الرياضيات

الصف الثاني عشر

للفرعين العلمي والصناعي

الرياضيات

العلمي

الفصل الدراسي الأول

الوحدة (١) : النهايات والاتصال

الفصل الأول : النهايات

تدريب (١) ص ١٥

أكمل :

١) $\lim_{س \to ٢^+} ق(س) = ١$ ٢) $\lim_{س \to ٢^-} ق(س) = ٥$

٣) $\lim_{س \to ٢} ق(س) = غ ٢$

تدريب (٢) : ص ١٦

١) $\lim_{س \to ١} ق(س) = ٢$ ٢) $\lim_{س \to ١٠} ق(س) =$ غير موجودة

٣) $\lim_{س \to ٠} ق(س) = ٢$ ٤) $\lim_{س \to ٢} ق(س) = ٢$

تمارين ومسائل

ص ١٧

ا) $\lim_{س \to ٦^+} ق(س) = ٥$ ب) $\lim_{س \to ٦^-} ق(س) = ٢$

جـ) $\lim_{س \to ٠} ق(س) = ١$ د) $\lim_{س \to ٢} ق(س) = غ ٢$

ي) $\lim_{س \to ٨^-} ق(س) = -٦$ و) $\lim_{س \to ٨^+} ق(س) = -٦$

ز) $\lim_{س \to ١٠} ق(س) =$ لا يوجد

ح) $\lim_{س \to ٤} س = ٤$ ط) $\lim_{س \to ٤^+} ل(س) =$ لا يوجد

هـ) $\lim_{س \to ٤^-} ل(س)$ غير موجودة د) $\lim_{س \to ٤} ل(س)$ غير موجودة

ك) $\lim_{س \to ٠} ل(س) = ٢$

ج) $[-1, 1]$ ب) $\{-1, 1\}$ أ) $\{-1, 1\}$ ج/٣

د) $\lim_{x \to -1^+} f(x) = -1$ د) $\lim_{x \to -1^-} f(x) = -3$ ج

ج) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = 2^3 + 4 = 8$

$f(2) = 2 \times 2 + 1 = 5$

ثانياً: نظريات النهايات

تدريب (١)

أ) $\lim_{x \to -2} [f(x) \times g(x)] = \lim_{x \to -2} f(x) \times \lim_{x \to -2} g(x)$

$= -3 + 6 \times -2$

$= -3 - 12 = -15$

ب) $\frac{\lim_{x \to 1} f(x)}{\lim_{x \to 1} g(x)} = \frac{\lim_{x \to 1} f(x)}{\lim_{x \to 1} g(x)} = \frac{2}{2} = 1$

ج) $\lim_{x \to 1} [f(x) + \sqrt{g(x)}] + 10$

$= \sqrt{7} + 2 \times \sqrt{9} + 10$

$= \sqrt{49} + 10$

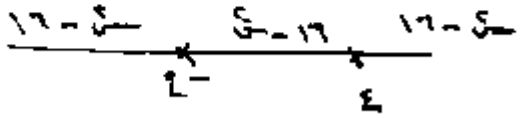
جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تدريب (٢)

١) نهـا |س − ٨| = |١٠ − ٨| = ٨
س ← ١٠

٢) نهـا |س − ١٦| = صفر
س ← ١٦

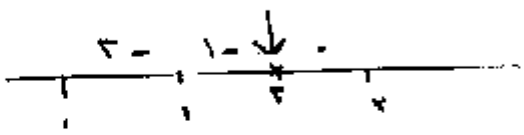
٣) نهـا |س − ١٦| = ٠
س ← ٤



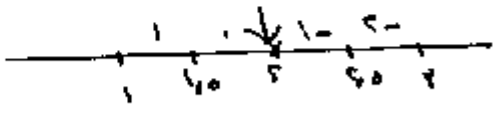
لأن :
نهـا |س − ١٦| = صفر
س ← ٤+
نهـا |س − ١٦| = صفر
س ← ٤−

تدريب (٣)

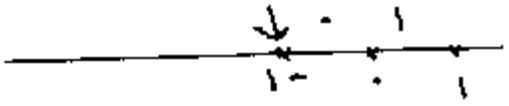
١) نهـا [س − ٢]
س ← ١
= −٣



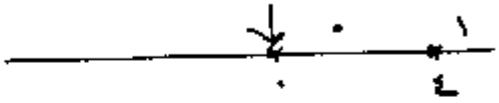
٢) نهـا [٤ − ٢س]
س ← ١٫٥
= ١



٣) نهـا [س + ١] = ١
س ← ٠



٤) نهـا [٠٫٥ س]
س ← ٤
= ٢



جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تدريب (٤)

أ) ١ ، ٥ ، ٣ ، ٢ ، ٤ ب) س = ٤ (٣،٣)

تدريب (٥)

أ) $\lim_{س \to ٠} \frac{جتا س - ١}{س} = ٠$ ب) $\lim_{س \to ٠} \frac{جتا س - ١}{س^٢} = \frac{١}{٢}$

ج) $\lim_{س \to ٠} \frac{جتا س - ١}{س^٢} = ٠$ د) $\lim_{س \to ٠} \frac{جتا س - ١}{س^٢} = \frac{٤٩ - ٥٠}{٤٩ \times ٥٠} = -\frac{١}{٢٤٥٠}$

تدريب (٦)

$\lim_{س \to ٠^+} \frac{جا ٢س}{س} = ٢$ ، $\lim_{س \to ٠^-} \frac{جا ٢س}{س} = ٤$

$\therefore \lim_{س \to ٠} \frac{جا ٢س}{س}$ غير موجود

تدريب (٧)

أ) $\lim_{س \to ١} \frac{جا(س-١)}{س-١} = ١$ ب) $\lim_{س \to ١} \frac{جا(س-١)}{س-١}$ غير موجود

ج) $\lim_{س \to ١} \frac{جا(٣س+٥)}{٢س+٣} = \frac{جا ٨}{٥} = ١$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تمارين ومسائل

١) أ) $\lim_{س \to ١} (ق(س) + ل(س)) = -٦ + -٤ = -١٠$

ب) $\lim_{س \to ١} (ق(س) \times ل(س)) = -٦ \times -٤ = ٢٤$

ج) $\lim_{س \to ١} \frac{ق(س)}{ل(س)} = \frac{-٦}{-٤} = \frac{٣}{٢}$

د) $\lim_{س \to ٢} ل(س)^{٢} = \left(\lim_{س \to ٢} ل(س)\right)^{٢} = (-٣)^{٤} = ٨١$

هـ) $\lim_{س \to ٤} \sqrt{ل(س) - ١} = \sqrt{\lim_{س \to ٤} (ل(س) - ١)} = \sqrt{-٣ - ١} = \sqrt{-٤}$

و) $\lim_{س \to -١} \frac{ق(س)}{ل(س) - ق(س)} = \frac{ق(٣)}{ل(٣) - ق(٣)} = \frac{٠}{-٤} =$ صفر

٢) أ) $\lim_{س \to ١} (٤ق(س) + ل(س)) = ١٠ + ٢ = ١٢$

ب) $١٢٥ - ٤ = ١٢١$

ج) $\sqrt[٣]{٥}$ د) $٢٥ - ٤ = ٢١$

هـ) $\lim_{س \to ٥+} |س - ١٢٥| =$ صفر و) $\lim_{س \to ٥-} |س - ١٢٥| =$ صفر

ز) $\lim_{س \to ٥} |س - ١٢٥| =$ صفر ح) $\lim_{س \to ٥} |٤ - ٢٤| =$ صفر

ط) $\lim_{س \to ٣-} [س - ٢]$ = غير موجود ي) $\lim_{س \to ١} (س[س] + |س - ١|)$ غير موجود

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

ز) $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{٥-س}-\sqrt{٥}}{س}$ = صفر ح) $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt{٥-س}-٢}{١-س}$ ق: $-\frac{١}{٤}$

ط) $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س^٢+٤س+٤}-٢}{س} = \lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{(س+٢)^٢}-٢}{س} = \lim_{س \to ٠} \frac{|س+٢|-٢}{س}$ = صفر

٤) فيم جـ $\in [٦، ٥]$

٥) جـ $\in (-٥،٥)$

٦) بما أن $\lim_{س \to ٢} ن(س)$ موجودة $\Rightarrow \lim_{س \to ٢^+} ن(س) = \lim_{س \to ٢^-} ن(س)$

$٩-٤ب = ٣-٨$ ومنه $٤ب = ٦$

$ب = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢} \Leftarrow ٤ب = ٦$

٧) أ) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢-٣س-٢}{س-٣}$ اخرج $٣س-٢ = ص$

$س \to ٣ ، ص \to ٣$

$\lim_{ص \to ٣} \frac{ص}{ص} = ١$

ب) $\lim_{س \to ٢} (ن(س)+ك(س)) = \lim_{س \to ٢} ن(س) + \lim_{س \to ٢} ك(س) = ٢ + ١ = ٣$

ج) $\lim_{س \to ١} ن(س) \times ك(س) + \lim_{س \to ١} ك(س)$ لأن النهايتين موجودتان

$= ٠ + ٢ = ٢$

د) $\lim_{س \to ٢} ن(س) \times \lim_{س \to ٢} ك(س) = ١ \times ١ = ١$

هـ) اخرج $ص = س-١$ $س \to ١ ، ص \to$ صفر

$\lim_{ص \to ٠} ٢ن(ص) + \lim_{س \to ١} ك(س) = ٤ + ٢ = ٦$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

٩) $\lim_{س \to -٢} (س) ق(س) = -١٠$

$-٢ \times \lim_{س \to -٢} ق(س) = -١٠$

$\lim_{س \to -٢} ق(س) = ١٠ \div -٢$

$\lim_{س \to -٢} ق(س) = -٥$

$\therefore \lim_{س \to -٣} (ق^{٢}(س) - ٢ ق(س)) = (\lim_{س \to -٢} ١٥ س)^{٢} - \lim_{س \to -٢} ٤ ق(س)$

$= ١٦ - ١٤$

$= ٢$

١٠) $م(٢) = ٥$

$\lim_{س \to ٢} (٤٣(س) + ٤ - ع) = \lim_{س \to ٢} ٤٣(س) + \lim_{س \to ٢} ٤ - ع$

$= ٣ \times ٥ + ١٦$

$= ١٥ + ١٦ = ٣١$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

ثالثا : نهايات اقترانات كسرية .

تدريب (١)

١) $\lim_{س \to ٥} \frac{س^٢ + ٣س - ١٠}{س + ٥} = \lim_{س \to ٥} \frac{(س + ٥)(س - ٢)}{(س + ٥)} = ٧$

٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ + ١}{س + ١} = ٣$

تدريب (٢)

١) $\lim_{س \to ٥} \left(\frac{٢}{س} - \frac{٢}{٥}\right)\left(\frac{١}{س - ٥}\right)$

$= \lim_{س \to ٥} \left(\frac{٥ - ٢س}{٥س}\right)\left(\frac{١}{(س - ٥)(س + ٥)}\right)$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{-٢(س - ٥)}{٥س(س - ٥)(س + ٥)} = \frac{-٢}{٥٠} = \frac{-١}{٢٥}$

٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{\sqrt{س + ٢} - ٢} \times \frac{\sqrt{س + ٢} + ٢}{\sqrt{س + ٢} + ٢}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(\sqrt{س + ٢} + ٢)}{س + ٢ - ٤}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(\sqrt{س + ٢} + ٢)}{(س - ٢)} = ١٢$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

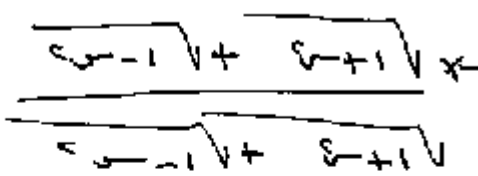
جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

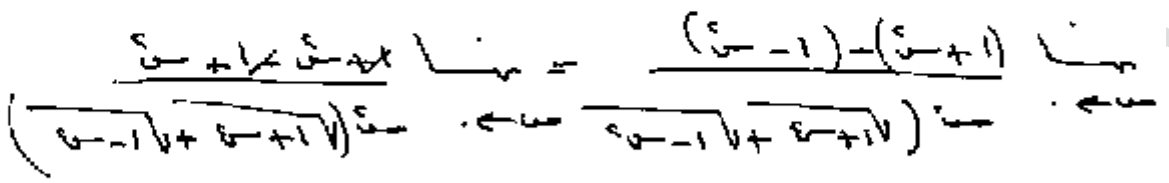
تمارين ومسائل

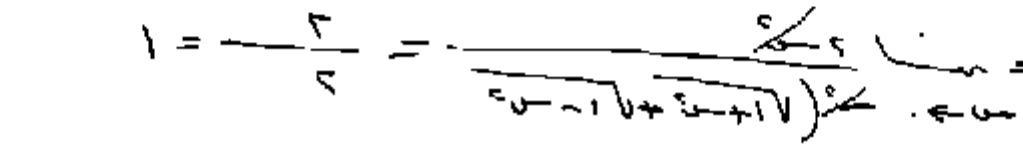
جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

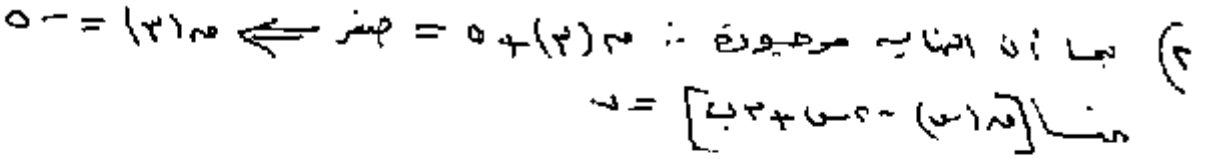
جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

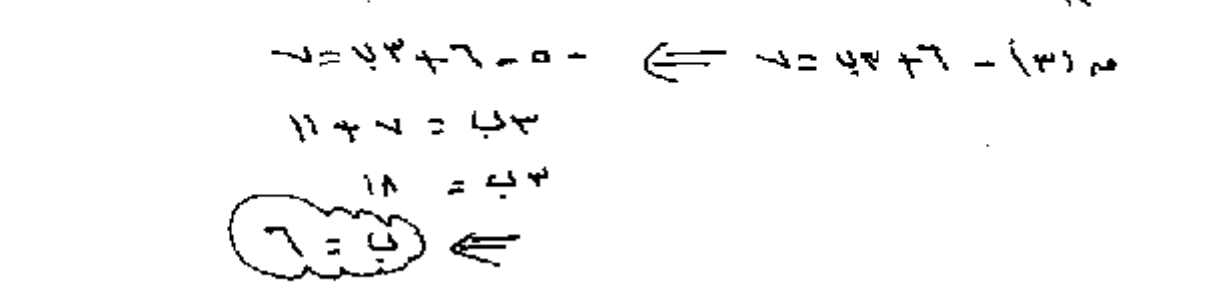
جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

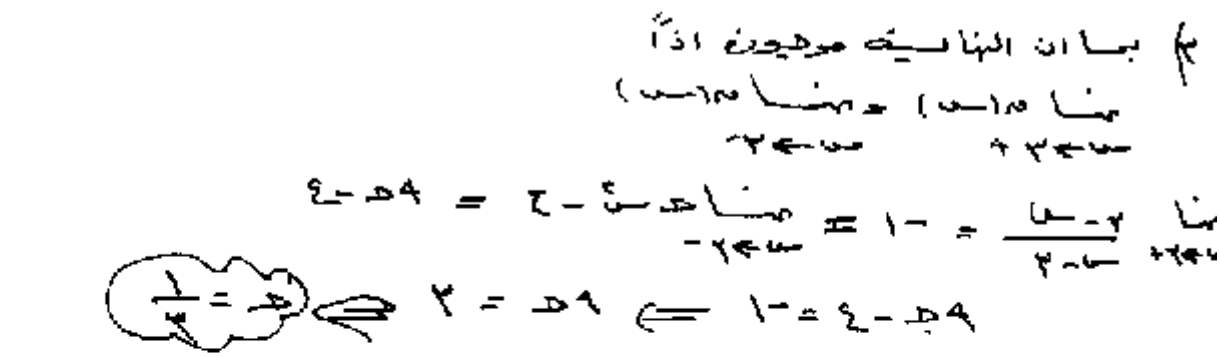












جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

٤) لبيان النهاية موجودة

$$\text{①} \quad \cdots \; 0 = 2 + 4ب + أ$$

$$1 = ب + أ$$

$$\text{②} \quad \cdots \; 1 = 4ب + أ$$

بحل المعادلتين ① ، ②

$$أ = 3 \; ، \; ب = -\frac{2}{3}$$

$$\text{⑤} \quad \begin{array}{c|ccc} & أ & 4 & 2 \\ \hline 1 & & أ & ب+أ \\ \hline & أ & أ+4 & ب+أ+2 \end{array}$$

٥) $\lim_{س \to 1} \frac{س^{ن} - 1}{س - 1} = \lim_{س \to 1} \frac{س^{٨} - 1}{س - 1}$

$$= \lim_{س \to 1} \frac{(س^{٨} - 1)}{(س - 1)} = \lim_{س \to 1} س^{٨} - 1 = 1$$

٦) لبيان أن النهاية موجودة

$$\lim_{س \to ٥} ق(س) = \lim_{س \to ٥} ل(س)$$

$$س \to ع^{٢} \qquad س \to ع^{٣}$$

$$\frac{ع^{٦} - ٥ع^{٢}}{ع^{٥} + ع^{٤} + ١٨} = ع + ٥$$

$$\frac{(ع - ٢)(ع^{٤} + ٢ع^{٣} + ٩)}{٢(ع^{٣} + ٣ع^{٢} + ٩)} = ع + ٥$$

$$ع - ٢ = ٤ع + ١٠ \Leftarrow ع = -١٢ \Leftarrow$$

(ع = -١٢)

٧) النهاية غير موجودة عند اقتراب $س$ من العدد

$$س^{٢} - ٥س + ٦ = 0 \quad (س - ٢)(س - ٣) = 0$$

$$\text{ومنها} \quad أ = ٢ ، ٣$$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

رابعًا: مسائل متنوعة على النهايات.

تدريب (١)

١) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا} س}{س} = 1$

٢) $\lim_{س \to 2} \frac{\text{جا}(س-2)}{(س-2)} = 1$

٣) $\lim_{س \to 0} \frac{س}{\text{ظا} س} = 1$

٤) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}(-س)}{س} = -1$

تدريب (٢) نهاية مقدار الكسر $\frac{س - \text{جا}٢س + \text{ظا}٣س}{٣س - \text{ظا}٤س}$

$$\lim_{س \to 0} \frac{س - \text{جا}٢س + \text{ظا}٣س}{٣س - \text{ظا}٤س} = \frac{1 - \frac{\text{جا}٢س}{س} + \frac{\text{ظا}٣س}{س}}{٣ - \frac{\text{ظا}٤س}{س}} = \frac{1 - ٢ + ٥}{٣} = 1$$

تدريب (٣)

١) $\lim_{س \to 0} \frac{١ - \text{جتا} س}{س^٢} = \lim_{س \to 0} \frac{١ - (١ - ٢\text{جا}^٢ \frac{س}{٢})}{س^٢}$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{٢\text{جا}^٢ \frac{س}{٢}}{س^٢} = ٢ \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا} \frac{س}{٢}}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا} \frac{س}{٢}}{س}$$

$$= ٢ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$$

٢) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}٨س + \text{جا}٤س}{س} = \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}٨س}{س} + \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}٤س}{س}$

$$= ٨ + ٤ = ١٢$$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تدريب (٤)

١) $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا س}{٢س} = \lim_{س \to ٠} \frac{جا(\frac{\pi}{٢} - س)}{(\frac{\pi}{٢} - س)} = ١$

٢) $\lim_{س \to ١} \frac{جا^{٢}(\frac{\pi}{٢} - س)}{١ - س} = \lim_{س \to ١} \frac{جا^{٢}(\frac{\pi}{٢} - س)}{(١ - س)(١ + س)}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{جا(\frac{\pi}{٢} - س)}{(١ + س)} = \frac{١}{٢}$

خواص النهاية

١) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا ٨س}{٢س} = ٤$

٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{س + ظا ٢س - جا س}{س} = \lim_{س \to ٠} \frac{س}{س} + \lim_{س \to ٠} \frac{ظا ٢س}{س} - \lim_{س \to ٠} \frac{جا س}{س}$

$= ١ + ٢ - ١ = ٢$

٣) $\lim_{س \to ٠} (ق(س) + ظ(س)) = \lim_{س \to ٠} ق(س) + \lim_{س \to ٠} ظ(س)$

$= ١ + ٠ = ١$

٤) $\lim_{س \to ٠} ٧ - ٣ جتا^{٢}(\frac{\pi}{٢} - س) ظتا ٥س$

$= \lim_{س \to ٠} ٧ - ٣ جا^{٢}(\frac{\pi}{٢} - س) \times \lim_{س \to ٠} \frac{س}{ظا ٥س} = ٧ - ٣ \times \frac{١}{٥} = \frac{٣٢}{٥}$

٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ + جتا ٤س - ٢ جتا^{٢} س}{س^{٢}} = \lim_{س \to ٠} \frac{١ + جتا ٤س - (جتا^{٢} س + ١)}{س^{٢}}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{جتا ٤س - جتا^{٢} س}{س^{٢}} = \lim_{س \to ٠} \frac{-٢ جا ٣س جا س}{س^{٢}}$

$= -٦ \times ١ = -٦$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

١٩

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

٢٢) $\frac{ب}{ج} = \frac{ب}{١-٥} = ٦$ ، $ب = ١٢$ ، $\frac{ب^{٢}}{ج} = \frac{٩}{١} = ٩$

٢٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا(٣س - ٥س)}{-٥س} \times \lim_{س \to ٠} \frac{جا٢(٣س)}{-٥س} = \frac{-جا٢س}{-٥س}$

$= \frac{٢}{٥}$

الفصل الثاني : الاتصال

أولاً : الاتصال عند نقطة .

تدريب (١)

١) د معرفة عند $س = ٤$ $د(٤) = \frac{|٤-٤|}{٨} = صفر$

احسب مما يأتي :

$\lim_{س \to ٤^{+}} د(س) = \lim_{س \to ٤^{+}} \frac{س-٤}{|س-٤|} = صفر$

$\lim_{س \to ٤^{-}} د(س) = \lim_{س \to ٤^{-}} \frac{س-٤}{-(س-٤)} = -١$

بما أن $\lim_{س \to ٤^{+}} د(س) \neq \lim_{س \to ٤^{-}} د(س) \neq د(٤) = صفر$ ∴ د غير متصل عند $س = ٤$

تدريب (٢)

١) $س = ٥$ ، -٥ هي الأعداد الصحيحة .

تدريب (٣)

بما أن د متصل ∴ $\lim_{س \to -٢^{+}} د(س) = \lim_{س \to -٢^{-}} د(س) = د(-٢)$

$٩ + ٢ب = ٦$ ... ①

$٢٩ - ٢ب = ٦$ ... ②

بحل المعادلتين ينتج $ب = -\frac{١٢}{٢}$ ، $ا = \frac{٦}{٢}$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تدريب (٥)

$$د(س) = \begin{cases} (س+٢)(س-١)^{٢} & ، \ س \leq ١ \\ ٣س^{٢} - ٤س + ١ & ، \ س > ١ \end{cases}$$

د قابلة للاشتقاق عند $س = ١$ ∴ د متصلة عند $س = ١$

د قابلة للاشتقاق عند $س > ١$ ∴ د متصلة على $]١ ، \infty[$

اكتب نص الاتصال عند $س = ١$

$$\text{نها}_{س \to ١^{+}} د = \text{نها}_{س \to ١^{-}} د = د(١)$$

$$٣ = ٣ = ٢ + ١ \quad \therefore \text{د متصلة عند } س = ١$$

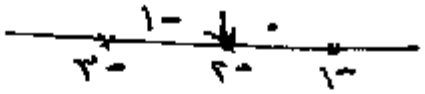
طريقة (٢)

د متصلة عند $س = ١$ لأن $\text{نها}_{س \to ١^{+}} د(س) = \text{نها}_{س \to ١^{-}} د(س) = د(١) = ٣$

ل متصلة عند $س = ١$ لأن $\text{نها}_{س \to ١^{+}} ل(س) = \text{نها}_{س \to ١^{-}} ل(س) = ل(١) = ١$

∴ د قابلة للاشتقاق عند $س = ١$ (تعريف ٢)

تدريب (٦)



$$د(س) = \begin{cases} (س+٥)^{٢} \times ٠ & ، \ س \leq -١ \\ (س+٥)^{٢} \times -١ & ، \ س > -٢ \end{cases}$$

د غير متصلة عند $س = -٢$ لأن:

$\text{نها}_{س \to -٢^{+}} د = ٠$ ، $\text{نها}_{س \to -٢^{-}} د = (-٢+٥)^{٢} \times -١ = -٩$

د غير متصلة عند $س = -٥$

لأن $\text{نها}_{س \to -٥^{+}} د = (س+٥)^{٢} \times ٠ = ٠$ ، $\text{نها}_{س \to -٥^{-}} د = (س+٥)^{٢} \times -١ = ٠$

لكن $\text{نها}_{س \to -٥} د \neq د(-٥)$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تمارين ومسائل

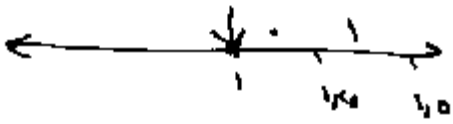
١) $س = -٥$ لأن $\lim_{س \to -٥} ق(س) \neq ق(-٥)$

$س = ١$ لأن $\lim_{س \to ١^-} ق(س) \neq \lim_{س \to ١^+} ق(س)$

$س = ٤$ لأن $ق(٤)$ غير معرّفة

٢) $\lim_{س \to ١^+} ق(س) = ١$

$\lim_{س \to ١^-} ق(س) = ٠$



بما أن $\lim_{س \to ١,٥^+} ق(س) \neq \lim_{س \to ١,٥^-} ق(س)$ ∴ ق غير متصل عند $س = ١,٥$

٣) ق غير متصل عند $س = ١$ فإن $ق(١)$ غير معرّفة

٤) ق غير متصل عند $س = ٢$ لأن $ق(٢)$ غير معرّفة

٥) $\lim_{س \to ٠^+} ق(س) = \lim_{س \to ٠^+} (١ - جتا س)$ = صفر

$\lim_{س \to ٠^-} ق(س) = \lim_{س \to ٠^-} \frac{|جتا س|}{جتا س} = -١$

بما أن $\lim_{س \to ٠^+} ق(س) \neq \lim_{س \to ٠^-} ق(س)$ ∴ ق غير متصل عند $س = ٠$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

٦) $\lim_{س \to ٢^+} ل(س) = \lim_{س \to ٢^+} ٧ = ٧$

$\lim_{س \to ٢^-} ل(س) = \lim_{س \to ٢^-} (٩ - س^٢) = ٥$ ، $٧ \neq ٥$

$\therefore$ ل(٢) = غير موجودة

$\because$ $\lim_{س \to ٢^+} ل(س) \neq$ ل(٢) $\therefore$ ل غير متصل عند س = ٢

٧) م(٢) = ٥

$\lim_{س \to ٢} م(س) = \lim_{س \to ٢} \frac{|س-٢|}{س-٢} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{س-٢}{س-٢} = ١$

$\because$ $\lim_{س \to ٢} م(س) \neq$ م(٢) $\therefore$ م غير متصل عند س = ٢

٨) ك(١) = ٢ × ٢ - ١ = ٣

$\lim_{س \to ١^+} ك(س) = ٣$ ، $\lim_{س \to ١^-} ك(س) =$ غير موجود

$\therefore$ $\lim_{س \to ١}$ ك(س) غير موجودة وعليه ك غير متصل عند س = ١

٩) بما أن ع متصل عند س = ٢

فإن $\lim_{س \to ٢} ع(س) =$ ع(٢)

$\lim_{س \to ٢^+} ع(س) = ٥$ ، $\lim_{س \to ٢^-} ع(س) = \frac{أ}{٢} + ٤$

$\frac{أ}{٢} + ٤ = ٥ \Leftarrow \frac{أ}{٢} = ١ \Leftarrow$ أ = ٢

١٠) ل(١) = ٤ ، $\lim_{س \to ١} ل(س) = \lim_{س \to ١} \frac{س^٣ + س^٢ - ٣س + ٣}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{(س-١)(س^٢+٢س-٣)}{(س-١)}$

$= \lim_{س \to ١} (س^٢ + ٢س - ٣) = ١ + ٢ - ٣ = ٠$

$\because$ $\lim_{س \to ١} ل(س) \neq$ ل(١) $\therefore$ ل غير متصل عند س = ١

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

١١) $م(٢) = [٤+٢] = [٦] = ٦$

$\lim_{س \to ٢^-} م(س) = ٦$ ، $\lim_{س \to ٢^+} م(س) = \lim_{س \to ٢^+} (\frac{٦}{س} + \sqrt{س+٥})$

$= ٣ + ٣ = ٦$

بما أن $\lim_{س \to ٢} م(س) = م(٢)$

∴ م متصل عند $س = ٢$

١٢) $\lim_{س \to ٠^+} ل(س) = \lim_{س \to ٠^-} ل(س) = ل(٠)$

$-٣ = ٤ + ب \Leftarrow ب = -٧$

١٣) $م(٣) = ٢ \times ٣ + ٥ = ٩ + ٥ = ١٤$

$\lim_{س \to ٣} م(س) = ٢(٣)^٢ - ٤$

$= ٢ \times ٩ - ٤$

$= ١٤$

بما أن $\lim_{س \to ٣} م(س) \neq م(٣)$ ∴ م غير متصل عندما $س = ٣$.

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

ثانياً: التقعر على فترة

تدريب (١)

هـ متصل على الفترة (٠، ٢) على صورة كثير حدود.

هـ متصل على الفترة (٥، ٧) على صورة كثير حدود.

هـ(س) = ٩ ، هـ(٣) = ٩

س → ٣

هـ(س) = ٢٥ ، هـ(٥) = ٣٥

س → ٥

∴ هـ متصل عند س = ٥ وبذلك هـ متصل على الفترة [٣، ٧]

هـ(س) = ٢٧ ، هـ(٧) = ٩

س → ٧

∴ هـ غير متصل عند س = ٧ وبذلك هـ متصل على الفترة [٣، ٧)

تدريب (٢)

١) هـ متصل على ح - {٥} على صورة اقتران لسيني معرّف ع قاعدة

عند س = ٥

هـ(س) = $\lim_{س \to ٥}$ (س² - ٢٥) / (س - ٥) = $\lim_{س \to ٥}$ (س - ٥)(س + ٥) / (س - ٥) = ١٠

هـ(٥) = ٥ + ٥ = ١٠

وبذلك هـ متصل على مجموعة الأعداد الحقيقية ح

تدريب (٣)

لإعداد تجربة الإذاعة هـ.

هـ متصل على (٠، أ) و (أ، ٩٠) على صورة كثير حدود.

هـ = { أ - س ، ٠ ≤ س ≤ أ ؛ س - أ ، أ < س ≤ ٩٠ }

هـ متصل على (٠، أ) و (أ، ٩٠) على صورة كثير حدود.

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

عند نقطة التكوّف.

$\lim_{\substack{س \to ا_0 \\ س > ا_0}} (س - ا_0) = ا_0 - ا_0 = 0^+$

$\lim_{\substack{س \to ا_0 \\ س > ا_0}} (ا_0 - س) = 0^-$

$\lim_{س \to ا_0} (ا_0) = ا_0$

$\therefore$ ه متصل عند $ا_0$.

عند الأطراف:

$\lim_{س \to ا_0^+} (س) = ا_0$ ، ه$(ا_0) = ٠٫٩ د$

$\therefore$ ه متصل على يمين العدد $ا_0$.

$\lim_{س \to ٩_0^-} (س) = ٩_0$ ، ه$(٩_0) = ٠٫٩ د$

$\therefore$ ه متصل على يسار العدد ٩_0

وعليه ه متصل على الفترة $[ا_0 ، ٩_0]$

تدريب (٤)

بما أن الاقترانين ع متصل على الفترة $[-\pi ، \pi]$ $\Leftarrow$ ع متصل عند س $= ٠$

وعليه $\lim_{س \to ٠^+} (س) = \lim_{س \to ٠^-} (س) = ع(٠)$

$ع(٠) = \lim_{س \to ٠} \frac{جا ٢س}{٥س} = \frac{٢}{٥}$

$ب = ١$ ، $ب = \frac{٢}{٥} \Leftarrow ٢ = ٥ب$

$\boxed{ب = ١}$ ، $\boxed{ا = ١٠}$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تمارين ومسائل

١) هـ متصل على الفترة $(-١،٢)$ على طبوغ كثير حدود ـ

هـ متصل على الفترة $(٢،١)$ على طبوغ كثير حدود ـ

عند نقطة التقاطع ـ

$\text{نهـ}_{س \to ٢^+} هـ(س) = ٨$ ، $\text{نهـ}_{س \to ٢^-} هـ(س) = ٥+٣ = ٨$

$هـ(١) = ٨$

∴ هـ متصل عند $س = ١$

عند الطرف ٢ :

$\text{نهـ}_{س \to ٢^-} هـ(س) = ١٧$ ، $هـ(٢) = ١٧$

∴ هـ متصل على يسار الصفر $= ٢$

$\text{نهـ}_{س \to ١^-} هـ(س) = ٨$ ، $هـ(١) = ٨$

∴ هـ متصل على يسار الصفر ١

وعليه هـ متصل على الفترة $[-٢،١]$

٤) أحد تعريفي الاقتران ل

$$ل(س) = \begin{cases} ٢س - ١ & ٥ \leq س < ٨ \\ ١٠ - ٢س & ١٠ \geq س > ٥ \end{cases}$$

ل متصل على الفترة $(٨،٥)$ والفترة $(-١٠،٥)$ على طبوغ كثير حدود

عند نقطة التقاطع ـ

$\text{نهـ}_{س \to ٥^+} ل(س) = \text{نهـ}_{س \to ٥^-} ل(س) = ل(٥) =$ عدد

∴ هـ متصل عند $س = ٥$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

عند الطرف :

$\lim_{س \to -1^+} (س^3 + 10س + 20) = 30$ ، $م(-1) = 20$

$\therefore$ م متصل على يمينه العدد -1

$\lim_{س \to 8^-} (16 - س^2) = 16 - 64 = -48$ ، $م(8) = 6$

$\therefore$ م متصل على يسار العدد 8

ومنه م متصل على الفترة $[-1, 8]$

ب) ع متصل على الفترة $(-\infty, 3)$ على اعتبار أن الاقتران كسري
معرف على مجاله

ع متصل على الفترة $(3, \infty)$ على اعتبار أنه كثير حدود.

عند $س = 3$

$\lim_{س \to 3^+} ع(س) = 8$ ، $\lim_{س \to 3^-} ع(س) = \lim_{س \to 3^-} \frac{س^3 - 27}{س - 3} =$

$= \lim_{س \to 3^-} \frac{(س - 3)(س^2 + 3س + 9)}{(س - 3)}$

$= -27$

بما أن $\lim_{س \to 3^+} ع(س) \neq \lim_{س \to 3^-} ع(س)$ $\therefore$ ع غير متصل عند $س = 3$

ومنه ع متصل على $ح - \{3\}$

ج) ل متصل على الفترة $(-\infty, 4)$ لأنه تربيعي معرف

ل متصل على الفترة $(4, \infty)$ متصل (لأنه مطلق)
عند نقطة التحول $س = 4$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

$\lim_{س \to ٤^+} ل(س) = \lim_{س \to ٤^-} ل(س) = ل(٤)$ ، $\lim_{س \to ٤^+} ل(س) = \lim_{س \to ٤^-} ل(س)$

∴ ل متصل عند س = ٤

وعليه ل متصل على الفترة $(-\infty ، \infty)$

٥) $\lim_{س \to ٤^-} ع(س) = ٨$ ، $ع(٤) = ٤$

∴ ع غير متصل عند س = ٤ فإنها غير متصلة أيضاً

$\lim_{س \to ٣^+} ع(س) = ٨$ ، $ع(٣) = ٥$

∴ ع غير متصل عند س = ٣ من جهة اليسار

ع متصل على الفترة $(٤ ، ٣)$ على الرغم أنها غير معرفة عند طرفي الفترة

وعليه ع متصل على الفترة $[٤ ، ٣]$

٦) هـ متصل على الفترة $(٣ ، ٠)$ اقترن جبري معرّف على مجاله

بما أن الفترة $(٦ ، ٣)$ موجبة لنقطة تحوّل عند س = ٤

$\lim_{س \to ٤^+} هـ(س) = ٢$ ، $\lim_{س \to ٤^-} هـ(س) = ٢$

∴ هـ غير متصل عند س = ٤

عند الطرف

$\lim_{س \to ٠^+} هـ(س) = ٢$ ، $هـ(٠) = ١$

∴ هـ غير متصل على يمين العدد ٠

$\lim_{س \to ٦^-} هـ(س) = ٢$ ، $هـ(٦) = ٣$

∴ هـ متصل على يسار العدد ٦

وعليه هـ متصل على الفترة $(٠ ، ٦] - \{٤\}$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

٧) بما ان المستقيمان م متصل ∴

$$\text{نها}_{س \to ٢} \text{ق}(س) = ٧$$

$$\text{نها}_{س \to ٢} \frac{س^{٣} + ٢(هـ-١)س - ٤هـ}{س-٢} = ٧$$

بما ان المقام معطوم ∴ (س-٢) عامل من عوامل البسط

$$\text{نها}_{س \to ٢} \frac{(س^{٣} + ٢(هـ-١)س - ٤هـ)}{(س-٢)} = \text{نها}_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(س^{٢} + ٢س + ٢(هـ-١))}{(س-٢)} = ٧$$

$$٢ + ٢ + ٢(هـ-١) = ٧$$

$$٢(هـ-١) = ٣$$

$$هـ - ١ = \frac{٣}{٢} \Leftarrow \boxed{هـ = \frac{٥}{٢}}$$

٨) م متصل على الفترة $(-\infty, ٣)$ م طبعا غير معدوم

م متصل على الفترة $[٢, ٤]$ اقتران قطعي

م متصل على الفترة $(٤, \infty)$ اقتران نسبي معرف على مجاله.

عند الخرج

$$\text{نها}_{س \to ٣^{-}} \text{م}(س) = ٤ \quad \text{م}(٣) = ٣ \quad \therefore \text{م غير متصل عند } س = ٣$$

$$\text{نها}_{س \to ٤^{-}} \text{م}(س) = ٣ \quad ، \quad \text{نها}_{س \to ٤^{+}} \text{م}(س) = \frac{٢٠}{٢٦-١٦} = \frac{٢٠}{١٠} = ٢$$

∴ م غير متصل عند $س = ٤$

∴ م متصل على $\mathbb{ح} - \{٤, ٣\}$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

٩) في الفترة $(-\infty, 1)$ $\Rightarrow$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\Rightarrow$ f متصل على $(-\infty, 1)$

في الفترة $(1, \infty)$ $\Rightarrow$ f متصل (مجموع الدوال متصلة)

نقطة التحول $x = 1$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \infty$ ، $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

$\therefore$ f غير متصل عند $x = 1$

الإطراف :

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$f(1) = -2$

$\Rightarrow$

f متصل على يسار العدد 1

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{12}{5} + \infty$

$\Rightarrow$

f متصل على يمين العدد 1

وعليه f متصل على الفترة $[-\infty, 1] - \{1\}$

١٠) يكون الدوران السببي متضارع عندما الجذور الحقيقية

إذا كانت المميز $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

لمعامل

$1 - 4 \times 3 \times 3 < 0$

$1 - 12 < 0 \Leftarrow 12 > 1$

ثم p التي تحقق المتباينة $p > \frac{1}{12}$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

١) أ) $\lim_{س \to ٠} ظا٤(س) = ٣$

ب) $\lim_{س \to -٢} ظا(س) = -٢$

ج) $\lim_{س \to ٣} ظا(س) = ٣$

د) $\lim_{س \to ٠} ظا٤(س) = ٤$

هـ) $م = \{٠، ٢، ٤\}$

و) $ن = \{٠، ٢، ٤\}$

٢) الطرف $٢ - ١ + ١ = ٠$ ، $س = ١$ ، $ص = ٣$

$\lim_{س \to ١} (س + ٢)^{٤} = ١ + ١٦ = ١٧$

٣) بما أن النهاية موجودة

$\therefore \lim_{س \to -٢} ظا(س) = \lim_{س \to +٢} ظا(س)$

$١٠ = ٩ه - ٤$

$٩ه = ٦ \Leftarrow ه = \frac{١}{٢}$

٤) حتى تكون النهاية موجودة : $(س - ٢)$ عامل من عوامل البسط

$٠ = ٩ + ٢ \times (١٣ + ٩) + ٤$

$٠ = ٩ + ٢٦ + ٩٢ + ٤$

$٠ = ٤٣ + ٣ \Leftarrow ٩ = -١٠$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

٥) بما أن $\lim_{س \to ٥} م(س)$ موجودة

$\therefore \lim_{س \to ٥^+} م(س) = \lim_{س \to ٥^-} م(س)$

$\lim_{س \to ٥^+} \frac{|س^٢ - ٤س - ٥|}{|س - ١| - ٥} = \lim_{س \to ٥^+} \frac{(س+١)(س-٥)}{(س-٥)} = ٦$

$\frac{س^٢ - ٤س - ٥}{١٠} \times \frac{س^٢ + ٢س + ٥}{٥} \times \frac{س - ٤س - ٥}{١٠}$

$\lim_{س \to ٥^-} م(س) = \lim_{س \to ٥^-} ٢ب + ٣س + ٥ = ٦$

$= ٢ب + ١٥ + ٥ = ٦$ ⇐ $\boxed{ب = -٤}$

٦) $\lim_{س \to ٠} \frac{س - جاس}{س^٣ جتاس} = \lim_{س \to ٠} \frac{س - جاس}{(١ - جتاس)(١ + جتاس)} = \lim_{س \to ٠} \frac{س - جاس}{س^٢ (١ + جتاس)}$

$\lim_{س \to ٠} \frac{س - جاس}{س^٢ جاس} = \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \times \lim_{س \to ٠} \frac{س - جاس}{س جاس} = ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

$\lim_{س \to ٠} \frac{س - جاس}{س^٢ جاس} = \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س} \left(\frac{س}{جاس} - \frac{جاس}{جاس} \right)$

$= \frac{١}{٠} - ١$

$\therefore \lim_{س \to ٠} \frac{س - جاس}{س^٣ جاس}$ غير موجود

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

١١) ع(س) = $\sqrt{س}$ متصل على الفترة (٠، ∞) اشرح هندسيا متى يكون اقتران هذه الدالة معرّف على مجاله.

الحل: نجد نهايات على يسار العدد ٢

$\lim_{س \to ٢^-}$ ع(س) = $\lim_{س \to ٢^-}$ $\sqrt{س}$ = $\sqrt{٢}$

هـ(٢) = $\sqrt{[٢]+٢}$ = $\sqrt{٤}$ = ٢

بما أن $\lim_{س \to ٢^-}$ ع(س) ≠ هـ(٢) ∴ ع غير متصل على يسار العدد ٢

وعليه ع متصل على الفترة (٠، ٢)

١٢) هـ متصل على الفترة (-∞، ١) على صورة كثير حدود.

هـ متصل على الفترة (١، ∞) لأنه حاصل قسمة كثير حدود باقتران هذه الدالة سيكون مجالها مستثنى منها ١.

الحل: نجد نهايات هـ عند س = ١

$\lim_{س \to ١^+}$ هـ(س) = $\lim_{س \to ١^+}$ س - ١ = ١

$\lim_{س \to ١^-}$ هـ(س) = $\lim_{س \to ١^-}$ $س^٢$ = ١

بما أن $\lim_{س \to ١^+}$ هـ(س) ≠ $\lim_{س \to ١^-}$ هـ(س) ∴ هـ غير متصل عند س = ١

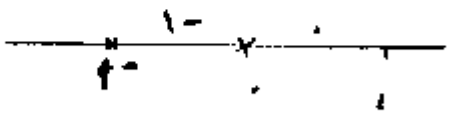
جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

١٣) د متصل على الفترة $(-\infty, -1)$ على الصورة اقترن شيئاً مقرراً على مجال ـ

اثبت بأن الدالة د على الفترة $(-\infty, -1)$

يوجد نقطة تشعب عند $س = 0$.

د متصل على الفترة $(-\infty, -1)$ ع الصورة $ص = \ldots$



د متصل على الفترة $(-1, 0)$ على الصورة $ص = \ldots$

اثبت بأن الاتصال عند $س = 0$.

$\lim_{س \to 0^+} د(س) = \lim_{س \to 0^+} \ldots$ ، $\lim_{س \to 0^-} د(س) = \lim_{س \to 0^-} \ldots = 0$

$د(0) = 0$ ∴ د متصل عند $س = 0$ ∴ د متصل على $(-\infty, -1)$

عند نقطة التشعب $س = -1$

$\lim_{س \to -1^+} د(س) = \lim_{س \to -1^+} \ldots = 1$

$\lim_{س \to -1^-} د(س) = \lim_{س \to -1^-} \frac{\ldots}{\ldots} = \lim_{س \to -1^-} (س - 1) = -2$

∴ د غير متصل عند $س = -1$

عند الطرف $س = -2$

$\lim_{س \to -2^+} د(س) \stackrel{?}{=} د(-2)$

$\lim_{س \to -2^+} \frac{س^3 + 1}{س + 2} = \lim_{س \to -2^+} \frac{(س - 1)(س + 1)}{(س + 2)} = -3$

$د(-2) = -3$

∴ د متصل عند $س = -2$ من جهة اليمين

ومنه د متصل على الفترة $[-2, -1) - \{-1\}$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

١٤) $\text{ل} \times \text{هـ} = \begin{cases} \cdot & \text{، } س = ١ \\ \frac{س-١}{س+١} & \text{، } ١ < س < ٢ \\ ١,٥ & \text{، } س = ٢ \end{cases}$

$\text{ل} \times \text{هـ}$ متصل على الفترة $(١,٠)$ لأنها كسرية حدودها

$\text{ل} \times \text{هـ}$ متصل على الفترة $(٢,١)$ لأنها اقتران نسبي مقامه

المتباينة الرياضية عند نقطة الحدود

عند $س = ١$

$\text{نها}_{س \to ١^+} \text{ل} \times \text{هـ} = \text{صفر}$ ، $\text{نها}_{س \to ١^-} \text{ل} \times \text{هـ} = \text{صفر}$ ، $\text{ل} \times \text{هـ}(١) = \cdot$

$\therefore \text{ل} \times \text{هـ}$ متصل عند $س = ١$

عند الطرفين

$\text{نها}_{س \to ٠^+} \text{ل} \times \text{هـ} = \cdot$ ، $\text{ل} \times \text{هـ}(٠) = \cdot$ $\therefore \text{ل} \times \text{هـ}$ متصل من اليمين عند $س = ٠$

$\text{نها}_{س \to ٢^-} \text{ل} \times \text{هـ} = \text{نها}_{س \to ٢^-} \frac{س-١}{س+١} = \frac{٢}{٤}$ ، $\text{ل} \times \text{هـ}(٢) = ١,٥$

بما أن $\text{نها}_{س \to ٢^-} \text{ل} \times \text{هـ} \neq \text{ل} \times \text{هـ}(٢)$ $\therefore \text{ل} \times \text{هـ}$ غير متصل عند $س = ٢$

العدد ٢ جعلت $\text{ل} \times \text{هـ}$ متصل على الفترة $[٠,٢)$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

(١٥

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
ج	ج	ب	أ	ج	د	د	ج	ج	ب

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

الفصل الأول : متوسط التغير والمشتقات

أولاً : متوسط التغير

تدريب (١)

١) $\Delta س = ٢,٧ - ٤ = -٠,٣$

٢) $\Delta س = س_{ن+١} - س_ن = ١$

تدريب (٢)

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_{(٢,١)} - ص_{(٢)}}{٢,١ - ٢} = \frac{(٥ - ٢,١)^٢ - (٥ - ٢)^٢}{٠,١}$$

$$= \frac{٤,١}{٠,١} = ٤١$$

تدريب (٣)

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_{(٥)} - ص_{(٢)}}{٥ - ٢} = \frac{١ - ٠}{٣} = \frac{١}{٣}$$

تدريب (٤)

$$\bar{ع} = \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف_{(٤)} - ف_{(١)}}{٣} = \frac{٥٢ - ١٩}{٣} = \frac{٣٣}{٣} = ١١$$

تدريب (٥)

معدل التغير $= ظا ١٣٥° = -١$

تمارين ومسائل

(١) أ) $\Delta ص = ص_{(٤)} - ص_{(٣)} = ١٢ - ٦ = ٦$

ب) $\Delta ص = ص_{(٢ + هـ)} - ص_{(٢)} = (٢ + هـ)^٢ - (١ + هـ) - (٤ - ٢)$

$= ٤ + ٤ هـ + هـ^٢ - ٢ - هـ - ٤ + ٢ = هـ^٢ + ٣ هـ$

(٢) معدل التغير $= \frac{ص_{(١ + هـ)} - ص_{(١)}}{هـ} = \frac{(١ + هـ)^٣ - ٣ - (١ - ٣)}{هـ}$

$= \frac{١ + ٣هـ + ٣هـ^٢ + هـ^٣ - ٣ - ١ + ٣}{هـ} = ٣ + هـ^٢ + ٣هـ$

(١٦)

تدريب (٦)

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص(٤) - ص(١)}{٤ - ١} = \frac{(١٢ - ٤م(٤) + ٢) - (٣ - م(١) + ٢)}{٣}$$

$$= \frac{(١٢ + ٢ - ٣ - ٢) - (م(٤) - م(١))}{٣} = \frac{٩}{٣} - \frac{م(٤) - م(١)}{٣}$$

$$= ٣ - ٦ = -٣$$

(٣) س = ٢ − ٠٫١ = ١٫٩
ص = ٥ − ٠٫٦ = ٤٫٤
النقطة (١٫٩ ، ٤٫٤)

(٤) نفرض طول ضلع المربع س وحدة ∴ مساحته (س) = س²

معدّل التغير = $\frac{\text{مـ}(٦٫١) - \text{مـ}(٦)}{٠٫١} = \frac{٣٧٫٢١ - ٣٦}{٠٫١}$

$= \frac{١٫٢١}{٠٫١} = ١٢٫١$ سم²

(٥) معدّل التغير = $\frac{\text{مـ}(٢) - \text{مـ}(-١)}{٢ - (-١)} = \frac{٤ \times ٤ - ٣\,\text{مـ}(٢) - (٤ \times ١ - ٣\,\text{مـ}(-١))}{٣}$

$= \frac{١٦ - ٤ - ٣(\text{مـ}(٢) - \text{مـ}(-١))}{٣} = \frac{١٢}{٣} - ٣ \times \frac{\text{مـ}(٢) - \text{مـ}(-١)}{٣}$

$= ٤ - ٣ \times ٥ = -١١$

(٦) أ) $\bar{ع} = \frac{ن(٥) - ن(٢)}{٥ - ٢} = \frac{٣٠٠ - ١٢٥ - (٢٠٠ - ١٢٥)}{٣}$

$= \frac{١٧٥ - ١٠٠}{٣} = \frac{٧٥}{٣} = ٢٥$

ب) $\bar{ع} = \frac{ن(٥ن) - ن(٠)}{٥ن} = \frac{٦٠ ن ٥ - (٥ن)٥^{٢}}{٥ن}$

$= \frac{٥ن(١٢ - ٥ن)}{٥ن} = ٥(١٢ - ٥ن)$

(٧) معدّل التغير = $\frac{\text{مـ}(٤) - \text{مـ}(١)}{٤ - ١} = \frac{\text{مـ}^{٢}(٤) - \text{مـ}^{٢}(١)}{٣}$

$= \frac{(\text{مـ}(٤) - \text{مـ}(١))(\text{مـ}(٤) + \text{مـ}(١))}{٣}$

$= \frac{\text{مـ}(٤) - \text{مـ}(١)}{٣} \times (\text{مـ}(٤) + \text{مـ}(١)) = ٣ \times ٢ = ٦$

(٣)

٨) $\frac{هـ(٩)-هـ(٥)}{٩-٥} = ١٤$ ، $هـ(٩)-هـ(٥) = ٥٦$

$\frac{هـ(٥)-هـ(٢)}{٥-٢} = ٧$ ، $هـ(٥)-هـ(٢) = ٢١$

معدل التغير $= \frac{هـ(٩)-هـ(٢)}{٩-٢} = \frac{هـ(٩)-هـ(٥)+هـ(٥)-هـ(٢)}{٧}$

$= \frac{هـ(٩)-هـ(٥)}{٧} + \frac{هـ(٥)-هـ(٢)}{٧} = \frac{٥٦}{٧} + \frac{٢١}{٧} = ١١$

٩) معدل التغير $= \frac{هـ(١)-٤}{١-٢} = ظا\frac{\pi}{٤}$

$هـ(١)-٤ = -١$ ، $هـ(١) = ٥$

١٠) معدل التغير $= \frac{هـ(٤)-هـ(١)}{٤-١} = \frac{[٤+١]-[١-١٣]}{٣}$

$= \frac{٥-١}{٣} = \frac{٤}{٣}$

١١) $هـ(س) = \frac{١}{س^٢+س}$ ، $س \neq ٠$

مقدار التغير $= هـ(س_١)-هـ(١) = -\frac{١}{٣}$

$\frac{١}{س_١^٢+س_١} - \frac{١}{٢} = -\frac{١}{٣}$

$\frac{١}{س_١^٢+س_١} = \frac{١}{٦}$ ، $س_١^٢+س_١ = ٦$

$س_١^٢+س_١-٦ = ٠$ ، $(س_١+٣)(س_١-٢) = ٠$

إذن $س_١ = ٢$ ، -٣ مرفوض

١٢) ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{١٠-٢}{٥-١} = ٢$

ميل العمودي $= -\frac{١}{٢}$

ثانياً: المشتقة الأولى

التدريبات

(١) أ) $\text{هـ}'(-١) = \lim_{\text{د} \to ٠} \frac{\text{هـ}(-١+\text{د}) - \text{هـ}(-١)}{\text{د}} = \lim_{\text{د} \to ٠} \frac{(-١+\text{د})^{٣} + ٢(-١+\text{د}) - (-٣)}{\text{د}}$

$= \lim_{\text{د} \to ٠} \frac{\text{د}^{٣} - ٣\text{د}^{٢} + ٣\text{د} - ١ - ٢ + ٢\text{د} + ٣}{\text{د}}$

$= \lim_{\text{د} \to ٠} \frac{\text{د}(\text{د}^{٢} - ٣\text{د} + ٥)}{\text{د}} = ٥$

ب) نفرض $٥\text{د} = \text{ل}$ ومنه $\text{د} = \frac{\text{ل}}{٥}$ ، $\text{ل} \to ٠$ عندما $\text{د} \to ٠$.

$\lim_{\text{د} \to ٠} \frac{\text{هـ}(٠) - \text{هـ}(٥\text{د})}{٣\text{د}} = \lim_{\text{ل} \to ٠} \frac{\text{هـ}(٠) - \text{هـ}(\text{ل})}{\frac{٣\text{ل}}{٥}}$

$= -٥ \lim_{\text{ل} \to ٠} \frac{\text{هـ}(\text{ل}) - \text{هـ}(٠)}{\text{ل}} = -٥\,\text{هـ}'(٠) = -٣٠$

(٢) $\text{هـ}'(٢) = \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{هـ}(\text{س}) - \text{هـ}(٢)}{\text{س} - ٢} = \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\frac{\text{س}}{\text{س}+١} - \frac{٢}{٣}}{\text{س} - ٢}$

$= \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{٣\text{س} - ٢(\text{س}+١)}{٣(\text{س}+١)(\text{س} - ٢)} = \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س} - ٢}{٣(\text{س}+١)(\text{س} - ٢)}$

$= \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{١}{٣(\text{س}+١)} = \frac{١}{٩}$

(٣) $\text{هـ}'(-١) = \lim_{\text{س} \to -١} \frac{\text{هـ}(\text{س}) - \text{هـ}(-١)}{\text{س} - (-١)} = \lim_{\text{س} \to -١} \frac{\text{س}^{٤} + ٤\text{س} - ١ - (-٣)}{\text{س} + ١}$

$= \lim_{\text{س} \to -١} \frac{\text{س}^{٤} + ٤\text{س} + ٤}{\text{س}+١} = \lim_{\text{س} \to -١} \frac{٤(\text{س}+١)}{\text{س}+١} = ٤$

$\text{س} = ١$ نقطة تضرع

$\text{هـ}'_{-}(١) = \lim_{\text{س} \to ١^{-}} \frac{\text{هـ}(\text{س}) - \text{هـ}(١)}{\text{س} - ١} = \lim_{\text{س} \to ١^{-}} \frac{\text{س}^{٤} + ٤\text{س} - ١ - ٥}{\text{س} - ١}$

$= \lim_{\text{س} \to ١^{-}} \frac{٤(\text{س} - ١)}{\text{س} - ١} = ٤$

$\text{هـ}'_{+}(١) = \lim_{\text{س} \to ١^{+}} \frac{\text{هـ}(\text{س}) - \text{هـ}(١)}{\text{س} - ١} = \lim_{\text{س} \to ١^{+}} \frac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٥ - ٥}{\text{س} - ١} = \lim_{\text{س} \to ١^{+}} \frac{\text{س}(\text{س} - ٣)}{\text{س} - ١} = -٢$

$\text{هـ}'(١)$ غير موجودة لأن $\text{هـ}'_{-}(١) \neq \text{هـ}'_{+}(١)$

(٤)

(٤) $\text{نا}(س) = \text{نها}_{س \to ٤} \frac{\text{نا}(س) - \text{نا}(٤)}{س - ٤} = \text{نها}_{س \to ٤} \frac{\frac{س}{س^٢ + ٨} - \frac{٤}{٤^٢ + ٨}}{س - ٤}$

$= \text{نها}_{س \to ٤} \frac{٤(س^٢ + ٨) - س(٤^٢ + ٨)}{(س - ٤)(٤^٢ + ٨)(س^٢ + ٨)} = \text{نها}_{س \to ٤} \frac{٤س^٢ + ٣٢ - ٤س^٢ - ٨س}{(س - ٤)(٤^٢ + ٨)(س^٢ + ٨)}$

$= \text{نها}_{س \to ٤} \frac{-٨(س - ٤)}{(س - ٤)(٤^٢ + ٨)(س^٢ + ٨)} = \text{نها}_{س \to ٤} \frac{-٨}{(٤^٢ + ٨)(س^٢ + ٨)}$

$= \frac{-٨}{(٤^٢ + ٨)^٢} = \frac{-٨}{(٢٤)^٢}$

نما رين وما شل

(١) (أ) $\text{نا}(٣) = \text{نها}_{هـ \to ٠} \frac{\text{نا}(٣ + هـ) - \text{نا}(٣)}{هـ} = \text{نها}_{هـ \to ٠} \frac{٨ - ٥(٣ + هـ) - (-٧)}{هـ}$

$= \text{نها}_{هـ \to ٠} \frac{٨ - ١٥ - ٥هـ + ٧}{هـ} = \text{نها}_{هـ \to ٠} \frac{-٥هـ}{هـ} = -٥$

ب) $\text{نا}(-١) = \text{نها}_{هـ \to ٠} \frac{\text{نا}(-١ + هـ) - \text{نا}(-١)}{هـ} = \text{نها}_{هـ \to ٠} \frac{(-١ + هـ)^٣ + ٦(-١ + هـ)^٢ - ٠}{هـ}$

$= \text{نها}_{هـ \to ٠} \frac{هـ^٣ - ٣هـ^٢ + ٣هـ - ١ + ٦هـ^٢ - ١٢هـ + ٦}{هـ} = \text{نها}_{هـ \to ٠} \frac{هـ^٣ + ٣هـ^٢ - ٩هـ}{هـ}$

$= \text{نها}_{هـ \to ٠} \frac{هـ(هـ^٢ + ٣هـ - ٩)}{هـ} = -٩$

ج) $\text{ل}'(٥) = \text{نها}_{س \to ٥} \frac{\text{ل}(س) - \text{ل}(٥)}{س - ٥} = \text{نها}_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س - ١} - ٢}{س - ٥}$

$= \text{نها}_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س - ١} - ٢}{س - ٥} \times \frac{\sqrt{س - ١} + ٢}{\sqrt{س - ١} + ٢} = \text{نها}_{س \to ٥} \frac{س - ١ - ٤}{(س - ٥)(\sqrt{س - ١} + ٢)}$

$= \text{نها}_{س \to ٥} \frac{س - ٥}{(س - ٥)(\sqrt{س - ١} + ٢)} = \text{نها}_{س \to ٥} \frac{١}{(\sqrt{س - ١} + ٢)} = \frac{١}{٤}$

(٤)

تدريب (٥)

نفرض طول ضلع المصفوفة س وحدة حتى م(س)

فيكون م(س) = س²

$$م'(س) = \text{نها}_{ع \to س} \frac{م(ع) - م(س)}{ع - س} = \text{نها}_{ع \to س} \frac{ع^2 - س^2}{ع - س}$$

$$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع + س)}{ع - س} = \text{نها}_{ع \to س} (ع + س) = ٢س$$

م'(١٠) = ٢ × ١٠ = ٢٠ وحدة مربعة / ث

(٥)

ع) $هـ(٠)$ ، $هـ(٦)$ غير موجودة لأن $س = ٠$ ، $س = ٦$ طرفي فترة .

$س = ٣$ نقطة تفرع

$$هـ'_{-}(٣) = \lim_{س \to ٣^-} \frac{هـ(س) - هـ(٣)}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^-} \frac{س^٢ - ٦س}{س - ٣}$$

$$= \lim_{س \to ٣^-} \frac{(س+٢)(س-٣)}{س-٣} = ٥$$

$$هـ'_{+}(٣) = \lim_{س \to ٣^+} \frac{هـ(س) - هـ(٣)}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^+} \frac{٥س - ٩ - ٦}{س - ٣}$$

$$= \lim_{س \to ٣^+} \frac{٥(س-٣)}{س-٣} = ٥$$

$هـ'(٣) = ٥$ لأن $هـ'_{+}(٣) = هـ'_{-}(٣) = ٥$

د) نعيد تعريف $هـ(س)$

$$هـ(س) = \begin{cases} س^٢ - ٤ & س < -٢ \\ ٤ - س^٢ & -٢ \le س < ٢ \\ س^٢ - ٤ & س \ge ٢ \end{cases}$$

$$هـ'(١) = \lim_{س \to ١} \frac{هـ(س) - هـ(١)}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{٤ - س^٢ - ٣}{س - ١}$$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{-(س^٢ - ١)}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{-(س-١)(س+١)}{س-١} = -٢$$

$س = ٢$ نقطة تفرع

$$هـ'_{-}(٢) = \lim_{س \to ٢^-} \frac{هـ(س) - هـ(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^-} \frac{٤ - س^٢ - ٠}{٢ - س}$$

$$= \lim_{س \to ٢^-} \frac{(٢-س)(٢+س)}{٢-س} = \lim_{س \to ٢^-} -(٢+س) = -٤$$

$$هـ'_{+}(٢) = \lim_{س \to ٢^+} \frac{س^٢ - ٤ - ٠}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{(س-٢)(س+٢)}{س-٢} = ٤$$

$هـ(٢)$ غير موجودة لأن $هـ'_{+}(٢) \neq هـ'_{-}(٢)$

و) $هـ(-١) = \lim_{س \to -١} \frac{هـ(س) - هـ(-١)}{س + ١} = \lim_{س \to -١} \frac{\frac{س^٢ - ٤}{س + ٢} + ١}{س + ١} = \lim_{س \to -١} \frac{س^٢ + س + ٢}{(س+٢)(س+١)}$

$$= \lim_{س \to -١} \frac{٢(س+١)}{(س+٢)(س+١)} = \frac{٢}{١} = ٢$$

(٦)

ج) $\frac{ص}{ص}$ = $\lim_{س \to ٥} \frac{د(س) - د(٥)}{س - ٥}$ = $\lim_{س \to ٥} \frac{س^٣ - ٣س^٢ + ٤}{س - ٥}$

= $\lim_{س \to ٥} \frac{(\frac{س^٣}{٥} - \frac{٣س^٢}{٥} + \frac{٤}{٥}) - (٥^٢ - ٣(٥) + ٤)}{س - ٥}$ = $\lim_{س \to ٥} \frac{(س-٥)(س+٥)(س-١)}{٥س(س-٥)}$

= $\lim_{س \to ٥} \frac{٣س(س^٢ - ٥^٢) - ٣(س-٥)}{٥س(س-٥)}$ = $\lim_{س \to ٥} \frac{(س-٥)(٣س(س+٥)+٣)}{٥س(س-٥)}$

= $\frac{س^٢ + ٣}{س^٢}$

د) $د'(س)$ = $\lim_{س \to ٤} \frac{د(س) - د(٤)}{س - ٤}$ = $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{٢س-٦} - \sqrt{٢(٤)-٦}}{س - ٤}$

= $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{٢س-٦} - \sqrt{٢}}{س - ٤} \times \frac{\sqrt{٢س-٦} + \sqrt{٢}}{\sqrt{٢س-٦} + \sqrt{٢}}$

= $\lim_{س \to ٤} \frac{٢س - ٦ - ٢}{(س-٤)(\sqrt{٢س-٦} + \sqrt{٢})}$ = $\lim_{س \to ٤} \frac{٢(س-٤)}{(س-٤)(\sqrt{٢س-٦} + \sqrt{٢})}$

= $\lim_{س \to ٤} \frac{١}{\sqrt{٢س-٦} + \sqrt{٢}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

٣) أ) $\lim_{ه \to ٠} \frac{د(س+ه) - د(س-ه)}{٢ه}$ = $\lim_{ه \to ٠} \frac{د(س+ه) - د(س) + د(س) - د(س-ه)}{٢ه}$

= $\lim_{ه \to ٠} \frac{د(س+ه) - د(س)}{٢ه} + \lim_{ه \to ٠} \frac{د(س) - د(س-ه)}{٢ه}$ بوضع $ه = -ه$

= $د'(س) + \lim_{ه \to ٠} \frac{د(س-ه) - د(س)}{-٢ه}$ = $د'(س) + د'(س)$

= $٢د'(س)$

ب) $\lim_{س \to ع} \frac{ع د(س) - س د(ع)}{ع - س}$ = $\lim_{س \to ع} \frac{ع د(س) + ع د(ع) - ع د(ع) - س د(ع)}{ع - س}$

= $\lim_{س \to ع} \frac{ع د(ع) - س د(ع)}{ع - س}$ + $\lim_{س \to ع} \frac{ع د(س) - ع د(ع)}{ع - س}$

= $\lim_{س \to ع} \frac{د(ع)(ع - س)}{ع - س}$ - $\lim_{س \to ع} \frac{ع(د(ع) - د(س))}{ع - س}$

= $د(ع) - ع د'(س)$. $\lim_{س \to ع}$ ع = $د(س) - س د'(س)$

(٦)

السؤال (٤)

هـ) $\frac{ص}{س} = \frac{هـ(ع)-هـ(س)}{ع-س} \times \frac{ع^3-س^3}{ع-س}$

$= \frac{(ع-س)(ع^2+عس+س^2)}{ع-س} \times (ع^2+عس+س^2) = 3س^2$

د) $\frac{ص}{س} = \frac{هـ(ع)-هـ(س)}{ع-س} \times \frac{ع^3-أ^3س}{ع-س}$

$= \frac{(ع-أس)(ع^2+أعس+أ^2س^2)}{ع-س} \times \frac{(ع-أس)(ع^2+أعس+أ^2س^2)}{(ع-أس)(ع^2+أعس+أ^2س^2)}$

$= \frac{1}{3أ^2س^2}$

(٧) جـ) $\lim_{س \to ج} \frac{ج^{٢} \ln(ج) - ٢س^{٢} \ln(س)}{ج - س} = \lim_{س \to ج} \frac{ج^{٢} \ln(ج) - ج^{٢} \ln(س) + ج^{٢} \ln(س) - ٢س^{٢} \ln(س)}{ج - س}$

$= ٢ \lim_{س \to ج} \frac{ج^{٢}(\ln ج - \ln س)}{ج - س} + \lim_{س \to ج} \frac{\ln(س)(ج^{٢} - س^{٢})}{ج - س}$

$= ٢ س^{٢} \ln(س) + ٢ \ln(س)$

٤) $\lim_{ه \to ٠} \frac{\ln(٥ - ٢ه) - \ln(٥ + ٤ه)}{ه} = \lim_{ه \to ٠} \frac{\ln(٥) + \ln(٥ - ٢ه) - \ln(٥ + ٤ه) - \ln(٥)}{ه}$

$= - \lim_{ه \to ٠} \frac{\ln(٥ + ٤ه) - \ln(٥)}{ه} + \lim_{ه \to ٠} \frac{\ln(٥ - ٢ه) - \ln(٥)}{ه}$

نفرض $٤ه = م$ ومنها $ه \to ٠ \Rightarrow م \to ٠$ ، نفرض $-٢ه = ل$ ومنها $ه = -\frac{ل}{٢}$

$= - \lim_{م \to ٠} \frac{\ln(٥ + م) - \ln(٥)}{\frac{م}{٤}} + \lim_{ل \to ٠} \frac{\ln(٥ + ل) - \ln(٥)}{-\frac{ل}{٢}}$

$= -٤ \lim_{م \to ٠} \frac{\ln(٥ + م) - \ln(٥)}{م} - ٢ \lim_{ل \to ٠} \frac{\ln(٥ + ل) - \ln(٥)}{ل}$

$= -٤ \ln'(٥) - ٢ \ln'(٥) = -٦ \ln'(٥) = -\frac{٦}{٥}$

(٥) $\ln'(٢) = \lim_{س \to ٢} \frac{\ln(س) - \ln(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢) ل(س) - ٠}{س - ٢}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{س - ٢} \lim_{س \to ٢} ل(س) = ل(٢)$

(٦) نفرض طول نصف القطر $(نق)$ ، الارتفاع $ع$ فإن

فيكون $ع = نق + ٢$

$م(نق) = \frac{١}{٣} ط نق^{٢} ع = \frac{١}{٣} ط نق^{٢}(نق + ٢)$

$= \frac{١}{٣} ط نق^{٣} + \frac{٢}{٣} ط نق^{٢}$

$م'(٦) = \lim_{نق \to ٦} \frac{م(نق) - م(٦)}{نق - ٦} = \lim_{نق \to ٦} \frac{\frac{١}{٣} ط نق^{٣} + \frac{٢}{٣} ط نق^{٢} - ٩٦ ط}{نق - ٦}$

$= \frac{١}{٣} ط \lim_{نق \to ٦} \frac{نق^{٢} + ٤ نق - ٤٨}{نق - ٦} = \frac{١}{٣} ط \lim_{نق \to ٦} \frac{(نق - ٦)(نق + ٨)}{نق - ٦} = ٨ ط$

(٧) $\ln'(س) = \lim_{ه \to ٠} \frac{٦ س^{٢} ه - ٣ س ه^{٢}}{ه} = \lim_{ه \to ٠} (٦ س^{٢} - ٣ س ه) = ٦ س^{٢}$

$\ln'(-١) = ٦(-١)^{٢} = ٦$

(٧)

(٨) نفرض طول ضلع المكعب ل وحدة فيكون حـ(ل) = ل^{٣}

$$\text{فإن } ا(ج) = \text{نهـا}_{ل \to ج} \frac{حـ(ل) - حـ(ج)}{ل - ج} = \text{نهـا}_{ل \to ج} \frac{ل^{٣} - ٨}{ل - ج}$$

$$= \text{نهـا}_{ل \to ج} \frac{(ل - ج)(ل^{٢} + ج ل + ٤)}{ل - ج} = \text{نهـا}_{ل \to ج} (ل^{٢} + ج ل + ٤) = ١٢$$

(٩) نفرض طول نصف قطر الكرة نق وحدة ، حـ(نق) = $\frac{٤}{٣}$ ط نق^{٣}

$$ح'(نق) = \text{نهـا}_{ع \to نق} \frac{حـ(ع) - حـ(نق)}{ع - نق} = \text{نهـا}_{ع \to نق} \frac{\frac{٤}{٣} ط ع^{٣} - \frac{٤}{٣} ط نق^{٣}}{ع - نق}$$

$$= \frac{٤}{٣} ط \text{ نهـا}_{ع \to نق} \frac{ع^{٣} - نق^{٣}}{ع - نق} = \frac{٤}{٣} ط \text{ نهـا}_{ع \to نق} \frac{(ع - نق)(ع^{٢} + نق ع + نق^{٢})}{ع - نق}$$

$$= \frac{٤}{٣} ط \text{ نهـا}_{ع \to نق} (ع^{٢} + نق ع + نق^{٢}) = \frac{٤}{٣} ط \times ٣ نق^{٢} = ٤ ط نق^{٢}$$

ثالثاً : الاتصال والاشتقاقية

التدريبات

(١) ١) س = ٢ نقطة تفرع

$\lim_{س \to ٢^+} د(س) = \lim_{س \to ٢^+} (\frac{٤}{س} + ١) = ٣$ ، $\lim_{س \to ٢^-} د(س) = \lim_{س \to ٢^-} (٥س - ١) = ٩$

$\lim_{س \to ٢} د(س)$ غير موجودة لأن $\lim_{س \to ٢^+} د(س) \neq \lim_{س \to ٢^-} د(س)$

∴ د غير متصل عند س = ٢

٢) $د'(٢) = \lim_{س \to ٢^+} \frac{د(س) - د(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{\frac{٤}{س} + ١ - ٣}{س - ٢}$

$= \lim_{س \to ٢^+} \frac{٤ - ٢س}{س(س-٢)} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{-٢(س-٢)}{س(س-٢)} = -١$

$د'(٢) = \lim_{س \to ٢^-} \frac{د(س) - د(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^-} \frac{٥س - ١ - ٩}{س - ٢}$

$= \lim_{س \to ٢^-} \frac{٥س - ١٠}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^-} \frac{١٥(س-٢)}{س - ٢} = ٥$

∴ د غير قابل للاشتقاق عند س = ٢ لأن $د'(١) \neq د'(٢)$

(٢) بحث الاتصال عند س = ٢ لأنها نقطة تفرع

$\lim_{س \to ٢^+} د(س) = \lim_{س \to ٢^+} (س^٢ - ١) = ٣$

$\lim_{س \to ٢^-} د(س) = \lim_{س \to ٢^-} \sqrt{٣س + ١} = \sqrt{٧}$

$\lim_{س \to ٢} د(س)$ غير موجودة وعليه د غير متصل عند س = ٢

∴ د غير قابل للاشتقاق عند س = ٢ حسب النظرية

$د'(٤) = \lim_{س \to ٤} \frac{د(س) - د(٤)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ - ١ - ١٥}{س - ٤}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س-٤)(س+٤)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤} (س + ٤) = ٨$

تمارين ومسائل

(١) أ) د عند قابل للاشتقاق عند س = ١ لأن د غير متصل عند س = ١

ب) نبحث الاتصال عند س = ٢

$\lim_{س \to ٢^+} د(س) = ٠$ ، $\lim_{س \to ٢^-} د(س) = ٠$ ، $د(٢) = ٠$

$\therefore \lim_{س \to ٢} د(س) = د(٢)$ = صفر . د متصل عند س = ٢ لأن $\lim_{س \to ٢} د(س) = د(٢)$

$$د(س) = \begin{cases} ٠ & س < ٠ \\ س(س-١) & ٠ \le س \le ٢ \\ ٢ & س > ٢ \end{cases}$$

$$د'_+(٢) = \lim_{س \to ٢^+} \frac{د(س) - د(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{٢ - ٢}{س - ٢} = ٠$$

$$د'_-(٢) = \lim_{س \to ٢^-} \frac{د(س) - د(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^-} \frac{س(س-١) - ٢}{س - ٢} = ٣$$

$\therefore د'(٢)$ غير موجودة لأن $د'_+(٢) \neq د'_-(٢)$

ج) نعيد تعريف ل(س)

بفرض $د(س)$ هي قاعدة نجد كل فترة فولصا $\frac{١}{٢}$ وحدة .

$$ل(س) = \begin{cases} ٥ & س \ge \frac{٣}{٢} \\ ٤ & -١ \le س < -\frac{١}{٢} \\ ٣ & -\frac{١}{٢} \le س < ٠ \\ ٢ & ٠ \le س < \frac{١}{٢} \end{cases}$$

$$\therefore \lim_{س \to -\frac{١}{٢}} ل(س) = \lim_{س \to -\frac{١}{٢}} \frac{د(س) - د(-\frac{١}{٢})}{س - (-\frac{١}{٢})} = \lim_{س \to -\frac{١}{٢}} \frac{س - ٢}{س + \frac{١}{٢}} = ٠$$

$س = -١$ نقطة تقطع ، نبحث الاتصال عند $س = -١$

$\lim_{س \to -١^-} ل(س) = ٥$ ، $\lim_{س \to -١^+} ل(س) = ٤$

$\lim_{س \to -١} ل(س)$ غير موجودة وعليه ل غير متصل عند $س = -١$

ل غير قابل للاشتقاق عند $س = -١$ لأنه غير متصل عند هذه النقطة

(١٠)

(أ) هـ غير قابل للاشتقاق عند $س = ٠$ ، $س = ٥$ نهايتها طرفا فترة .

$س = ٣$ نقطة تفرع

$$\lim_{س \to ٣^+} \text{هـ}(س) = \lim_{س \to ٣^+} (٦س - ٣) = ١٥$$

$$\lim_{س \to ٣^-} \text{هـ}(س) = \lim_{س \to ٣^-} (س^٢ + ٥س) = ١٥$$

$\lim_{س \to ٣} \text{هـ}(س) = ١٥$ ، $\text{هـ}(٣) = ١٥$ ، إذن هـ متصل عند $س = ٣$

$$\text{هـ}'(٣) = \lim_{س \to ٣^+} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(٣)}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^+} \frac{٦س - ٣ - ١٥}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^+} \frac{٦(س - ٣)}{س - ٣} = ٦$$

$$\text{هـ}'_-(٣) = \lim_{س \to ٣^-} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(٣)}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^-} \frac{س^٢ + ٥س - ١٥}{س - ٣}$$

$$= \lim_{س \to ٣^-} \frac{(س + ٥)(س - ٣)}{س - ٣} = ٨$$

$\text{هـ}'(٣)$ غير موجودة لأن $\text{هـ}'_+(٣) \neq \text{هـ}'_-(٣)$

(ب) بحث اتصال هـ عند $س = ٩$

$$\lim_{س \to ٩} \text{هـ}(س) = \lim_{س \to ٩} \frac{س - ٩}{٣ - \sqrt{س}} = \lim_{س \to ٩} \frac{(\sqrt{س} - ٣)(\sqrt{س} + ٣)}{٣ - \sqrt{س}} = ٦$$

$\text{هـ}(٩) = ٦$ ، هـ متصل عند $س = ٩$ لأن $\lim_{س \to ٩} \text{هـ}(س) = \text{هـ}(٩) = ٦$

$$\text{هـ}'(٩) = \lim_{س \to ٩} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(٩)}{س - ٩} = \lim_{س \to ٩} \frac{\frac{س - ٩}{٣ - \sqrt{س}} - ٦}{س - ٩} = \lim_{س \to ٩} \frac{س - ٩ - ٦(٣ - \sqrt{س})}{(٣ - \sqrt{س})(س - ٩)}$$

$$= \lim_{س \to ٩} \frac{س - ٦\sqrt{س} + ٩}{(٣ - \sqrt{س})(٣ + \sqrt{س})(س - ٩)} = \lim_{س \to ٩} \frac{(\sqrt{س} - ٣)^٢}{(٣ - \sqrt{س})(٣ + \sqrt{س})(س - ٩)}$$

$$= \lim_{س \to ٩} \frac{(\sqrt{س} - ٣)^٢}{(٣ - \sqrt{س})^٢ (٣ + \sqrt{س})^٢} = \frac{١}{٦}$$

(ج) هـ متصل عند $س = ١$ لأن $\text{هـ}(١)$ موجودة

$$\lim_{س \to ١^+} \text{هـ}(س) = \lim_{س \to ١^-} \text{هـ}(س)$$

$$\lim_{س \to ١^-} س^٢ = \lim_{س \to ١^+} (أ س + ب)$$

$$١ = أ + ب \quad \text{و} \quad أ = ٢ \Rightarrow ب = -١$$

(٤) عندما $س = -١$

د متصل لجميع قيم $س \neq -١$ لأنه كثير حدود

$$د(س) = \lim_{ع \to س} \frac{د(ع) - د(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{(ع^٢ - ١) - (س^٢ - ١)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^٢ - س^٢}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع + س)}{ع - س} = ٢س$$

عندما $س = -١$ ، د متصل لأنه كثير حدود

$$د(-١) = \lim_{ع \to -١} \frac{د(ع) - د(-١)}{ع - (-١)} = \lim_{ع \to -١} \frac{ع^٢ - ١}{ع + ١} = \lim_{ع \to -١} \frac{(ع - ١)(ع + ١)}{ع + ١} = -٢$$

عندما $س = ١$ ، د متصل لأنه كثير حدود

$$د(١) = \lim_{ع \to ١} \frac{د(ع) - د(١)}{ع - ١} = \lim_{ع \to ١} \frac{ع^٢ - ١}{ع - ١} = \lim_{ع \to ١} \frac{(ع - ١)(ع + ١)}{ع - ١} = ٢$$

$س = -١$ نقطة تفرع

$$\lim_{س \to -١^+} د(س) = \lim_{س \to -١^+} س^٢ = ١$$

$$\lim_{س \to -١^-} د(س) = \lim_{س \to -١^-} (-١ - ٢س) = ١$$

$\lim_{س \to -١} د(س) = ١ = د(-١)$ ، د متصل عند $س = -١$

$$د(-١) = \lim_{س \to -١^-} \frac{د(س) - د(-١)}{س + ١} = \lim_{س \to -١^-} \frac{-١ - ٢س - ١}{س + ١}$$

$$= \lim_{س \to -١^-} \frac{-٢(س + ١)}{س + ١} = -٢$$

$$د(-١) = \lim_{س \to -١^+} \frac{د(س) - د(-١)}{س + ١} = \lim_{س \to -١^+} \frac{س^٢ - ١}{س + ١} = \lim_{س \to -١^+} \frac{(س - ١)(س + ١)}{س + ١} = -٢$$

$د(-١) = -٢$

$س = ١$ نقطة تفرع

$$\lim_{س \to ١^-} د(س) = \lim_{س \to ١^-} س^٢ = ١ \quad \lim_{س \to ١^+} د(س) = \lim_{س \to ١^+} س = ١$$

$\lim_{س \to ١} د(س) = د(١) = ١$ ، د متصل عند $س = ١$

(١٣)

$$\text{هـ}_+'(١) = \lim_{س \to ١^+} \frac{س^٢ - ١}{س - ١} = \lim_{س \to ١^+} \frac{(س+١)(س-١)}{س-١} = ٢$$

$$\text{هـ}_-'(١) = \lim_{س \to ١^-} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(١)}{س - ١} = \lim_{س \to ١^-} \frac{س - ١}{س - ١} = ١$$

$\text{هـ}'(١)$ غير موجودة لأن $\text{هـ}_-'(١) \neq \text{هـ}_+'(١)$

$$\text{هـ}(س) = \begin{cases} ٢ & س \leq -١ \\ غير\ معرفة & -١ < س < ١ \\ ١ & س = ١ \\ ١ & س > ١ \end{cases}$$

(١٥) بحث الاتصال عند $س = ٠$

$$\lim_{س \to ٠^+} \text{هـ}(س) = \lim_{س \to ٠^+} (٢ - س^٢) = ٠$$

$$\lim_{س \to ٠^-} \text{هـ}(س) = \lim_{س \to ٠^-} (س^٢ - ٢س) = ٠$$

$\lim_{س \to ٠} \text{هـ}(س) = \text{هـ}(٠) = ٠$ ، هـ متصل عند $س = ٠$

$$\text{هـ}_+'(٢) = \lim_{س \to ٢^+} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{٢ - س^٢ - ٠}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{-س(س-٢)}{س-٢} = -٢$$

$$\text{هـ}_-'(٢) = \lim_{س \to ٢^-} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^-} \frac{س^٢ - ٢س}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^-} \frac{س(س-٢)}{س-٢} = ٢$$

$\text{هـ}'(٢)$ غير موجودة لأن $\text{هـ}_+'(٢) \neq \text{هـ}_-'(٢)$

(١٦) عندما $س \to ٥$ ، هـ متصل لأنه ثابت

$$\text{هـ}(س) = \lim_{ع \to س} \frac{\text{هـ}(ع) - \text{هـ}(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{٠}{ع - س} = \text{صفر}$$

عندما $س = ٥$ ، $س = ٤$ ، $\text{هـ}(س) = ٥$ متصل لأنه كثير حدود

$$\text{هـ}(س) = \lim_{ع \to س} \frac{\text{هـ}(ع) - \text{هـ}(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{٥ - ع - (٥ - س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{-(ع - س)}{ع - س} = -١$$

عندما $س < ٤$ ، $\text{هـ}(س)$ متصل ماعدا عند $س = ٥$ لأنه اقتران نسبي

$$\text{هـ}(س) = \lim_{ع \to س} \frac{\text{هـ}(ع) - \text{هـ}(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{\frac{١}{ع - ٥} - \frac{١}{س - ٥}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{س - ٥ - (ع - ٥)}{(ع - ٥)(س - ٥)} \times \frac{١}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع - س}{(ع - ٥)(س - ٥)(ع - س)} = \frac{١}{(س - ٥)^٢}$$

نبحث اذا كانت ق متصلة عند نقاط التشعب

عند س = ٠

$\lim_{س \to ٠^+} ق(س) = \lim_{س \to ٠^+} (٥ - س) = ٥$

$\lim_{س \to ٠^-} ق(س) = \lim_{س \to ٠^-} صفر = صفر$

$\lim_{س \to ٠^+} ق(س)$ غير موجودة وعليه ق غير متصل عند س = ٠

∴ ق(٠) غير موجودة .

س = ٤

$\lim_{س \to ٤^+} ق(س) = \lim_{س \to ٤^+} \frac{١}{٥ - س} = ١$ ، $\lim_{س \to ٤^-} ق(س) = \lim_{س \to ٤^-} (٥ - س) = ١$

$\lim_{س \to ٤} ق(س) = ١$ ، ق(٤) = ١ ∴ ق متصل عند س = ٤

$\lim_{س \to ٤^+} \frac{ق(س) - ق(٤)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤^+} \frac{\frac{١}{٥ - س} - ١}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤^+} \frac{١ - (٥ - س)}{(س - ٤)(٥ - س)} = \lim_{س \to ٤^+} \frac{س - ٤}{(س - ٤)(٥ - س)} = ١$

$\lim_{س \to ٤^-} \frac{ق(س) - ق(٤)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤^-} \frac{(٥ - س) - ١}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤^-} \frac{٤ - س}{س - ٤} = -١$

∴ ق(٤) غير موجودة . مما سبق

$ق(س) = \begin{cases} ٥ - س & س < ٠ \\ ١ & س = ٠ \\ \text{غير موجودة} & ٠ < س < ٤ ، س = ٤,٤ ، ٥ \\ \frac{١}{(٥ - س)^٢} & س > ٤ \end{cases}$

(٧) $ق(س) = \begin{cases} ١ & س \le ٢ \\ ٢ - س & ٢ < س \le ٣ \\ س - ٣ & ٣ < س \le ٤ \end{cases}$

ق(١) ، ق(٤) غير موجودة لأن س = ١ ، س = ٤ طرفي الفترة

عندما س ∈ ح ، ق(س) متصل لأن الاقتران ثابت

$\lim_{س \to ٣} ق(س) = \lim_{س \to ٣} \frac{ق(س) - ق(٣)}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣} \frac{١ - ١}{س - ٣} = ٠$

(٤)

عندما $2 < س < 3$ ، $ه(س) = 2 - س$ متصل لأنه كثير حدود

$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ه(ع) - ه(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{2 - ع - (2 - س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{س - ع}{ع - س} = -1$

عندما $3 < س < 4$

$ه(س) = س - 3$ متصل لأنه كثير حدود

$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ه(ع) - ه(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع - 3 - (س - 3)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع - س}{ع - س} = 1$

نقاط التفرع، $س = 2$

$\lim_{س \to 2^-} ه(س) = 1$ ، $\lim_{س \to 2^+} ه(س) = \lim_{س \to 2^+} (2 - س) = 1$

$\lim_{س \to 2} ه(س) = 1 = ه(2)$. $ه$ متصل عند $س = 2$

$ق'_+(2) = \lim_{س \to 2^+} \frac{ه(س) - ه(2)}{س - 2} = \lim_{س \to 2^+} \frac{2 - س - 1}{س - 2} = -1$

$ق'_-(2) = \lim_{س \to 2^-} \frac{ه(س) - ه(2)}{س - 2} = \lim_{س \to 2^-} \frac{1 - 1}{س - 2} =$ صفر

$ق'(2)$ غير موجود لأنه $ق'_+(2) \neq ق'_-(2)$

عند $س = 3$

$\lim_{س \to 3^-} ه(س) = \lim_{س \to 3^-} (2 - س) = -1$ ، $\lim_{س \to 3^+} ه(س) = \lim_{س \to 3^+} (س - 3) = 0$

$\lim_{س \to 3} ه(س)$ ، $ه(3) = 0$ ، إذن $ه$ غير متصل عند $س = 3$

$ق'_+(3) = \lim_{س \to 3^+} \frac{ه(س) - ه(3)}{س - 3} = \lim_{س \to 3^+} \frac{س - 3 - 0}{س - 3} = 1$

$ق'_-(3) = \lim_{س \to 3^-} \frac{ه(س) - ه(3)}{س - 3} = \lim_{س \to 3^-} \frac{2 - س - 0}{س - 3} = -1$

$ق'(3)$ غير موجود لأنه $ق'_+(3) \neq ق'_-(3)$

$ق'(س) = \begin{cases} -1 & 1 < س < 2 \\ 1 & 3 < س < 4 \end{cases}$

غير موجودة $س = 1، 2، 3، 4$

(١٥)

سادساً : قواعد الاشتقاق ١

التدريبات

(١) ا) $\frac{د}{دس}(س) = ٠$ ب) $\frac{د}{دس}(-٨س) = -٨$ ج) $\frac{د}{دس}(\frac{١}{٤}) = ٠$

(٢) $\frac{د}{دس}(١٠س^{٥} - ١٥س^{٣}) = ٥٠س^{٤} - ٤٥س^{٢}$

$\frac{د}{دس}(-١) = ٥٠ - ٤٥ = ٥$ ،

(٣) ا) $\frac{د}{دس}(٨س^{٤} - ١٠س^{٥}) = ٣٢س^{٣} - ٥٠س^{٤}$ ،

ب) ميل $س = ٤$ ، $\frac{د}{دس}(س) = ٢س + ٣$

$\frac{د}{دس}(٤) = ١١$ ، $\frac{د}{دس}(س) = ١$

ثانياً : مسائل

(١) ا) $\frac{د}{دس}(س) = ٠$ ب) $\frac{د}{دس}(٤٠س^{٣}) = ١٢٠س^{٢}$

ج) $\frac{د}{دس}(٠) = ٠$ د) $\frac{د}{دس}(\frac{١}{١٦}س^{٤}) = \frac{١}{٤}س^{٣}$ ،

(٢) ا) $\frac{د}{دس}(٢س + ٣) = ٢$ ب) $\frac{د}{دس}(\frac{١}{٢}س^{٢}) = \frac{١}{٢}(٢س) = س$

ج) $\frac{د}{دس}(٤٩س^{٢}) = ٩٨س$ د) $\frac{د}{دس}(س^{٢} + ٣س - ١) = ٢س + ٣$

(٣) ا) $\frac{د}{دس}(٢س^{٣}) = ٦س^{٢}$ ، $\frac{د}{دس}(-١) = ٦$

ب) ميل $س = ٣$ ، $\frac{د}{دس}(س) = ٣س^{٢} + ٣س - ٦$

$\frac{د}{دس}(٣) = ٢٧ + ٩ - ٦ = ٣٠$

ج) ميل $س = ٤,٠$ ، $\frac{د}{دس}(س) = ٦ - ٤س^{٢}$

$\frac{د}{دس}(س) = -٨س$ ، $\frac{د}{دس}(٤,٠) = -٨ \times ٤,٠ = -٣,٢$

د) ميل $س = -١$ ، $\frac{د}{دس}(س) = ٣س - ١ - (-س) = ٤س - ١$

$\frac{د}{دس}(س) = ٤$ ، $\frac{د}{دس}(-١) = ٤$

(٤) ا) $\frac{د}{دس}(س) = ٦ \times \frac{د}{دس}(س) - ٢ \times \frac{د}{دس}(س)$

$\frac{د}{دس}(-٢) = ٦ \times \frac{د}{دس}(-٢) - ٢ \times \frac{د}{دس}(-٢) = ٦ \times ٤ - ٢ \times -٨ = ٤٠$

ب) $\frac{د}{دس}(س) = \frac{١}{٢} \times \frac{د}{دس}(س) + \frac{د}{دس}(س) + ٣س^{٢}$

$\frac{د}{دس}(-٢) = \frac{١}{٢} \times \frac{د}{دس}(-٢) + \frac{د}{دس}(-٢) + ٣(-٢)^{٢}$

$= \frac{١}{٢} \times ٤ - ٣ + ١٢ = ١١$

(١٦)

(٥) $هـ(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} + ب س & س \geq ١ \\ ٤ - ب س^{٢} + ٣س & س < ١ \end{cases}$

$هـ(١)$ موجودة ، إذا $هـ$ متصل عند $س = ١$

$\lim_{س \to ١^+} هـ(س) = \lim_{س \to ١^-} هـ(س)$

$٣ + ب = ٤ - ب$ ومنه $ب = ٠$

$هـ(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} + ب & س \geq ١ \\ ٤ - ب س & س < ١ \end{cases} = \begin{cases} ٣س^{٢} + ٥ & س \geq ١ \\ ٤ - ٣س & س < ١ \end{cases}$

$هـ'_{+}(١) = هـ'_{-}(١)$ حيث $هـ(١)$ موجودة

$٦ = ٣$ ، $٥ + ٣ج = ٤ - ٣$

(٦) $هـ(س)$ متصل عند $س = ح$ بالفرض

$هـ(س) = \begin{cases} ل(س) & س \geq ح \\ ل(ح) & س < ح \end{cases}$

$هـ'_{+}(ح) = ل'(ح)$ ، $هـ'_{-}(ح) = ل'(ح)$

$هـ'_{+}(ح) = ل'(ح) = هـ'_{-}(ح)$

إذا $هـ$ قابل للاشتقاق عند $س = ح$ فإن $هـ(ح) = ل'(ح)$

خامساً: قواعد الاشتقاق

التدريبات

(١) $هـ'(س) = (٤ - ٢س^{٣})(\frac{٢}{٣}) + (\frac{٢}{٣}س + ٣)(-٦س^{٢})$

$= ٢ - ٢س^{٣} - ٣س^{٣} - ١٨س^{٢} = ٢ - ٤س^{٣} - ١٨س^{٢}$

(٢) $\frac{ص}{س} = \frac{(س^{٢}-٤)(٦) - (٦س+١٢)(٢س)}{(س^{٢}-٤)^{٢}} = \frac{٦س^{٢} - ٢٤ - ١٢س^{٢} - ٢٤س}{(س^{٢}-٤)^{٢}}$

$= \frac{-٦س^{٢} - ٢٤س - ٢٤}{(س^{٢}-٤)^{٢}}$

(٣) ١) $ص = \frac{-٢٧}{٣س} = \frac{-٢٧س^{-١}}{٣}$

$\frac{ص}{س} = \frac{٢٧}{٣س^{٢}}$

٢) $ص = \frac{-٢}{س} - س^{٢}$ ، $ص' = \frac{٢}{س^{٢}} - ٢س$

فكّر وناقش $هـ(س) = \frac{س^{٣}(٤س^{٣}) - (س^{٤}-٣)(٣س^{٢})}{س^{٦}} = \frac{٤س^{٦} - ٣س^{٦} + ٩س^{٢}}{س^{٦}}$

$= \frac{س^{٦} + ٩س^{٢}}{س^{٦}} = \frac{س^{٤} + ٩}{س^{٤}} = ١ + \frac{٩}{س^{٤}}$

(٤) $هـ(س) = \begin{cases} \frac{-٤}{(س+١)^{٢}} & س \geq ١ \\ ١ & س < ١ \end{cases}$

$هـ'_{+}(١) = ١$ ، $هـ'_{-}(١) = \frac{-٤}{٤} = -١$ ، $هـ(١)$ غير موجودة

$هـ'(س) = \begin{cases} \frac{-٤}{(س+١)^{٢}} & س \geq ١ \\ \text{غير موجودة} & س = ١ \\ ١ & س < ١ \end{cases}$

(١٨)

تمارين وحسائل

(١) أ) $ص = س^2(٣-س^2) + (١+س^3)(٢-س)$

$= ٣س^2 + ٢س - س^2 - س^5 = ٥س^4 + ٢س$

ب) $ص = (س^3 - ٢س + ١)(٤) + (٤س - ٣)(٣س^2 - ٢)$

$= ٤س^3 - ٨س + ٤ + ١٢س^3 - ٨س - ٩س^2 + ٦$

$= ١٦س^3 - ٩س^2 - ١٦س + ١٠$

ج) $ص = \frac{(١-س)(٢-س^2) - س^3(-١)}{(١-س)^2} = \frac{٣س^2 - ٢س^3 + س^3}{(١-س)^2}$

$= \frac{٣س^2 - ٢س^3}{(١-س)^2}$

د) $ص = \frac{(٢س+٣)(٢س) - (س^2-١)(٢)}{(٢س+٣)^2}$

$= \frac{٤س^2 + ٦س - ٢س^2 + ٢}{(٢س+٣)^2} = \frac{٢س^2 + ٦س + ٢}{(٢س+٣)^2}$

(٢) أ) $ن(س) = (س^2 + ٢س)(س^2 - ٣س - ٦)$

$ن'(س) = (س^2 + ٢س)(٢س - ٣) + (٢س + ٢)(س^2 - ٣س - ٦)$

$= ٢س^3 - ٣س^2 + ٤س^2 - ٦س + ٢س^2 - ٣س - ٦س^2 - ١٢س - ١٢$

$= ٤س^3 - ٣س^2 - ١٧س - ١٢$

ب) $ن(س) = \begin{cases} (س-٣)(س^2+٤س) & س \leq ٣ \\ (٣-س)(س^2+٤س) & س > ٣ \end{cases}$

$ن'(س) = \begin{cases} ٣س^2 - ٤س - ٣ & ، س < ٣ \\ -٣س^2 - ٤س + ٣ & ، س > ٣ \end{cases}$

$ن'_+(٣) = -٢٧ - ١٢ + ٣ = -٣٦$ ، $ن'_-(٣) = ٢٧ - ١٢ - ٣ = ١٢$

$ن'(٣)$ غير موجودة

$ن'(س) = \begin{cases} ٣س^2 - ٤س - ٣ & ، س < ٣ \\ \text{غير موجودة} & ، س = ٣ \\ -٣س^2 - ٤س + ٣ & ، س > ٣ \end{cases}$

(19)

ج) $\text{ن}'(س) = \frac{(س^2+3)(2س-2) - (س^2-2س+3)(2س)}{(س^2+3)^2}$

$= \frac{2س^3 - 2س^2 + 6س - 6 - 2س^3 + 4س^2 - 6س}{(س^2+3)^2} = \frac{2س^2 - 6}{(س^2+3)^2}$

د) $\text{ن}(س) = \begin{cases} \frac{(س-1)(س-3)}{س(س-1)} & \text{إذا } س > 3 \\ \frac{(س-1)(س-3)}{س(1-س)} & \text{إذا } س \leq 3 \end{cases}$

$= \begin{cases} \frac{س-3}{س} & \text{إذا } س > 3 \\ 1 - \frac{3}{س} & \text{إذا } س \leq 3 \end{cases}$

$\text{ن}(س) = \begin{cases} \frac{3}{س^2} & \text{إذا } س > 3 \\ \frac{3}{س} & \text{إذا } س \leq 3 \end{cases}$

$\text{ن}'_+(3) = \frac{1}{3}$ ، $\text{ن}'_-(3) = -\frac{1}{3}$ ، $\text{ن}'(3)$ غير موجودة

$\text{ن}'(س) = \begin{cases} -\frac{3}{س^2} & \text{إذا } س > 3 \\ \text{غير موجودة} & س = 3 \\ \frac{3}{س^2} & \text{إذا } س < 3 \end{cases}$

(3) أ) $\text{ن}(س) = س\,\text{ق}(س) + \text{ك}(س)$

$\text{ن}(1) = 2\,\text{ق}(2) + \text{ك}(2) = 2 \times -1 + 2 = 1$

ب) $\text{ن}(س) = 2س^3 \times \text{ق}(س) + \text{ك}(س) \times 6س - 5$

$\text{ن}(2) = 16 \times -1 + 2 \times 12 - 5 = 19$

ج) $\text{ن}'(س) = \text{ق}(س) + \frac{\text{ك}'(س)}{(\text{ك}(س))^2}$

$\text{ن}'(2) = \text{ق}(2) + \frac{\text{ك}'(2)}{(\text{ك}(2))^2} = -1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$

د) $\text{ن}'(س) = \frac{2\,\text{ك}(س) \times 2 - (2س+1)(2\,\text{ق}(س))}{(2\,\text{ك}(س))^2}$

$\text{ن}'(1) = \frac{6\,\text{ك}(2) - 5\,\text{ق}(2)}{(2\,\text{ك}(2))^2} = \frac{18+5}{36} = \frac{23}{36}$

(٤) أ) $هـ'(س) = ل(س) \times ق'(س) + ق(س) \times ل'(س)$ (٥٠)

$هـ'(-٢) = ل(-٢) \times ق'(-٢) + ق(-٢) \times ل'(-٢)$

$= ٢ \times -٦ + ٤ \times -١ = -١٢$

ب) $هـ'(س) = \frac{[ل(س)+١)^{٢} ق'(س) - ق(س) \times ل'(س)}{(ل(س)+١)^{٢}}$

$هـ'(-٢) = \frac{[ل(-٢)+١)^{٢} ق'(-٢) - ق(-٢) ل'(-٢)}{(ل(-٢)+١)^{٢}}$

$= \frac{٤ \times -٦ - ٤ \times -١}{(-٣+١)^{٢}} = \frac{-٢٠}{١٦} = -\frac{٥}{٤}$

(٥) أ) نعيد تعريف هـ(س) حول س = ١,٤ ، هـ(س) = $س^{٢} - ٣$

$هـ'(س) = ٢س$ ، $هـ'(١,٤) = ٢,٨$

ب) نعيد تعريف ق(س) حول س = ٢ ، $ق(س) = \frac{٣}{٢س-١}$

$ق'(س) = \frac{-٣ \times ٢}{(٢س-١)^{٢}}$ ، $ق'(٢) = \frac{-٦}{٣^{٢}} = -\frac{٢}{٣}$

ج) $هـ'(س) = \frac{(س^{٢}-٤)(٥) - (٥س+١)(٢س)}{(س^{٢}-٤)^{٢}}$

$هـ'(-١) = \frac{-٣ \times ٥ - ١ \times -٢}{(-٣)^{٢}} = \frac{-١٥+٢}{٩} = -\frac{١٣}{٩}$

(٦) $\frac{د}{دس}(ل(س) \times م(س) \times هـ(س)) = \frac{د}{دس}((ل(س) \times م(س)) \times هـ(س))$

$= (ل(س) \times م(س)) \times ق'(س) + هـ(س)(ل(س) \times م(س))'$

$= ل(س) \times م(س) \times ق'(س) + هـ(س)(ل(س) م'(س) + م(س) ل'(س))$

$= ل(س) \times م(س) \times ق'(س) + ل(س) \times هـ(س) \times م'(س) + م(س) \times ل'(س) \times هـ(س)$

(٧) نضع ط(س) = ل(س) م(س) ، ك(س) = ق(س) هـ(س) ثم نشتق الطرفين بالنسبة لـ س فينتج

$\frac{د}{دس}(ط(س))^{٣} = ل(س) \times م(س) \times ك'(س) + ل(س) \times ك(س) \times م'(س) + م(س) \times ك(س) \times ل'(س)$

$= ٣(ط(س))^{٢} \cdot ط'(س)$.

(٧)

(٨) $\text{مـ}(س) = \begin{cases} ١٢س^{٢} & س \le ١ \\ ٦س & س > ١ \end{cases}$

$\text{مـ}_{+}(١) = ٦$ ، $\text{مـ}_{-}(١) = ١٢$ ، إذن $\text{مـ}(١)$ غير موجودة

$\text{مـ}'(س) = \begin{cases} ٢٤س & س < ١ \\ \text{غير موجودة} & س = ١ \\ ٦ & س > ١ \end{cases}$

(٩) نجد تعريف $\text{مـ}(س)$

$\text{مـ}(س) = \begin{cases} س(س^{٢}+٦س) & س \ge ٠ \\ -س(س^{٢}+٦س) & س < ٠ \end{cases} = \begin{cases} س^{٣}+٦س^{٢} & س \ge ٠ \\ -س^{٣}-٦س^{٢} & س < ٠ \end{cases}$

$\text{مـ}'(س) = \begin{cases} ٣س^{٢}+١٢س & س > ٠ \\ -٣س^{٢}-١٢س & س < ٠ \end{cases}$

$\text{مـ}_{+}(٠) = ٠$ ، $\text{مـ}_{-}(٠) = ٠$ ، إذن $\text{مـ}(٠) = ٠$

$\text{مـ}'(س) = \begin{cases} ٣س^{٢}+١٢س & س > ٠ \\ \text{صفر} & س = ٠ \\ -٣س^{٢}-١٢س & س < ٠ \end{cases}$

(١٠) مـ متصل عند $س = ٢$ لأنه قابل للاشتقاق عند $س = ٢$

$\text{نهـ}_{س \to ٢^{+}} \text{مـ}(س) = \text{نهـ}_{س \to ٢^{-}} \text{مـ}(س)$

$٤ - ٨ب + ٢ج = ٢ج - ٤ب$ ومنه $٣ب + ج = ٢$ ... (١)

$\text{مـ}'(س) = \begin{cases} ٢ج س - ب & س \ge ٢ \\ -٣ب س^{٢} + ٢ & س < ٢ \end{cases}$

$\text{مـ}_{+}'(٢) = \text{مـ}_{-}'(٢)$

$٤ج - ب = -١٢ب + ٢$ ومنه $١٣ب + ٤ج = ٢$ ... (٢)

$١٣ب + ١١ب = ٠$ ... (٣)

$٣ب + ج = ٢$ ... (١) بالضرب في -٣ ثم الطرح

$٣ب = -٦$ ومنه $ب = -٢$

نجد $ج$ من المعادلة (١) : $ج = ٢ - ٣ب = ٢ + ٦ = ٨$

سادساً : المشتقات العليا

التدريبات

(١) أ) $ه(س) = ١٥س^{٢} - ٨س + ٦$

$ه'(س) = ٣٠س - ٨$ ، $ه''(-١) = -٣٠ - ٨ = -٣٨$

ب) $ه(س) = \frac{١}{١٠}س^{ن}$ ، $ه''(س) = \frac{ن(ن-١)}{١٠}س^{ن-٢}$

$ه'''(س) = \frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{١٠}س^{ن-٣}$

$٩س^{٢} = \frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{١٠}س^{ن-٣}$

$ن - ٣ = ٢$ ومنه $ن = ٥$ ، $٩ = \frac{٣ \times ٤ \times ٥}{١٠} = ٦$

(٣) $ه(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} & س \geq ٠ \\ ٠ & س < ٠ \end{cases}$

$ه'(س) = \begin{cases} ٦س & س > ٠ \\ ٠ & س < ٠ \end{cases}$

١) $ه'_{+}(٠) = ٠$ ، $ه'_{-}(٠) = ٠$ ، $\because ه'(٠) = ٠$ وموجودة ومساوي صفر

$ه''_{+}(٠) = ٠$ ، $ه''_{-}(٠) = ٠$ ، $\therefore ه''(٠)$ موجودة ومساوي صفر

٢) $ه(س) = \begin{cases} ٣س^{٢} & ، س \geq ٠ \\ ٠ & ، س < ٠ \end{cases}$

$ه'(س) = \begin{cases} ٦س & س > ٠ \\ ٠ & س \leq ٠ \end{cases}$

٣) $ه''(س) = \begin{cases} ٦ & س > ٠ \\ ٠ & س < ٠ \end{cases}$

$ه''_{+}(٠) = ٦$ ، $ه''_{-}(٠) = ٠$ ، $\because ه''(٠)$ غير موجودة

تدريبيا (١) فرع ج)

$ه(س) = ٧ + س^{٢} + ٣س^{٣} - ١٢س^{٤} + ٥س^{٦}$

$ه'(س) = ٣س^{٥} + ٦٥س^{٣} - ٩س^{٢} + ٢س - ١$

$ه''(س) = ٦٠س^{٤} + ١٦٨س^{٢} - ١٨س + ٢$

$ه''(-١) = ٦٠ + ١٦٨ + ١٨ + ٢ = ٤٨$

تمارين ومسائل

(١) ١) $ص = ١٢س^{٢} - ٧س - ٦$

$\frac{ص}{س} = ٢٤س - ٧$

٢) $ص = س + \frac{١}{س}$

$\frac{ص}{س} = ١ - \frac{١}{س^{٢}}$ ، $\frac{ص}{ع} = \frac{٤س}{٣ع^{٢}}$

٣) $ن(س) = \begin{cases} (س-١)(س+٣) & س \geq ٠ \\ (س-١)(س+٢) & س < ٠ \end{cases} = \begin{cases} س^{٢} + ٢س - ٣ & س \geq ٠ \\ -س^{٢} - س + ٢ & س < ٠ \end{cases}$

$ن'(س) = \begin{cases} ٢س + ٢ & س > ٠ \\ -٢س - ١ & س < ٠ \end{cases}$

$ن'_{+}(٠) = ١$ ، $ن'_{-}(٠) = -١$ ، $\because ن'_{+}(٠) \neq ن'_{-}(٠)$

$\therefore ن'(٠)$ غير موجودة .

$ن''(س) = \begin{cases} ٢ & س > ٠ \\ \text{غير موجودة} & س = ٠ \\ -٢ & س < ٠ \end{cases}$

٤) $ن(س) = (س^{٢} + ٤س)(٣ - س^{٢})(س^{٣} + ١)(٥س + ٤)$

$= ٣س^{٤} + ١٢س^{٣} + ٥س^{٢} + ٤س^{٣} + ٢٠س + ٤$

$= -٥س^{٤} + ١٦س^{٣} + ٢٠س + ٤$

$ن'(س) = -٢٠س^{٣} + ٤٨س^{٢} + ٢٠$

$ن'(-١) \times ن''(-١) = (٢٠ + ٤٨ + ٢٠)(٤ + ٢٠ - ١٦ - ٥)$

$= ٩ \times ٣٠ - = -٢٧٠$

(٣) $ن(س) = ٢س^{ن} - ١$ ، $ن''(س) = ن(ن-١)س^{ن-٢}$

$ن^{(ن)}(س) = ن(ن-١)(ن-٢)س^{ن-٣}$

$ن(ن-١)(ن-٢) = ٢ \times ٣ \times ٤ = ٢٤$ وعندما $ن = ٤$ فإن $ن - ٣ = ١$

(٤) $ص = \frac{-٢}{س^{٤}}$ ، $ص' = \frac{٤ \times ٢}{س^{٥}} = \frac{٨}{س^{٥}}$ ، $ص'(٢) = \frac{٨}{٣٢} = \frac{١}{٤}$ ميل $= \frac{١}{٤}$ (٤ ج)

(٥) $هـ(س) = ٤س^{٣} + ٩س^{٢} - ١٢س - ١$

$هـ'(س) = ١٢س^{٢} + ١٨س - ١٢$

أ) $١٢س^{٢} + ١٨س - ١٢ = ٠$ ، $٢س^{٢} + ٣س - ٢ = ٠$

$(٢س - ١)(س + ٢) = ٠$ ومنها $س = -٢ ، \frac{١}{٢}$

ب) مجموعة $P : (س - ١)(س + ٢) < ٠$

$س \in (-٢ ، \frac{١}{٢})$

ج) مجموعة $P : (س - ١)(س + ٢) > ٠$

$س \in (-\infty ، -٢) \cup (\frac{١}{٢} ، \infty)$

(٦) أ) $ص = ٤س^{٣} + ١٥س^{٢}$

$ص' = ١٢س^{٢} + ٣٠س$ ، $ص'' = ٢٤س + ٣٠$

ب) $ص = ٣٢س^{٢} + ٢٠س + ص$

$ص' = ٦٤س + ٢٠$ ، $ص'' = ٦٤$

(٧) أ) $هـ'(س) = ٢س - ٦$ ، $هـ'(س) = ٢$

$هـ''(س) =$ صفر ، $هـ''(١٢) =$ صفر

ب) $هـ(س) = \frac{١}{٤}س^{٤} - س^{٢}$

$هـ'(س) = س^{٣} - ٢س$ ، $هـ'(-١) = -١ + ٢ = ١$

ج) $هـ(س) = -\frac{١}{٢س^{٤}}$ ، $هـ'(س) = \frac{٤س^{٣}}{٢س^{٨}} = \frac{٢}{س^{٥}}$

$هـ''(س) = \frac{-٥ \times ٢س^{٤}}{س^{١٠}} = \frac{-١٠س^{٤}}{س^{١٠}} = \frac{-١٠}{س^{٦}}$

$هـ^{(٤)}(س) = \frac{-٦ \times ٤س^{٣}}{س^{١٢}} = \frac{-٢٤}{س^{٩}}$ ، $هـ^{(٤)}(١) = -٢٤$

(٥٤)

(٨) $هـ(س) = س^٢ ل(س) + ل(س) × ٢س$

$هـ'(س) = س^٢ ل'(س) + ل(س) × ٢س + ٢س ل(س)$

$= س^٢ ل'(س) + ٤س ل(س) + ٢ ل(س)$

$هـ''(س) = س^٢ ل''(س) + ل'(س) × ٢س + ٤س ل'(س) + ل(س) × ٤ + ٢ ل'(س)$

$= س^٢ ل''(س) + ٦س ل'(س) + ٦ ل(س)$

(٩) $(ل × ق)'(س) = ل(س) × ق'(س) + ق(س) × ل'(س)$

$(ل × ق)''(س) = ل(س) × ق''(س) + ق'(س) × ل'(س) + ق(س) × ل''(س) + ل'(س) × ق'(س)$

$= (ل × ق)(س) + ٢ (ل' × ق')(س) + (ل × ق'')(س)$

(١٠) $هـ(س) = ٣س^٢ + ب س + ح$

$هـ(١) = ٣$ ومنه $٣ + ب + ح = ٣$ ... (١)

$هـ'(س) = ٦س + ب$

$هـ'(١) = -٢$ ومنه $٦ + ب = -٢$ ... (٢)

$هـ''(س) = ٦$

$هـ''(١) = ٤$ ومنه $٦ = ٤$

بطرح (٢) من (١) : $ب = -٦$ وبطرح (١) : $ح = ٧$

(١١) البرهان $(ل ق)'(س) = ل(س) ق'(س) + ق(س) ل'(س)$

$(ل ق)''(س) = ل(س) ق''(س) + ق'(س) ل'(س) + ق(س) ل''(س) + ل'(س) ق'(س)$

$= ل(س) ق''(س) + ٢ ل'(س) ق'(س) + ق(س) ل''(س)$

(١٢) $ق(س) = ل(س) هـ(س) + هـ(س) ل'(س)$

$ق'(س) = ل(س) هـ'(س) + هـ'(س) ل(س) + هـ(س) ل'(س) + ل'(س) هـ(س)$

$= ل(س) هـ'(س) + ٢ هـ(س) ل'(س) + ٢ ح$ حيث $ل × هـ = ح$

$ل'(س) + هـ'(س) = ح$ ، وبالتعويض بالطرفين نحصل على

$ل'(س) هـ'(س) + هـ'(س) ل'(س) = ٠$

$ق''(س) = ل(س) هـ''(س) + هـ'(س) ل'(س) + هـ(س) ل''(س) + ل'(س) هـ'(س)$

$= ل(س) هـ''(س) + هـ(س) ل''(س)$

(٥ ج)

١٣) $ق(س) = ٤ب س^{٣} - \frac{١٦}{س^{٢}}$

$ق'(س) = ١٢ب س^{٢} + \frac{١٦ \times ٢ س}{س^{٤}} = ١٢ب س^{٢} + \frac{٣٢}{س^{٣}}$

$ق''(س) = ٢٤ب س - \frac{٣٢ \times ٣ س^{٢}}{س^{٦}} = ٢٤ب س - \frac{٩٦}{س^{٤}}$

$ق''(١) = ٩٠ \Leftarrow ٢٤ب - ٩٦ = ١٢$

$٢٤ب = ١٠٨$ ومنه $ب = \frac{١}{٢}$

١٤) $ق(س) = ٨ - ٨(م - ٣) س$

$ق'(س) = -٨(م - ٣)$

$-٨(م - ٣) < ٠$ ، $م - ٣ > ٠$ ومنه $م > ٣$

سابعاً : مشتقة الاقترانات المثلثية

التدريبات

(١) $هـ(س) = ٤ جتا س + ٦$

$هـ(\frac{\pi}{٣}) = ٤ \times \frac{١}{٢} + ٦ = ٨$

(٢) $هـ(س) = س جتا س + جا س$

$هـ(\frac{\pi}{٢}) = \frac{\pi}{٢} \times ٠ + ١ = ١$

(٣) $هـ(س) = ظا س = \frac{١}{جتا س}$

$هـ(س) = \frac{-(-جا س)}{جتا^٢ س} = \frac{١}{جتا س} \times \frac{جا س}{جتا س} = ظا س ظا س$

$هـ(س) = ظتا س = \frac{١}{جا س}$

$هـ(س) = \frac{-جا س}{جا^٢ س} = -\frac{١}{جا س} \times \frac{جتا س}{جا س} = -ظتا س ظتا س$

$هـ(س) = ظتا س = \frac{جتا س}{جا س}$

$هـ(س) = \frac{جا س \times -جا س - جتا س \times جتا س}{جا^٢ س}$

$= \frac{-جا^٢ س - جتا^٢ س}{جا^٢ س} = -\frac{١}{جا^٢ س} = -ظتا^٢ س$

(٤) $هـ(س) = ظا س ظا س + ظا^٢ س$

$هـ(\frac{\pi}{٦}) = \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٣} + \frac{٤}{٣} = \frac{٢}{٣} + \frac{٤}{٣} = ٢$

تمارين ومسائل

١) أ) $ص = ٣ جتا س + جا س$

ب) $ص = س^٢ جتا س + جا س \times ٢ س$

$= س^٢ جتا س + ٢ س جا س$

ج) $ص = \frac{جتا س - س \times جا س}{جتا^٢ س} = \frac{جتا س + س جا س}{جتا^٢ س}$

د) $ص = ظا^٢ س - \sqrt{٣}$ ، هـ) $ص = ١$ ، $ص = ٠$

و) $ص = -ظتا س ظتا س - (س \times -ظتا^٢ س + ظتا س \times ١)$

$= ظتا س ظتا س + س ظتا^٢ س - ظتا س$

ز) $ص = جتا س$ ، $ص = -جا س = -ص$

$ص + ٦ ص = -ص + ٦ ص = ٥ ص$

(٣) أ) $ه'(س) = جا س (-جا س) + جتا س جتا س$

$= جتا^٢ س - جا^٢ س$

$ه'(\frac{\pi}{٣}) = (\frac{١}{٢})^٢ - (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^٢ = \frac{١}{٤} - \frac{٣}{٤} = -\frac{١}{٢}$

ب) $ق(س) = -جا س + جتا س$ ، $ه'(س) = -جتا س - جا س$

$ه'(\frac{\pi}{٤}) = -\frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}} = -\sqrt{٢}$

ج) $ه'(س) = \frac{(١ + جا س)(-جا س) - ظتا س ظتا س}{(١ + جا س)^٢}$

$= \frac{-جا س - جا^٢ س - جتا^٢ س}{(١ + جا س)^٢} = \frac{-جا س - ١}{(١ + جا س)^٢}$

$ه'(\pi) = \frac{-جا \pi - ١}{(١ + جا \pi)^٢} = -١$

د) $ه'(س) = س جا س ظا س + جا س$

$ه'(\frac{\pi}{٤}) = \frac{\pi}{٤} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{٢}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{\pi}{٤} + \frac{٢}{\sqrt{٢}}$

هـ) $ه'(س) = \frac{جا س (ظا^٢ س + ١) - (ظا س + س) جتا س}{جا^٢ س}$

$ه'(\frac{\pi}{٣}) = \frac{\frac{\sqrt{٣}}{٢}(٤ + ١) - (\sqrt{٣} + \frac{\pi}{٣}) \times \frac{١}{٢}}{(\frac{\sqrt{٣}}{٢})^٢} = \frac{\frac{\pi}{٣} - \sqrt{٣}}{\frac{٣}{٤}}$

$= \frac{\pi ٤}{٩} - \frac{٨}{\sqrt{٣}}$

(٤) أولاً : ص = جتاس

ص' = − جاس ، ص'' = − جتاس

ص + ص'' = جتاس − جتاس = ٠

ثانياً ص = جاس

ص' = جتاس ، ص'' = − جاس

ص + ص'' = جاس − جاس = ٠

(٥) أ) ق'(س) = ١ − جاس

١ − جاس = ٠ ومنها جاس = ١

إذاً س = $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{5\pi}{2}$

ب) ق(س) = ظاس = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ × $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^2\text{س}}$

ق'(س) = ٠ إذا كان جاس = ٠

س = − π ، ٠ ، π

(٦) ص = ٣ جتاس − ٥ جاس

(ص')^2 + ص^2 = (٣ جتاس − ٥ جاس)^2 + (٣ جاس + ٥ جتاس)^2

= ٩ جتا^{2}س − ٣٠ جتاس جاس + ٢٥ جا^{2}س + ٩ جا^{2}س + ٣٠ جاس جتاس + ٢٥ جتا^{2}س

= ٩ (جتا^{2}س + جا^{2}س) + ٢٥ (جا^{2}س + جتا^{2}س)

= ٩ × ١ + ٢٥ × ١ = ٣^2 + ٥^2

(٧) أ) ص = − ظتاس

ص' = − ظتا^{2}س × − جتا^{2}س + ظتاس (− قتاس ظتاس)

= ظتا^{2}س + ظتاس ظتا^{2}س

ب) ص = س (− جاس) + جتاس − ٤ جتاس

= − س جاس − ٣ جتاس

ص'' = − س جتاس + جاس (− ١) + ٣ جاس = ٣ جاس − س جتاس

(٨) فيكون هـ قابلاً للاشتقاق عند س = ٠ يجب أن يكون هـ متصلاً عند س = ٠ .

(٩)

$$\text{نها}_{س \to ٠^+} هـ(س) = \text{نها}_{س \to ٠^-} هـ(س) \text{ ومنه } ١ = ب$$

$$هـ(س) = \begin{cases} -\text{جا}س & س < ٠ \\ ٩ & س \geq ٠ \end{cases}$$

$$هـ'_+(٠) = \text{نها}_{س \to ٠^+} \frac{هـ(س) - هـ(٠)}{س - ٠} = \text{نها}_{س \to ٠^+} \frac{\text{جتا}س - ١}{س}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٠^+} \frac{\text{جتا}^٢ س - ١}{س(\text{جتا}س + ١)} = \text{نها}_{س \to ٠^+} \frac{\text{جتا}س - ١}{س} \times \frac{\text{جتا}س + ١}{\text{جتا}س + ١}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٠^+} \frac{\text{جا}^٢ س}{س(\text{جتا}س + ١)} = \text{نها}_{س \to ٠^+} \frac{\text{جا}س}{س} \times \text{نها}_{س \to ٠^+} \frac{\text{جا}س}{\text{جتا}س + ١}$$

$$= ١ \times ٠ = ٠$$

$$هـ'_-(٠) = ٩ = هـ'_+(٠) \text{ ، إذن } ٩ = ٠$$

(٩) لتعيين تعريف هـ(س) عندما س = π

$$هـ(س) = \begin{cases} \text{جا}س & س \geq π \\ -\text{جا}س & س < π \end{cases}$$

$$هـ'_+(π) = \text{نها}_{س \to π^+} \frac{هـ(س) - هـ(π)}{س - π} = \text{نها}_{س \to π^+} \frac{-\text{جا}س - ٠}{س - π} = \text{نها}_{س \to π^+} \frac{-\text{جا}س}{س - π}$$

نفرض ص = س − π ، عندما س ← π⁺ ، فإن ص ← ٠⁺

$$= \text{نها}_{ص \to ٠^+} \frac{-\text{جا}(ص + π)}{ص} = \text{نها}_{ص \to ٠^+} \frac{-(-\text{جا}ص)}{ص} = ١$$

$$هـ'_-(π) = \text{نها}_{س \to π^-} \frac{هـ(س) - هـ(π)}{س - π} = \text{نها}_{س \to π^-} \frac{\text{جا}س - ٠}{س - π}$$

$$= \text{نها}_{ص \to ٠^-} \frac{\text{جا}(ص + π)}{ص} = \text{نها}_{ص \to ٠^-} \frac{-\text{جا}ص}{ص} = -١$$

إذن هـ'(π) = ١ ، أي أن هـ قابل للاشتقاق عند س = π

(١٠) هـ(س) = جتا س − $\frac{١}{٢}$

$\frac{١}{٢} - = \frac{١}{٢} - ٠$ = جتا س ، جتا س = $\frac{١}{٢}$

إذن س = $\frac{π}{٣}$ ، $\frac{٥π}{٣}$

ثامناً : قاعدة السلسلة

١ التدريبات :

(١) (أ) نفرض ع = س٢ − س فيكون ص = ع٦ ، ع = س٣ − س

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \cdot \frac{د ع}{د س} = ٦ ع^{٥} \times (٣ س^{٢} - ١)$

$= ٦ (س^{٣} - س)^{٥} (٣ س^{٢} - ١)$

(ب) هـ(س) = ٥ − $\frac{١}{٤ س}$ ، هـ(س) = جتا س

$(هـ \circ ص)'(س) = هـ'(ص(س)) \cdot ص'(س) = (٠ - \frac{١}{جا^{٢} س}) \times$ جتا س

$= ٢$ جتا س − ظتا س

(ج) $\frac{د ص}{د س} = ٢ (قا س + ظا س)(قا س ظا س + قا^{٢} س)$

$\left| \frac{د ص}{د س} \right|_{س = ٠} = ٢ (١ + ٠)(١ \times ٠ + ١) = ٢$

(٣) ١) هـ(س) = ٤ قا ٤س ظا ٤س

٢) هـ(س) = ٧ (س^٣ + ٢س − ٨)^٦ (٣ س^٢ + ٢)

٣) هـ(س) = ٤ جا^٢ (س^٤) جتا (س^٤) × ٢س = ٨ س جا^٣ (س^٤) جتا (س^٤)

(٤) نستعمل الطريقة بالتعويض بالرمز س

هـ'(س^٢ − ١)(٣ س^٢) = − $\frac{١}{٤ س}$ − ٢ س

س^٣ − ١ = ٧ عندما س = ٢

هـ'(٧)(١٢) = − $\frac{١}{٤}$ − ٤

هـ'(٧) × ١٢ = − $\frac{١٧}{٤}$ ، هـ'(٧) = $\frac{١٧}{٤} \times \frac{١}{١٢} = \frac{١٧}{٤٨}$

(١) أ) $\frac{ص}{س} = ٨(س^٣ - ٢س + ٤)^٧ (٣س^٢ - ٢)$

ب) $\frac{ص}{س} = -٥(س^٢+١)^٤ (٢س) \times \frac{-١٠س}{(س^٢+١)^٦}$

ج) $\frac{ص}{س} = \frac{(١-س^٣)^٤ (-٣س^٢) - س^٣ [٤(١-س^٣)^٣ (-٣س^٢)]}{(١-س^٣)^٨} = \frac{-٣س^٢(١-س^٣)^٤ + ١٢س^٦(١-س^٣)^٣}{(١-س^٣)^٨}$

$= \frac{٣س^٢(١-س^٣)^٣ [-(١-س^٣) + ٤س^٣]}{(١-س^٣)^٨} = \frac{٣س^٢(١+٣س^٣)}{(١-س^٣)^٥}$

د) $\frac{ص}{س} = -جا(س^٢ - س)(٢س - ١) = (١ - ٢س) جا(س^٢ - س)$

(٢) $هـ(س) = ٢س - ٣$ ، $هـ'(س) = ٣س^٢$

$(هـ \circ هـ)'(١) = هـ'(هـ(١)) \times هـ'(١)$

$= هـ'(-١) \times ٣ = ٢ \times ٣ = ٦$

$(هـ \circ ص)'(١) = هـ'(ص(١)) . ص'(١) = هـ'(-١) \times$ صفر $=$ صفر

(٣) أ) $(ص \circ هـ)'(٢) = ص'(هـ(٢)) . هـ'(٢)$

$= ص'(-٣) \times -٦ = ٤ \times -٦ = -٢٤$

ب) $هـ(س^٢) \times ٢ = س$ ، $هـ'(٣) \times ٢٧ = \frac{١}{٣\sqrt{٨}}$

(٤) نفرض $ع = هـ(س)$ فيكون $ص = جا ع$ ، $ع = هـ(س)$

$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} . \frac{ع}{س} = جتا ع \times هـ'(س)$

$= جتا هـ(س) \times هـ'(س)$

(٥) أ) $\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} . \frac{ع}{س}$

$= جا^٢ ع \times (٣س^٢ - ١) = جا^٢(س^٣ - س) \times (٣س^٢ - ١)$

ب) $\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ل} . \frac{ل}{س} = (٢ + ل) \times \frac{٢س}{٢\sqrt{١+س^٢}}$

$= (٢ + \sqrt{١+س^٢}) \times \frac{س}{\sqrt{١+س^٢}} = \frac{٢س}{\sqrt{١+س^٢}} + س$

(٣٤)

(٦) $\dot{ص} = -\text{جا}(س + \frac{\pi}{2})$ ، $\ddot{ص} = -\text{جتا}(س + \frac{\pi}{2})$

$ص + \ddot{ص} = \text{جا}(س + \frac{\pi}{2}) - \text{جا}(س + \frac{\pi}{2}) = $ صفر

(٧) $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \text{ظا}^2 س + \text{ظا}^2 س \text{ ظا}^2 س = \text{ظا}^2 س (1 + \text{ظا}^2 س)$

$= \text{ظا}^2 س \text{ قا}^2 س = \text{ظا}^4 س$

(٨) أ) هذا اقتران متزايد وأي أ ∈ مد(س) = مد(س) باستثناء النقاط الطرفية.

$-$ مد(س) = $-$ مد(س) ومنه مد($-$س) = مد(س)

إذاً هذا اقتران زوجي

ب) هذا اقتران متزايد، أي أ ∈ مد(س) = مد(س) باستثناء النقاط الطرفية.

$-$ مد($-$س) = مد(س) ومنه مد($-$س) = $-$ مد(س)

إذاً هذا اقتران متزايد

(٩) أ) $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = 2 \text{ جا} 3س \text{ جتا} 3س \times 3 = 3 \text{ جا} 6س$

عندما $س = \frac{\pi}{9}$ ، $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = 3 \text{ جا} \frac{2\pi}{3} = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

ب) $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = 4 (س + \frac{1}{س})^3 (1 - \frac{1}{س^2})$

$\frac{\text{ص}}{\text{س}} \Big|_{س=1} = 4(1+1)^3 (1-1) = $ صفر

(١٠) أ) $ص = س \text{ قا}^2(\frac{1}{س}) \times -\frac{1}{س^2} + \text{ظا}(\frac{1}{س}) \times 1$

$= -\frac{1}{س} \text{ قا}^2(\frac{1}{س}) + \text{ظا}(\frac{1}{س})$

$\dot{ص} = -\frac{1}{س^2} \times 2 \text{ قا}(\frac{1}{س}) \text{ قا}(\frac{1}{س}) \text{ ظا}(\frac{1}{س}) \times -\frac{1}{س^2} + \text{قا}^2(\frac{1}{س}) \times \frac{1}{س^2} + \text{قا}^2(\frac{1}{س}) \times -\frac{1}{س^2}$

$= \frac{2}{س^3} \text{ قا}^2(\frac{1}{س}) \text{ ظا}(\frac{1}{س}) + \frac{1}{س^2} \text{ قا}^2(\frac{1}{س}) - \frac{1}{س^2} \text{ قا}^2(\frac{1}{س})$

$= \frac{2}{س^3} \text{ قا}^2(\frac{1}{س}) \text{ ظا}(\frac{1}{س})$

(٣٣)

$$\text{ق} = \frac{\text{س}^{٤}(\text{س}\,\text{جتا}\,\text{س} + ٤\,\text{جا}\,\text{س}) - (\text{جا}\,\text{س} + \text{س}\,\text{جتا}\,\text{س})\times ٤\text{س}^{٣}}{\text{س}^{٨}}$$

$$= \frac{\text{س}^{٤}\,\text{جتا}\,\text{س} + ٤\,\text{س}^{٣}\,\text{جا}\,\text{س} - ٤\,\text{س}^{٣}\,\text{جا}\,\text{س} - ٤\,\text{س}^{٤}\,\text{جتا}\,\text{س}}{\text{س}^{٨}}$$

$$= \frac{-٣\,\text{س}^{٤}\,\text{جتا}\,\text{س}}{\text{س}^{٨}} = \frac{-٣\,\text{جتا}\,\text{س}}{\text{س}^{٤}}$$

(٣٤) $\text{ق}(\text{س}) = \text{جا}(\text{جا}\,\text{س})\times\text{جتا}\,\text{س}$ ، $\text{ق}(\frac{\pi}{٦}) = ؟$

$\text{جا}\,\text{س} = \frac{١}{٢}$ اذا كان $\text{س} = \frac{\pi}{٦}$ وهي $\text{س} = \frac{٥\pi}{٦}$

$\text{ق}(\frac{١}{٢})\times\text{جتا}\,\frac{\pi}{٦}$ حيث $\frac{\pi}{٦}$ تقع $\times$

$\text{ق}(\frac{١}{٢})\times\frac{\sqrt{٣}}{٢}\times\frac{\sqrt{٣}}{٢}\times$

$\text{ق}(\frac{١}{٢}) = -٤\times\frac{٣}{٤} = -٣$

(٣٥) $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \text{ق}(\text{س}^{٣}+٢\text{س}^{٢}+\text{س})(\text{س}+٥)$

$\left.\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right|_{\text{س}=١} = \text{ق}(٣)\times٤ = ٥\times٤ = ٢٠$

(٣٦) $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{س}^{٣}+٢\text{س}^{٢}+\text{س}+٥}{\sqrt{\text{س}^{٣}+٢\text{س}^{٢}+٣\text{س}+٤}}$

(٣٧) $\text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(٤\text{س}-١)$ ، $\text{س} = ٠$

$\text{ق}(٠) = \text{ق}(٤\times٠-١) = \text{ق}(-١)$

$\text{ق}(-١) = ٤\times(-١)^{٣} = -٤$

$\text{ق}(٤\text{س}) = \frac{١}{\text{ق}(\text{س})}$ ، $\text{ق}(٤) = ؟$

نفرض $\text{س} = ١$

$\text{ق}(٤) = \frac{١}{\text{ق}(١)} = \frac{١}{٤}$

[٣٣]

(١٥) $ق(س) = ٣س^{٢} + ٤$ ، $ق'(س) = ٦س$ ، $ق''(س) = ٦$

$ه(س) = ٦س$ ، $ه'(س) = ٦$ ، $ه''(س) =$ صفر

أ) $(ق \circ ه)'(١) = ق'(ه(١)) \times ه'(١)$

$= ق'(٦) \times ٦ = ٦ \times ٣ \times ٦ = ١٠٨$

ب) $(ق \circ ه)'(١) = ق'(ه(١)) \times ه'(١)$

$= ق'(١٢) \times ٦ = ٦ \times ١٢ \times ٦ = ٤٣٢$

ج) $(ق \circ ه)''(س) = ((ق \circ ه)'(س))'$

$= (ق'(ه(س)) \times ه'(س))' = (ق'(٦س^{٢}) \times ٦س)'$

$= (١٨س^{٢} \times ٦س)' = (١٠٨س^{٣})' = ٣٢٤س^{٢}$

$(ق \circ ه)''(-١) = ٣٢٤$

د) $(ق \circ ه)''(س) = ((ق \circ ه)'(س))' = (ق'(ه(س)) \times ه'(س))'$

$= ق''(ه(س)) \times ه'(س) \times ه'(س) + ق'(ه(س)) \times ه''(س)$

$= ق''(٦س) \times$ صفر $+ ٦ \times ٦ \times ٦ = ١٠٨$

تاسعاً : الدستقامة الفضي

التدريبات

(١) ١) ٦ س − ٨ ص صَ = ٠

٨ ص صَ = ٦ س ومنه صَ = $\frac{٣}{٤} \times \frac{س}{ص}$

٢) ٢ س . صَ + ٢ ص − ٣ ص٢ صَ = ١ + ٢ صَ

٢ س صَ − ٣ ص٢ صَ − صَ = ١ − ٢ ص

صَ (٢ س − ٣ ص٢ − ١) = ١ − ٢ ص ومنه صَ = $\frac{١ - ٢ ص}{٢ س - ٣ ص^{٢} - ١}$

٣) ٢ س + صَ = قا٢ ص . صَ

صَ (١ − قا٢ ص) = − ٢ س ومنه صَ = $\frac{٢ س}{قا^{٢} ص - ١}$

(٢) ١) $\frac{صَ}{٢ \sqrt{ص}}$ − جاس = ٠ ومنه صَ = ٢ $\sqrt{ص}$ جاس

٢) ٢ (س − ص) (١ − صَ) − صَ = ٠

٢ (س − ص) − صَ (٢ (س − ص)) − صَ = ٠

صَ (٢ س − ٢ ص + ١) = ٢ (س − ص) ومنه صَ = $\frac{٢ (س - ص)}{٢ س - ٢ ص + ١}$

(٣) − جاص صَ = ١ ، صَ = $\frac{١}{جاص}$

نجد جاص بدلالة س :

جا٢ ص = ١ − جتا٢ ص = ١ − س٢

جاص = $\sqrt{١ - س^{٢}}$ ، − $\sqrt{١ - س^{٢}}$ يُهمل

صَ = $\frac{١}{جاص}$ = $\frac{١}{\sqrt{١ - س^{٢}}}$

(٤) $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{د ص}{د ن}$. $\frac{د ن}{د س}$ ، $\frac{د س}{د ن}$ = ٣ جتا٣ ن

$\frac{د ص}{د س}$ = (− جا٢ ن) × $\frac{١}{٣ جتا٢ ن}$ × $\frac{١}{٣}$ = − ظا٣ ن

$\frac{د٢ ص}{د س٢}$ = − ٣ قا٢ ٣ ن × $\frac{د ن}{د س}$ = − ٣ قا٢ ٣ ن × $\frac{١}{٣ جتا٢ ن}$ × ٣

= − قا٣ ن

$\frac{د٢ ص}{د س٢}$ | $_{ن = \frac{\pi}{٣}}$ = − (− ١)٣ = ١

تمارين ومسائل

(١) أ) $٣س + ٨ص \frac{د ص}{د س} = ٠$ ، $\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{٤} \times \frac{س}{ص}$

ب) $ص = ٠$ ، $\frac{د ص}{د س} = \frac{٣س^٢ + ٨س}{٢\sqrt{س^٣ + ٤س^٢}}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{٢ص} \times \frac{٣س^٢ + ٨س}{٢\sqrt{س^٣ + ٤س^٢}} = \frac{٣س^٢ + ٨س}{٤ص\sqrt{س^٣ + ٤س^٢}}$

ج) $٣س^٢ + ٣ص^٢ \frac{د ص}{د س} = س \frac{د ص}{د س} + ص$

$\frac{د ص}{د س}(٣ص^٢ - س) = ص - ٣س^٢$ ، $\frac{د ص}{د س} = \frac{ص - ٣س^٢}{٣ص^٢ - س}$

د) $جتا(س ص)(س \frac{د ص}{د س} + ص) = ٢س$

$(س \frac{د ص}{د س} + ص) = \frac{٢س}{جتا(س ص)}$ ، $س \frac{د ص}{د س} = \frac{٢س}{جتا(س ص)} - ص$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{٢}{س جتا(س ص)} - \frac{ص}{س}$

(٢) أ) $٣(س ص)^٢ (س \frac{د ص}{د س} + ص) = ٤$

$س \frac{د ص}{د س} + ص = \frac{٤}{٣(س ص)^٢}$

$س \frac{د ص}{د س} = \frac{٤}{٣(س ص)^٢} - ص$ وضلع $\frac{د ص}{د س} = \frac{٤}{٣س(س ص)^٢} - \frac{ص}{س}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{٤}{٣}\left(\frac{١}{س^٢ ص^٢}\right) - \frac{ص}{س}$

$\frac{د^٢ ص}{د س^٢} = \frac{٤}{٣} \times \frac{-(س^٢ \times ٢ص \frac{د ص}{د س} + ٣س^٢ ص^٢)}{س^٦ ص^٤} - \frac{س \frac{د ص}{د س} - ص}{س^٢}$

$= -\frac{٤}{٣} \times \frac{س^٢ ص(٢س \frac{د ص}{د س} + ٣ص)}{س^٦ ص^٤} - \frac{س \frac{د ص}{د س} - ص}{س^٢}$

$= -\frac{٤}{٣} \times \frac{٢س \frac{د ص}{د س} + ٣ص}{س^٤ ص^٣} - \frac{س \frac{د ص}{د س} - ص}{س^٢}$

ب) $٨س + ٦ص \frac{د ص}{د س} = ٠$ ، $\frac{د ص}{د س} = -\frac{٤}{٣} \times \frac{س}{ص}$

$\frac{د ص}{د س}\left(\frac{ص = س \frac{د ص}{د س}}{ص^٢}\right) = -\frac{٤}{٣}$

ج) $\frac{ر ص}{ر س} = س(-\text{حا}ص).ص + \text{جتا}ص$

$\frac{ر ص}{ر س}(1 + س\ \text{حا}ص) = \text{جتا}ص$ ، $\frac{ر ص}{ر س} = \frac{\text{جتا}ص}{1+س\ \text{حا}ص}$

$\frac{ر^2 ص}{ر س^2} = \frac{(1+س\ \text{حا}ص)(-\text{حا}ص)ص - \text{جتا}ص(س\ \text{جتا}ص.ص + \text{حا}ص)}{(1+س\ \text{حا}ص)^2}$

$= \frac{-(\text{حا}ص)(ص)(1+س\ \text{حا}ص) - \text{جتا}ص(س ص\ \text{جتا}ص + \text{حا}ص)}{(1+س\ \text{حا}ص)^2}$

$= \frac{-ص\ \text{حا}ص(ص + \text{جتا}ص) + س ص}{(1+س\ \text{حا}ص)^2}$

د) $\text{جتا}س = \frac{ص}{\sqrt{ص^2+2}}$ وضح $ص = \sqrt{ص^2+2}\ \text{جتا}س$

$ص = \sqrt{ص^2+2}(-\text{حا}س) + \text{جتا}س \times \frac{ص}{\sqrt{ص^2+2}}$

$= -\sqrt{ص^2+2}\ \text{حا}س + \frac{ص\ \text{جتا}س}{\sqrt{ص^2+2}}$

٣) أ) $٨س ص + ٨ص - \text{حا}ص.ص = 0$

$ص(٨س - \text{حا}ص) = -٨ص$ وضح $ص = \frac{-٨ص}{٨س - \text{حا}ص}$

$ص|_{(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})} = \frac{-٨ \times \frac{\pi}{4}}{1 - \frac{\pi}{4} \times ٨} = \frac{-٤\pi}{1-٢\pi} = \frac{٤\pi}{٢\pi - 1}$

ب) $٣س^2 - (٢س ص + ٢ص) + ٢ص^2.ص = 0$

$ص(٣ص^2 - ٢س) = -٣س^2 + ٢ص$

$ص = \frac{-٣س^2 + ٢ص}{٢ص^2 - ٢س}$ ، $ص|_{(1,-1)} = \frac{-٣ + ٢ \times ١ \times -٢}{٣ - ٢} = -٥$

ج) $\frac{ص}{س} = ٣ - \frac{٤}{س} = \frac{٣س - ٤}{س}$ وضح $\frac{س}{٣س - ٤} = ص$

$\frac{ر}{ر س} ص = \frac{(٣س - ٤) - س \times ٣}{(٣س - ٤)^2}$ وضح $ص = \frac{-٨}{(٣س - ٤)^2}$

$ص|_{(١,٤)} = \frac{-٨}{٨^2} = -\frac{١}{٨}$

٤) $\text{جتا}(س+ص) \times (1+ص') = ص^{٤}(-\text{جا}س) + ٢ص ص' \text{جتا}س$

$ص' \text{جتا}(س+ص) + \text{جتا}(س+ص) = ٢ص ص' \text{جتا}س - ص^{٤}\text{جا}س$

$ص'(\text{جتا}(س+ص) - ٢ص \text{جتا}س) = -\text{جتا}(س+ص) - ص^{٤}\text{جا}س$

$ص' = \dfrac{\text{جتا}(س+ص) + ص^{٤}\text{جا}س}{٢ص \text{جتا}س - \text{جتا}(س+ص)}$

٥) $\dfrac{١}{٢\sqrt{س}} + \dfrac{ص'}{٢\sqrt{ص}} = ٠$

$ص' = -\sqrt{ص} \times \dfrac{١}{\sqrt{س}}$

يكون المماس أفقياً إذا كان $\sqrt{ص} = ٠$ أي أن $ص = ٠$:

$\sqrt{س} = ٣$ ومنه $س = ٩$. يكون المماس أفقياً عند النقطة $(٩، ٠)$

٦) $ص' = \dfrac{٤}{٣}(٢س+١)^{\frac{١}{٢}} \times ٢ = \dfrac{٤}{٣\sqrt{٢س+١}}$

٧) $١ = -\text{جتا}ص \cdot ص'$ ومنه $ص' = \dfrac{١}{-\text{جتا}ص} = -\text{قا}ص$

$ص'' = -\text{قا}ص \text{ظا}ص \times ص' = -\text{قا}ص \text{ظا}ص \times -\text{قا}ص$

$= \text{ظا}ص \text{قا}^{٢}ص$

٨) $ص \times -٢\text{جا}٢س + ص' \text{جتا}س = س \times ٢\text{جتا}٢ص \times ص' + \text{جا}٢ص$

$ص'(\text{جتا}س - ٢س \text{جتا}٢ص) = \text{جا}٢ص + ٢ص \text{جا}٢س$

$ص' = \dfrac{\text{جا}٢ص + ٢ص \text{جا}٢س}{\text{جتا}س - ٢س \text{جتا}٢ص}$

$ص' \Big|_{(\frac{\pi}{٢}، \frac{\pi}{٢})} = \dfrac{\text{جا}\pi + ٢ \times \frac{\pi}{٢} \text{جا}\pi}{\text{جتا}\frac{\pi}{٢} - ٢ \times \frac{\pi}{٢} \text{جتا}\pi} = \dfrac{٠ + \pi}{\frac{\pi}{٢} + \pi} = ٢$

(٣٨)

(٩) $س ص' + ص = جتا س$

$ص' = \frac{جتا س - ص}{س}$

$ص'' = \frac{س(-جا س - ص') - (جتا س - ص)}{س^2} = \frac{-س جا س - س ص' - جتا س + ص}{س^2}$

$س ص'' + ٢ ص' + س ص = \frac{-س جا س - س ص' - جتا س + ص}{س} + ٢ ص' + س ص$

$= \frac{-س جا س - س ص' - جتا س + ص + ٢ س ص' + س^2 ص}{س}$

بالتعويض عن $س ص$ بـ $جا س$ و $س ص'$ بـ $جتا س - ص$

$= \frac{-س^2 ص - س ص' + س ص' + س^2 ص}{س} = صفر$

(١٠) $\frac{د ص}{د ن} = \frac{د ص}{د ن} \cdot \frac{د س}{د ن} = (\frac{١}{٤ ن})(٣ ن^2 + ٢) = \frac{٣}{٤} ن + \frac{١}{٢ ن}$

$\frac{د^2 ص}{د س^2} = \frac{٣}{٤} \times \frac{د ن}{د س} + \frac{د}{د س}(\frac{١}{٢ ن}) = \frac{٣}{٤ ن} \times \frac{٤ ن}{-٢ \times ٤ ن^2} + \frac{-٢ \times ٤ ن}{(٤ ن^2)^2} \cdot \frac{١}{٤ ن}$

$= \frac{١}{٣(٢ ن)} - \frac{٣}{١٦ ن}$

$\left| \frac{د^2 ص}{د س^2} \right|_{ن=١} = \frac{١}{٨} - \frac{٣}{١٦} = \frac{١}{١٦}$

(١١) $ص' + ١ = جتا ص \times ص'$

$ص'' = جتا ص \times ص'' + ص' (-جا ص) \times ص'$

$(ص')^2 جا ص = ص'' (جتا ص - ١)$

$(ص')^2 = ص'' \times \frac{جتا ص - ١}{جا ص} = ص'' (ظتا ص - جتا ص)$

(١٢) $ص' = جتا س + س ص' + ص$ ، $ص'' = -جا س + س ص'' + ص' + ص'$

$ص'' (١ - س) = ٢ ص' - جا س$ ، $ص'' = \frac{٢ ص' - جا س}{١ - س}$

$ص'' + ص = \frac{٢ ص' - جا س}{١ - س} + ص = \frac{٢ ص' - جا س + ص - س ص}{١ - س}$

$= \frac{٢ ص' + ١ ص - (جا س + س ص)}{١ - س} = \frac{٢ ص'}{١ - س}$

لأن $ص = جا س + س ص$

مراجعة

(١) معدل التغير = $\frac{\text{ظا}(س+هـ)-\text{ظا}س}{هـ}$

$= \frac{\text{ظا}س+\text{ظا}هـ}{هـ} \div \frac{1-\text{ظا}س\,\text{ظا}هـ}{هـ} - \text{ظا}س$

$= \frac{\text{ظا}س+\text{ظا}هـ-\text{ظا}س(1-\text{ظا}س\,\text{ظا}هـ)}{هـ(1-\text{ظا}س\,\text{ظا}هـ)} = \frac{\text{ظا}س+\text{ظا}هـ-\text{ظا}س+\text{ظا}^2س\,\text{ظا}هـ}{هـ(1-\text{ظا}س\,\text{ظا}هـ)}$

$= \frac{\text{ظا}هـ(1+\text{ظا}^2س)}{هـ(1-\text{ظا}س\,\text{ظا}هـ)} = \frac{\text{ظا}هـ\,\text{قا}^2س}{هـ(1-\text{ظا}س\,\text{ظا}هـ)}$

(٢) $\text{مشـ}(\frac{\pi}{4}) = \text{نهـا}_{هـ\to 0} \frac{\text{ظا}(\frac{\pi}{4}+هـ)-\text{ظا}(\frac{\pi}{4})}{هـ} = \text{نهـا}_{هـ\to 0} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{4}+هـ)-1}{هـ}$

$= \text{نهـا}_{هـ\to 0} \frac{\text{جا}\frac{\pi}{4}\,\text{جتا}هـ+\text{جتا}\frac{\pi}{4}\,\text{جا}هـ-1}{هـ} = \text{نهـا}_{هـ\to 0} \frac{\text{جتا}هـ-1}{هـ}$

$= \text{نهـا}_{هـ\to 0} \frac{1-2\,\text{جا}^2\frac{هـ}{2}-1}{هـ} = \text{نهـا}_{هـ\to 0} -2\,\frac{\text{جا}\frac{هـ}{2}}{هـ}\times\frac{\text{جا}\frac{هـ}{2}}{\frac{هـ}{2}}$ = $-2\times$ صفر $\times$ صفر = صفر

(٣) $\text{مد}(س) = \begin{cases} س^2+2س+2 & ,\ -1 \le س < 0 \\ 4س+1 & ,\ 0 \le س < 1 \\ 4س+2 & ,\ 1 \le س < 2 \\ 4س+3 & ,\ 2 \le س < 3 \\ س=3 & \end{cases}$

$\text{مد}'(س) = \begin{cases} 2س+2 & ,\ -1 < س < 0 \\ 4 & ,\ 0 < س < 1 \\ 4 & ,\ 1 < س < 2 \\ 4 & ,\ 2 < س < 3 \end{cases}$

$\text{مد}'(1) = 4$ ، $\text{مد}'_+(1) = 4$ ، $\text{مد}'_-(1) = 4$ ∴ $\text{مد}'(1) = 4$

$\text{مد}'(2) = 4$ ، $\text{مد}'_+(2) = 4$ ، $\text{مد}'_-(2) = 4$ ∴ $\text{مد}'(2) = 4$

$\text{مد}'(س) = \begin{cases} 2س+2 & ,\ -1 \le س < 0 \\ 4 & ,\ 0 \le س < 1 \\ 4 & ,\ 1 \le س < 2 \\ 4 & ,\ 2 < س < 3 \\ \text{غير موجودة} & ,\ س = 0,3 \end{cases}$

[٤٠]

(٤) د) هـ(س) = $\sqrt{٨س+٥}$ × ل(س) + ل(س) × $\frac{١}{\sqrt{٨س+٥}}$

هـ(-١) = $\sqrt{٣}$ × ل(-١) + ل(-١) × $\frac{١}{\sqrt{٨(-١)+٥}}$ = ٢ × ١ + ٢ × $\frac{١}{٢}$ = ٣

هـ) هـ(س) = $\frac{(س^{٢}-س)(٥ل(س)\cdot ل(س)) - (ل(س))^{٥}(٢س-١)}{(س^{٢}-س)^{٢}}$

هـ(-١) = $\frac{٢\times٥\times ل(-١)\ ل(-١) - (ل(-١))^{٥}(-٣)}{٤}$ = $\frac{٣\times١\times٥\times١-٣}{٤}$ = $\frac{١١}{٤}$

و) هـ(س) = ل(س) − $\frac{س ل(س) - ل(س)}{س^{٢}}$

هـ(-١) = ل(-١) − $\frac{-١ ل(-١) - ل(-١)}{(-١)^{٢}}$

= ٢ − $\frac{-٢\times٢-١}{١}$ = ٢ + ٣ = ٥

ز) هـ(س) = (جا$^{٢}\frac{\pi}{٣}$ ل(س)) × $\frac{\pi}{٣}$ ل(س)

هـ(-١) = جا$^{٢}(\frac{\pi}{٣}$ ل(-١)) × $\frac{\pi}{٣}$ ل(-١) = ($\frac{\pi}{٣}$ جا$\frac{٢\pi}{٣}$) × ٢

= $\frac{\pi}{٣}\times٣\times\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = $\frac{٧\sqrt{٣}}{٣}$

(٥) د) صـ = س جاس + ظاس

صـ = س × ٢ جاس جاس + جا^{٢}س + جا^{٢}س

= ٢ س جا^{٢}س ظاس + ٢ جا^{٢}س = ٢ جا^{٢}س (س ظاس + ١)

= ٢ جا^{٢}س (١ + صـ)

و) جتاص · $\frac{د ص}{د س}$ = ١ ومنه $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{١}{جتاص}$

نجد جتاص بدلالة س

جتا^{٢}ص + جا^{٢}ص = ١ ، جتا^{٢}ص + س^{٢} = ١

إذا جتا^{٢}ص = ١ − س^{٢} ومنه جتاص = $\sqrt{١-س^{٢}}$ لأن ص ∈ (٠، $\frac{\pi}{٢}$)

$\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{١}{جتاص}$ = $\frac{١}{\sqrt{١-س^{٢}}}$

(٦) $\frac{ع س}{ع ن} = ٠$ عندما $\frac{ع ن}{ع س} = \frac{١}{٢}$

$\frac{ع ص}{ع س} = \frac{ع ص}{ع ن} \cdot \frac{ع ن}{ع س} = (٣ن^{٢} - ٤) \times \frac{١}{٢} = ن - ٢$

$\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}} = \frac{ع ن}{ع س} = \frac{١}{٢}$

عندما $ن = ٦$ ، $\frac{ع^{٢} ص}{ع س^{٢}} = \frac{١}{٢}$

(٧) $ك'(س) = ٢ هـ(س) \cdot هـ'(س) + ٢ هـ(س) \cdot هـ'(س)$

$= ٢ هـ(س) \cdot هـ'(س) + ٢ هـ(س) \times - هـ(س) = صفر$

(٨) ١) $هـ(س) = \begin{cases} ٤(س+١)^{٣} & س \geq ٠ \\ ٤(١-س)^{٣} & س < ٠ \end{cases}$

$هـ'_{+}(٠) = -٤$ ، $هـ'_{-}(٠) = ٤$ وعليه $هـ'(٠)$ غير موجودة

(٩) $٣ ص^{٢} صـ = هـ(٤س^{٢} - س)(٨س - ١)$

$صـ = \frac{هـ(٤س^{٢} - س)(٨س - ١)}{٣ ص^{٢}}$

نجد ص عندما $س = -١$ ، $ص^{٣} = هـ(٥) = -٨$ ومنه $ص = -٢$

$صـ|_{س=-١} = \frac{هـ(٥)(-٩)}{٣(-٢)^{٢}} = \frac{٩ \times ٤ -}{١٢} = -٣$

(١٠) $هـ(س) = (جتا ك(س)) ك(س)$

$هـ'(س) = (جتا ك(س)) \cdot ك'(س) + ك(س)(- جا ك(س)) \times ك'(س)$

$هـ'(١) = جتا ك(١) \times ك'(١) - ك(١) جا ك(١) \times ك'(١)$

$= (جتا \frac{\pi}{٣}) \times ٤ - صفر = \frac{١}{٢} \times ٤ = ٢$

(١١) $ك(س) = ٣س^{٢} + ٢$ ، $هـ(س) = ٦س$ ، $ك(س) = ٦ - س$

$(هـ \circ ك)'(س) = هـ'(ك(س)) \cdot ك'(س)$

$(هـ \circ ك)'(٢) = هـ'(ك(٢)) \cdot ك'(٢) = هـ'(١٢) \times ١٢$

$= ٧٦ \times ١٢ = ٨٦٤$

(٤٠)

ب) $(هـ \circ ص)''(س) = (هـ' \circ ص')'(س)$ ، $ص''(س) = ٦$ ، $ص'(س) = ٦$

$= (هـ'(ص(س)) \cdot ص'(س))'$

$= هـ''(ص(س)) \cdot ص'(س) + ص'(س) \cdot هـ''(ص(س)) \cdot ص'(س)$

$(هـ \circ ص)''(٠) = هـ''(ص(٠)) \cdot ص'(٠) + ص'(٠) \cdot هـ''(ص(٠)) \cdot ص'(٠)$

$= هـ''(١٢) \times ٦ + ١٢ \times ٦ \times ١٢ = ٦ \times ٢٤ + ٦ \times ٧٢ = ١٤٤ + ٤٣٢$

$= ٥٧٦$

١٤) $ل'(س) = هـ'(ص(س)) \cdot ص'(س)$

$ل'(١) = هـ'(ص(١)) \cdot ص'(١)$ ، $٢ = هـ'(٤) \times ص'(١)$

$٢ = -٥ \times ص'(١)$ ومنه $ص'(١) = -\frac{٢}{٥}$

١٣) $\frac{ص}{س} = س \times ص'(س) + ص(س)$

$\left.\frac{ص}{س}\right|_{س=-١} = -١ \times ص'(-١) + ص(-١) = -١ \times ٢ + ٦ = ٤$

١٤) $ظاص \cdot ص = قا^٢ س$ ومنه $ص' = \frac{قا^٢ س}{ظاص}$

$ظاص \times ص' + ص \times (-ظاص) \cdot ص = قا^٢ س \cdot قاس ظاس$

$ص' ظاص - (ص)^٢ ظاص = قا^٣ س ظاس$

بالضرب $ظاص$

$ص' ظا^٢ ص - (ص)^٢ ظا^٢ ص = قا^٣ س ظا^٢ ص$ بالتعويض عن $ظا^٢ ص$

$ص' - (ص)^٢ ظا^٢ ص = قا^٣ س ظا^٢ ص$

$ظاص (قا^٢ س + (ص)^٢) = ص'$. اذن $ظاص = \frac{ص'}{قا^٢ س + (ص)^٢}$

١٥) $هـ'(٢س - ١٠)(٢) = \frac{-٢س^٤}{س^٤} + \frac{٤}{س^٣}$

$هـ'(٢س - ١) = \frac{١}{٢}(\frac{٤}{س^٣} - \frac{٢س^٤}{س^٤})$ ، $٢س - ١ = ٥$ عندما $س = ٣$

$هـ'(٥) = \frac{١}{٢}(\frac{٤}{٨} - \frac{٢}{٤}) = \frac{١}{٢}(\frac{١}{٤}) = \frac{١}{١٢}$

١٦) $ص' = ظاص \cdot ص' - (س ص' + ص) = ٠$

$ص' ظاص \cdot ص' + ص' (-ظاص \cdot ص' - س ص' + ص' + ص') = ٠$

$ص'' ظاص + (ص')^٢ ظا^٢ ص + س ص'^٢ + ٢ ص' ص' = ٠$

$ص'' (س + ظاص) + ص' (٢ + ص' ظا^٢ ص) = ٠$

(٤٢)

١٥) $(هـ \circ ص)''(س) = (هـ' \circ ص')'(س)$ ، $هـ''(س) = ٦$ ، $ص''(س) = ٦$

$= (هـ'(هو(س)) \cdot ص'(س))'$

$= هـ''(هو(س)) \cdot ص'(س) + ص''(س) \cdot هـ'(هو(س))$

$(هـ \circ ص)''(٢) = هـ''(هو(٢)) \cdot ص'(٢) + ص''(٢) \cdot هـ'(هو(٢))$

$= هـ''(١٢) \times ٦ \times ١٢ + ٦ \times ٢٧ = ٤٣٢ + ١٨٢ = ٦١٤$

١٦) $ل'(س) = هـ'(هو(س)) \cdot ص'(س)$

$ل'(١) = هـ'(هو(١)) \cdot ص'(١)$ ، $٢ = هـ'(٤) \times ص'(١)$

$ص'(١) = -\frac{٥}{٢}$ ومنه $هـ'(٤) = -\frac{٥}{٢}$

١٣) $\frac{ص}{س} = س \, ص'(س) + هو(س)$

$\left.\frac{ص}{س}\right|_{س=-١} = -١ \times ص'(-١) + هو(-١) = -١ \times ٢ + ٦ = ٤$

١٤) $جتاص \cdot صَ = جا^٢س$ ومنه $صَ = \frac{جا^٢س}{جتاص}$

$جتاص \times صَ + ص'(-جاص) \cdot صَ = ٢ جاس \, جتاس$

$صَ \, جتاص - (صَ)^٢ جاص = ٢ جا^٢س \, جاص$

بالضرب $جاص$ بـ $جاس$

$صَ \, جتاص - (صَ)^٢ جاص = ٢ جا^٢س \, جاص$ بالقسمة على $جتاص$

$صَ - (صَ)^٢ ظاص = ٢ جا^٢س \, ظاص$

$ظاص (٢ جا^٢س + (صَ)^٢) = صَ$. اذن $ظاص = \frac{صَ}{٢ جاس + (صَ)^٢}$

١٥) $هـ'(٢س - ١)(٢) = \frac{-٢س^٤ + ٤س^٣}{س^٨} + \frac{٤}{س^٤}$

$هـ'(٢س - ١) = \frac{١}{٢}(\frac{٤}{س^٤} - \frac{٤}{س^٣})$ ، $٢س - ١ = ٥$ عندما $س = ٣$

$هـ'(٥) = \frac{١}{٢}(\frac{٤}{٨١} - \frac{٤}{٢٧}) = \frac{١}{٢}(-\frac{٤}{٢٧}) = -\frac{١}{١٣٥}$

١٦) $-جاص \cdot صَ - (س \, صَ + ص) = ٠$

$-جاص \cdot صَ + صَ (-جتاص \cdot صَ) - (س \, صَ + صَ + صَ) = ٠$

$صَ^٢ جاص + (صَ)^٢ جتاص + س \, صَ^٢ + ٢ صَ = ٠$

$صَ (س + جاص) + صَ (٢ + صَ جتاص) = ٠$

(٤٣)

(١٧) $ص = ا$ جتا$س$ + ب جا$س$

$ص^{(ن)} = ا$ جتا$(س + ن\frac{\pi}{2})$ + ب جا$(س + ن\frac{\pi}{2})$

$ص^{(٢)} + ص = ا$ جتا$(س + \frac{\pi}{2})$ + ب جا$(س + \frac{\pi}{2})$ + ا جتا$س$ + ب جا$س$

$= ٠$

(١٨) $٣ص^{٢} ص' = هـ'(س^{٣} - س)(٤س - ١)$

عندما $س = ٠$ يكون $ص^{٣} = هـ(٠) = -٨$ ومنه $ص = -٢$

$٣(-٢)^{٢} ص'_{(٠،-٢)} = هـ'(٠) \times -٩$

$١٢ ص'_{(٠،-٢)} = ٤ \times -٩ = -٣٦$ ، $ص'_{(٠،-٢)} = \frac{-٣٦}{١٢} = -٣$

(١٩) أ) $هـ(س) = ٣س^{٢} - ٤س$ ، $هـ'(س) = ٦س - ٤$ ، $هـ''(س) = ٦$

$ق(س) = ٦س + ١$ ، $ق'(س) = ٦$

$(هـ \circ ق)'(١) = هـ'(ق(١)) . ق'(١)$

$= هـ'(٤) \times ٧ = ٧٧ \times ٧ = ١٥٤$

ب) $[(هـ \circ ق)']'(س) = ((هـ \circ ق)'(س))' = (هـ'(ق(س)) . ق'(س))'$

$= هـ''(ق(س)) . ق'(س) + ق'(س) (هـ''(س) . ق'(س))$

$(هـ \circ ق)''(١) = هـ''(ق(١)) . ق'(١) + ق'(١) [هـ''(ق(١)) . ق'(١)]$

$= هـ''(٤) \times ٦ + ٧ (هـ''(٤) \times ٧)$

$= ٧٧ \times ٦ + ٧ \times ٦ \times ٧ = ٤٦$

(٢٠) أ) $س = ٠$ ب) $س = -١، ٠، ١$

(٢١) ١) جـ ٢) ك ٣) ب ٤) أ

٥) جـ ٦) أ ٧) ك ٨) ب

رياضيات / العلمي / ف ١

إجابات أسئلة وتمارين

الوحدة الثالثة

تطبيقات التفاضل

تطبيقات هندسية

تدريب (١) ص ١٦٢ :

$ق(س) = \sqrt{س + ٣}$ عند $(١ ، ٢)$

$ميل المماس = ق'(س)|_{س=١} = \frac{١}{٢\sqrt{س+٣}}|_{س=١} = \frac{١}{٢\times ٢} = \frac{١}{٤}$

معادلة المماس : $ص - ٢ = \frac{١}{٤}(س - ١)$

معادلة العمودي : $ص - ٢ = -٤(س - ١)$

تدريب (٢) ص ١٦٢ :

$ق(س) = \frac{٤}{س}$ ، $ق(س) = ص \Leftarrow س = \frac{٤}{ص}$

يتقاطعان عندما $ق(س) = ق(س) \Leftarrow \frac{٤}{ص} = ص \Leftarrow ص^٢ = ٤ \Leftarrow س = \pm ٢$

$ميل المماس لـ ق(س) = ق'(س)|_{س=-٢} = -\frac{٤}{س^٢}|_{س=-٢} = -\frac{٤}{٤} = -١$

$ميل المماس لـ ق(س) = ق'(س)|_{س=٢} = -\frac{٤}{٤} = -١$

وبما أن $ق(-٢) \times ق(٢) = -١ \times -١ = ١$ ∴ متعامدان

تدريب (٣) ص ١٦٣ :

$ق(س) = ٢ جا س$ ، $س \in [٠ ، ٢\pi]$

ميل المماس = صفرًا لـ $ق(س) = ق'(س) = ٠ \Leftarrow ٢ جتا س = ٠$

$جتا س = ٠ \Leftarrow س = \frac{\pi}{٢}$ أو $\frac{٣\pi}{٢}$

$ق(\frac{\pi}{٢}) = ٢$ ، $ق(\frac{٣\pi}{٢}) = -٢$

∴ القيمتان العظمى والصغرى المحليتان لـ $ق(س)$ هما ٢ ، -٢ عند $س = \frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$

تدريب (٤) ص ١٦٤ :

$ق(س) = ٤ س^٣ + ج س + ٥$ ، $ميل المماس = ق'(س) = ١٢ س^٢ + ج$

$ق'(١) = ظا ١٣٥°$

$١٢ + ج = -١ \Leftarrow ١٢ + ج = -١ \Leftarrow ج = -١٣$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تدريب (٥) صـ ١٦٥

$f(x) = 5 - x^2$ ، النقطة $(1, 4)$ لا تقع على منحنى $f(x)$

لنفرض أن النقطة (x_1, y_1) تقع على منحنى $f(x)$ $\Leftarrow y_1 = 5 - x_1^2$

ميل المماس عند (x_1, y_1) $= f'(x_1) = -2x_1$

معادلة المماس: $y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$

$f(x_1) = y_1 \Leftarrow 5 - x_1^2 = -2x_1(x_1 - 3)$

$5 - x_1^2 = -2x_1^2 + 6x_1 \Leftarrow x_1^2 - 6x_1 + 5 = 0 \Leftarrow (x_1 - 1)(x_1 - 5) = 0$

$x_1 = 1$ أو $x_1 = 5$

نقطة المماس الأولى $(1, 4)$ ومعادلة المماس الأولى: $y - 4 = -2(x - 1)$

$\Leftarrow$ الثانية $(5, -20)$ $\Leftarrow$ الثانية: $y + 20 = -10(x - 5)$

تمارين ومسائل

صـ ١٦٦

١) $f(x) = x^2 + 6x + 5$ ، $f'(x) = 2x + 6$

ميل المماس عند $(1, 12) = f'(1) = 8$

٢) $f(x) = x^3$ يتقاطع مع المستقيم $y = x + 6$ عندما

$f(x) = y \Leftarrow x^3 = x + 6 \Leftarrow x^3 - x - 6 = 0 \Leftarrow x = 2$

ميل المماس $= f'(2) = 3(2)^2 = 12$

معادلة المماس: $y - 8 = 12(x - 2)$

عند $(2, 8)$

٣) $f(x) = x^3 - 3x + 3$ ، $f'(x) = 3x^2 - 3$

ميل المماس $= f'(x) = 0 \Leftarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftarrow x^2 = 1 \Leftarrow x = \pm 1$

النقطة $(1, 1)$

٤) $(y - 4)^2 = x + 12 \Leftarrow 2(y - 4)\frac{dy}{dx} = 1 \Leftarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(y-4)}$

ميل المماس $=$ ميل المستقيم $\Leftarrow \frac{1}{2(y-4)} = \frac{1}{2} \Leftarrow 2y - 8 = 2 \Leftarrow y = 5$

$\therefore$ النقطة $(13, 5)$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

٥) $ق(س) = س^٣ - ٤س^٢ + ٣س$ ، $ق'(س) = ٣س^٢ - ٨س + ٣$ ، ميل المماس $= -٢$

$٣س^٢ - ٨س + ٣ = -٢ \Leftarrow ٣س^٢ - ٨س + ٥ = ٠$

$(س - ١)(٣س - ٥) = ٠ \Leftarrow س = ١$ ، $س = \frac{٥}{٣}$ مرفوض

$ق(١) = ١ - ٤ + ٣ = ٠$ ، النقطة $(١ ، ٠)$

معادلة المماس: $ص - ٠ = -٢(س - ١) \Leftarrow ص = -٢س + ٢$

معادلة العمودي: $ص - ٠ = \frac{١}{٢}(س - ١)$

٦) $ق(س) = \frac{س}{س^٢ + ١}$ عند $(١ ، \frac{١}{٢})$ ، $ق'(س) = \frac{١ - س^٢}{(س^٢ + ١)^٢}$

ميل المماس $= ق'(١) = ٠$ ، ميل العمودي $= \frac{١}{٠}$ غير معرف

معادلة المماس: $ص - \frac{١}{٢} = ٠(س - ١) \Leftarrow ص = \frac{١}{٢}$

معادلة العمودي: $س = ١$

٧) $ق(س) = س^٣ + ب س^٢ + جـ س + ٥$ عند $(٠ ، ٥)$ ، $ق'(س) = ٣س^٢ + ٢ب س + جـ$

$ق(٠) = ٥ \Leftarrow$ **$جـ = ٥$**

$ق'(١) =$ ميل المماس $= ١ \Leftarrow ٣ + ٢ب + جـ = ١ \Leftarrow$ **$ب = -٤$**

٨) $ق(س) = \frac{ك}{س}$ حيث $ك$ ثابت ، $ق'(س) = \frac{-ك}{س^٢}$ ، $ق'(-١) = ٢$

$\frac{-ك}{(-١)^٢} = ٢ \Leftarrow -ك = ٢ \Leftarrow ك = -٢$

$ق(س) = \frac{-٢}{س} \Leftarrow ق(-١) = \frac{-٢}{-١} =$ **٢**

$ق(١) = \frac{-٢}{١} =$ **-٢**

٩) العلاقة $س = ص^٢ - ٤$ ص تقاطع مع محور الصادات عندما $س = ٠$

$ص^٢ - ٤ = ٠ \Leftarrow ص(ص - ٤) = ٠ \Leftarrow ص = ٠$ ، $ص = ٤$

النقطة الأولى $(٠ ، ٠)$ ، النقطة الثانية $(٤ ، ٤)$

معادلة المماس الأولى: ميل المماس $= \frac{١}{٢ص - ٤}$ ، $ص = ٠$ ، $م = ٠ \Leftarrow$ ميل المماس $= -\frac{١}{٤}$

$ص - ٠ = -\frac{١}{٤}(س - ٠)$

معادلة المماس الثاني:

$ص - ٤ = \frac{١}{٤}(س - ٤)$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

١٠) العلاقة $ص^2 + ٦ص = ٤س + ٣٢$ ، $٢ص ص + ٦ ص ص = ٤ - ٢س$

ميل مماس المنحنى العلاقة $= \frac{٤ - ٢س}{٢ص + ٦} = \frac{١ - س}{٣ + ص} = ص$

$ص| = ظا\theta \Leftarrow -\frac{٤}{٣} = ظا\theta \Leftarrow ظا\theta = -١$ ، $\theta = ١٣٥°$
$(١-، ٣)$

١١) $ص = ٣ جتاس + ٤ جاس$ عند $س = \frac{\pi}{٤}$ ، النقطة $(\frac{\pi}{٤}، ٥)$

$ص = -٣ جتاس + ٤ جتاس$

ميل المماس $= ص(\frac{\pi}{٤}) = -٣ \times \frac{١}{٢} + ٤ \times \frac{١}{٢} = ١$

ميل العمودي $= -١$

معادلة المماس : $ص - ٥ = ١(س - \frac{\pi}{٤})$

معادلة العمودي : $ص - ٥ = -١(س - \frac{\pi}{٤})$

١٣) منحنى $ص = ل(س)$ يمر بالنقطة $(١، ١)$ حيث منحنى $ق(س) = س^٢ - \frac{٣}{٤}س + \frac{٣}{٤}$ عندما $ل(س) = ق(س)$

$س^٢ - \frac{٣}{٤}س + \frac{٣}{٤} = ل(س) \Leftarrow س = ١$ عند $(١، ١)$

ميل المماس $= ل(١) = ق(١) = |_{س=١} = \frac{١}{٤}$

معادلة المماس : $ص - ١ = \frac{١}{٤}(س - ١)$

١٣) ميل المماس $= ص(٤) = |_{س=٤} = \frac{١}{٤}$ ، معادلة المماس : $ص - ٢ = \frac{١}{٤}(س - ٤)$

$ص = \frac{١}{٤}س + ١$

المماس يقطع السينات عندما $ص = ٠ \Leftarrow س = -٤$

مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times ٤ \times ٢ = ٤$ وحدات مربعة

١٤) ميل المماس عند $(١، ١) = ق(١) = ٣س^٢ - ٣ = ٣ - ٣ = ٠$ ميل العمودي عند $(١، ١) = \frac{١}{٠}$

معادلة المماس : $ص - ٢ = ٠(س - ١) \Leftarrow ص = ٢$ تقطع محور الصادات عند $س = ٠$

معادلة العمودي : $ص - ٢ = \frac{١}{٠}(س - ١) \Leftarrow ص = \frac{١}{٠}س + ٢$ تقطع محور السينات عند $س = ٥$

مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times ٥ \times ٢ = ٥$ وحدات مربعة

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تطبيقات فيزيائية

تدريب (١) صـ١٦٩ :

ف(س) = ٤ جا٣س − ٥ جتا٣س

ف(٠) = ٤ جا٠ − ٥ جتا٠ = ٤ − ٥ = −١ متر

ع(س) = ف'(س) = ١٢ جتا٣س + ١٥ جا٣س ⇐ ع(٠) = ١٢ جتا٠ + ١٥ جا٠ = ١٢ + ٠ = ١٢ م/ث

ت(س) = ع'(س) = −٣٦ جا٣س + ٤٥ جتا٣س ⇐ ت(٠) = −٣٦ جا٠ + ٤٥ جتا٠ = ٠ + ٤٥ = ٤٥ م/ث٢

تدريب (٢) صـ١٦٩ :

ف(ن) = ن٣ − ٩ن٢ + ١٥ن ، ع(ن) = ٣ن٢ − ١٨ن + ١٥ = ٣(ن − ١)(ن − ٥) = ٠

ن = ١ ث ، ن = ٥ ث

ت(ن) = ٦ن − ١٨ ⇐ ت(١) = ٦ − ١٨ = −١٢ م/ث٢ ، ت(٥) = ٣٠ − ١٨ = ١٢ م/ث٢

تدريب (٣) صـ١٧٠ :

ف(ن) = ن٣ − ٥ن٢ ⇐ ف(٥) = ١٢٥ − ١٢٥ = ٠

ع(ن) = ٣ن٢ − ١٠ن ⇐ ع(٥) = ٧٥ − ٥٠ = ٢٥ م/ث

ت(ن) = ٦ن − ١٠ ⇐ ت(٥) = ٣٠ − ١٠ = ٢٠ م/ث٢

عندما ع = ٠ ⇐ ٣ن٢ − ١٠ن = ٠ ⇐ ن(٣ن − ١٠) = ٠ ⇐ ن = ٠ ، ن = ١٠/٣ ث

ف(١٠/٣) = (١٠/٣)٣ − ٥(١٠/٣)٢ = ١٠٠٠/٢٧ − ٥٠٠/٩ = −١٠٠٠/٢٧ م

تمارين ... صـ١٧١

١) ف(ن) = ن٣ − ٦ن٢ + ٩ن + ٣

ف(٥) = ٥٣ − ٦(٥)٢ + ٩(٥) + ٣ = ١٢٥ − ١٥٠ + ٤٥ + ٣ = ٣ م

ع(ن) = ف'(ن) = ٣ن٢ − ١٢ن + ٩ ⇐ ع(١) = ٣ − ١٢ + ٩ = ٠ م/ث

ت(ن) = ع'(ن) = ٦ن − ١٢ ⇐ ت(١) = ٦ − ١٢ = −٦ م/ث٢ ، ت(٣) = ١٨ − ١٢ = ٦ م/ث٢

٢) ع(ن) = ٠ ⇐ ٣(ن − ١)(ن − ٣) = ٠ ⇐ ن = ١ ث ، ن = ٣ ث

ف(١) = ١ − ٦ + ٩ + ٣ = ٧ م ، ف(٣) = ٢٧ − ٥٤ + ٢٧ + ٣ = ٣ م

المسافة المقطوعة = ٤ م

٣) ف(ن) = ٢ جا(πن/٢) + ن/٢

ع(ن) = ف'(ن) = π/٢ جتا(πن/٢) + ١/٢

ع(٠) = π/٢ + ١/٢ = (π + ١)/٢ م/ث

ع(١) = ٠ + ١/٢ = ١/٢ م/ث

ت(ن) = ع'(ن) = −π٢/٤ جا(πن/٢) ⇐ ت(٠) = ٠ ، ت(١) = −π٢/٤ م/ث٢

ف(٢) = ٢ جا(π) + ١ = ٠ + ١ = ١ م

ف(٣) = ٢ جا(٣π/٢) + ٣/٢ = −٢ + ١٫٥ = −٠٫٥ م

٤) ف(ن) = ١٩٫٦ ن − ٩٫٨ ن٢

ع(ن) = ف'(ن) = ١٩٫٦ − ١٩٫٦ = ٠ ⇐ ن = ١٩٫٦ / ٩٫٨ = ٢ ث

ف(٢) = ١٩٫٦ × ٢ − ٩٫٨ × ٤ = ٣٩٫٢ − ٣٩٫٢ = ١٩٫٦ م

ت(ن) = ع'(ن) = −٩٫٨ م/ث٢

ع(٤) = ١٩٫٦ − ٩٫٨ × ٤ = −١٩٫٦ م/ث

٥) ف(ن) = ١٢٨ ن − ١٦ ن٢ ⇐ ع(ن) = ف'(ن) = ١٢٨ − ٣٢ ن ⇐ ع(ن) = ٠ عندما ن = ٤ ث

ع(٣) = ١٢٨ − ٣٢ × ٣ = ٣٢ م/ث ، ع(٥) = ١٢٨ − ٣٢ × ٥ = −٣٢ م/ث

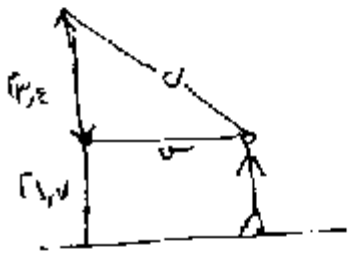
ت(ن) = ع'(ن) = −٣٢ م/ث٢

ف(٤) = ١٢٨ × ٤ − ١٦ × ١٦ = ٥١٢ − ٢٥٦ = ٢٥٦ م

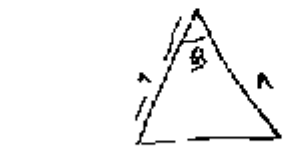
جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تدريب (1) صـ١٧٥ :



تدريب (2) صـ١٧٦ :



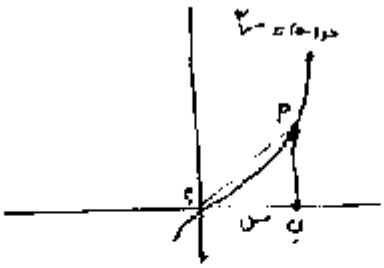
تدريب (3) صـ١٧٧

تمرينات (1) صـ١٧٩

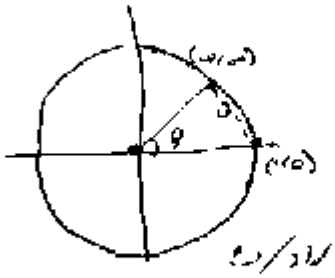
جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تمرين (٥)

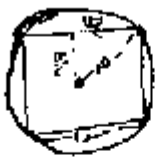


تمرين (٦)



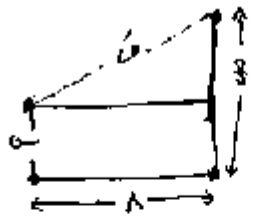
تمرين (٧)

تمرين (٨)



جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تمرين (٩) :



تمرين (٦) :

النقط الحرجة

تدريب (١)

$[-3,3]$ على $ق(س) = س^3 - 12س + 11$:

$ق'(س) = 3س^2 - 12$

$ق'(س) = 0 \Leftarrow 3س^2 - 12 = 0 \Leftarrow س = \pm 2$

$ق(س)$ غير موجودة عند $س = \pm 3$

النقط الحرجة هي:
$(-3, 20)، (-2, 17)، (2, -15)، (3, 2)$

تدريب (٢)

$[0, \pi]$ على $ق(س) = جا^2 س - جتا س$:

$ق'(س) = 2جا س جتا س + جا س = جا س (2جتا س + 1)$

$ق'(س) = 0 \Leftarrow جا س = 0$ أو $2جتا س + 1 = 0$

$س = 0$ أو $س = \pi$ أو $جتا س = -\frac{1}{2} \Leftarrow س = \frac{2\pi}{3}$

$ق(س)$ غير موجودة عندما $س = \frac{\pi}{2}$

النقط الحرجة $(0, -1)، (\frac{\pi}{2}, 1)، (\pi, -1)، (\frac{2\pi}{3}, \frac{5}{4})$

تدريب (٣)

$[-4, 4]$ على $ق(س) = \sqrt{16 - س^2}$:

$ق'(س) = \frac{-س}{\sqrt{16 - س^2}}$

$ق'(س) = 0 \Leftarrow -س = 0 \Leftarrow س = 0$

$ق(س)$ غير موجودة عندما $16 - س^2 = 0 \Leftarrow س = \pm 4$

النقط الحرجة $(-4, 0)، (0, 4)، (4, 0)$

تدريب (٤)

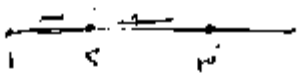
$[-1, 4]$ على $ق(س) = |س^2 - 2س|$:

$ق(س) = \begin{cases} س^2 - 2س & س \leq 0 \text{ أو } س \geq 2 \\ -س^2 + 2س & 0 < س < 2 \end{cases}$

$ق'(س) = \begin{cases} 2س - 2 & س < 0 \text{ أو } س > 2 \\ -2س + 2 & 0 < س < 2 \\ \text{غير موجودة} & س = 0 \text{ أو } س = 2 \end{cases}$

$ق'(س) = 0 \Leftarrow -2س + 2 = 0 \Leftarrow س = 1$

النقط الحرجة هي
$(-1, 3)، (0, 0)، (1, 1)، (2, 0)، (4, 8)$



$ق(س)$ غير موجودة عند $س = 2$

$ق'(س) = 0 \Leftarrow س = 1$

$(2, 0)$ ليست نقطة حرجة

$(1, 1)$ نقطة حرجة

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تمرين (٢) :

$$\text{د}'(س) = 3س^2 + 6س + ب$$

$$\text{د}'(-1) = 0 \Leftarrow 3 - 6 + ب = 0 \Leftarrow ب = 3$$

$$\text{د}'(3) = 0 \Leftarrow 27 + 18 + ب = 0 \Leftarrow ب = -45$$

$$\text{د}(س) = س^3 + 3س^2 - 45س + ج$$

$$\text{د}(-1) = 28 \Leftarrow -1 + 3 + 45 + ج = 28 \Leftarrow ج = -19$$

$$\text{د}(س) = س^3 + 3س^2 - 45س - 19$$

تمرين (٣)

$$\text{د}'(س) = 0 \Leftarrow 3س^2 - 3 = 0 \Leftarrow س = \pm 1$$

$$\text{د}''(س) = 6س \Leftarrow \text{د}''(-1) = -6 < 0 \text{ عظمى}$$

$$\text{د}''(1) = 6 > 0 \text{ صغرى}$$

$$\text{د}(-1) = 2 \quad \text{د}(1) = -2$$

النقطة الحرجة $(-1, 2)$ ، $(1, -2)$

تمرين (٤)

$$\text{د}(س) = \frac{س^3 - 1}{س^3 + 1} \Leftarrow \text{د}'(س) = \frac{(3س^2)(س^3+1) - (س^3-1)(3س^2)}{(س^3+1)^2} = \frac{6س^2}{(س^3+1)^2}$$

$$\text{د}'(س) = 0 \Leftarrow 6س^2 = 0 \Leftarrow س = 0$$

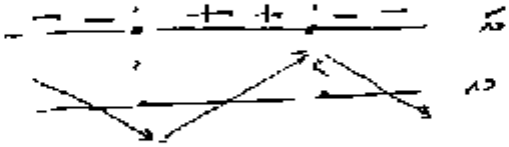
$$\text{د}(س) \text{ غير موجودة} \Leftarrow س^3 + 1 = 0 \Leftarrow س = -1$$

النقطة الحرجة $(0, -1)$

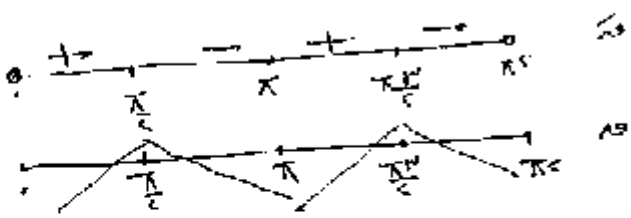
جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

التزايد والتناقص

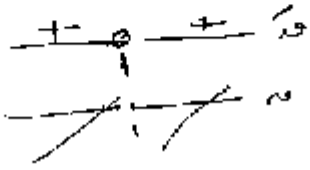
تدريب (1)



تدريب (2):

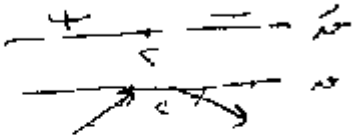


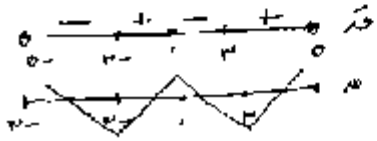
تدريب (3):

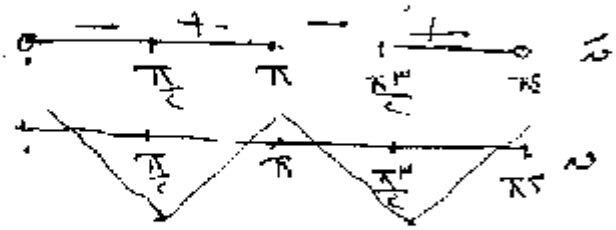


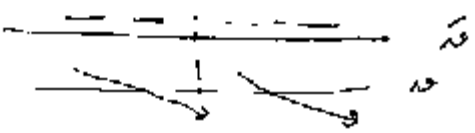
تمارين ومسائل

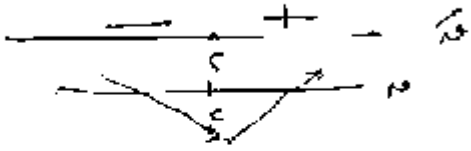
1)

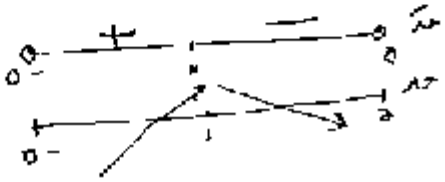


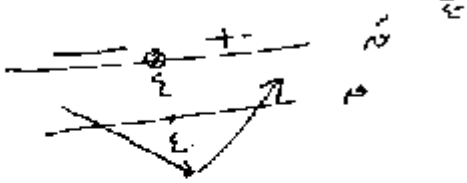


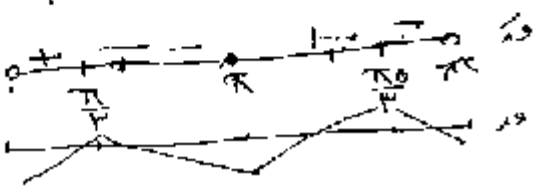




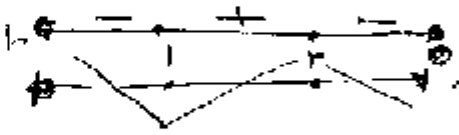


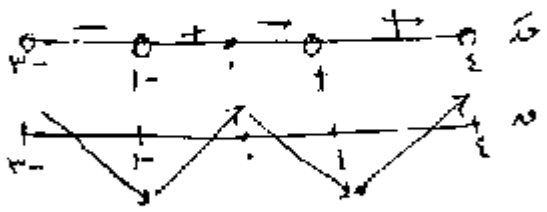




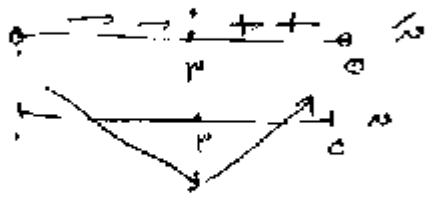


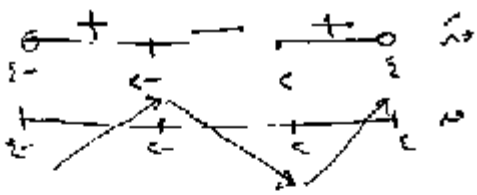
جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

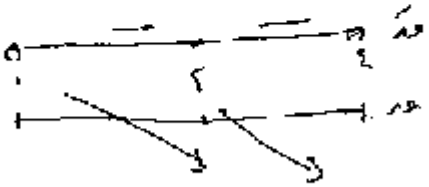


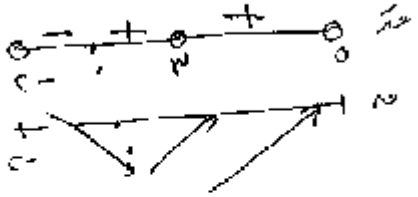


جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

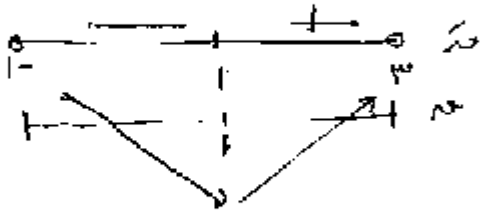


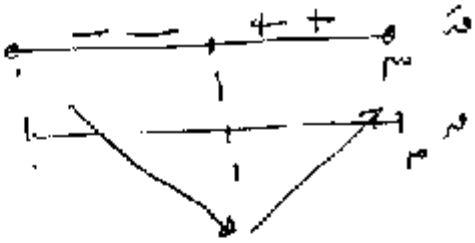


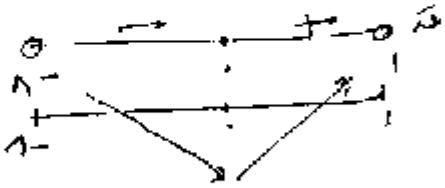


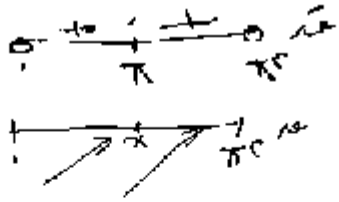


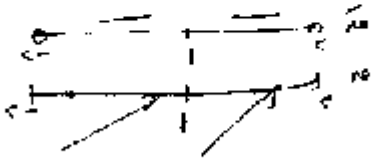
جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم



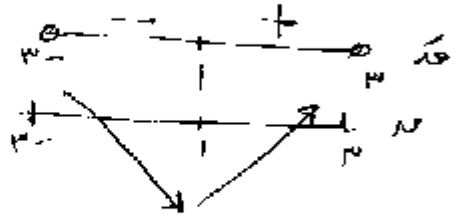


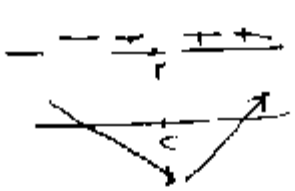


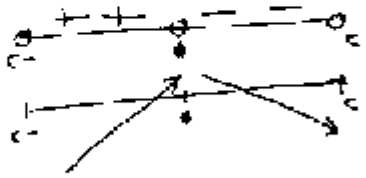


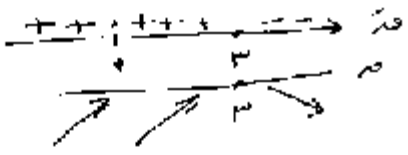


جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

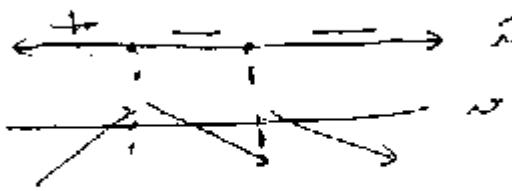


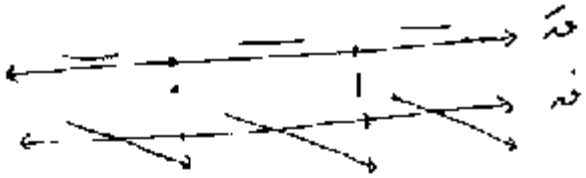


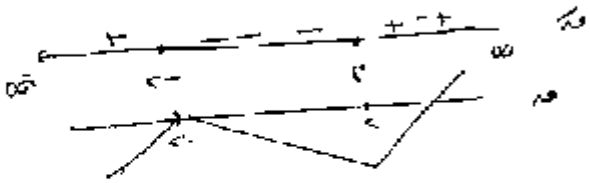


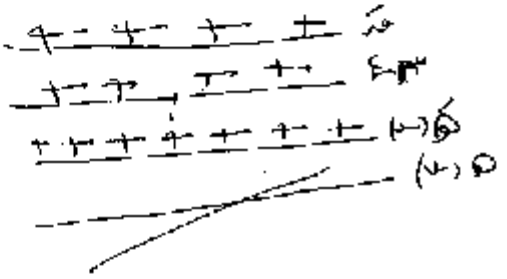


جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم



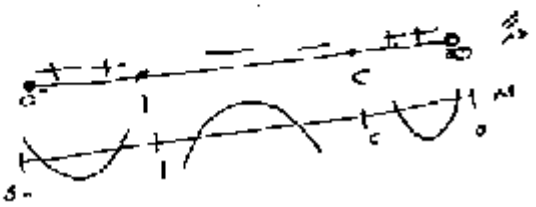




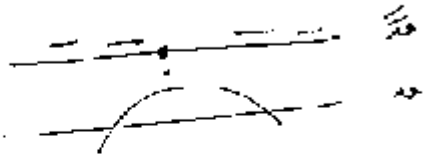


التقعر

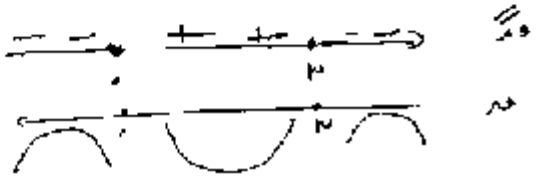
تدريب (١)



تدريب (٢)

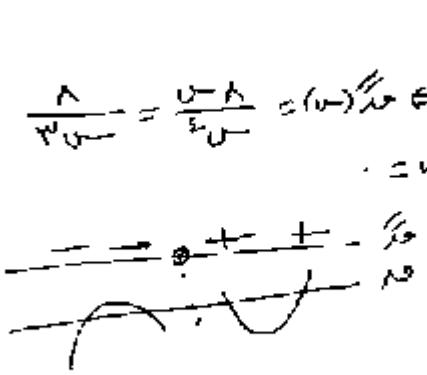


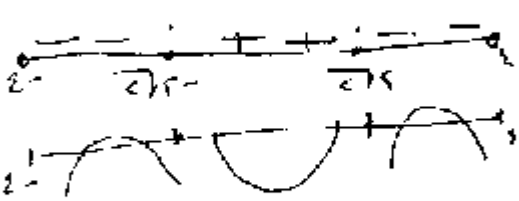
تدريب (٣)

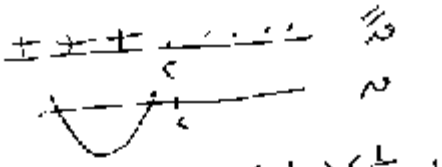


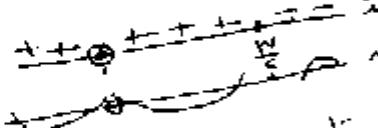
تدريب (٤)

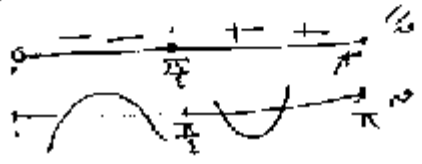
جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم



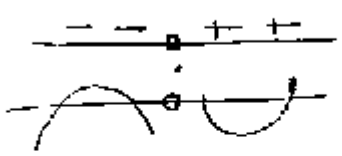


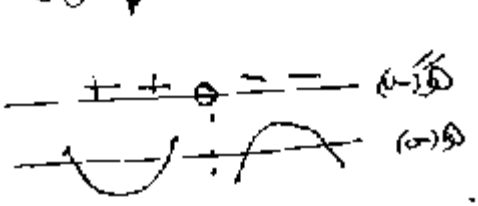


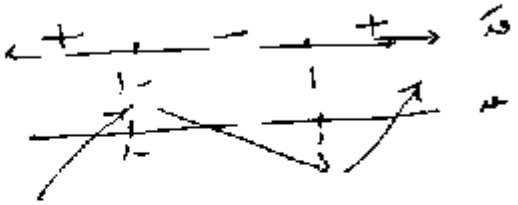


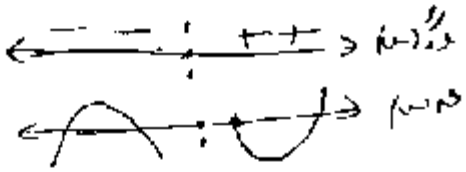


جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم



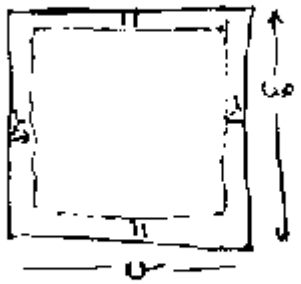




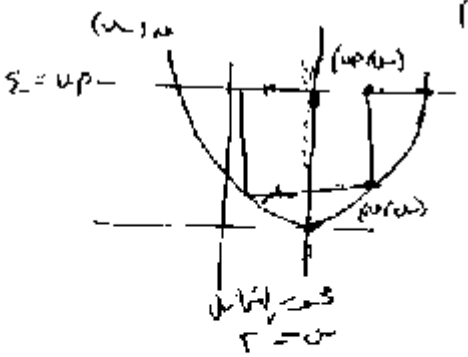


جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

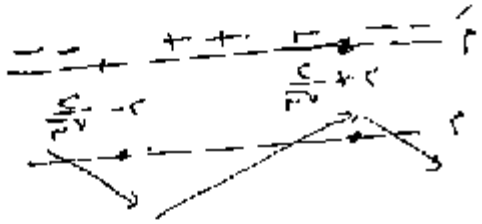
تطبيقات القيم العظمى



تدريب (١):

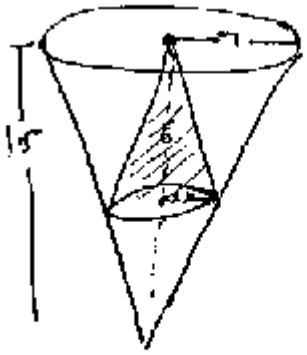


تدريب (٢):



تدريب (٣):

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم



تدريب (٤) :

من التشابه

$\frac{ع - ١٢}{١٢} = \frac{نق}{٦}$

$٦ع - ٧٢ = ١٢ نق$

$ع - ١٢ = ٢ نق$

$ع = ١٢ - ٢ نق$

$ح = \frac{\pi}{٣} ع نق^{٢}$

$ح = \frac{\pi}{٣} نق^{٢} (١٢ - ٢ نق)$

$ح = \frac{\pi}{٣} (٦ نق^{٢} - ٢ نق^{٣})$

$ح = \frac{\pi}{٣} (٦ نق^{٢} - ٢ نق^{٣})$

$ح' = \frac{\pi}{٣} (١٢ نق - ٦ نق^{٢}) \Leftarrow ح' = ٠ \Leftarrow (٤ - نق)(٣ + نق) = ٠$

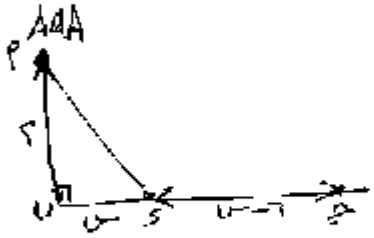
$نق = ٤$ سم ، $نق = -٣$ مرفوض

$ح'' = \pi (٦ - ٤ نق) = \pi (٦ - ٨) = -٢ \pi$

$ح''(٤) = -٨ \pi < ٠$ ، ∴ قيمة $ح$ عظمى

∴ أكبر حجم $= ح(٤) = \frac{\pi}{٣} (٩٦ - ٦٤) = \frac{٣٢}{٣} \pi$ سم^{٣}

تدريب (٥)



$ب ج = ٨٨ - س$

$ف = ٣٠٠٠ ب + ٥٠٠٠ ج$

$ف = ٣٠٠٠ (٨٨ - س) + ٥٠٠٠ \sqrt{٤ + س^{٢}}$

$ف = ٢٦٤٠٠٠ - ٣٠٠٠ س + ٥٠٠٠ \sqrt{٤ + س^{٢}}$

$ف' = ٠ \Leftarrow -٣٠٠٠ + \frac{٥٠٠٠ س}{\sqrt{٤ + س^{٢}}} = ٠$

$\frac{٥ س}{\sqrt{٤ + س^{٢}}} = ٣ \Leftarrow ٥ س = ٣ \sqrt{٤ + س^{٢}}$

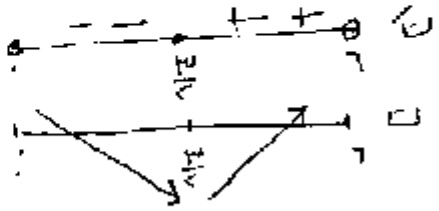
$٢٥ س^{٢} = ٩ (٤ + س^{٢})$

$١٦ س^{٢} = ٣٦$

$س^{٢} = \frac{٩}{٤} \Leftarrow س = \frac{٣}{٢}$

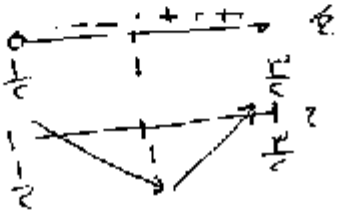
∴ أقل تكلفة عندما $س = \frac{٣}{٢}$

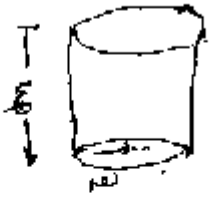
وأكبر تكلفة عندما $س = ٦$

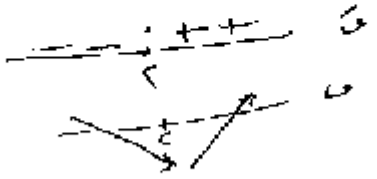


(٢)

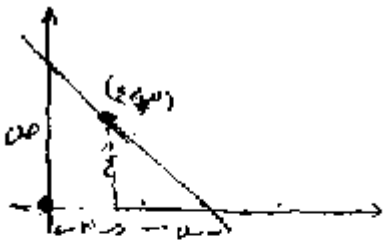
تمرين (١) صـ٢١٣

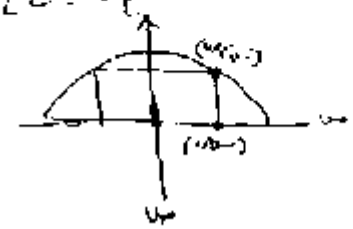


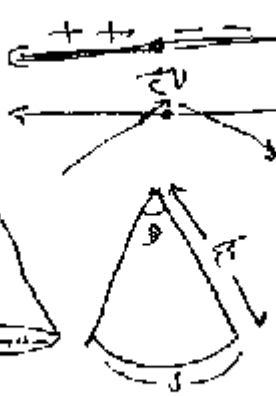




جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم





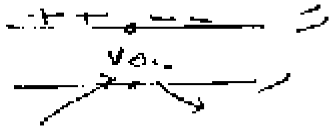


جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

٨) الربح = البيع − التكلفة ⇐ ر(س) = ٢٠٠ س − ٠,٠١ س² − ٥٠ س − ٥٠

ر(س) = ١٥٠ س − ٠,٠١ س² − ٥٠ ⇐ ر′(س) = ١٥٠ − ٠,٠٢ س ⇐ ر′(س) = ٠

س = ١٥٠ / ٠,٠٢ = ١٥٠ × ١٠٠ / ٢ = ٧٥٠٠



أكبر ربح ممكن سنوياً عندما س = ٧٥٠٠ قطعة

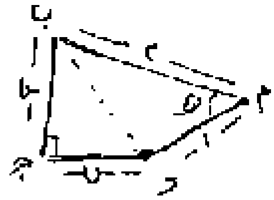
٩) م = ½ × ٢ × ١ × جاهـ + ½ ع²

م = جاهـ + (٥ − ٤ جتاهـ) / ٤

م = جاهـ − جتاهـ + ٥/٤ ، ٠ < هـ < π

م′(هـ) = جتاهـ + جاهـ

ع² = ١ + ٤ − ٤ جتاهـ
ع² = ٥ − ٤ جتاهـ
ع² = ٢ س²
٢ س² = ٥ − ٤ جتاهـ
س² = (٥ − ٤ جتاهـ) / ٢

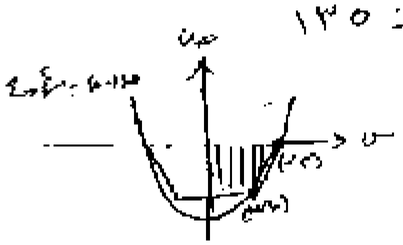


م′(هـ) = ٠ ⇐ جتاهـ = − جاهـ ⇐ هـ = ٣π/٤

م″(هـ) = − جاهـ + جتاهـ ⇐ م″(٣π/٤) = −1/√2 − 1/√2 = −√2 < ٠

∴ أكبر مساحة ممكنة للشكل عندما هـ = ٣π/٤ = ١٣٥°

١٠) م = ٢ ((٢ + س)/٢) (٤ − س²) = (س + ٢)(٤ − س²)



م(س) = (س + ٢)(٤ − س²) ، ٠ < س < ٢

م′(س) = (س + ٢)(−٢س) + (٤ − س²)(١)

م′(س) = −٣س² − ٤س + ٤

م′(س) = ٠ ⇐ −(٣س − ٢)(س + ٢) = ٠ ⇐ س = ٢/٣ ، س = −٢ ✗

م″(س) = −٦س − ٤

م″(٢/٣) = −٨ < ٠

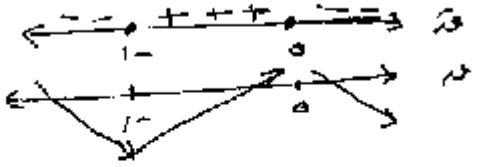
∴ أكبر مساحة ممكنة لشبه المنحرف عندما س = ٢/٣

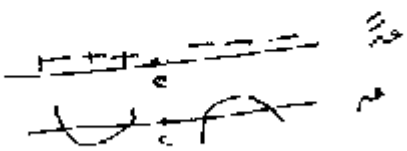
م(٢/٣) = (٨/٣)(٣٢/٩) = ٢٥٦/٢٧ وحدة مربعة

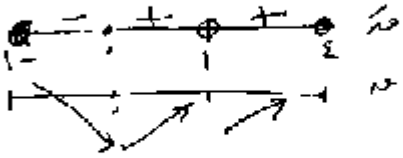
(٥)

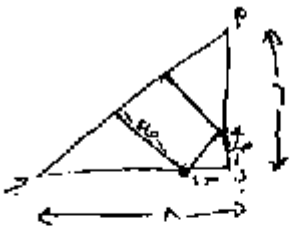
جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

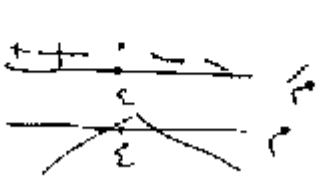
جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم











جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم