrt{35}}{5}$	$\left(2, \frac{-\sqrt{35}}{5}\right)$
3	$-\frac{4\sqrt{5}}{5}$	$\left(3, \frac{-4\sqrt{5}}{5}\right)$

بما أن $9(-x)^2 - 25(-y)^2 = 1$ تكافئ $9x^2 - 25y^2 = 1$ ، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

(21 يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل

x	y	(x, y)
-4	-16	$(-4, -16)$
-2	-2	$(-2, -2)$
-1	$-\frac{1}{4}$	$\left(-1, -\frac{1}{4}\right)$
1	$\frac{1}{4}$	$\left(1, \frac{1}{4}\right)$
2	2	$(2, 2)$
4	16	$(4, 16)$

بما أن $-y = \frac{(-x)^3}{4}$ تكافئ $y = \frac{x^3}{4}$ ، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل.

(22 يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل

x	y	(x, y)
-10	1	$(-10, 1)$
-5	2	$(-5, 2)$
-1	10	$(-1, 10)$
1	-10	$(1, -10)$
5	-2	$(5, -2)$
10	-1	$(10, -1)$

بما أن $-y = -\frac{10}{(-x)}$ تكافئ $y = -\frac{10}{x}$ ، فإن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل .

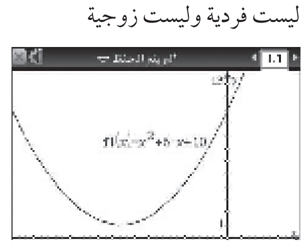
(23 يتضح من التمثيل البياني أن المنحنى متماثل حول المحور y

x	y	(x, y)
-3	9	$(-3, 9)$
-2	-16	$(-2, -16)$
-1	-7	$(-1, -7)$
1	-7	$(1, -7)$
2	-16	$(2, -16)$
3	9	$(3, 9)$

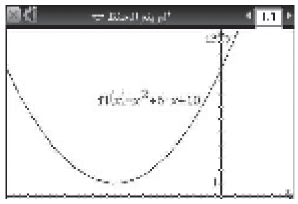
بما أن $y = (-x)^4 - 8(-x)^2$ تكافئ $y = x^4 - 8x^2$ ، فإن المنحنى متماثل حول المحور y .

(24 لا يوجد تماثل.

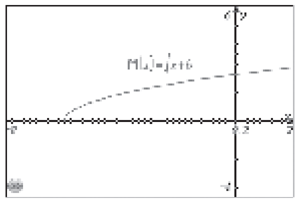
(25 ليست فردية وليست زوجية



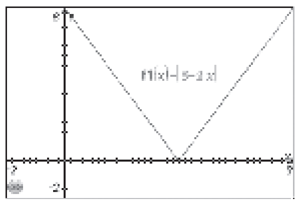
(26 ليست فردية وليست زوجية



(27 ليست فردية وليست زوجية

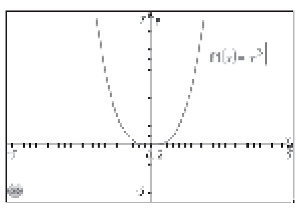


(28 ليست فردية وليست زوجية

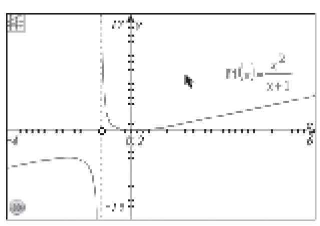


(29 الدالة زوجية، ومتماثلة حول محور y

$$f(-x) = \left|(-x)^3\right|$$
$$= \left|-x^3\right|$$
$$= f(x)$$

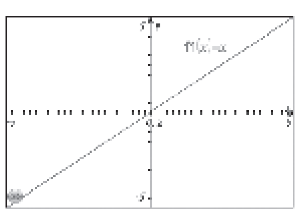


(30 ليست فردية وليست زوجية

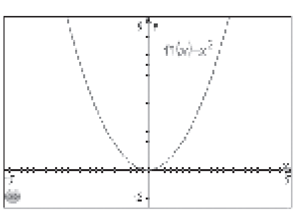


(33a

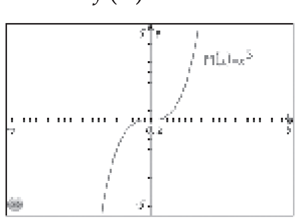
$f(x) = x$



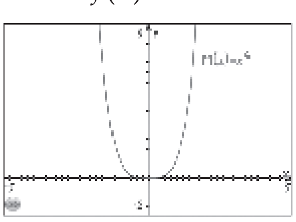
$f(x) = x^2$



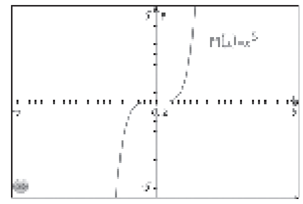
$f(x) = x^3$



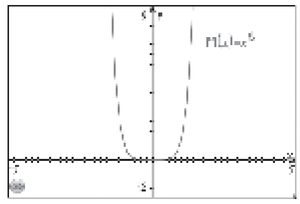
$f(x) = x^4$



$f(x) = x^5$



$f(x) = x^6$



33b) $f(x) = x$: المجال $= \{x \mid x \in R\}$، المدى $= \{y \mid y \in R\}$

$f(x) = x^2$: المجال $= \{x \mid x \in R\}$، المدى $= \{y \mid y \geq 0, y \in R\}$

$f(x) = x^3$: المجال $= \{x \mid x \in R\}$، المدى $= \{y \mid y \in R\}$

$f(x) = x^4$: المجال $= \{x \mid x \in R\}$، المدى $= \{y \mid y \geq 0, y \in R\}$

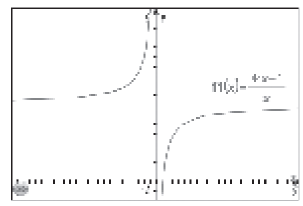
$f(x) = x^5$: المجال $= \{x \mid x \in R\}$، المدى $= \{y \mid y \in R\}$

$f(x) = x^6$: المجال $= \{x \mid x \in R\}$، المدى $= \{y \mid y \geq 0, y \in R\}$

33c) $f(x) = x, f(x) = x^3, f(x) = x^5$ دوال متماثلة حول نقطة الأصل.
$f(x) = x^2, f(x) = x^4, f(x) = x^6$ دوال متماثلة حول المحور y.

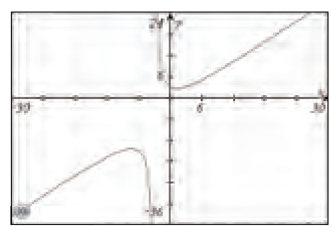
33d) المجال $= \{x \mid x \in R\}$، المدى $= f(x) = x^{35}$؛ $\{y \mid y \in R\}$
دالة فردية ، لذا فهي متماثلة حول نقطة الأصل.

35)



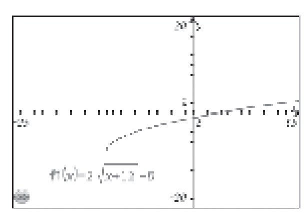
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4x-1}{x} \\ 0 &= \frac{4x-1}{x} \\ 4x-1 &= 0 \\ 4x &= 1 \\ x &= \frac{1}{4} = 0.25 \end{aligned}$$

36)



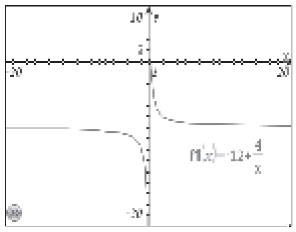
لا توجد أصفار.

37)



$$\begin{aligned} h(x) &= 2\sqrt{x+12} - 8 \\ 0 &= 2\sqrt{x+12} - 8 \\ 8 &= 2\sqrt{x+12} \\ 4 &= \sqrt{x+12} \\ 16 &= x + 12 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

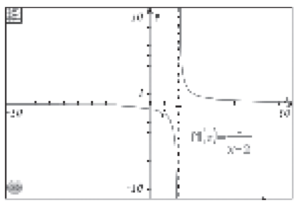
38)



$$\begin{aligned} g(x) &= -12 + \frac{4}{x} \\ \frac{4}{x} + -12 &= 0 \\ \frac{4}{x} &= 12 \\ 12x &= 4 \\ x &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

43b) إجابة ممكنة: عندما تقترب x من 2 من اليسار تقترب الدالة من $-\infty$.
وعندما تقترب x من 2 من اليمين تقترب الدالة من ∞.

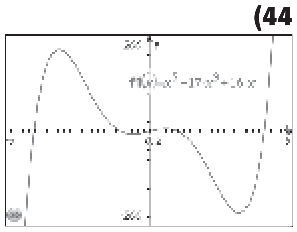
43c)



إجابة ممكنة: عندما تقترب x من 2 من اليسار تتناقص قيم الدالة بلا حدود. وعندما تقترب x من 2 من اليمين تتزايد قيم الدالة بلا حدود.

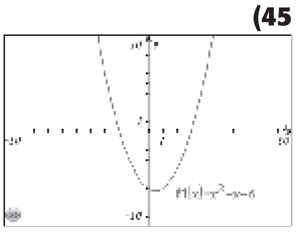
43d) إجابة ممكنة: عندما تتزايد x بشكل كبير، وتكون $x > 3$، يتزايد مقام الكسر بشكل كبير. وهذا يؤدي إلى تناقص قيمة الكسر، لكنه لا يصل إلى الصفر، وعليه لا يقطع المنحنى المحور x . وهذا ينطبق على قيم x التي تتناقص بمعدلات كبيرة عندما تكون $x < -1$. وعندما تكون x سالبة تكون القيمة سالبة، ولكنها لا تصل إلى الصفر. عندما تقترب x من 2 يبدأ الفرق d بين x وَ 2 بالتناقص، وأما عندما تكون $-1 < d < 1$، فيصبح المقام أصغر من البسط، مما يجعل قيمة الكسر كبيرة، وإذا كان الفرق موجبًا فستؤول قيمة الكسر إلى ما لانهاية، أما إذا كان الفرق سالبًا فستؤول قيمة الكسر إلى سالب ما لانهاية. الدالة غير معرفة عند 2؛ لأن الفرق في المقام لا يكون صفرًا.

44)



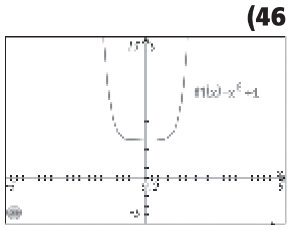
تماثل حول نقطة الأصل، الدالة فردية

45)



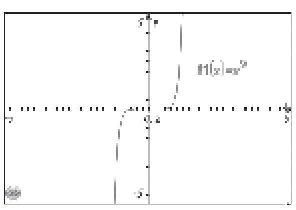
لا يوجد تماثل؛ ليست فردية ولا زوجية

46)



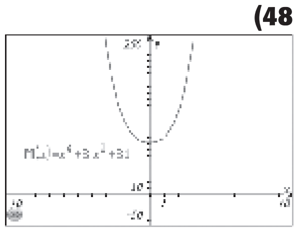
تماثل حول محور الصادات، الدالة زوجية.

47)



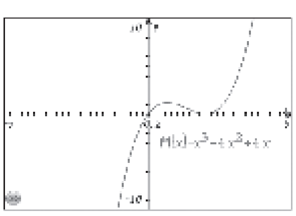
تماثل حول نقطة الأصل؛ الدالة فردية

48)



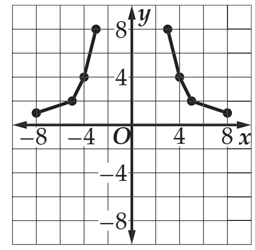
تماثل حول محور الصادات، الدالة زوجية.

49)

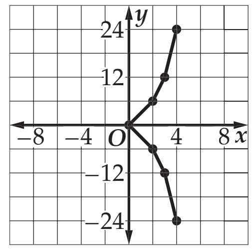


لا يوجد تماثل، ليست فردية وليست زوجية

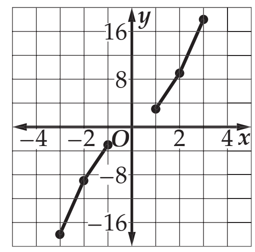
(50



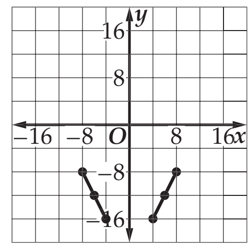
(51



(52

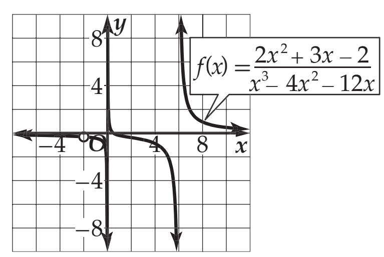


(53



54 يمكن أن تقطع الدالة المحور x أكثر من مقطع (أكثر من صفر)؛ لأن قيمة x لا تعتمد على قيمة y. في حين قيمة y تعتمد على قيمة x، ويجب أن ترتبط كل قيمة لـ x بقيمة واحدة فقط لـ y. إذا قطعت العلاقة المحور y أكثر من مقطع فإنها لا تحقق اختبار الخط الرأسي، ولا تكون دالة.

55 المجال = $(-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 6) \cup (6, \infty)$ ،
المدى = $\{y \mid y \in \mathrm{R}\}$



من التمثيل البياني يمكن أن تكون x أي عدد حقيقي ما عدا $-2, 0, 6$. وتكون y أي عدد حقيقي.

56 خطأ. إجابة ممكنة: إذا كانت $n = 0$، يكون المدى $\{y \mid y = 0\}$. وإذا كانت n سالبة يكون المدى $\{y \mid y \leq 0, y \in \mathrm{R}\}$. وعليه يكون المدى $\{y \mid y \geq 0, y \in \mathrm{R}\}$ عندما تكون n موجبة فقط.

57 صحيح. إجابة ممكنة: إذا كانت $n = 0$، فإن المدى $\{y \mid y = 0\}$. وإذا كانت n سالبة تكون الدالة معرفة في المجال $\{x \mid x \leq 0, x \in \mathrm{R}\}$، ويكون المدى $\{y \mid y \geq 0, y \in \mathrm{R}\}$. وكذلك، إذا كانت n موجبة تكون الدالة معرفة في المجال $\{x \mid x \geq 0, x \in \mathrm{R}\}$ ويكون المدى $\{y \mid y \geq 0, y \in \mathrm{R}\}$.

58 خطأ؛ $y = x^3$. دالة فردية، صورة النقطة $(2,8)$ بانعكاس في المستقيم $y = -x$ هي النقطة $(-8, -2)$ و ليست النقطة $(-2, -8)$.

59 صحيح. إجابة ممكنة: إذا كان n عددًا زوجيًا فإن الدالة تُدوّر بمضاعفات $360°$، وهذا يعيد الدالة إلى مكانها الأصلي. وإذا كانت n عددًا فرديًا فإن الدالة تُدوّر بمضاعفات $180°$ حول نقطة الأصل، وهذا مكافئ لانعكاس حول المحور x الذي يعمل على عكس إشارات y، و الذي يبقى على الدالة زوجية. فمثلاً، في الدالة الزوجية $f(x) = f(-x)$ وبعد دورانها بزاوية مقدارها $180°$ تصبح $f(-x) = -f(x)$.

(60

دالة فردية، إجابة ممكنة:

$b(-x) = a[-(-x)]$	تعريف الدالة $b(x)$
$= a(x)$	$-(-x) = x$
$= -a(-x)$	لأن $a(x)$ فردية
$= -b(x)$	تعريف الدالة $b(x)$

(61

دالة فردية، إجابة ممكنة:

$b(-x) = -a(-x)$	تعريف الدالة $b(x)$
$= -[-a(x)]$	لأن $a(x)$ فردية
$= a(x)$	لأن $-(-x) = x$
$= -b(x)$	تعريف الدالة $b(x)$

(62

دالة زوجية، إجابة ممكنة:

$b(-x) = [a(-x)]^2$	تعريف الدالة $b(x)$
$= [-a(x)]^2$	لأن $a(x)$ فردية
$= (-1)^2\,[a(x)]^2$	$(x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2$
$= [a(x)]^2$	$(-1)^2 = 1$
$= b(x)$	تعريف الدالة $b(x)$

(63

دالة زوجية، إجابة ممكنة:

$b(-x) = a(\lvert -x \rvert)$	تعريف الدالة $b(x)$
$= a(x)$	لأن $\lvert -x \rvert = x$
$= a(\lvert x \rvert)$	لأن $\lvert x \rvert = x$
$= b(x)$	تعريف الدالة $b(x)$

(64

دالة فردية، إجابة ممكنة:

$b(-x) = [a(-x)]^3$	تعريف الدالة $b(x)$
$= [-a(x)]^3$	لأن $a(x)$ فردية
$= -[a(x)]^3$	لأن $(-1)^3 = -1$
$= -b(x)$	تعريف الدالة $b(x)$

65 أحيانًا يمثل دالة. إجابة ممكنة: منحنى العلاقة المتماثل حول المحور y يمثل دالة أحيانًا ومثله منحنى العلاقة المتماثل حول المستقيم $x = 4$؛ لأن المستقيم $x = 4$ هو إزاحة للمحور y بمقدار 4 وحدات إلى اليمين.

66 لا يمثل دالة. إجابة ممكنة: منحنى العلاقة المتماثل حول المحور x لا يمثل دالة ومثله المنحنى المتماثل حول المستقيم $y = 2$؛ لأن المستقيم $y = 2$ هو إزاحة للمحور x بمقدار وحدتين إلى أعلى.

67 لا يمثل دالة. إجابة ممكنة: منحى العلاقة المتماثل حول المحور x، لا يمثل دالة.

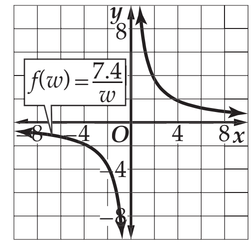
68 إجابة ممكنة: إذا كانت العلاقة متماثلة حول المحور x فإنه توجد نقطتان على خط رأسي واحد وعلى بعدين متساويين من المحور x. وهذا يعني أن عنصرًا من مجال الدالة ارتبط بعنصرين من المدى، وهذا يخالف تعريف الدالة.

الدرس 3-1 ، ص (37 - 35)

8a نعم متصلة؛ إجابة ممكنة: بما أن $f(4) = \frac{7.4}{0.4} = 18.5$؛ فإن الدالة معرفة عند $x = 0.4$. لذا فإن $\lim\limits_{x \to 4} f(w) = 18.5$.

8b غير متصلة؛ للدالة عدم اتصال لا نهائي عند $w = 0$. إجابة ممكنة: بما أن $f(0)$ غير موجودة، فإن $f(w)$ غير متصلة عند $w = 0$، و $\lim\limits_{x \to 0} f(w)$ غير موجودة لأن $f(w)$ تتناقص بلا حدود عندما تقترب w من 0 من اليسار، وتتزايد بلا حدود عندما تقترب w من 0 من اليمين. وعليه فإن للدالة عدم اتصال لانهائي عند $w = 0$.

(8c



15) يتضح من التمثيل البياني أن $f(x) \to \infty$ عندما $x \to -\infty$، $f(x) \to \infty$ عندما $x \to \infty$.

x	−10000	−1000	0	1000	10,000
$f(x)$	$4 \cdot 10^{16}$	$4 \cdot 10^{12}$	0	$4 \cdot 10^{12}$	$4 \cdot 10^{16}$

16) يتضح من التمثيل البياني أن $f(x) \to \infty$ عندما $x \to -\infty$، $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to \infty$.

x	−10000	−1000	0	1000	10000
$f(x)$	$5 \cdot 10^{12}$	$5 \cdot 10^{9}$	−1	$-5 \cdot 10^{9}$	$-5 \cdot 10^{12}$

17) يتضح من التمثيل البياني أن $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$، $f(x) \to \infty$ عندما $x \to \infty$.

x	−10,000	−1000	0	1000	10,000
$f(x)$	−9995	−995	−0.3333	1005	10,005

18) يتضح من التمثيل البياني أن $f(x) \to -4$ عندما $x \to -\infty$، $f(x) \to -4$ عندما $x \to \infty$.

x	−10,000	−1000	0	1000	10,000
$f(x)$	−3.9981	−3.9811	−0.8333	−4.0191	−4.0019

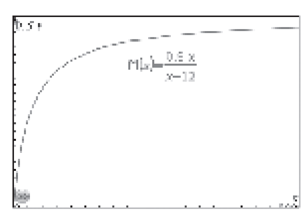
19) يتضح من التمثيل البياني أن $f(x) \to -\infty$ عندما $x \to -\infty$، $f(x) \to \infty$ عندما $x \to \infty$.

x	−10,000	−1000	0	1000	10,000
$f(x)$	−5000	−500	غير معرفة	499.7	4999.7

20) يتضح من التمثيل البياني أن $f(x) \to -2$ عندما $x \to -\infty$، $f(x) \to -2$ عندما $x \to \infty$.

x	−1000	−100	−10	0	10	100	1000
$f(x)$	−1.99999	−1.9999	−1.997	−5	−1.98	−1.9999	−1.99999

(21a



x	0	10	100	1000	10,000
$R(x)$	0	0.2273	0.4464	0.4941	0.4994

21b) إجابة ممكنة: يبيّن سلوك طرفي التمثيل البياني أنه إذا زاد تركيز العامل المساعد فيقترب معدل التفاعل الكيميائي من 0.5.

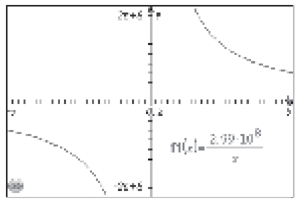
22) 0؛ إجابة ممكنة: عندما $u \to \infty$، فإن قيمة الكسر تقل. لذا فإن $f(u)$ تقترب من 0.

23) 0؛ إجابة ممكنة: عندما $x \to \infty$، فإن قيمة الكسر تقل. لذا فإن $q(x)$ تقترب من 0.

24) 0 ؛ إجابة ممكنة: عندما $x \to \infty$ ، فإن قيمة الكسر تقل. لذا فإن $f(x)$ تقترب من 0.

25) 0 ؛ إجابة ممكنة: عندما $r \to \infty$ ، فإن قيمة الكسر تقل. لذا فإن $h(r)$ تقترب من 0.

(29a

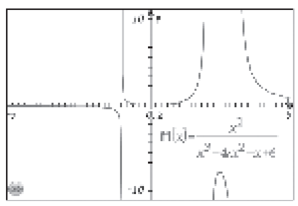


(29b

x	$f(x)$
−10,000	-3.10^4
−1000	-3.10^5
−100	-3.10^6
0	غير معرفة
100	3.10^6
1000	3.10^5
10,000	3.10^4

يتضح من التمثيل البياني أن $f(x) \to 0$ عندما $x \to -\infty$، و $f(x) \to 0$ عندما $x \to \infty$.

(30

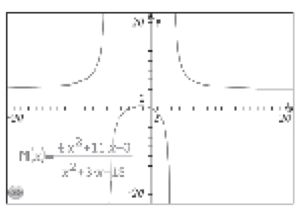


غير متصلة: عدم اتصال لا نهائي عند $x = -1, x = 2, x = 3$: سلوك نهاية الدالة:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

الأصفار: $x = 0$

(31



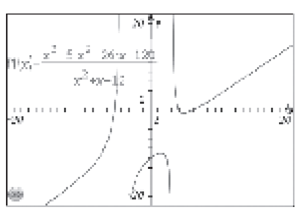
غير متصلة: عدم اتصال لا نهائي عند $x = -6$ ؛ سلوك نهاية الدالة:

$\lim_{x\to-\infty} h(x) = 4$ ؛

$\lim_{x\to\infty} h(x) = 4$ ؛

الأصفار: $x = -3,\ \frac{1}{4}$

(32

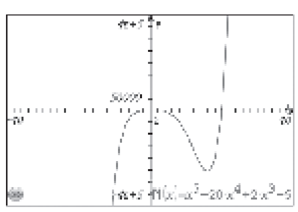


غير متصلة: عدم اتصال لا نهائي عند $x = -4$. $x = 3$؛ سلوك نهاية الدالة: $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$

$\lim_{x\to\infty} h(x) = \infty;$

الأصفار: $x = -5, 4, 6$

(33



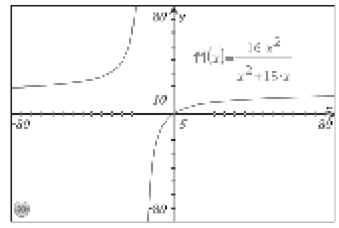
سلوك نهاية الدالة:

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

$\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$

x	$f(x)$
−10000	$-1 \cdot 10^{20}$
−1000	$-1 \cdot 10^{15}$
−100	$-1 \cdot 10^{10}$
0	−5
100	$8 \cdot 10^{9}$
1000	$9.8 \cdot 10^{14}$
10000	$1 \cdot 10^{20}$

(34



x	$f(x)$
$-10{,}000$	16.024
-1000	16.244
-100	18.824
0	غير معرفة
100	13.913
1000	15.764
10,000	15.976

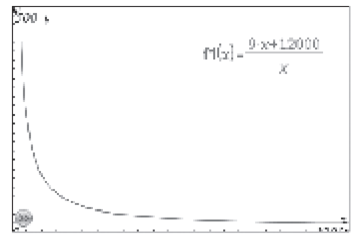
سلوك نهاية الدالة :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 16$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 16$$

(35a $f(n) = \dfrac{9n + 12000}{n}$

(35b



(35c 9 ريالات; إجابة ممكنة : عندما تؤول n إلى ∞، فإن $f(n)$ تؤول إلى 9. لذا يكون معدل تكلفة القميص الواحد 9 ريالات عندما يتزايد عدد القمصان المبيعة بشكل كبير.

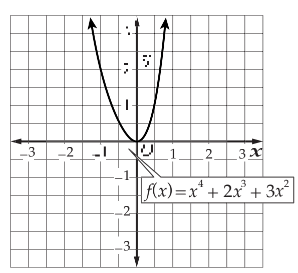
(36a $f_1(x) = \dfrac{3x^3 + 2}{x^3 + 4}; f_2(x) = \dfrac{-x^3 + 5}{x^3 + 7}; f_3(x) = \dfrac{9x^3 - 6}{x^3 + 8}$

(36b

	$f(x) = \dfrac{ax^3 + b}{cx^3 + d}$					
	a	b	c	d	$\lim_{x\to\infty} f(x)$	$\lim_{x\to-\infty} f(x)$
$a > c$	6	-5	3	1	2	2
$a < c$	3	4	12	13	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$a = c$	7	1	7	-4	1	1

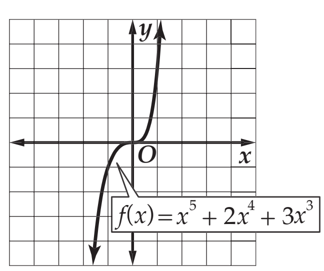
(36c إجابة ممكنة: نهاية الدالة $f(x) = \dfrac{ax^3 + b}{cx^3 + d}$ عندما تقترب x من كل من ∞، و $-\infty$ تساوي $\frac{a}{c}$.

(37a



إجابة ممكنة: إذا كان n عددًا زوجيًّا، فإن طرفي المنحنى يقتربان من ∞.

(37b

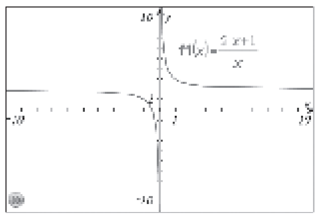


إجابة ممكنة: إذا كان n عددًا فرديًّا، فإن طرف التمثيل البياني من اليسار يؤول إلى $-\infty$ وطرف المنحنى من اليمين يؤول إلى ∞.

(45 إجابة ممكنة : للدالة $f(x) = \dfrac{x(x+3)}{x}$ عدم اتصال قابل للإزالة عند $x = 0$. وعدم الاتصال هذا يمكن إزالته بالقسمة على x. فيصبح التمثيل البياني للدالة شبيهًا بالتمثيل البياني للدالة $y = x + 3$، وعدم الاتصال عند $x = 0$ غير ظاهر على الرغم من أنه موجود. الدالة $f(x)$ تختلف عن الدالة $g(x) = x + 3$ لأن $f(x)$ غير معرفة $x = 0$ وتصبح الدالة المتصلة هي

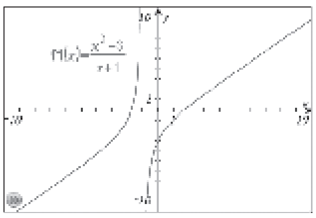
$$f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \neq 0 \\ 3, & x = 0 \end{cases}$$

(46 $x = -\frac{1}{2}$



$$f(x) = \frac{2x + 1}{x}$$
$$0 = \frac{2x + 1}{x}$$
$$0 = 2x + 1$$
$$-1 = 2x$$
$$-\frac{1}{2} = x$$

(47 $x = -1.732, x = 1.732$

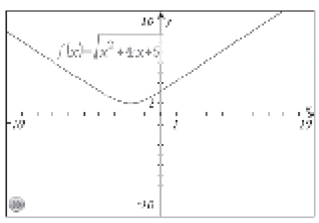


$$g(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 1}$$
$$0 = \frac{x^2 - 3}{x + 1}$$
$$0 = x^2 - 3$$
$$3 = x^2$$

$x = \pm\sqrt{3}$ أو

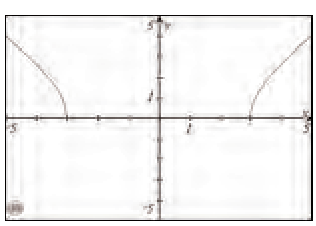
$$x = \pm 1.732$$

(48 لا يوجد أصفار.



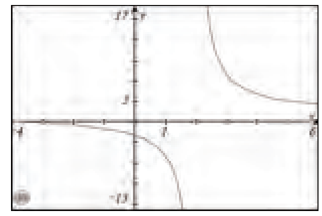
(55 $f(-x) = \sqrt{(-x^2) - 9}$

$$= \sqrt{x^2 - 9}$$
$$= f(x)$$



الدالة زوجية، ومنحناها متماثل حول المحور y.

56) $f(-x) = \frac{-x+4}{-x-2} \neq f(x)$



الدالة ليست زوجية وليست فردية.

الدرس 4-1 ، ص (46 - 39)

1A) f متناقصة على $(-\infty, 2)$ ومتزايدة على $(2, \infty)$

$(-\infty, 2)$

x	-8	-6	-4	-2	0	2
$f(x)$	197	125	69	29	5	-3

$(2, \infty)$

x	2	4	6	8	10	12
$f(x)$	-3	5	29	69	125	197

1B) h متزايدة على $(-\infty, -3)$ وثابتة على $(-3, \infty)$

$(-\infty, -3)$

x	-8	-7	-6	-5	-4	-3
$f(x)$	-13	-10	-7	-4	-1	2

$(-3, \infty)$

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	2	2	2	2	2	2

6) يتضح من التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية مقدارها 0.25 عند $x = -0.5$ و 0.5، وقيمة صغرى محلية مقدارها -9 عند $x = 2.5$، ولها قيمة صغرى محلية عند $x = 0$ ومقدارها 0.

7) واضح من التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية مقدارها 3 عند $x = -1.5$, 1.5، ولها قيمة صغرى محلية مقدارها -1 عند $x = 0$.

8) يتضح من التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية مقدارها -60 عند $x = -2.5$، ولها قيمة عظمى محلية مقدارها 60 عند $x = 2.5$.

9) يتضح من التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية مقدارها -1100 عند $x = 3.5$، ولها قيمة صغرى مطلقة مقدارها -1300 عند $x = -3.5$، ولها قيمة عظمى محلية مقدارها 0 عند $x = 0$.

10) يتضح من التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية مقدارها -1 عند $x = 1$، ولها قيمة عظمى محلية مقدارها 0 عند $x = 2$.

11) يتضح من التمثيل البياني أن للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية مقدارها -4 عند $x = 1$، ولها قيمة عظمى محلية مقدارها 4 عند $x = -1$، ولها قيمة عظمى مطلقة مقدارها 22 عند $x = 4$.

12) عظمى محلية عند $(1.08, 0.04)$؛ وصغرى محلية عند $(-1.08, -10.04)$.

13) صغرى مطلقة عند $(-1.38, -7.08)$.

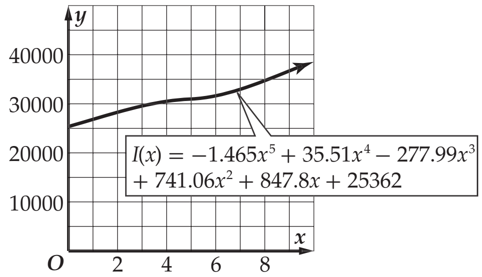
14) عظمى محلية عند $(1.11, 2.12)$؛ صغرى محلية عند $(-0.17, -1.08)$.

15) عظمى محلية عند $(0.41, 0.30)$؛ صغرى محلية عند $(1.62, -7.85)$؛ صغرى مطلقة عند $(-1.64, -11.12)$.

16) عظمى محلية عند $(-3.72, 14.23)$، $(2.49, 1.45)$؛ صغرى محلية عند $(5.90, -6.83)$، $(0.32, -0.11)$.

17) عظمى محلية عند $(-1.66, 3.43)$؛ صغرى محلية عند $(0.93, -3.82)$.

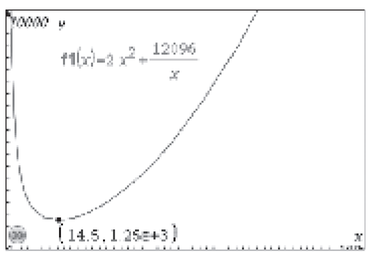
28a)



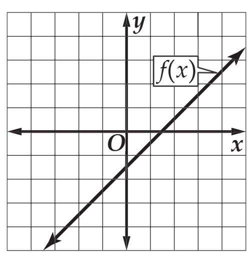
28b) 1280.93 ريالًا؛ إجابة ممكنة : متوسط معدّل التغير في دخل الفرد من عام 1423 إلى عام 1430 لهذا الشخص 1280.90 ريالًا.

28c) متوسط التغير أقل ما يمكن في الفترة من عام 1420 إلى عام 1424 ومقداره 826.43 ريالًا، وكان أعلى ما يمكن في الفترة من عام 1423 إلى عام 1427 ومقداره 1711.44 ريالًا.

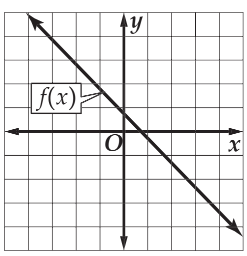
29) $14.5 \text{ ft} \times 14.5 \text{ ft} \times 14.5 \text{ ft}$؛ إجابة ممكنة: الدالة التي تعطي مساحة السطح الخارجي للصندوق بدلالة طول ضلع القاعدة هي $f(w) = 2w^2 + \frac{12.096}{w}$. يظهر تمثيل الدالة أن القيمة الصغرى المطلقة تكون عندما $w = 14.5$ ft.



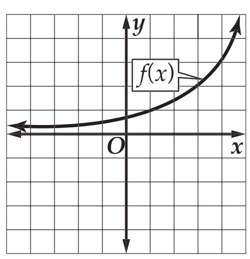
30) إجابة ممكنة:



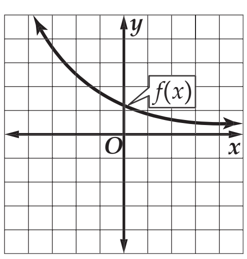
31) إجابة ممكنة:



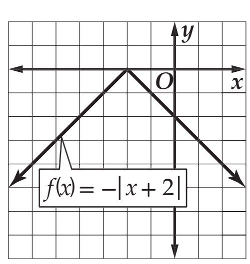
32) إجابة ممكنة:



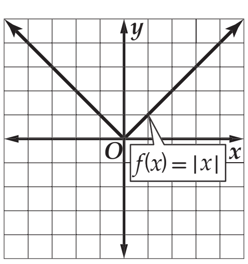
33) إجابة ممكنة:



34) إجابة ممكنة:

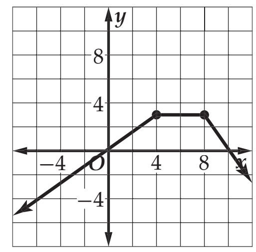


35) إجابة ممكنة:

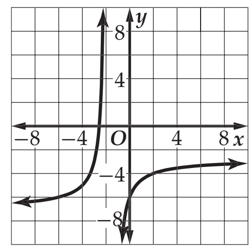


41) إجابة ممكنة: أحد أسباب الاختلاف في متوسط معدّل التغير هو أن عبدالله قد واجهته إشارات ضوئية في أثناء مسيره، مما أدى إلى نقص في معدل المسافة المقطوعة، وسبب آخر أنه سلك طرقًا فرعية في الساعة الأولى من الرحلة قبل أن يدخل طريقًا سريعًا في الساعات الثلاث اللاحقة. الفترتان اللتان يبدو فيهما أنه لم يتحرك قد تكونان فترتي استراحة أو لتناول الطعام، وربما كان سبب التوقف وجود حادث أدى إلى توقف حركة السير.

42) إجابة ممكنة:

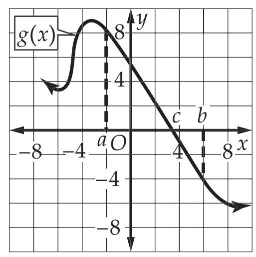


43) إجابة ممكنة:

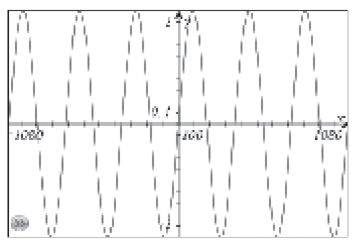


44) إجابة ممكنة: بما أن $f(c)$ قيمة صغرى محلية فإن $f(a)$ أكبر من $f(c)$ عندما a أصغر من c. وعليه إذا تزايدت قيم x من a إلى c فإن قيم الدالة تتناقص.

45) إجابة ممكنة: بما أن $g(a)$ موجبة، و $g(b)$ سالبة، و g متصلة ، فإنه عند إحدى النقاط c بين a و b يجب أن يقطع منحنى g المحور x ويكون $g(c) = 0$؛ أي أن c صفر للدالة.



46) توجد قيمة عظمى محلية عند عدد لا نهائي من قيم x . وكذلك الحال بالنسبة للقيمة الصغرى المحلية.
القيمة العظمى المحلية تساوي 1.
وتكون عند
$\{x \mid x = 90 + 360n, n \in Z\}$
والقيمة الصغرى المحلية تساوي -1 ،
وتكون عند
$\{x|x = 270 + 360n, n \in Z\}$

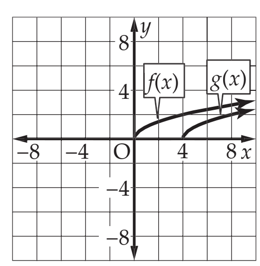


47) إجابة ممكنة: عندما تكون الدالة ثابتة على فترة فإن قيم y متساوية، لذا فإن قيم y لنقاط القاطع متساوية ، ويكون القاطع في هذه الحالة أفقيًا وميله 0.

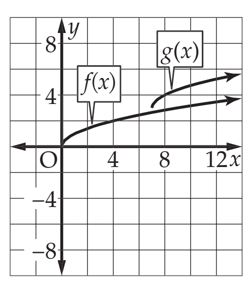
48) إجابة ممكنة: عندما تكون الدالة متزايدة على فترة يكون متوسط معدّل التغير موجبًا، وإذا كانت الدالة متناقصة على فترة يكون متوسط معدّل التغير سالبًا ، وإذا كانت الدالة ثابتة على فترة يكون متوسط التغير صفرًا.

الدرس 5-1 ، ص (57 - 55)

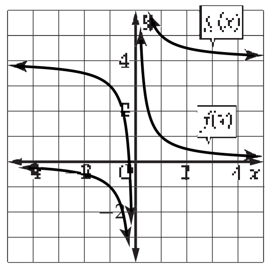
7)



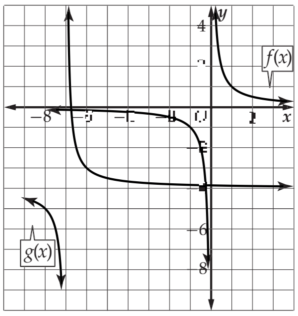
8)



9)



10)



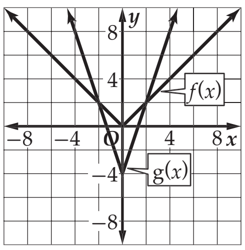
11) إجابة ممكنة: منحنى $g(x)$ عبارة عن منحنى $f(x)$ تحت تأثير انسحاب مقداره 3 وحدات إلى اليسار، $g(x) = [x + 3]$.

12) إجابة ممكنة: منحنى $g(x)$ عبارة عن منحنى $f(x)$ بانعكاس حول المحور y ، يتبعه انسحاب مقداره 5 وحدات إلى اليمين؛ $g(x) = [-x + 5]$.

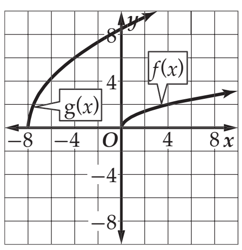
13) منحنى $g(x)$ عبارة عن منحنى $f(x)$ تحت تأثير انسحاب مقداره 8 وحدات إلى اليمين؛ $g(x) = |x - 8|$.

14) منحنى $g(x)$ عبارة عن منحنى $f(x)$ تحت تأثير انسحاب مقداره وحدة واحدة إلى اليمين ووحدتان إلى أسفل ؛ $g(x) = |x - 1| - 2$.

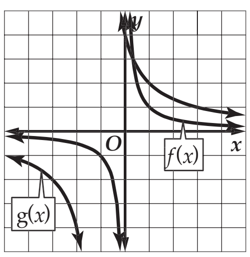
15) $f(x) = |x|$؛ منحنى $g(x)$ هو توسّع رأسي يتبعه انسحاب بمقدار 4 وحدات إلى أسفل للدالة $f(x)$.



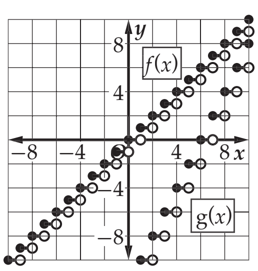
16) $f(x) = \sqrt{x}$: منحنى $g(x)$ هو توسّع رأسي يتبعه انسحاب مقداره 8 وحدات إلى اليسار لمنحنى $f(x)$.



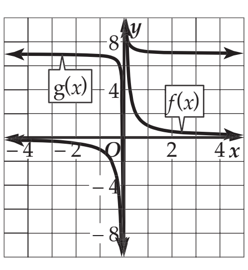
17) $f(x) = \frac{1}{x}$: منحنى $g(x)$ هو توسّع رأسي يتبعه انسحاب بمقدار وحدة واحدة إلى اليسار لمنحنى $f(x)$.



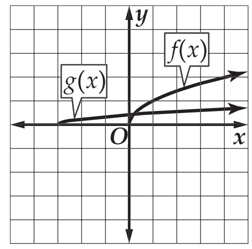
18) الدالة الرئيسية هي $f(x) = [x]$، ومنحنى الدالة $g(x)$ هو انسحاب لمنحنى الدالة $f(x) = [x]$ بمقدار 6 وحدات إلى اليمين، ثم توسع رأسي.



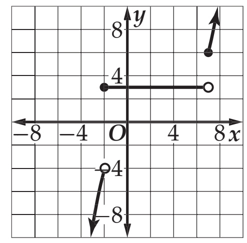
19) $f(x) = \frac{1}{x}$: منحنى $g(x)$ هو تضيق رأسي يتبعه انسحاب مقداره 7 وحدات إلى أعلى لمنحنى $f(x)$.



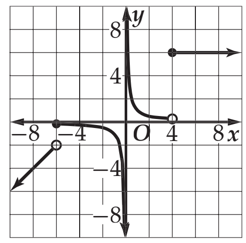
(20 $f(x)=\sqrt{x}$ ؛ منحنى $g(x)$ هو تضييق رأسي يتبعه انسحاب مقداره 3 وحدات إلى اليسار لمنحنى $f(x)$.



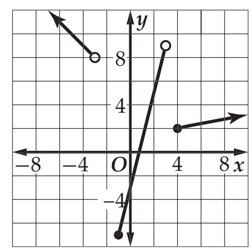
(21



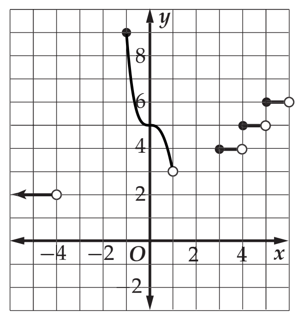
(22



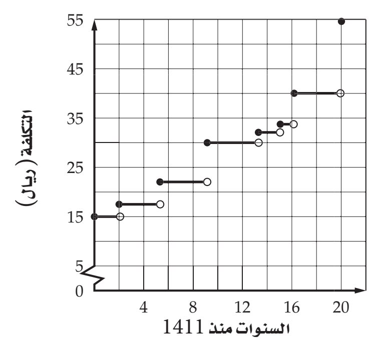
(23



24



(25

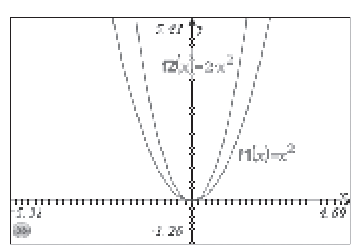


(26a منحنى $c(x)$ هو تضييق رأسي لمنحنى $f(x)$، يتبعه انسحاب مقداره 20 وحدة إلى أعلى.

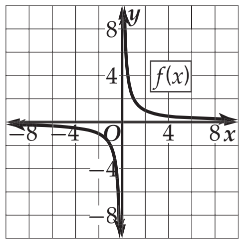
(26b $c(x)=30+0.1[x]$

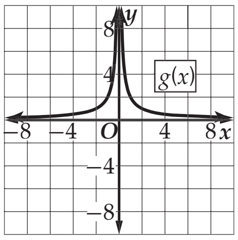
(26c نعم ؛ بعد 100 دقيقة

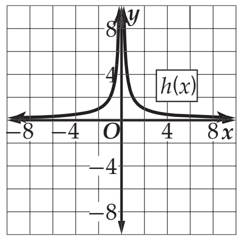
(27b



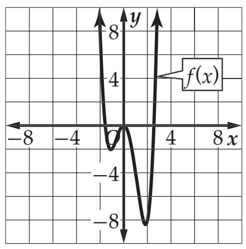
(28

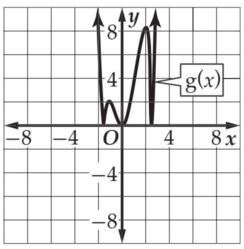


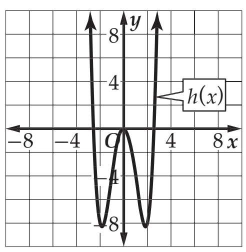




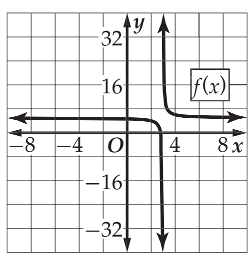
(29

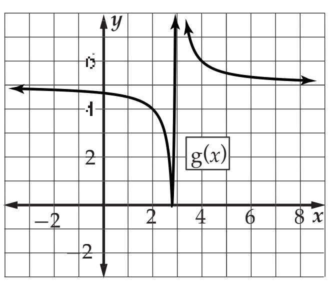


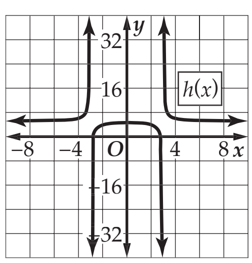




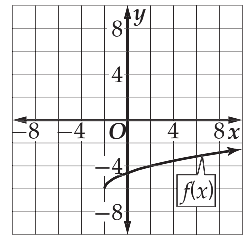
(30

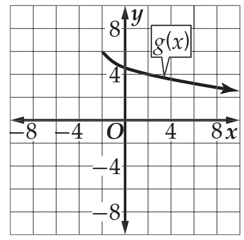


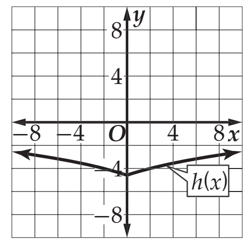




31)







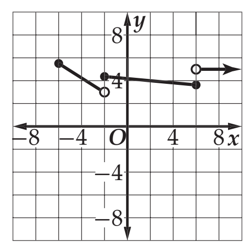
34) انسحاب بمقدار وحدة واحدة إلى اليسار ووحدة واحدة إلى أسفل.

35) انسحاب بمقدار 10 وحدات إلى أعلى.

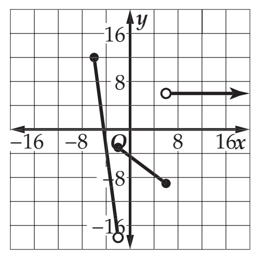
36) توسُّع رأسي، يتبعه انسحاب مقداره وحدتان إلى اليسار، ثم انسحاب مقداره 7 وحدات إلى أسفل.

37) توسُّع رأسي يتبعه انسحاب مقداره $\frac{5}{3}$ وحدة إلى اليسار، ثم انسحاب مقداره $\frac{7}{6}$ وحدة إلى أسفل.

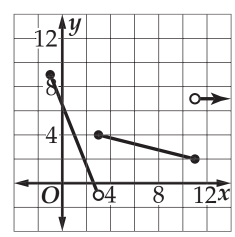
41)



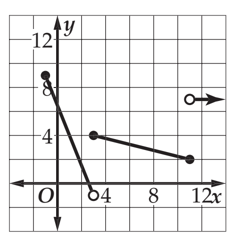
42)



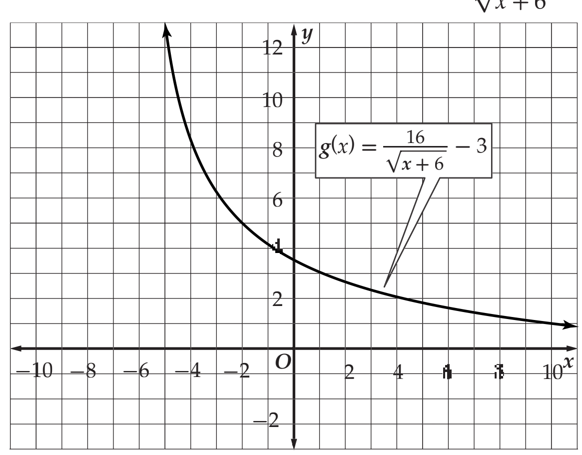
43)



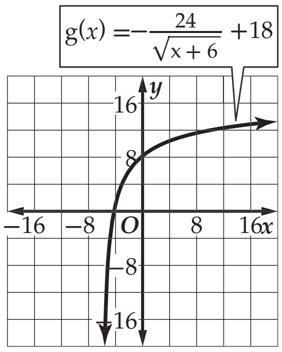
44)



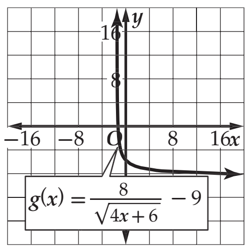
45) $g(x)=\frac{16}{\sqrt{x+6}}-3$



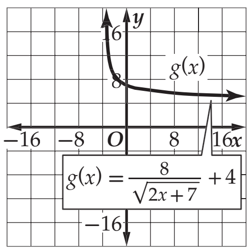
46) $g(x) = -\frac{24}{\sqrt{x+6}}+18$



47) $g(x)=\frac{8}{\sqrt{4x+6}}-9$



48) $g(x)=\frac{8}{\sqrt{2x+7}}+4$



49b) إجابة ممكنة: $h(x)$ تساوي ناتج جمع $f(x)$ و $g(x)$.

49c) $h(x) \stackrel{?}{=} f(x)+g(x)$

$$x^2+6x+10 \stackrel{?}{=} x^2+2x+7+4x+3$$
$$x^2+6x+10 = x^2+6x+10$$

50) إجابة ممكنة: كلاهما ؛ في دالة أكبر عدد صحيح، سحب الدالة الأصلية a وحدة لليسار يماثل سحب الدالة الأصلية a وحدة إلى أعلى.

51) إجابة ممكنة: $f(x)$ و $h(x)$ يمثّلان الدالة نفسها؛ فالدالة $g(x)$ انعكاس لِـ $f(x)$ حول المحور x؛ وهذا يعني أن $g(x)=-f(x)$، وبما أن $h(x)$ انعكاس لِـ $g(x)$ حول المحور y فإن $h(x)=g(-x)=-f(-x)$.
ولأن الدالة $f(x)$ فردية، فإن $-f(x)=f(-x)$ وبالتعويض نجد أن

$h(x)=-f(-x)=-f(x)=g(x)$.

52) أحيانًا. إجابة ممكنة: إذا كانت $f(x)$ زوجية فإن $f(x)=f(-x)$ وتكون $f(x)=|f(x)|$ صحيحة للدوال الزوجية التي تقع قيمها في الربعين الأول والثاني؛ فمثلًا، عندما $g(x)=x^2-4$ فإن $g(1)=g(-1)$، وتكون الدالة زوجية. في حين $g(-1)\neq|g(-1)|$

53) أحيانًا: إجابة ممكنة. إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية فإن $f(x)=f(-x)$. وبالتعويض في $f(-x)=-|f(x)|$ ينتج أن $f(x)=-|f(x)|$. وهذا صحيح فقط للدوال الزوجية التي تقع قيمها في الربعين الثالث والرابع. فمثلًا عندما تكون $g(x)=-x^2$، فإن المعادلتين $f(x)=f(-x)$ و $f(x)=-|f(x)|$ صحيحتان.

54) إجابة ممكنة: منحنى $g(x)$ هو منحنى $f(x)$ بانسحاب 6 وحدات إلى اليسار و 8 وحدات إلى أسفل $g(x)=\sqrt{x+6}-8$.

55) إجابة ممكنة: توسع رأسي للدالة $f(x)$ بمعامل قدرة 4 يكافئ $4f(x)$. تضيق أفقي بمعامل قدره $\frac{1}{4}$ يكافئ $f\left(\frac{1}{4}x\right)$. عند إجراء كل من التحويلين فإن الناتج يكون $f(x)$ إذا كانت الدالة $f(x)$ خطية. وما عدا ذلك فالناتج لا يكون $f(x)$. فمثلًا إذا كانت $f(x)=x^2$، فإن $4f\left(\frac{1}{4}x\right)=4\left(\frac{x^2}{16}\right)=\frac{x^2}{4}$، و هذه لا تساوي x^2. لذا فإن $4f\left(\frac{1}{4}x\right)\neq f(x)$.

56) إجابة ممكنة: الترتيب مهم؛ لأنه يمكن الحصول على منحنيات مختلفة بترتيب مختلف بين التحويلات الهندسية فمثلًا. إذا كانت (a, b) نقطة على منحنى الدالة الأصلية، وحدث للدالة انسحاب مقداره 6 وحدات إلى أعلى، ثم انعكاس في المحور x فإن صورة النقطة (a, b) هي $(a, -b-6)$. وبالعكس إذا حدث انعكاس للدالة في المحور x ثم انسحاب مقداره 6 وحدات إلى أعلى فإن صورة (a, b) هي $(a, -b+6)$.

الدرس 1-6 ، ص (65 - 62)

4) $(f+g)(x) = x^2 + 10x$ ؛ المجال : $\{x \mid x \in R\}$

$(f-g)(x) = x^2 - 8x$ ؛ المجال : $\{x \mid x \in R\}$

$(f \cdot g)(x) = 9x^3 + 9x^2$ ؛ المجال : $\{x \mid x \in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x+1}{9}$ ؛ المجال : $\{x \mid x \neq 0,\ x \in R\}$

5) $(f+g)(x) = 2x$ ؛ المجال : $\{x \mid x \in R\}$

$(f-g)(x) = -14$ ؛ المجال : $\{x \mid x \in R\}$

$(f \cdot g)(x) = x^2 - 49$ ؛ المجال : $\{x \mid x \in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x-7}{x+7}$ ؛ المجال : $\{x \mid x \neq -7,\ x \in R\}$

6) $(f+g)(x) = x^3 + x + \frac{6}{x}$ ؛ المجال : $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

$(f-g)(x) = -x^3 - x + \frac{6}{x}$ ؛ المجال : $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

$(f \cdot g)(x) = 6x^2 + 6$ ؛ المجال : $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

$(\frac{f}{x})(x) = \frac{6}{x^4 + x^2}$ ؛ المجال : $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

7) $(f+g)(x) = \frac{x^2+12}{4x}$ ؛ المجال: $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

$(f-g)(x) = \frac{x^2-12}{4x}$ ؛ المجال: $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

$(f \cdot g)(x) = \frac{3}{4}$ ؛ المجال : $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{12}$ ؛ المجال : $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

8) $(f+g)(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 4\sqrt{x}$ ؛ المجال : $\{x \mid x > 0, x \in R\}$

$(f-g)(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}$ ؛ المجال : $\{x \mid x > 0, x \in R\}$

$(f \cdot g)(x) = 4$ ؛ المجال : $\{x \mid x > 0, x \in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{4x}$ ؛ المجال : $\{x \mid x > 0, x \in R\}$

9) $(f+g)(x) = \sqrt{x+8} + \sqrt{x+5} - 3$ ؛ المجال : $\{x \mid x \geq -5, x \in R\}$

$(f-g)(x) = \sqrt{x+8} - \sqrt{x+5} + 3$ ؛ المجال : $\{x \mid x \geq -5, x \in R\}$

$(f \cdot g)(x) = \sqrt{x^2 + 13x + 40} - 3\sqrt{x+8}$ ؛ المجال : $\{x \mid x \geq -5, x \in R\}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x+8}}{\sqrt{x+5} - 3}$ ؛ المجال : $\{x \mid x \geq -5, x \neq 4, x \in R\}$

10) $(f+g)(x) = \sqrt{x+6} + \sqrt{x-4}$ ؛ المجال : $\{x \mid x \geq 4, x \in R\}$

$(f-g)(x) = \sqrt{x+6} - \sqrt{x-4}$ ؛ المجال : $\{x \mid x \geq 4, x \in R\}$

$(f \cdot g)(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 24}$ ؛ المجال : $\{x \mid x \geq 4, x \in R\}$

$(\frac{f}{g})(x) = \frac{\sqrt{x+6}}{\sqrt{x-4}}$ ؛ المجال : $\{x \mid x > 4, x \in R\}$

11) $[f \circ g](x) = 8x - 19$

$[g \circ f](x) = 8x - 20$; $[f \circ g](6) = 29$

12) $[f \circ g](x) = -50x^2 + 145x - 101$

$[g \circ f](x) = 10x^2 + 25x + 1$; $[f \circ g](6) = -1031$

13) $[f \circ g](x) = x^4 + 14x^3 + 71x^2 + 154x + 105$

$[g \circ f](x) = x^4 - 25x^2 + 155$; $[f \circ g](6) = 7905$

14) $[f \circ g](x) = 2 + x^8$; $[g \circ f](x) = -x^8 - 4x^4 - 4$

$[f \circ g](6) = 1679618$

15) $\{x \mid x \neq \pm\sqrt{3}, x \in R\}$; $(f \circ g)(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$

16) $\{x \mid x \in R\}$; $(f \circ g)(x) = \frac{2}{x^2 + 3}$

17) $\{x \mid x \in R\}$; $(f \circ g)(x) = |x|$

18) $\{x \mid x < 6, x \in R\}$; $(f \circ g)(x) = \frac{5}{\sqrt{6-x}}$

19) $\{x \mid x > -8, x \in R\}$; $(f \circ g)(x) = \frac{-4}{\sqrt{x+8}}$

20) $\{x \mid x \in R\}$; $(f \circ g)(x) = |x+2|$

21a) $\{v \mid 0 \leq v < c, v \in R\}$؛ لا يمكن أن تكون سرعة الجسم مساوية لسرعة الضوء؛ لأنك تحصل على $\frac{100}{0}$، وهي كمية غير معرفة. كذلك لا تكون v أكبر من c؛ لأنك تحصل على عدد سالب تحت الجذر التربيعي، وهذه كمية غير معرفة ، وأخيرًا لا تكون السرعة أقل من صفر؛ لأن السرعة ليست سالبة.

21b) $m(10) = 100$ kg; $m(10000) \approx 100.0000001$ kg;
$m(1000000) \approx 100.0005556$ kg

21c) عندما تقترب v من c فإن $\frac{v^2}{c^2}$ تقترب من العدد1، ويقترب المقام من العدد صفر؛ أي أن $m(v)$ تقترب من ∞.

21d) إجابة ممكنة: $m(v) = f(g(v))$

$f(v) = \frac{100}{\sqrt{1 - v^2}}$

$g(v) = \frac{v}{c}$

22) إجابة ممكنة: $f(x) = \sqrt{x} + 7; g(x) = 4x + 2$

23) إجابة ممكنة: $f(x) = \frac{6}{x} - 8; g(x) = x + 5$

24) إجابة ممكنة: $f(x) = |x| - 9; g(x) = 4x + 8$

25) إجابة ممكنة: $f(x) = [-3x]; g(x) = x - 9$

26) إجابة ممكنة: $f(x) = \sqrt{x}; g(x) = \frac{5-x}{x+2}$

27) إجابة ممكنة: $f(x) = x^3; g(x) = \sqrt{x} + 4$

28) إجابة ممكنة: $f(x) = \frac{8}{x^2}; g(x) = x - 5$

29) إجابة ممكنة: $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-6}; g(x) = x + 4$

30b) قيمة v ليست صفرًا. وإذا كانت كذلك، فلا يوجد طول موجة.

30d) إجابة ممكنة:
$$f(v)=a[b(v)]=\frac{h}{25v},\ b(v)=25v,\ a(v)=\frac{h}{v}$$

54) $[f\circ g](x)=x$; ومجالها $\{x \neq x \geq -4, x\in R\}$
$[g\circ f](x)=|x-3|+3$; ومجالها $\{x : x\in R\}$

55) $[f\circ g](x)=\sqrt{\sqrt{16+x^2}+6}$; ومجالها $\{x : x\in R\}$
$[g\circ f](x)=\sqrt{x+22}$ ومجالها $\{x \mid x\geq -6, x\in R\}$

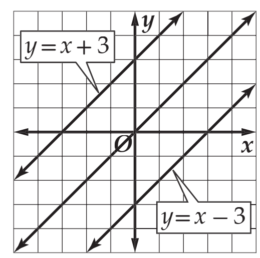
56) $[f\circ g](x)=\sqrt{\sqrt{9-x^2}}$ ومجالها $\{x : -3\leq x\leq 3, x\in R\}$
$[g\circ f](x)=\sqrt{9-x}$ ومجالها $\{x \mid 0\leq x\leq 9, x\in R\}$

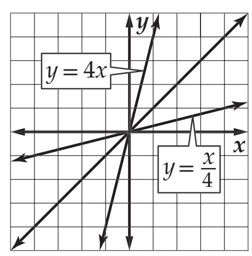
57) $[f\circ g](x)=\dfrac{24-6x}{12-x}$
ومجالها $\{x|x\neq 4, 12, x\in R\}$
$[g\circ f](x)=\dfrac{4x+2}{4x-1}$
ومجالها $\{x|x\neq -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, x\in R\}$

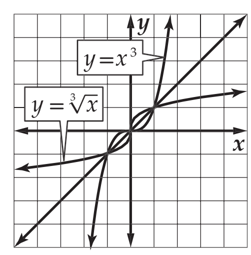
58a) لكل دالة منها $[f\circ g](x)=x$

58b) إجابة ممكنة: لكل زوج من الدوال تختصر الأعداد بعضها مع بعض على ألا يكون للتركيب أية معاملات غير الواحد، ولا يبقى ثوابت.

58c)





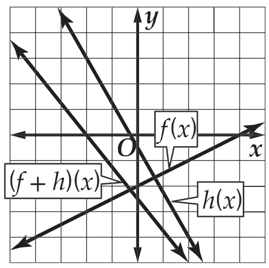


58d) إجابة ممكنة: محور الانعكاس بين كل زوج من الدوال هو المستقيم $y=x$.

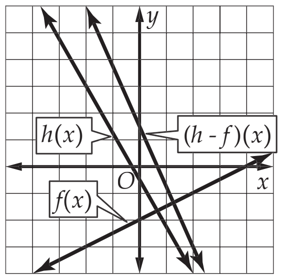
58e) إجابة ممكنة: ويكافئ كل من التركيبين $[f\circ g](x)$ $[g\circ f](x)$ الدالة المحايدة.

58f)
a) $g(x)=x+6$
b) $g(x)=3x$
c) $g(x)=\sqrt[5]{x}$
d) $g(x)=\dfrac{x+3}{2}$

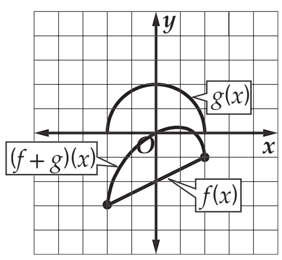
59)



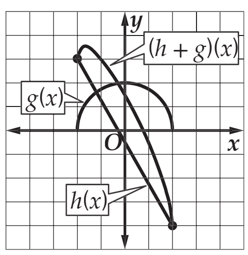
60)



61)



62)



73) إجابة ممكنة: أحيانًا، إذا كانت $g(x)=x^2+x+1$ و $f(x)=\sqrt{x}$، فإن $[f\circ g](x)=\sqrt{x^2+x+1}$، وهذه ليست خطية.

74) إجابة ممكنة: أولًا: يجب أن تكون $g(x)$ معرفة، لذا فإن $x\neq 3$. وثانيًا: يجب أن تكون $f(x)$ معرفة عند قيم $g(x)$، لذا يجب أن تكون $g(x)\geq 1$، وهذا صحيح عندما $3\leq x\leq 4$. وأخيرًا: يجب مراعاة القيود الإضافية على مجال التركيب. والتركيب هو $\sqrt{\frac{4-x}{x-3}}$، ولا يوجد على مجاله قيود إضافية. لذا فإن مجال التركيب هو
$\{x \mid 3<x\leq 4, x\in R\}$

الدرس 7-1، ص (73 - 71)

20) $f(g(x))=\dfrac{4(x-9)}{4}+9=x-9+9=x$
$g(f(x))=\dfrac{4x+9-9}{4}=\dfrac{4x}{4}=x$

21) $f(g(x))=-3\left(\sqrt{\dfrac{5-x}{3}}\right)^2+5=\dfrac{-3(5-x)}{3+5}=x$
$g(f(x))=\sqrt{\dfrac{5-(-3x^2+5)}{3}}=\sqrt{\dfrac{3x^2}{3}}=\sqrt{x^2}=x$

22) $f(g(x))=\dfrac{(\sqrt{4x-32})^2}{4}+8=\dfrac{4x-32}{4}+8=x-8+8=x$
$g(f(x))=\sqrt{4\left(\dfrac{x^2}{4}+8\right)-32}=\sqrt{x^2+32-32}=\sqrt{x^2}=x$

23) $f(g(x))=\left(x^{\frac{2}{3}}-8+8\right)^{\frac{3}{2}}=\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=x$
$g(f(x))=\left[(x+8)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{2}{3}}-8=x+8-8=x$

(24 $f(g(x)) = 2\left(\sqrt[3]{\frac{x+6}{2}}\right)^3 - 6 = \frac{2(x+6)}{2} - 6 = x+6-6 = x$

$g(f(x)) = \sqrt[3]{\frac{2x^3-6+6}{2}} = \sqrt[3]{\frac{2x^3}{2}} = \sqrt[3]{x^3} = x$

(25 $f(g(x)) = \dfrac{\frac{2x+6}{1-x}-6}{\frac{2x+6}{1-x}+2} = \dfrac{\frac{2x+6-6+6x}{1-x}}{\frac{2x+6+2-2x}{1-x}}$

$= \dfrac{2x+6-6+6x}{2x+6+2-2x} = \dfrac{8x}{8} = x$

$g(f(x)) = \dfrac{\frac{2(x-6)}{x+2}+6}{1-\frac{x-6}{x+2}} =$

$\dfrac{\frac{2x-12+6(x+2)}{x+2}}{\frac{x+2-(x-6)}{x+2}} = \dfrac{2x-12+6x+12}{x+2-x+6} = \dfrac{8x}{8} = x$

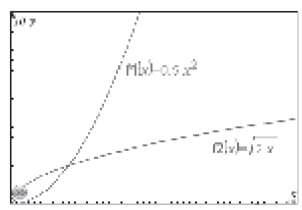
(26a $g(x) = \sqrt{\frac{2x}{m}}$؛ $g(x)$ هي السرعة بالمتر/ ثانية، x هي طاقة الحركة بالجول، m الكتلة بالكيلو جرام

(26b $f[g(x)] = f\left(\sqrt{\frac{2x}{m}}\right) = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{2x}{m}}\right)^2 = \frac{1}{2}m\frac{2x}{m} = x$

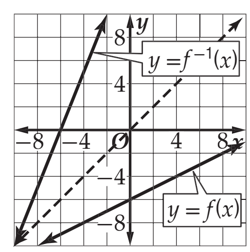
$g[f(x)] = g\left(\frac{1}{2}mx^2\right) = \left(\sqrt{\frac{2\left(\frac{1}{2}mx^2\right)}{m}}\right) = \sqrt{x^2} = x$

بما أن $f[g(x)] = g[f(x)] = x$، فإن كلا الدالتين عكسية للأخرى.

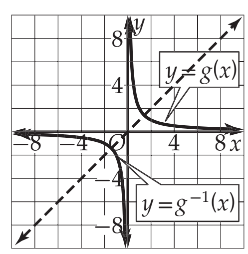
(26c



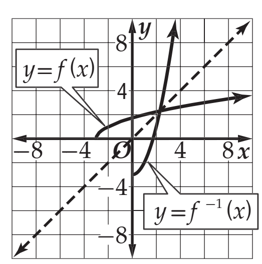
(27



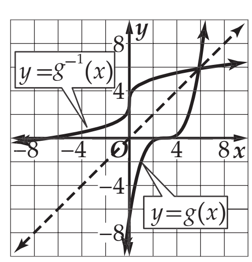
(28



(29



(30



(31a تحقق الدالة (x) اختبار الخط الأفقي، $f^{-1}(x) = 20(x - 420)$.

(31b تمثل x مقدار ما يتقاضاه فالح خلال أسبوع، أما $f^{-1}(x)$ فتمثل مقدار مبيعات فالح.

(31c $x \ge 0$ لأنه لا يمكن أن تكون مبيعات فالح بالسالب.

(31d 6000 ريال

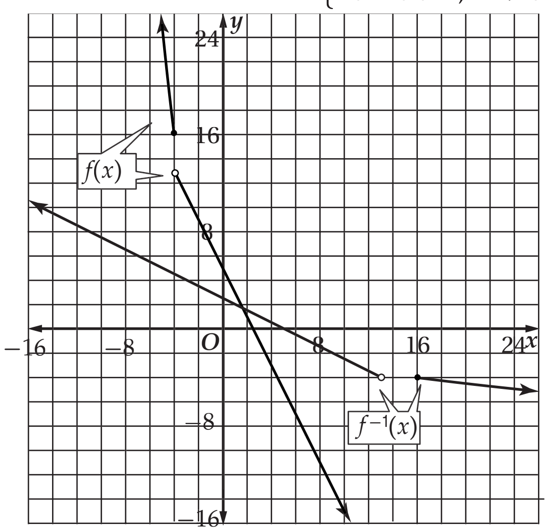
(43a افترض أن x تمثّل عدد أزهار الجوري $c(x)=5x+3(75-x)$

(43b $c^{-1}(x) = 0.5x - 112.5$ ، x تمثل التكلفة الكلية، $c^{-1}(x)$ تمثل عدد أزهار الجوري.

(43c مجال $c(x)$: $\{x|0\le x\le 75, x\in W\}$
مجال $c^{-1}(x)$: $\{x|225\le x\le 375, x\in R\}$

(43d 35

(48 $f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & , 16 \le x \\ 2.5 - 0.5x & , x < 13 \end{cases}$



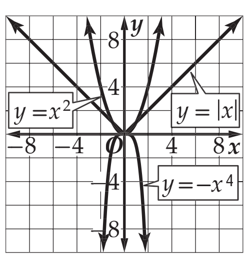
(51 $[f^{-1} o g^{-1}](x) = \frac{x+2}{16}$

(52 $[g^{-1} o f^{-1}](x) = \frac{x-44}{16}$

(53 $(f o g)^{-1}(x) = \frac{x-44}{16}$

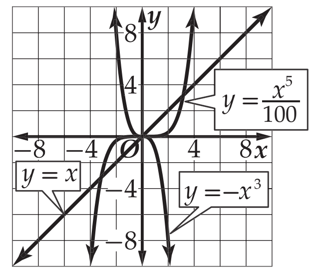
(54 $(g o f)^{-1}(x) = \frac{x+2}{16}$

(55a إجابة ممكنة : لا



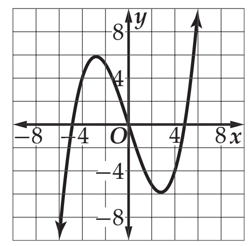
(55b إجابة ممكنة: يمكن التوصل إلى قاعدة تقول: إن الدوال الزوجية ليس لها دوال عكسية. إذا كانت الدالة زوجية فإن $f(x) = f(-x)$. وعليه فإن قيمتين من x ترتبطان بقيمة واحدة من y ؛ مما يؤدي إلى أن الدالة لا تحقق اختبار الخط الأفقي ، أي أنه لا يوجد للدالة الزوجية دالة عكسية.

55c) إجابة ممكنة : نعم



55d) إجابة ممكنة: يوضح الرسم أن للدوال الثلاث دوالَّ عكسيةً ، ولكن هذا لا ينطبق على كل الدوال الفردية؛ فمثلًا الدالة $f(x) = \frac{2}{15}x^3 - \frac{47}{15}x$ فردية؛ لأن $f(-x) = -f(x)$.

منحنى هذه الدالة لا يحقق اختبار الخط الأفقي ، أي أنه لا يوجد دالة عكسية لـ f.



56) إجابة ممكنة: المقطع y للدالة $f^{-1}(x)$ هو $(0, 6)$

57) إجابة ممكنة: مجال الدالة التربيعية بحاجة إلى تحديد، بحيث يظهر نصف المنحنى فقط ليكون لها معكوس، وفي هذه الحالة يكون المجال $\left(-\infty, \frac{-b}{2a}\right)$ أو $\left(\frac{-b}{2a}, \infty\right)$ للدالة $f(x) = ax^2 + bx + c$.

58) إجابة ممكنة: خطأ، الدوال الثابتة خطية، لكنها لا تحقق اختبار الخط الأفقي. لذا فالدوال الثابتة ليست واحدًا لواحد ، وعليه لا توجد لها معكوس.

60) إجابة ممكنة: نعم، وإحدى هذه الدوال $f(x) = \frac{1}{x}$.
على الرغم من أن كلتا النهايتين تؤول إلى 0، إلا أنه لا توجد قيمتان أو أكثر من المجال ترتبطان بقيمة واحدة y ، وعليه فالدالة تحقق اختبار الخط الأفقي.

دليل الدراسة والمراجعة، ص (78 - 77)

44) $(f+g)(x) = 2x^2 + 5x - 3$ ؛
المجال: $\{x \mid x \in R\}$
$(f-g)(x) = -2x^2 - 3x + 9$؛
المجال: $\{x \mid x \in R\}$;
$(f \cdot g)(x) = 2x^3 + 10x^2 + 6x - 18$؛
المجال: $\{x \mid x \in R\}$ ؛
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{2(x-1)}$ ؛
المجال: $\{x \mid x \neq -3, 1, x \in R\}$

45) $(f+g)(x) = 4x^2 + 5x - 2$؛
المجال: $\{x \mid x \in R\}$؛
$(f-g)(x) = 4x^2 - 5x$؛
المجال: $\{x \mid x \in R\} =$
$(f \cdot g)(x) = 20x^3 - 4x^2 - 5x + 1$؛ المجال: $\{x \mid x \in R\}$؛
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{4x^2 - 1}{5x - 1}$ ؛
المجال: $\left\{x \mid x \neq \frac{1}{5}, x \in R\right\}$

46) $(f+g)(x) = x^3 + 2x^2 + 2$؛
المجال: $\{x \mid x \in R\}$؛
$(f-g)(x) = x^3 - 6x^2 + 8$؛
المجال: $\{x \mid x \in R\}$؛
$(f \cdot g)(x) = 4x^5 - 8x^4 - 3x^3 + 26x^2 - 15$؛
المجال: $\{x \mid x \in R\}$؛
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 5}{4x^2 - 3}$؛
المجال: $\left\{x \mid x \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, x \in R\right\}$

47) $(f+g)(x) = \frac{x+1}{x^2}$.
المجال: $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$؛
$(f-g)(x) = \frac{x-1}{x^2}$؛
المجال: $\{x \mid x \neq 0 ؛ x \in R\}$.
$(f \cdot g)(x) = \frac{1}{x^3}$؛
المجال: $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$.
$\left(\frac{f}{g}\right) = x$ المجال: $\{x \mid x \neq 0, x \in R\}$

48) $[f \circ g](x) = 8x^2 - 43$, $[f \circ g](x) = 32x^2 - 176x + 234$
; $[f \circ g](2) = -11$

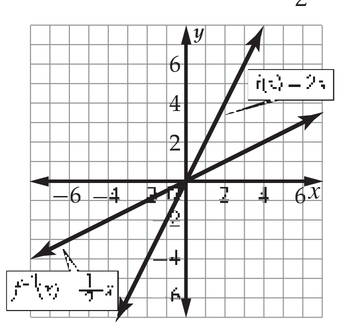
49) $[f \circ g](x) = x^2 - 8x + 23$; $[f \circ g](x) = x^2 + 2x + 3$
; $[f \circ g](2) = 11$

50) $[f \circ g](x) = x^4 - 3x^2 + 4$; $[f \circ g](x) = x^4 - 6x^3 + 17x^2 - 24x + 16$; $[f \circ g](2) = 8$

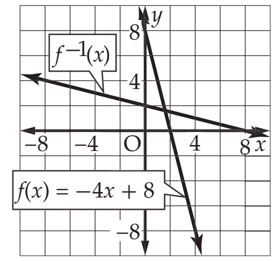
51) $[f \circ g](x) = \frac{1}{2x-9}$؛
المجال: $\left\{x \mid x \neq \frac{9}{2}, x \in R\right\}$ ؛

52) $[f \circ g](x) = \sqrt{6x - 9}$؛
المجال $\left[\frac{3}{2}, \infty\right)$ ؛

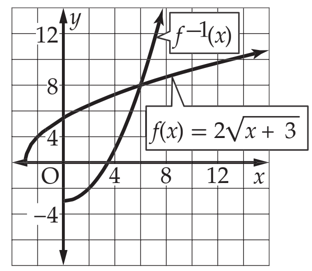
53) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$



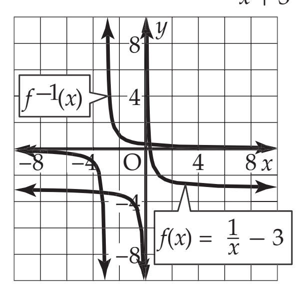
54) $f^{-1}(x) = -\frac{1}{4}x + 2$



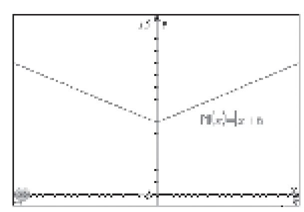
55) $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3x,\ x \geq o$



56) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x+3}$

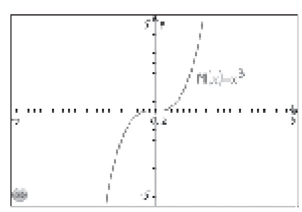


57)



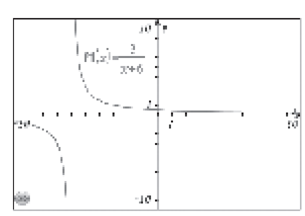
لا

58)



نعم

59)



60)