قواعد الاشتقاق

① إذا كان $ق(س)$

② إذا كان $ق(س) = أ$ فإن $ق'(س) = $ صفر

③ إذا كان $ق(س) = أس$ فإن $ق'(س) = أ$

④ إذا كان $ق(س) = س^{ن}$ فإن $ق'(س) = ن\,س^{ن-1}$

⑤ $\left(ق(س) \mp ل(س)\right)' = ق'(س) \mp ل'(س)$

⑥ $\left(ق(س) \cdot ل(س)\right)' = ق(س) \cdot ل'(س) + ل(س) \cdot ق'(س)$

$$\left(\frac{ق(س)}{ل(س)}\right)' = \frac{ل(س) \cdot ق'(س) - ق(س) \cdot ل'(س)}{ل^{2}(س)}$$

⑦ $$\left(\frac{أ}{ل(س)}\right)' = \frac{-أ \times ل'(س)}{ل^{2}(س)}$$

⑧ $$\left(\sqrt{ق(س)}\right)' = \frac{ق'(س)}{2\sqrt{ق(س)}}$$

أ. محمد حتاملة
٠٧٨٨٠٣٤٣٢

⑨ إذا كان $ق(س) = $ جاس فإن $ق'(س) = $ جتاس

⑩ إذا كان $ق(س) = $ جتاس فإن $ق'(س) = $ - جاس

⑪ إذا كان $ق(س) = $ ظاس فإن $ق'(س) = $ قا^{2}س

⑫ إذا كان $ق(س) = $ ظتاس فإن $ق'(س) = $ - قتا^{2}س

⑬ إذا كان $ق(س) = $ قاس فإن $ق'(س) = $ قاس ظاس

⑭ إذا كان $ق(س) = $ قتاس فإن $ق'(س) = $ - قتاس ظتاس

⑮ $ق''(س) = \frac{د}{دس}\left(ق'(س)\right)$

⑯ $ق'''(س) = \frac{د}{دس}\left(ق''(س)\right)$ ......

⑰ $\underset{تسارع}{ت(ن)} = \frac{دع}{دن}$ ، $\underset{سرعة}{ع(ن)} = \frac{دف}{دن}$

⑱ $ق'(س) = \frac{دص}{دس} = $ ميل المماس

⑲ دص ← تفاضل ص ، دس ← تفاضل س ، $\frac{دص}{دس}$ ← مشتقة

(٢٠) $\frac{د}{دس} هـ^{ق(س)} = قَ(س)\ هـ^{ق(س)}$

(٢١) $\frac{د}{دس} لو_{هـ} |ق(س)| = \frac{قَ(س)}{ق(س)}$

(٢٢) إذا كان $ق(س) = (هـ(س))^{ن}$ فإن $قَ(س) = ن\ (هـ(س))^{ن-١} . هـَ(س)$

الإقتران البدائي

* لإيجاد إقتران بدائي لأي إقتران

يجب أن نجد الإقتران الأصلي الذي مشتقته موجودة في السؤال
وهي تكامل الإقتران الموجود بالسؤال

* $\int ق(س)\ دس = م(س) + جـ$

مشتقة للطرفين ↓ عندما يكون المطلوب بالسؤال ق(س) أو ق(أ)

$$\frac{د}{دس} \int ق(س) = \frac{د}{دس} \left(م(س) + جـ \right)$$

$$ق(س) = مَ(س)$$

إذا كان مطلوب قَ(س) أو قَ(أ) نشتق مرة أخرى للطرفين

$$قَ(س) = م''(س)$$

* $\int قَ(س)\ دس = ق(س) + جـ$

* $\frac{د}{دس} \int ق(س)\ دس = ق(س)$

الأسئلة على درس الإقتران البدائي

حالة ①

إيجاد ق(س)

ق(أ)

ق'(س)

ق'(أ)

مثال

إذا كان $\int$ ق(س) دس = س^{٤} + س + ٤

جد ق(١) ، ق'(١)

حالة (٢)

إيجاد قيمة أ بالسؤال

مثال

إذا كان $\int$ (ق'(س) + ٢س) دس = س^{٣} + أس^{٢} + ١

وكان ق'(١) = ٥ ، ق(٢) = ٧

جد قيمة أ

---

* ظاس = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ = $\frac{1}{\text{ظتاس}}$

* ظتاس = $\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$ = $\frac{1}{\text{ظاس}}$

* قاس = $\frac{1}{\text{جتاس}}$ ⇐ $\frac{1}{\text{قاس}}$ = جتاس

* قتاس = $\frac{1}{\text{جاس}}$ ⇐ $\frac{1}{\text{قتاس}}$ = جاس

قواعد التكامل

① $\int أ \, دس = أس + ج$

② $\int س^{ن} \, دس = \frac{س^{ن+1}}{ن+1} + ج$

③ $\int س^{-1} \, دس = \int \frac{1}{س} \, دس$

$= لو|س| + ج$

④ $\int هـ^{أس} \, دس = \frac{هـ^{أس}}{أ} + ج$

⑤ $\int جا أس \, دس = \frac{-جتا أس}{أ} + ج$

⑥ $\int جتا أس \, دس = \frac{جا أس}{أ} + ج$

⑦ $\int قا^{2} أس \, دس = \frac{ظا أس}{أ} + ج$

⑧ $\int قتا^{2} أس \, دس = \frac{-ظتا أس}{أ} + ج$

⑨ $\int قا أس \, ظا أس \, دس =$

⑩ $\int قتا أس \, ظتا أس \, دس = \frac{-قتا أس}{أ} + ج$

⑪ $\int (أس + ب)^{ن} \, دس = \frac{(أس+ب)^{ن+1}}{أ(ن+1)} + ج$

أمثلة

① $\int دس =$

② $\int \frac{دس}{-3} =$

③ $\int \pi \, دص =$

④ $\int س^{2} \, دس$

⑤ $\int س^{-2} \, دس$

⑥ $\int س^{-\frac{3}{4}} \, دس$

⑦ $\int \sqrt[3]{س} \, دس$

⑧ $\int \frac{1}{\sqrt[3]{س^{2}}} \, دس$

⑨ $\int \frac{س \sqrt[3]{س}}{س^{2}} \, دس$

⑩ $\int (5س + 4)^{4} \, دس$

⑪ $\int \frac{1}{5(س-2)^{3}} \, دس$

⑫ $\int \sqrt[3]{4 - 4س} \, دس$

⑬ $\int \left(هـ^{س} + \frac{1}{هـ^{س}} + (\sqrt{هـ^{س}})^{2} + هـ^{2}\right) دس$

⑭

متطابقات مثلثية

① جا^{٢}س + جتا^{٢}س = ١

- جا^{٢}س = ١ − جتا^{٢}س
- جتا^{٢}س = ١ − جا^{٢}س
- − جا^{٢}س = جتا^{٢}س − ١
- − جتا^{٢}س = جا^{٢}س − ١

② ١ + ظا^{٢}س = قا^{٢}س

- ظا^{٢}س = قا^{٢}س − ١
- − ظا^{٢}س = ١ − قا^{٢}س
- − قا^{٢}س = − (١ + ظا^{٢}س)

③ جا ٢س = ٢ جاس جتاس ⇐ جا ضعف الزاوية = ٢ جا نصف الزاوية جتا نصف الزاوية

⇓

$\frac{١}{٢}$ جا ٢س = جاس جتاس

④ جتا ٢س = ١ − ٢ جا^{٢}س

= ٢ جتا^{٢}س − ١

= جتا^{٢}س − جا^{٢}س

⑤ جا^{٢}أ = $\frac{١}{٢}$ (١ − جتا ٢أ)

⑥ جتا^{٢}أ = $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا ٢أ)

⑦ جتا أ جتا ب = $\frac{١}{٢}$ [جتا (أ + ب) + جتا (أ − ب)]

⑧ جا أ جا ب = $\frac{١}{٢}$ [جتا (أ − ب) − جتا (أ + ب)]

⑨ جا أ جتا ب = $\frac{١}{٢}$ [جا (أ − ب) + جا (أ + ب)]

حالات التكامل

① يوجد تكامل مباشر لكل الاقترانات ماعدا ظا س ، ظتا س

② لإجراء التكامل يجب أن تكون الزاوية خطية (ذات أس واحد)

③ عندما تكون الزاوية غير خطية نفرض الزاوية وإما تكون تعويض ، أجزاء ، كسور جزئية وسنوضح ذلك فيما بعد

④ يجب التخلص من الكسور والجذور والمتطابقات والأقواس قبل إجراء عملية التكامل

وذلك

① نحول الجذور إلى أسس كسرية

② نتخلص من المقام ← ترفع للبسط وتغيير إشارة الأس ماعدا أس ١

← عندما يكون اقتران مثلثي يرفع للبسط بقيمته وليس بأسه ماعدا (جا ، جتا) ، (ظا ، قا²) ، (ظتا ، قتا²)

Ⓐ في حالة الجمع والطرح والزوايا خطية تكامل (تكامل مباشر)

عندما يكون الاقتران داخل القوس خطي أيضاً نكامل بشكل مباشر

عندما يكون أس الاقتران الأس واحد نكامل بشكل مباشر

مثال ① $\int (\text{جا س} - ٣\,\text{جتا س})\, \text{دس} = -\text{جتا س} - ٣\,\text{جا س} + \text{جـ}$

② $\int (٢\text{س} + ٣)^{٥}\, \text{دس} = \dfrac{(٢\text{س}+٣)^{٦}}{٦(٢)} + \text{جـ}$

③ $\int \text{هـ}^{٢\text{س}}\, \text{دس} = \dfrac{\text{هـ}^{٢\text{س}}}{٢} + \text{جـ}$

④ $\int \text{س}^{٤} + \dfrac{١}{\text{س}^{٤}} + \text{جا}٤\text{س} + \dfrac{١}{\text{جا}^{٢}٤\text{س}} + \text{هـ}^{٤\text{س}} + \sqrt[٤]{\text{هـ}^{\text{س}}} + \text{هـ}^{٤}\ \text{دس}$

ب) عندما يكون البسط رقم والمقام رقم ∓ اقتران مثلثي نضرب بمرافق

مثال ① $\int \frac{\text{دس}}{1+\text{جاس}} \times \frac{1-\text{جاس}}{1-\text{جاس}}$

② $\int \frac{\text{دس}}{1-\text{جتاس}} \times \frac{1+\text{جتاس}}{1+\text{جتاس}}$

ج) عندما تكون الأسس واحد والزاوية خطية ووجود جا مع جتا نستخدم المتطابقات

① $\int \text{جاس جتاس دس} = \int \frac{1}{2}\,\text{جا٢س دس} = \frac{1}{2}\int \text{جا٢س دس}$

$= \frac{-1}{2}\,\frac{\text{جتا٢س}}{2} + \text{جـ}$

② $\int \text{جا}\tfrac{1}{2}\text{س جتا}\tfrac{1}{2}\text{س دس} = \frac{1}{2}\int \text{جاس دس} = -\frac{1}{2}\,\text{جتاس} + \text{جـ}$

د) عند وجود أقواس داخل التكامل يجب التخلص منها وفكها

$\int (2\text{س}+2)^2\,\text{دس} = \int 4\text{س}^2 + 8\text{س} + 4\ \text{دس}$

أو $\int (2\text{س}+2)^2 = \frac{(2\text{س}+2)^3}{2(3)} + \text{جـ}$

أو $\int (1+2\text{س})(5-3\text{س})\ \text{دس}$

$= \int 5 - 3\text{س} + 10\text{س} - 6\text{س}^2\ \text{دس}$

$= \int 5 + 7\text{س} - 6\text{س}^2\ \text{دس}$

$= 5\text{س} + \frac{7}{2}\text{س}^2 - \frac{6}{3}\text{س}^3 + \text{جـ}$

$= 5\text{س} + \frac{7}{2}\text{س}^2 - 2\text{س}^3 + \text{جـ}$

التكامل المحدود

① قاعدة لحساب التكامل المحدود

* $\int_{أ}^{ب} ق(س)\, د س = م(س)\Big]_{أ}^{ب} = م(ب) - م(أ)$

② $\int_{أ}^{ب} جـ\, د س = جـ(ب - أ)$ هذه القاعدة لإيجاد قيمة أ في الحالات التالية

① $\int_{0}^{2أ} 3\, د س = 6$

② $\int_{2أ+1}^{أ+2} 5\, د س = 40$

③ $\int_{0}^{2} 3أ\, د س = 40$

③ * خاصية التوزيع تستخدم فقط للجمع والطرح

$$\int_{أ}^{ب} \left(ق(س) \pm هـ(س)\right) د س = \int_{أ}^{ب} ق(س)\, د س \pm \int_{أ}^{ب} هـ(س)\, د س$$

مثال: إذا كان $\int_{0}^{2} \left(ق(س) - 2س\right) د س = 20$ جد $\int_{0}^{2} 3\, ق(س)\, د س$

الحل: $\int_{0}^{2} ق(س) - \int_{0}^{2} 2س\, د س = 20$

$\int_{0}^{2} ق(س) - س^2\Big]_{0}^{2} = 20 = \int_{0}^{2} ق(س)\, د س = 20 + 4$

$3\int_{0}^{2} ق(س) = 3(24) = 72$

④* التكامل عند نفس النقطة

* $\int_{أ}^{أ} ق(س)\, د س = صفر$

ولكن إذا كان $\int_{عدد}^{أ} ق(س)\, د س = صفر$ يجب إجراء عملية التكامل

وذلك بسبب وجود أكثر من قيمة لـ أ (إن أمكن)

٥ خاصية الإضافة

تستخدم لإيجاد التكامل للاقتران المتشعب

إذا كان $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\, \text{دس} = \text{ل}$ ، $\int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{ق(س)}\, \text{دس} = \text{ن}$

فإن $\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{ق(س)}\, \text{دس} = \text{ل} + \text{ن}$

٦ خاصية تقلب الحدود

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\, \text{دس} = -\int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{ق(س)}\, \text{دس}$$

مثال : إذا كان $\int_{1}^{2} \text{ق(س)}\, \text{دس} = 5$ ، $\int_{1}^{3} \text{ق(س)}\, \text{دس} = 4$

نجد $\int_{2}^{3} \text{ق(س)}\, \text{دس}$

الحل : $\int_{2}^{3} \text{ق(س)}\, \text{دس} = \int_{1}^{3} \text{ق(س)}\, \text{دس} - \int_{2}^{1} \text{ق(س)}\, \text{دس}$

$$= 4 - (-5)$$

$$= 9$$

٧ خاصية المقارنة

إذا كان ق(س) ، هـ(س) قابلين للتكامل في [أ، ب] وكان ق(س) $\geq$ هـ(س) فإن $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\, \text{دس} \geq \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ(س)}\, \text{دس}$

نستخدم هذه الخاصية

١ إيجاد إشارة التكامل المحدود بدون حساب التكامل

٢ المقارنة بين قيم التكامل بدون حساب التكامل

٣ إيجاد القيم القصوى للتكامل المحدود

مثال: دون حساب قيمة التكامل ما إشارة $\int_{1}^{2} (س^2 - 4) \, ءس$

الحل: نجد إشارة $س^2 - 4$ خلال الفترة $[1 ، 2]$

$س^2 - 4 = صفر \Leftarrow س^2 = 4 \Leftarrow س = \mp 2$

نلاحظ أن $ق(س) < صفر$ خلال الفترة $[1 ، 2]$

$\therefore \int_{1}^{2} ق(س) \, ءس < صفر$

نتيجة:

إذا كان ق اقتراناً قابلاً للتكامل على $[أ ، ب]$

وكان $ق(س) \geq صفراً$ لكل $س \in [أ ، ب]$ فإن $\int_{أ}^{ب} ق(س) \, ءس \geq صفر$

وإذا كان $ق(س) \leq صفر$ لكل $س \in [أ ، ب]$ فإن $\int_{أ}^{ب} ق(س) \, ءس \leq صفر$

(2) المقارنة بين قيم التكامل بدون حساب التكامل

إذا كان $ق(س) \leq هـ(س)$ في الفترة $[أ ، ب]$ فإن $\int_{أ}^{ب} ق(س) \, ءس \leq \int_{أ}^{ب} هـ(س) \, ءس$

إذا كان $ق(س) \geq هـ(س)$ في الفترة $[أ ، ب]$ فإن $\int_{أ}^{ب} ق(س) \, ءس \geq \int_{أ}^{ب} هـ(س) \, ءس$

مثال: بدون حساب التكامل أيهما أكبر $\int_{صفر}^{1} س \, ءس$ أم $\int_{صفر}^{1} س^3 \, ءس$

الحل: من خلال الفترة $[صفر ، 1] \Leftarrow س > س^3$

$\Leftarrow \int_{صفر}^{1} س \, ءس > \int_{صفر}^{1} س^3 \, ءس$

(3) إيجاد القيم القصوى للتكامل المحدود

مثال: إذا كان $ق(س) \geq 5 \Leftarrow$ أقل قيمة 5

إذا كان $ق(س) \leq 5 \Leftarrow$ أكبر قيمة 5

إذا كان $3 \leq ق(س) \leq 8 \Leftarrow$ أصغر قيمة 3

$\Leftarrow$ أكبر قيمة 8.

مثال: إذا كان $\text{د} : [1 ، 3] \longrightarrow \text{ح}$ حيث $3 \le \text{د(س)} \le 6$

جد ⓐ قيمة الثوابت م، ن حيث $\text{ن} \le \int_{1}^{3} \left(\text{د(س)} - 3\right) \text{دس} \le \text{م}$

الحل:

$$3 \le \text{د(س)} \le 6$$

$$\text{صفر} \le \text{د(س)} - 3 \le 3$$

$$\int_{1}^{3} \text{صفر دس} \le \int_{1}^{3} \left(\text{د(س)} - 3\right) \text{دس} \le \int_{1}^{3} 3 \, \text{دس}$$

$$\text{صفر} \le \int_{1}^{3} \left(\text{د(س)} - 3\right) \text{دس} \le 3(3-1)$$

$$\text{صفر} \le \int_{1}^{3} \left(\text{د(س)} - 3\right) \text{دس} \le 6$$

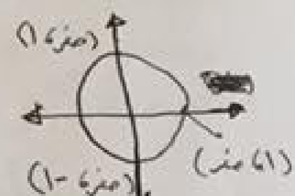
أقل قيمة = ن = صفر

أكبر قيمة = م = 6

مثال: بدون إجراء التكامل بين أن $\text{صفر} \le \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - \text{س}^2} \le 2$

الحل: $\text{ص} = \sqrt{1 - \text{س}^2} \xRightarrow{\text{تربيع الطرفان}} \text{ص}^2 = 1 - \text{س}^2$

$\Leftarrow \text{ص}^2 + \text{س}^2 = 1 \Leftarrow$ دائرة نصف قطرها 1 ومركزها (صفر، صفر)



$$\text{صفر} \le \text{ص} \le 1 \Leftarrow \text{صفر} \le \text{د(س)} \le 1$$

$$\text{صفر} \le \sqrt{1 - \text{س}^2} \le 1$$

$$\int_{-1}^{1} \text{صفر دس} \le \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - \text{س}^2} \, \text{دس} \le \int_{-1}^{1} 1 \, \text{دس}$$

$$\text{صفر} \le \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - \text{س}^2} \, \text{دس} \le 2$$

* تكامل الاقترانات المتشعبة والقيمة المطلقة واقتران أكبر عدد صحيح

مثال:

① إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س & ،\ س \le \text{صفر} \\ ٣س^{٢} + ١ & ،\ س > \text{صفر} \end{cases}$

① أوجد $\int_{-٢}^{٣} ق(س)\, دس$ ② أوجد $\int_{\text{صفر}}^{٥} ق(س)\, دس$

③ أوجد $\int_{٣}^{٧} ق(س)\, دس$

$$\begin{array}{ccc} س & | & ٣س^{٢}+١ \\ & \text{صفر} & \end{array}$$

الحل:

① $\int_{-٢}^{٣} ق(س)\, دس = \int_{-٢}^{\text{صفر}} ٣س^{٢}+١\, دس + \int_{\text{صفر}}^{٣} س\, دس$

② $\int_{\text{صفر}}^{٥} ق(س)\, دس = \int_{\text{صفر}}^{٥} ٣س^{٢}+١\, دس$

③ $\int_{٣}^{٧} ق(س) = \int_{٣}^{٧} ٣س^{٢} + ١\, دس$

مثال: أوجد $\int_{١}^{٨} |س - ٥|\, دس$

الحل: نعيد التعريف للقيمة المطلقة

نساوي ما داخل القيمة المطلقة بالصفر $س - ٥ = \text{صفر} \Leftarrow س = ٥$

نضعه على خط الأعداد

$$\begin{array}{ccc} ------ & & +++++ \\ -(س-٥) & ٥ & س-٥ \end{array}$$

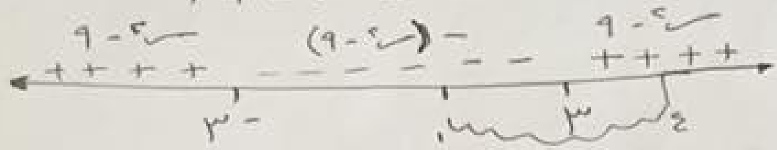
نختار عدد أكبر من ٥ وأقل من ٥

$$\int_{١}^{٨} |س-٥|\, دس = \int_{١}^{٥} -(س-٥)\, دس + \int_{٥}^{٨} س-٥\, دس$$

$$= -\int_{١}^{٥} س-٥\, دس + \int_{٥}^{٨} س-٥\, دس$$

مثال: أوجد $\int_{1}^{4} |\text{س}^2 - 9| \, \text{ءس}$

الحل: $\text{س}^2 - 9 = \text{صفر} \Leftarrow \text{س}^2 = 9 \Leftarrow \text{س} = \mp 3$



$\int_{1}^{4} |\text{س}^2 - 9| \, \text{ءس} = \int_{1}^{3} -(\text{س}^2 - 9) \, \text{ءس} + \int_{3}^{4} \text{س}^2 - 9 \, \text{ءس}$

تكامل إقتران أكبر عدد صحيح

إذا كان معامل س سالب نضع إشارة المساواة على الشمال

① جد $\int_{0}^{3} [\frac{1}{2}\text{س} + 4] \, \text{ءس}$

الحل: نخيد تعريف أكبر عدد صحيح   م: معامل س

طول الفترة $= \frac{1}{|\text{م}|} = \frac{1}{|\frac{1}{2}|} = 2$

لأن معامل س موجب نضع إشارة المساواة على اليمين

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} 4 & \text{صفر} \le \text{س} < 2 \\ 5 & 2 \le \text{س} < 4 \end{cases}$$

$$\int_{0}^{3} [\frac{1}{2}\text{س} + 4] \, \text{ءس} = \int_{\text{صفر}}^{2} 4 \, \text{ءس} + \int_{2}^{3} 5 \, \text{ءس}$$

$$= 8 + 5 = 13$$

---

② جد $\int_{0}^{3} [2 - \text{س}] \, \text{ءس}$

الحل: نخيد تعريف أكبر عدد صحيح ← طول الفترة $= \frac{1}{|-1|} = 1$

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} 1 & \text{صفر} < \text{س} \le 1 \\ \text{صفر} & 1 < \text{س} \le 2 \\ -1 & 2 < \text{س} \le 3 \end{cases}$$

$$\int_{0}^{3} [2 - \text{س}] \, \text{ءس} = \int_{\text{صفر}}^{1} 1 \, \text{ءس} + \int_{1}^{2} \text{صفر} \, \text{ءس} + \int_{2}^{3} -1 \, \text{ءس}$$

$$= 1 + \text{صفر} + -1 = \text{صفر}$$

مثال :

إذا كان $\int_{0}^{أ} [\frac{س}{3} + 2]\, دس = 12$ أوجد قيمة الثابت أ

والحل : نعيد التعريف عن طريق إيجاد طول الفترة $= \frac{1}{|\frac{1}{3}|} = 3$

$$ق(س) = \begin{cases} 2 & صفر \le س < 3 \\ 3 & 3 \le س < 6 \\ 4 & 6 \le س < 9 \end{cases}$$

← قيمة التكامل

2 3 4

صفر 3 6 9

6 9 12

$$\int_{0}^{أ} [\frac{س}{3} + 2]\, دس = 12 = \int_{صفر}^{3} 2\, دس + \int_{3}^{أ} 3\, دس = 12$$

$$= 2(3 - صفر) + 3(أ - 3) = 12$$

$$= 6 + 3أ - 9 = 12$$

$$-3 + 3أ = 12$$

$$\frac{3أ}{3} = \frac{15}{3} \Leftarrow \boxed{أ = 5}$$

أسئلة :

① إذا كان $\int_{0}^{أ} |2س - 10|\, دس = 5$ جد قيمة أ

② أوجد $\int_{صفر}^{5} [\sqrt{س}]\, دس$

③ ق(س) كثير حدود من الدرجة الثانية ويمر بالنقطة (صفر، 3)

وكان $\int_{-1}^{1} ق(س)\, دس = 14$ ، $\int_{صفر}^{1} ق(س)\, دس = 2$ جد قاعدة الاقتران

المعادلات التفاضلية

معادلة تحتوي على مشتقات أو تفاضلات

↓

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{ل(س)}.\text{م(ص)}}{1}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{م(ص)}} = \frac{\text{ل(س)}.\text{م(ص)}}{\text{م(ص)}}\ \text{دس}$$

$$\int \frac{\text{دص}}{\text{م(ص)}} = \int \text{ل(س)}\ \text{دس}$$

لجعل معامل ص هو واحد

إذا وجد نقاط وذلك من أجل إيجاد قيمة جـ

ميل المماس

↓

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$$

↓

ثم نفس طريقة

المسافة ف(ن)

السرعة ع(ن)

التسارع ت(ن)

ف(ن)

مشتقة ↓ ↑ تكامل

$$\text{ع(ن)} = \frac{\text{دف}}{\text{دن}}$$

مشتقة ↓ ↑ تكامل

$$\text{ت(ن)} = \frac{\text{دع}}{\text{دن}}$$

توضيح

١) عندما يتحرك الجسم من السكون ⇐ ع(صفر) = صفر

٢) أقصى إرتفاع ← تكون السرعة = صفر ← إيجاد قيمة ن عندما نساوي السرعة بالصفر ← ثم نعوضها بالمسافة

٣) عند قطع مسافة مقدارها ١٠م بعد ٣ ثوان ⇐ ف(٣) = ١٠

٤) عندما يكون إرتفاعه عن سطح الأرض بعد ثانية من حركته يساوي ٧٠م ⇐ ف(١) = ٧٠

٥) عندما تكون السرعة الابتدائية للجسم ٣م/ث ⇐ ع(صفر) = ٣

* حالات التكامل بالتعويض والأجزاء

∫ ق (هـ(س)) . هـَ(س) . دس

① ∫ إقتران (ق(س)) . دس

∫ $\underbrace{\text{٨س}}_{\text{مشتقة}}$ $\underbrace{(\text{س}^{٢} + ٥)}_{\text{إقتران}}$. دس نفرض ص = س^{٢} + ٥

أو أن القوس بدون أس نضربهم ببعض ثم نكامل

② ∫ $\underbrace{\text{إقتران}}_{\text{مشتقة}}$ $\underbrace{(\text{ق(س)})}_{\text{إقتران}}$$^{\text{ن}}$ دس نفرض ص = ق(س) بدون أس

∫ ٨س (س^{٢} + ٦)^{٣} . دس نفرض ص = س^{٢} + ٦

③ ∫ $\dfrac{\overset{\text{مشتقة}}{\text{إقتران}}}{\underbrace{(\text{ق(س)})}_{\text{إقتران}}}$. دس نفرض ص = ق(س)

∫ $\dfrac{\text{٨س}}{(\text{س}^{٢}+٦)}$. دس نفرض ص = س^{٢} + ٦

④ ∫ $\dfrac{\overset{\text{مشتقة}}{\text{إقتران}}}{\underbrace{(\text{ق(س)})}_{\text{إقتران}}{}^{\text{ن}}}$ دس نفرض ص = ق(س)

∫ $\dfrac{\text{٨س}}{(\text{س}^{٢}+٦)^{\text{ن}}}$ نفرض ص = س^{٢} + ٦

⑤ ∫ إقتران $\sqrt{\text{ق(س)}}$. دس نفرض ص = ق(س)

فقط عندما يكون ما داخل الجذر مشتقة خارج الجذر

∫ ٢س^{٢} $\sqrt{\text{س}^{٣} + ٥}$ دس نفرض ص = س^{٣} + ٥

(٦) $\int \frac{\text{اقتران}}{\sqrt{ق(س)}}\, دس$ ويكون ما داخل الجذر مشتقة خارج الجذر نفرض ص = ق(س)

$\int \frac{٢س^٢}{\sqrt{س^٣+٥}}\, دس$ نفرض ص = $س^٣ + ٥$

(٧) في الحالات السابقة التالية إذا لم يوجد اقتران مشتقة - تكون تكامل بالأجزاء
ولكن نحول الجذر إلى أس ونرفع للبسط إذا كان بالمقام
ونحول القوس من المقام إلى البسط بتغيير إشارة الأس
وإجراء عملية التكامل بالأجزاء

(٨) $\int س^٣ \sqrt{س^٢+١}\, دس$

نفرض ص = $س^٢+١$ ⇐ $\frac{دص}{دس} = ٢س$ ⇐ $دس = \frac{دص}{٢س}$

$\int س^٣ \sqrt{ص} \cdot \frac{دص}{٢س} = \frac{١}{٢}\int س^٢ \sqrt{ص}\, دص$

لتحويل س إلى ص من خلال الفرض ⇐ ص - ١ = $س^٢$

$\frac{١}{٢}\int (ص-١)(ص)^{\frac{١}{٢}}\, دص$

---

(٩) $\int$ اقتران × مثلثي زاويته غير خطية دس نفرض ص = زاوية المثلثي

$\int ٢س\ جا(س^٢+٤)\, دس$: نفرض ص = $س^٢+٤$

(١٠) $\int \frac{\text{اقتران}}{\text{مثلثي زاويته غير خطية}}\, دس$ نفرض ص = زاوية المثلثي

$\int \frac{٢س}{جا(س^٢+٤)}\, دس$ ⇐ نفرض ص = $س^٢+٤$

(١١) ∫ إقتران × مثلثي زاوية خطية دس ← تكامل بالأجزاء

نفرض ص = إقتران دم = مثلثي

(١٢) ∫ جا(الزاوية) × جتا(نفس الزاوية) دس

نفرض ص أحدهما بدون الأس

∫ جا٢س جتا٢س دس

نفرض ص = جا٢س أو جتا٢س

(١٣) ∫ $\frac{\text{جا (الزاوية)}}{\text{جتا (نفس الزاوية)}}$ دس أو بالعكس

نفرض ص : المثلثي الموجود بالمقام

(١٤) ∫ ظا زاوية × قا٢ نفس الزاوية
إقتران مشتقة

نفرض ص = ظا (الزاوية)

∫ ظا٢س × قا٢س دس ← نفرض ص = ظا٢س

(١٥) ∫ ظتا زاوية × قتا٢ نفس الزاوية دس ← ص = ظتا الزاوية

∫ ظتا (٥س) × قتا٢ (٥س) دس ← ص = ظتا ٥س

(١٦) ∫ إقتران هـ^(غير خطي) دس

الأس مشتقة الإقتران ← نفرض ص = القوس بدون أس

∫ ٢س هـ^(س٢ + ٥) دس ← نفرض ص = س٢ + ٥

∫ جاس هـ^(جتاس) دس ← نفرض ص = جتاس

∫ ظاس هـ^(قا٢س) دس ← نفرض ص = قا٢س

(١٧) $\int هـ^{\text{(اقتران غير خطي)}}$ دس — تعويض ثم أجزاء

نفرض ص = اقتران غير خطي

$\int هـ^{\sqrt{س}}$ دس — نفرض ص = $\sqrt{س}$

---

(١٨) $\int$ مثلثي (زاوية غير خطية) دس — تعويض ثم أجزاء

$\int$ جا $\sqrt{س}$ — نفرض ص = $\sqrt{س}$ ثم يتحول أجزاء

ثم نفرض هـ : الاقتران ، دهـ : المثلثي

---

(١٩) $\int$ (جتا زاوية) (جتا زاوية مختلفة) دس $\xrightarrow{\text{نستخدم}}$ متطابقة

$\frac{١}{٢}$ [جتا (أ + ب) + جتا (أ - ب)]

(٢٠) $\int$ جا (زاوية) (جا زاوية مختلفة) دس $\xrightarrow{\text{نستخدم}}$ متطابقة

$\frac{١}{٢}$ [جتا (أ - ب) - جتا (أ + ب)]

(٢١) $\int$ جا (زاوية) (جتا زاوية مختلفة) دس $\xrightarrow{\text{نستخدم}}$ متطابقة

$\frac{١}{٢}$ [جا (أ - ب) + جا (أ + ب)]

---

(٢٢) $\int (\text{عبارة تربيعية ذات جذر مكرر})^{\text{عدد}}$ دس

$\int (س^{٢} - ٦س + ٩)^{٤}$ دس $\Leftarrow \int ((س - ٣)^{٢})^{٤}$ دس

$\Leftarrow \int (س - ٣)^{٨}$ دس $= \frac{(س - ٣)^{٩}}{(١)(٩)} +$ جـ

(٢٣) $\int$ √(عبارة تربيعية ذات جذر متكرر) ءس

$\int_{\cdot}^{٢} \sqrt{س^٢ - ٢س + ١}$ ءس

$\int_{\cdot}^{٢} \sqrt{(س - ١)^٢}$ ءس $= \int_{\cdot}^{٢} |س - ١|$ ءس

نعيد تعريف ثم نكامل

---

(٢٤) $\int$ √(عبارة لا تحلل)   (نخرج عامل مشترك)

مثال

$\int \sqrt{س^٢ + ٢س^٤}$ ءس $\Leftarrow \int \sqrt{س^٢(١+٢س^٢)}$ ءس ، س > صفر

$\Leftarrow \int \sqrt{س^٢} \,.\, \sqrt{١+٢س^٢}$ ءس $\Leftarrow \int س \sqrt{١+٢س^٢}$

نفرض ص = ١ + ٢س^٢

---

(٢٥) $\int$ مثلثي √مثلثي   نفرض ص: مثلثي داخل الجذر

$\int$ جا٢س $\sqrt{٢ + جتا٢س}$ ءس   نفرض ص = ٢ + جتا٢س

---

(٢٦) $\int \frac{مثلثي}{مقلوبة}$ ← نرفعه للبسط ونزيد الأس أو ننقص

* $\int \frac{جاس}{قتاس}$ ءس $= \int$ جاس . $\frac{1}{قتاس}$ ءس $= \int$ جاس . جاس ءس

$\int$ جا^٢س ءس

* $\int \frac{جتا^٣س}{(قاس)^{-١}}$ ءس $\Leftarrow \int$ جتا^٣س قاس ءس

٢٧ تكامل باستخدام المتطابقات

١) $\int$ جا^{2} س ء س = $\frac{1}{2}$ $\int$ (١ - جتا ٢س) ء س

٢) $\int$ جتا^{2} س ء س = $\frac{1}{2}$ $\int$ (١ + جتا ٢س) ء س

٣) $\int$ ظا^{2} س ء س = $\int$ قا^{2} س - ١ ء س = $\int$ قا^{2} س ء س - $\int$ ١ ء س

٤) $\int$ ظتا^{2} س ء س = $\int$ قتا^{2} س - ١ ء س = $\int$ قتا^{2} س ء س - $\int$ ١ ء س

٢٨

١) $\int$ جا^{3} س ء س = $\int$ جا س جا^{2} س ء س = $\int$ جا س (١ - جتا^{2} س) ء س

نفرض ص = جتا س

٢) $\int$ جتا^{3} س ء س = $\int$ جتا س جتا^{2} س = $\int$ جتا س (١ - جا^{2} س) ء س

نفرض ص = جا س

٣) $\int$ ظا^{3} س ء س = $\int$ ظا س ظا^{2} س ء س = $\int$ ظا س (قا^{2} س - ١) ء س

نوزع ثم نفرض ص = ظا س ونكامل ظا س لوحدها

٤) $\int$ ظتا^{3} س ء س = $\int$ ظتا س ظتا^{2} س ء س = $\int$ ظتا س (قتا^{2} س - ١)

نوزع ثم نفرض ص = ظتا س ونكامل ظتا س لوحدها

٢٩

$\int$ جا^{4} س ء س = $\int$ جا^{2} س جا^{2} س ء س = $\int$ جا^{2} س (١ - جتا^{2} س) ء س

= $\int$ جا^{2} س - $\int$ جتا^{2} س جا^{2} س ء س

= متطابقة - $\int$ (جتا س جا س)^{2} ء س

$\int$ جتا^{4} س ء س = $\int$ جتا^{2} س جتا^{2} س ء س = $\int$ جتا^{2} س (١ - جا^{2} س)

= $\int$ جتا^{2} س - $\int$ جتا^{2} س جا^{2} س ء س

---

(٣٠)

$\int \text{جاس جتاس دس}$

$\int \text{جا}^{3}\text{س جتاس دس}$ نفرض ص أحدهما

$\int \text{جا}^{ن}\text{س جتاس دس}$

---

(٣١)

$\int \text{جا}^{2}\text{س جتا}^{2}\text{س دس} = \int (\text{جاس جتاس})^{2}\,\text{دس}$

$= \int \left(\frac{1}{2}\,\text{جا٢س}\right)^{2}\text{دس}$

$\int \text{جا}^{4}\text{س جتا}^{4}\text{س دس} = \int (\text{جاس جتاس})^{4}\,\text{دس}$

$= \int \left(\frac{1}{2}\,\text{جا٢س}\right)^{4}\text{دس}$

---

(٣٢) $\int \text{جا}^{ن}\text{س جتا}^{ل}\text{س دس}$

أحدهما فردي والآخر زوجي ⇐ نفرض ص الاقتران ذات الأس الزوجي

$\int \text{جاس جتا}^{ن}\text{س دس}$ ⇐ نفرض ص = جتاس

ن > ١) نفرض ذات الأس الأكبر

$\int \text{جتاس جا}^{ن}\text{س دس}$ ⇐ نفرض ص = جاس

---

(٣٣) $\int \text{قا}^{ن}\text{س ظا}^{ل}\text{س دس}$

(١) ل : فردي بغض النظر عن ن ⇐ نفرض ص = قاس

(٢) ن : زوجي بغض النظر عن ل ⇐ نفرض ص = ظاس

---

(٣٤) $\int \frac{(س+1)^{7}}{س^{9}}\,\text{دس} = \int \frac{(س+1)^{7}}{س^{7}\,س^{2}}\,\text{دس} = \int \left(\frac{س+1}{س}\right)^{7} \cdot \frac{1}{س^{2}}$

نفرض ص = $1 + \frac{1}{س}$

---

(٣٥) $\int س^{2}\sqrt[3]{س^{7} - س^{3}}\,\text{دس} \Leftarrow \int س^{2}\sqrt[3]{س^{3}(س^{4}-1)}$

$\int س^{2}\sqrt[3]{س^{3}}\,\sqrt[3]{س^{4}-1}\,\text{دس} = \int س^{3}\sqrt[3]{س^{4}-1}\,\text{دس}$

نفرض ص = $س^{4} - 1$

(٣٦) ∫ (إقتران)^(أسه أكبر من واحد) مثلثي ⟸ تكامل بالأجزاء

تكامل بالأجزاء حسب الأس

∫ س^٢ جتا س ءس ⟸ تكامل بالأجزاء مرتان

ونفرض ع = إقتران   ءهـ = مثلثي

(٣٧) ∫ هـ^س مثلثي ءس   تكامل بالأجزاء مرتان

ع = هـ^س   ءهـ = مثلثي

(٣٨) ∫ مثلثي هـ^(مثلثي) ءس

نفرض ص = الإقتران ماداخل الجذر إذا وجد إقتران ومشتقته

إذا لم يوجد تكامل بالأجزاء

∫ قا^٢ س هـ^(ظا س) ءس

نفرض ص = ظا س

(٣٩) ∫ هـ^(إقتران خطي) ءس ⟸ ∫ هـ^(أس+ب) ءس = هـ^(أس+ب) / أ + جـ

(٤٠) ∫ إقتران لو_هـ س ءس ⟸ تكامل بالأجزاء

ع = لو_هـ س   ءهـ = إقتران

مثال

∫ س لو_هـ س ءس

ع = لو_هـ س   ءهـ = س

(٤١) $\int \text{لوهـ س}\ \text{ءس}$ تكامل بالأجزاء

$\text{ص} = \text{لوهـ س}$ $\qquad$ $\text{ءع} = \text{ءس}$

---

(٤٢) $\int \text{س}^{٥}\ \text{لوهـ س}^{٣}\ \text{ءس}$ تعويض ثم أجزاء

نفرض $\text{ص} = \text{س}^{٣}$

---

(٤٣) $\int \text{لوهـ}\sqrt{\text{س}}\ \text{ءس} = \int \text{لوهـ س}^{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢}\int \text{لوهـ س}\ \text{ءس}$

---

(٤٤) $\int \frac{\text{عدد}}{\text{إقتران خطي}}\ \text{ءس}$

$\int_{٢}^{٤} \frac{١}{٩-٢\text{س}}\ \text{ءس} =$ نفرض $\text{ص} = ٩ - ٢\text{س}$

أو $\frac{١}{-٢}\int_{٢}^{٤} \frac{-٢(١)}{٩-٢\text{س}}\ \text{ءس} = \frac{-١}{٢}\ \text{لوهـ}|٩-٢\text{س}|\Big]_{٢}^{٤}$

---

(٤٥) $\int \frac{\text{ق}'(\text{س})}{\text{ق}(\text{س})}\ \text{ءس} = \text{لوهـ}|\text{ق}(\text{س})| + \text{جـ}$

① $\text{لو}_{هـ} (أ \times ب) = \text{لو}_{هـ} أ + \text{لو}_{هـ} ب$

② $\text{لو}_{هـ} \frac{أ}{ب} = \text{لو}_{هـ} أ - \text{لو}_{هـ} ب$

③ $\text{لو}_{هـ} أ^{ن} = ن \, \text{لو}_{هـ} أ$

④ $\text{لو}_{هـ} هـ = 1$

⑤ $\text{لو}_{هـ} 1 = \text{صفر} \Leftarrow هـ^{\text{صفر}} = 1$

⑥ $\text{لو}_{هـ} هـ^{ق(س)} = ق(س)$

⑦ $هـ^{\text{لو}_{هـ} ق(س)} = ق(س)$

التكامل بالكسور الجزئية

يستخدم عندما لا يوجد علاقة إقتران ومشتقته بالبسط والمقام

الحالة الأولى:

عندما تكون درجة البسط أصغر من درجة المقام والمقام يحلل

مثل $\int \frac{2}{س^2 - 1} \, دس$

$$\frac{2}{س^2-1} = \frac{2}{(س-1)(س+1)} = \frac{أ}{(س-1)} + \frac{ب}{(س+1)}$$

نجد أصفار

$س - 1 = \text{صفر} \Leftarrow س = 1$

$س + 1 = \text{صفر} \Leftarrow س = -1$

$\Leftarrow 2 = أ(س+1) + ب(س-1)$

$س = -1 \Leftarrow 2 = -2ب \Leftarrow \boxed{ب = -1}$

$س = 1 \Leftarrow 2 = 2أ \Leftarrow \boxed{أ = 1}$

أ. محمد حتاملة
٠٧٨٨٨٠٣٤٣٢

$$\int \frac{2}{س^2-1} \, دس = \int \frac{1}{(س-1)} \, دس + \int \frac{-1}{(س+1)} \, دس$$

$$= \text{لو}_{هـ} |س-1| - \text{لو}_{هـ} |س+1|$$

الحالة الثانية

عندما يكون درجة البسط = درجة المقام والمقام تحلل

① نقسم قسمة طويلة فنتحول إلى ناتج + $\frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$

② نجري عملية الكسور الجزئية

مثال: $\int \frac{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ١١}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ١٥} \, \text{دس}$

والحل:

$$\begin{array}{r|l} & ١ \\ \hline \text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ١٥ & \text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ١١ \\ & \mp \text{س}^{٢} \mp ٢\text{س} \pm ١٥ \\ \hline & \text{س} + ٤ \end{array}$$

$$\int \frac{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ١١}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ١٥} \, \text{دس} = \int ١ + \frac{\text{س} + ٤}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ١٥} \, \text{دس}$$

$$\Leftarrow \int ١ \, \text{دس} + \int \frac{\text{س} + ٤}{\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ١٥} \, \text{دس}$$

$$\Leftarrow \text{س} + \int \frac{\text{س} + ٤}{(\text{س} + ٥)(\text{س} - ٣)} \, \text{دس}$$

الحالة الثالثة

عندما يكون درجة البسط أكبر من درجة المقام والمقام لا يحلل نقسم قسمة طويلة

مثال:

$$\int \frac{\text{س}^{٣} + \text{س}}{\text{س} - ١} \, \text{دس}$$

الحل

$$
\begin{array}{r|l}
\text{س}^{٢} + \text{س} + ٢ & \\
\hline
\text{س}^{٣} + \text{س} & \text{س} - ١ \\
-\text{س}^{٣} \pm \text{س}^{٢} & \\
\hline
\text{س}^{٢} + \text{س} & \\
-\text{س}^{٢} \pm \text{س} & \\
\hline
٢\text{س} & \\
-٢\text{س} \pm ٢ & \\
\hline
٢ &
\end{array}
$$

$$\Leftarrow \int \frac{\text{س}^{٣} + \text{س}}{\text{س} - ١} \, \text{دس} = \int \text{س}^{٢} + \text{س} + ٢ + \frac{٢}{\text{س} - ١} \, \text{دس}$$

$$= \frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٢\text{س} + ٢\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س} - ١| + \text{جـ}$$

* $\int \frac{1}{\text{س} - ٢\sqrt{\text{س}} - ٣}\, \text{د}\text{س}$

الحل: نفرض ص $= \sqrt{\text{س}}$ وتتحول إلى عبارة تربيعية ثم تتحول إلى خطوات الكسور الجزئية

---

* $\int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{٢\text{س}} - ٩}\, \text{د}\text{س} = \int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{هـ}^{\text{س}})^{٢} - ٩}\, \text{د}\text{س}$

نفرض ص $= \text{هـ}^{\text{س}}$ ⟸ تتحول إلى عبارة تربيعية ثم إلى كسور جزئية

---

* $\int \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{٥\,\text{ظا}^{٢}\text{س} - ٣\,\text{ظا}\text{س} - ٢}\, \text{د}\text{س}$

نفرض ص = ظاس وتتحول إلى معادلة تربيعية بالمقام ثم تحول إلى كسور جزئية

حساب المساحة باستخدام التكامل

أولاً: حساب مساحة منطقة محصورة بين منحنى إقتران ومحور السينات

نظرية:

إذا كان $ق$ إقتراناً قابلاً للتكامل في الفترة $[أ، ب]$ فإن مساحة المنطقة $م$ المحدودة بمنحنى $ق$ ومحور السينات في الفترة $[أ، ب]$ تعطى بالقاعدة $م = \int_{أ}^{ب} |ق(س)| \, دس$

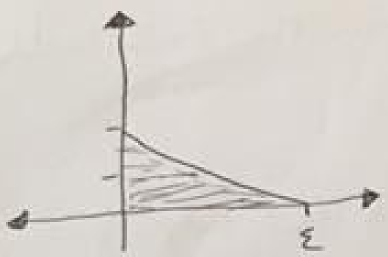
خطوات الحل:

① إرسم منحنى الإقتران وحدد المنطقة المطلوبة

② جد أصفار الأقتران ثم جزء المنطقة المطلوبة حسب موقعها من محور السينات (فوق محور السينات / تحت محور السينات)

③ إحسب مساحة كل منطقة جزئية على حدة ثم إجمع المساحات التي حصلت عليها للحصول على مساحة المنطقة المطلوبة

مثال: جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ق(س) = ٢ - \sqrt{س}$ ومحوري السينات والصادات



① $ق(س) = صفر$

$٢ - \sqrt{س} = صفر$

$\sqrt{س} = ٢$

$س = ٤$

$$م = \int_{٠}^{٤} |٢ - \sqrt{س}| \, دس = \int_{٠}^{٤} (٢ - \sqrt{س}) \, دس$$

ثانياً :

حساب منطقة محصورة بين منحنيين أو أكثر

إذا كان ق ، هـ إقترانين متصلين على [أ ، ب]
وكان $\text{ق}(\text{س}) \geq \text{هـ}(\text{س})$ لكل $\text{س} \in [\text{أ} ، \text{ب}]$ فإن
مساحة المنطقة (م) المحصورة بين منحنييهما في الفترة [أ ، ب]
هي $\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \left(\text{ق}(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س})\right) \, \text{دس}$

لتحديد مساحة منطقة محصورة بين منحنيين أو أكثر أتبع الخطوات التالية

① ارسم منحنى كل إقتران وحدود المنطقة المطلوب حساب مساحتها

② جزء المنطقة المطلوب حساب مساحتها إلى مناطق جزئية بحيث تكون كل منها محصورة بين منحنيين أو منحنى ومحور السينات

③ جد الإحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنيات مع بعضها ومع محور السينات

④ جد مساحة كل منطقة جزئية ثم جد المساحة المطلوبة بجميع مساحات المناطق الجزئية

مثال: جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^2$ ومنحنى $\text{ل}(\text{س}) = ٤\text{س} + ٥$

الحل: ① نساوي الإقترانات ببعض

$\text{ق}(\text{س}) = \text{ل}(\text{س})$

$\text{س}^2 = ٤\text{س} + ٥$

$\text{س}^2 - ٤\text{س} - ٥ = \text{صفر}$

$(\text{س} - ٥)(\text{س} + ١) = \text{صفر}$

$\text{س} - ٥ = \text{صفر} \Leftarrow \text{س} = ٥$

$\text{س} + ١ = \text{صفر} \Leftarrow \text{س} = -١$

٥   ١-

نعوض أي عدد داخل الفترة لنحدد من هو الأقتران الأكبر وأسهل شي نعوض الصفر

ق (صفر) = (صفر)^{٢} = صفر

ل (صفر) = ٤(صفر) + ٥ = ٥

ل (س) > ق (س)

٤س + ٥ > س^{٢}

م = $\int_{-1}^{5}$ ٤س + ٥ - س^{٢} ء س

الحالة الثالثة

إيجاد المساحة المحصورة بين ثلاثة منحنيات

(يجب الرسم)

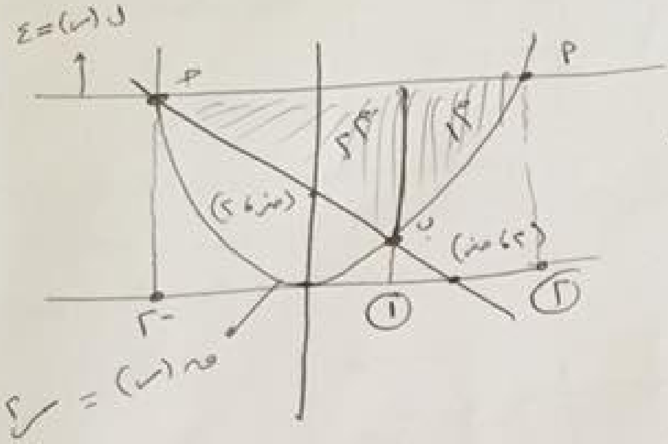
① نرسم الإقترانات عن طريق س = صفر ، ص = صفر

② نجد نقاط التقاطع بين الإقترانات

③ نحدد المساحات ونحدد من هو الإقتران الأكبر والإقتران الأصغر

مثال: جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات $ق(س) = س^{٢}$ ، $هـ(س) = ٢ - س$ ، $ل(س) = ٤$ سؤال مهم

الحل:



$هـ(س) = ٢ - س$

$س = صفر \Leftarrow هـ(س) = ٢ - صفر = ٢$

$(صفر ، ٢)$

$ص = صفر$

$صفر = ٢ - س$

$\Leftarrow س = ٢$

$(٢ ، صفر)$

أ : نقطة تقاطع $ق(س) = س^{٢}$ مع $ل(س) = ٤$

ب : نقطة تقاطع $ق(س) = س^{٢}$ مع $هـ(س) = ٢ - س$

جـ : نقطة تقاطع $هـ(س) = ٢ - س$ مع $ل(س) = ٤$

$س^{٢} = ٤$

$س = \pm ٢$

نأخذ $س = ٢$

$٤ = ٢ - س$

$٢ = - س$

$-٢ = س$

$س^{٢} = ٢ - س$

$س^{٢} - ٢ + س = صفر$

$(س + ٢)(س - ١) = صفر$

$س = ١$ ، $س = -٢$

$٤ > س^{٢}$ $\quad$ $٤ > ٢ - س$

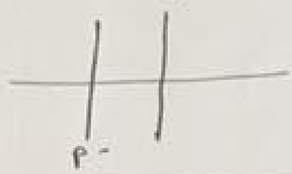
-٢ $\quad$ ١ $\quad$ ٢

$$م = \int_{-٢}^{١} ٤ - (٢ - س) \, دس + \int_{١}^{٢} ٤ - س^{٢} \, دس$$

رسمات المنحنيات

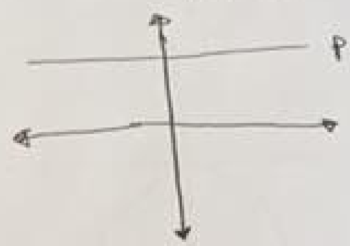
س = م

س = -م

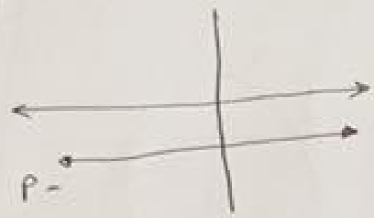


س = صفر
محور الصادات

ص = م

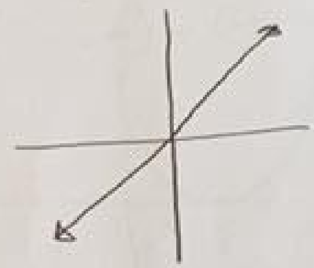


ص = -م

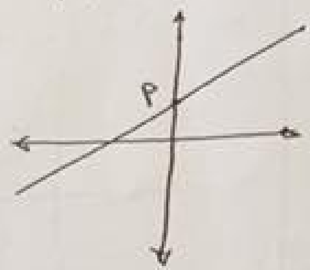


ص = صفر
محور السينات

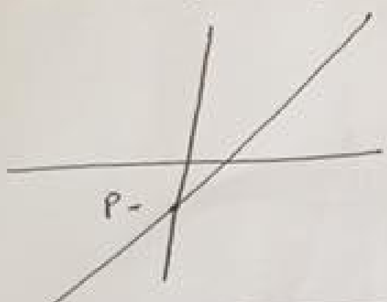
ق(س) = س



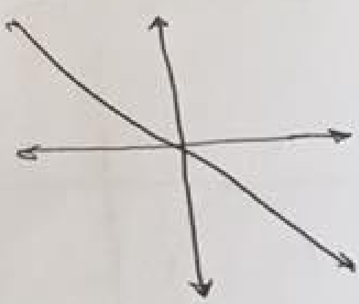
ق(س) = س + م



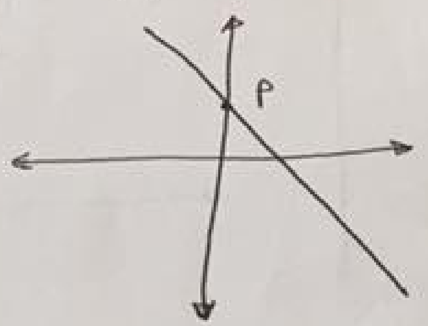
ق(س) = س - م



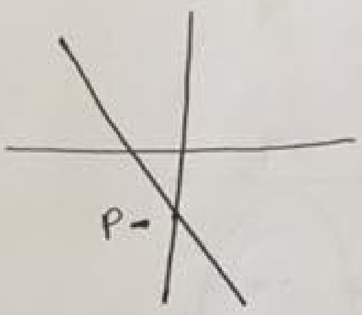
ق(س) = -س



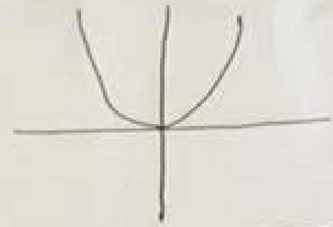
ق(س) = -س + م



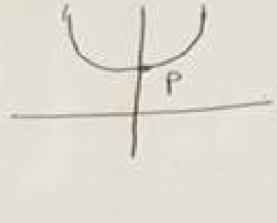
ق(س) = -س - م



$ق(س) = س^{٢}$

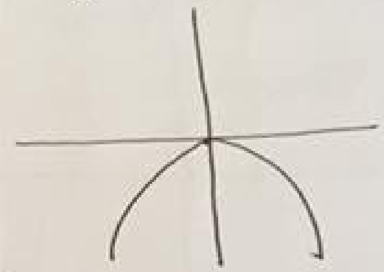


$ق(س) = س^{٢} + ٩$

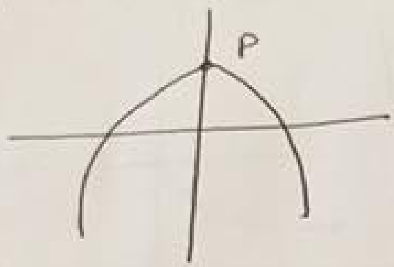


$ق(س) = س^{٢} - ٩$

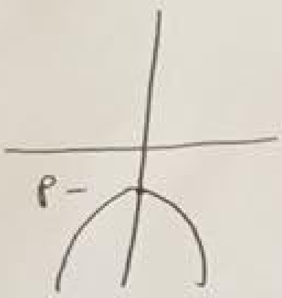
$ق(س) = -س^{٢}$



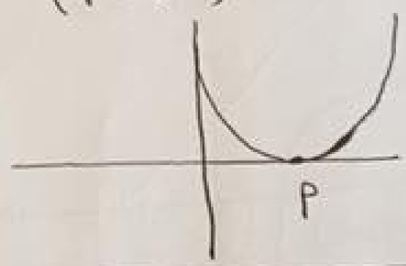
$ق(س) = -س^{٢} + ٩$



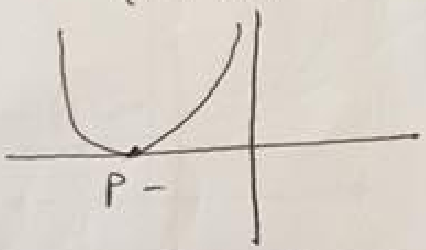
$ق(س) = -س^{٢} - ٩$



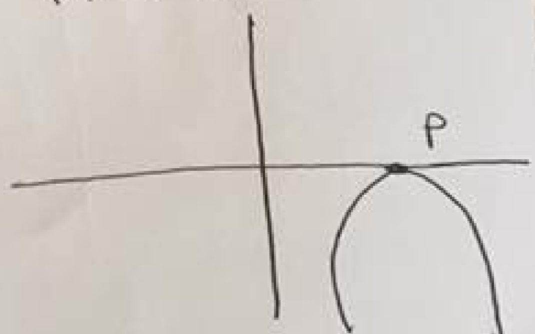
$ق(س) = (س - ٩)^{٢}$



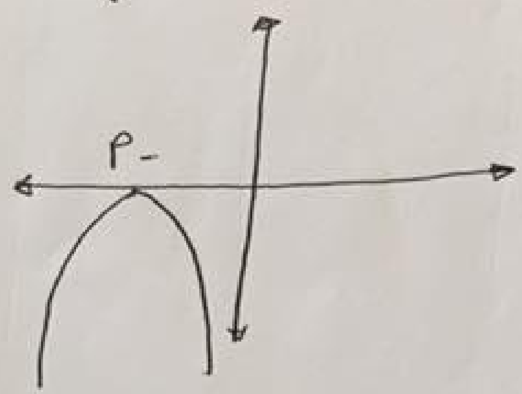
$ق(س) = (س + ٩)^{٢}$



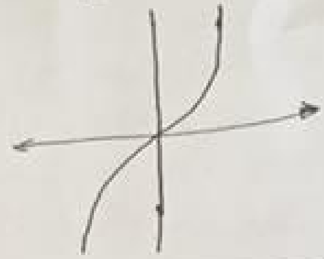
$ق(س) = -(س - ٩)^{٢}$



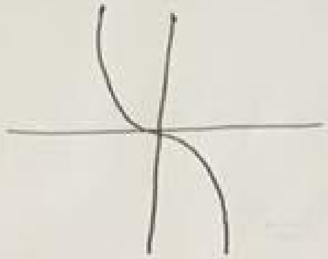
$ق(س) = -(س + ٩)^{٢}$



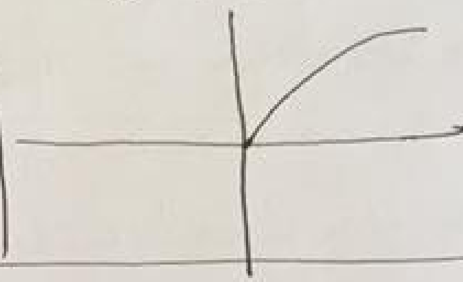
$ق(س) = س^{٣}$



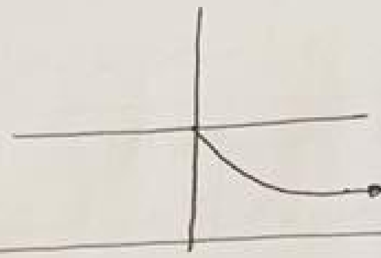
$ق(س) = -س^{٣}$



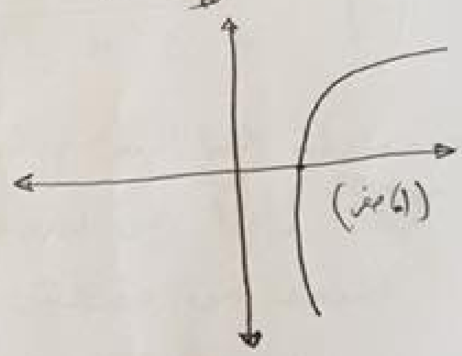
$ق(س) = \sqrt{س}$



$ق(س) = -\sqrt{س}$



$ق(س) = لو_{هـ} س$



$ق(س) = هـ^{س}$