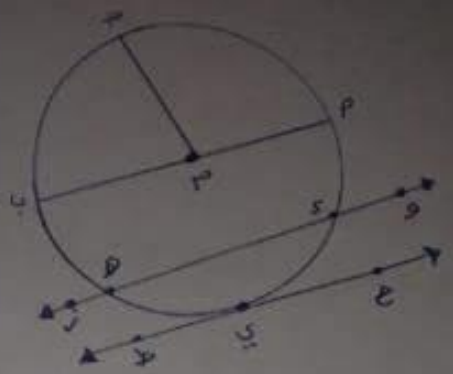
الدرس الاول :- اوتار الدائرة



تدريب (٧-١٠) :-
لمثل الشكل دائرة مركزها م
عين على هذه الدائرة :-
١) قطر ٢) ثلاثة انصاف اقطار
٣) وترين ٤) قاطعاً
٥) ثلاثة اقواس
٦) مماس ٧) نقطة التماس

الحل :-
١) $\overline{أب}$
٢) $\overline{مجـ}$ ، $\overline{مء}$ ، $\overline{مب}$
٣) $\overline{دهـ}$ ، $\overline{أب}$.
٤) $\overline{وز}$
٥) $\overset{\frown}{أجـ}$ ، $\overset{\frown}{جب}$ ، $\overset{\frown}{بء}$
٦) ح ط
٧) ي

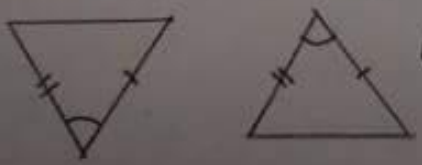
* نصف قطر الدائرة :- هي القطعة المستقيمة الواصلة بين مركز الدائرة ونقطة عليها .
* الوتر :- هي القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتين على الدائرة .
* القطر :- هي وتر الدائرة المار بمركزها وهو اطول وتر في الدائرة .
* القاطع :- هو المستقيم الذي يحتوي وتر في الدائرة .
* القوس :- هو جزء من الدائرة محصور بين نقطتين عليه

تذكر :- تطابق المثلثات .

*يتطابق المثلثات في الحالات الاتية

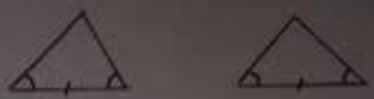
١) (ضلع ، ضلع ، ضلع)
اذا تساوت ثلاث اضلاع متناظرة .

٢) (ضلع ، زاوية ، ضلع)
ضلعين وزاوية محصورة .

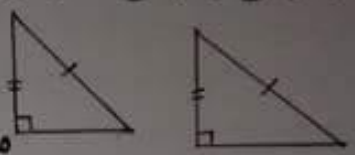


محمود الزعبي 0786656300

٣ (زاوية ، ضلع ، زاوية)
زاويتين وضلع محصور .



٤ حالة خاصة
(ضلع ، ضلع ، زاوية قائمة)



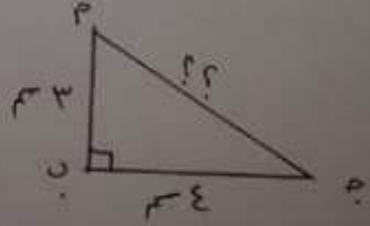
محمود الزعبي 0786656300

تذكر :-
في مثلث متساوي الساقين العمود النازل من راس المثلث على القاعدة فانة ينصف القاعدة وينصف زاوية الراس .

تذكر :- نظرية فيثاغورس .
في المثلث قائم الزاوية
مربع الوتر يساوي مجموع مربعين الضلعين الاخرين .

$$(أجـ)^2 = (أب)^2 + (ب جـ)^2$$

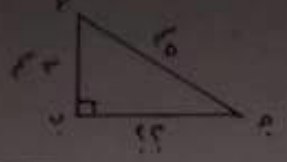
مثال



الحل

$$أجـ = \sqrt{٤^2 + ٣^2}$$
$$= \sqrt{١٦ + ٩} = \sqrt{٢٥} = ٥$$

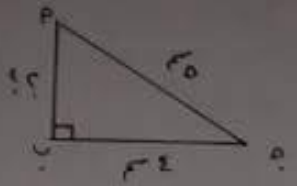
مثال ١ .



الحل

$$ب أ = \sqrt{٥^2 - ٣^2} = \sqrt{٢٥ - ٩} = \sqrt{١٦} = ٤$$

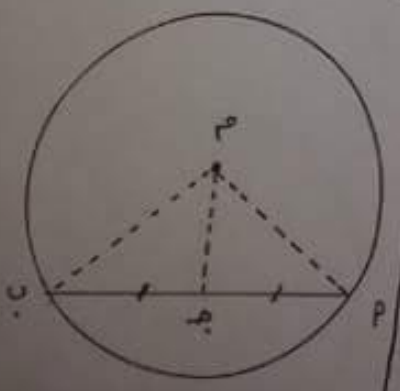
مثال



$$أب = \sqrt{٥^2 - ٤^2} = \sqrt{٢٥ - ١٦} = \sqrt{٩} = ٣$$

مبرهنة (٤-١) :-
١) العمود النازل من مركز الدائرة على اي وتر فيها ، ينصفه .
٢) المستقيم الواصل بين مركز الدائرة ومنتصف وتر فيها غير مار بالمركز يعامد الوتر .
٣) العمود المقام من منتصفها الوتر في الدائرة يمر بالمركز .

اثبات (١) :-



① نرسم دائرة مركزها م
② نرسم $\overline{أب}$ وتر .
③ ونرسم قطعة مستقيمة $\overline{م جـ}$ تعامد الوتر $\overline{أب}$ في النقطة جـ

← المطلوب
اثبات ان $\overline{م جـ}$ ينصف الوتر $\overline{أب}$
* نصل بين $\overline{م أ}$ ، $\overline{م ب}$.

يوجد مثلثان

$\triangle$ م ه ب ، $\triangle$ م ه ب

م ب = م ب ← (انصاف اقطار)

$\measuredangle$ م ه ب = $\measuredangle$ م ه ب ← (لانها الزاوية القائمة يكون زاوية قائمة)

م ه = م ه ← (مشترك)

اذن يتطابق المثلثان

(ضلع ، ضلع ، زاوية قائمة)

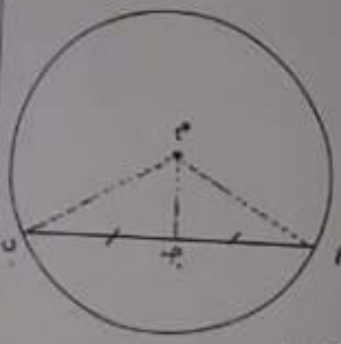
$\therefore$ ينتج ان $\triangle$ م ه ب $\cong$ $\triangle$ م ه ب

اذن م ه = ه ب وهو المطلوب

تدريب (٢-٢) :-

برهن ان المستقيم الواصل بين مركز الدائرة ومنتصف وتر فيها غير مار بالمركز يعامد الوتر .

الاثبات :-



نرسم دائرة مركزها م

ونرسم مستقيم م ه على الوتر م ب وينصفه

م ه = ه ب ← بالفرض

م م = م ب ← انصاف اقطار

م ه ضلع مشترك

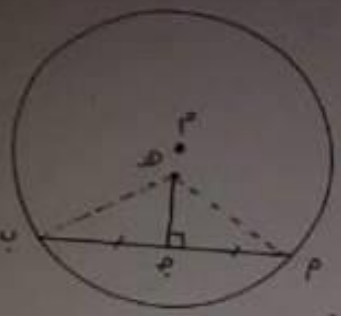
$\therefore$ $\triangle$ م م ه $\cong$ $\triangle$ م ه ب (ضلع ، ضلع ، ضلع)

اذن $\measuredangle$ م ه م = $\measuredangle$ م ه ب = ٩٠

لانه مجموع الزاويتين يساوي ١٨٠ على خط مستقيم

*** برهن ان العمود المقام من منتصف الوتر في الدائرة يمر بمركزها .**

الاثبات :



نفرض ان العمود لا يمر بالمركز م بل يمر بالنقطة ه .

م ه = ه ب ← بالمعطى .

ه ه ← ضلع مشترك

$\measuredangle$ م ه ه = $\measuredangle$ ب ه ه ← لانها تحوز مقام منتصف الوتر = ٩٠

$\therefore$ يتطابق المثلثان

$\triangle$ م ه ه $\cong$ $\triangle$ ب ه ه

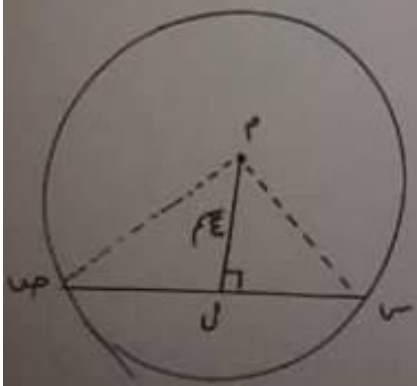
(ضلع ، زاوية ، ضلع) .

$\therefore$ م ه = ه ب فـ م م = ب م انصاف اقطار

اذن النقطة ه على امتداد م .

مثال :- $\overline{\text{س ص}}$ وتر في دائرة مركزها م وطول قطرها (١٠) سم ، النقطة ل $\in$ $\overline{\text{م ص}}$ تعامد الوتر $\overline{\text{س ص}}$ في النقطة ل اذا كان م ل = ٤ سم جد $\overline{\text{س ص}}$ ؟

الحل



محمود الزعبي (0786656300)

الحل

$\overline{أ ب} = \overline{ل ص}$ ، $\overline{م س} \perp \overline{ل ص}$

متطابقتين ← (وتر ، ضلع ، زاوية قائمة)

$ل ص = \sqrt{٥^٢ - ٤^٢}$ قانون فيثاغورس

$= \sqrt{٢٥ - ١٦} = \sqrt{٩} = ٣$

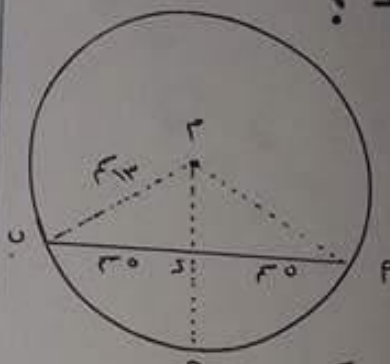
∵ ان المثلثان متطابقين فانه

$س ص = س ل + ل ص$

$= ٣ + ٣ = ٦$ سم

تدريب (٣-٤) : $\overline{أ ب}$ وتر في دائرة مركزها (م) ، وطول نصف قطرها فيها (١٣) سم $\overline{م ج}$ نصف قطر في الدائرة وينصف الوتر $\overline{أ ب}$ ، في د فاذا كان $أ ب = ١٠$ سم فجد (د ج) ؟

الحل



$أ د = د ب = ٥$ سم

$م ب = ١٣$ سم لانها نصف قطر.

$د م = \sqrt{١٣^٢ - ٥^٢} = \sqrt{١٦٩ - ٢٥}$

$= \sqrt{١٤٤} = ١٢$ سم

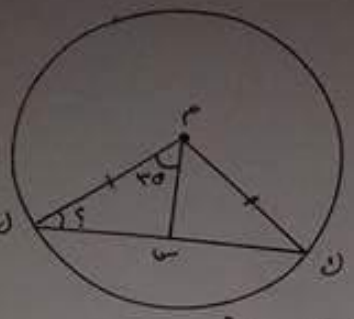
$د ج = ج م - د م$

$= ١٣ - ١٢$

$= ١$ سم

مثال : $\overline{ك ل}$ وتر في دائرة مركزها م النقطة س منتصف الوتر $\overline{ك ل}$ ، $ق(\angle ك م س) = ٣٥°$ ، جد $ق(\angle م ل س)$ ؟

الحل



∵ ان $م ل = م ك$ انصاف اقطار

فان $\overline{م س}$ عمودي على الوتر $\overline{ك ل}$

$\therefore ق(\angle م س ل) = ٩٠°$

مجموع قياس زوايا المثلث $= ١٨٠°$

$ق(\angle م ل س) = ١٨٠ - (٩٠ + ٣٥)$

$= ٥٥$

تدريب (٤-٣) : $\overline{س ص}$ وتر في دائرة مركزها م ، وطول نصف قطرها (٥) سم ، النقطة م منتصف $\overline{س ص}$ اقيم عمود $\overline{م ب}$ على $\overline{س ص}$ ، فقطع الدائرة في (ب) على القوس الاصغر $\overset{\frown}{س ص}$ ، فاذا كان $س ص = ٨$ سم اوجد $\overline{م ب}$ ؟

الحل

$م م = \sqrt{٥^٢ - ٤^٢}$

$= \sqrt{٢٥ - ١٦}$

$= \sqrt{٩}$

$= ٣$ سم

$م ب = ٥$ سم لانها نصف قطر

$م ب = م ب - م م$

$= ٥ - ٣ = ٢$ سم

مثال :- يمثل الشكل المجاور مدينة دائرية طول نصف قطرها (٢٠) كم اراد ماهر تقوية باضافة القطعتين المتوازيتين $\overline{أب}$ ، $\overline{جـ د}$ ، بحيث تبعد كل منهما عن المركز ١٢ سم ، ساعد ماهر في ايجاد طول كل منهما؟

الحل

باستخدام نظرية فيثاغورس.

$$\text{ب و} = \sqrt{(\text{٢٠})^{٢} - (\text{١٢})^{٢}} = \sqrt{٤٠٠ - ١٤٤}$$

$$= \sqrt{٢٥٦} = ١٦$$

$$\text{أ ب} = \text{أ و} + \text{و ب}$$

$$= ١٦ + ١٦ = ٣٢ \text{ كم}$$

ايضاً $\text{جـ د} = ٣٢$ سم .

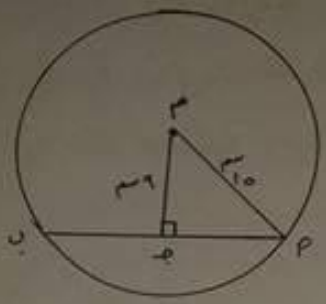
تمارين ومسائل

س :- في الشكل دائرة مركزها م

$\overline{مجـ} \perp \overline{أب}$ ، $\text{م أ} = ١٥$ سم

$\text{م جـ} = ٩$ سم ، جد أ ب .

الحل :-



$$\text{جـ أ} = \sqrt{(\text{١٥})^{٢} - (\text{٩})^{٢}}$$

$$= \sqrt{٢٢٥ - ٨١}$$

$$= \sqrt{١٤٤}$$

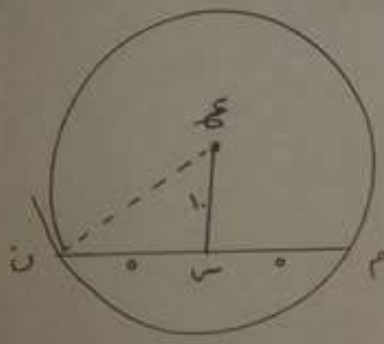
$$= ١٢$$

$$\text{أ ب} = \text{أ جـ} + \text{جـ ب}$$

$$= ١٢ + ١٢ = ٢٤ \text{ سم} .$$

س $\overline{مـن}$ وتر في دائرة مركزها ع وطوله (١٠) سم النقطة س منتصف $\overline{مـن}$ فاذا كان ع س = ٣ سم فجد طول نصف قطر الدائرة ؟

الحل



$$\text{ع ن} = \sqrt{(\text{٣})^{٢} + (\text{٥})^{٢}}$$

$$= \sqrt{٩ + ٢٥}$$

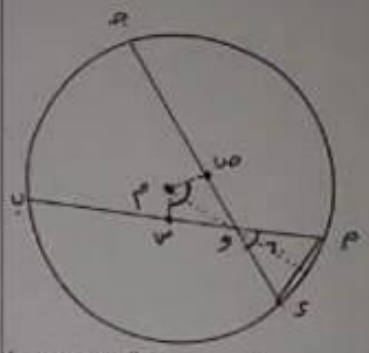
$$= \sqrt{٣٤}$$

$$= \sqrt{٥ \times ٥}$$

$$= ٥\sqrt{٥} \text{ سم}$$

س٣ $\overline{أب}$ ، $\overline{جـ د}$ وتران في دائره مركزها م ، غير ماريين بالمركز ويتقاطعان في النقطة و اذا كان ∠أ و د = ٦٠° ، وكانت م تقع داخل الزاوية الحادة جـ و ب ، س منتصف $\overline{أب}$ ص منتصف $\overline{جـ د}$ ، اثبت ان ∠ س م ص = ١٢٠° ؟

الحل

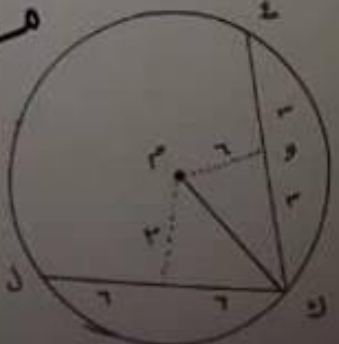


∠ و أ م = ٩٠
∠ و س م = ٩٠
∠ ص و س = ٦٠ (لانهما متقابلة بالراس)
∠ م = ١٨٠ − ٦٠ = ١٢٠ °

(∠ أ ، ∠ م زاويتان في الشكل الرباعي المتقابلتين مجموعهما ١٨٠°)

س٤ :- $\overline{ك ل}$ وتر في دائرة طوله (١٢)سم ويبعد عن مركزها (٣)سم ، $\overline{ك ع}$ وتر آخر في الدائرة نفسها ، يبعد عن مركزها (٦)سم ، جد ك ع ؟

الحل :-



م ك = $\sqrt{٣٠+٦^{٢}}$ = $\sqrt{٩٠+٣٦}$ = $\sqrt{١٢٦}$

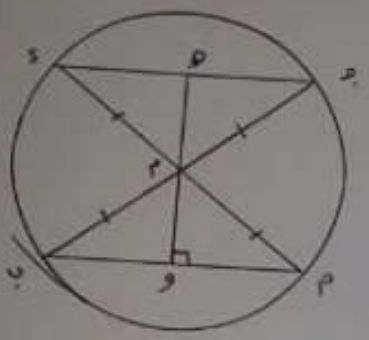
ك و = $\sqrt{٣٠-١٢٦}$ = $\sqrt{٣٦-١٢٦}$ = $\sqrt{٩}$ = ٣

ك ع = ك و + و ع

= ٣ + ٣ = ٦ سم .

س :- $\overline{أب}$ ، $\overline{جـ د}$ وتران في دائرة مركزها م ، ومتساويان في طول اثبت ان لهما البعد نفسه عن م .

الحل



أ ب = جـ د

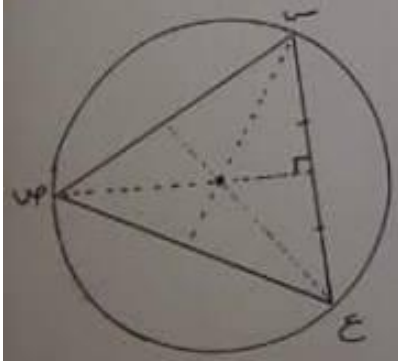
Δ م جـ د ≅ Δ م أ ب

(ضلع ، ضلع ، ضلع)

م و = م هـ .

س٦ :- اعتماداً على البرهنة (٦-١) كيف تحدد مركز دائرة تمر برؤوس المثلث س ص ع ؟

الحل



نعمل على اقامة عمود من كل وتر .

العمود المقام منه منتصف وتر في الدائرة يمر بمركزها .

محمود الزعبي 0786656300

س٤: نافذة مسجد مصممه على شكل قوس دائرة، طول قطرها (٥) أمتار فاذا كان ارتفاع قوس النافذة فوق منتصف قاعدتها يساوي (١,٥) متر، فجد عرض قاعدة النافذه ؟

الحل

$أ ب = \sqrt{(٢,٥)^٢ - (١)^٢}$

$= \sqrt{٦,٢٥ - ١}$

$= \sqrt{٥,٢٥}$

العرض = $أ ب + ب ب$

$= \sqrt{٥,٢٥} + \sqrt{٥,٢٥}$

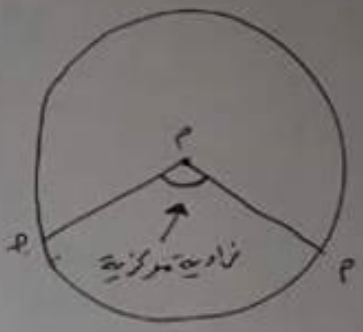
$= ٢ \sqrt{٥,٢٥}$ سم

محمود الزعبي 0786656300

الدرس الثاني: الزاوية المركزية والزاوية المحيطة

الزاوية المركزية:

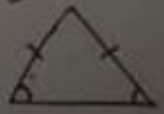
هي الزاوية التي يقع راسها في مركز الدائرة و ضلعاها يحتويان نصفا قطار .



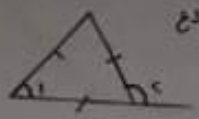
الزاوية المحيطية:

هي الزاوية التي يقع راسها على محيط الدائرة ، وضلعاها يحتويان وترين في الدائرة .

تذكر : زوايا القاعدة في المثلث متساوي الساقين تكون متساوية

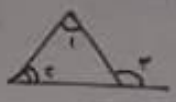


تذكر : ① الزاوية الخارجية للمثلث تساوي مجموع الزاويتين الداخليتين الاصغر



$\angle ١ = \angle ٢ + \angle ٣$

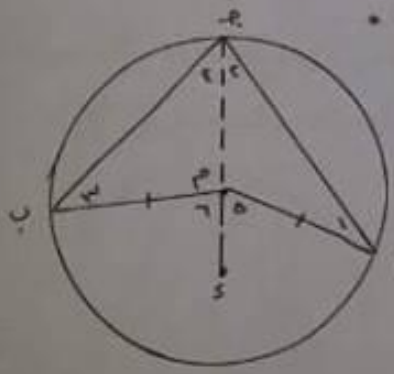
② الزاوية الخارجية للمثلث تساوي مجموع الزاويتين الداخليتين لأي مثلث



$\angle ٣ = \angle ١ + \angle ٢$

مبرهنة (٢-٢):

قياس الزاوية المركزية يساوي مثلي قياس الزاوية المحيطية المرسومة على القوس نفسه .



الاثبات :

$\angle$ أ م ب زاوية مركزية.

$\angle$ أ ج ب زاوية محيطية.

مرسومتان على القوس نفسه $\overset{\frown}{أب}$.

المطلوب : اثبات ان $\angle$ أ م ب = ٢ $\angle$ أ ج ب

البرهان : نصل ج م ونمده الى د .

المثلث أ م ج متطابق الضلعين ، فيه أ م = م ج

$\angle ١ = \angle ٢$ ← (زاويتا القاعدة في المثلث متطابق الضلعين)

$\angle ٥$ ← (زاوية خارجية للمثلث أ م ج)

$\angle ٥ = \angle ١ + \angle ٢$

$\angle ٥ = ٢ \angle ٢$

بالمثل $\angle ٤ = ٢ \angle ٣$ ← (لانه في مثلث متطابق الضلعين)

$\angle ٦ = \angle ٤ + \angle ٣$

$\angle ٦ = ٢ \angle ٢$

محمود الزعبي 0786656300

$\angle م ب ج = \frac{1}{2}$ ق $(\overset{\frown}{أ ج})$

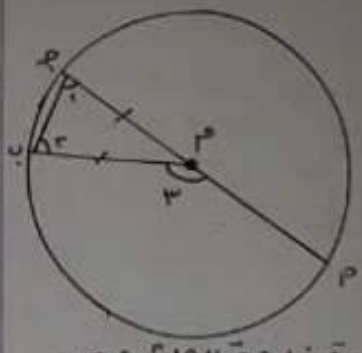
$\angle أ م ب = \frac{1}{2}$ ق $(\overset{\frown}{أ ب})$

$\angle أ ج ب = \frac{1}{2}$ ق $(\overset{\frown}{أ ب})$

$\therefore \angle أ م ب = 2 \angle أ ج ب$

تدريب (٢-٦) برهن مبرهنه (٢-٢) اذا كان احد الضلعين الزاوية المحيطية قطراً في الدائره.

الحل :-



$\angle أ م ب$ زاوية خارجة للمثلث م ج ب

(م ج = م ب) لانها انصاف اقطار

$\overline{أ ج}$ قطر في الدائرة.

$\angle أ م ب$ زاوية مركزية.

$\angle أ ج ب$ زاوية محيطية.

مرسومتان على القوس $\overset{\frown}{أ ب}$.

$\angle ١ = \angle ٢$ ← (زوايا قاعدة مثلث متساوي الضلعين)

$\angle ٣ = \angle ١ + \angle ٢$ ← زاوية خارجية للمثلث متساوي الضلعين)

اذن $\angle ٣ = \angle ١$ وهو المطلوب

$\therefore \angle أ م ب = \angle أ ج ب$

تدريب (٢-٨) :-

دائرة مركزها م جد $\angle أ م ب$

نصل م ج

$\angle أ ج م = \angle ج أ م = ٣٠$

لانه $\triangle أ م ج$ متطابق الضلعين

(م ج = م أ) ← لانها انصاف اقطار في دائره.

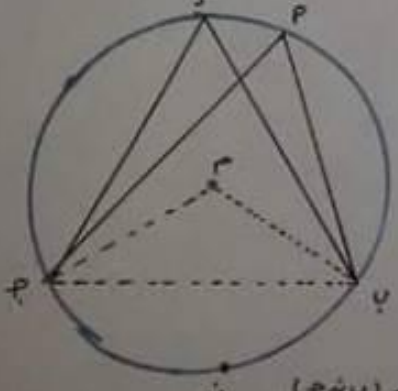
$\angle ب ج م = \angle ج ب م = ١٠$

$\triangle ب ج م$ متطابق الضلعين (م ج = م ب)

- $\angle أ ج ب = \angle أ ج م + \angle ب ج م = ٣٠ + ١٠ = ٤٠$
- $\angle أ م ب = ٢ \angle أ ج ب = ٢ \times ٤٠ = ٨٠$

لانها زاوية مركزية ومحيطية على القوس نفسه $\overset{\frown}{أ ب}$.

مبرهنة :- الزاويتان المحيطيتان المرسومتان على القوس نفسه متساويتان في القياس.



تدريب (٢-٩).

المعطيات :-

- دائرة مركزها م.
- الزاويتان المحيطيتان
- $\angle ب أ ج$ ، $\angle ب د ج$

مرسومتان على القوس نفسه ($\overset{\frown}{ب هـ ج}$)

المطلوب: اثبات ان $\angle ب أ ج = \angle ب د ج$

البرهان :-

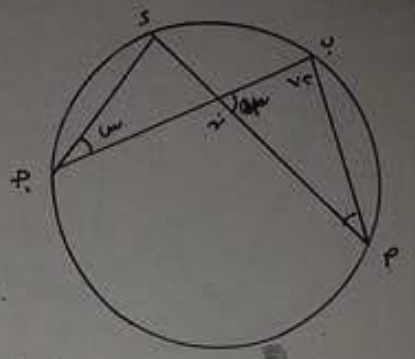
- نصل م ب ، م ج.
- $\angle ب أ ج = \frac{1}{2} \angle ب م ج$ .... (١) محيطية ومركزية على القوس نفسه ($\overset{\frown}{ب هـ ج}$)
- $\angle ب د ج = \frac{1}{2} \angle ب م ج$ .... (٢)

من (١) و (٢)

$\angle ب أ ج = \angle ب د ج$ #

محمود الزعبي 0786656300

مثال : في الشكل المجاور
جد قيمة س ؟



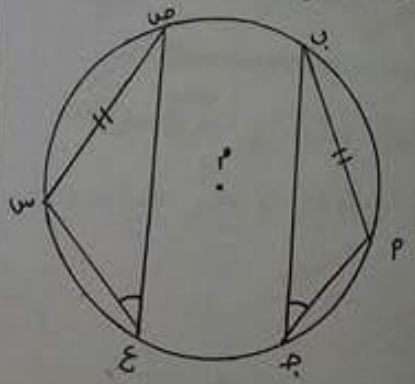
الحل
$\measuredangle$ ب ج ء = $\measuredangle$ ب ا ء لانهما زاويتان محيطية على القوس نفسه $\overset{\frown}{ب ء}$.

س = ١٨٠ − (٥ه + ٣ه)

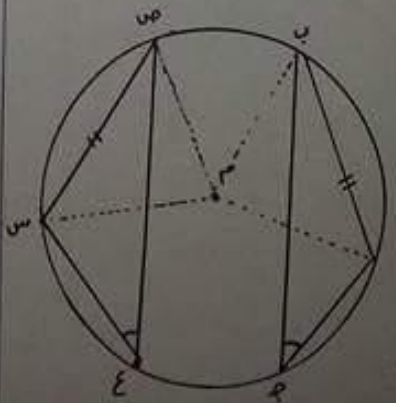
= ١٨٠ − ١٢٥

س = ٥٥

تدريب (٢-١٠)
اثبت ان $\measuredangle$ ا ج ب = $\measuredangle$ س ع ص



الحل



- نصل $\overline{م ا}$ ، $\overline{م ب}$
$\overline{م ص}$ ، $\overline{م س}$
- نبحث في تطابق المثلثين
$\triangle$ م ا ب ، $\triangle$ م س ص

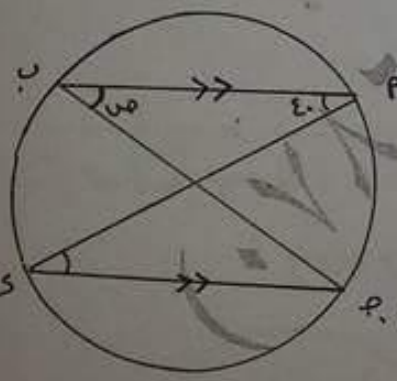
- م ا = م س
م ب = م ص
ا ب = س ص
← انصاف اقطار

- ينطبق المثلثان بالبرهنة اضلاع .
- $\measuredangle$ ا م ب = $\measuredangle$ س م ص .... (١)
- $\measuredangle$ ا ج ب = $\frac{١}{٢}$ $\measuredangle$ ا م ب .... (٢) ← محيطية ومركزية على الوتر $\overline{ا ب}$.
- $\measuredangle$ س ع ص = $\frac{١}{٢}$ $\measuredangle$ س م ص .... (٣) ← محيطية ومركزية على الوتر $\overset{\frown}{ص س}$

من (١) ، (٢) ، (٣)
ينتج ان $\measuredangle$ ا ج ب = $\measuredangle$ س ع ص #

بصورة عامة :
الزوايا المحيطية المرسومة على اوتار متطابقة (او اقواس متطابقة)
تتساوى في القياس .

في الشكل $\overline{ا ب}$ // $\overline{ج د}$ جد قيمة ص ؟



الحل

$\measuredangle$ ا ج د = $\measuredangle$ ج ا ب

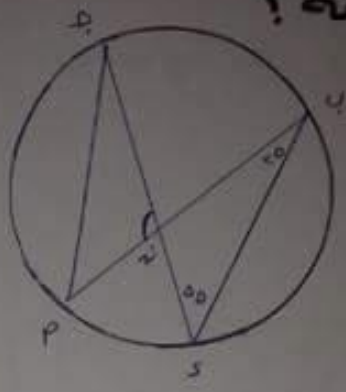
= ٤٠

$\measuredangle$ ا ج د = $\measuredangle$ ا ه ب

ص = ٤٠

تدريب (٢-١١)

قال عبد الرحمن ان ∠ جـ نـ م = ٧٠ هل توافقة ؟



الحل

لا اوافقة الراي :

لانه ∠ نـ نـ = ١٠٠°

∠ ب نـ د = ١٨٠ - (٥٥ + ٢٥)

= ١٨٠ - ٨٠ = ١٠٠

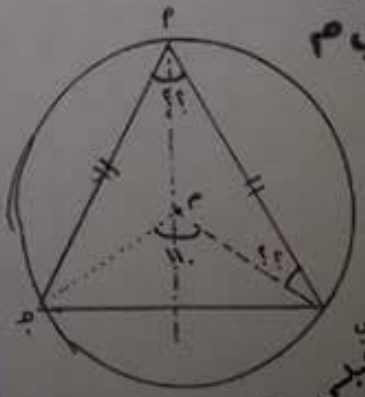
∠ جـ نـ م = ١٠٠ لانه متقابلة بالراس مع الزاوية ∠ ب نـ د .

تمارين ومسائل

س١ :- الشكل يمثل دائرة مركزها م ، م ب = م جـ ، جد قياسا كل من :-

أ) ∠ ب م جـ .

ب) ∠ م ب م



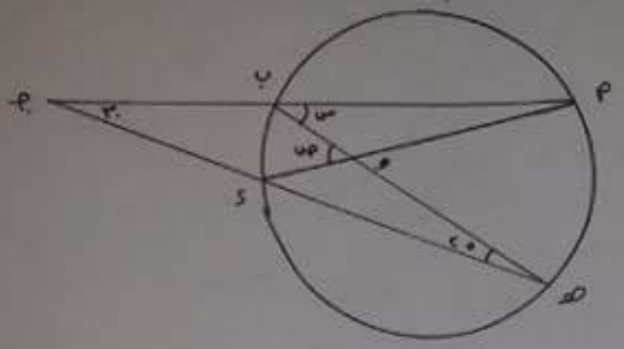
الحل

أ) ∠ ب م جـ = $\frac{1}{2}$ ∠ ب م جـ = $\frac{1}{2}$ × ٨٤ = ٤٢° محيطية ومركزية على الوتر م جـ

ب) بما ان Δ م ب م متساوي الساقين فان الزوايا القاعدة متساوية

∠ م ب م = $\frac{٥٥}{٢}$ = ٢٧,٥°

س٢ جد قيمة كل من س ، ص .



الحل

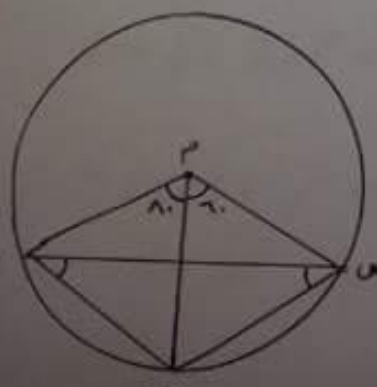
س = ∠ م ب هـ = ٥٥ زاوية خارجية للمثلث ب هـ جـ

∠ د هـ = ∠ ب هـ د = ٤٠° محيطيتان على الوتر $\overline{د ب}$.

∠ ب و د = ٨٠ زاوية خارجية للمثلث م و ب .

∴ س = ٥٥ ، ص = ٨٠

س٣ دائرة مركزها م ، اوجد قياسات زوايا المثلث س ص ع ؟



الحل

• ∠ ع = $\frac{1}{2}$ ∠ ع م ص = $\frac{1}{2}$ × ٨٠

= ٤٠

محيطية ومركزية على الوتر ($\overline{ع ص}$)

• ∠ س = $\frac{1}{2}$ ∠ س م ص = ٣٠

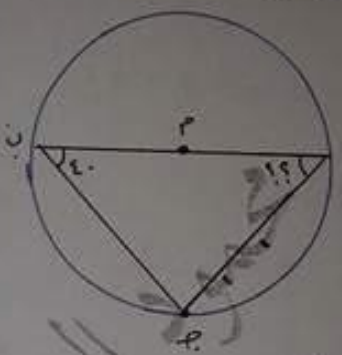
محيطية ومركزية على الوتر ($\overline{س ص}$)

• ∠ س ص ع = ١٨٠ - (٤٠ + ٣٠) = ١١٠

محمود الزغبي 0786656300

س ١ : $\overline{أب}$ قطر في دائرة ، مركزها م ، جـ نقطة على الدائرة بحيث ان :-
* أ ب جـ = ٤٠ ، جد قياس * ب أ جـ ؟

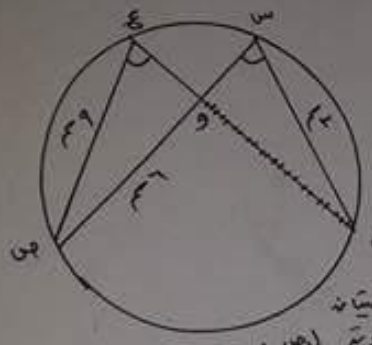
الحل



* أ جـ ب = $\frac{1}{2}$ * أ م ب
= $\frac{1}{2}$ × ١٨٠
= ٩٠ محيطية ومركزية على الوتر أ ب

* ب أ جـ = ١٨٠ - (٤٠ + ٩٠) .
= ١٨٠ - ١٣٠
= ٥٠°

س ٢ :- $\overline{س ص}$ ، $\overline{ع ل}$ وتران متطابقين داخل دائرة في نقطة و بحيث ان ع و = ٩ سم ، ص و = ٦ سم
س ل = ٣ سم ، جد طول ل و ؟



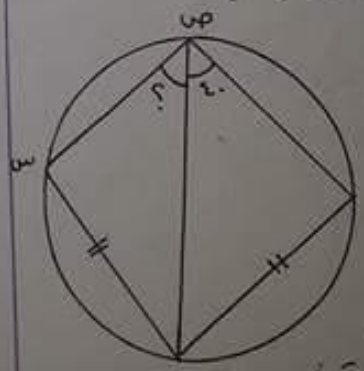
الحل
في المثلثان (و س ل ، و ع ص)
* س = * ع ← محيطيتان على الوتر ل ص .
* ل = * ص ← " " " " .
* س و ل = * ع و ص بالتقابل بالرأس .
بتشابه المثلثان بثلاثة زوايا وينتج ان

$\frac{و س}{و ع} = \frac{و ل}{و ص} = \frac{س ل}{ع ص}$

$\frac{و ل}{٦} = \frac{٣}{٩}$ ← و ل = ٢ سم

س ٣ في الشكل أ ب = أ س ، جد * س ص ب ؟

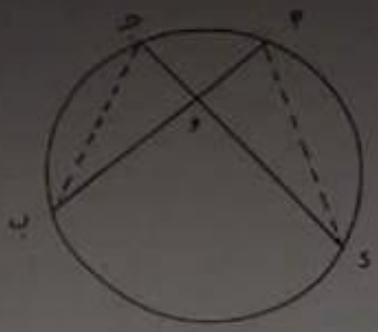
الحل



* أ ص س
= * أ ص ب = ٤٠
محيطيتان كما وتران متطابقين او متساويين
∴ * س ص ب = ٨٠°

س ٤ :- $\overline{أ ب}$ ، $\overline{جـ د}$ وتران متقاطعين داخل دائرة في النقطة و :-
أ) اثبت ان و أ × و ب = و جـ × و د
ب) اذا كان و أ = ٤ سم ، و ب = ٦ سم
و د = ١٢ سم ، جد كمية كل من و جـ ، جـ د ؟
ج) اذا كان و أ = ٣ سم ، و ب = ٦ سم
جـ د = ١١ سم ، جد كل من و جـ ، و د ؟

الحل ← ← ←



(أ) ∠أ = ∠ج محيطيان على الوتر $\overline{ب د}$

∠د = ∠ب محيطيان على الوتر $\overline{أ ج}$

∠أ و د = ∠ج و ب بالتقابل بالرأس

يتشابه المثلثان بثلاثة زوايا وينتج ان

$$\frac{و أ}{و ج} = \frac{و د}{و ب} = \frac{أ د}{ج ب}$$

$$و أ \times و ب = و ج \times و د$$

(ب) من الفرع (أ)

$$\frac{و أ}{و ج} = \frac{و د}{و ب} = \frac{أ د}{ج ب}$$

$$\frac{٤}{و ج} = \frac{١٢}{٦} \leftarrow و ج = ٢ أ$$

$$ج د = ٢٠ و + و د = ١٤ سم$$

(ج) نفرض طول $\overline{ج و} = س$

اذن $و د = ١١ - س$

محمود الزعبي (0786656300)

المماسات

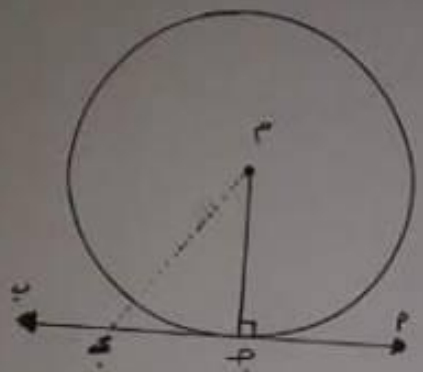
الدرس الاول: مماسات الدائرة .

تذكر: اقصر قطعة مستقيمة تصل بين نقطة ومستقيم هي القطعة العمودية عليه من تلك النقطة .

تذكر: اذا كانت النقطة م خارج الدائرة التي مركزها م وطول نصف قطرها ر فان م م > ر .

مبرهنه (٤-٢)

مماس الدائرة يكون عمودياً على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس .



المعطيات

م ب مماس للدائرة

م ف نصف قطر الدائرة

المطلوب

اثبات ان م ف ⊥ م ب

البرهان

لتكن د اي نقطة على المستقيم م ب غير النقطة ف ، ثم ارسم م د

د تقع خارج الدائرة .

م د > م ف

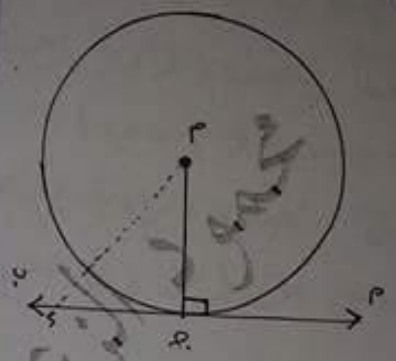
م ف اقصر قطعة تصل بين المركز والمماس

∴ م ف ⊥ م ب #

محمود الزعبي 0786656300

مبرهنة (٢-٥)

المستقيم الذي يعامد نصف قطر الدائرة عند نهايته على الدائرة يكون مماس لها .



المعطيات :-
م ب مستقيم يمس الدائرة
م ء نصف قطر للدائرة .
∡ م ء ب = ٩٠° اي عمودية

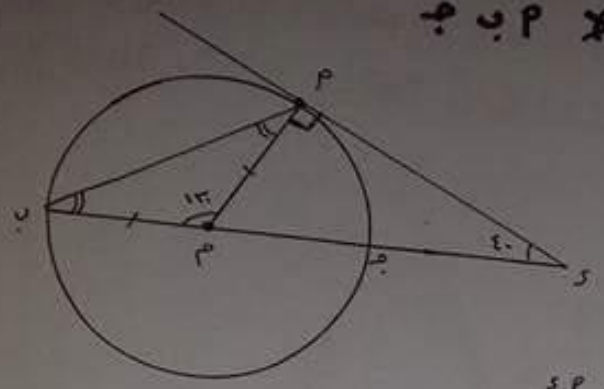
المطلوب : اثبت ان $\overleftrightarrow{م ب}$ مماس للدائرة

البرهان :-
لتكن ء اي نقطة على المستقيم $\overleftrightarrow{م ب}$ غير النقطة ء ، ثم ارسم $\overline{م ء}$
ء تقع خارج الدائرة
م ء > م ء

اذن $\overline{م ء}$ اقصر قطعة مستقيمة تصل بين المركز و المماس تكون عمودية عليها .

بما انه م ء عمودي اي ان
$\overleftrightarrow{م ب}$ مماس ∎

مثال :- دائرة مركزها م ، جد ∡ م ب ء

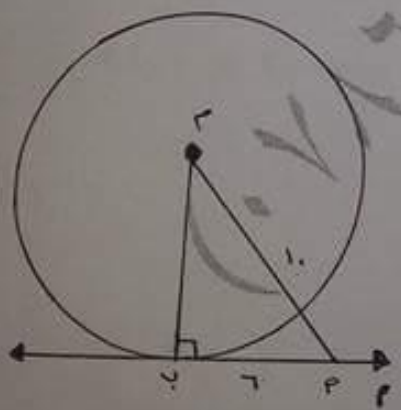


$\overline{ء م} \perp \overline{م م}$
∡ ء م م = ٩٠
∡ م ء م = ١٨٠ - (٩٠ + ٤٠)
= ١٨٠ - ١٣٠
= ٥٠
∡ م ب ء = $\frac{1}{2}$ ∡ م م ء

لانها زاوية خارجية للمثلث ء م م .

= ٢٥

تدريب :- م ب يمس دائرة مركزها م عند النقطة ب ، م ب = ٦ سم ، م م = ١٠ سم ، جد طول قطر الدائرة ؟



الحل
$\overline{م ب} \perp \overline{م ب}$
م ب = $\sqrt{١٠^{٢} - ٦^{٢}}$
= $\sqrt{١٠٠ - ٣٦}$
= $\sqrt{٦٤}$
= ٨ نصف قطر
∴ القطر = ٢ × ٨ = ١٦ سم

مبرهنة (٦-٧)

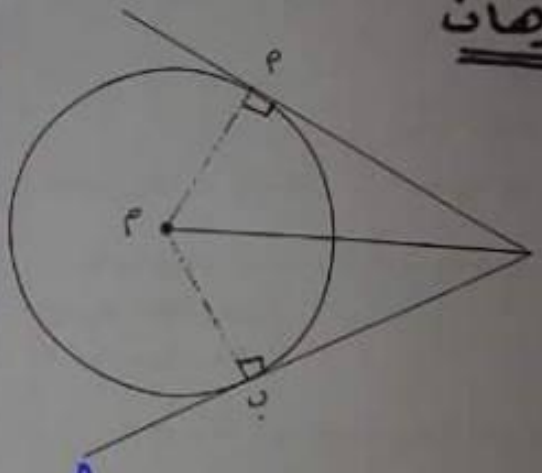
إذا رسم مماسان لدائرة مركزها (م) من نقطة خارجها مثل (ن) وكانت نقطتا التماس هما ا، ب فإن :

١) ن ا = ن ب

٢) $\overleftrightarrow{\text{ن م}}$ ينصف الزاوية بين المماسين (∠ ا ن ب).

٣) $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ ينصف الزاوية بين نصفي القطرين (∠ ا م ب)

البرهان



- ∠ م ا ن = ∠ م ب ن = ٩٠°
(مبرهنة نصف قطر عمودي على المماس)

- نبحث في تطابق المثلثين ن م ا ، ن م ب

∠ م ن ا = ∠ م ن ب = ٩٠°

م ن = م ن (ضلع مشترك)

م ا = م ب (انتهاء القطار في دائرة)

∴ يتطابق المثلثين (بضلع، ضلع، زاوية قائمة)

وينتج أن :

١) ن ا = ن ب

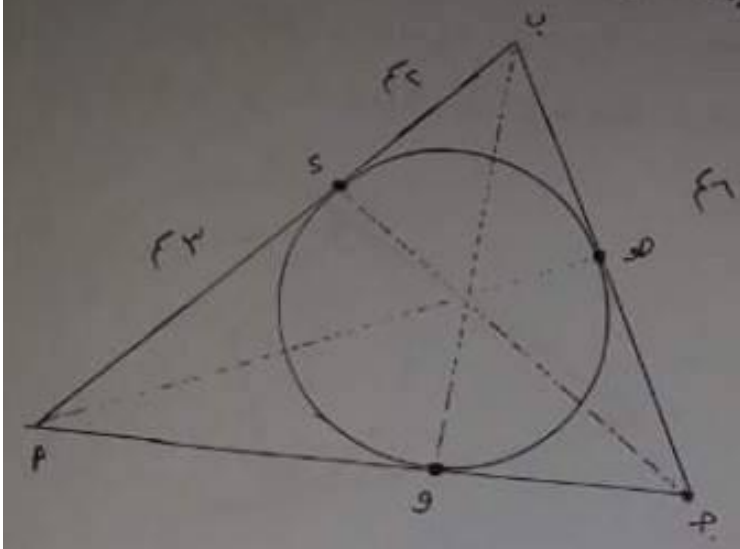
٢) ∠ ا ن م = ∠ ب ن م

٣) ∠ ا م ن = ∠ ن م ب #

مثال :- يمثل الشكل ا ب جـ الذي يمس الدائرة في النقطة s ، هـ ، و

ا s = ٣ سم ، ب s = ٢ سم ، ب جـ = ٦ سم

جـ أطوال أضلاع المثلث ا ب جـ ؟



الحل

ا و = ا s = ٣ سم

ب s = ب هـ = ٢ سم

ب جـ = ٦ سم

هـ جـ = ٦ - ٢ = ٤ سم

ا ب = ٥ سم ، ب جـ = ٦ سم ، ا جـ = ٧ سم

محمود الزعبي 0786656300

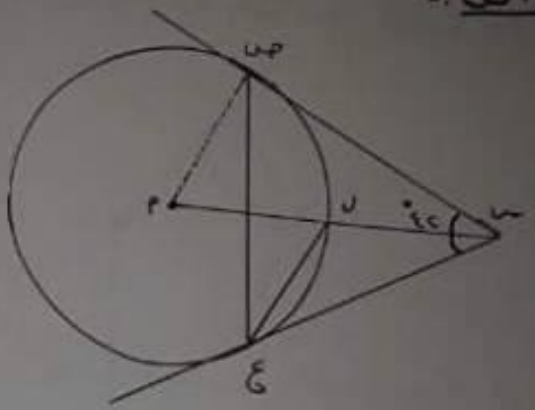
تدريب (٢-١٤)

$\overleftrightarrow{س ص}$ ، $\overleftrightarrow{س ع}$ مماسان للدائرة التي مركزها م عند النقطتين ص ، ع على التوالي

* ص س ع = ٤٢° ، جد

* ل ع ص ؟

الحل :-



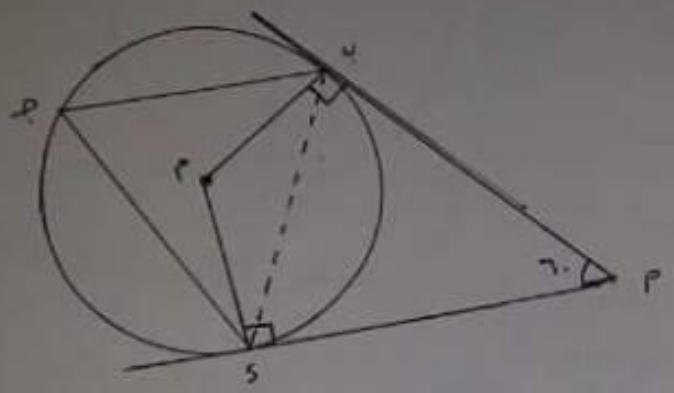
الحل

نصل $\overline{م ص}$

- ∡ ص س م = ∡ ع س م = ٢١ مبرهنة
- ∡ م ص س = ٩٠ ← $\overline{م ص} \perp \overleftrightarrow{س ص}$ (نصف القطر عمودي على المماس)
- ∡ س م ص = ١٨٠ - (٢١ + ٩٠) = ٦٩ ← (مجموع زوايا المثلث س م ص)
- ∡ ل ع ص = $\frac{1}{2}$ ∡ س م ص = ٣٤,٥° (محيطية ومركزية على الوتر ل ص)

تمارين ومسائل

س ١ :- يمثل الشكل دائرة مركزها م $\overleftrightarrow{ب P}$ ، $\overleftrightarrow{د P}$ مماسان للدائرة عند النقطتين ب ، د على التوالي ، بحيث ان ∡ ب P د = ٦٠° جد قياس كل من ∡ م ب د ، ∡ ب ج د ؟



الحل

- ∡ م ب P = ∡ م د P = ٩٠ ← ($\overline{م ب} \perp \overleftrightarrow{ب P}$ ، $\overline{م د} \perp \overleftrightarrow{د P}$)
- ∡ ب د P = $\frac{1}{2}$ (١٨٠ - ٦٠) = ٦٠ ← (مثلث P ب د متطابق الضلعين)

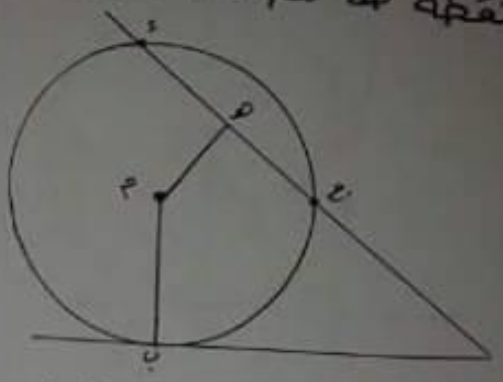
ومنه م ب = د P (المطلوب الاول)

- ∡ ب م د = ٣٦٠ - (٩٠ + ٩٠ + ٦٠) = ١٢٠ ← (مجموع زوايا الشكل الرباعي م ب P د)
- ∡ ب ج د = $\frac{1}{2}$ ∡ ب م د = ٦٠ ← (محيطية ومركزية على الوتر ب د)

المطلوب الثاني.

محمود الزعبي 0786656300

س٦: يمثل الشكل دائرة مركزها م
$\overleftrightarrow{أب}$ مماس لها عند النقطة ب
$\overleftrightarrow{جـ د}$ قاطع لها عند النقطتين جـ، د
النقطة هـ تقع على الوتر $\overline{جـ د}$
بحيث ان الزاويتين ب م هـ، ب م هـ
متكاملتان، اثبت ان
النقطة هـ تنصف الوتر $\overline{جـ د}$ ؟

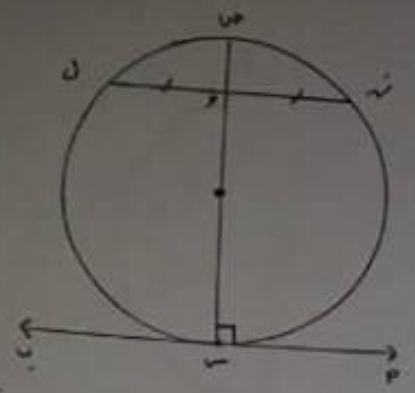


المعطيات: دائرة مركزها م، $\overleftrightarrow{أب}$ مماس
$\overleftrightarrow{جـ د}$ قاطع، الزاويتان ب م هـ
ب م هـ متكاملتان.

المطلوب: اثبات ان النقطة هـ تنصف
الوتر $\overline{جـ د}$

البرهان: في الشكل الرباعي م هـ م ب
الزاويتان ب م هـ، ب م هـ متكاملتين
اي ان $\measuredangle$ ب م هـ + $\measuredangle$ ب م هـ = ١٨٠°
منها نجد ان:
$\measuredangle$ م ب م + $\measuredangle$ م هـ م = ١٨٠° لكن
$\measuredangle$ م ب م = ٩٠° (نصف القطر عمودي على المماس
عند نقطة التماس)
$\measuredangle$ م هـ م = ٩٠°، وبما ان $\overline{م هـ} \perp \overline{جـ د}$
اذا النقطة هـ تنصف الوتر $\overline{جـ د}$
(العمود النازل من مركز الدائرة على
اي وتر فيها ينصفه)

س٧: $\overline{س ص}$ قطر في دائرة $\overleftrightarrow{أ ب}$ مماس
لها عند النقطة س، رسم الوتر
$\overline{ن ل} \parallel \overleftrightarrow{أ ب}$، اثبت ان
القطر $\overline{س ص}$ ينصف الوتر $\overline{ن ل}$ ؟



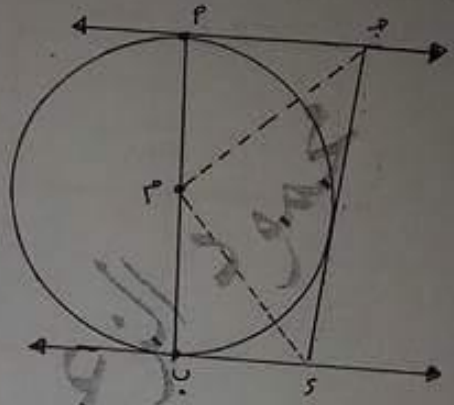
المطلوب: اثبات ان القطر $\overline{س ص}$ ينصف $\overline{ن ل}$

البرهان:
- $\overline{ص س} \perp \overleftrightarrow{أ ب}$ ← $\measuredangle$ ص س أ = ٩٠°
(القطر عمودي على المماس
عند نقطة التماس)
- $\overline{ن ل} \parallel \overleftrightarrow{أ ب}$ ← $\measuredangle$ و س أ + $\measuredangle$ ن و س = ١٨٠°
(زاويتان متحالفتان)
- لكن ← $\measuredangle$ و س أ = ٩٠°
← $\measuredangle$ ن و س = ٩٠°
← $\overline{س ص} \perp \overline{ن ل}$

اذا القطر $\overline{س ص}$ ينصف الوتر $\overline{ن ل}$ (برهنا)
وهو المطلوب.

محمود الزعبي 0786656300

س٤ : مستت دائرة مركزها م ، مستقيمين متوازيين في النقطة ب ، ء ، ثم رسم مماس ثالث للدائرة فقطع المماسين المتوازيين في النقطتين ج ، د ، اثبت ان الزاوية (ج م د) قائمة ؟



الحل

المعطيات :-

دائرة مركزها م $\overline{ج م} \parallel \overline{ء ب}$

$\overleftrightarrow{ج ء}$ ، $\overleftrightarrow{ء ب}$ مماسان للدائرة

$\overleftrightarrow{ج د}$ مماس للدائرة

$\overline{ب م}$ قطر في الدائرة .

المطلوب :- اثبات ان $\measuredangle ج م د = ٩٠$

البرهان :-

- $\overline{ج م}$ ينصف $\measuredangle ب ج ء$
- $\measuredangle ء ج م = \frac{1}{2} \measuredangle ء ج ب$ .... (١)
- $\overline{م ء}$ ينصف $\measuredangle ج ء ب$
- $\measuredangle ج ء م = \frac{1}{2} \measuredangle ج ء ب$ ..... (٢)
- لكن الزاويتان ($\measuredangle ج م ء$ ، $\measuredangle ج ء ب$) زاويتان متحالفتان مجموع قياسهما ١٨٠°)

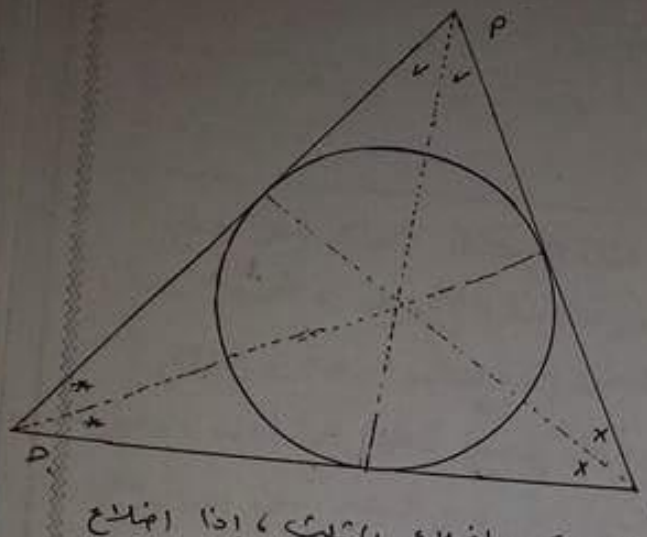
← (($\overleftrightarrow{ج م} \parallel \overleftrightarrow{ء ب}$) ، $\overline{ج ء}$ قاطع لهما))

$\measuredangle ء ج م + \measuredangle ج ء م = \frac{1}{2} (١٨٠) = ٩٠$

وبما ان مجموع قياس الزاويتين في المثلث ($ج م ء$) = ٩٠ اذن $\measuredangle ج م ء = ٩٠$ #

س٥ :- ارسم المثلث ب ج ء ، استخدم خصائص المماسات في تحديد مركز الدائرة التي تمس اضلاعه ؟

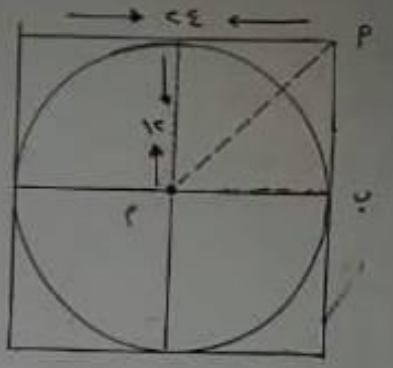
الحل :-



لما ان الدائرة تمس اضلاع المثلث ، إذا اضلاع المثلث للدائرة ، لذلك نقوم بتنصيف كل زوايا منه المثلث فتكون نقطة تلاقي المنصفات هي مركز الدائرة التي تمس اضلاعه .

« المستقيم العامل بين مركز الدائرة ونقطة تلاقي المماسين ينصف الزاوية المحصورة بين المماسين وينصف الزاوية المركزية المحصورة بين المنصفي القطرين المارين بنقطتي التماس » .

س وضع طبق دائري الشكل في صندوق قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها ٢٤ سم ، بحيث ان المحيط الطبق يمس جوانب الصندوق جد بعد مركز الطبق عن راس قاعدة الصندوق .



المطلوب : طول $\overline{أم}$

- نلاحظ ان نصف قطر الطبق يساوي نصف طول قاعدة الصندوق = ١٢ سم
- نطبق مبرهنة فيثاغورس

$$أم = \sqrt{١٢^{٢} + ١٢^{٢}} = \sqrt{١٤٤ + ١٤٤}$$

$$= \sqrt{٢٨٨} = ١٢\sqrt{٢}$$ سم

س عين الشكل سلماً طوله ١٣ م ، يرتكز بطرفه السفلي على ارض افقية ويرتكن طرفه العلوي على قبه اسمنتية على شكل نصف كره ، بحيث يبعد مركز الكره (١٣)م عن طرف السلم السفلي ، جد طول نصف قطر القبة ؟

الحل

محمود الزعبي

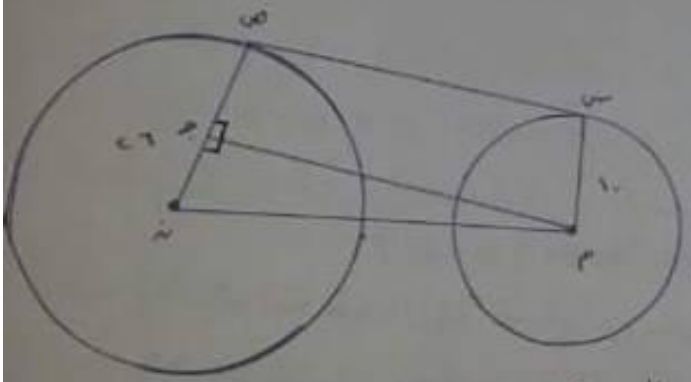
0786656300

نطبق فيثاغورس :

$$أ ب = \sqrt{١٣^{٢} - ١٢^{٢}} = \sqrt{١٦٩ - ١٤٤}$$

$$= \sqrt{٢٥} = ٥$$ م

س عين الشكل حمام يمد على دولابين دائريين ، طول نصف قطر الدولاب الاصغر (١٠)سم ، وطول نصف قطر الدولاب الاكبر (٢٦) سم ، والبعد بين مركزيهما (٥٦)سم ، جد طول الجزء المستقيم من الحزام بين النقطتين س ، ص ؟



الحل نرسم عمود $\overline{م ج}$ على $\overline{ن ص}$

ينتج لدينا مستطيل س م ج ص

- $س ص = م ج$

$ن ج = ص ن - ص ج$

$= ٢٦ - ١٠ = ١٦$

نطبق فيثاغورس

$$م ج = \sqrt{٥٦^{٢} - ١٦^{٢}} = \sqrt{٣١٣٦ - ٢٥٦}$$

$$= \sqrt{٢٨٨٠} = ٢٤\sqrt{٥}$$

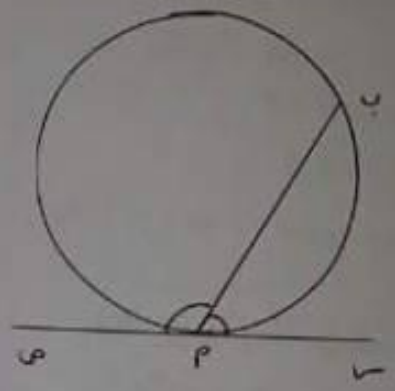
لكن $م ج = س ص$ اذن طول $س ص = ٢٤\sqrt{٥}$

الدرس الثاني :- الزاوية المماسية

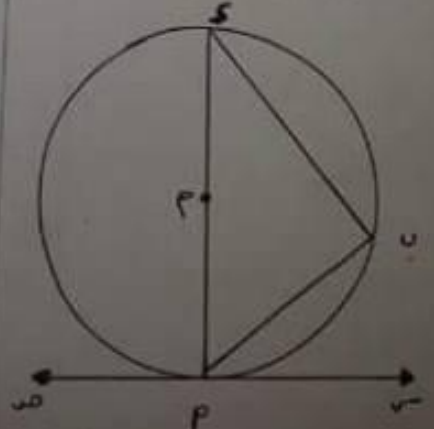
الزاوية المماسية :-

هي الزاوية المحصورة بين مماس الدائرة وأي وتر فيها ما بنقطة التماس .

∡ س ا ب ، ∡ ص ا ب
زاويتان مماسيتان



مثال :- يمثل الشكل دائرة مركزها م ، $\overleftrightarrow{س ص}$ مماس لها عند النقطة ا ، $\overline{ا ب}$ قطر فيها ، ب نقطة اخرى على الدائرة ، اثبت ان قياس الزاوية المماسية س ا ب تساوي قياس الزاوية المحيطية ب د ا ؟



المعطيات

$\overleftrightarrow{س ص}$ مماس الدائرة مركزها م ، عند النقطة ا ، $\overline{ا ب}$ قطر فيها ب نقطة اخرى على الدائرة .

المطلوب :- اثبات ان ∡ س ا ب = ∡ ب د ا

البرهان :-

∡ س ا م = ٩٠ ← (لانه العمود الذي ينزل على المماس يكون عمودي)

∡ س ا ب + ∡ ب ا م = ٩٠

∡ ب م ا = ١٨٠ ← لانه زاوية محيطية ومركزية مرسومة على الوتر $\overline{ا ب}$.

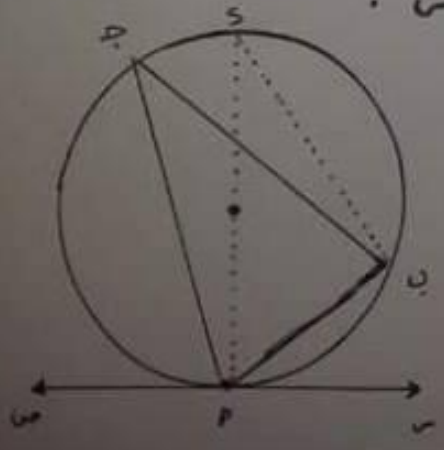
∡ ب ا م + ∡ ا م ب = ١٨٠ ← لانه باقي زوايا مثلث قائم الزاوية

اذن ∡ س ا ب + ∡ ب ا م = ∡ ب ا م + ∡ ا م ب = ٩٠

ومنه ∡ س ا ب = ∡ ا م ب . #

مبرهنة (٢-٧)

قياس الزاوية المماسية تساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس .



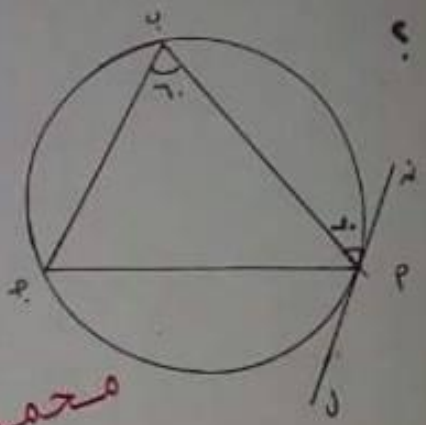
محمود الزعبي 0786656300

المعطيات :- $\overline{ب ج}$ وتر في الدائرة م
مركزها م عدد النقطة $أ$
$\overline{أ ب}$ وتر فيها
$\angle أ ج ب$ زاوية محيطية ، مرسومة على الوتر $\overline{أ ب}$ ، مشتركة مع الزاوية المماسية $\angle س أ ب$ في القوس $\overset{\frown}{أ ب}$

المطلوب :- اثبات ان $\angle س أ ب = \angle أ ج ب$

البرهان :-
ارسم القطر $\overline{أ د}$ وارسم الوتر $\overline{ب د}$
في المثال السابق تم اثبات ان
$\angle س أ ب = \angle أ د ب$
$\angle أ ج ب = \angle أ د ب$
اذن :- $\angle س أ ب = \angle أ ج ب$ #

مثال :- اكمل المجاور ثم
قياسات الزوايا المثلث
$أ ب ج$ ؟



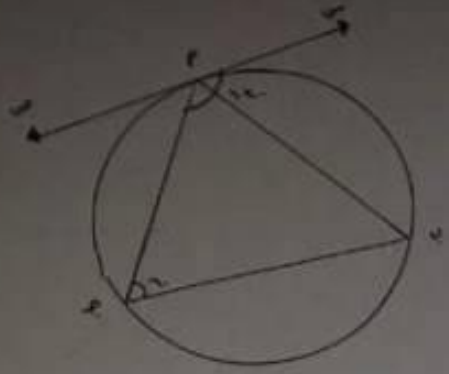
الحل

$\angle أ ج ب = \angle س أ ب = ٧٠$

$\angle ل أ ج = \angle أ ب ج = ٦٠$

$\angle ب أ ج = ١٨٠ - (٦٠ + ٧٠)$
$= ٥٠°$

تدريب (٤ - ١٥)
في الشكل اثبت ان المثلث $أ ب ج$
متطابق الاضلاع ؟



الحل

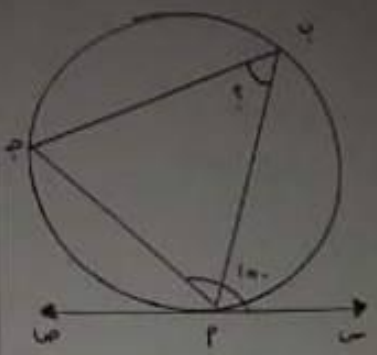
- $\angle ه أ ب = \frac{1}{2} \angle أ د ب = ٦٠$ (محيطية ومماسية على القوس $\overset{\frown}{أ ب}$)
- $\angle ب أ ج = \angle ه أ ج - \angle ه أ ب$
$= ١٢٠ - ٦٠ = ٦٠$
- $\angle أ ب ج = ١٨٠ - (٦٠ + ٦٠) = ٦٠$
- $\angle ب أ ج = \angle أ ب ج = \angle أ ج ب = ٦٠$

اذن المثلث $أ ب ج$ متساوي الاضلاع .

محمود الزعبي 0786656300

تمارين ومسائل

س١ :- جد قياس ∠أ ب جـ

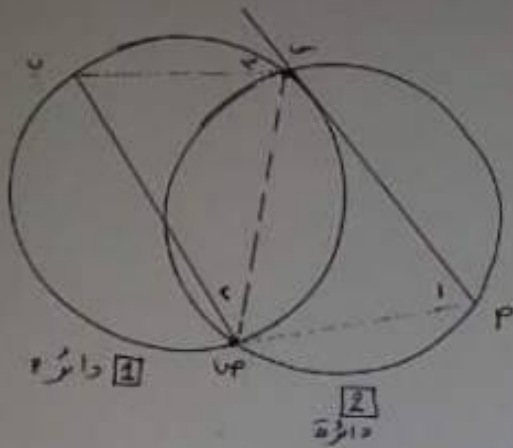


الحل

- ∠ جـ أ ص = ٣٠° (الكل قياس زاوية مستقيمة)
- ∠ أ ب جـ = ∠ جـ أ ص = ٣٠° (محيطية ومماسية على القوس $\overset{\frown}{أجـ}$)

س٢ :- تقاطعت دائرتان في [redacted] س ، ص ، رسم الوتر $\overline{سأ}$ في احدى الدائرتين مماس للاخرى في النقطة س ، ورسم الوتر $\overline{صب}$ في الدائرة الثانية مماس للاولى في النقطة ص ، اثبت ان $\overleftrightarrow{أب} \parallel \overleftrightarrow{أص}$ ؟

الحل



المعطيات

دائرتان متقاطعتين في النقطتين س ، ص

$\overline{سأ}$ مماس للدائرة 1

$\overline{صب}$ مماس للدائرة 2

المطلوب :- اثبت $\overline{سب} \parallel \overline{صأ}$

البرهان :-

∠ ١ = ∠ ٢ محيطية ومماسية صب مماسية للدائرة 2

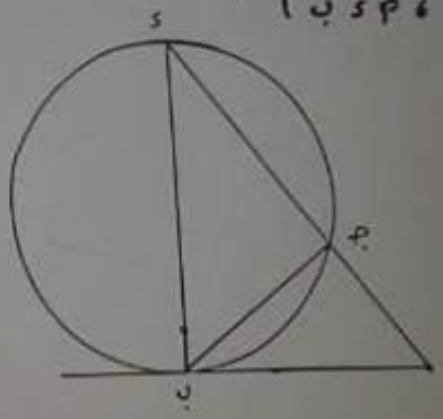
∠ ٢ = ∠ ٣ محيطية ومماسية سأ مماسية للدائرة 1

اذن :- ∠ ١ = ∠ ٣ وبما انهما وضع تناظر

و متطابقتان اذاً $\overleftrightarrow{سب} \parallel \overleftrightarrow{أص}$ #

س٣ :- اثبت ان $(أب)^2 = أجـ \times أد$

(ارشاد اثبت ان [redacted] في المثلثين أب جـ ، أد ب)



المعطيات :-

$\overline{أب}$ مماس لدائرة في النقطة ب

المطلوب :- اثبات ان $(أب)^2 = أجـ \times أد$

البرهان :-

نبحث في تشابه المثلثين أب جـ ، أد ب

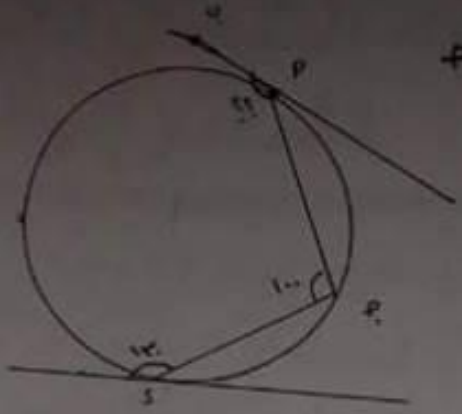
∠ جـ أب = ∠ د أب

∠ أ د ب = ∠ أ ب جـ (محيطية ومماسية على القوس $\overset{\frown}{ب جـ}$)

اذن يتشابه المثلثان وينتج

$\frac{أب}{أد} = \frac{أجـ}{أب} \leftarrow (أب)^2 = أجـ \times أد$ #

محمود الزعبي 0786656300



مثال: جد قياس ∠ ا ب ج

الحل

نرسم $\overline{ا د}$

∠ ا د ج = ∠ ا ب ج = ١٠٠

محيطية ومماسية

اذن ∠ ب د ا = ٣٠°

∠ ب ا د = ∠ ا ب ج = ١٠٠ محيطية ومماسية

∠ ب ج د = ٥٠ اكمال زوايا المثلث ا ج د

∠ ا ج ب = ∠ ب ج د + ∠ د ا ب

= ٥٠ + ١٠٠ = ١٥٠°

محمود الزعبي 0786656300

الفصل الثالث: الشكل الرباعي الدائري

* عدد الدوائر التي يمكن رسمها وتمر كل منها:

1. بنقطة معلومة:
   ← (عدد لانهائي من الدوائر)
2. بنقطتين معلومتين:
   ← (عدد لانهائي من الدوائر)
3. ثلاثة نقاط معلومة (ليست على استقامة واحدة)
   ← (دائرة واحدة فقط (مثلث))
4. بأربع نقاط مستوية (ليست على استقامة واحدة)
   ← (دائرة واحدة ضمن شروط معينة).

فمثلاً يمكن رسم دائرة تمر في رؤوس مربع لكن لا يمكن رسم دائرة تمر في رؤوس متوازي أضلاع.

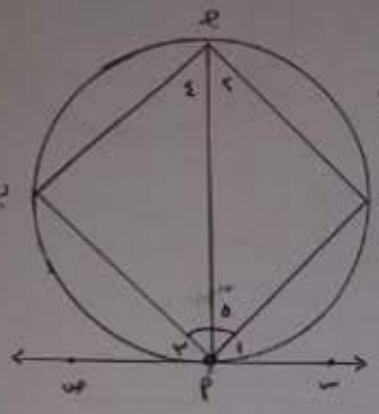
---

* **الشكل الرباعي الدائري:**

هو شكل الرباعي الذي تقع رؤوسه على الدائرة.

* **مبرهنة (٢-٨)**

في الشكل الرباعي الدائري، مجموع قياسي كل زاويتين متقابلتين يساوي ١٨٠°.



المعطيات: $\square$ أ ب ج ه شكل رباعي دائري

المطلوب: اثبات ان

$m(\angle ب أ ه) + m(\angle ب ج ه) = ١٨٠°$

$m(\angle ب ج ه) + m(\angle ه أ و) = ١٨٠°$

البرهان:

ارسم $\overleftrightarrow{و ب}$ المماس الذي يمس الدائرة في النقطة أ.

$m(\angle ١) = m(\angle ٢)$ (لانه الزاوية الحادة تساوي الزاوية المحيطية)

$m(\angle ٣) = m(\angle ٤)$

لكن $m(\angle ٥) + m(\angle ١) + m(\angle ٣) = ١٨٠°$

$m(\angle ٥) + m(\angle ٢) + m(\angle ٤) = ١٨٠°$

$\therefore m(\angle ب ج ه) + m(\angle ب أ ه) = ١٨٠°$

لكن مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي ٣٦٠°

$(m(\angle ب ج ه) + m(\angle ه أ و)) + (m(\angle ب أ ه) + m(\angle ب ج ه)) = ٣٦٠°$

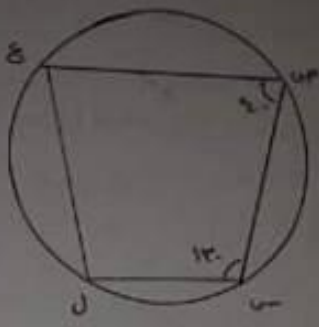
$(m(\angle ب ج ه) + m(\angle ه أ و)) + ١٨٠ = ٣٦٠°$

$\therefore m(\angle ب ج ه) + m(\angle ه أ و) = ١٨٠°$ #

محمود الزعبي 0786656300

مثال :- س ص ع ل ، شكل رباعي دائري فيه ∡س = ١٣٠° ، ∡ص = ٤٠° جد قياس كل من ∡ع ، ∡ل ؟

الحل



- ∡س + ∡ع = ١٨٠
  ∡ع = ١٨٠ − ١٣٠
  = ٥٠
- ∡ص + ∡ل = ١٨٠
  ∡ل = ١٨٠ − ٤٠
  = ١٤٠

تدريب (٢-١٦) :- م ب ج د شكل رباعي دائري ، فيه ∡م تساوي كلائة امثال ∡ج ، جد ∡ج ؟

الحل

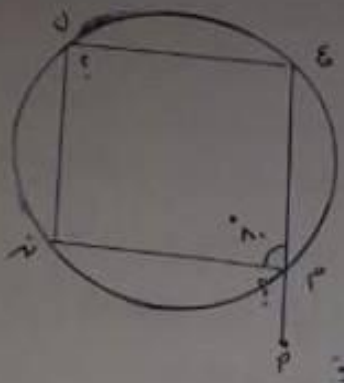
مجموع قياسي الزاويتين م ، ج = ١٨٠
(زاويتان متقابلتين في رباعي دائري)

نفرض ∡ج = س ← ∡م = ٣س

س + ٣س = ١٨٠
٤س = ١٨٠ ← ÷ ٤
س = ٤٥

تدريب (٢-١٧)

م ن ل ع شكل رباعي دائري فيه ∡م = ٨٠ ، مُدَّ ع م باتجاه م الى النقطة أ ، جد قياس كل من ∡ن ل ع ، ∡ن م أ ؟



الحل

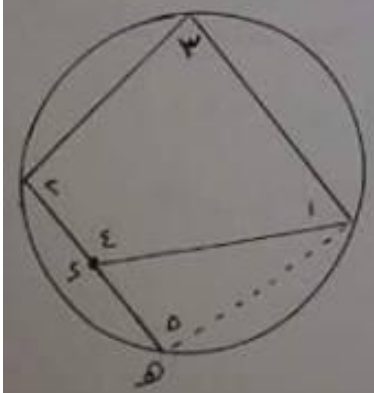
- ∡ن ل ع = ١٨٠ − ٨٠
  = ١٠٠
  (زاوية مقابلة للزاوية م في رباعي دائري)
- ∡ن م أ = ١٨٠ − ٨٠
  = ١٠٠
  (زاوية مجاورة للزاوية م على خط مستقيم)

محمود الزعبي

مبرهنة (٢-٩)

اذا كان مجموع قياسي زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي يساوي ١٨٠° ، فانه هذا الشكل يكون شكل رباعي دائري .

المعطيات :-



م ب ج د شكل رباعي
فيه ∡م + ∡ج = ١٨٠

المطلوب :-

اثبت ان الشكل م ب ج د شكل رباعي دائري .

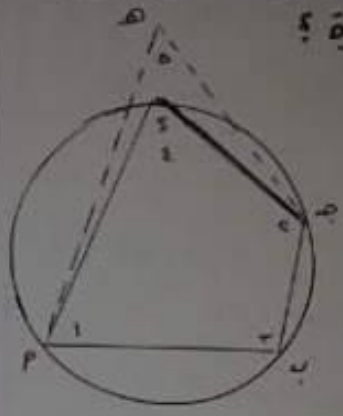
البرهان :-

ارسم الدائرة التي تمر بالنقاط م ب ج .
افرض ان النقطة د ، تقع داخل الدائرة .
مد ج د من جهة د ، حتى يقطع الدائرة في هـ .

∡١ + ∡٢ = ١٨٠ معطى
∡٣ + ∡٤ = ١٨٠ مجموع زوايا شكل رباعي = ٣٦٠
لكن ∡٣ + ∡٥ = ١٨٠

فيكون $\measuredangle 4 = \measuredangle 5$ وهذا لايتحقق
الا اذا انطبقت ء على هـ .
اي ان النقطة ء تقع على الدائرة
اي ان الشكل أ ب جـ ء شكل رباعي دائري .

تدريب :- اثبت المبرهنة السابقة (٢-٨)
على فرض ان الراس الرابع يقع
خارج الدائرة ؟



المعطيات :- الشكل أ ب جـ ء شكل رباعي
فيه $\measuredangle$ أ + $\measuredangle$ جـ = ١٨٠°

المطلوب :- اثبات ان الشكل أ ب جـ ء رباعي
دائري .

البرهان :- نرسم الدائرة التي تمر بالنقاط
أ ، ب ، جـ ، نفرض النقطة ء
تقع على الدائرة
هـ تقع خارج الدائرة .
نصل جـ هـ ، أ هـ
$\measuredangle$ ١ + $\measuredangle$ ٢ = ١٨٠ معطى
$\measuredangle$ ٣ + $\measuredangle$ ٤ = ١٨٠ مجموع زوايا
الشكل الرباعي ٣٦٠

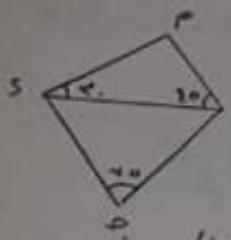
لكن $\measuredangle$ ٣ + $\measuredangle$ ٥ = ١٨٠
فيكون $\measuredangle$ ٤ = $\measuredangle$ ٥ وهذا لايتحقق
الا اذا انطبقت ء على هـ .
اي ان النقطة ء تقع على الدائرة
اي ان الشكل أ ب جـ ء شكل رباعي دائري .
#

تدريب (٢-١٩) هل يمكن رسم شكل رباعي
دائري قياسات زواياه ٥٠ ، ١١٠ ، ١٣٥ ، ٦٥ بدرر ؟

الحل
لا يمكن لانه لايحقق مجموع قياسي
زاويتين = ١٨٠ .

مثال :- أ ب جـ ء شكل رباعي فيه قياس
$\measuredangle$ ب جـ ء = ٧٥ ، $\measuredangle$ أ ب ء = ٤٥
$\measuredangle$ أ ء ب = ٣٠ ، اثبت ان الشكل الرباعي
أ ب جـ ء ، شكل رباعي دائري .

الحل



$\measuredangle$ م = ١٨٠ - (٣٠ + ٤٥) ب
= ١٨٠ - ٧٥
= ١٠٥

(لانه مجموع زوايا المثلث ١٨٠)

$\measuredangle$ م + $\measuredangle$ جـ = ١٨٠
١٠٥ + ٧٥ = ١٨٠
أ ب جـ ء شكل رباعي ، فيه زواياه متقابلتين
مجموع قياسيهما يساوي ١٨٠° اي ان
أ ب جـ ء شكل رباعي دائري #

محمود الزعبي

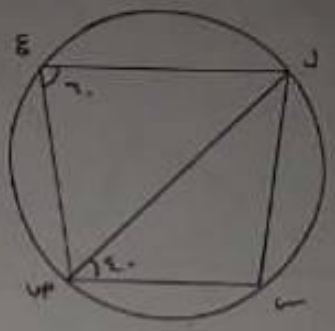
تدريب (٢-٢٠)

س ص ع ل شكل رباعي دائري فيه

ق(∠ص ع ل) = ٦٠° ، ق(∠س ص ل) = ٤٠°

جد ق(∠ص ل س) ؟

الحل :-



ق(∠ل س ص) = ١٢٠°

ق(∠ص ل س) = ١٨٠ - (٤٠ + ١٢٠)

= ١٨٠ - ١٦٠

= ٢٠°

(مجموع زوايا المثلث ١٨٠°)

مثال :- أ ب جـ د شكل رباعي فيه

قياس ∠أ = ٤٣ + ١٠

ق(∠جـ) = ٤٢ - ٣٠ ، جد قياس

كل من ∠أ ، ∠جـ ؟

الحل

ق(∠أ) + ق(∠جـ) = ١٨٠ (متقابلة في رباعي دائري)

٤٣ + ١٠ + ٤٢ - ٣٠ = ١٨٠

٤٥ - ٢٠ = ١٨٠

٤٥ = ١٨٠ + ٢٠

٤٥ = ٢٠٠ ⟹ **ع = ٤٠**

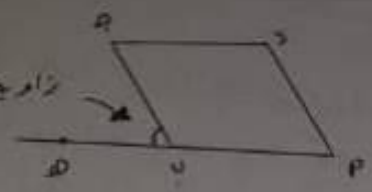
ق(∠أ) = ٣(٤٠) + ١٠ = ١٢٠ + ١٠

= ١٣٠

ق(∠جـ) = ٢(٤٠) - ٣٠ = ٨٠ - ٣٠

= ٥٠

تعريف :- الزاوية الخارجة عن الشكل الرباعي هي الزاوية المحصورة بين امتداد احد اضلاعه والضلع المجاور

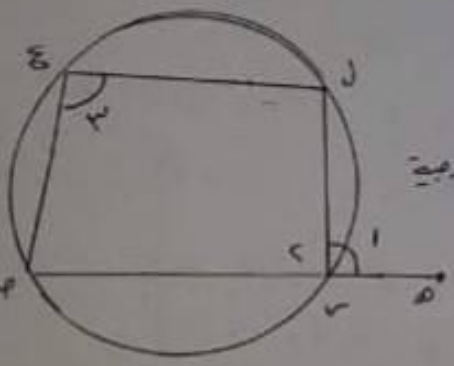


مبرهنة :-

قياس الزاوية الخارجة عن الشكل الرباعي الدائري يساوي قياس الزاوية الداخلية المقابلة للمجاورة لها .

تدريب (٢-٢١) : برهن المبرهنة السابقة.

المعطيات :-



الشكل فيه الزاوية

∠هـ س ل زاوية خارجية عن الشكل الرباعي الدائري ص ع ل

المطلوب :-

اثبات ان ق(∠هـ س ل) = ق(∠ص ع ل)

البرهان

- ق(∠١) + ق(∠٢) = ١٨٠ ...(١) متجاورتين على خط مستقيم
- ق(∠٢) + ق(∠٣) = ١٨٠ ...(٢) متقابلتان في رباعي دائري
- من (١) ، (٢)

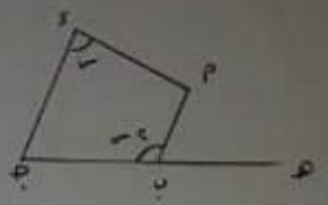
ق(∠١) = ق(∠٣) #

محمود الزعبي

مثال :- الشكل الرباعي الدائري

فيه ∠ P و جـ يساوي نصف ∠ P ب جـ ، مد الضلع جـ ب منه جهة ب الى النقطة هـ جد ∠ P ب هـ .

الحل



نفرض ان ∠ P و جـ = س

∠ P ب جـ = ٢ س

لكن س + ٢ س = ١٨٠

٣ س = ١٨٠

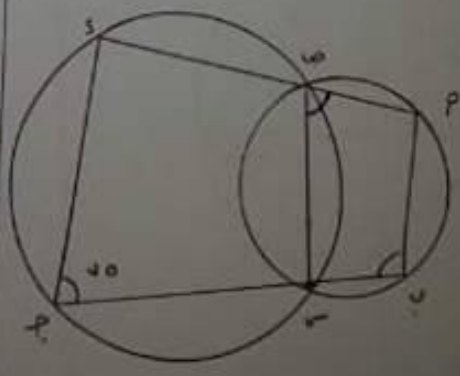
س = ٦٠

∠ P و جـ = ٦٠

∠ P ب جـ = ١٢٠

∴ ∠ P ب هـ = ٦٠ (لانه الزاوية الخارجية للشكل الرباعي الدائري يساوي قياس الزاوية الداخلية المقابله لها .)

تدريب (٤-٢٢) في الشكل المجاور جد قياس كل من ∠ P ص س ، ∠ P ب س



الحل

• ∠ P ص س = ∠ س جـ د = ٥٥

(زاوية خارجية عن شكل رباعي دائري مجدوم)

• ∠ P ب س + ∠ P ص س = ١٨٠

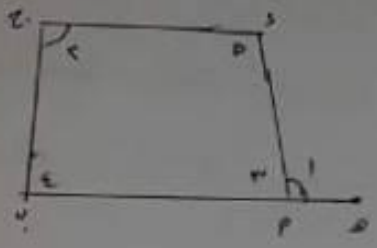
زاويتان متقابلتان في رباعي دائري

اذن ∠ P ب س = ١٨٠ - ٥٥

= ١٢٥°

تدريب (٤-٢٣)

برهن ان الشكل الرباعي الذي فيه قياس الزاوية الخارجية ، يساوي قياس الزاوية الداخلية المقابلة للمجاورة لها يكون شكل رباعي دائري .



البرهان

∠ ١ = ∠ ٢ معطى

∠ ١ + ∠ ٣ = ١٨٠ مجموع زاويتان مع خط مستقيم

∴ ∠ ٢ + ∠ ٣ = ١٨٠° لانه (∠ ١ = ∠ ٢)

∠ ٢ + ∠ ٣ + ∠ ٤ + ∠ ٥ = ٣٦٠

١٨٠ + ∠ ٤ + ∠ ٥ = ٣٦٠

∠ ٤ + ∠ ٥ = ٣٦٠ - ١٨٠

∴ ∠ ٤ + ∠ ٥ = ١٨٠

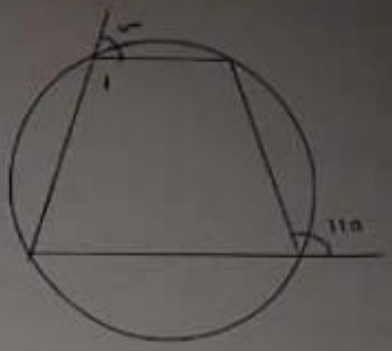
∴ كل زاويتان متقابلتان في الشكل يساوي ١٨٠

∴ اذن الشكل رباعي دائري #

محمود الزعبي 0786656300

تمارين ومسائل

س :- جد قيمة س ، في كل من الاشكال الاتية :-



الحل ① $\angle 1 = 115$ زاوية خارجية تساوي المقابلة المجاورة

$س = 180 - 115$

$س = 65$

② $\angle 1 = 70$ (خارجية)

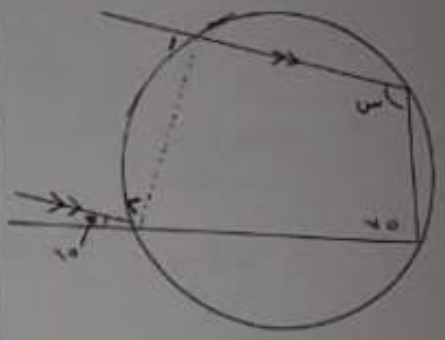
$\angle 1 + \angle 2 + 15 = 180$ بالتحالف

$\angle 2 = 70 + 15 = 90^\circ$

$س = 90 + 15 = 105^\circ$

③ $\angle 1 = 65$ زاويتان محيطيتان على وتر نفس الدائرة

$س = 180 - 130 = 50$ متقابلتين رباعي دائري



س : $أ ب ج د$ ، شكل رباعي دائري ، فيه

$\angle أ = 3ع + 10$ ، $\angle ج = 4ع - 30$

جد قياس كل من $\angle أ$ ، $\angle ج$ ؟

الحل

$\angle أ + \angle ج = 180$ متقابلتان في رباعي دائري

$3ع + 10 + 4ع - 30 = 180$

$7ع - 20 = 180$

$7ع = 200$

$ع = 40$

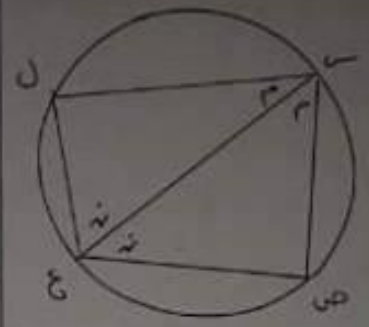
$\angle أ = 3(40) + 10 = 130^\circ$

$\angle ج = 4(40) - 30 = 50^\circ$

محمود الزعبي 0786656300

س٣ : س ص ع ل ، شكل رباعي دائري فيه $\overline{س ع}$ ينصف كلا من $\angle س$ ، $\angle ع$ ، اثبت ان $\overline{س ع}$ قطر للدائرة .

الحل



اثبت ان $\overline{س ع}$ قطر للدائرة

البرهان

نفرض $\angle س = \angle م$ ، $\overline{س ع}$ ينصف $\angle س$

نفرض $\angle ع = \angle نـ$ ، $\overline{س ع}$ ينصف $\angle ع$

$\angle م + \angle نـ = 180°$

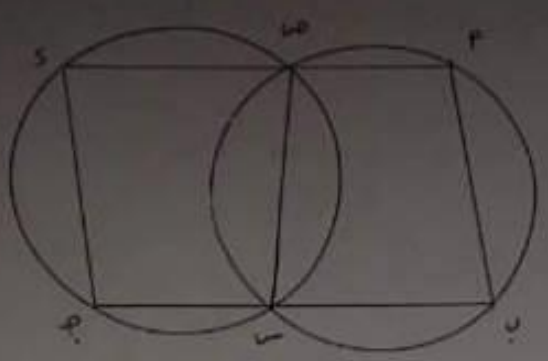
$\angle م + \angle نـ = 90°$ ، $\angle س$ ، $\angle ع$ متقابلين في رباعي دائري

$\angle ص = 90°$ ← مجموع قياسات زوايا مثلث س ص ع .

$\angle ل = 90°$ ← مجموع قياسات زوايا مثلث س ل ع

∴ ما اتصل محيطيان على وتر $\overline{س ع}$ في دائرة اذن $\overline{س ع}$ قطر للدائرة

س٤ :- في الشكل اثبت ان $\overline{أب} \parallel \overline{دجـ}$ ؟



الحل :-

- $\angle د ص س = \angle أ ب س$ (زاوية خارجة لرباعي دائري أ ب س ص)
- $\angle أ ص س = \angle د جـ س$ (زاوية خارجة لرباعي دائري ص س جـ د)
- لكن $\angle أ ص س + \angle د ص س = 180°$ (زاويتان متجاورتان تكونان على خط مستقيم)

∴ $\angle أ ب س + \angle د جـ س = 180°$

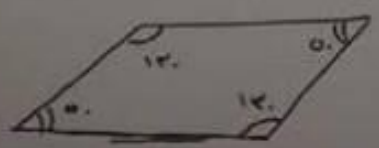
ما اتصل في وضع تحالف ومجموع قياسهما يساوي $180°$.

← $\overline{أب} \parallel \overline{دجـ}$.

س :- بصورة عامة : يعد متوازي الاضلاع شكل رباعي دائري .
بين صحة هذه العبارة ؟

الحل

العبارة خاطئة لانه في متوازي الاضلاع كل زاويتان متقابلتان متساويتين في القياس ولا يمكن ان يكون مجموعهما $180°$

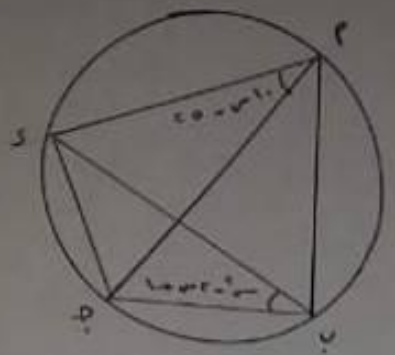


$180° \neq 50° + 50°$

$180° \neq 130° + 130°$

محمود الزعبي (0786656300)

س : أ ب ج د شكل رباعي دائري ، فيه ق (∠ ب أ ج) = س^{2} − ٢ س + ١٠°
ق (∠ ج أ د) = ١٠ س − ٥٠° ، جد القياسات المحتملة للزاوية د ب ج ؟



الحل

ق (∠ د ب ج) = ق (∠ ج أ د) محيطيتان على وتر د ج

س^{2} − ٢ س + ١٠ = ١٠ س − ٥٠

س^{2} − ١٢ س + ٣٥ = ٠

(س − ٧) (س − ٥)

س = ٧° ، س = ٥°

عند س = ٧ ← ق (∠ د ب ج) = ٤٩ − ١٢ + ١٠ = ٤٥°

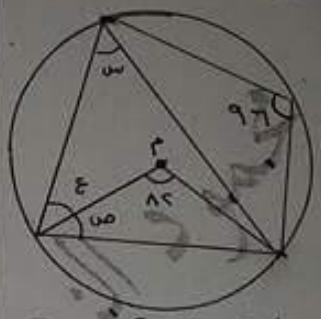
عند س = ٥ ← ق (∠ د ب ج) = ٢٥ − ١٥ + ١٠ = ٢٥°

محمود الزعبي (0786656300)

اسئلة الوحدة

س ٢ : في الشكل دائرة مركزها م ، جد قيمة كل من س ، ص ، ع ؟

الحل



س = ٤١ محيطية ومركزية على الوتر نفسه

ص = ٤٩ لانه في مثلث متطابق الضلعين .

ص + ع + ٩٦ = ١٨٠ ← شكل ب ج د رباعي دائري

ع = ٣٥

س ٣ : ب ج مثلث متساوي الاضلاع مرسوم داخل دائرة بحيث تقع رؤوسه عليها ، ذهف القوس الاصغر ب ج في النقطة هـ ، اثبت ان ج هـ قطر للدائرة .

الحل نصل ب هـ ، ب هـ

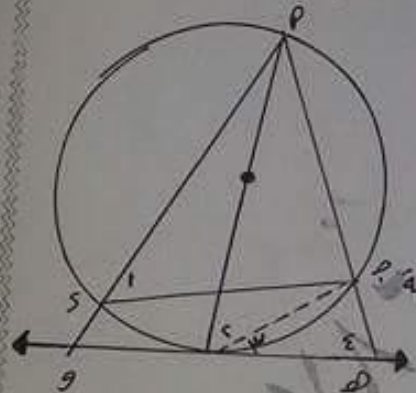
- ق(ب ج هـ) = ق(ب ب هـ) = ٣٠ محيطيتان على قوسين متساويين

- ق(ب ب هـ) = ٩٠ وبما انها زاوية محيطية مرسومة على الوتر ج هـ .

∴ ج هـ قطر للدائرة .

س ٤ : ب ج قطر في دائرة ج ب ، ب د وتران فيها جهتين مختلفتين من القطر ب ج رسم مماس للدائرة ، عند النقطة (ب) بحيث لاقى امتداد ج ب في النقطة هـ . ولاقى امتداد ب د في النقطة و ، اثبت ان الشكل ج د و هـ رباعي دائري ؟

الحل



المعطيات

دائرة مركزها م

ج ب ، ب د وتران

هـ و مماس للدائرة عند النقطة ب .

ب ج قطر للدائرة

المطلوب

اثبات ان الشكل ج د و هـ شكل رباعي دائري .

البرهان

نصل ج د .

- ب ج ⊥ هـ و ← ق(١) + ق(٢) = ٩٠ ... (١)
- ق(ج د ب) = ٩٠ زاوية ج د ب محيطية على القطر ب ج .

∴ ق(٣) + ق(٤) = ٩٠ ... (٢)

من (١) ، (٢) ← ق(١) = ق(٤) ... (٣)

لكن ق(١) = ق(٢) ... (٤) محيطيتان على الوتر ج د

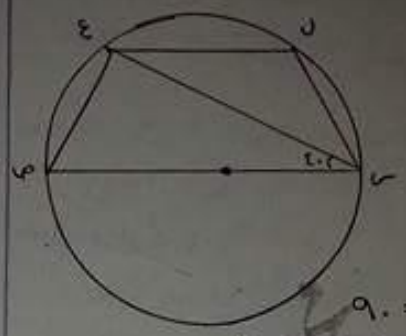
ق(١) = ق(٤) وبما انه ق(١) زاوية خارجة للشكل الرباعي ج د و هـ وقياسها يساوي قياس ق(٤) المقابلة للمجاورة

اذن الشكل ج د و هـ شكل رباعي دائري .

س :- س ص ع ل ، شكل رباعي دائري فيه $\overline{س ع}$ قطر للدائرة ، ق∠س ص ع = ٤٠°

جد ق∠س ل ع .

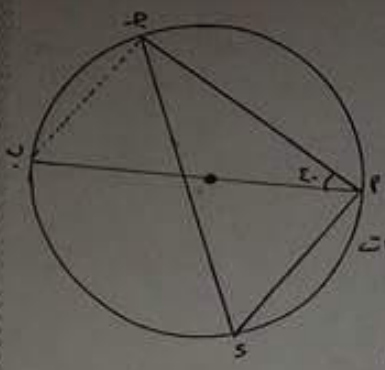
الحل



- ق∠س ص ع = ٩٠° (محيطية على القطر $\overline{س ع}$)
- ق∠ص = ٥٠° (الكامل زوايا المثلث ص س ع)
- ق∠س ل ع + ق∠س ص ع = ١٨٠° متقابلتين في رباعي دائري س ص ع ل
- ← ق∠س ل ع = ١٣٠°

س :- $\overline{ب ج}$ قطر في دائرة النقاط ب ، د ، ج الدائرة بحيث ان ق∠ج ب ا = ٤٠° ، جد ق∠ا د ج ؟

الحل

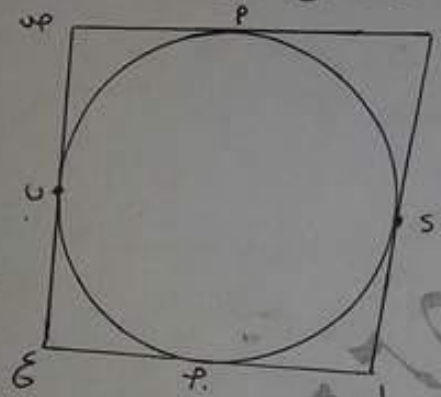


- نصل $\overline{ب ج}$ ← ق∠ا ب ج = ٩٠° محيطية على القطر $\overline{ا ج}$.
- ق∠ا ب ج = ٥٠° الكامل قياسات زوايا المثلث ا ب ج
- ق∠ا د ج = ق∠ا ب ج = ٥٠° محيطيتان على الوتر $\overline{ا ج}$.

س :- س ص ع ل ، شكل رباعي مرسوم داخله دائره تمس اضلاعة اثبت ان

س ص + ع ل = ص ع + ل س

الحل



اعتماداً على نظرية المماسين المرسومة للدائرة من نقطة خارجها .

س ا = س د ... (١)

ل د = ل ج ... (٢)

ع ج = ع ب ... (٣)

ص ا = ص ب ... (٤)

- س ص = ص ا + س ا ... (٥)
- ل ع = ج ع + ج ل ... (٦)

بجمع (٥) ، (٦)

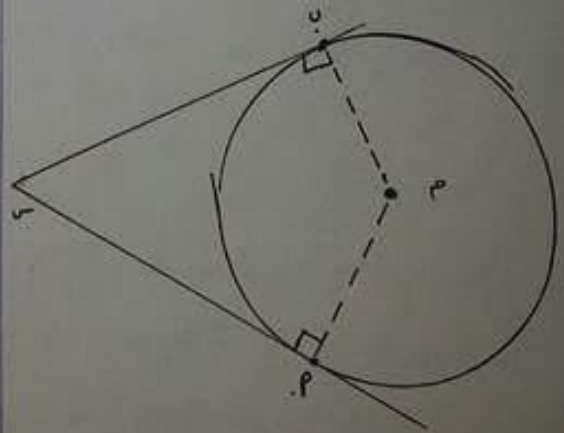
س ص + ل ع = ص ا + ا س + ج ع + ج ل

بكسن من (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤)

س ص + ل ع = ص ب + ب د + د ل + س د

س ص + ل ع = س ل + ص ع #

س :- س ، ص نقطتان خارج دائرة مركزها م ، $\overleftrightarrow{س ص}$ مماسان عند النقطتين ا ، ب ، اثبت ان الشكل س ا م ب شكل رباعي دائري .



الحل

- $\overline{ا م} \perp \overline{س ا}$ ← ق∠م ا س = ٩٠°
- $\overline{م ب} \perp \overline{س ب}$ ← ق∠م ب س = ٩٠°

وبما انهما متقابلتان في شكل رباعي

← س ا م ب ومجموع قياسهما = ١٨٠°

اذن الشكل س ا م ب شكل رباعي دائري

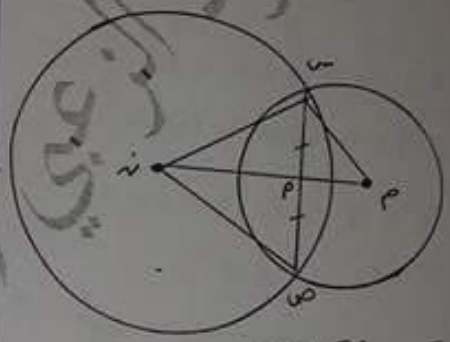
س٧ :- تقاطعت دائرتان مركزها م ، ن في النقطتين س ، ص النقطة م منتصف $\overline{س ص}$.

أ) اثبت ان النقاط م ، ص ، ن تقع على استقامة واحدة .

ب) اذا كان س ص = ٨ سم ، طول نصف قطر الدائرة التي مركزها م = ٥ سم ، طول نصف قطر الدائرة التي مركزها ن = ٧ سم ، جد م ن ؟

الحل

أ



- $\overline{س ص}$ وتر مشترك لدائرتين النقطة م منتصف الوتر $\overline{س ص}$

اذن $\overline{م م} \perp \overline{س ص}$ ← $\measuredangle م م س = ٩٠$

$\overline{ن م} \perp \overline{س ص}$ ← $\measuredangle ن م س = ٩٠$

∴ $\measuredangle م م ن = ١٨٠$ ← النقاط م ، م ، ن تقع على استقامة واحدة #

ب

$س ص = ٨$ سم ← $س م = ٤$ سم

$م ص = ٥$ سم ، $ن ص = ٧$ سم

نطبق فيثاغورس على المثلث م م س

$م م = ٣$ سم

نطبق فيثاغورس على المثلث ن م س

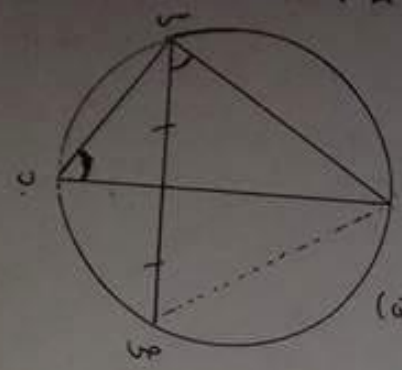
$ن م = \sqrt{٣٣}$ سم

اذن $ن م = ٣ + \sqrt{٣٣}$ سم

س٨ $\overline{أ ب}$ قطر في دائرة ينصف الوتر $\overline{س ص}$ ، اثبت ان

$\measuredangle أ ب س = \measuredangle أ س ص$

الحل



- نصل أ ص
- $\measuredangle أ س ص = \measuredangle أ م ص$ $= ٩٠°$ ($\overline{أ ب}$ ينصف الوتر $\overline{س ص}$)

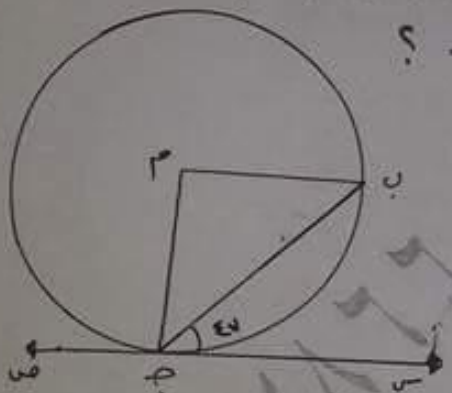
في المثلث أ س ص ←

$أ س = أ ص$

- $\measuredangle أ ب س = \measuredangle أ س ص$ مرسومتان على وتر نفسه متساويين ($أ س = أ ص$)

س٩ في الشكل دائرة مركزها م ، $\overleftrightarrow{س ص}$ مماس لها عند النقطة ب

جد $\measuredangle ب م ب$ ؟



الحل

$م ب \perp س ص$

← $\measuredangle م ب س = ٩٠°$

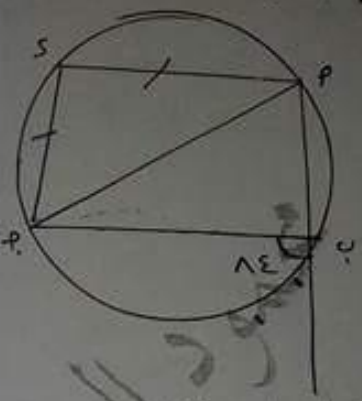
← $\measuredangle م ب ب = ٤٣$ متبقية $\measuredangle ب ب س$

← $\measuredangle ب م ب = ١٨٠ - (٤٣)$

$\measuredangle ب م ب = ٩٤°$ #

س١١ ﻫ ب جـ د شكل رباعي دائري فيه ﻫ د = جـ د ، مد $\overline{ﻫ ب}$ في اتجاه ب الى النقطة ل ، بحيث ان ∠ جـ ب ل = ٨٤° ، جد ∠ د جـ ﻫ ؟

الحل



∠ د ﻫ جـ = ∠ ل ب جـ = ٨٤°

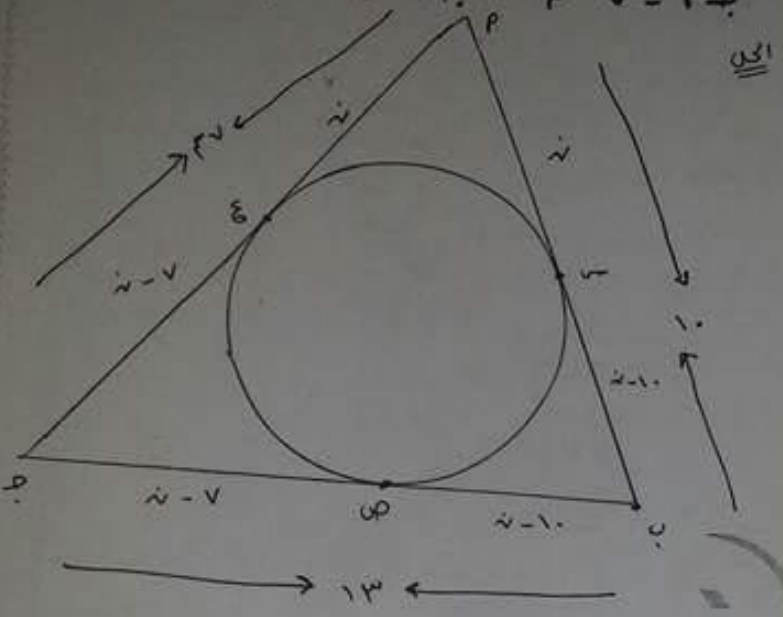
المثلث د ﻫ جـ متطابق الضلعين

$\leftarrow$ ∠ د جـ ﻫ = ∠ ﻫ = $\frac{1}{2}$ (١٨٠ - ٨٤)

= ٤٨°

س١٢ رسمت دائرة داخل المثلث ﻫ ب جـ بحيث تمس اضلاعه $\overline{ﻫ ب}$ ، $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{جـ ﻫ}$ في النقاط س ، ص ، ع على التوالي اذا كان ﻫ ب = ١٠ سم ، ب جـ = ١٣ سم ، جـ ﻫ = ٧ سم ، جد ﻫ س ؟

الحل



نفرض ﻫ س = ﻫ ع = ن

ب س = ب ص = ١٠ - ن

جـ ص = جـ ع = ٧ - ن

محيط المثلث ﻫ ب جـ = ٣٠ سم

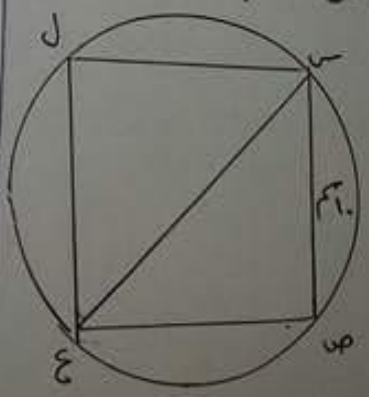
ن + ١٠ - ن + ١٠ - ن + ٧ - ن = ٧ + ن + ن = ٣٠

٣ن - ٣٤ = ٣٠

ن = ٢ ⟵ ﻫ س = ٢ سم

س١٣ س ص ع ل ، مستطيل مرسوم داخل دائرة طول نصف قطرها (١٧) سم ، بحيث تمس رؤوسه ، اذا كان س ص = ١٠ سم ، جد مساحة المستطيل س ص ع ل ؟

الحل



س ع = $\sqrt{٣٤^{٢} - ١٠^{٢}}$

= $\sqrt{١١٥٦ - ١٠٠}$

= $\sqrt{١٠٥٦}$

س ع = ٣٢,٥ سم

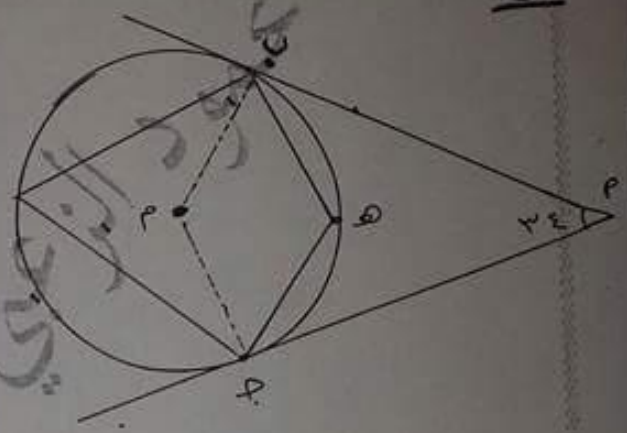
مساحة المستطيل = الطول × العرض

= ١٠ × ٣٢,٥

= ٣٢٥ سم^{٢}

س١٤ $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ مماسان لدائرة مركزها م ، عند النقطتين ب ، جـ ، $\measuredangle$ ب أ جـ = ٣٤° ، د نقطة على القوس الاكبر ب جـ ، هـ نقطة على القوس الاصغر ب جـ جد قياس كل من $\measuredangle$ ب د جـ ، $\measuredangle$ ب هـ جـ ؟

الحل



الحل نصل $\overline{مب}$ ، $\overline{مجـ}$

- $\square$ أ ب م جـ رباعي دائري

$\measuredangle$ ب م جـ = ١٤٦

- $\measuredangle$ ب د جـ = $\frac{1}{2}$ $\measuredangle$ ب م جـ = ٧٣

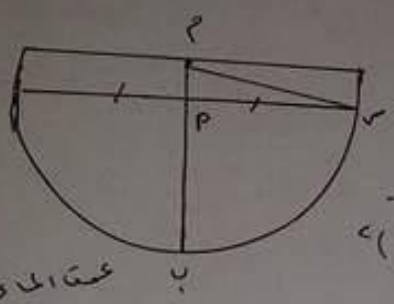
(محيطية ومركزية) .

- $\measuredangle$ ب هـ جـ = ١٨٠ − ٧٣ = ١٠٧

الشكل ب هـ جـ د رباعي دائري

س١٥ قناة مائية مقطعها العرضي على الشكل نصف دائرة طول قطرها (٥) م ، عرضا سطح الماء فيها (٤,٨) م جد عمق الماء في القناة ؟

الحل



نطبق فيثاغورس على المثلث م ف ر لايجاد طول م ف

م ف = $\sqrt{(٢,٥)^2 - (٢,٤)^2}$

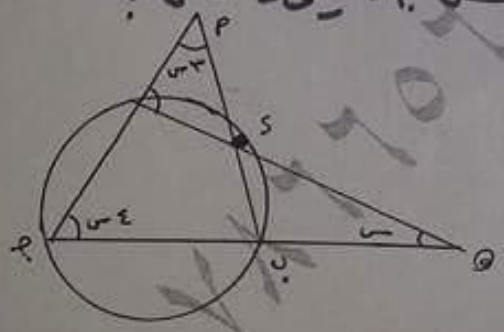
= $\sqrt{٦,٢٥ - ٥,٧٦}$

= $\sqrt{٠,٤٩}$

م ف = ٠,٧

أ ب = م ب − م ف = ٢,٥ − ٠,٧ = ١,٨ متر عمق الماء

س١٦ في الشكل جد قيمة س ؟



الحل

$\measuredangle$ أ و د = ٥س زاوية خارجية للمثلث هـ و جـ

٣س + ٤س + ٥س = ١٨٠°

١٢س = ١٨٠

س = ١٥° #

تم بحمد الله

الاستاذ: محمود الزعبي