

المتطابقات والمعادلات المثلثية

مشروع الوحدة

تدوير العجلة

يستخدم الطلاب ما تعلموه عن المتطابقات المثلثية لإكمال مشروع معين.

يتناول مشروع هذه الوحدة المعرفة التجارية، والعديد من المهارات الخاصة الضرورية لنجاح الطالب في إطار عمل التعلم في القرن 21.

المفردات الأساسية قَدِّم المفردات الأساسية في الوحدة متبَعًا النظام التالي.

تعريف: المتطابقة المثلثية هي معادلة تضم دالةً مثلثيةً صحيحةً عند جميع قيم المتغير.

مثال: المتطابقة $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ هي متطابقة زاوية سالبة.

اطرح السؤال التالي: ما المتطابقات الأخرى التي تعلمتها في هذا العام تقريبًا؟ **يمكن أن تختلف الإجابات: يمكن أن يذكر الطلاب مصنفات المتطابقات أو الدالة المحايدة.**

لماذا؟ ▲

● **الإلكترونيات** يمكن تمثيل الكثير من النواحي الخاصة بالإلكترونيات باستخدام الدوال المثلثية. تنقل أجهزة المذياع والتلفاز والهاتف الخليوي إضافةً إلى الإنترنت اللاسلكي إشاراتها جيبًا باستخدام أمواج لا سلكية تمثلها دوال مثلثية، ويمكن إيجاد مقدار الطاقة في أداة إلكترونية عبر استخدام معادلةٍ مثلثية.

الحالي

- بعد دراستك لهذه الوحدة ستكون قادرًا على:
 - استخدام المتطابقات المثلثية والتحقق من صحتها.
 - استخدام متطابقات مجموع الزوايا والفرق بينها.
 - استخدام متطابقات ضعف الزاوية ونصفها.
 - حل المعادلات المثلثية.

السابق

- لقد مثلت الدوال المثلثية بيانات وحددت الفترة والسعة وإزاحة الطور والإزاحة الرأسية.

مراجعة سريعة

الدرس (12-2)

عواملها الأولية.

$$(2x^3 - 2x^2 - 24x) = 2x(x^2 - x - 12)$$

معاملات حدود x يساوي -24 ، ومن
بها 2. ناتج ضرب العددين 6 و -4
فيها 2.

$$(x^2 - x - 12) = (x + 6)(x - 2)$$

الدرس (12-7)

عن طريق التحليل

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

معادلة الأصلية

$$(x + 5)(x + 1) = 0$$

عزل العوامل.

$$x + 5 = 0$$

$$x + 1 = 0$$

$$x = -5$$

$$x = -1$$

$\{-5, -1\}$

الدرس (12-3)

$$\cos 135^\circ$$

$$- \cos 45^\circ \text{ أو } 180^\circ$$

الزاوية 135° تقع في الربع الثاني. فإن

بيدًا؟ الإجابة النموذجية: اعتمادًا
بياني أو رسم تخطيطي. وفي
ي كمعادلة أو جدول قيم.

ت ومفردات جديدة أثناء دراستك
للمفردات المهمة ونظم مواردك.

المفردات الجديدة

trigonometric identity	متطابقة مثلثية
quotient identity	متطابقة ناتج القسمة
reciprocal identity	متطابقة عكسية
Pythagorean identity	متطابقة فيثاغورس
cofunction identity	متطابقة الزاويتين المتتامتين
negative angle identity	متطابقة الزاوية السالبة
trigonometric equation	معادلة مثلثية

مراجعة المفردات

القانون هو جملة رياضية تعبر عن العلاقة بين كميات بعينها
المتطابقة هي معادلة تبقى صحيحة لجميع قيم المتغيرات التي
تضمها

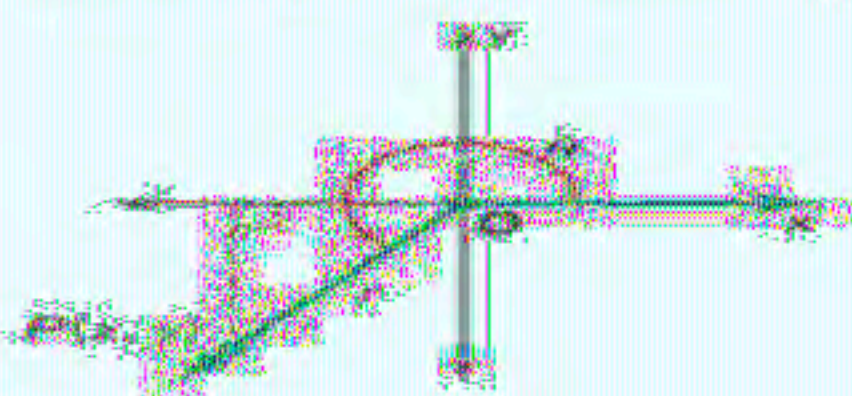
النسب المثلثية لكل زاوية قياسها θ هناك نقطة $P(x, y)$ على
ضلع الانتهاء، بحيث يكون

والنسب المثلثية للزاوية θ هي كالتالي:

$\sin \theta = \frac{y}{r}$ $\csc \theta = \frac{r}{y}$

$\cos \theta = \frac{x}{r}$ $\sec \theta = \frac{r}{x}$

$\tan \theta = \frac{y}{x}$ $\cot \theta = \frac{x}{y}$

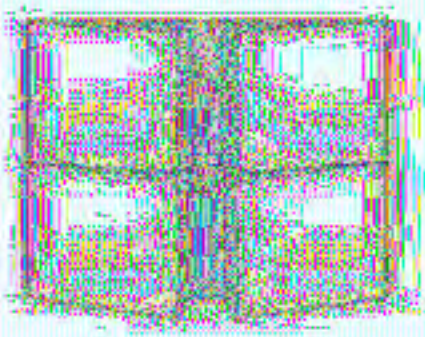


شيء اصنع المخطوطة
ك الخاصة بالوحدة 12
المثلثية. ابدأ بورقة قياسها









1 التركيز

التخطيط الرأسي

قبل الدرس 12-1 إيجاد قيم الدوال المثلثية.

الدرس 12-1 استخدام المتطابقات المثلثية لإيجاد القيم المثلثية. واستخدام المتطابقات المثلثية لتبسيط التعابير.

بعد الدرس 12-1 استخدام المتطابقات المثلثية لحل مسائل من الحياة اليومية.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة القسم لماذا؟ الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- في الطرف الأيمن من قانون الاستضاءة، ما المتغيرات التي تظهر في البسط؟ وما المتغيرات التي تظهر في المقام؟ الشدة، الاستضاءة والمسافة

- في المثلث قائم الزاوية، ما نسبة

$$\sec \theta$$

- ما الدالة العكسية لـ $\sec \theta$ ؟



$E = \frac{I \cos \theta}{r^2}$. هذا مثال عن متطابقة أكثر وهي صحيحة لكل القيم التي

يجل المعادلة خاطئة. إذاً عليك أن تست متطابقة.

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cos \theta \neq 0$$

$$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}, \csc \theta \neq 0$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}, \sec \theta \neq 0$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}, \cot \theta \neq 0$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cos \theta$$

$$\sin (-\theta) = -\sin \theta$$

لنأخذ الدوال المثلثية في الاعتبار...

في 90° و 270° و ...

قياسات هذه الزوايا، إذاً $\tan \theta$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

استخدام المتطابقات المثلثية لإيجاد القيم الدقيقة للدوال المثلثية. ويمكنك إيجاد قيم تقريبية بـ حاسبة التمثيل البياني.

1. استخدام المتطابقات المثلثية

أوجد القيمة الدقيقة لـ θ إذا كان $\sin \theta = \frac{1}{4}$ و $90^\circ < \theta < 180^\circ$.

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{16}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{15}{16}$$

$$\cos \theta = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

متطابقة فيثاغورس

بمربع الطرفين من كل طرف.

عوّض $\frac{1}{4}$ بدلاً من $\sin \theta$.

بترتيب $\frac{1}{4}$.

اطرح $\frac{1}{16}$ من 1.

أوجد الجذر التربيعي لكل طرف.

بما أن θ تقع في الربع الثاني، فإن θ سالبة. ولذلك،
التحقق استخدم حاسبة لإيجاد إجابة تقريبية.

الخطوة 1: أوجد $\text{Arcsin } \frac{1}{4}$.

$$\sin^{-1} \frac{1}{4} \approx 14.48^\circ$$

استخدم حاسبة.

نظرًا إلى أن $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ، فإن $\theta \approx 180^\circ - 14.48^\circ$ أو حوالي 165.52° .

الخطوة 2: أوجد $\cos \theta$.

عوّض θ بـ 165.52° .

$$\cos 165.52^\circ \approx -0.97$$

الخطوة 3: قارن مع القيم الدقيقة.

$$-0.97 \approx -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$0.97 \approx -0.968$$

أوجد القيمة الدقيقة لـ θ إذا كانت $\cot \theta = -\frac{3}{5}$ و $270^\circ < \theta < 360^\circ$.

$$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + 1 = \csc^2 \theta$$

$$\frac{9}{25} + 1 = \csc^2 \theta$$

$$\frac{34}{25} = \csc^2 \theta$$

$$\pm \frac{\sqrt{34}}{5} = \csc \theta$$

$$\csc \theta = -\frac{\sqrt{34}}{5}$$

متطابقة فيثاغورس

عوّض $-\frac{3}{5}$ بدلاً من $\cot \theta$.

بالتربيع

اجمع

خذ الجذر التربيعي لكل طرف.

بما أن θ تقع في الربع الرابع، فإن $\csc \theta$ سالبة. وهكذا فإن

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

أوجد $\sin \theta$ إذا كانت $\cos \theta = \frac{1}{3}$ و $270^\circ < \theta < 360^\circ$.

أوجد $\sec \theta$ إذا كانت $\sin \theta = -\frac{2}{7}$ و $180^\circ < \theta < 270^\circ$.

$$\frac{7\sqrt{5}}{15}$$

بسيط التعابير يعني تبسيط تعبير يضم نسب مثلثية كتابة ذلك التعبير في صورة قيم عددية بدلالة نسبة مثلثية واحدة في حال كان ذلك ممكنًا.

دولة مع المتطابقات المثلثية،

وعاء من ثلاثة طلاب. واطلب من كل مجموعة اختيار إحدى المتطابقات "أساسي" والعمل معًا لإثبات صحتها. ويتعين على الطلاب إثبات صحة sine و cosine و وظل الزاوية بدلالة أضلاع مثلث قائم الزاوية.

2 تبسيط التعابير

يوضح المثال 2 كيفية تبسيط تعبير عبر كتابته بدلالة دالة مثلثية واحدة. ويوضح المثال 3 تبسيط تعبير من الحياة اليومية يضم دوال مثلثية.

أمثلة إضافية

2. بسط $\sin \theta (\csc \theta - \sin \theta)$ $\cos^2 \theta$

3. الإضاءة راجع بداية الدرس.

a. أوجد حل قانون الاستضاءة

بدلالة R .

b. هل المعادلة الواردة في الجزء a

مكافئة لـ $\frac{1}{R^2} = \frac{E}{I \sec \theta}$ ؟ لا

التركيز على محتوى الرياضيات

المتطابقات يجب على الطلاب أن

يتذكروا جيدًا متطابقات ناتج القسمة

والمتطابقات العكسية والمتطابقات

الفيثاغورية. ففي حين أنه من المفيد

تذكر أنواع أخرى من المتطابقات، فإنه

يمكن اشتقاق المتطابقات الأخرى من

المتطابقات الأساسية.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

صفحة الويب أنشئ صفحة ويب للصف

الدراسي تتضمن جميع المتطابقات

والصيغ المثلثية التي تضمها هذه الوحدة.

واطلب من الطلاب الاشتراك في خدمة

تقديم مقتطفات الأخبار (RSS feed)

حتى يتمكنوا من متابعة تحديثك للصفحة

بكل سهولة.

$$\begin{aligned} \frac{\sin \theta \csc \theta}{\cot \theta} &= \frac{\cancel{\sin \theta} \cdot \frac{1}{\cancel{\sin \theta}}}{\frac{1}{\tan \theta}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\tan \theta}} \\ &= \frac{1}{1} \cdot \frac{\tan \theta}{1} \end{aligned}$$

$$2A. \frac{\tan^2 \theta \csc^2 \theta - 1}{\sec^2 \theta} \sin^2 \theta$$

الحياة اليومية.

$$\sec \theta = \frac{1}{ER^2}$$

$$ER^2 \sec \theta = 1$$

$$ER^2 \frac{1}{\cos \theta} = 1$$

$$\frac{E}{\cos \theta} = \frac{1}{R^2}$$

$$E = \frac{1}{R^2} \cos \theta$$

$$R^2 = \frac{1}{E} \cos \theta \text{ اشرح.}$$

$$R^2 = \frac{1 \tan \theta \cos \theta}{E}$$

$$ER^2 = 1 \tan \theta \cos \theta$$

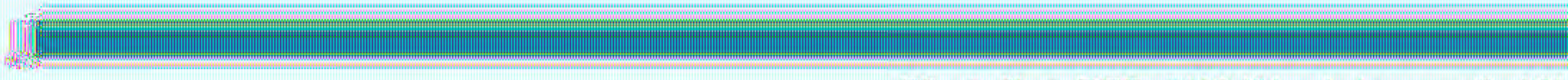
$$E = \frac{1 \tan \theta \cos \theta}{R^2}$$

$$E = \frac{1 \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) \cos \theta}{R^2}$$

$$E = \frac{1 \sin \theta}{R^2}$$

$$R^2 = \frac{1}{E} \sin \theta \text{ إلى } R^2 = \frac{1}{E} \sin \theta$$

ت بها أفكار رياضية محددة. يمكن للطلاب دراسة المثلثية العكسية في سياق عمله.



لكل تعبير مما يلي إذا كانت $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

1. $\cos \theta$ ، فأوجد $\tan \theta$. $\frac{1}{2}$
2. إذا كانت $\sin \theta = \frac{4}{5}$ ، فأوجد $\cos \theta$. $\frac{3}{5}$
3. إذا كانت $\tan \theta = \frac{1}{2}$ ، فأوجد $\sec \theta$. $\frac{\sqrt{5}}{2}$
4. إذا كانت $\cos \theta = \frac{2}{3}$ ، فأوجد $\csc \theta$. $\frac{3}{\sqrt{5}}$

التالية.

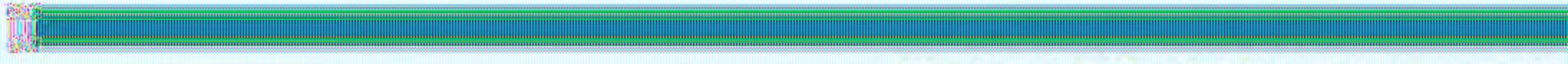
5. $\tan \theta \cos^2 \theta \sin \theta \cos \theta$
6. $\csc^2 \theta - \cot^2 \theta$
7. $\frac{\cos \theta \csc \theta}{\tan \theta}$



يمر ضوء غير مستقطب عبر عدسة نظاريّة، تنخفض شدة الضوء إلى النصف. وإذا مرّ عبر عدسة مستقطبة أخرى يقع محورهما سية للعدسة الأولى، فإن شدة الضوء هي، ويمكن إيجاد شدة الضوء الخارجة $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2 \theta}$.
الضوء الوارد إلى العدسة المستقطبة شدة الضوء الخارج، و θ هي الزاوية بين
أب.

بدلالة $\cos \theta$. $I = I_0 \cos^2 \theta$

لغة المبسطة لتحديد شدة الضوء المارّ عبر عدسة استقطاب ثانية بشكل محورهما زاوية قياسها 30° سة الأصلية. $I = \frac{3}{4} I_0$ ؛ للضوء ثلاثة أرباع شدته قبل أن يمرّ عبر العدسة المستقطبة الثانية.



لكل تعبير مما يلي إذا كانت $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

10. إذا كانت $\sin \theta = \frac{1}{2}$ ، فأوجد $\tan \theta$. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
11. $\cos \theta$ ، فأوجد $\csc \theta$. $\frac{5}{4}$
12. إذا كانت $\tan \theta = 2$ ، فأوجد $\sec \theta$. $\sqrt{5}$
13. $\sin \theta$ ، فأوجد $\cos \theta$. $\frac{4}{5}$

لكل تعبير مما يلي إذا كانت $180^\circ < \theta < 270^\circ$.

14. إذا كانت $\sec \theta = -3$ ، فأوجد $\tan \theta$. $2\sqrt{2}$
15. $\cos \theta$ ، فأوجد $\csc \theta$. $-\frac{5}{4}$
16. إذا كانت $\sin \theta = -\frac{1}{2}$ ، فأوجد $\cos \theta$. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
17. $\cot \theta$ ، فأوجد $\csc \theta$. $-\frac{2}{\sqrt{3}}$

لكل تعبير مما يلي إذا كانت $270^\circ < \theta < 360^\circ$.

18. إذا كانت $\tan \theta = -1$ ، فأوجد $\sec \theta$. $-\sqrt{2}$
19. $\cos \theta$ ، فأوجد $\sin \theta$. $-\frac{1}{2}$
20. إذا كانت $\csc \theta = -\frac{5}{3}$ ، فأوجد $\cos \theta$. $-\frac{3}{5}$
21. $\sec \theta$ ، فأوجد $\cos \theta$. $-\frac{5}{3}$

التالية.

21. $\sec \theta \tan^2 \theta + \sec \theta$
22. $\cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \cot \theta$
23. $\cot \theta \sec \theta$
24. $\sin \theta (1 + \cot^2 \theta)$
25. $\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \sec \theta$
26. $\frac{\cos (-\theta)}{\sin (-\theta)}$

مركز التعليم الإلكتروني

محتوى المتكاملة

الواجب	خيار اليومين
9-27, 42, 44-48, 50-67	42, 44-48, 50, 55-67 زوجي 10-26
9-33, 34-42, 44-48, 50-67	28-42, 44-48, 50, 55-67
28-64, (اختياري) 65-67	

$$B = \frac{F \csc \theta}{10}$$

$\sin \theta$ (ظلميح: كل

28. $\frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \cot^2 \theta$ 29

31. $2(\csc^2 \theta - \cot^2 \theta)$ 2 32

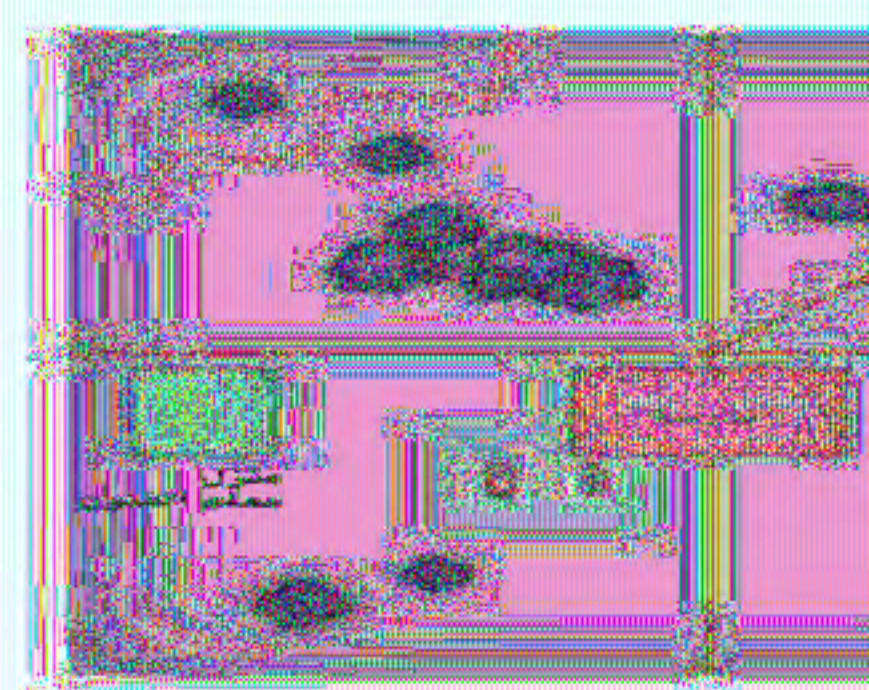
• يمكن حساب الانحراف

للطاقة الصادرة عن الشمس

أحد المسطوح المميز في الشمس.

$$W = eA$$

$S = 1000 \text{ W}$ ، وقريب الإجابة إلى



التحديد ما إذا كانت
 $\tan^2 \theta$

tan

$\tan^2 \theta - \sin^2 \theta$ في صورة دالتين

متطابقة. هل يتطابق التمثيلان

مطلوبه: $\sec^2 x - 1 = \sin^2 x$

تدريس الهاءات في الرياضيات

تمثيل النماذج يستطيع الطلاب

المتفوقون في الرياضيات تطبيق

الحساب الذي يعرفونه لحل المسائل

الناشئة في الحياة اليومية، وتحليل

العلاقات رياضيًا لاستخلاص

الاستنتاجات، وتفسير نتائجهم الرياضية

في سياق الحالة.

[illegible]

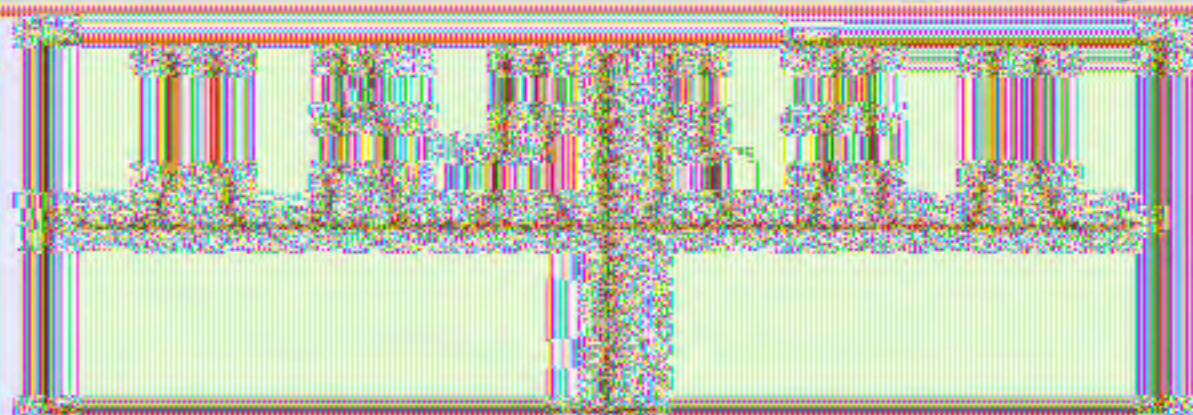
يستخدم الطلاب في التمرين 36 جدولاً

للقيم وحاسبة تمثيل ميانى لتحديد ما إذا

كأنت معادلة ما مطلقاً

إجابة إضافية

36b.



[-540, 540] scl: 90 في [-10, 10] scl: 1



لج كتلته m على قلة زاويتها θ درجة بسرعة ثابتة.
 بين قوتين على هذه الحالة، ينتج نظام المعادلات التالي:
 $F_n - \mu_k mg \sin \theta = 0$ و $F_n = mg \cos \theta$ حيث يمثل g
 الجاذبية الأرضية، ويمثل F_n القوة العمودية المؤثرة في
 معامل الاحتكاك. استخدم نظام المعادلات لتحديد

$$\mu_k = \tan \theta$$

38. $\frac{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\sec\theta}{1 - \csc^2\theta} = -\tan\theta\sec\theta$  $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{1 + \sin(-\theta)}$

40. $\frac{\sec \theta \sin \theta + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)}{1 + \sec \theta} \quad \sin \theta$ 41. $\frac{\cot \theta \cos}{\tan (-\theta) \sin}$

المسائل المتعلقة بالهجرة والكثافة السكانية

يتناقض إبراهيم وأحمد بشأن ما إذا كانت إحدى المعادلات الواردة في واجبه المنزلي تقول إبراهيم إنه ونظراً لتجربته عشر قيم محددة وإلى أنها جميعاً كانت صالحة، فلا بد أنها ن يقول أحمد إنه لا يمكن استخدام سوى قيم محددة بمثابة أمثلة مضادة لإثبات عدم كون قول أي منهما على صواب؟ أشرح استنتاجك.

هذه قد تكون هناك قيم أخرى لا تكون المعادلة من أجلها صحيحة.

ب. يمكن إعادة كتابة قانون الاستقطاء الوارد في بداية هذا الفرس لإثبات أن $\cos \theta = \frac{ER^2}{I}$.

تعود شهرة العالم فيثاغورس في جاتها إلى نظرية فيثاغورس. وتعد المتطابقة $\cos^2$ مثالاً عن متطابقات فيثاغورس. فلم تصنف هذه المتطابقة كذلك بآياك؟

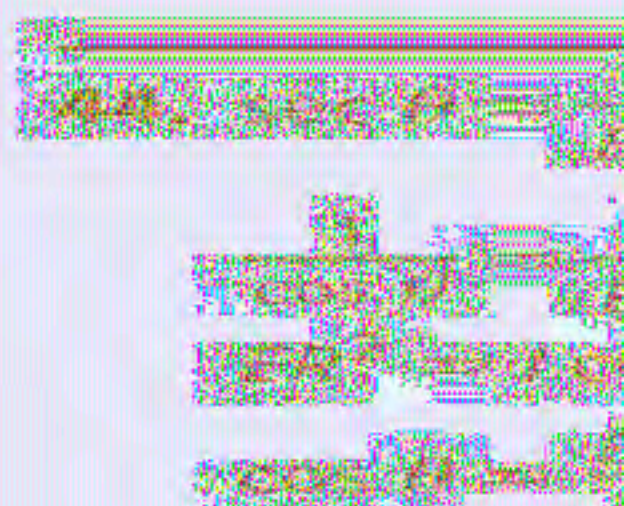
$\tan(-a) = -\tan a$ باستخدام متطابقات ناتج القسمة والزاوية السالبة.

لإثبات $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ ، استخدم التعريفات: $\sin \theta = \frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الفرضية}}$ و $\cos \theta = \frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الفرضية}}$ ، حيث θ هي الزاوية في المثلث القائم. افترض أن المثلث قائم الزاوية بـ C ، مع الفرضية c ، والضلع المجاور a ، والضلع المقابل b .

— **مثال ۱۴** $90^\circ \leq \theta < 180^\circ$ ، $\sin \theta = \frac{3}{5}$ کا $\cos$ کا

ثبت إيمان وأسماء $\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$. قول أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} &= \frac{\sin^2 \theta}{1} \\ \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\ &= \tan^2 \theta + 1 \\ &= \sec^2 \theta \end{aligned}$$



انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 42.
على الطلاب أن يروا أن أحمد
على صواب. اشرح للطلاب أن
الاستنتاج الاستدلالي (التعميم بناء
على عدة أمثلة) لا يمكن أن يثبت
صحة متطابقة، بل إن أي مثال
مضاد محدد يكفي للإثبات أن
المعادلة ليست متطابقة.
بالنسبة للتمرين رقم 50، يجب أن
يرى الطلاب أن أسماء على صواب
(لأن $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$) وأن
إيمان ليست على صواب

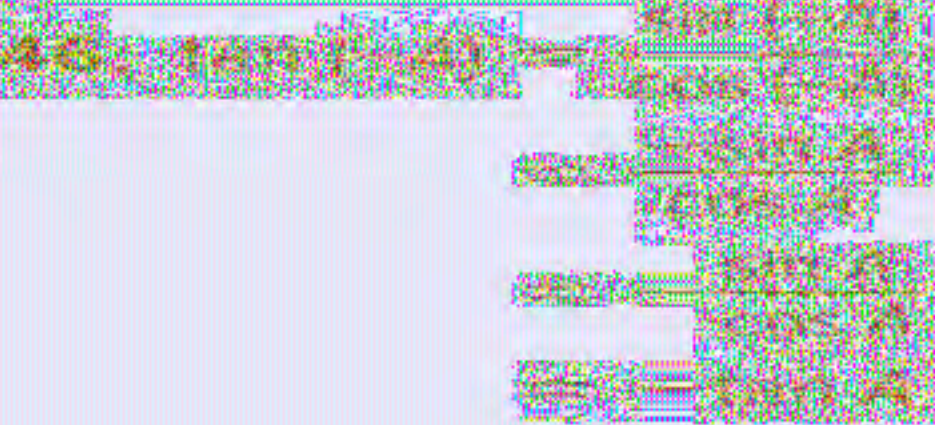
$$\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right)$$

اشرح للطلاب أنهم حين يبسطون
تعبيرًا مثلثيًا، فإنهم يستخدمون
الخواص نفسها التي يستخدمونها
عند تبسيط أي تعبير نسبي.

4 التقويم

الكرة البلورية أخبر الطلاب بأن ينتقلوا
إلى الدرس 12-2. واطلب منهم أن يكتبوا
كيف يعتقدون أن من شأن ما تعلموه
اليوم أن يساعدهم في الدرس 12-2.

إجابة إضافية



في أمل بـ 6 سنوات، ويساوي عمر
يساوي مجموع أعمارهم جميعًا 54.
نن استخدامهما لإيجاد عمر أمل؟

- D $x + (x - 6) + 2(x - 6) = 54$
A $x + (x - 6) + 2(x - 6) = 54$
B $x - 6x + (x + 2) = 54$
C $x - 6 + 2x = 54$
D $x + (x - 6) + 2x = 54$
E $2(x + 6) + (x + 6) +$
مثل صوا أسيا؟ G

$$F y = (0.3)^x$$

$$G y = (1.3)^x$$

$$H y = x^{\frac{3}{1}}$$

$$J y = x^{\frac{1}{3}}$$

$$55. \cos^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) 2.09$$

$$58. \tan \left(\cos^{-1} \frac{6}{7} \right) 0.60$$

تأري فوق الأرضية. يمسح

سورة دالة للزمن t ثانية

$$d = 4 -$$

$$62. \sum_{k=1}^5 \frac{1}{4} \cdot 2^k - 1 \frac{31}{4}$$

$$65. a + 1 = \frac{6}{a} - 3, 2$$

كتايته بدلالة دالة مثلثية واحدة.
ية ذلك.

اثبات صحة المتطابقات المثلثية

لماذا؟



حين كان خالد يركض على مضمار دائري، لاحظ أن جسمه لم يكن عموديا على الأرض. بل كان يميل بعيدا عن العمودية. في الحقيقة، الزاوية الحادة غير السالبة θ التي يميل بها خالد مع الشاقول باسم زاوية الميل وتوصف بالمعادلة $\tan \theta = \frac{v^2}{gR}$. هذه المعادلة ليست المعادلة الوحيدة التي تصف زاوية الميل بدلالة الدوال المثلثية. فهناك معادلة أخرى من هذا النوع صيغتها $\sin \theta = \cos \frac{v^2}{gR} \theta$ حيث $0 \leq \theta \leq 90^\circ$. هل هاتان المعادلتان مستطيلتان تمامًا بعضهما عن بعض أم أنهما مستطيلتان مختلفتان عن علاقتهما واحدة؟

صحة اثبات المثلثية ميل أحد المتطابقة إلى طرفي الآخر. صحت المثلثية ميل كل طرفي طابقة إلى نفسها.

تحويل أحد طرفي متطابقة يمكنك استخدام المتطابقات المثلثية الأساسية إضافة إلى تعاريف سب المثلثية لإثبات صحة المتطابقات. فإذا أردت إثبات متطابقة ما، فرتعين عليك إثبات صحتها من جميع قيم θ .

إثبات المتطابقات عبر تحويل طرف واحد

مثال 1 يسط طرفًا واحدًا من المتطابقة إلى أن يصبح طرفها متماثلين. وغالبًا ما تكون هذه الطريقة أسهل لمعالجة الطرف الأكثر تعقيدًا في المعادلة.

مثال 2 حول ذلك التعبير إلى صيغة الطرف الأيسر.

تحويل طرف واحد في متطابقة

ت صحة المتطابقة $\frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} = 1 + \cos \theta$

$$\frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} \stackrel{?}{=} 1 + \cos \theta$$

المعادلة الأساسية

$$\frac{1 + \cos \theta}{1 + \cos \theta} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} \stackrel{?}{=} 1 + \cos \theta$$

أضرب في 1 المتطابقة والمتطابق

$$\frac{\sin^2 \theta (1 + \cos \theta)}{1 - \cos^2 \theta} \stackrel{?}{=} 1 + \cos \theta$$

$$(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta) = 1 - \cos^2 \theta$$

$$\frac{\sin^2 \theta (1 + \cos \theta)}{\sin^2 \theta} \stackrel{?}{=} 1 + \cos \theta$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$1 + \cos \theta = 1 + \cos \theta \quad \checkmark$$

بقسمة البسط والمقام على $\sin^2 \theta$

من المثلثية

أثبت صحة المتطابقة $\cot^2 \theta - \cos^2 \theta = \cot^2 \theta \cos^2 \theta$. **أنظر التمام.**

عكسي. ففي المثال 1. خذ الخطوة بوضوح، فيمكنك أن تستنتج أن متطابقة الأصلية.

$$\frac{\cos \theta \csc \theta}{\tan \theta} =$$

A $\cot \theta$

B $\csc \theta$

في الإجابات جميعها إما تضم $\cot \theta$

$$\frac{\cos \theta \csc \theta}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot \frac{1}{\sin \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} = \cot \theta \csc \theta = \cot \theta$$

$$2. \tan^2 \theta (\cot^2 \theta - \cos^2 \theta) = \text{F} \cot^2 \theta \quad \text{G} \tan^2 \theta$$

حل كل طرف من طرفي المتطابقة الية أن تساعدك في إثبات صحة

التعبير.

وباليسط والمقام بالتعبير

. ثم بسط كلا من الطرفين قدر

بها على المعادلات. لا تتم بإجراء

1 تحويل طرف واحد في معادلة

يوضح المثال 1 كيفية إثبات صحة متطابقة مثلثية بتحويل أحد طرفي معادلة. ويوضح المثال 2 كيفية إيجاد تعبير مكافئ لتعبير مثلثي معطى.

تدريس الممارسات في الرياضيات

المثابرة يراقب الطلاب المتفوقون في مادة الرياضيات تقدّمهم ويقيّمونه ويغيّرون طريقتهم عند الضرورة. قدّكر الطلاب أنه لا يتساوى تعبيران حتى يصبحا من الصيغة نفسها.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

المثابرة الإضافية

1 أثبت صحة المتطابقة $\csc \theta \cos \theta \tan \theta = 1$.

2 تدريب على الاختبار المعياري

$$\frac{\csc \theta}{\cos \theta} = \tan \theta = \text{A}$$

A $\cot \theta$

C 0

B $\frac{1 - \sin \theta}{\cos^2 \theta}$

D $\cos^2 \theta$

إجابة إضافية (تمرين موجه)

$$\begin{aligned} 1. & \csc \theta \cos \theta \tan \theta = 1 \\ & \frac{1}{\sin \theta} \cos \theta \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 1 \\ & 1 = 1 \end{aligned}$$

من طالبين أو أكثر لإثبات صحة جدوا أنها مفيدة. اطلب من يناقشوا الإستراتيجيات العاشلة.

الأساليب الإثباتية بتحويل كلا الطرفين

تصحمة المتطابقة $1 - \tan^4 \theta = 2 \sec^2 \theta - \sec^4 \theta$

$$1 - \tan^4 \theta \stackrel{?}{=} 2 \sec^2 \theta - \sec^4 \theta$$

المعادلة الأساسية

$$(1 - \tan^2 \theta)(1 + \tan^2 \theta) \stackrel{?}{=} \sec^2 \theta (2 - \sec^2 \theta)$$

بتحويل كل طرف إلى الجوانب.

$$[1 - (\sec^2 \theta - 1)] \sec^2 \theta \stackrel{?}{=} (2 - \sec^2 \theta) \sec^2 \theta$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$(2 - \sec^2 \theta) \sec^2 \theta = (2 - \sec^2 \theta) \sec^2 \theta \quad \checkmark$$

وبسط.

رسم توضيحي

أثبت صحة المتطابقة $\csc^2 \theta - \cot^2 \theta = \cot \theta \tan \theta$. انظر التمام.

متطابقة فيما يأتي: 1-6. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

$$1. \cot \theta + \tan \theta = \frac{\sec^2 \theta}{\tan \theta}$$

$$2. \cos^2 \theta = (1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)$$

$$3. \sin \theta = \frac{\sec \theta}{\tan \theta + \cot \theta}$$

$$4. \tan^2 \theta = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$5. \tan^2 \theta \csc^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$$

$$6. \tan^2 \theta = (\sec \theta + 1)(\sec \theta - 1)$$

حدد ما التعبير الذي يمكن استخدامه لتشكيل متطابقة فيما $\frac{\tan^2 \theta + 1}{\tan^2 \theta}$ D

$$A \sin^2 \theta$$

$$B \cos^2 \theta$$

$$C \tan^2 \theta$$

$$D \csc^2 \theta$$

متطابقة فيما يأتي: 8-17. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

$$8. \cos^2 \theta + \tan^2 \theta \cos^2 \theta = 1$$

$$9. \cot \theta (\cot \theta + \tan \theta) = \csc^2 \theta$$

$$10. 1 + \sec^2 \theta \sin^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$11. \sin \theta \sec \theta \cot \theta = 1$$

$$12. \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = (\csc \theta - \cot \theta)^2$$

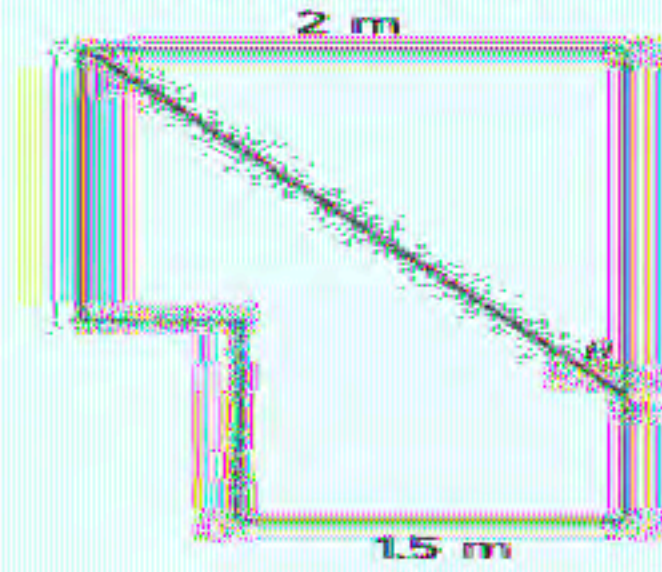
$$13. \frac{1 - 2 \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \tan \theta - \cot \theta$$

$$14. \tan \theta = \frac{\sec \theta}{\csc \theta}$$

$$15. \cos \theta = \sin \theta \cot \theta$$

$$16. (\sin \theta - 1)(\tan \theta + \sec \theta) = -\cos \theta$$

$$17. \cos \theta \cos (-\theta) - \sin \theta \sin (-\theta)$$



رض الطلاب تعبيراً لحساب طول سلم. علماً
صورة مسطحة فإنه يمكن أن يشغل زاوية بحيث
ضه 1.5 متراً إلى رواق عرضه متران كما هو
وا أن الطول الأقصى l لسلم يشغل هذا الركن
 $l(\theta) = 2 \sin \theta + 1.5 \csc \theta$ وعندما حلت
استنتجت أن $l(\theta) = 2 \sec \theta + 1.5 \csc \theta$
كافتان؟ نعم

البيانات المثلثية

المتباينة

الواجب	خيار اليومين
8-32, 52, 54-57	8-32, 52, 54-57, 59, 64-76
9-31, 35-49, 54-57, 33-72, (اختياري)	9-31, 60-63, 8-32, 60-63

تدريس الممارسات في الرياضيات

الاستنتاج المنطقي يبدأ الطلاب المتفوقون في الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن نقاط بدء الحل. ويحللون المعطيات والقيود والعلاقات والأهداف. ويتأكد الطلاب المتفوقون في الرياضيات من أجوبتهم عن المسائل باستخدام طريقة مختلفة. ويسألون أنفسهم باستمرار: "هل هذا جواب منطقي؟"

الفرضيات يستطيع الطلاب المتفوقون في الرياضيات فهم واستخدام الفرضيات والتعريفات والنتائج المثبتة سابقًا في بناء الفرضيات. ويضعون فرضيات ويبنون تقدمًا منطقيًا للمسائل لاستكشاف حقيقة تقديراتهم. كما يمكنهم تحليل المواقف بتقسيمها إلى حالات. ويمكنهم التعرف على الأمثلة المضادة واستخدامها.

المتابعة

استكشفت الطلاب المتطابقات المثلثية وأثبتوا صحتها.

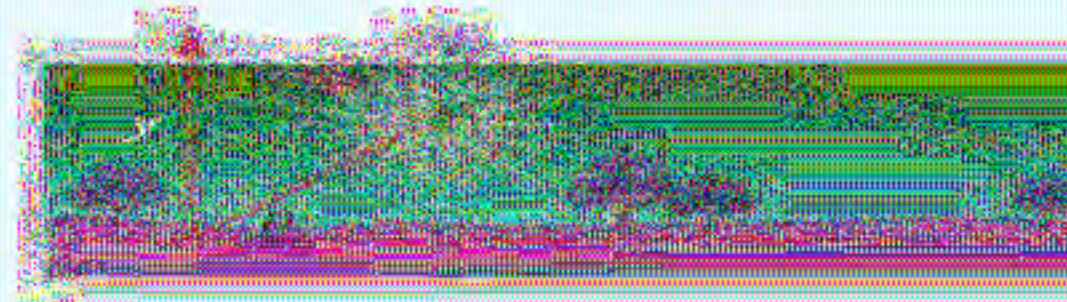
اطرح السؤال التالي:

- لم تعد المتطابقات المثلثية مفيدة؟ الإجابة النموذجية: توفر المتطابقات المثلثية طريقة لتبسيط الدوال المثلثية المعقدة عبر إعادة كتابة التعابير الموجودة ضمن الدوال بصيغ مكافئة، ولكنها أكثر ملاءمة.

19. $\sec \theta - \tan \theta = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$
21. $\sec \theta \csc \theta = \tan \theta + \cot \theta$
23. $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \frac{2 + \sec \theta}{\sec \theta \csc \theta}$
25. $\csc \theta - 1 = \frac{\cot^2 \theta}{\csc \theta + 1}$
27. $\sin \theta \cos \theta \tan \theta + \cos^2 \theta =$
29. $\csc^2 \theta = \cot^2 \theta + \sin \theta \csc \theta$
31. $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \sec^2 \theta -$



35. $\cot(-\theta) \tan(-\theta) = 1$
38. $\sec(-\theta) \cos(-\theta) = 1$
41. $\frac{\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) \csc \theta}{\csc^2 \theta} = \cos \theta$
43. $(\sec^2 \theta + \csc^2 \theta) - (\tan^2 \theta + \cot^2 \theta) =$
45. $\tan \theta \cos \theta = \sin \theta$
47. $\sec \theta \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = 1$



وفي واحد من المعادلة أو الطرفين
ط في كل مرة لتجنب الارتباك.

عند مرور تيار متناوب تردده f وذروته I_0 عبر مقاومة R . فإن القدرة التي تبذل المقاومة عند
 تلي بالعلاقة $P = I_0^2 R \sin^2 2\pi ft$.

$$P = I_0^2 R (1 - \cos^2 2\pi ft) \quad \text{بقدره بدلالة } \cos^2 2\pi ft.$$

$$P = \frac{I_0^2 R}{\csc^2 2\pi ft} \quad \text{بقدره بدلالة } \csc^2 2\pi ft.$$

هذه المسألة. سوف نستكشف مسار الكرة الذي تمثله المعادلة $h = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$. حيث تمثل
 بين الأرض ومسار الكرة. وتمثل v_0 سرعتها الابتدائية بالأمتار في الثانية، وتمثل g تسارع
 . قيمة g تساوي 9.8 m/s^2 .



عة البدائية للكرة تساوي 47 مترا
 جد ارتفاع الكرة عند الزوايا 30°
 و 90° . قُرب إلى أقرب جزء

إجابات الوحدة 12.

بإثبات على حاسبة للتمثيل البياني. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

بـ $h = \frac{v_0^2 \tan^2 \theta}{2g \sec^2 \theta}$ مكافئة للصفة المعطاة أعلاه. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

مسائل مهارات التفكير العليا

المتطابقة التي لا تنتمي إلى المتطابقات الثلاث الأخرى. اشرح استنتاجك.

$$\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = 2 \sin^2 \theta$$

المتطابقات الثلاثة
 الأخرى متطابقات
 مثلثية. ولكن هذه ليست
 كذلك.

$$\cot^2 \theta = \csc^2 \theta + 1$$

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = 2 \sin^2 \theta$$

$$\tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1 \quad \text{لنتثبت أن } \tan^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$\tan^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \rightarrow \tan^2 \theta = \tan^2 \theta \rightarrow \tan^2 \theta$$

سيات اشرح لماذا لا يمكنك قسمة كلا طرفي معادلتك عندما تثبت صحة متطابقة مثلثية.

ن المساواة على المتطابقات بالكيفية التي تنطبق بها على المعادلات. لا تجري العمليات
 في كل من طرفي متطابقة ليست مثبتة.

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \text{متطابقة في حين } \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

إجابة النموذجية: مثال مضاد 45° , 30°

في أحد الزملاء في الصف من صعوبة أثناء محاولة إثبات صحة متطابقة مثلثية تتضمن العديد من
 زوايا لها درجات متعددة. اكتب معادلة لمساعدته في حل المسألة.

جيدة: هل حاولت استخدام المتطابقة الأكثر شيوعاً $1 - \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ للتبسيط؟

الرياضيات لماذا تعتقد أن التعابير في المتطابقات المثلثية تعاد كتابتها غالباً بدلالة
 الـ Cosine؟ انظر الهامش

$$x = \frac{1}{2} \tan \theta, \quad \text{حيث } -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}. \quad \text{اكتب } f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+4x^2}} \quad \text{بدلالة دالة مثلثية واحدة}$$

$$f(\theta) = \frac{1}{2}$$

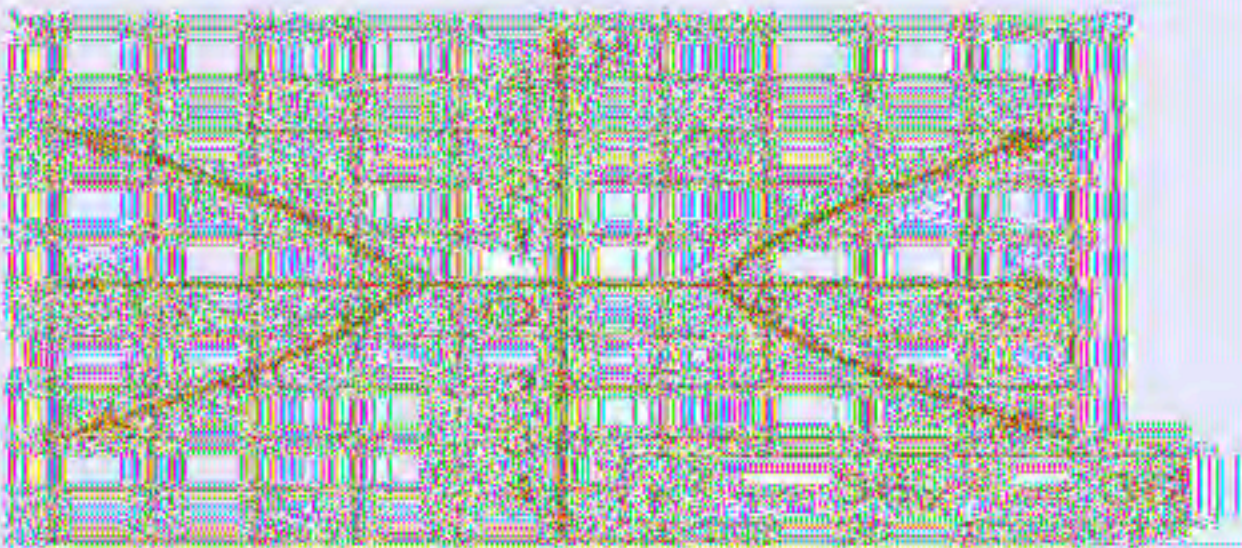
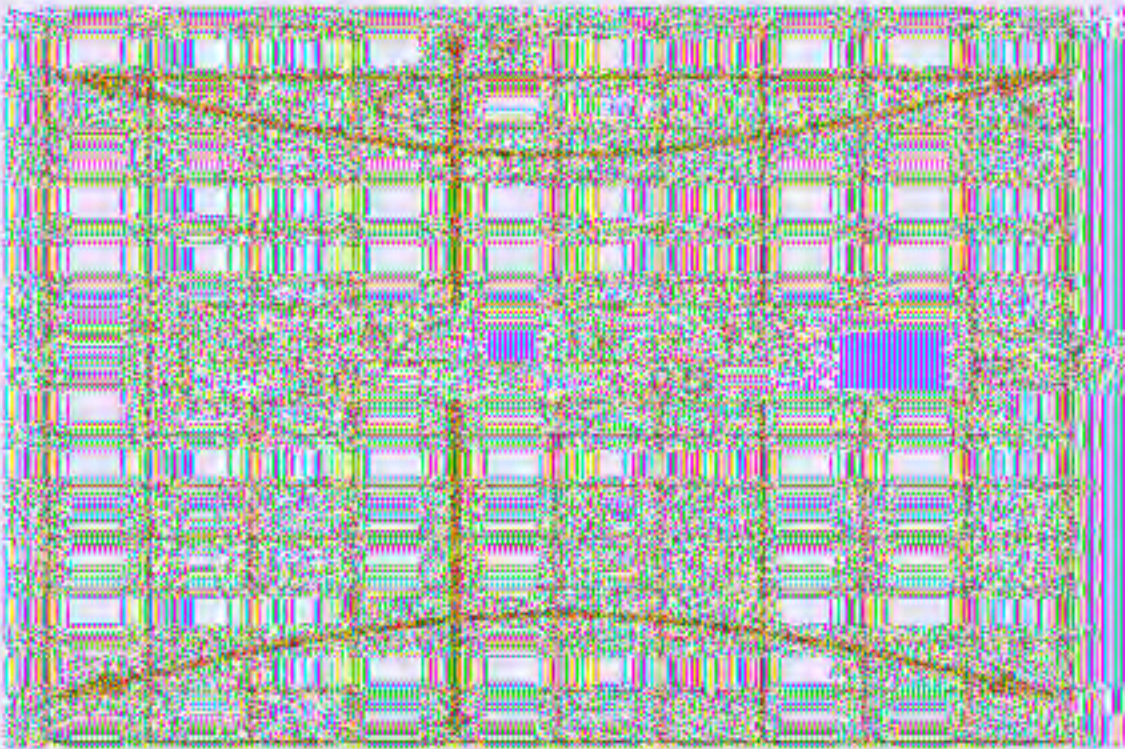
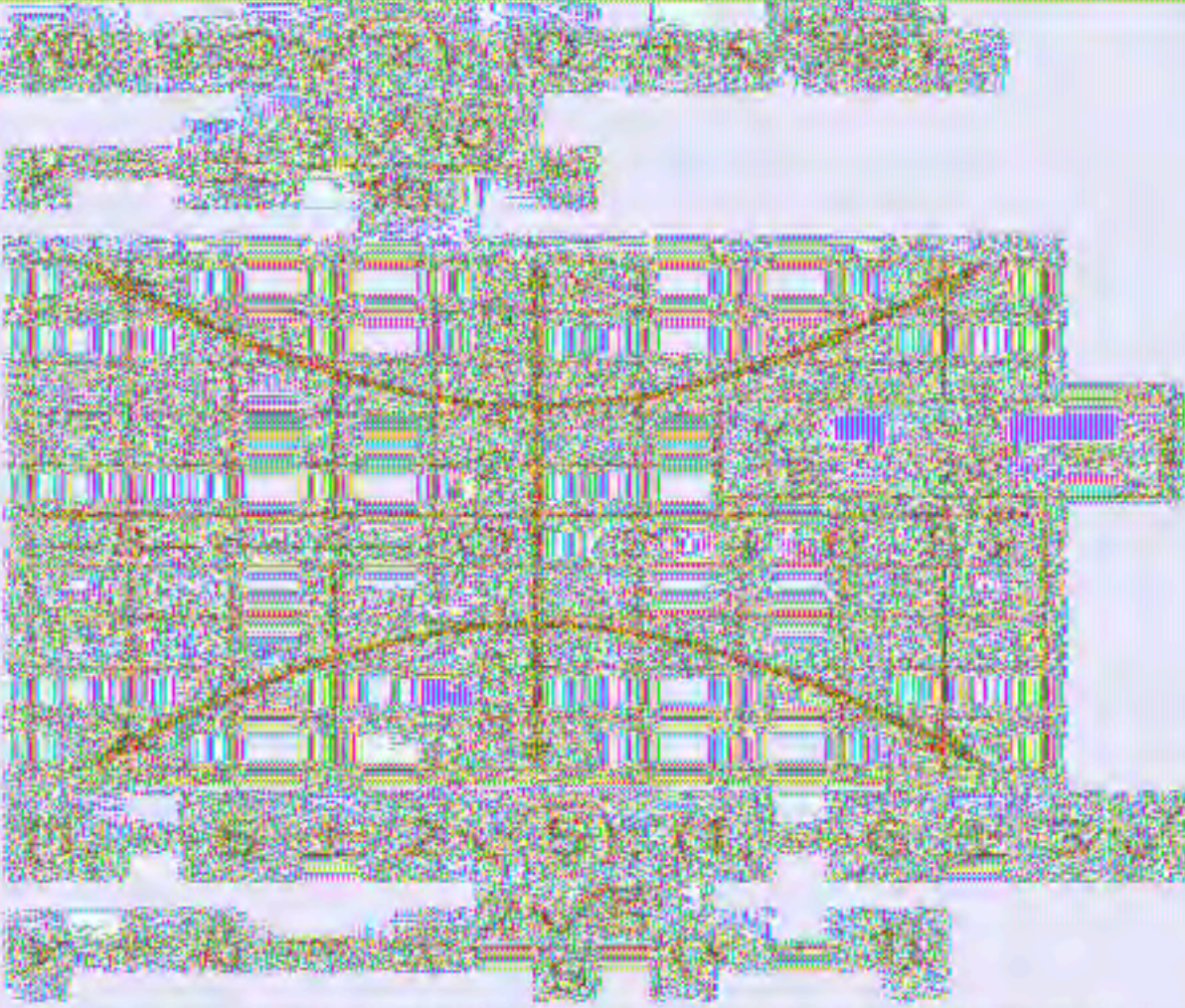
المتطابقات المثلثية الأساسية الثلاثة. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

المتطابقات المثلثية

4 التقويم

حصاد الأمس اطلب من الطلاب أن يكتبوا كيف أن تعلم المتطابقات المثلثية الأساسية في الدرس 1-12 قد ساعدهم في إثبات صحة متطابقات أكثر تعقيداً في درس اليوم.

إجابات إضافية



مثلث قائم الزاوية 36 سنتيمتراً. باقي الأطوال ناقضاً منه ضعف لأي 6 سنتيمترات. فما أطوال ميمها؟ **C**

- A 3 cm., 4 cm., 5 cm.
B 6 cm., 8 cm., 10 cm.
C 9 cm., 12 cm., 15 cm.
D 12 cm., 16 cm., 20 cm.

- F $2\sqrt{2}$
G $2\sqrt{8}$
H 4
J $4\sqrt{2}$

$$\frac{\sqrt{5}}{3} \quad 0^\circ \leq \theta < 90^\circ \text{ or}$$

$$270^\circ < \theta < 360^\circ \text{ is}$$



ل القطع بيانياً. 70-72. انظر الهامش.

70. $\frac{y^2}{18} - \frac{x^2}{20} = 1$

73. $\frac{2 + \sqrt{2}}{5 - \sqrt{2}}$

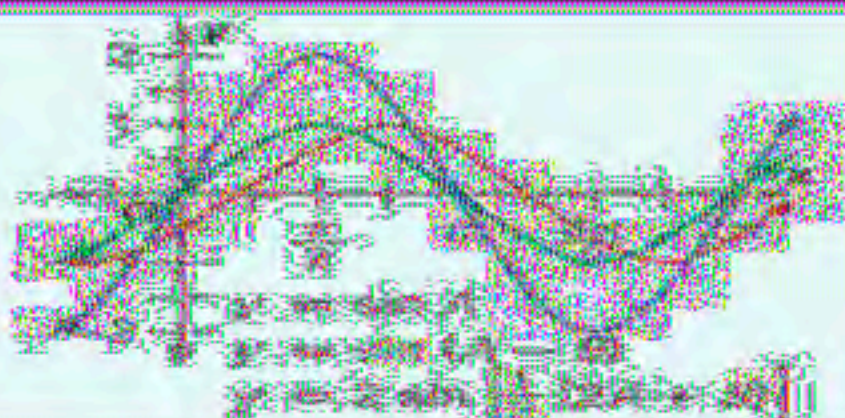
74

717

صحيحة مع جميع القيم الحقيقية $90^\circ + k \cdot 360^\circ$ حيث k هو

متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما

لماذا؟



هل سبق أن استخدمت موزعًا لاسلكيًا لشبكة الإنترنت، وفقدت الإشارة مؤقتًا؟
يسبب مرور أمواج في مكانين واحد، وفي الوقت نفسه حدوث تداخل. ويحدث التداخل عند تراكب موجتين لإعطاء موجة سعتها أكبر أو أصغر من أي من الموجتين المرغبتين لها.

يمثل sine cc باستخدام مجموع

سعة المتطابقات باستخدام مجموع

طابقات المجموع والفرق لاحظ أن المعادلة الثالثة المبينة أعلاه تتضمن مجموع A و B . المفيد غالبًا استخدام صيغ القيم المثلثية لمجموع زاويتين أو فرقهما. على سبيل المثال، يمكنك القيمة الدقيقة لـ $\sin 15^\circ$ عبر إيجاد قيمة $\sin (60^\circ - 45^\circ)$. توجد صيغ يمكن استخدامها قيم تعابير مثل $\sin (A - B)$ أو $\cos (A + B)$.

المجموع الأساسي متطابقات المجموع والفرق

متطابقات الفرق	متطابقات المجموع
$\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ $\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ $\tan (A - B) = \frac{\sin (A - B)}{\cos (A - B)}$	$\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ $\cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ $\tan (A + B) = \frac{\sin (A + B)}{\cos (A + B)}$

1 إيجاد القيم المثلثية المجهولة

جد القيمة الدقيقة لكل تعبير.

a. $\sin 105^\circ$

$$\begin{aligned}\sin 105^\circ &= \sin (60^\circ + 45^\circ) \\ &= \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

b. $\cos (-120^\circ)$

$$\begin{aligned}\cos (-120^\circ) &= \cos (60^\circ - 180^\circ) \\ &= \cos 60^\circ \cos 180^\circ + \sin 60^\circ \sin 180^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

استخدم المتطابقة $\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$.

$A = 60^\circ$ و $B = 45^\circ$

متطابقة المجموع

أوجد قيمة كل تعبير.

أبسطه.

استخدم المتطابقة $\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$.

$A = 60^\circ$ و $B = 180^\circ$

متطابقة الفرق

أوجد قيمة كل تعبير.

أبسطه.

ين هو

1A. $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

1B. $\cos (-15^\circ) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

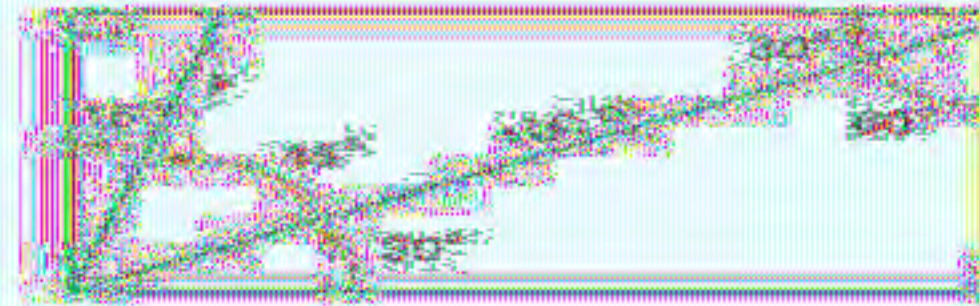
من الحياة اليومية.

والفرق بينهما

شكل و بين المستقيم الممتد من موضعها . ثم تقيس الزاوية بين ذلك المستقيم لتجد أنها تساوي 45° . تقف العالمة على النهر بالمقار؟



لوجيا ونقطة مرور النهر



وكل لإيجاد γ .

$$\cos 15^\circ$$

$$\cos (45^\circ - 30^\circ)$$

$$\cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

نقطة مرور النهر بالخط الفاصل.

$$\frac{50}{51.8} \approx 15^\circ$$

$x = 4 \cos$ حيث تمثل x البعد سافة الدقيقة عن نقطة التوازن

الأنماط وحالات التشابه والفرق
في جمل قصيرة يصغون فيها ما

- لماذا تقطع الموجة المتضامة المحور الأفقي x في نقطة لا تقطع فيها الموجتان البدائيتان المحور؟ الموجة المتضامة هي مجموع الزاويتين الأخريين. وهي تقطع المحور الأفقي x عند نقطتين. حيث تقع إحدى الموجتين البدائيتين فوق المحور الأفقي x والموجة الأخرى تبعد المسافة نفسها تحت المحور الأفقي x .

1 متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما

يوضح المثال 1 كيفية استخدام متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما لإيجاد القيم الدقيقة للتعابير المثلثية. وبيّن المثال 2 كيفية استخدام متطابقة الفرق لحل مسألة من الحياة اليومية.

التقويم التكويني

استخدم التمارين الواردة في القسم "تمرين موجّه" بعد كل مثال للوقوف على مدى استيعاب الطلاب للمفاهيم.

أمثلة إضافية

1 أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي.

a. $\sin 75^\circ$

b. $\cos (-75^\circ)$

2 المسافة راجع المثال 2. إذا كان

z يمثل المسافة بين الزاوية العلوية اليسرى للمنشأة وبين النقطة التي يقطع عندها النهر الحدّ العلوي.

$$\tan 15^\circ = \frac{z}{50}$$

$$\text{أو } \tan (45^\circ - 30^\circ) = \frac{z}{50}$$

استخدم متطابقة $\tan (A - B)$ لإيجاد قيمة دقيقة لـ z .

والتي يمكن

تبسيطها إلى.

إثبات صحة المتطابقات التثلثية يمكنك أيضًا استخدام متطابقات المجموع والفرق لإثبات صحة المتطابقات.

3. إثبات صحة المتطابقات التثلثية.

ت صحة كل متطابقة فيما يلي:.

a. $\cos (90^\circ - \theta) = \sin \theta$

$$\cos (90^\circ - \theta) \stackrel{?}{=} \sin \theta$$

المعادلة الأصلية

$$\cos 90^\circ \cos \theta + \sin 90^\circ \sin \theta \stackrel{?}{=} \sin \theta$$

متطابقة المجموع

$$0 \cdot \cos \theta + 1 \cdot \sin \theta \stackrel{?}{=} \sin \theta$$

بإيجاد قيمة كل تعبير.

$$\sin \theta = \sin \theta \quad \checkmark$$

بمساواة.

b. $\sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \theta$

$$\sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \stackrel{?}{=} \cos \theta$$

المعادلة الأصلية

$$\sin \theta \cos \frac{\pi}{2} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{2} \stackrel{?}{=} \cos \theta$$

متطابقة المجموع

$$\sin \theta \cdot 0 + \cos \theta \cdot 1 \stackrel{?}{=} \cos \theta$$

بإيجاد قيمة كل تعبير.

$$\cos \theta = \cos \theta \quad \checkmark$$

بمساواة.

بين موجّه

3A. $\sin (90^\circ - \theta) = \cos \theta$

3B. $\cos (90^\circ + \theta) = -\sin \theta$

لكل تعبير مما يلي.

1. $\cos 165^\circ$

2. $\cos 105^\circ$

3. $\cos 75^\circ$

4. $\sin (-30^\circ)$

5. $\sin 135^\circ$

6. $\sin (-210^\circ)$

عد إلى بداية الدرس. يحدث التداخل البناء عندما تتراكب موجتان لتعطيا موجة سمعتها من الموجتين المركبتين لها. ويحدث التداخل الهدام عندما تتراكب الموجتان لتعطيا صفر. ويمكن تمثيل الإشارة الأولى بالمعادلة $y = 20 \sin (3\theta + 45^\circ)$. بينما يمكن تمثيل معادلة $y = 20 \sin (3\theta + 225^\circ)$ الدالتين.

ل الذي ينتج عندما تتراكب الإشارتان الممثلتان بالمعادلتين؟

التداخل هدام. حيث قلغي كل إشارة الأخرى تمامًا.

قّة فيما يلي: 8, 11. انظر الهامش.

8. $\sin (90^\circ + \theta) = \cos \theta$

9. $\cos \left(\frac{3\pi}{2} - \theta \right) = -\sin \theta$

10. $\tan \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) = -\cot \theta$

11. $\sin (\theta + \pi) = -\sin \theta$

زاويتين والفرق بينهما

إجابات إضافية

10. $\frac{1}{2}$
11. $\frac{1}{2}$
12. $\frac{1}{2}$
13. $\frac{1}{2}$
14. $\frac{1}{2}$
15. $\frac{1}{2}$
16. $\frac{1}{2}$
17. $\frac{1}{2}$
18. $\frac{1}{2}$
19. $\frac{1}{2}$
20. $\frac{1}{2}$
21. $\frac{1}{2}$
22. $\frac{1}{2}$
23. $\frac{1}{2}$
24. $\frac{1}{2}$
25. $\frac{1}{2}$
26. $\frac{1}{2}$
27. $\frac{1}{2}$
28. $\frac{1}{2}$
29. $\frac{1}{2}$
30. $\frac{1}{2}$
31. $\frac{1}{2}$
32. $\frac{1}{2}$
33. $\frac{1}{2}$
34. $\frac{1}{2}$
35. $\frac{1}{2}$
36. $\frac{1}{2}$
37. $\frac{1}{2}$
38. $\frac{1}{2}$
39. $\frac{1}{2}$
40. $\frac{1}{2}$
41. $\frac{1}{2}$
42. $\frac{1}{2}$
43. $\frac{1}{2}$
44. $\frac{1}{2}$
45. $\frac{1}{2}$
46. $\frac{1}{2}$
47. $\frac{1}{2}$
48. $\frac{1}{2}$
49. $\frac{1}{2}$
50. $\frac{1}{2}$
51. $\frac{1}{2}$
52. $\frac{1}{2}$
53. $\frac{1}{2}$
54. $\frac{1}{2}$
55. $\frac{1}{2}$
56. $\frac{1}{2}$
57. $\frac{1}{2}$
58. $\frac{1}{2}$
59. $\frac{1}{2}$
60. $\frac{1}{2}$
61. $\frac{1}{2}$
62. $\frac{1}{2}$
63. $\frac{1}{2}$
64. $\frac{1}{2}$
65. $\frac{1}{2}$
66. $\frac{1}{2}$
67. $\frac{1}{2}$
68. $\frac{1}{2}$
69. $\frac{1}{2}$
70. $\frac{1}{2}$
71. $\frac{1}{2}$
72. $\frac{1}{2}$
73. $\frac{1}{2}$
74. $\frac{1}{2}$
75. $\frac{1}{2}$
76. $\frac{1}{2}$
77. $\frac{1}{2}$
78. $\frac{1}{2}$
79. $\frac{1}{2}$
80. $\frac{1}{2}$
81. $\frac{1}{2}$
82. $\frac{1}{2}$
83. $\frac{1}{2}$
84. $\frac{1}{2}$
85. $\frac{1}{2}$
86. $\frac{1}{2}$
87. $\frac{1}{2}$
88. $\frac{1}{2}$
89. $\frac{1}{2}$
90. $\frac{1}{2}$
91. $\frac{1}{2}$
92. $\frac{1}{2}$
93. $\frac{1}{2}$
94. $\frac{1}{2}$
95. $\frac{1}{2}$
96. $\frac{1}{2}$
97. $\frac{1}{2}$
98. $\frac{1}{2}$
99. $\frac{1}{2}$
100. $\frac{1}{2}$

12. $\sin 165^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ 13. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

15. $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ 16. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$c = 2$ لإيجاد شدة التيار

$\sqrt{3}$ أمبير

19. $\cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) = -\sin \theta$

21. $\cos (180^\circ + \theta) = -\cos \theta$

وإذا بالمعادلة
على النحو التالي:
يتأيد وليس بالمعادلة

قيمة الناتج على 2.
 $y = 30.9 \sin$
هر

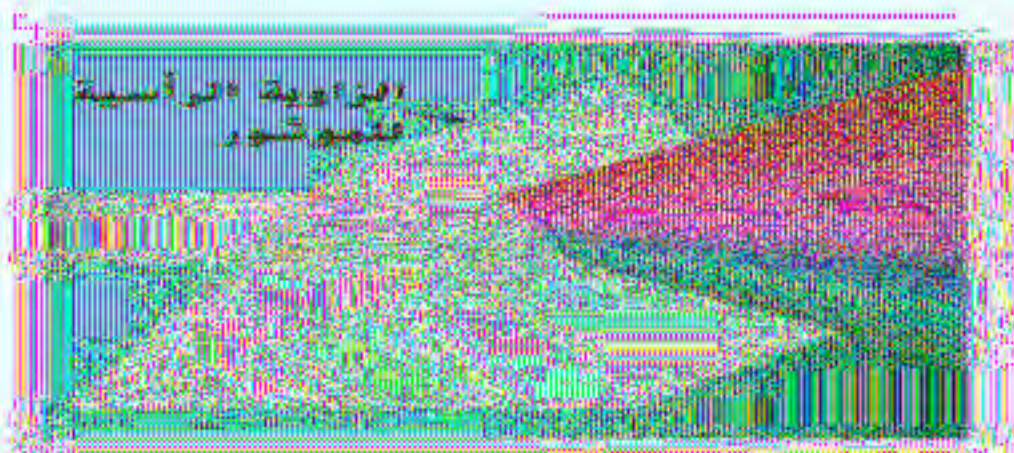
24. $\tan 165^\circ = -2 + \sqrt{3}$ 25. $-2 + \sqrt{3}$

27. $\tan \frac{23\pi}{12} = -2 + \sqrt{3}$ 28. $-2 + \sqrt{3}$



خيار اليومين

12-22 زوجي, 38, 39, 41, 42, 47-57	13
23-39, 41, 42, 47-57	



لا يمر الضوء بصورة متماثلة عبر منشور، فإن معامل انكسار الزجاج n ساوي $n = \frac{\sin \left[\frac{1}{2}(a + b) \right]}{\sin \frac{b}{2}}$ ، حيث تمثل a قياس زاوية الانحراف، وزاوية الرأسية للمنشور. شور الموضح أن: $n = \sqrt{3} \sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2}$. **انظر الهامش.** في المنشور الموضح. $\sqrt{3}$

متعددة عليك أن تتقي في هذه المسألة الفرضية القاطنة إن $B + A = \sin B + \sin A$. **حق إجابات الوحدة 12.**

A	B	$\sin A$	$\sin B$	$\sin (A + B)$	$\sin A + \sin B$
30°	90°				
45°	60°				
60°	45°				
90°	30°				

الجدول التالي وأكملة.
أن B أقل دائرة
ن A . استخدم
ل البياني لتمثيل
 $y = \sin x$
 $y = \sin x + \sin$
نفسها.
ما إذا كانت
 $\cos (A + B) = \cos$
رح استنتاجك.

قة فيما يلي: 34-37. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**

$$34. \sin (A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{\sec A \sec B}$$

$$35. \cos (A + B) = \frac{1 - \tan A \tan B}{\sec A \sec B}$$

$$36. \sec (A - B) = \frac{\sec A \sec B}{1 + \tan A \tan B}$$

$$37. \sin (A + B) \sin (A - B) = \sin^2 A - \cos^2 B$$

جبة: $\sin 35^\circ + \sin 60^\circ + \sin 85^\circ = 0.7002 + 1.7321 + 11.4301 = 13.8624$
(0.7002)(1.7321)(11.4301); 13.86

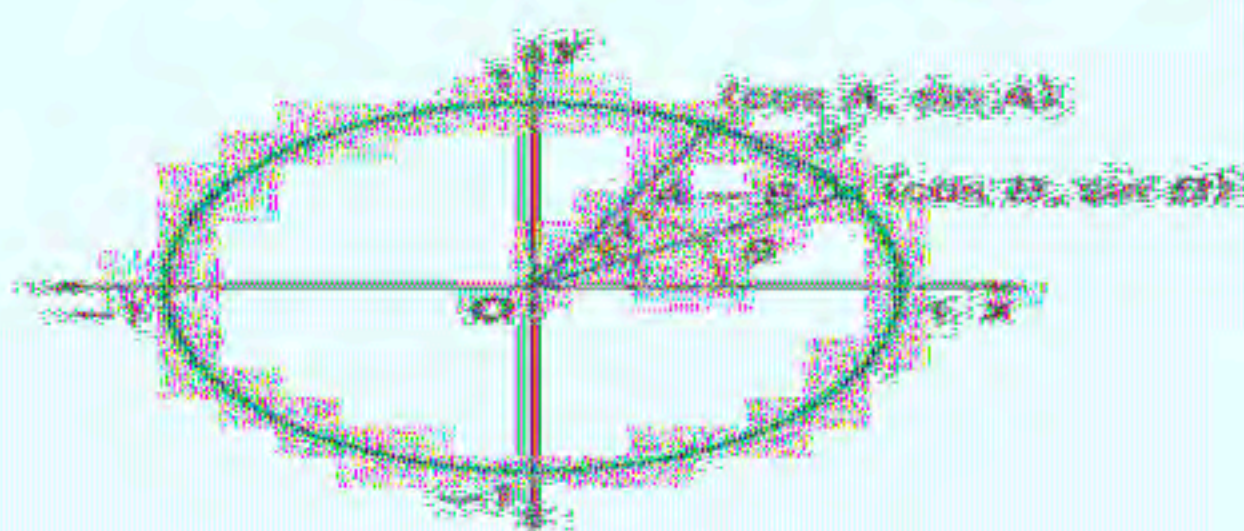
مسائل مهارات التفكير العليا

التعبير التالي دون تفكيك أي من المجاميع أو الفروق. $\sin (-2\theta)$

$$\sin \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + \theta \right) - \cos \left(\frac{\pi}{3} - \theta \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} + \theta \right)$$

نسيات استخدم المعلومات الواردة في بداية الدرس وفي التدريب 7 لشرح كيفية استخدام
وع والفرق لوصف تداخل أمواج الإنترنت اللاسلكية. أضف شرحاً للفرق بين التداخل البناء

لمتابعة $\cot (A + B)$ بدلالة $\cot A$ و $\cot B$. **انظر ملحق إجابات الوحدة 12.**



ض الشكل زاويتين
ميوم القياسيين
جدية. استخدم قانون المسافة لإيجاد d.
 $(x_1, y_1) = (\cos$
 $(x_2, y_2) = (\cos$
انظر ملحق إجابات الوحدة 12.
دة الإجابة تأمل النظرية
و B و C زوايا مثلث ماثل، فإن
 $\tan A + \tan B + \tan C = \tan$
و B و C . وتحقق من أن
من أجل قيمك المحددة.

زاويتين والفرق بينهما

معلومات منظمّة
فرضية حول

4 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب الطلاب
اطلب من الطلاب إعداد قائمة تتضمن الزوايا الواقعة بين 0° و 360° ، والتي يمكن استخدامها صيغ المجموع والفرق بسهولة. ثم اجعلهم يذكروا الجواب المشتركة بين الزوايا.

إجابات إضافية

$$H \quad x^2 - 5x - 6$$

$$F \quad \{x | -7 < x < 2\}$$

$$G \quad \{x | x < -7 \text{ أو } x > 2\}$$

$$H \quad \{x | -2 < x < 7\}$$

$$J \quad \{x | x < -2 \text{ أو } x > 7\}$$

$$K \quad \{x | x > -2 \text{ و } x < 7\}$$

عشوائيًا 15 قلماً أصفر
احتمال أن يكون القلم الأول الذي
يأخضره؟ **B**

$$A \quad \frac{1}{24}$$

$$B \quad \frac{1}{15}$$

$$C \quad \frac{1}{24}$$

$$D \quad \frac{1}{15}$$

$$47. \quad \frac{\sin \theta}{\tan \theta} + \frac{\cos \theta}{\cot \theta} = \cos \theta + \sin \theta$$

$$49. \quad \sin \theta \csc \theta - \cos^2 \theta \sin^2 \theta$$

حق إجابات الوحدة 12.

$$55. \quad 7 + \sqrt{4x + 8} = 9 - 1$$

723

م استخدام هذه المعلومة لإيجاد

نصف الوحدة

12-1 إلى 12-3

أثبت صحة كل متطابقة. (الدرس 12-2)

$$11. \cot^2 \theta + 1 = \frac{\cot \theta}{\cos \theta - \sin \theta} \quad 12. \frac{\cos \theta - \csc \theta}{\cot \theta}$$

$$13. \frac{\sin \theta \tan \theta}{1 - \cos \theta} = (1 + \cos \theta) \sec \theta \quad 11-14. \text{ انظر ملحق إجابات الوحدة 12.}$$

$$14. \tan \theta (1 - \sin \theta) = \frac{\cos \theta \csc \theta}{1 + \sin \theta}$$

15. الحاسوب يقيس الوجه الأمامي لشاشة الحاسوب عادة بطول قطر الشاشة كما هو موضح أدناه. (الدرس 12-2)



a. أوجد قيمة h . 18

b. استعن بالرسم التخطيطي الموضح لإثبات أن $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

أثبت صحة كل متطابقة. (الدرس 12-2)

$$16. \tan^2 \theta + 1 = \frac{\tan \theta}{\cos \theta - \sin \theta}$$

$$17. \frac{\sin \theta \tan \theta}{1 - \cos \theta} = \sec \theta + \tan \theta$$

$$18. \sin^2 \theta \cdot \tan^2 \theta = \tan^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$19. \cot \theta (1 - \cos \theta) = \frac{\cos \theta \sin \theta}{1 + \sin \theta}$$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي. (الدرس 12-3)

$$20. \cos 105^\circ \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$21. \sin (-135^\circ) \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$22. \tan 15^\circ \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

$$23. \cot 75^\circ \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

24. الاختيار من متعدد ما القيمة الدقيقة لـ $\cos \frac{5\pi}{12}$ (الدرس 12-3)

$$F \sqrt{2} \quad H \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

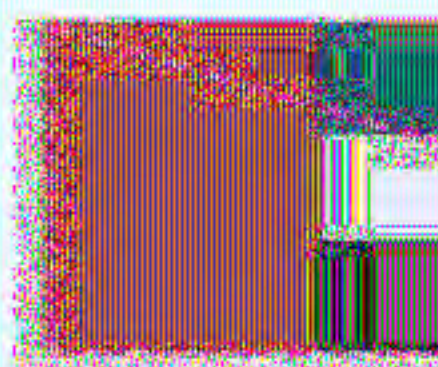
$$G \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \quad J \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

25. أثبت أن $\cos 30^\circ \cos \theta + \sin 30^\circ \sin \theta = \sin 60^\circ$ $\cos \theta + \cos 60^\circ \sin \theta$ عبارة عن متطابقة. (الدرس 12-3) انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

$$1. \cot \theta \sec \theta \csc \theta$$

$$3. \frac{1}{\cos \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \cos \theta$$

علم الإشارات الصحيحة $\tan \theta$. أوجد قيمة $\sin \theta$.



(12-1)

$$\cos \theta = \frac{3}{5}$$

$$\cot \theta = \frac{1}{2}; 27$$

$$\sec \theta = \frac{4}{3}$$

في $\tan \theta$ ؟

$$A \cos \theta$$

$$B \csc \theta$$

$$C \tan \theta$$

$$D \sec \theta$$

على الحصان الخارجي في ال 16 مترًا. وتغطي زاوية ميلها θ نصف قطر المسار الدائري g تساوي 9.8 أمتار

يساوي $\frac{1}{5}$. فما زاوية الميل 11.5°

بول؟ حوالي 4 m/s 3.6 أمتار في الثانية، فما قيمة 9.4

1 التركيز

التخطيط الأساسي

قبل الدرس 12-4 إيجاد قيمتي $\sin$ و $\cos$ باستخدام متطابقات المجموع والفرق.

الدرس 12-4 إيجاد قيمتي $\sin$ و $\cos$ عن طريق استخدام متطابقات الزاوية المزدوجة. وإيجاد قيمتي $\sin$ و $\cos$ باستخدام متطابقات نصف الزاوية.

بعد الدرس 12-4 إيجاد حل المعادلات المثلثية.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

كلّف الطلاب بقراءة القسم لهاذا؟ الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

- ما الفرق بين $\sin 2\theta$ و $\sin^2 \theta$ ؟
اشرح. $\sin 2\theta$ يمثل $\sin$ الزاوية التي تساوي ضعف θ ، $\sin^2 \theta$ تمثل مربع قيمة $\sin \theta$.
- هل سيتضمن تعبير $\frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$ في صورة دالة لـ θ المتغير؟ لا، فعند التبسيط، يكون $\frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) = 1$.
- هل سيتضمن g ؟ اشرح. لا، g يساوي $\frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$ إذا فإنه لن يحتوي المتغير g .

زاوية ونصفها

للمتطابقات لإيجاد قيمة دالة لضعف

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

0° و 90° .

قيمة $\cos \theta$.

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\cos^2 \theta = \frac{5}{9}$$

$$\cos \theta = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$\cos$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 2 \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

$$= \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

$$90^\circ < \theta < 180^\circ$$

2. متطابقات نصف الزاوية

جد القيمة الدقيقة لكل تعبير إذا كان $\sin \theta = \frac{2}{3}$ و θ تقع بين 0° و 90° .

a. $\cos 2\theta$

بما أننا نعلم قيمتي $\sin \theta$ و $\cos \theta$ فإننا نستطيع استخدام أي متطابقات للزوايا المزدوجة لإيجاد cosine. وسوف نستخدم المتطابقة $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$.

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= 1 - 2 \sin^2 \theta && \text{متطابقة نصف الزاوية} \\ &= 1 - 2 \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{1}{9} && \sin \theta = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

b. $\tan 2\theta$

أوجد $\tan \theta$ باستخدام متطابقة الزاوية المضاعفة الخاصة بـ $\tan 2\theta$.

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} && \text{تعريف } \tan \\ &= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} && \sin \theta = \frac{2}{3} \text{ و } \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3} \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} && \text{إزالة المقام.} \end{aligned}$$

أوجد $\tan 2\theta$.

$$\begin{aligned} \tan 2\theta &= \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} && \text{متطابقة نصف الزاوية} \\ &= \frac{2 \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \right)}{1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \right)^2} && \tan \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ &= \frac{2 \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \right)}{\frac{25}{25} - \frac{20}{25}} && \text{توسيع المقام.} \\ &= \frac{\frac{4\sqrt{5}}{5}}{\frac{1}{5}} && \text{بسيط.} \\ &= \frac{4\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{5}{1} = 4\sqrt{5} && \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \end{aligned}$$

بين هويته.

جد القيمة الدقيقة لكل تعبير مما يلي إذا كان $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ و $90^\circ < \theta < 180^\circ$.

2A. $\cos 2\theta$

2B. $\tan 2\theta$

متطابقات نصف الزاوية من المفيد أحياناً الاعتماد على متطابقات لإيجاد قيمة نسبة نصف زاوية.

تدوين الأساس: متطابقات نصف الزاوية

للمعادلات التالية صحيحة لكل قيم θ .

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \quad \cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \quad \tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \quad \text{استخدم } \cos \theta$$

الزاوية ونصفاها

ع في الربع الثالث.

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{9}{25}$$

$$\cos \theta = \pm \frac{3}{5}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{5}}{2}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$$

135°. فإذا، $\cos \frac{\theta}{2}$ هو $-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$$\cos 67.5^\circ = \cos \frac{135^\circ}{2}$$

$$= \sqrt{\frac{1 + \cos 135^\circ}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

الربع الثاني. $\frac{\sqrt{18 + 6\sqrt{5}}}{6}$.

2 متطابقات نصف الزاوية

يبين **المثال 3** كيفية استخدام متطابقات نصف الزاوية لإيجاد القيمة الدقيقة لدالة مثلثية لزاوية في الربع المعطى. ويوضح **المثال 4** كيفية تبسيط معادلة تضم تعابير مثلثية. ويبين **المثال 5** كيفية إثبات المتطابقات المثلثية باستخدام متطابقات أضعاف الزوايا.

مثال إضافي

3 a. أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos \frac{\theta}{2}$ إذا كان $\sin \theta = \frac{3}{5}$ وكانت الزاوية θ تقع في الربع الثاني.

b. أوجد القيمة الدقيقة لـ

$$\sin 165^\circ.$$

انتبه!

تجنب الأخطاء أكد على "نصيحة للتدريس" في الهامش المجاور للمثال 3. ومن شأن تحديد الإشارة الصحيحة للإجابة في بداية الحساب أن يساعد بعض الطلاب في تلافي تسيان هذه الخطوة في نهاية حساباتهم.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

تسجيل الفيديو اقسم الصف الدراسي إلى مجموعات، وكلّف كل مجموعة بحل مسألة نصف زاوية أو زاوية مزدوجة. واطلب من المجموعة إعداد تسجيل فيديو يعرض كيفية تطبيق الصيغة المناسبة لحل المسألة. وحاول تكليف الصف بأكبر عدد ممكن من المسائل.

مثال 4 من الحصة الرابعة التبسيط باستخدام متطابقات ضعف الزاوية

قوة راجع بداية الدرس. أوجد $\frac{H}{D}$.

$$\begin{aligned} \frac{H}{D} &= \frac{\frac{v^2}{2g} \sin^2 \theta}{\frac{v^2}{g} \sin 2\theta} && \text{المعادلة الأصلية} \\ &= \frac{\frac{v^2 \sin^2 \theta}{2g}}{\frac{v^2 \sin 2\theta}{g}} && \text{ببساطة البسط والمقام.} \\ &= \frac{v^2 \sin^2 \theta}{2g} \cdot \frac{g}{v^2 \sin 2\theta} && \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{2 \sin 2\theta} && \text{ببساطة.} \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{4 \sin \theta \cos \theta} && \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} && \text{ببساطة.} \\ &= \frac{1}{4} \tan \theta && \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta \end{aligned}$$

بين موجه

عد قيمة كل مما يلي.

4A. $\sin 135^\circ$

4B. $\cos \frac{7\pi}{8}$

كما يمكنك استخدام متطابقتي المجموع والفرق لإثبات المتطابقات. ويمكن أيضًا استخدام متطابقات الزاوية ونصفيها لإثبات المتطابقات.

التمرين 5 إثبات صحة المتطابقات

ت صحة المتطابقة $\frac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta} = \frac{\cot \theta - 1}{\cot \theta + 1}$

المتطابقة الأصلية

$$\begin{aligned} \frac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta} &\stackrel{?}{=} \frac{\cot \theta - 1}{\cot \theta + 1} \\ \frac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta} &\stackrel{?}{=} \frac{\frac{\cos \theta}{\sin \theta} - 1}{\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + 1} \\ \frac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta} &\stackrel{?}{=} \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} \end{aligned}$$

اضرب البسط والمقام في $\sin \theta$

$$\frac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} \cdot \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta}$$

اضرب الطرفين الأيمن في 1.

$$\frac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta}$$

اضرب.

$$\frac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{1 + 2 \cos \theta \sin \theta}$$

ببساطة.

$$\frac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta} = \frac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta} \quad \checkmark$$

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta; 2 \cos \theta \sin \theta = \sin 2\theta$$

بين موجه

أثبت صحة المتطابقة $4 \cos^2 x - \sin^2 2x = 4 \cos^4 x$. انظر الهامش.

الزاوية ونصفيها

يبقى إن كان ممكنًا. فاطلب من معلم موسيقى في مدرستك التحدث تية التوافقية. وقد يرغب أيضًا الطلاب الذين يعزفون على آلات ض ما قد تعلموه عن الأصوات التوافقية والموجات الموسيقية. فإذا لم بما يكون بمقدور معلم الفيزياء توضيح الأصوات التوافقية أو إحضار آلة الصف.

3 التمرين

التقويم التكويني

استخدم التمارين من 1 إلى 11 للتحقق من استيعاب الطلاب.

ثم استخدم المخطط الموجود في الجزء السفلي من هذه الصفحة لتخصيص واجبات الطلاب.

تدريس الممارسات في الرياضيات

الدقة يحاول الطلاب المتفوقون في الرياضيات استخدام تعريفات واضحة في استنتاجاتهم، والحساب بدقة وكفاءة. والاستفادة بشكل واضح من التعريفات.

إجابات إضافية

$$1. \frac{\sqrt{15}}{8}, \frac{7}{8}$$

$$1. \sin \theta = \frac{1}{4}, 0^\circ < \theta < 90^\circ$$

$$\frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{4}$$

$$3. \cos \theta = -\frac{5}{13}, 90^\circ < \theta < 180^\circ$$

$$5. \tan \theta = -\frac{8}{15}, 180^\circ < \theta < 270^\circ$$

$$7. \sin \frac{\pi}{8} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$$

$$10. \tan \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta}$$

$$14. -\frac{24}{25}$$

$$12. \sin \theta = \frac{2}{3}, 90^\circ < \theta < 180^\circ$$

$$14. \cos \theta = \frac{3}{5}, \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$$

$$16. \tan \theta = \frac{4}{3}, 180^\circ < \theta < 270^\circ$$

$$16. \frac{24}{25}, -\frac{7}{25}$$

$$18. \sin 75^\circ$$

$$19.$$

$$21. \tan 165^\circ$$

$$22.$$

خيار اليومين

37, زوجي 12-28
39-42, 47-60
30-37, 39-42, 47-60

13-

مل دائرة تيار متردد تتألف من منبع للقدرة ومقاومة. فإذا كانت شدة التيار I_0 في الدائرة عند الزمن t . إذا فإن القدرة التي تصل إلى المقاومة تساوي $P = I_0^2 R \sin^2 t\theta$. حيث R هي قيمة المقاومة. عثر $\cos 2t\theta$. $P = \frac{1}{2} I_0^2 R - \frac{1}{2} I_0^2 R \cos 2t\theta$.

قمة فيما يلي: 26-29. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

$$26. \tan 2\theta = \frac{2}{\cot \theta - \tan \theta}$$

$$27. 1 + \frac{1}{2} \sin 2\theta = \frac{\sec \theta + \sin \theta}{\sec \theta}$$

$$28. \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{2}$$

$$29. \tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$$

من أن حارس مرمى يركل كرة بثبات بسرعة متجهة أولية قدرها 30 متراً في الثانية. الأفقية التي تقطعها الكرة في الهواء ستبقى هي نفسها عندما تكون $\theta = 45^\circ + A$. $\theta = 45^\circ$. استخدم الصيغة المعطاة في التدريب 9. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

لـ $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و $\tan 2\theta$.

$$31. \cos \theta = \frac{4}{5}, 0^\circ < \theta < 90^\circ \quad \frac{24}{25}, \frac{7}{25}, \frac{24}{7} \quad 32. \sin \theta = \frac{1}{3}, 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad \frac{4\sqrt{2}}{9}, \frac{7}{9}, \frac{4}{9}$$

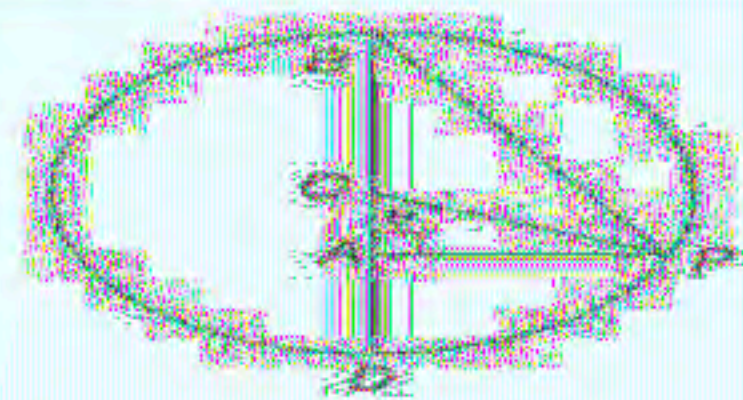
$$33. \tan \theta = -3, 90^\circ < \theta < 180^\circ \quad -\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{3}{4} \quad 34. \sec \theta = -\frac{4}{3}, 90^\circ < \theta < 180^\circ \quad -\frac{3}{4}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}$$

$$35. \csc \theta = -\frac{5}{2}, \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi \quad -\frac{4\sqrt{21}}{25}, \frac{17}{25}, -\frac{4\sqrt{21}}{17} \quad 36. \cot \theta = \frac{3}{2}, 180^\circ < \theta < 270^\circ \quad \frac{12}{13}, -\frac{5}{13}, -\frac{12}{5}$$

مسائل مهارات التفكير العليا

تحسب بثينة وبدرية القيمة الدقيقة لـ $\sin 15^\circ$. فهل أي منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك. **إجابات الوحدة 12**

بدرية	بثينة
$\sin 15^\circ = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{4}$ $\cos 15^\circ = \frac{1}{2} \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$ $\tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sin 15^\circ = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{4}$ $\cos 15^\circ = \frac{1}{2} \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$ $\tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$



هي دائرة وحدة. استعن بالشكل لإثبات $\tan \frac{1}{2}\theta$.

صيات اكتب موضوعاً قصيراً عن الشروط التي استخدام كل من المتطابقات الثلاث. انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

صيفة $\sin(A + B)$ لاشتقاق صيفة 2θ . $\cos(A + B)$ لاشتقاق صيفة 2θ . **إجابات الوحدة 12**

متطابقات نصف الزاوية من متطابقات ضعفها.

انظر ملحق إجابات الوحدة 12.

فة الإجابة افترض أن لاعب جولف يضرب الكرة بثبات بحيث تقادر القاعدة

لية قدرها 35 متراً في الثانية وأن $d = \frac{2v^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$. اشرح السبب في

صوى عندما تكون $\theta = 45^\circ$. الإجابة النموذجية: بما أن $d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$.

بتها القصوى عندما يكون $\sin 2\theta = 1$ أي $2\theta = 90^\circ$ أو $\theta = 45^\circ$.

الزاوية وتصفها

انتبه!

تحليل الخطأ في التمرين 37.
ينبغي أن يرى الطلاب أن بثينة

استبدلت على نحو خاطئ

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ بـ } \frac{\sqrt{6}}{4} \text{ في حين}$$

عوّضت بدرية على نحو خاطئ

$$\cos 30^\circ \text{ بـ } \frac{1}{2} \text{ بدلاً من التعويض}$$

بـ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ اشرح للطلاب أن كلا

$$\sin 15^\circ = \sin (45^\circ - 30^\circ) \text{ و } \sin 15^\circ = \sin$$

تصلحان بمثابة خطوتين أوليين.

ولكن خطوة بثينة الرابعة ينبغي

أن تكون $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ وينبغي أن

تكون خطوات بدرية بعد المستقيم

$$\sin \frac{30^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

$$\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

4 التقويم

عين مصطلح الرياضيات اطلب من
الطلاب أن يذكروا كيفية تحديد ما إذا
كانت مسألة تضم متطابقة ضعف زاوية
أو نصف زاوية فضلاً عن كيفية استخدام
كل نوع من المتطابقات.

إجابات إضافية

$$53. \sin A = \frac{1}{2}, \sec B = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos B = 2$$

$$\Rightarrow \cos B = 2 \Rightarrow B = \cos^{-1}(2)$$

$$\Rightarrow B = \cos^{-1}(2) \Rightarrow B = \cos^{-1}(2)$$

$$\Rightarrow B = \cos^{-1}(2) \Rightarrow B = \cos^{-1}(2)$$

$$\Rightarrow B = \cos^{-1}(2) \Rightarrow B = \cos^{-1}(2)$$

$$\Rightarrow B = \cos^{-1}(2) \Rightarrow B = \cos^{-1}(2)$$

$$\Rightarrow B = \cos^{-1}(2) \Rightarrow B = \cos^{-1}(2)$$

$$\Rightarrow B = \cos^{-1}(2) \Rightarrow B = \cos^{-1}(2)$$

$$\Rightarrow B = \cos^{-1}(2) \Rightarrow B = \cos^{-1}(2)$$

$$\Rightarrow B = \cos^{-1}(2) \Rightarrow B = \cos^{-1}(2)$$

$$\Rightarrow B = \cos^{-1}(2) \Rightarrow B = \cos^{-1}(2)$$

$$\Rightarrow B = \cos^{-1}(2) \Rightarrow B = \cos^{-1}(2)$$

$$\Rightarrow B = \cos^{-1}(2) \Rightarrow B = \cos^{-1}(2)$$

$$\Rightarrow B = \cos^{-1}(2) \Rightarrow B = \cos^{-1}(2)$$

$$\Rightarrow B = \cos^{-1}(2) \Rightarrow B = \cos^{-1}(2)$$

$$\Rightarrow B = \cos^{-1}(2) \Rightarrow B = \cos^{-1}(2)$$

$$\Rightarrow B = \cos^{-1}(2) \Rightarrow B = \cos^{-1}(2)$$

$$\Rightarrow B = \cos^{-1}(2) \Rightarrow B = \cos^{-1}(2)$$

$$\Rightarrow B = \cos^{-1}(2) \Rightarrow B = \cos^{-1}(2)$$

$$\Rightarrow B = \cos^{-1}(2) \Rightarrow B = \cos^{-1}(2)$$

$$\Rightarrow B = \cos^{-1}(2) \Rightarrow B = \cos^{-1}(2)$$

ة ومداهما.

G. f.

$$\{8 - \leq y \mid y\} = R, \{1 \geq$$

$$\{8 - \leq y \mid y\} = R, \{1 \geq$$

حقيقية.

حقيقية.

حقيقية.

ميزا حجراً حول بركة

في من الأحجار لعل

إذا استهلك جميع

فما نصف قطر

$$A \frac{12}{\pi} m$$

$$B \frac{72}{\pi} m$$

$$C 72\pi m$$

$$D 144\pi m$$

$$47. \sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$50. \cos (-30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$53. \cot \theta + \sec \theta = \frac{\cos^2 \theta + \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta}$$

رب قياسات الأضلاع إلى

55.



$$C \approx 44^\circ \text{ أو } B \approx 102^\circ \text{ sine}$$

$$\text{أو } b \approx 21.0 \text{ أو } B \approx 10^\circ$$

$$b \approx 3.7, C \approx 136^\circ$$

$$58. x^2 + 5x - 24 = 0 \Rightarrow x = 3, -8$$

731

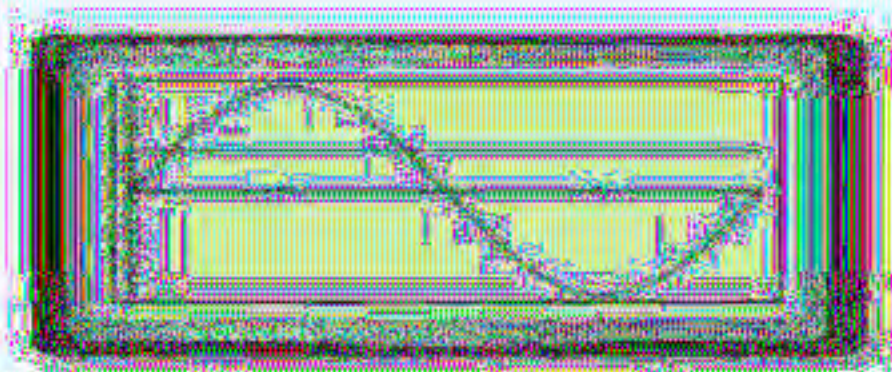
.CO

مختبر تقنية التمثيل البياني حل المعادلات المثلثية

ممارسات في الرياضيات
استخدام الأدوات الملائمة بطريقة إستراتيجية.

تقاطع تمثيل جميع القيم التي تحقق الدالة. وحل معادلات
تغير التي تحقق المعادلة. ويمكنك استخدام حاسبة التمثيل
تمثيل البياني لكل طرف من المعادلة في صورة دالة ومن ثم تحديد

$\sin x = 0.4$ إذا كانت $0^\circ \leq x < 360^\circ$.



! 360.000 set 90.00 1-1.15 set 0.4

ين ومثلها بيانياً. وأعد كتابة المعادلة في صورة
 $Y_2 = 0.4$. ثم مثل المعادلتين بيانياً. نظراً إلى
خط حاسبتك على شط الدرجات.

حاسبة: **ENTER** **2nd** **sin** **0.4** **ENTER**

0.4 **2nd** **sin** **Y=**

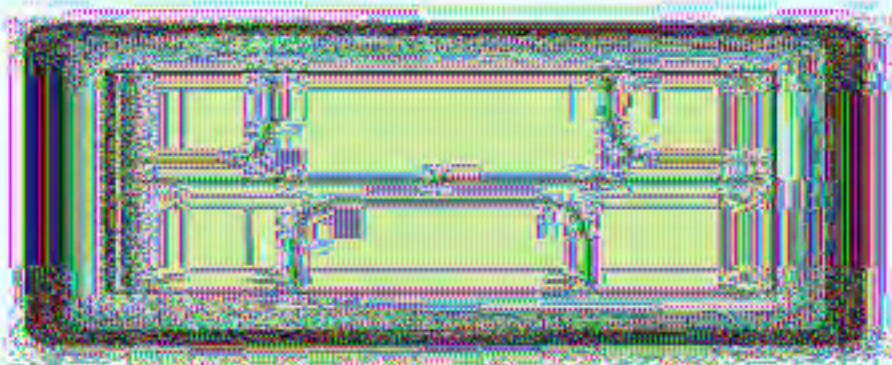
GRAPH **ENTER** **0.4** **ENTER**

لتمثيل البياني. يمكنك أن ترى أن هناك نقطتي تقاطع
 $0^\circ \leq x < 360^\circ$. استخدم خاصية **CALC** لتحديد قيم x التي يتقاطع

$x \approx 156.4^\circ$ و

ممارسة

$\tan^2 x \cos x + 3 \cos x = 0$ إذا كانت $0^\circ \leq x < 360^\circ$.



! 360.000 set 90.00 1-1.5 set 0

ين ومثلها بيانياً. المعادلتان المرفقتان اللتان يتعين
 $y_2 = 0$ و $y_1 = \tan^2 x \cos x + 3 \cos x$.

حاسبة: **COS** **2nd** **tan** **2** **ENTER** **COS** **Y=**

3 **2nd** **tan** **2** **ENTER**

ENTER **0** **ENTER** **Y=**

$\tan^2 x \cos x + 3 \cos x$ أي حلول حقيقية.

ي من المعادلات التالية عند قيم x المحددة.

1. $\sin x = 0.7$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0.7** **2nd** **sin** **ENTER**

2. $\cos x = 0.5$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0.5** **2nd** **cos** **ENTER**

3. $\tan x = 1$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **1** **2nd** **tan** **ENTER**

4. $\sin 2x = \sin x$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **sin** **ENTER**

5. $\cos x = 0$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **cos** **ENTER**

6. $\tan x = 0$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **tan** **ENTER**

7. $\sin x = 0.5$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0.5** **2nd** **sin** **ENTER**

8. $\cos x = 0.5$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0.5** **2nd** **cos** **ENTER**

9. $\tan x = 1$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **1** **2nd** **tan** **ENTER**

10. $\sin 2x = \sin x$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **sin** **ENTER**

11. $\cos x = 0$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **cos** **ENTER**

12. $\tan x = 0$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **tan** **ENTER**

13. $\sin x = 0.5$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0.5** **2nd** **sin** **ENTER**

14. $\cos x = 0.5$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0.5** **2nd** **cos** **ENTER**

15. $\tan x = 1$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **1** **2nd** **tan** **ENTER**

16. $\sin 2x = \sin x$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **sin** **ENTER**

17. $\cos x = 0$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **cos** **ENTER**

18. $\tan x = 0$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **tan** **ENTER**

19. $\sin x = 0.5$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0.5** **2nd** **sin** **ENTER**

20. $\cos x = 0.5$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0.5** **2nd** **cos** **ENTER**

21. $\tan x = 1$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **1** **2nd** **tan** **ENTER**

22. $\sin 2x = \sin x$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **sin** **ENTER**

23. $\cos x = 0$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **cos** **ENTER**

24. $\tan x = 0$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **tan** **ENTER**

25. $\sin x = 0.5$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0.5** **2nd** **sin** **ENTER**

26. $\cos x = 0.5$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0.5** **2nd** **cos** **ENTER**

27. $\tan x = 1$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **1** **2nd** **tan** **ENTER**

28. $\sin 2x = \sin x$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **sin** **ENTER**

29. $\cos x = 0$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **cos** **ENTER**

30. $\tan x = 0$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **tan** **ENTER**

31. $\sin x = 0.5$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0.5** **2nd** **sin** **ENTER**

32. $\cos x = 0.5$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0.5** **2nd** **cos** **ENTER**

33. $\tan x = 1$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **1** **2nd** **tan** **ENTER**

34. $\sin 2x = \sin x$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **sin** **ENTER**

35. $\cos x = 0$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **cos** **ENTER**

36. $\tan x = 0$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **tan** **ENTER**

37. $\sin x = 0.5$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0.5** **2nd** **sin** **ENTER**

38. $\cos x = 0.5$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0.5** **2nd** **cos** **ENTER**

39. $\tan x = 1$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **1** **2nd** **tan** **ENTER**

40. $\sin 2x = \sin x$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **sin** **ENTER**

41. $\cos x = 0$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **cos** **ENTER**

42. $\tan x = 0$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **tan** **ENTER**

43. $\sin x = 0.5$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0.5** **2nd** **sin** **ENTER**

44. $\cos x = 0.5$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0.5** **2nd** **cos** **ENTER**

45. $\tan x = 1$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **1** **2nd** **tan** **ENTER**

46. $\sin 2x = \sin x$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **sin** **ENTER**

47. $\cos x = 0$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **cos** **ENTER**

48. $\tan x = 0$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **tan** **ENTER**

49. $\sin x = 0.5$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0.5** **2nd** **sin** **ENTER**

50. $\cos x = 0.5$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0.5** **2nd** **cos** **ENTER**

51. $\tan x = 1$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **1** **2nd** **tan** **ENTER**

52. $\sin 2x = \sin x$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **sin** **ENTER**

53. $\cos x = 0$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **cos** **ENTER**

54. $\tan x = 0$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **tan** **ENTER**

55. $\sin x = 0.5$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0.5** **2nd** **sin** **ENTER**

56. $\cos x = 0.5$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0.5** **2nd** **cos** **ENTER**

57. $\tan x = 1$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **1** **2nd** **tan** **ENTER**

58. $\sin 2x = \sin x$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **sin** **ENTER**

59. $\cos x = 0$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **cos** **ENTER**

60. $\tan x = 0$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **tan** **ENTER**

61. $\sin x = 0.5$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0.5** **2nd** **sin** **ENTER**

62. $\cos x = 0.5$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0.5** **2nd** **cos** **ENTER**

63. $\tan x = 1$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **1** **2nd** **tan** **ENTER**

64. $\sin 2x = \sin x$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **sin** **ENTER**

65. $\cos x = 0$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **cos** **ENTER**

66. $\tan x = 0$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **tan** **ENTER**

67. $\sin x = 0.5$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0.5** **2nd** **sin** **ENTER**

68. $\cos x = 0.5$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0.5** **2nd** **cos** **ENTER**

69. $\tan x = 1$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **1** **2nd** **tan** **ENTER**

70. $\sin 2x = \sin x$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **sin** **ENTER**

71. $\cos x = 0$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **cos** **ENTER**

72. $\tan x = 0$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **tan** **ENTER**

73. $\sin x = 0.5$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0.5** **2nd** **sin** **ENTER**

74. $\cos x = 0.5$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0.5** **2nd** **cos** **ENTER**

75. $\tan x = 1$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **1** **2nd** **tan** **ENTER**

76. $\sin 2x = \sin x$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **sin** **ENTER**

77. $\cos x = 0$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **cos** **ENTER**

78. $\tan x = 0$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **tan** **ENTER**

79. $\sin x = 0.5$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0.5** **2nd** **sin** **ENTER**

80. $\cos x = 0.5$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0.5** **2nd** **cos** **ENTER**

81. $\tan x = 1$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **1** **2nd** **tan** **ENTER**

82. $\sin 2x = \sin x$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **sin** **ENTER**

83. $\cos x = 0$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **cos** **ENTER**

84. $\tan x = 0$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **tan** **ENTER**

85. $\sin x = 0.5$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0.5** **2nd** **sin** **ENTER**

86. $\cos x = 0.5$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0.5** **2nd** **cos** **ENTER**

87. $\tan x = 1$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **1** **2nd** **tan** **ENTER**

88. $\sin 2x = \sin x$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **sin** **ENTER**

89. $\cos x = 0$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **cos** **ENTER**

90. $\tan x = 0$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **tan** **ENTER**

91. $\sin x = 0.5$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0.5** **2nd** **sin** **ENTER**

92. $\cos x = 0.5$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0.5** **2nd** **cos** **ENTER**

93. $\tan x = 1$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **1** **2nd** **tan** **ENTER**

94. $\sin 2x = \sin x$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **sin** **ENTER**

95. $\cos x = 0$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **cos** **ENTER**

96. $\tan x = 0$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **tan** **ENTER**

97. $\sin x = 0.5$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0.5** **2nd** **sin** **ENTER**

98. $\cos x = 0.5$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0.5** **2nd** **cos** **ENTER**

99. $\tan x = 1$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **1** **2nd** **tan** **ENTER**

100. $\sin 2x = \sin x$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **sin** **ENTER**

101. $\cos x = 0$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **cos** **ENTER**

102. $\tan x = 0$; $0^\circ \leq x < 360^\circ$ **0** **2nd** **tan** **ENTER**

1 التركيز

التخطيط الأساسي

قبل الدرس 12-5 إثبات صحة المتطابقات المثلثية.

الدرس 12-5 حل المعادلات المثلثية. وإيجاد الحلول الدخيلة في المعادلات المثلثية.

بعد الدرس 12-5 استخدام حساب المثلثات لحل مسائل من الحياة اليومية.

2 التدريس

الأسئلة الداعمة

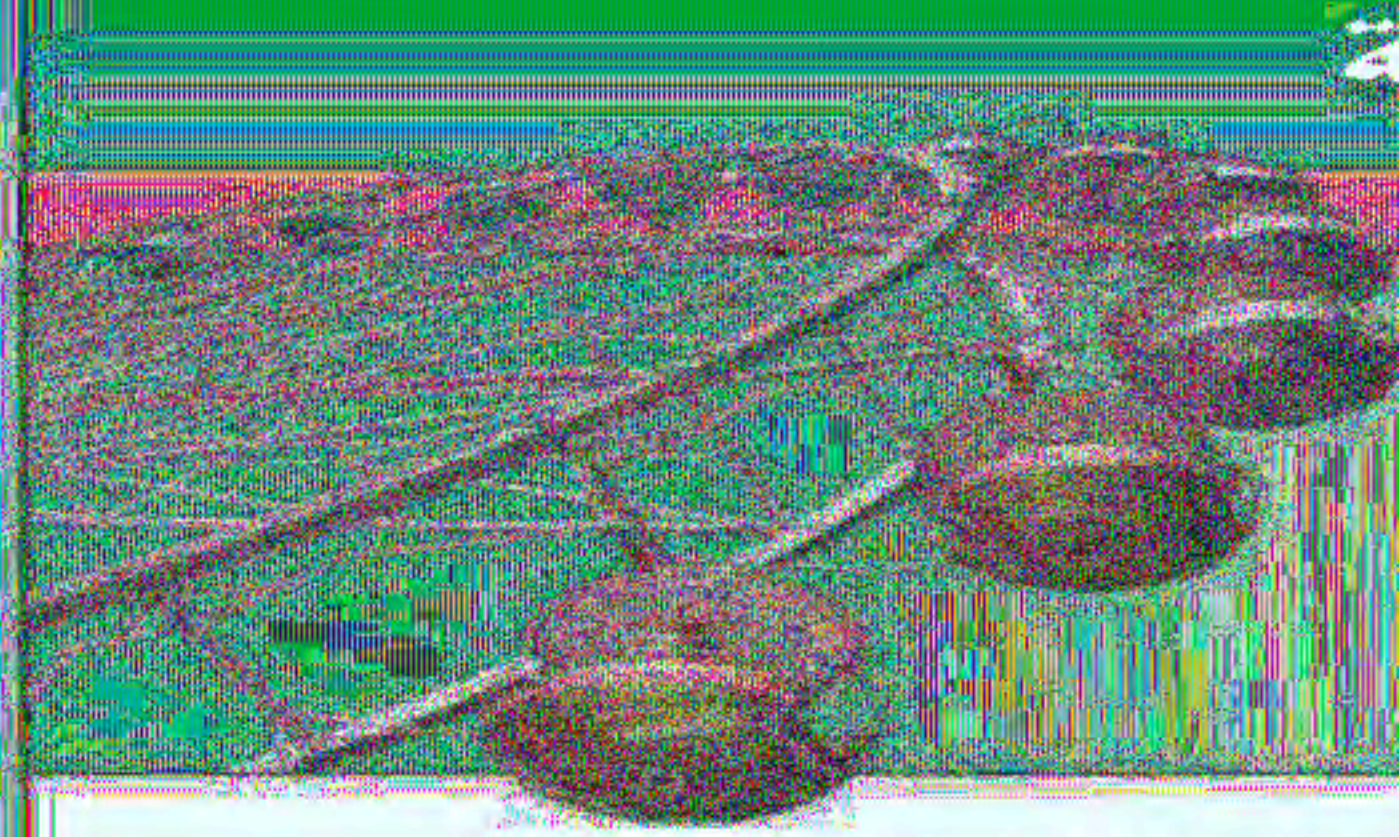
كَلِّف الطلاب بقراءة القسم **هنا؟** الوارد في هذا الدرس.

اطرح السؤال التالي:

■ خذ أي نقطة على الأرجوحة الدوارة. ما مسافة انتقال تلك النقطة خلال دورة واحدة؟ 40π أو حوالي 125.7 مترًا

■ ما المسافة التي يقطعها موقع ما على الأرجوحة الدوارة خلال دقيقة واحدة؟ 60π أو حوالي 188.5 مترًا

■ عند $t = 0$ ، ما قيمة $20 \cos 3\pi t$ ؟ 20



نوعًا خاصًا من المعادلات المثلثية قيم المتغير المعرف فيه الطرفان. نسبة لقيم محددة للمتغير. ويشبه حل

$$\sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \cos \theta = 0$$

$$\cos \theta \left(\sin \theta - \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\cos \theta = 0 \quad \text{أو} \quad \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 90^\circ$$



10.7901 cos 30.34 t

360°

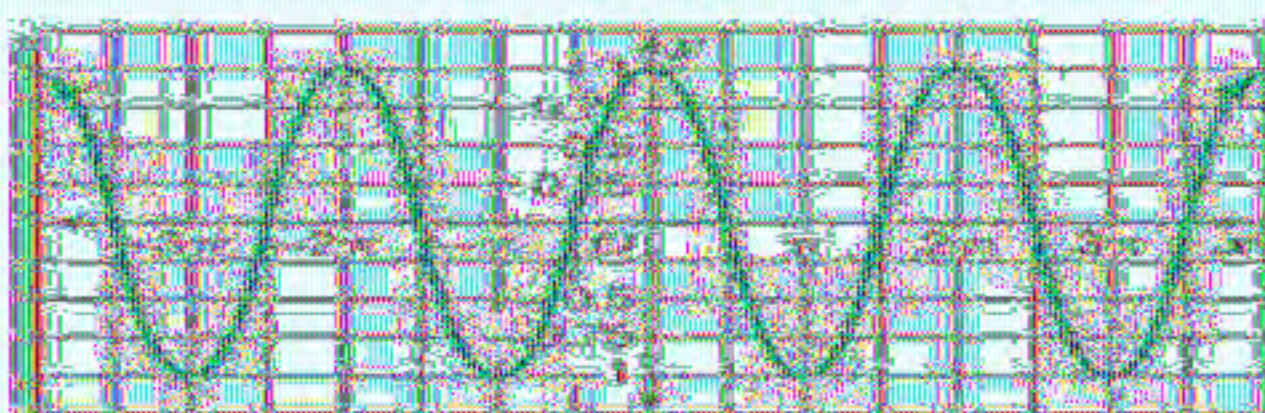
360° أو بين 0 راديان و 2π راديان. وهناك ضامحات صحيحة لفترة الدالة.

ال 2 عدد لا نهائي من الحلول

حلّ $\cos \theta + 1 = 0$ لإيجاد كل قيم θ إذا كان قياس الزاوية θ بالراديان.

$$\begin{aligned}\cos \theta + 1 &= 0 \\ \cos \theta &= -1\end{aligned}$$

مر إلى التمثيل البياني لـ $y = \cos \theta$ لإيجاد حلول $\cos \theta = -1$.



الحلول هي π و 3π و 5π وما إلى ذلك $-\pi$ و -3π و -5π وما إلى ذلك. الحل الوحيد الذي يقع في فترة 0 راديان إلى 2π راديان هو π . فترة دالة cosine هي 2π راديان. إذاً فيمكن كتابة الحلول في صورة $\pi + 2k\pi$ حيث k عدد صحيح.

رَبِّين هَوِّجْه

حلّ $\cos 2\theta + \cos \theta + 1 = 0$ لإيجاد كل قيم θ إذا كان قياس الزاوية θ بالدرجة.

حلّ $2 \sin \theta = -1$ لإيجاد كل قيم θ إذا كان قياس الزاوية θ بالراديان.

ل نستخدم المعادلات المثلثية لحل مسائل من الحياة اليومية.

مثال 3 من الحياة اليومية: حل المعادلات المثلثية

اتق الملاهي راجع بداية الدرس. كم سيستغرق الوقت بعد تشغيل الأرجوحة الدوارة حتى يبلغ معدك ارتفاع 31 متراً فوق سطح الأرض؟

$$h_t = 21 - 20 \cos 3\pi t \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$31 = 21 - 20 \cos 3\pi t \quad \text{عوّض من 31}$$

$$10 = -20 \cos 3\pi t \quad \text{اطرح 21 من كل طرف}$$

$$-\frac{1}{2} = \cos 3\pi t \quad \text{اقسم كل طرف على -20}$$

$$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 3\pi t \quad \text{أوجد معكوس جيب التمام}$$

$$\frac{2\pi}{3} = 3\pi t \quad \text{أو} \quad \frac{4\pi}{3} = 3\pi t \quad \text{معكوس جيب التمام هو 120° أو 240°}$$

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k = 3\pi t \quad \text{أو} \quad \frac{4\pi}{3} + 2\pi k = 3\pi t \quad \text{k هو أي عدد صحيح}$$

$$\frac{2}{9} + \frac{2}{3}k = t \quad \text{أو} \quad \frac{4}{9} + \frac{2}{3}k = t \quad \text{اقسم كل طرف على 3\pi}$$

ضل على القيمة الموجبة الصغرى لـ t عبر جعل $k = 0$ في التعبير الأول.

ك، $t = \frac{2}{9}$ من الدقيقة أو حوالي 13 ثانية.

رَبِّين هَوِّجْه

كم من الوقت يستغرق الأمر كي يبلغ معدك ارتفاع 41 متراً فوق الأرض بعد تشغيل الأرجوحة؟
حوالي 20 ثانية

ثالثة

لاب كيفية
يفي أن يبحث
بين كل منها

حل المثال. ليس للمعادلة $\cos \theta = 4$ حل مجموعة حلول $\cos \theta = 4$ خالية.

$$2 \sin^2 \theta - 3 \sin \theta - 2 = 0$$

$$(\sin \theta - 2)(2 \sin \theta + 1) = 0$$

$$\sin \theta - 2 = 0 \quad \text{أو} \quad 2 \sin \theta + 1 = 0$$

$$\sin \theta = 2 \quad \text{أو} \quad \sin \theta = -\frac{1}{2}$$

هذا ليس حلاً
بما أن جميع قيم
الجيب تقع بين -1
و 1، مستبعداً على
القيمتين المطروقتين.

$$2 \sin \theta - 3 \sin \theta - 2 = 0$$

$$2 \sin \left(\frac{7\pi}{6} \right) - 3 \sin \left(\frac{7\pi}{6} \right) - 2 = 0$$

$$2 \left(-\frac{1}{2} \right) - 3 \left(-\frac{1}{2} \right) - 2 = 0$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 = 0$$

$$\sin \theta = 1 + \cos \theta$$

$$\sin^2 \theta = (1 + \cos \theta)^2$$

$$1 - \cos^2 \theta = 1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$0 = 2 \cos \theta + 2 \cos^2 \theta$$

$$0 = 2 \cos \theta (1 + \cos \theta)$$

$$1 + \cos \theta = 0 \quad \text{أو} \quad \cos \theta = -1$$

$$\theta = 180^\circ$$

$$\sin \theta = 1 + \cos \theta$$

$$\sin 90^\circ \stackrel{?}{=} 1 + \cos 90^\circ$$

$$1 \stackrel{?}{=} 1 + 0$$

$$1 = 1 \quad \checkmark$$

$$\sin \theta = 1 + \cos \theta$$

$$\sin 270^\circ \stackrel{?}{=} 1 + \cos 270^\circ$$

$$-1 \stackrel{?}{=} 1 + 0$$

$$-1 \neq 1 \quad \times$$

من الحلول

$$4A. \sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta = 4$$

ل إعادة كتابة التعبير باستخدام
رقة، كالترتيب، قد يعطي حلولاً دخيلة.

735

تتم إنشاء قائمة صفحة على
رقة اقتراحات تتعلق بكيفية تجنب
أسبته على الدرجات في وقت

2 الحلول الدخيلة

يوضح المثال 4 كيفية حل معادلة مثلثية
واختيار الحلول الدخيلة. ويوضح المثال 5
كيفية استخدام المتطابقات لحل معادلة
مثلثية.

مثال إضافي

4 حل كل من المعادلات التالية.

a. $\sin \theta \cos \theta = \cos^2 \theta$ إذا كانت
 $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$

b. $\cos \theta = 1 - \sin \theta$ إذا كانت
 $0^\circ, 90^\circ, 360^\circ$ $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$

تدريس الممارسات في الرياضيات
التوافق يلاحظ الطلاب المتفوقون في
الرياضيات تكرار العمليات الحسابية،
ويبحثون عن الطرق العامة والمختصرة
مما. ويقيمون باستمرار مدى منطقية
نتائجهم الوسيطة. شجّع الطلاب على
دراسة حلولهم عن كثب وكتابتها بأبسط
صورة ممكنة.

التركيز على محتوى الرياضيات
العدد اللا نهائي من الحلول لكثير من
المعادلات المثلثية عدد لا نهائي من
الحلول. فإن لم تُحدد فترة لحصر عدد
الحلول، فيجب تحديد العدد اللا نهائي
من الحلول عن طريق استخدام تعبير
بدلاً من مجرد استخدام عدد. وهناك
حلّ يظهر لكل تدوير كامل حول نقطة
الأصل، وهو حل له الصيغة
 $a^\circ + k \cdot 360^\circ$ ، حيث k هي أي عدد
صحيح.

التدريس باستخدام التكنولوجيا

دفتر الملاحظات اطلب من الطلاب
كتابة ملاحظات في دفتر الملاحظات
اليومية عن كيفية حل المعادلات
المثلثية. واطلب منهم أن يصفوا وجه
تشابه هذه العملية واختلافها عن حل
أنواع أخرى من المعادلات.

5. حل المعادلات المثلثية باستخدام المتطابقات

حل $2 \sec^2 \theta - \tan^4 \theta = -1$ لإيجاد كل قيم θ إذا كان قياس الزاوية θ بالدرجة.

$$\begin{aligned} 2 \sec^2 \theta - \tan^4 \theta &= -1 && \text{المعادلة الأصلية} \\ 2(1 + \tan^2 \theta) - \tan^4 \theta &= -1 && \sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta \\ 2 + 2 \tan^2 \theta - \tan^4 \theta &= -1 && \text{خاصية التوزيع} \\ \tan^4 \theta - 2 \tan^2 \theta - 3 &= 0 && \text{بوضع طرفي واحد مساوياً للصفر 0.} \\ (\tan^2 \theta - 3)(\tan^2 \theta + 1) &= 0 && \text{حلل إلى العوامل.} \\ \tan^2 \theta - 3 &= 0 && \text{أو} \quad \tan^2 \theta + 1 = 0 \\ \tan^2 \theta &= 3 && \tan^2 \theta = -1 \end{aligned}$$

يعطي هذا الجزء أي حلولي نظرًا إلى أن $\tan^2 \theta$ ليست سالبة على الإطلاق. $\theta = 60^\circ + 180^\circ k$ و $\theta = -60^\circ + 180^\circ k$. حيث k أي عدد صحيح. الحلان هما $60^\circ + 180^\circ k$ و $-60^\circ + 180^\circ k$.

دعونا نرى ما إذا كانت هذه الحلول صحيحة. $2 \sec^2 60^\circ - \tan^4 60^\circ = 2(2)^2 - (3)^2 = 8 - 9 = -1$ و $2 \sec^2 (-60^\circ) - \tan^4 (-60^\circ) = 2(2)^2 - (3)^2 = 8 - 9 = -1$. إذن هاتان الحلان صحيحتان.

حل كل من المعادلات التالية.

5A. $\sin \theta \cot \theta - \cos^2 \theta = 0$

5B. $\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + 2 \sin^2 \theta = 0$

دالة مما يلي إذا كانت $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.

- $2 \sin \theta + 1 = 0$ $210^\circ, 330^\circ$
- $\cos^2 \theta + 2 \cos \theta + 1 = 0$ 180°
- $\cos 2\theta + \cos \theta = 0$ $60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$
- $2 \cos \theta = 1$ $60^\circ, 300^\circ$
- $\cos \theta = \frac{1}{2}$ $150^\circ, 210^\circ$
- $\sin 2\theta = \frac{1}{2}$ $120^\circ, 150^\circ, 300^\circ, 330^\circ$
- $\cos 2\theta = 8 - 15 \sin \theta$ $30^\circ, 150^\circ$
- $\sin \theta + \cos \theta = 1$ $0^\circ, 90^\circ, 360^\circ$

يُلي لإيجاد كل قيم θ إذا كان قياس θ بالراديان.

- $2 \cos^2 \theta = 1$ $60^\circ, 300^\circ$
- $\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{2}$ $0^\circ, 360^\circ$
- $\sin \frac{\theta}{2} + \cos \theta = 1$ $0^\circ, 360^\circ$
- يُلي لإيجاد كل قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجة.
- $\sin^2 \theta - \sin \theta = 0$
- $\cos \theta - 2 \cos \theta \sin \theta = 0$
- $\sin \theta \tan \theta - \tan \theta = 0$

ير عدد ساعات النهار t في هارتفورد، كونيتيكت، باستخدام المعادلة $t = 3 \sin \frac{2\pi}{365} t + 12$. الأيام بعد 21 مارس.

يكون عدد ساعات النهار خلالها في هارتفورد $10\frac{1}{2}$ ساعات بالتحديد؟

أنتج في الجزء 8. اذكر ما أيام السنة التي فيها على الأقل $10\frac{1}{2}$ ساعات في النهار. وشرح كيف انظر الهامش.

ملف

المتابعة

الواجب	خيار اليومين
30-48, 58, 60-62	58, زوجي 30-48, 60-62, 68-83
31-55, 60-62, 68-83	49-58, 60-62, 68-83
اختياري, 49-80	

تدريس الممارسات في الرياضيات
الاستنتاج المنطقي يبدأ الطلاب المتفوقون في الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن نقاط بدء الحل. ويحللون المعطيات، والقيود والعلاقات والأهداف. ويتأكد الطلاب المتفوقون في الرياضيات من أجوبتهم عن المسائل باستخدام طريقة مختلفة. ويسألون أنفسهم باستمرار: "هل هذا جواب منطقي؟"

$$22. \sin^2 2\theta + \cos^2 \theta = 0 \quad 45^\circ + k \cdot 180^\circ$$

$$24. \cos^2 \theta + 3 \cos \theta = -2 \quad 120^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$26. \tan \theta = 1 \quad 45^\circ + k \cdot 180^\circ$$

$$28. \sin \theta + 1 = \cos 2\theta \quad 90^\circ + k \cdot 360^\circ, 270^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$30. \cos^2 \theta = \frac{1}{2} \quad 45^\circ + k \cdot 180^\circ, 135^\circ + k \cdot 180^\circ$$

$$32. \sin 2\theta - \cos \theta = 0 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 72^\circ + k \cdot 360^\circ$$

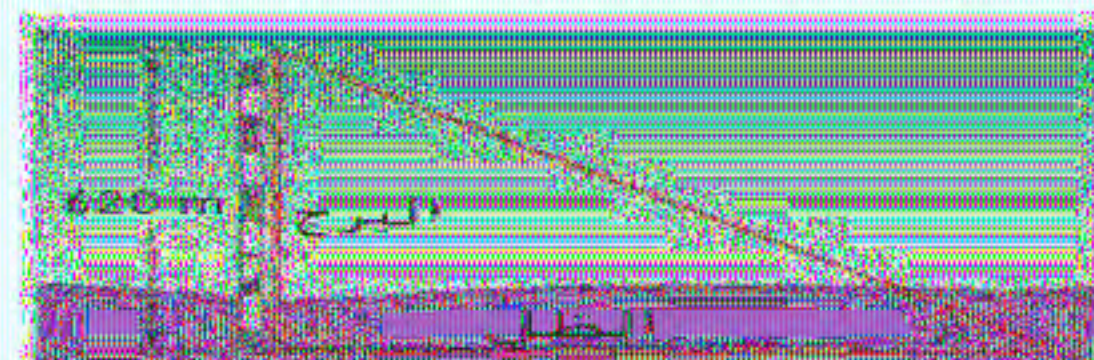
$$34. 2 \sin \theta + \sqrt{3} = 0 \quad 150^\circ + k \cdot 360^\circ, 210^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$36. \cos 2\theta + 3 \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 120^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$38. \cos^2 \theta - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \cos \theta \quad 120^\circ + k \cdot 360^\circ, 240^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$40. \sin \theta - \cos \theta = 0 \quad 45^\circ + k \cdot 180^\circ$$

$$42. \sin^2 \theta = 2 \sin \theta + 3 \quad 240^\circ + k \cdot 360^\circ, 300^\circ + k \cdot 360^\circ$$



$$45. 2 \sin^2 \theta = 3 \sin \theta + 2 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 120^\circ + k \cdot 360^\circ, 240^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$47. \sin^2 \theta + \cos 2\theta = \cos \theta \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 120^\circ + k \cdot 360^\circ, 240^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$49. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$51. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$53. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$55. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$57. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$59. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$61. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$63. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$65. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$67. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$69. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$71. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$73. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$75. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$77. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$79. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$81. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$83. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$85. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$87. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$89. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$91. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$93. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$95. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$97. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$99. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$101. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$103. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$105. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$107. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$109. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$111. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$113. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$115. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$117. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$119. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$121. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$123. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$125. \sin \theta + \cos \theta = 1 \quad 0^\circ + k \cdot 360^\circ, 180^\circ + k \cdot 360^\circ$$

ت التالية.

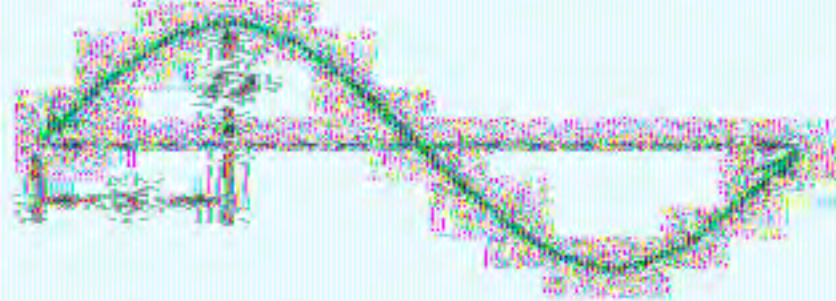
54. $2 \sin \theta = \sin 2\theta$ πk

55. $\cos \theta \tan \theta - 2 \cos^2 \theta = -1$

ون سنيل، $n_1 \sin i = n_2 \sin r$ ، حيث n_1 هي قرينة انكسار الوسط الذي يخرج منه الضوء، انكسار الوسط الذي يدخله الضوء، و i هو قياس زاوية الورود بالدرجات، و r هو قياس زاوية

انكسار الباس 2.42، وتساوي قرينة انكسار الهواء 1.00. عزمة من الضوء قطعة من الماس بزاوية تساوي 35° ، فما زاوية الانكسار؟ 13.71°

كن لخبير الأحجار الكريمة استخدام قانون سنيل لتحديد ما إذا كانت قطعة من . **قِسْ زاويتي الورود والانكسار لتحديد قرينة الانكسار. فإذا كانت القرينة تساوي 2.42، فإن قطعة الألماس أصلية.**



ثيل موجي في وتر جيتار باستخدام المعادلة $D = 0.5 \sin(6.5t)$ ، وفيها D هي الإزاحة بالمليمتر. ليمتزا بالنسبة للطرف الأيسر من الوتر عند الزمن t من موجب يكون فيه للنقطة الواقعة على بعد 0.5 متر ر إزاحة مسافتها 0.01 مليمتر. **0.0026 ثانية**

تعدة تأمل المتباينة المثلثية $\sin \theta \geq \frac{1}{2}$.

جدول قيم حيث $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$. ما قيم θ التي تجعل $\sin \theta \geq \frac{1}{2}$ ؟ **30° و 150° و 210° و 330°**

$y = \sin$ و $y = \frac{1}{2}$ بيانيًا على التمثيل البياني نفسه حيث $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$. ما قيم θ التي لتمثيل البياني لـ $y = \sin \theta$ فوق التمثيل البياني لـ $y = \frac{1}{2}$ ؟

على إجاباتك من الجزأين a و b، حلّ $\sin \theta \geq \frac{1}{2}$ لإيجاد كل قيم θ .

متباينة مما يلي إذا كانت $0 \leq \theta \leq 360^\circ$. ثم حلّ كلّاً منها لإيجاد كل قيم θ .

I. $\cos \theta \geq \frac{1}{2}$
II. $-\sin \theta \geq 0$

III. $2 \sin \theta \leq \sqrt{3}$
IV. $\cos \theta = 1$

مسائل مهارات التفكير العليا

$\sin 2x < 0$ حيث $0 \leq x \leq 2\pi$ دون استخدام الآلة الحاسبة. **2π و 3π و 4π و 5π و 6π و 7π و 8π و 9π و 10π و 11π و 12π**

ين الخرق بين حلّ المعادلات المثلثية بحلّ المعادلات الخطية والتربيعية. ما التقنيات تقنيات المختلفة؟ وكم عدد الحلول التي تتوقعها؟ **انظر الهامش.**

الرياضيات لماذا يكون للمعادلات المثلثية عدد لا نهائي من الحلول في أغلب الأحيان؟ **الهامش.**

ة الإجابة اكتب مثلاً لمعادلة مثلثية يكون لها حلّان بالضبط إذا كانت **الإجابة المتوقعة: 90° , 270° و $2 \cos \theta = 0$**

الحلول التي تتوقعها ضمن الفترة $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ لـ $a \sin(b\theta + c) = d$ و b عددًا صحيحًا موجبًا؟ **0 , b أو $2b$**

76b.



$\sin \theta = 0$ for $\theta = 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$

$\cos \theta = 1$ for $\theta = 0^\circ, 360^\circ$

$\cos \theta = 0$ for $\theta = 90^\circ, 270^\circ$

$\cos \theta = -1$ for $\theta = 180^\circ$



تدريس المهارسات في الرياضيات

المثابرة يبدأ الطلاب المتفوقون في الرياضيات بشرح معنى المسألة لأنفسهم والبحث عن نقاط بدء الحل. فيحللون المعطيات والعقود والعلاقات والأهداف. ويبتكرون فرضيات حول شكل الحل ومعناه ويخططون مسارًا للحل بدلاً من الانتقال ببساطة إلى محاولة الحل.

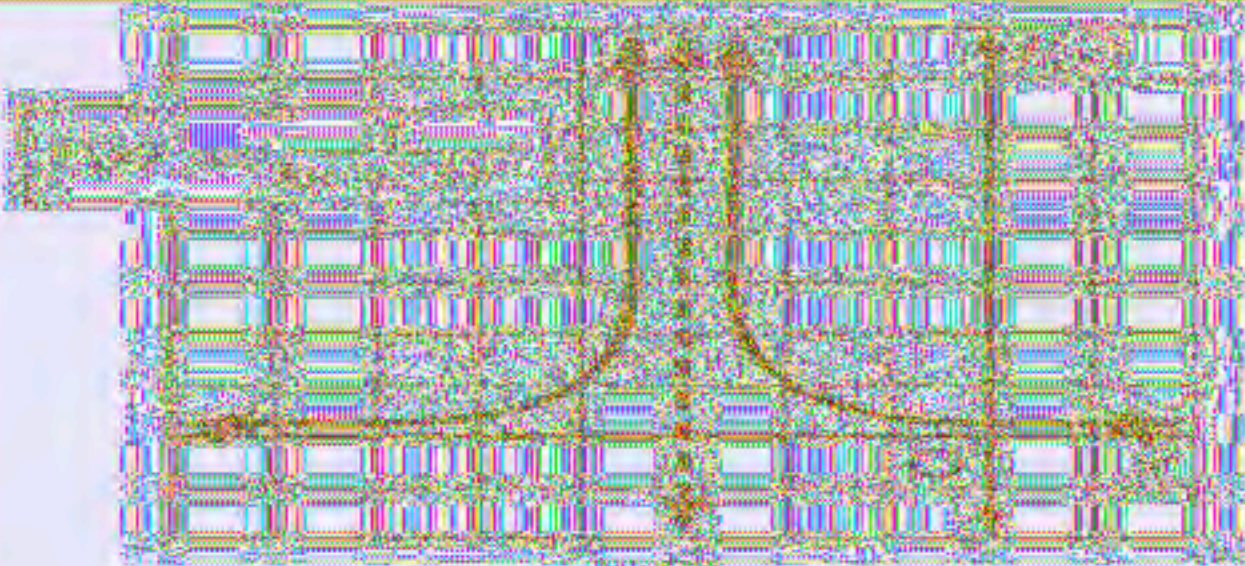
4 التقويم

بطاقة التحقق من استيعاب

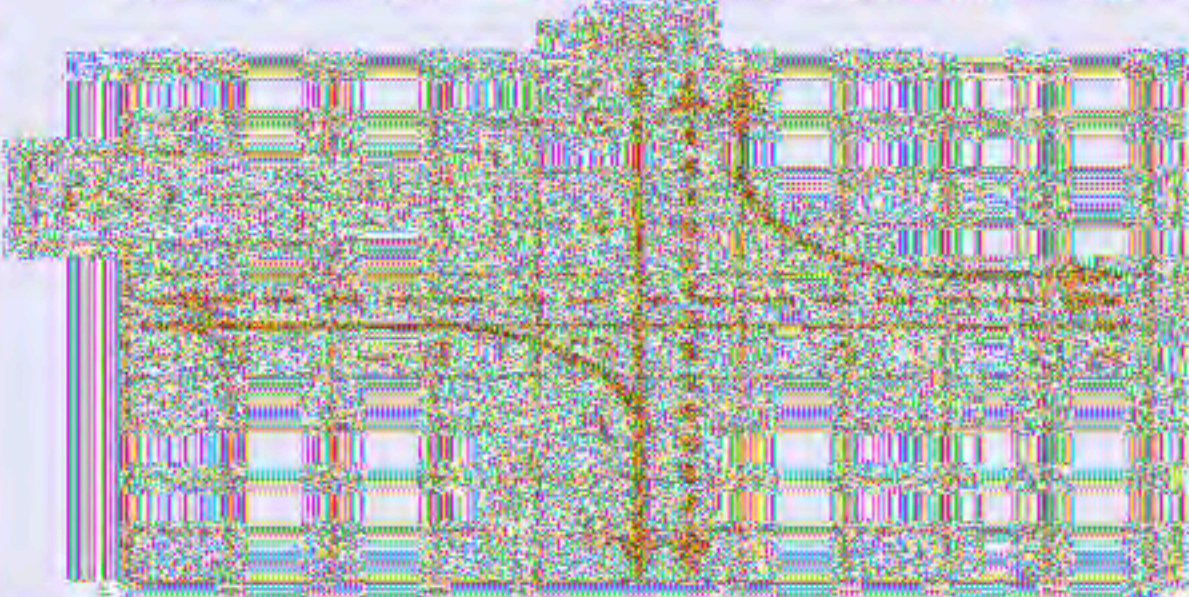
الطلاب اطلب من الطلاب كتابة معادلة تتضمن $\sin^2 \theta$ ولها حلّ وحيد بالضبط للفترة $90^\circ < \theta < 270^\circ$.

إجابات إضافية

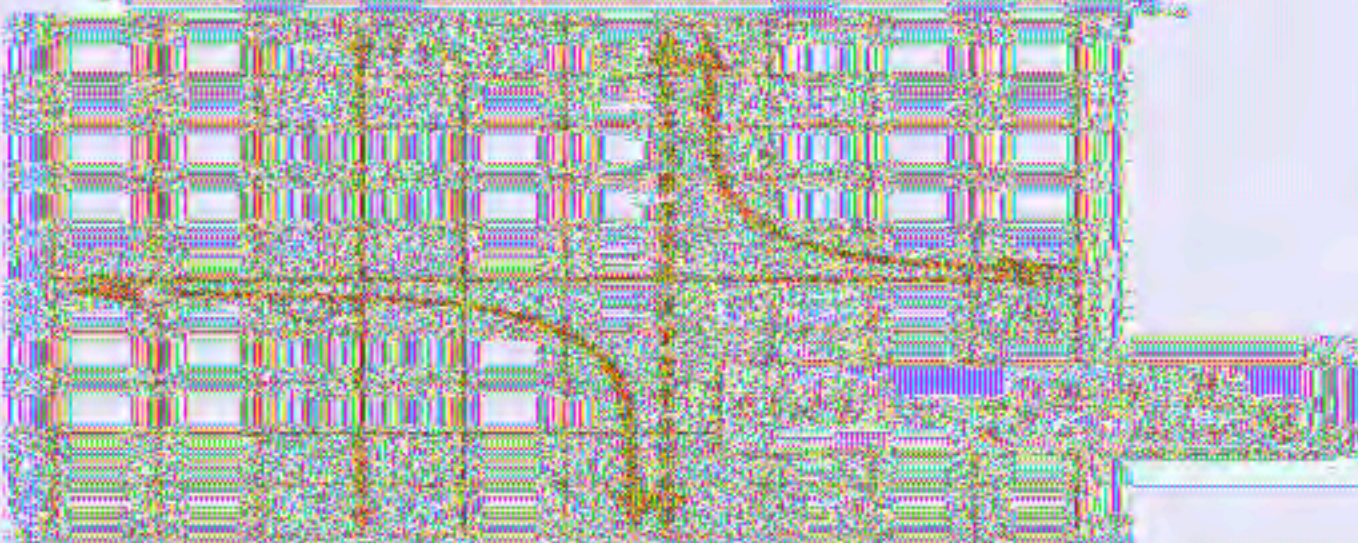
81.



82.



83.



يبي لإيجاد $f(-2)$ للدالة أدناه. F

$$f(x) = x^4 + 10x^2$$

F 62

G 38

ط. النقاط المبين أدناه إلى ما لا ط. إضافية في كل خطوة.

2
3
خطوة 3

تخدامه لتحديد عدد النقاط في

A $2n$

B $n(n + 2)$

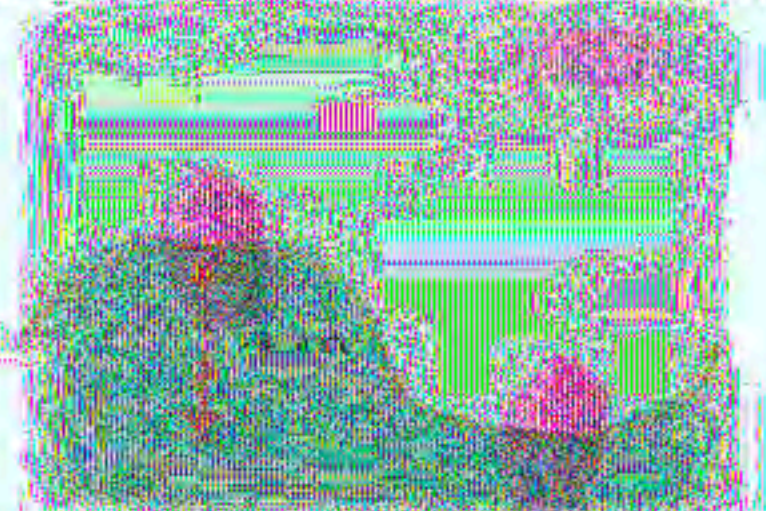
C $n(n + 1)$

$$68. \cos 165^\circ$$

$$70. \sin \frac{7\pi}{8}$$

$$72. \sin (270^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

$$74. \cos (90^\circ - \theta) = \sin \theta$$



$$77. a_1 = 17, a_n = 197, S_n = 224$$

$$79. n = 31, a_n = 78, S_n = 1023$$

$$81. f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$$

739

ك k هو عدد صحيح موجب.
ي تعطي حلاً للمعادلة المتعلقة

الدراسة والمراجعة

الدرس 12-1: المتطابقات الأساسية

- متطابقة الزاويتين المتتامتين **cofunction identity**
- متطابقة الزاوية السالبة **negative angle identity**
- متطابقة فيثاغورس **Pythagorean identity**
- متطابقة ناتج القسمة **quotient identity**
- متطابقة عكسية **reciprocal identity**
- معادلة مثلثية **trigonometric equation**
- متطابقة مثلثية **trigonometric identity**

12-2 و 12-1

بين الدوال المثلثية.

تبسيط المعادلات والتعابير

يتوما (الدرس 12-3)

$$\begin{aligned}\cos(A \pm B) &= \cos A \cos B \mp \sin A \sin B \\ \sin(A \pm B) &= \sin A \cos B \pm \cos A \sin B \\ \tan(A \pm B) &= \frac{\sin(A \pm B)}{\cos(A \pm B)}\end{aligned}$$

الدرس 12-4

$$\begin{aligned}\sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta \\ \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ \cos 2\theta &= 1 - 2 \sin^2 \theta \\ \cos 2\theta &= 2 \cos^2 \theta - 1 \\ \tan 2\theta &= \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}\end{aligned}$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$$

مراجعة التمارينات

1. اختر المصطلح الصحيح لإكمال كل جملة مما يلي.
يمكن استخدام $\sin 75^\circ$ و $\cos 75^\circ$ لإيجاد $\sin 15^\circ$ و $\cos 15^\circ$ معروفين.
متطابقة فرق زاويتين
2. المتطابقتان $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ و $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ هما مثالان على **المتطابقات النسبية**.
3. هي معادلة تضم متطابقات مثلثية، وهي صحيحة لجميع القيم التي تكون فيها جميع التعابير في المعادلة معروفة. **المتطابقة المثلثية**
4. يمكن استخدام $\sin 60^\circ$ لإيجاد $\sin 30^\circ$ باستخدام الزاوية 30° بمثابة مرجع. **متطابقة الزاوية المزدوجة**
5. تكون صحيحة فقط عند قيم محددة للمتغير. **المعادلة المثلثية**
6. يمكن استخدام صيغة $\cos 22\frac{1}{2}^\circ$ لإيجاد $\cos 45^\circ$. **نصف الزاوية**
7. المتطابقتان $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$ و $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$ هما مثالان على **المتطابقات العكسية**.
8. يمكن استخدام $\sin 120^\circ$ أو $\cos 120^\circ$ لإيجاد $\sin 60^\circ$ و $\cos 60^\circ$ معروفين. **متطابقة مجموع زاويتين**
9. $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ هي مثال على **متطابقة فيثاغورس**.

مراجعة درس بدروس

التدخل التقويمي إذا كانت الأمثلة المقدمة غير كافية لعرض الموضوعات التي تتناولها الأسئلة، فذكر الطلاب بأن مراجع الدروس ترشدهم إلى مكان مراجعة الموضوع في كتبهم المدرسية.

إجابات إضافية

15. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
20. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
21. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
22. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
23. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
24. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
25. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
26. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
27. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
28. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
29. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
30. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
31. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
32. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
33. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
34. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
35. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
36. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
37. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
38. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
39. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
40. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
41. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
42. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
43. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
44. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
45. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
46. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
47. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
48. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
49. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
50. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
51. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
52. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
53. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
54. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
55. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
56. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
57. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
58. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
59. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
60. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
61. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
62. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
63. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
64. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
65. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
66. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
67. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
68. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
69. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
70. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
71. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
72. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
73. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
74. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
75. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
76. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
77. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
78. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
79. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
80. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
81. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
82. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
83. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
84. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
85. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
86. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
87. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
88. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
89. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
90. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
91. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
92. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
93. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
94. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
95. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
96. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
97. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
98. $\cos \theta = \frac{4}{5}$
99. $\sin \theta = \frac{3}{4}$
100. $\cos \theta = \frac{4}{5}$

$$\cos \theta \text{ و } 0^\circ < \theta < 90^\circ$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \frac{9}{16}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{7}{16}$$

$$\sin \theta = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$$

في الربع الأول، فإن $\sin \theta$ موجبة.

$$\cos \theta \sec \theta \cos \theta = \cos \theta \left(\frac{1}{\cos \theta}\right) \cos \theta = \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos \theta + 1}{\sin \theta} &= \cot \theta + \csc \theta \\ \frac{\cos \theta + 1}{\sin \theta} &= \cot \theta + \csc \theta \\ \frac{\cos \theta + 1}{\sin \theta} &= \cot \theta + \csc \theta \\ \cot \theta + \csc \theta &= \cot \theta + \csc \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos \theta + 1}{\sin \theta} &= \cot \theta + \csc \theta \\ \frac{\cos \theta + 1}{\sin \theta} &= \cot \theta + \csc \theta \\ \frac{\cos \theta + 1}{\sin \theta} &= \cot \theta + \csc \theta \\ \cot \theta + \csc \theta &= \cot \theta + \csc \theta \end{aligned}$$

الدراسة والمراجعة تابع

الزمن والشرق

مثال 4

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 75^\circ$.

استخدم $\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin (30^\circ + 45^\circ) \\ &= \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

ب الاتية:

$$24. \cos(-135^\circ)$$

$$25. \sin 240^\circ$$

$$26. \tan 75^\circ$$

$$30. \sin (\theta + 90) = \cos \theta \quad 1.$$

$$31. \cos \left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\cos \theta$$

$$32. \tan (\theta - \pi) = \tan \theta$$

زاوية وحسين

$\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$

$$33. \cos \theta = \frac{4}{5}, 0^\circ < \theta < 90^\circ$$

$$34. \sin \theta = -\frac{3}{5}, 180^\circ < \theta < 270^\circ$$

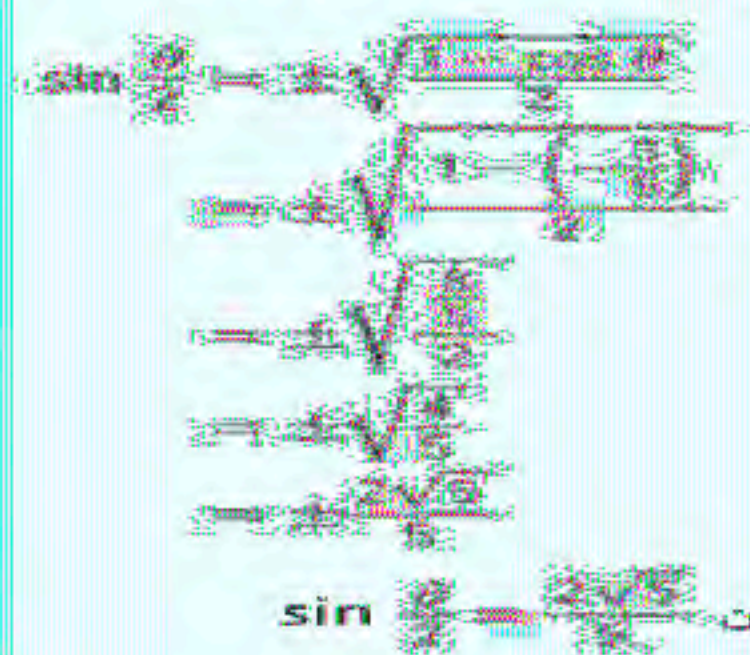
$$35. \cos \theta = -\frac{2}{3}, \frac{7\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{4}$$

البيسول هو عبارة عن

$\sin 4\theta$ باستخدام أطوال ملعب

لإثبات صحة

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin \frac{\theta}{2}$ إذا كان $\cos \theta = -\frac{3}{5}$ تقع في الربع الثاني.



متطابقة نصف الزاوية

$$\cos \theta = -\frac{3}{5}$$

أطرح.

أقسم.

أضرب.

بما أن الزاوية θ تقع في الربع الثاني، فإن $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{3}{5}$

مثال 6

أوجد جميع حلول $\sin 2\theta - \cos \theta = 0$ حيث $0 \leq \theta < 2\pi$.

$$\sin 2\theta - \cos \theta = 0 \quad \text{المتطابقة الأصلية}$$

$$2 \sin \theta \cos \theta - \cos \theta = 0 \quad \text{متطابقة نصف الزاوية}$$

$$\cos \theta (2 \sin \theta - 1) = 0 \quad \text{بالتحليل إلى العوامل.}$$

$$\cos \theta = 0 \quad \text{أو} \quad 2 \sin \theta - 1 = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2}, \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

يلي بالفترة المعطاة.

$$37. 2 \cos \theta - 1 = 0, 0^\circ < \theta < 360^\circ$$

$$38. 4 \cos^2 \theta - 1 = 0, 0^\circ < \theta < 360^\circ$$

$$39. \sin 2\theta + \cos \theta = 0, 0^\circ < \theta < 360^\circ$$

$$40. \tan^2 \theta = 2 \tan \theta + 3, 0^\circ < \theta < 360^\circ$$

$$41. 4 \cos^2 \theta - 4 \cos \theta + 1 = 0$$

من أن يتأثي أهرامات مصر القديمة، كهرم خوفو الأهرامات على هيئة مثلثات متساوية الأضلاع. في تغييرها إلى أشكال أخرى. افترض أن هرمًا متساوي الأضلاع وطول ضلعه 18 مترًا.

الوحدة 12



متساوي الأضلاع.

$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ وقياسات ضلع وارتفاعه لإثبات أن $\sin 2\theta$ أوجد القيم الدقيقة.

تغير.

17. $\cos 225^\circ$ 18. $\cos 135^\circ$
19. $\cos 75^\circ$ 20. $\sin 75^\circ$

صاروخ بسرعة متجهة ابتدائية تساوي v يمكن إيجاد مدى المقذوف باستخدام حيث يمثل R المدى، ويمثل v السرعة، g تسارع الجاذبية الأرضية، θ زاوية الإطلاق. فما بلغ مدى الصاروخ 25 مترًا؟

الوحدة 12

لقيم θ إذا كانت θ بالراديان.

22. $2 \cos^2 \theta - 3 \cos \theta - 2 = 0$
23. $2 \sin^2 \theta - 1 = 0$
24. $\cos 2\theta + \cos \theta = 2$
25. $\sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta = 0$

إذا كانت θ بالدرجات.

24. $\cos 2\theta + \cos \theta = 2$
25. $\sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta = 0$

$$\begin{aligned}
 10. \quad 1 + \sec^2 \theta \sin^2 \theta &\stackrel{?}{=} \sec^2 \theta \\
 1 + \frac{1}{\cos^2 \theta} \cdot \sin^2 \theta &\stackrel{?}{=} \sec^2 \theta \\
 1 + \tan^2 \theta &\stackrel{?}{=} \sec^2 \theta \\
 \sec^2 \theta &= \sec^2 \theta \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11. \quad \sin \theta \sec \theta \cot \theta &\stackrel{?}{=} 1 \\
 \sin \theta \cdot \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} &\stackrel{?}{=} 1 \\
 1 &= 1 \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12. \quad \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} &\stackrel{?}{=} (\csc \theta - \cot \theta)^2 \\
 \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} &\stackrel{?}{=} \csc^2 \theta - 2 \cot \theta \csc \theta + \cot^2 \theta \\
 \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} &\stackrel{?}{=} \frac{1}{\sin^2 \theta} - 2 \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot \frac{1}{\sin \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\
 \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} &\stackrel{?}{=} \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\
 \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} &\stackrel{?}{=} \frac{1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\
 \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} &\stackrel{?}{=} \frac{(1 - \cos \theta)(1 - \cos \theta)}{1 - \cos^2 \theta} \\
 \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} &\stackrel{?}{=} \frac{(1 - \cos \theta)(1 - \cos \theta)}{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)} \\
 \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} &= \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13. \quad \frac{1 - 2 \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} &\stackrel{?}{=} \tan \theta - \cot \theta \\
 \frac{(1 - \cos^2 \theta) - \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} &\stackrel{?}{=} \tan \theta - \cot \theta \\
 \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} &\stackrel{?}{=} \tan \theta - \cot \theta \\
 \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} &\stackrel{?}{=} \tan \theta - \cot \theta \\
 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} &\stackrel{?}{=} \tan \theta - \cot \theta \\
 \tan \theta - \cot \theta &= \tan \theta - \cot \theta \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14. \quad \tan \theta &\stackrel{?}{=} \frac{\sec \theta}{\csc \theta} \\
 \tan \theta &\stackrel{?}{=} \frac{\frac{1}{\cos \theta}}{\frac{1}{\sin \theta}} \\
 \tan \theta &\stackrel{?}{=} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\
 \tan \theta &= \tan \theta \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15. \quad \cos \theta &\stackrel{?}{=} \sin \theta \cot \theta \\
 \cos \theta &\stackrel{?}{=} \sin \theta \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \\
 \cos \theta &= \cos \theta \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$23. (\sin \theta + \cos \theta)^2 \stackrel{?}{=} \frac{2 + \sec \theta \csc \theta}{\sec \theta \csc \theta}$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 \stackrel{?}{=} \frac{2 + \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{1}{\sin \theta}}{\frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{1}{\sin \theta}}$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 \stackrel{?}{=} \left(2 + \frac{1}{\cos \theta \sin \theta}\right) \cdot \frac{\cos \theta \sin \theta}{1}$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 \stackrel{?}{=} 2 \cos \theta \sin \theta + 1$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 \stackrel{?}{=} 2 \cos \theta \sin \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = (\sin \theta + \cos \theta)^2 \quad \checkmark$$

$$24. \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} \stackrel{?}{=} \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} \stackrel{?}{=} \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} \cdot \frac{1 - \sin \theta}{1 - \sin \theta}$$

$$\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} \stackrel{?}{=} \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta (1 - \sin \theta)}$$

$$\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} \stackrel{?}{=} \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta (1 - \sin \theta)}$$

$$\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} = \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} \quad \checkmark$$

$$25. \csc \theta - 1 \stackrel{?}{=} \frac{\cot^2 \theta}{\csc \theta + 1}$$

$$\csc \theta - 1 \stackrel{?}{=} \frac{\csc^2 \theta - 1}{\csc \theta + 1}$$

$$\csc \theta - 1 \stackrel{?}{=} \frac{(\csc \theta - 1)(\csc \theta + 1)}{\csc \theta + 1}$$

$$\csc \theta - 1 = \csc \theta - 1 \quad \checkmark$$

$$26. \cos \theta \cot \theta \stackrel{?}{=} \csc \theta - \sin \theta$$

$$(\cos \theta) \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\sin \theta} - \sin \theta$$

$$\frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\sin \theta} - \frac{\sin \theta}{1} \cdot \frac{\sin \theta}{\sin \theta}$$

$$\frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\sin \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta}$$

$$\frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \stackrel{?}{=} \frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin \theta}$$

$$\frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \quad \checkmark$$

$$27. \sin \theta \cos \theta \tan \theta + \cos^2 \theta \stackrel{?}{=} 1$$

$$\sin \theta \cos \theta \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \cos^2 \theta \stackrel{?}{=} 1$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta \stackrel{?}{=} 1$$

$$1 = 1 \quad \checkmark$$

16.

17.

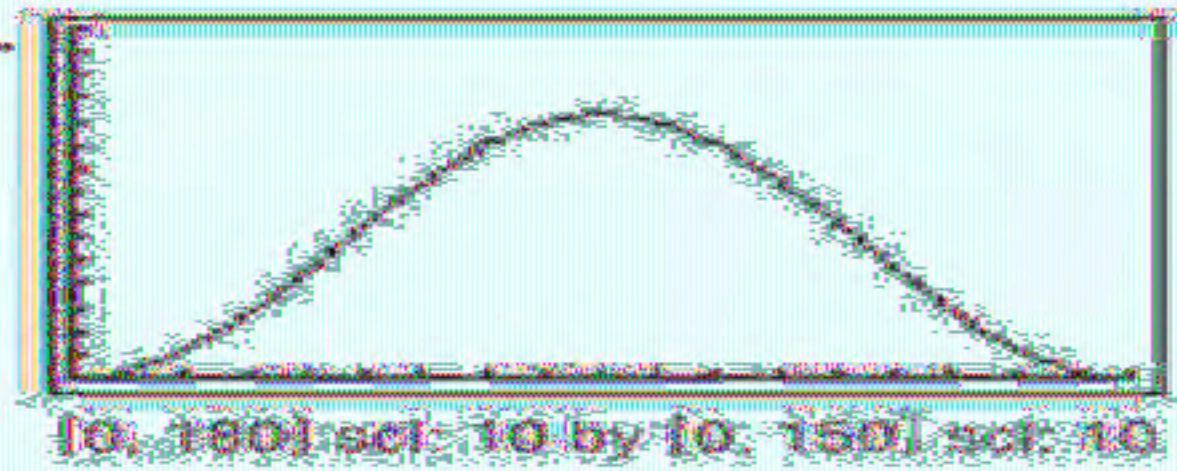
19.

20.

21.

22.

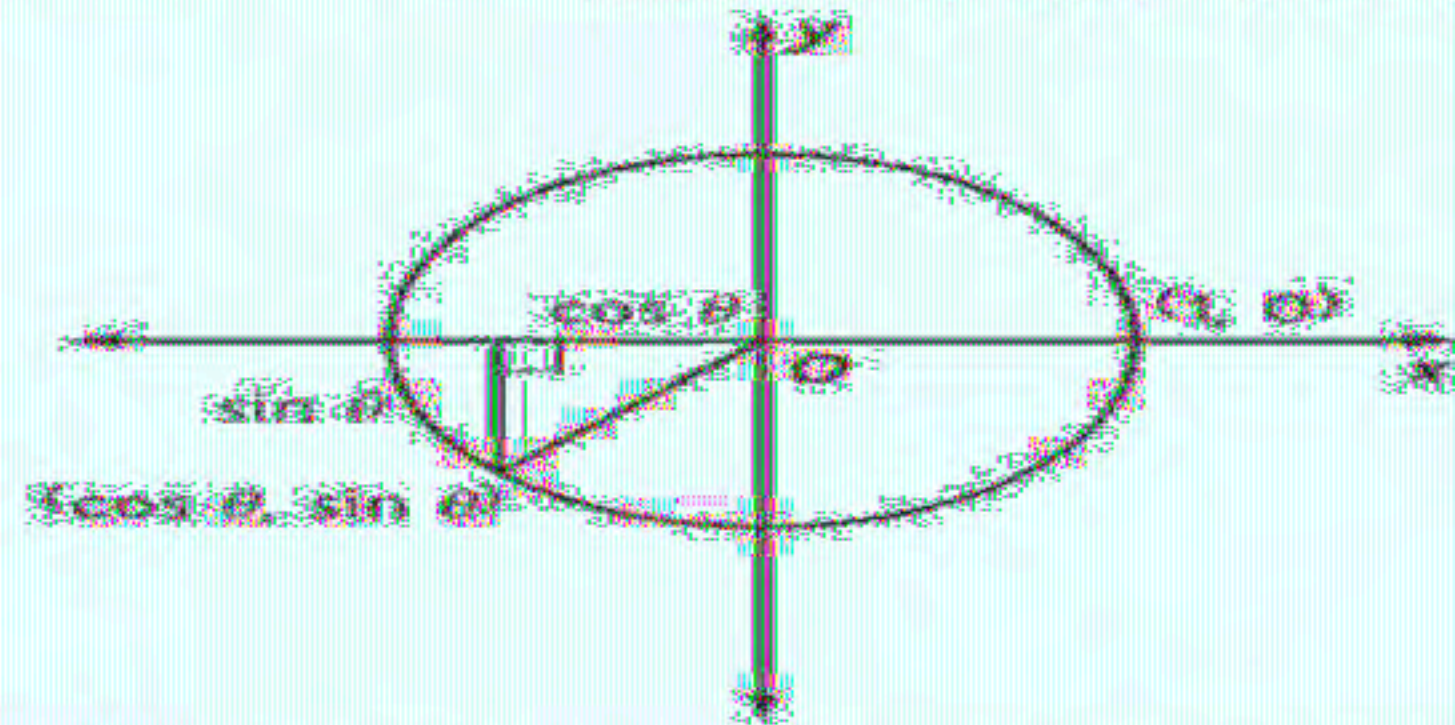
51b.



51c.

$$\begin{aligned} \frac{v_0^2 \tan^2 \theta}{2g \sec^2 \theta} &= \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} \\ \frac{v_0^2 \left(\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right)}{2g \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} \right)} &= \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} \\ \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} &= \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} \quad \checkmark \end{aligned}$$

باستخدام دائرة الوحدة ونظرية فيثاغورس، يمكننا تعليل أن $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.



إذا قسمنا كل حد للمطابقة $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ على $\cos^2 \theta$ ، فيمكننا تبسيط أن $\tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$.

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} &= \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ 1 + \tan^2 \theta &= \sec^2 \theta \\ 1 + \tan^2 \theta &= \sec^2 \theta \end{aligned}$$

إذا قسمنا كل حد للمطابقة $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ على $\sin^2 \theta$ ، فيمكننا تبسيط أن $\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$.

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} &= \frac{1}{\sin^2 \theta} \\ \cot^2 \theta + 1 &= \csc^2 \theta \end{aligned}$$

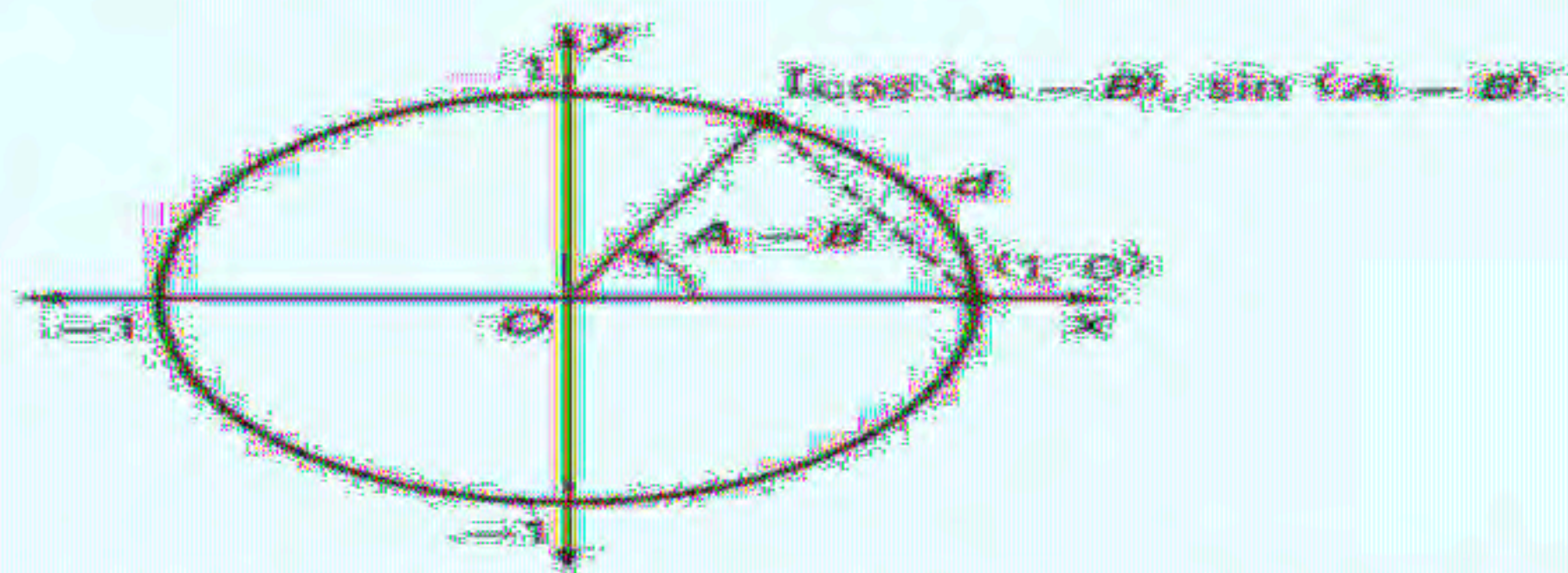
س 3-12

$$\begin{aligned} 30. F &= \frac{W(\sin A + \mu \cos A)}{\cos A - \mu \sin A} \\ &= \frac{W(\sin A + \tan \theta \cos A)}{\cos A - \tan \theta \sin A} \\ &= \frac{W \left(\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\tan \theta \cos A}{\cos A} \right)}{\frac{\cos A}{\cos A} - \frac{\tan \theta \sin A}{\cos A}} \\ &= \frac{W(\tan A + \tan \theta)}{1 - \tan A \tan \theta} \\ &= W \tan(A + \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 37. \quad & \sin(A+B)\sin(A-B) \stackrel{?}{=} \sin^2 A - \sin^2 B \\
 & (\sin A \cos B + \cos A \sin B)(\sin A \cos B - \cos A \sin B) \stackrel{?}{=} \sin^2 A - \sin^2 B \\
 & (\sin A \cos B)^2 - (\cos A \sin B)^2 \stackrel{?}{=} \sin^2 A - \sin^2 B \\
 & \sin^2 B \cos^2 B - \cos^2 A \sin^2 B \stackrel{?}{=} \sin^2 A - \sin^2 B \\
 & \sin^2 A \cos^2 B + \sin^2 A \sin^2 B - \sin^2 A \sin^2 B - \cos^2 A \sin^2 B \stackrel{?}{=} \sin^2 A - \sin^2 B \\
 & \sin^2 A (\cos^2 B + \sin^2 B) - \sin^2 B (\sin^2 A + \cos^2 A) \stackrel{?}{=} \sin^2 A - \sin^2 B \\
 & (\sin^2 A)(1) - (\sin^2 B)(1) \stackrel{?}{=} \sin^2 A - \sin^2 B \\
 & \sin^2 A - \sin^2 B = \sin^2 A - \sin^2 B \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 40. \quad \cot(A+B) &= \frac{1}{\tan(A+B)} \\
 &= \frac{1}{\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}} \\
 &= \frac{1 - \tan A \tan B}{\tan A + \tan B} \\
 &= \frac{1 - \frac{1}{\cot A} - \frac{1}{\cot B}}{\frac{1}{\cot A} + \frac{1}{\cot B}} = \frac{\cot A \cot B}{\cot A \cot B + 1} \\
 &= \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 41. \quad d &= \sqrt{(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2} \\
 d^2 &= (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 \\
 d^2 &= (\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta) + (\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta) \\
 d^2 &= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \beta + \sin^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta \\
 d^2 &= 1 + 1 - 2 \cos \alpha \cos \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta \\
 d^2 &= 2 - 2 \cos \alpha \cos \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta
 \end{aligned}$$



أوجد الآن قيمة d^2 عندما تقع الزاوية التي قياسها $\alpha - \beta$ في موضع قياسي في دائرة الوحدة. كما في الشكل الموضح أعلاه.

$$12. \frac{\cos \theta \csc \theta}{\cot \theta} \stackrel{?}{=} 1$$

$$\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot \tan \theta \stackrel{?}{=} 1$$

$$\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \stackrel{?}{=} 1$$

$$1 = 1 \checkmark$$

$$13. \frac{\sin \theta \tan \theta}{1 - \cos \theta} \stackrel{?}{=} (1 + \cos \theta) \sec \theta$$

$$\frac{\sin \theta \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)}{1 - \cos \theta} \stackrel{?}{=} (1 + \cos \theta) \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\frac{\frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}}{1 - \cos \theta} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos \theta} + 1$$

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \cdot \frac{1}{1 - \cos \theta} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos \theta} + 1$$

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta (1 - \cos \theta)} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos \theta} + 1$$

$$\frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta (1 - \cos \theta)} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos \theta} + 1$$

$$\frac{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{\cos \theta (1 - \cos \theta)} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos \theta} + 1$$

$$\frac{1 + \cos \theta}{\cos \theta} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos \theta} + 1$$

$$\frac{1}{\cos \theta} + 1 = \frac{1}{\cos \theta} + 1 \checkmark$$

$$14. \tan \theta (1 - \sin \theta) \stackrel{?}{=} \frac{\cos \theta \sin \theta}{1 + \sin \theta}$$

$$\tan \theta (1 - \sin \theta) \stackrel{?}{=} \frac{\cos \theta \sin \theta}{1 + \sin \theta} \cdot \frac{1 - \sin \theta}{1 - \sin \theta}$$

$$\tan \theta (1 - \sin \theta) \stackrel{?}{=} \frac{\cos \theta \sin \theta (1 - \sin \theta)}{1 - \sin^2 \theta}$$

$$\tan \theta (1 - \sin \theta) \stackrel{?}{=} \frac{\cos \theta \sin \theta (1 - \sin \theta)}{\cos^2 \theta}$$

$$\tan \theta (1 - \sin \theta) \stackrel{?}{=} \frac{\sin \theta (1 - \sin \theta)}{\cos \theta}$$

$$\tan \theta (1 - \sin \theta) \stackrel{?}{=} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot (1 - \sin \theta)$$

$$\tan \theta (1 - \sin \theta) = \tan \theta (1 - \sin \theta) \checkmark$$

$$15b. \cot \theta = \frac{24}{18} \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\frac{24}{30}}{\frac{18}{30}} = \frac{24}{18} \cdot \frac{30}{30} = \frac{24}{18}$$

$$16. \tan^2 \theta + 1 \stackrel{?}{=} \frac{\tan \theta}{\cos \theta - \sin \theta}$$

$$\sec^2 \theta \stackrel{?}{=} \frac{\tan \theta}{\cos \theta - \sin \theta}$$

$$\sec^2 \theta \stackrel{?}{=} \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\cos \theta - \sin \theta}$$

$$\sec^2 \theta \stackrel{?}{=} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}$$

$$\sec^2 \theta \stackrel{?}{=} \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\sec^2 \theta = \sec^2 \theta \checkmark$$

$$\begin{aligned}
 26. \tan 2\theta &= \frac{1}{\cot \theta - \tan \theta} \\
 \tan 2\theta &= \frac{1}{\cot \theta - \tan \theta} \cdot \frac{\tan \theta}{\tan \theta} \\
 \tan 2\theta &= \frac{\tan \theta}{\cot \theta \tan \theta - \tan^2 \theta} \\
 \tan 2\theta &= \frac{\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \\
 \tan 2\theta &= \tan 2\theta \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 27. 1 + \frac{1}{2} \sin 2\theta &= \frac{\sec \theta + \sin \theta}{\sec \theta} \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{\cos \theta} + \sin \theta} \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{\cos \theta}} \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{\cos \theta} + \sin \theta} \cdot \frac{\cos \theta}{\cos \theta} \\
 &= 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \theta \cos \theta \\
 &= 1 + \frac{1}{2} \sin 2\theta \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 28. \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} &= \frac{\sin \theta}{2} \\
 \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2} &= \frac{\sin \theta}{2} \\
 \frac{\sin 2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2} &= \frac{\sin \theta}{2} \\
 \frac{\sin \theta}{2} &= \frac{\sin \theta}{2} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 29. \tan \frac{\theta}{2} &= \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \\
 \tan \frac{\theta}{2} &= \frac{\sin 2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 + \cos 2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
 \tan \frac{\theta}{2} &= \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1} \\
 \tan \frac{\theta}{2} &= \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} \\
 \tan \frac{\theta}{2} &= \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} \\
 \tan \frac{\theta}{2} &= \tan \frac{\theta}{2} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$41. \quad 1 - 2 \sin^2 \theta = \cos 2\theta$$

$$1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2} = \cos A$$

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{2}$$

$$\sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

$$2 \cos^2 \theta - 1 = \cos 2\theta$$

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1 = \cos A$$

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1 + \cos A}{2}$$

$$\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

عوّض $\frac{A}{2}$ بدلاً من θ و A
بدلاً من 2θ .

حلّ لإيجاد $\sin \frac{A}{2}$

الجذر التربيعي لكل طرف.

أوجد $\cos \frac{A}{2}$

$2 \cos^2 \theta - 1 = \cos 2\theta$
متطابقة الزاوية المزدوجة

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1 = \cos A$$

عوّض $\frac{A}{2}$ بدلاً من θ و A
بدلاً من 2θ .

حلّ لإيجاد $\cos \frac{A}{2}$

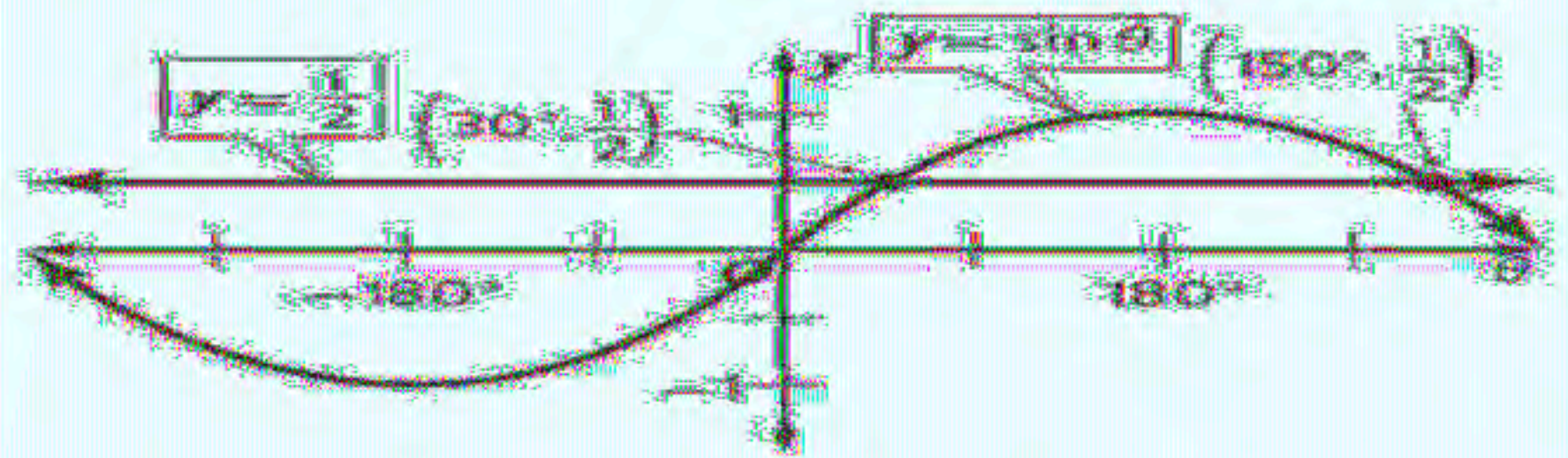
لجذر التربيعي لكل طرف.

س 5-12

58a.

θ	$\sin \theta$	θ	$\sin \theta$
0°	0	210°	$-\frac{1}{2}$
30°	$\frac{1}{2}$	225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	270°	-1
90°	1	300°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	315°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	330°	$-\frac{1}{2}$
150°	$\frac{1}{2}$	350°	0
180°	0		

يقع التمثيل البياني لـ $y = \sin \theta$ فوق التمثيل البياني
لـ $y = \frac{1}{2}$ بالنسبة لـ $30^\circ < \theta < 150^\circ$.



يقع التمثيل البياني لـ $y = \sin \theta$ فوق التمثيل البياني
لـ $y = \frac{1}{2}$ بالنسبة لـ $30^\circ < \theta < 150^\circ$. وفترة $\sin \theta$
تساوي $[-360^\circ, 360^\circ]$. إذا فحلول $\sin \theta = \frac{1}{2}$ هي
 $30^\circ + k \cdot 360^\circ < \theta < 150^\circ + k \cdot 360^\circ$

تدريب على الاختبار

58d.

30.

31.

32.

33.

34.

35.

36a.

36b.

36c.

$$14. \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{2}{1} \cos \theta + \cot \theta$$

$$\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \cdot \frac{1 - \cos \theta}{1 - \cos \theta}$$

$$\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\sin \theta (1 - \cos \theta)}$$

$$\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta (1 - \cos \theta)}$$

$$\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \checkmark$$

$$16a. 18^2 = 9^2 + a^2; 324 = 81 + a^2; 243 = a^2; a = 9\sqrt{3}$$

$$16b. \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta;$$

$$\sin 2(30^\circ) = 2 \sin 30^\circ \cos 30^\circ;$$

$$\sin 60^\circ = 2 \left(\frac{9}{18} \right) \left(\frac{9\sqrt{3}}{18} \right) = \frac{162\sqrt{3}}{324} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\sin 60^\circ = 9 \frac{\sqrt{3}}{18} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$21. R = \frac{v^2}{g} \sin 2\theta; 25 = \frac{20^2}{9.8} \sin 2\theta; 0.6125 = \sin 2\theta; \theta \approx 18.9^\circ$$