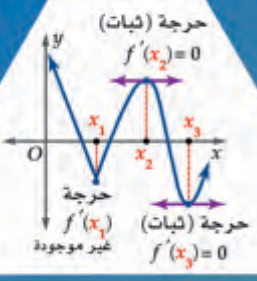
$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$



الرياضيات

الصف الثاني عشر - الفصل الدراسي الأول

كراسة التمارين

ADVANCED متقدم

$$\int f(x)\,dx$$

العبيكان Obeikan

الطبعة التجريبية
1438 هـ - 2017 م

الرياضيات

الصف الثاني عشر - متقدم

الفصل الدراسي الأول

كراسة التمارين

Mc Graw Hill Education

العبيكان Obeikan

الطبعة التجريبية
1438هـ - 2017م

www.macmillanmh.com

www.obeikaneducation.com

Education

English Edition Copyright © 2010 the McGraw-Hill Companies, Inc.
All rights reserved.

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with
The McGraw-Hill Companies, Inc. © 2008.

حقوق الطبعة الإنجليزية محفوظة لشركة ماجروهل©، ٢٠١٠م.

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقًا لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل© ٢٠٠٨م/ ١٤٢٩هـ.

لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو نقله في أي شكل أو واسطة، سواءٌ أكانت إلكترونية أو ميكانيكية، بما في ذلك التصوير بالنسخ «فوتوكوبي»، أو التسجيل، أو التخزين و الاسترجاع، دون إذن خطي من الناشر.

الفهـــــرس

الوحدة 1: الجبر

1-1 العبارات والكسور الجبرية 4
1-2 قسمة كثيرات الحدود 5
1-3 نظريَّتا الباقي والعامل 6
1-4 الأسس والجذور 7
1-5 العبارات اللوغاريتمية 8
1-6 المعادلات الأسية واللوغاريتمية 9

الوحدة 2: النهايات والاتصال

2-1 تقدير النهايات 10
2-2 النهاية عند نقطة 11
2-3 نهايات الدوال المثلثية عند نقطة 12
2-4 النهاية عند المالانهاية 13
2-5 الاتصال عند نقطة 14

الوحدة 3: حساب التفاضل

3-1 متوسط معدّل التغيّر 15
3-2 المشتقة 16
3-3 قواعد الاشتقاق الأساسية 17
3-4 قاعدتا الضرب والقسمة في الاشتقاق 18
3-5 قاعدة السلسلة 19
3-6 مشتقات الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية 20
3-7 مشتقات الدوال المثلثية 21
3-8 الاشتقاق الضمني 22
3-9 المشتقات العليا 23

الوحدة 4: تطبيقات التفاضل

4-1 فترات التزايد والتناقص لدالة 24
4-2 القيم القصوى المحلية 25
4-3 التقعُّر ونقاط الانعطاف (الانقلاب) 26
4-4 رسم المنحنيات 27
4-5 تطبيقات على القيم القصوى 28
4-6 المعدلات المرتبطة بالزمن 29

1 - 1 العبارات والكسور الجبرية
Algebraic Expressions and Algebraic Fractions

أوجد ناتج كلٍّ ممَّا يأتي، واكتبه في أبسط صورة:

1) $(2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$

2) $(a - 5b)(a^2 + 5ab + 25b^2)$

3) $(2x + 4)^3$

4) $(3x - 5)^3$

5) $(x^3 + 2x + 4)(x + 5)$

حلِّل كلًّا من كثيرات الحدود الآتية تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا، فاكتب كثيرة حدود أولية:

6) $\frac{8}{27}x^3 - y^3$

7) $3x^4 + 24xy^3$

8) $x^2 + 5x + 10$

9) $x^3 + x^2 - x - 1$

10) $x^4 - 5x^2 + 4$

أوجد ناتج كلٍّ ممَّا يأتي في أبسط صورة، واكتب الشروط على المتغير:

11) $\frac{3}{x+2} - \frac{4}{x^2+4x+4}$

12) $\frac{5}{x+7} + \frac{6}{x-2}$

13) $\frac{3x}{3x-1} - \frac{4-14x}{3x^2-4x+1}$

14) $\frac{x+2}{x-3} + \frac{x}{x^2-x-6} + \frac{x+1}{x+2}$

15) $\frac{x^2-4}{8x} \cdot \frac{2x}{x^2+x-2}$

16) $\frac{x^3}{x^2+5x+6} \div \frac{x}{x+3}$

17) $\frac{3x+1}{x^2+15x+56} \div \frac{3x^2+22x+7}{3x^2+25x+8}$

1 - 2 قسمة كثيرات الحدود
Dividing Polynomials

استعمل القسمة الطويلة ؛ لإيجاد الناتج في كلٍّ ممَّا يأتي:

1) $(a^2 - 8a - 26) \div (a + 2)$

2) $(b^3 - 4b^2 + b - 2) \div (b + 1)$

3) $(x^4 + x^3 + 7x^2 - 6x + 8) \div (x^2 + 2x + 8)$

4) $(2x^3 + 4x - 6) \div (x^2 + 3)$

استعمل القسمة التركيبية ؛ لإيجاد الناتج في كلٍّ ممَّا يأتي:

5) $\frac{2x^2 + 3x - 14}{x - 2}$

6) $(3w^3 + 7w^2 - 4w + 3) \div (w + 3)$

7) $(2r^3 + 5r^2 - 2r - 15) \div (2r - 3)$

8) $(3x^5 + 3x^4 + 6x) \div (3x - 9)$

أوجد الناتج في كلٍّ ممَّا يأتي:

9) $(x^5 - 3x^2 + 7x) \div (x^2 - 2)$

10) $(x^3 + 4x^2 + 5) \div (6x + 7)$

1 - 3 نظريَّتا الباقي والعامل
The Remainder and Factor Theorems

باستعمال نظرية الباقي أوجد باقي القسمة في كلٍّ ممَّا يأتي:

1) $(3x^3 - 5x^2 + 3x + 1) \div (x - 4)$

2) $(-5x^4 + 3x - 1) \div (x + 3)$

3) $(x^4 + 7x^2 + 3x + 1) \div (2x + 1)$

4) $(x^5 - x^3 + 2) \div (3x - 9)$

5) إذا كان باقي قسمة $x^6 + 3x^2 - kx + 7$ على $x - 2$ يساوي 6، فأوجد قيمة k.

6) إذا كان باقي قسمة $6x^2 - x - 8$ على $x - k$ يساوي 7 ، فأوجد قيمة k.

في كلٍّ ممَّا يأتي كثيرة حدود $P(x)$ ودالة من الدرجة الأولى، حدِّد ما إذا كانت هذه الدالة عاملًا من عوامل كثيرة الحدود أم لا، وحدِّدِ العوامل الأولية الأخرى، ثم حل المعادلة $P(x)=0$

7) $x^3 - 21x - 20 \; ; \; x + 4$

8) $x^6 + 3x^2 + 5x - 1; \; x + 1$

9) $2x^4 - 7x^3 - 38x^2 + 103x + 60 \; ; \; 2x + 1$

10) $3x^5 + 2x^4 + 3x^2 - 4x + 3 \; ; \; x - 5$

استعمل نظرية الأصفار النسبية في تحليل كل كثيرة حدودٍ ممَّا يأتي:

11) $x^4 - 19x^2 + 90$

12) $2x^3 + 9x^2 - 6x - 5$

13) $x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 3x - 10$

1 - 4 الأسس والجذور
Exponents and Roots

بسِّط كلًّا من العبارات الآتية دون استعمال الآلة الحاسبة، علمًا بأن جميع القيم مُعرَّفة:

1) $\frac{a^{-3}b^5}{a^{-6}b^{-4}}\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^{-2}$

2) $\frac{5^n \times 125^{-2n}}{5^{2n} \times 25^n}$

3) $\frac{15^3 \times 3^4}{25^2 \times 15^{-1}} \times \frac{15^2 \times 625^3}{5^{-4}}$

بسِّط كلًّا ممَّا يأتي، علمًا بأن جميع القيم مُعرَّفة:

4) $\pm\sqrt[6]{64a^{12}}$

5) $\sqrt[5]{-32x^5y^{10}}$

6) $\sqrt{x^2+10x+25}$

7) $-\sqrt[4]{(x-5)^8}$

8) $\sqrt[4]{48r^8z^{13}}$

9) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{2^9a^{12}b^{13}}}$

10) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{-5^{12}x^{13}y^{18}}}$

11) $2\sqrt[3]{-9a^5b^6} \cdot 5\sqrt[3]{3a^2b^5}$

12) $\sqrt[4]{32x^5y^6}\ (3x^3y^7)^{\frac{1}{4}}$

13) $\frac{x^{\frac{1}{2}}-5}{2x^{\frac{1}{2}}+5}$

14) حرارة إشعاعية: كمية الطاقة المشعة من الجسم تُسمَّى "الحرارة الإشعاعية"، ودرجة الحرارة السيليزية الداخلية للجسم تُسمَّى "الحرارة الحركية"، والعلاقة $T_r = T_k \sqrt[4]{e}$ تربط بين درجة الحرارة السيليزية الإشعاعية للجسم T_r وحرارته الحركية T_k، حيث المتغير e في الصيغة يمثل مقياس قدرة الجسم على إطلاق الطاقة، إذا كانت الحرارة الحركية لجسمٍ ما 30°C، وكان $e = 0.94$، فأوجد الحرارة الإشعاعية لهذا الجسم مقربةً إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ من الدرجة.

15) صناعة: يستعمل مدير الإنتاج في أحد المصانع الصيغة $C = 88n^{\frac{1}{3}} + 330$ لتقدير التكلفة C بالريالات لإنتاج n قطعةً من أحد المنتجات. فكم تكون تكلفة إنتاج 150 قطعةً من هذا المنتج مقربةً إلى أقرب ريال؟

1 - 5 العبارات اللوغاريتمية
Logarithmic Expressions

إذا كان: $\ln x = 0.1, \ln y = -0.5, \ln z = 0.4$، فأوجد كلًّا ممَّا يأتي:

1) $\ln xyz$

2) $\ln \frac{xy}{z}$

3) $\ln \frac{x^2y^3}{z^4}$

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد قيمة كلٍّ ممَّا يأتي :

4) $\log_5 \sqrt[4]{625}$

5) $\ln \sqrt[6]{e^5}$

اكتب كل عبارة لوغاريتمية ممَّا يأتي في الصورة المطولة:

6) $\log_2 [(2x)^3 (x+1)]$

7) $\log_8 [(4x+2)^3 (x-4)]$

8) $\log_{13} \frac{3x^4}{\sqrt[3]{7x-3}}$

9) $\log_2 \frac{(x+1)^3}{\sqrt[3]{x+5}}$

اكتب كل عبارةٍ لوغاريتميةٍ ممَّا يأتي في الصورة المختصرَة:

10) $3 \log_2 (5x+6) - \frac{1}{2} \log_2 (x-4)$

11) $2 - \log_7 6 - 2 \log_7 x$

12) $\log_3 8 + \log_3 x - 2 \log_3 (x+4)$

13) $\log y + \log 3 - \frac{1}{3} \log(x) + 2 \log 3$

14) $\log_3 y + \log_3 x - \frac{1}{2} \log_3 x + 3 \log_3 z$

15) اكتب $\log_4 19$ بدلالة كلٍّ من اللوغاريتمين (العشري والطبيعي)، ثم أوجد قيمة كلٍّ منهما مقربًا إلى أقرب جزءٍ من ألفٍ، وقارن الناتجين.

16) صوت: إذا كانت شدة الصوت L بالديسيبل (dB) تُعطَى بالعلاقة $L = 10 \log R$، حيث R شدة الصوت النسبية، إذا أصبحت الشدة النسبية لصوتٍ ما 3 أمثال ما كانت عليه، فكم ديسيبلًا ستزيد شدة الصوت؟

1 - 6 المعادلات الأسية واللوغاريتمية
Exponential and Logarithmic Equations

حُلَّ كلًّا من المعادلات الآتية مقربًا الناتج إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ:

1) $4 + e^{5x-3} = 9$

2) $3 - e^{x+1} = 10$

3) $8^{-2x-1} = 5^{-x+2}$

4) $e^{2x} - 15e^{x} + 56 = 0$

5) $e^{2x} - 12e^{x} - 13 = 0$

6) $14 + 20 \ln 7x = 54$

7) $\ln 12x + \ln (x - 1) = 2$

8) $\log (5x + 3) = \log (x + 2) + 4$

9) $\ln x + \log_4 5x = -2$

10) علاج : تمَّ حجز 50 شخصًا أُصيبوا بمرض مُعدٍ في نفس اليوم في أحد المستشفيات؛ لتلقي العلاج حتى انتهاء أعراض المرض، إذا كانت الدالة $P = \frac{52.76}{1 + 0.03e^{0.75t}}$ تمثل عدد الأشخاص الذين لا تزال تظهر عليهم أعراض المرض من هذه المجموعة بعد t يومًا، فأجب عمَّا يلي:

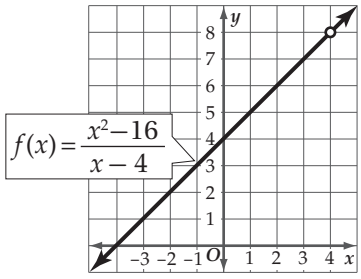
a) كم عدد الأشخاص (من هذه المجموعة) لاتزال أعراض المرض ظاهرة عليهم بعد 5 أيام من حجزهم في المستشفى؟

b) كم يومًا سيستغرق المستشفى حتى تكون الأعراض ظاهرةً على شخصٍ واحدٍ فقط من هذه المجموعة؟

2 - 1 تقدير النهايات
Estimating Limits

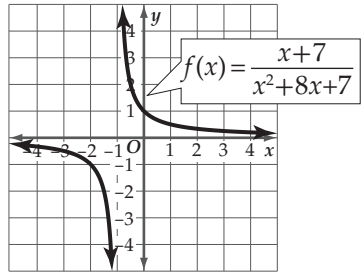
استعمل التمثيل البياني في تقدير كل نهاية مما يأتي:

1)



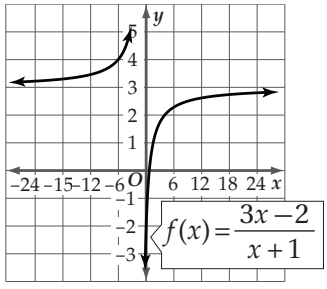
$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4}$

2)



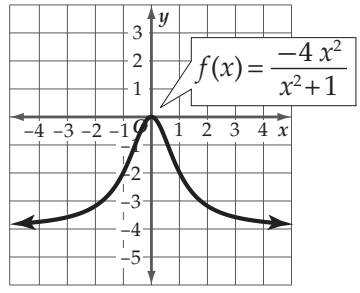
$\lim_{x\to \infty} \frac{x+7}{x^2+8x+7}$

3)



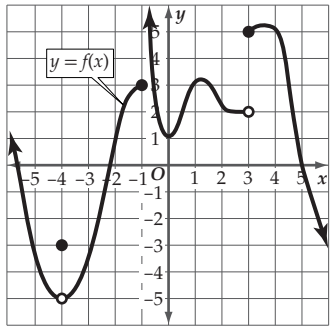
$\lim_{x\to \infty} \frac{3x-2}{x+1}$

4)



$\lim_{x\to -\infty} \frac{-4x^2}{x^2+1}$

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x)$ ؛ لتقدير كل من النهايات التالية (إن أمكن):



5) $\lim_{x\to -4^+} f(x)$

6) $\lim_{x\to -4^-} f(x)$

7) $\lim_{x\to -4} f(x)$

8) $\lim_{x\to -1^+} f(x)$

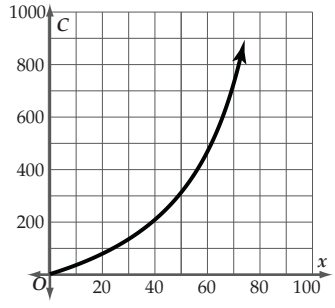
9) $\lim_{x\to -1^-} f(x)$

10) $\lim_{x\to -1} f(x)$

11) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$

12) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$

13) $\lim_{x\to 3} f(x)$



14) تلوُّث: يمكن تقدير تكلفة تنظيف بقعة ملوثة بمخلفات كيميائية بالدالة $C(x)=\frac{312x}{100-x}$ ، والممثلة في الشكل المجاور حيث C التكلفة بالريال، و x كمية المخلفات الكيميائية بالجرامات، $0 \le x < 100$. قدّر تكلفة تنظيف بقعة ملوّثة بمخلفات كيميائية إذا كانت كمية المخلفات 100 g تقريبًا.

2 - 2 النهاية عند نقطة
Limit at a Point

احسب كل نهاية مما يأتي:

1) $\lim_{x\to 3}(x^2+3x-8)$

2) $\lim_{x\to 4}\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{4}-\sqrt{x}\right)$

احسب كل نهاية مما يأتي إذا كان ذلك ممكنًا. والا فاذكر السبب:

3) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-2x+5}{2x-4}$

4) $\lim_{x\to -4}\frac{x^2+2}{6-\sqrt{x}}$

احسب كل نهاية مما يأتي:

5) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$

6) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$

7) $\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^3-1}{x}$

8) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

9) $\lim_{x\to -4}\frac{x^3+4x^2-x-4}{x^2+5x+4}$

10) $\lim_{x\to -1}\frac{\frac{1}{x}+1}{x+1}$

11) $\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{x-4}-2}{x-8}$

12) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-9}$

13) إذا كانت $f(x)=\begin{cases} x^2+bx+1 & , \ x<2 \\ bx-a & , \ x\geq 2 \end{cases}$ ، وَ $\lim_{x\to 2} f(x)=-1$ ، فأوجد قيمة كل من a, b ؟

احسب نهاية كل من الدوال التالية عند النقاط التي يتغير حولها التعريف:

14) $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & , \ x\leq 2 \\ 2x-4 & , \ x>2 \end{cases}$, $x=2$

15) $g(x)=\frac{2x}{|x|}-1$

2 - 3 نهايات الدوال المثلثية عند نقطة
Limits of Trigonometric Functions at a Point

احسب نهاية كل مما يأتي:

1) $\lim_{x\to\pi}(x\cos x)$

2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin x+\tan\frac{3x}{2}}{\cos 2x}$

3) $\lim_{x\to0}\dfrac{2+\sin x}{3+x}$

4) $\lim_{x\to0}\dfrac{x^2+4}{x+\cos x}$

5) $\lim_{x\to0}\dfrac{\cos 2x-1}{2x^2}$

6) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$

7) $\lim_{x\to0}\dfrac{x+\sin x}{\tan x}$

8) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}$

9) $\lim_{x\to0}\dfrac{3x^2+2x\sin x}{x^2}$

10) $\lim_{x\to0}\dfrac{2x+\tan x}{x}$

11) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin^3 x}{(2x)^3}$

12) $\lim_{x\to0}\dfrac{(\sin 3x)(\tan 4x)}{6x^2}$

13) $\lim_{x\to0}\dfrac{x}{\sin 4x}$

14) $\lim_{x\to0}\dfrac{6x\sin x+\tan^2 5x}{x^2+\sin^2 2x}$

15) $\lim_{x\to0}\dfrac{2\sin x-1}{4\cos^2 x-3}$

16) $\lim_{x\to0}\dfrac{x(\sin x+\tan x)}{\sin x(2x+\tan x)}$

17) إذا كان $\lim_{x\to0}\dfrac{2x^2+\sin bx}{3x-\tan x}=2$ فما قيمة b ؟

2 - 4 النهاية عند المالانهاية
Limit at Infinity

احسب كل نهاية مما يأتي (إن أمكن):

1) $\lim_{x\to\infty}(7-x+3x^3)$

2) $\lim_{x\to-\infty}(5x+x^2-x^4)$

3) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-2x+7}{9x^2+3}$

4) $\lim_{x\to-\infty}\frac{5x+2}{x^2+x-1}$

5) $\lim_{x\to\infty}\frac{8x^5-x^2-7}{4x^4+x^3-x^5}$

6) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^{-1}+x^{-2}+7}{3x^{-2}+5x^{-1}+2}$

7) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x(x+1)}{x^2+5}$

8) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(2-x^2)}{x^3+5}$

9) إذا كانت $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n(3x+2)}{bx^5+7}=\frac{1}{2}$ ، فأوجد قيمة الثابتين b, n

احسب نهاية كل متتالية مما يأتي إن وجدت، وحدد ما إذا كانت متقاربة ام متباعدة:

10) $a_n=\frac{7-2n}{4n^2+7}$

11) $b_n=\frac{6n^4+n^2-1}{n^3+2n}$

12) $c_n=\frac{n(12n+3)}{4n^2+9}$

13) $a_n=\frac{(2n+1)(3n+5)}{(n+2)(4n-1)}$

2 - 5 الاتصال عند نقطة
Continuity at a Point

حدد ما اذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة أم غير متصلة عند قيمة x المعطاة.

1) $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & , \quad x<3 \\ x^2-6 & , \quad x \geq 3 \end{cases} \quad , \quad x=3$

2) $g(x) = x|x+1| \quad , \quad x=-1$

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند قيم x المعطاة، وإذا كانت الدالة غير متصلة، فحدد نوع عدم الاتصال: لا نهائي، قفزي، نقطي (قابل للإزالة):

3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{2} & , \quad x>5 \\ 2x-3 & , \quad x \leq 5 \end{cases} \quad , \quad x=5$

4) $h(x) = \dfrac{x^3+8}{x+2} \quad , \quad x=-2$

5) أعد تعريف الدالة $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}$ ؛ لتصبح متصلة عند $x=4$

6) إذا كانت $f(x) = \begin{cases} (x+b)^2 & , \quad x<3 \\ 5x+b & , \quad x \geq 3 \end{cases}$ متصلة عند $x=3$ ، فأوجد قيمة b

7) إذا كانت $g(x) = \begin{cases} ax+5 & , \quad x \leq 2 \\ 7x-a & , \quad x>2 \end{cases}$ متصلة عند $x=2$ ، فأوجد قيمة a

3 - 1 متوسط معدّل التغيّر
Average Rate of Change

أوجد متوسط معدّل التغير لكلٍّ من الدوال الآتية في الفترة المحدَّدة:

1) $f(x) = 2x^2 + x + 2$, $[0, \frac{1}{2}]$

2) $g(x) = \frac{-1}{x+2}$, $[-1, -\frac{1}{2}]$

3) $f(x) = \sqrt{3x+1}$, $[1, 5]$

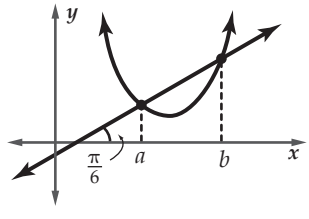
4) $h(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 6 & , \ x < 3 \\ 2x - 3 & , \ x \geq 3 \end{cases}$, $[-3, 5]$

5) سيارة تتحرك في خطٍّ مستقيم، إذا كانت المعادلة $d(t) = 12t^2 + 15t$ تمثل المسافة التي تقطعها هذه السيارة بالكيلو مترات بعد t ساعةً، فكم السرعة المتوسطة المتجهة للسيارة بين الساعتين الثانية والثالثة؟

6) إذا كان القاطع لمنحنى $g(x)$ يمرُّ بالنقطتين $(3, 7)$,$(2, f(2))$، ويصنع زاويةً قياسها $\frac{\pi}{4}$ مع المحور x الموجب، فأوجد $f(2)$.

7) إذا كان متوسط معدّل التغير للدالة $f(x)$ على الفترة $[2, 7]$ يساوي 12، وكانت $g(x) = x^2 + 5 - 2f(x)$، فأوجد متوسط معدّل التغير للدالة $g(x)$ على الفترة نفسها.

8) استعمل التمثيل البياني للدالة $y = f(x)$؛ لإيجاد متوسط معدّل التغير في الفترة $[a, b]$.



3 - 2 المشتقة
The Derivative

أوجد معدل التغير اللحظي لكل دالةٍ ممَّا يلي عند النقطة المعطاة:

1) $y = -\frac{1}{x}$, $(3, -\frac{1}{3})$

2) $y = -x^2 - 2$, $(1, -3)$

3) أوجد مشتقة الدالة $f(x) = \frac{1}{x-2}$ باستعمال تعريف المشتقة.

4) أوجد دالة ميل المماس لمنحنى الدالة $g(x) = \sqrt{1-2x}$ ، ثم أوجد ميل المماس عندما $x = -4$.

5) أوجد دالة ميل المماس لمنحنى الدالة $f(x) = -x^3 + 4$ ، ثم أوجد ميل المماس عندما $x = 2$.

6) قُذف جسم رأسيًّا إلى أعلى، إذا كان ارتفاعه بالأقدام يُعطَى بالدالة $s(t) = 64t - 16t^2$ حيث t الزمن بالثواني، فأوجد سرعة الجسم في أي لحظةٍ، ثم أوجد سرعته بعد 1.5sec من قذفه.

3 - 3 قواعد الاشتقاق الأساسية
Basic Derivative Rules

أوجد مشتقة كل دالةٍ ممَّا يأتي:

1) $y = x^{2017} - x^{1438}$

2) $f(x) = 2x^3 - x^2\ \sqrt{x} + 2$

3) $y = \frac{\sqrt[5]{x}}{x^3}$

4) $h(x) = x^4\left(3 - \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^4}\right)$

5) $g(x) = \sqrt{x} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - x\right)$

6) $r(x) = \frac{x^4 + 2x + 5}{\sqrt{x}}$

7) $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

8) $f(x) = x^2\left(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^3} + \frac{5}{x^2}\right)$

9) قُذف جسم رأسيًّا إلى أعلى من نقطةٍ على سطح الأرض، إذا كان ارتفاعه (h) بالأقدام يعطى بالدالة $h(t) = 144t - 16t^2$ حيث t الزمن بالثواني، فأوجد كلًّا ممَّا يلي:

a) سرعة الجسم الابتدائية v_o.

b) أقصى ارتفاع سيصل إليه الجسم من سطح الأرض.

c) الزمن الذي يحتاجه الجسم حتى يعود إلى سطح الأرض.

d) سرعة ارتطام الجسم بسطح الأرض.

10) أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $f(x) = -x^3 + 2x + 3$ عندما $x = 2$.

11) حدِّدِ النقاط الواقعة على منحنى الدالة $y = x^3 - x^2 - x + 1$، بحيث يكون عندها مماس أفقي.

3 - 4 قاعدتا الضرب والقسمة في الاشتقاق
Product and Quotient Derivative Rules

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كلٍّ ممَّا يأتي:

1) $y = (2 - x)(x + 3)$

2) $y = (x^2 + 5)(3 - 5x)$

3) $y = (x^3 - 1)(x^2 - 1)$

4) $y = (6x^2 - 5x)^2$

5) $y = (\frac{1}{x^3} - 3)(x^3 + 3)$

6) $y = (x + 15)(\frac{1}{x} - 2)$

أوجد مشتقة كل دالةٍ ممَّا يأتي:

7) $f(x) = \frac{x + 3}{2 - x}$

8) $f(x) = \frac{-4}{x^2 + 6}$

9) $g(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2}$

10) $g(x) = \frac{3}{6 - x}$

11) $h(x) = \frac{5x - 8}{2 - x^2}$

12) $h(x) = \frac{-8}{4 - x^2}$

13) أوجد معادلة المماس للدالة $f(x) = (2x^2 - 3)(3 - x)$ عندما $x = 1$.

14) **إنتاج:** إذا كان عدد القطع المعيبة p التي ينتجها عامل جديد في مصنع ما خلال الزمن t (بالأيام) يمكن تمثيلها بالدالة: $p(t) = \frac{t + 1750}{50t + 100}, t > 0$ ، فأوجد معدل التغير في عدد القطع المعيبة التي سينتجها العامل الجديد في اليوم العاشر.

3 - 5 قاعدة السلسلة
The Chain Rule

أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممَّا يأتي في أبسط صورةٍ:

1) $y = u^6 \ , u = x^2 + 3$

2) $y = u^3 - 2u \ , u = x^3 - 2$

3) $y = \sqrt{u+1} \ , u = 2x - 5$

إذا كانت $f(x) = 2x^3 - 1 \ , g(x) = 3x + 1$، فأوجد كلًّا ممَّا يأتي:

4) $(fog)'(x)$

5) $(gof)'(x)$

6) $(fof)'(-1)$

7) $(gog)'(2)$

أوجد مشتقة كلٍّ من الدوال الآتية:

8) $f(x) = (x^3 - 3x + 5)^3$

9) $f(x) = \frac{2}{(x^2+7)^3}$

10) $f(x) = (x+1)^2 (x-1)^3$

11) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 4x + 1}$

12) $f(x) = \sqrt{x^3 - 6x + 1}$

13) $f(x) = \sqrt[4]{(x+2)^3}$

14) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$

15) $f(x) = x^2\sqrt{2x+7}$

16) إذا كانت $y = u^3 \ , u = \sqrt{x}$ ، فأوجد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x = 4$.

3 - 6 مشتقات الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية
Derivatives of Exponential and Logarithmic Functions

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كلٍّ ممَّا يأتي:

1) $y = 4e^{3x} - 2e^{3-x^2} + 1$

2) $y = (2 - x^2)\, e^{3x+1}$

3) $y = \frac{e^x - 8}{x^2 - 1}$

4) $y = \ln x + e^{4x} - 6x^2$

5) $y = (5 - 2x) \ln (1 - x^3)$

6) $y = \frac{\ln (2x) - 3e^x}{x}$

7) $y = \ln e^{3x^3 - 3x^2 + 1}$

8) $y = \ln [(2x^2 + 3)(5 - x)]$

9) أوجد معادلة المماس للدالة $f(x) = 3 - e^{2x^2 + x}$ عند النقطة $(0\,,\,2)$.

زراعة: إذا كانت مساحة الأراضي الزراعية A في بلدٍ ما بالكيلومترات المربعة يمكن التعبير عنها بالدالة $A(t) = 7955.6\, e^{\frac{-0.0458}{t}}$، حيث t الزمن بالسنوات، فأوجد كلًّا ممَّا يأتي:

10) معدل التغير في مساحة الأراضي الزراعية.

11) معدل التغير في مساحة الأراضي الزراعية بعد 5 سنواتٍ.

3 - 7 مشتقات الدوال المثلثية
Derivatives of Trigonometric Functions

أوجد مشتقة كلٍّ من الدوال الآتية في أبسط صورةٍ:

1) $f(x) = 5\tan x - 3\cos x + 2\sin x - x^3 + 8$

2) $f(x) = x^2 \cos 2x$

3) $f(x) = e^{x^2} \sin x^2$

4) $f(x) = \dfrac{\tan 3x}{x}$

5) $f(x) = \cos(\ln 4x)$

6) $f(x) = \cos x^2 - \sin x^4$

7) $f(x) = \sin\sqrt{4x+1}$

8) $f(x) = \sqrt{1 + \sin x}$

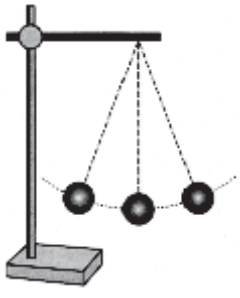
9) $f(x) = xe^{\cos x}$

أوجد ميل المماس لمنحنى كلٍّ من الدوال الآتية عند القيمة المعطاة:

10) $f(x) = \sin 4x\ ,\ x = \dfrac{\pi}{12}$

11) $f(x) = \cos^3 2x\ ,\ x = \dfrac{\pi}{8}$

12) بندول: تتأرجح كرةٌ مربوطةٌ أسفل بندولٍ وفق الدالة: $y = 20\cos(150\,t)$، حيث t زمن التأرجح بالثواني، و y الإزاحة المقطوعة بالبوصات (in)، أوجد معدَّل سرعته بعد 2 sec ؟



3 - 8 الاشتقاق الضمني
Implicit Defferentiation

أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ من العلاقتين الآتيتين عند النقطة المبيَّنة بجانب كلٍّ منهما:

1) $x^3 + y^3 = 3x\,y\ ,\ \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$

2) $\sqrt{xy} = x - 2y\ ,\ (4, 1)$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ من العلاقات الآتية:

3) $4x\,y^3 = x^2 + 3y$

4) $x \sin 2y = y \cos 2x$

5) $4x + \ln y = e^{4y}$

6) إذا كانت $x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}} = 4$ ، فأوجد معادلة المماس لمنحنى هذه العلاقة عند النقطة $(-8, 8)$، واكتبها في الصورة القياسية.

3 - 9 المشتقات العليا
Higher-Order Derivatives

1) إذا علمت أن المعادلة $s(t) = t^3 - 11t^2 + 24t$ تمثل الإزاحة بالأمتار (m) لجسم متحرك على خطٍّ مستقيم بعد t ثانية، فأوجد تسارع الجسم عندما $t = 4$.

2) إذا كانت $f(x) = -\frac{3}{5}x^5 - x^6$، فأوجد $f^{(4)}(x)$.

3) إذا كانت $f(x) = \sin(2x)$، فأوجد $f'''\left(\frac{\pi}{16}\right)$.

4) إذا كانت $x^3y^3 - 8 = 0$، فأوجد $\frac{d^2y}{d^2x}$.

أوجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكلٍّ ممَّا يلي:

5) $y = \sqrt[5]{x} + 3\sqrt{x} - 2$

6) $y = x\ln x\,,\ x > 0$

7) $y = \cos^2 x + e^{3x}$

4 - 1 فترات التزايد والتناقص لدالة
Increasing and Decreasing Intervals of a Function

أوجد فترات التزايد والتناقص لكلٍّ من الدوال التالية:

1) $f(x) = 32$

2) $f(x) = 4x^2 - \frac{4}{3}x^3$

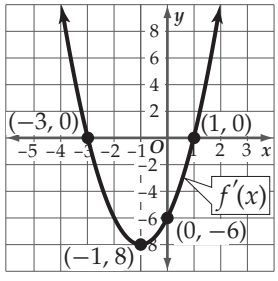
3) $f(x) = 2x^2 - x^4$

4) $f(x) = \frac{5}{5-x}$

5) $f(x) = \frac{x}{x^2 + x^3}$

6) $f(x) = \sqrt[3]{2 - 4x}$

معتمدًا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى $f'(x)$ للدالة كثيرة الحدود $f(x)$، أجب عن السؤالين الآتيين:



7) أوجد فترات التزايد والتناقص للدالة $f(x)$.

8) أوجد مجموعة حل المتباينة $f''(x) < 0$.

4 - 2 القيم القصوى المحلية
Local Extreme Values

أوجد نقاط الثبات لكل من الدالتين الآتيتين:

1) $f(x) = 3x^2 - 2x^3 + 12x$

2) $f(x) = \dfrac{2x}{4 + 2x^2}$

في كلٍّ من الدوال الآتية، أوجد القيم القصوى المحلية، وحدِّد نوعها (إن وجدت).

3) $f(x) = 6x^3 - 9x^2 - 18$

4) $f(x) = \dfrac{8}{x^2 + 1}$

5) $f(x) = \sqrt[3]{2x - 8}$

أوجد القيم القصوى المحلية لكلِّ دالة ممَّا يلي، وحدِّد نوعها (إن وجدت) باستعمال اختبار المشتقة الثانية، (وفي حالة فشل اختبار المشتقة الثانية، استعمل اختبار المشتقة الأولى).

6) $f(x) = 9x^3 - 27x$

7) $f(x) = x^4$

4 - 3 التقعُّر ونقاط الانعطاف (الانقلاب)
Concavity and Inflection Points

ادرس تقعر الدالة في كل من الحالات التالية ، وحدد نقاط الانعطاف إن وجدت:

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 5$

2) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

3) $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - 1$

4) $f(x) = \sqrt[3]{x+5}$

5) $f(x) = (x+2)^3 - 4$

6) $f(x) = \frac{1}{30}x^6 - \frac{1}{2}x^2$

7) $f(x) = \frac{x-2}{x+4}$

ادرس تقعر الدالة في كل من الحالات التالية ، وحدد نقاط الانعطاف إن وجدت، وحدِّد نوعها :

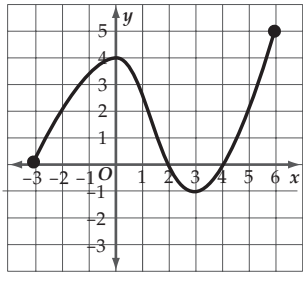
8) $f(x) = x^7 + 1$

9) $f(x) = x^4 + 3x^2 - 5x + 1$

10) $f(x) = x^4 - x^3 + 1$

11) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 108x + 2$

12) الشكل المجاور يمثل معدل تغير عدد طلاب مدرسة منذ عام 2003 م بالعشرات، حيث x تمثل عدد الأعوام منذ 2003م.



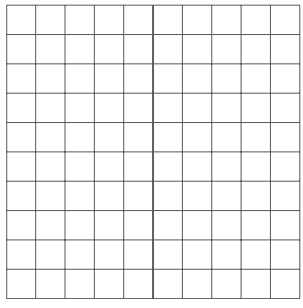
A) أوجد فترات تزايد دالة أعداد الطلاب، وفسر معناها.

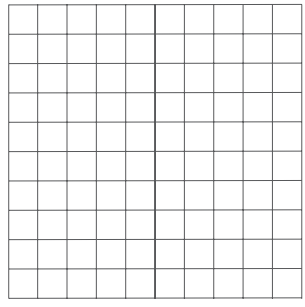
B) ادرس تقعر دالة أعداد طلاب المدرسة، وحدد نقاط الانعطاف إن وجدت.

4 - 4 رسم المنحنيات
Curves Sketching

ارسم منحنيات كل من الدوال الآتية:

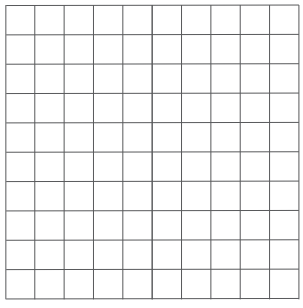
1) $f(x) = 5x^3 - 7.5x^2$

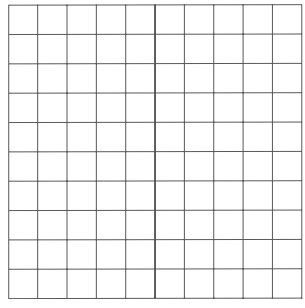




2) $f(x) = 2 - x - x^3$

3) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 16x$





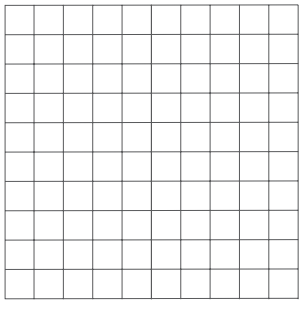
4) $f(x) = -2x^4 + \frac{8}{3}x^3$

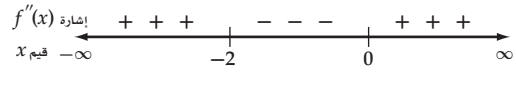
5) ارسم بشكل تقريبي منحنى الدالة كثيرة الحدود $f(x)$، إذا علمت أن:

$f(-4) = f(0) = f'(0) = f'(-3) = 0$, $f(-3) = -27$ ،

وكانت $f'(x) > 0$ على $]-3, \infty[$ ، وَ $f'(x) < 0$ على $]-\infty, -3[$ ،

وكانت إشارة $f''(x)$ كما يلي:

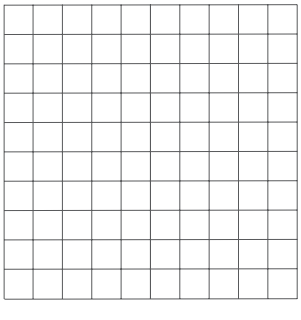




6) ارسم بشكل تقريبي منحنى الدالة كثيرة الحدود $f(x)$ إذا علمت أن:

$f(0) = 1$, $f(1) = 0$ ، وأن $f'(x) < 0$ على كل من الفترتين $]-\infty, 0[$, $]0, \infty[$ ،

وأن $f''(x) > 0$ على $]0, \infty[$ ، وَ $f''(x) < 0$ على $]-\infty, 0[$.



4 - 5 تطبيقات على القيم القصوى
Applications on Extreme Values

حل كلًّا من المسائل التالية:

1) عددان موجبان مجموع الأول ومثلي الثاني يساوي 80، أوجد العددين إذا كان حاصل ضربهما أكبر ما يمكن.

2) لدى عبدالرحمن سياج طوله 120 m، ويريد استغلاله لإحاطة جزء مستطيل الشكل من حديقته تمهيدًا لتبليطه. ما بُعدا هذا الجزء لتكون مساحته أكبر ما يمكن؟ وكم تكون مساحته في هذه الحالة؟

3) يراد عمل صندوق مفتوح من الأعلى باستعمال ورقة مربعة الشكل طول ضلعها 12 cm، وذلك بقص أربعة مربعات متطابقة من زواياها الأربع (طول ضلع كل منها x cm)، ثم ثني الأجزاء البارزة إلى الأعلى. أوجد أكبر حجم ممكن للصندوق.

4) افترض أن عدد البكتيريا (N) في تجمع للبكتيريا يعطى بالعلاقة $N(t) = 200(40 + t\,e^{\frac{-t}{15}})$ ، حيث t الزمن بالساعات ($0 < t < 25$). أوجد قيمة t التي تجعل عدد البكتيريا أكبر ما يمكن في هذا التجمع، وكم يكون عدد البكتيريا عندها؟

5) أوجد المسافة بين النقطة $(3, 0)$ وأقرب نقطة لها تقع على منحنى الدالة $y = \sqrt{x - 2}$.

4 - 6 المعدلات المرتبطة بالزمن
Related Rates

1) قرص معدني دائري الشكل يتمدد بالحرارة بحيث يزداد طول نصف قطره بمعدل $\frac{1}{4}$ cm /*sec*، أوجد معدل ازدياد مساحة سطح القرص عندما يكون طول نصف قطره 40 cm

2) إناء مخروطي الشكل قاعدتة أفقية ورأسه إلى أسفل، يخرج منه الماء بمعدل $2\,ft^3/min$، إذا كان طول نصف قطر قاعدته 3 ft وارتفاعه 9 ft، احسب معدل انخفاض الماء في الأناء عندما يصبح الماء على ارتفاع 4 ft

3) في لحظة ما كان طول ضلعي القائمة في مثلث قائم الزاوية 12 cm, 9 cm، فإذا كان طول الضلع الأول يزداد بمعدل 3 cm / sec وطول الضلع الثاني ينقص بمعدل 1 cm / sec بحيث يبقى المثلث محافظًا على شكله، فأوجد معدل التغير في مساحة المثلث بعد 2 sec من تلك اللحظة.

4) تتحرك نقطة على منحنى الدالة $y = \sin(2x)$، إذا كان الإحداثي x يزداد بمعدل $\frac{\pi}{8}$ *rad /sec*، فأوجد معدل التغير في الإحداثي y عندما $x = \frac{\pi}{12}$

5) يُضخ غاز داخل بالون كروي بمعدل $100\,cm^3/sec$، أوجد معدل الزيادة في مساحة سطح البالون عندما يكون طول نصف قطر البالون 4 cm

التصويبات

رقم الصفحة	الملاحظة	التعديل

الرياضيات

أعدَّ النسخة العربية : شركة العبيكان للتعليم

التحرير والمواءمة

محمد بن عبدالله البصيص

عبد الحكيم سليمان | أحمد مصطفى سمارة | خلود عبدالحفيظ لوباني

أحمد محمود أبو صهيون | د.فراس منصور التميمي | عبد الغني أحمد العتيلي

ندى علي الشهري

التحرير اللغوي

أحمد عبدالعظيم السيد

مصطفى مزمل إبراهيم

تصميم الغلاف

أحمد بن محمد الحبيشي

Original Title

Algebra 2 © 2010

By

John A. Carter, Ph.D | Gilbert J. Cuevas, Ph.D | Roger Day, Ph.D

Carol E. Malloy, Ph.D | Jerry Cummins | Berchie Holliday, Ed. D

Ruth M.Casey | Prof. Viken Hovsepian | Dinah Zike

العبيكان Obeikan

مراجعة وتنقيح : لجان وفرق وطنية

الطبعة التجريبية للعام الأكاديمي 2018 – 2017

www.edu.gov.qa

الاســـم: .....

الشعبة: .....

www.obeikaneducation.com

Mc Graw Hill Education