رياضيات الأعمال

الصف الثاني عشر- المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الثاني

12

إجابات التمارين

الوحدتان 4 و 5

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

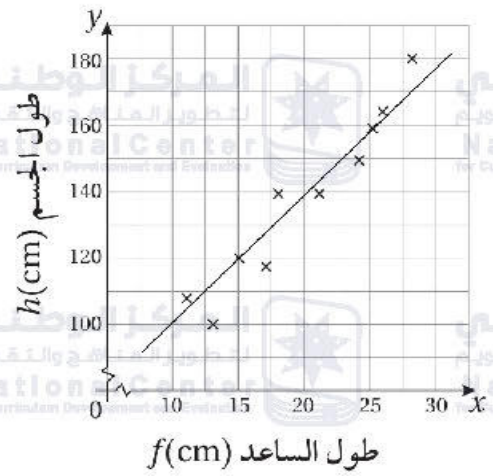
06-5376262 / 237 06-5376266 P.O.Box: 2088 Amman 11941

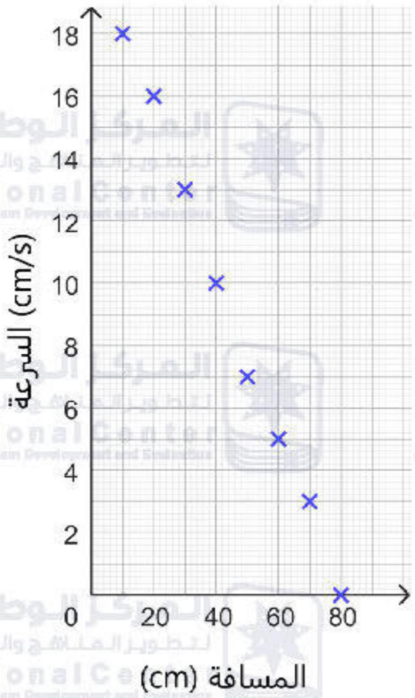
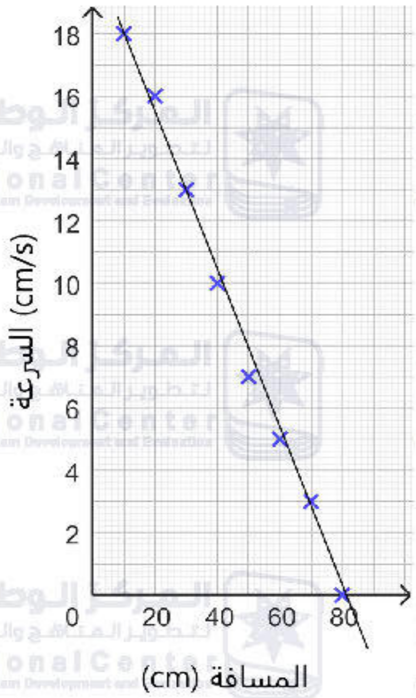
@nccdjor feedback@nccd.gov.jo www.nccd.gov.jo

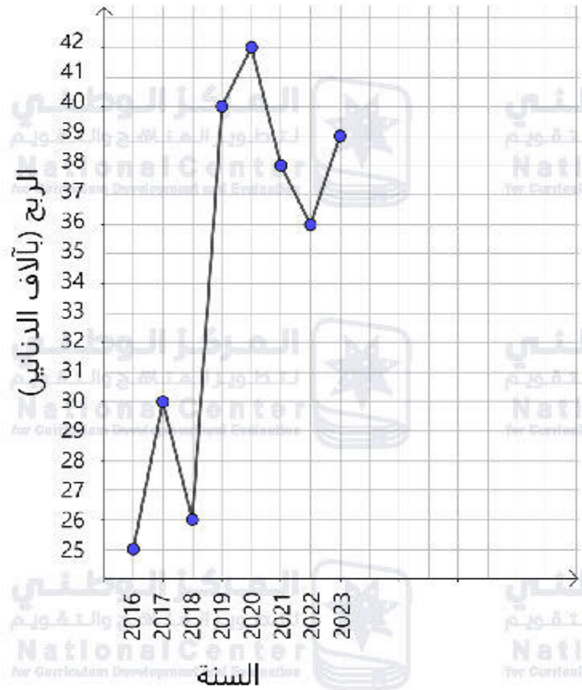
إجابات كتاب التمارين- مادة رياضيات الأعمال- الصف الثاني عشر الأكاديمي ف2

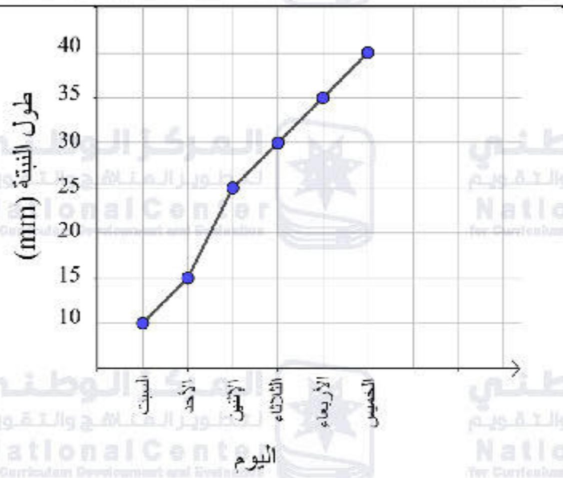
الوحدة الرابعة: أشكال الانتشار والسلاسل الزمنية

أستعد لدراسة الوحدة

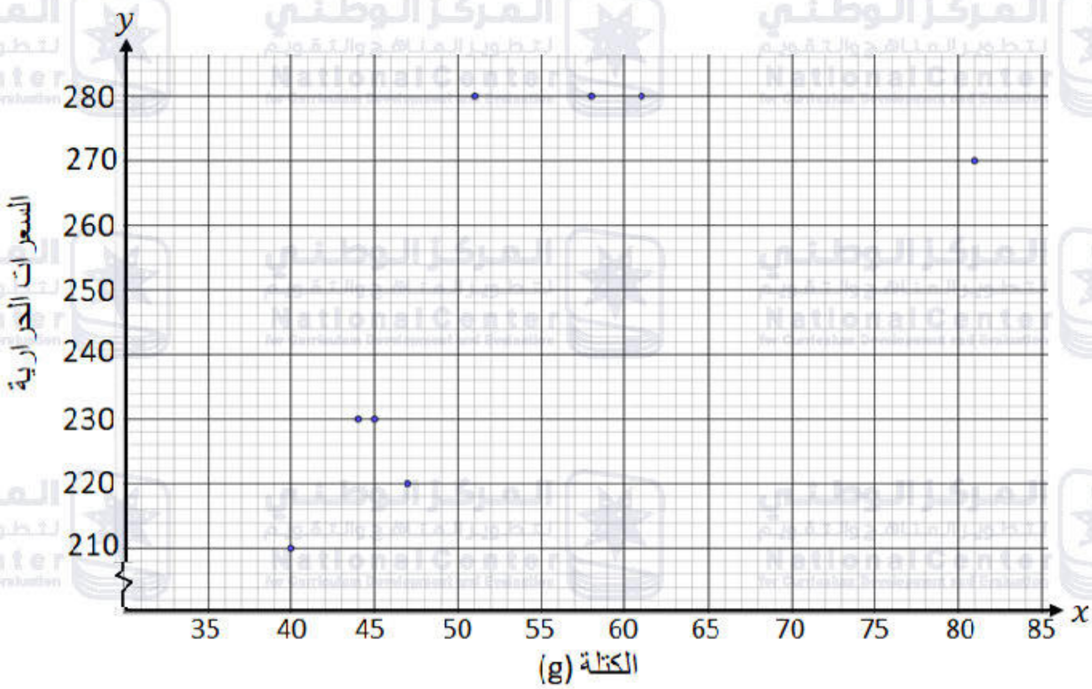
	شكل الانتشار والارتباط صفحة 6
1	D
2	B
3	C
4	سالب ضعيف
5	موجب قوي
6	لا يوجد ارتباط
	المستقيم الافضل مطابقة صفحة 7
7	ارتباط موجب قوي، لأنه في معظم الأحيان كلما زاد طول الساعد زاد طول الجسم.
8	 المستقيم الأفضل مطابقة يمر بالنقطتين (15,120) ,(25,160)، إذن، معادلته هي: $y - 120 = \frac{160 - 120}{25 - 15}(x - 15)$ $\Rightarrow y - 120 = 4(x - 15)$ $\Rightarrow y = 4x + 60$
9	$y = 4(27) + 60 = 168$ cm

10	السرعة (cm/s) 18 16 14 12 10 8 6 4 2 0 20 40 60 80 المسافة (cm)
11	السرعة (cm/s) 18 16 14 12 10 8 6 4 2 0 20 40 60 80 المسافة (cm)

12	المستقيم الأفضل مطابقة يمر بالنقطتين $(70,3)$, $(30,13)$، إذن، معادلته هي: $y-3=\frac{13-3}{30-70}(x-70)$ $\Rightarrow y-3=-0.25(x-70)$ $\Rightarrow y=-0.25x+20.5$ تقدير سرعة الكرة لحظة قطعها مسافة $5\ cm$ من نقطة انطلاقها: $y=-0.25(5)+20.5=19.25\ \text{cm/s}$
	إيجاد الوسط الحسابي لبيانات مفردة صفحة 9
13	$\bar{x}=\frac{\sum x}{n}=\frac{35+70+45+64+80+42}{6}=\frac{336}{6}=56$
14	$\bar{x}=\frac{\sum x}{n}=\frac{385+278+479+360}{4}=\frac{1502}{4}=375.5$
15	$\bar{x}=\frac{\sum x}{n}=\frac{24-12-18}{3}=\frac{-6}{3}=-2$
16	$\bar{x}=\frac{\sum x}{n}=\frac{283+141+470}{6}=\frac{894}{6}=298$
	تمثيل البيانات بالخطوط صفحة 9
17	

18	
	قراءة بيانات ممثلة بالخطوط، وتفسيرها صفحة 10
19	الشهر الأكثر معدّلًا لهطل الأمطار هو شهر كانون الثاني، وكان معدل الهطل 40 mm
20	الشهر الأقل معدّلًا لهطل الأمطار هو شهر نيسان، وكان معدل الهطل 35 mm
21	تشرين الثاني
22	يزيد معدل هطل الأمطار في شهر كانون الأول بمقدار 3 mm عنه في شهر نيسان.
23	60 جهازًا
24	مبيعات المتجر في شهر أيار أعلى منها في شهر كانون الثاني.
25	في شهر حزيران
26	تزايدت المبيعات خلال الفترة الزمنية المحددة، إذ أن منحنى المبيعات تصاعد باستمرار.

الدرس الأول: الارتباط والانحدار

المتغير المستقل: عدد الطلبة في الغرفة الصفية. المتغير التابع: معدل علاماتهم في اختبار الرياضيات.	1
المتغير المستقل: عدد السيارات العاملة. المتغير التابع: عدد حوادث الطرق.	2
المتغير المستقل: عمر الشخص. المتغير التابع: طوله.	3
يمكن اعتبار علامات الاختبار الذي أجري أولًا (العلوم أو اللغة الانجليزية) هي المتغير المستقل وعلامات الاختبار اللاحق هي المتغير التابع.	4
تام سالب	5
موجب ضعيف	6
المتغير المستقل: كتلة قطعة الحلوى بالغرام. المتغير التابع: عدد السعرات الحرارية في قطعة الحلوى.  	7
عمومًا يوجد ارتباط موجب ضعيف بين كتلة قطعة الحلوى وعدد السعرات الحرارية فيها. إذ أنه في معظم الحالات كلما زادت كتلة قطعة الحلوى زاد عدد السعرات الحرارية فيها.	8

	9			

9

	x	y	xy	x^2
	44	230	10120	1936
	45	230	10350	2025
	81	270	21870	6561
	66	280	18480	4356
	47	220	10340	2209
	58	280	16240	3364
	51	280	14280	2601
	40	210	8400	1600
المجموع	432	2000	110080	24652

$$S_{xy} = \sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n} = 110080 - \frac{432 \times 2000}{8} = 2080$$

$$S_{xx} = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n} = 24652 - \frac{(432)^2}{8} = 1324$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{432}{8} = 54$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{2000}{8} = 250$$

$$m = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{2080}{1324} \approx 1.57$$

$$b = \bar{y} - m\bar{x} = 250 - (1.57) \times 54 \approx 165$$

$$y = mx + b \Longrightarrow y = 1.57x + 165$$

10

$$y = 1.57(55) + 165 \approx 251$$

11

لا يمكن استعمال هذه المعادلة للتنبؤ بعدد السعرات الحرارية في قطعة حلوى كتلتها 15 g لأن هذه الكتلة بعيدة جدًا عن نطاق الكتل الواردة في المسألة التي بنيت عليها تلك المعادلة. وإذا استعملت تلك المعادلة فستكون النتيجة غير دقيقة وغير موثوقة.

12

$$S_{xx} = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n} = 130120 - \frac{(937)^2}{8} = 20373.875$$

13

$$S_{yy} = \sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n} = 28400 - \frac{(450)^2}{8} = 3087.5$$

14

$$S_{xy}=\sum xy-\frac{\sum x\sum y}{n}=58540-\frac{937\times 450}{8}=5833.75$$

15

$$r=\frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}}=\frac{5833.75}{\sqrt{20373.875\times 3087.5}}\approx 0.74$$

16

	x	y	xy	x^2
	20	330	6600	400
	22	339	7458	484
	23	342	7866	529
	24	345	8280	576
	25	350	8750	625
	27	360	9720	729
	28	364	10192	784
المجموع	169	2430	58866	4127

$$S_{xy}=\sum xy-\frac{\sum x\sum y}{n}=58866-\frac{169\times 2430}{7}\approx 198.857$$

$$S_{xx}=\sum x^2-\frac{(\sum x)^2}{n}=4127-\frac{(169)^2}{7}\approx 46.857$$

$$\bar{x}=\frac{\sum x}{n}=\frac{169}{7}\approx 24.14$$

$$\bar{y}=\frac{\sum y}{n}=\frac{2430}{7}\approx 347.14$$

$$m=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}=\frac{198.857}{46.857}\approx 4.24$$

$$b=\bar{y}-m\bar{x}=347.14-(4.24)\times 24.14\approx 244.786$$

$$y=mx+b\Longrightarrow y=4.24x+244.786$$

17

يدل الميل $m \approx 4.24$ على مقدار الزيادة في حجم المبيعات بآلاف الدنانير لكل زيادة مقدارها ألف دينار من حجم الإنفاق على الإعلانات الترويجية.

أما المقطع $b \approx 245$ فيدل على حجم المبيعات بآلاف الدنانير عندما يكون حجم الإنفاق على الإعلانات الترويجية صفرًا، وهذا غير موثوق لأن الصفر بعيد جدًا عن مجال بيانات الإعلان المُعطاة في السؤال.

18	$y = 4.24(26) + 244.786 = 355.026$ يتوقع أن تبلغ مبيعات هذا المنتج 355026 دينار تقريبًا، عندما يبلغ الإنفاق الترويجي 26000 دينار.
19	لا يمكن استعمال هذه المعادلة للتنبؤ بقيم x إذا عُلمت قيمة y ،إذ نحتاج إلى معادلة انحدار x على y التي تكون مختلفة عن معادلة انحدار y على x . وإذا استعملنا المعادلة في السؤال 16 ستكون النتيجة غير دقيقة وغير موثوقة.
20	(see below)
21	$y = 0.13(28) - 0.7 = 2.94$ يتوقع أن تبلغ أرباح هذه الشركة التي بلغ حجم مبيعاتها 28 مليون دينار، 3 مليون دينار.

20

	x	y	xy	x^2
	22	1.8	39.6	484
	36	4.9	176.4	1296
	26	0.8	20.8	676
	14	0.9	12.6	196
	25	3.2	80	625
	34	3.7	125.8	1156
	6	0.5	3	36
	18	2.1	37.8	324
المجموع	181	17.9	496	4793

$$S_{xy} = \sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n} = 496 - \frac{181 \times 17.9}{8} = 91.0125$$

$$S_{xx} = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n} = 4793 - \frac{(181)^2}{8} = 697.875$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{181}{8} = 22.625$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{17.9}{8} = 2.2375$$

$$m = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{91.0125}{697.875} \approx 0.13$$

$$b = \bar{y} - m\bar{x} = 2.2375 - (0.13) \times 22.625 \approx -0.7$$

$$y = mx + b \Rightarrow y = 0.13x - 0.7$$

22	يدل الميل $m \approx 0.13$ على مقدار الزيادة في الأرباح بمليون دينار لكل زيادة مقدارها مليون دينار من حجم المبيعات. أما المقطع $b \approx -0.7$ فربما فيدل على مقدار الخسارة بمليون دينار عندما يكون حجم المبيعات صفرًا، لأن الشركة عند عدم بيع أي منتج لن تربح شيئًا، بل ستخسر بسبب التكاليف المستمرة التي تدفعها لاستمرار الشركة (رواتب موظفين، فواتير الكهرباء والماء، فواتير صيانة معدات،...الخ).
23	(see below)

	x	y	xy	x^2
	1000	17	17000	1000000
	1100	15	16500	1210000
	1300	16	20800	1690000
	1400	14.5	20300	1960000
	1600	13.5	21600	2560000
	1900	11	20900	3610000
	1800	8.5	15300	3240000
	2000	11.5	23000	4000000
المجموع	12100	107	155400	19270000

$$S_{xy} = \sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n} = 155400 - \frac{12100 \times 107}{8} = -6437.5$$

$$S_{xx} = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n} = 19270000 - \frac{(12100)^2}{8} = 968750$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{12100}{8} = 1512.5$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{107}{8} = 13.375$$

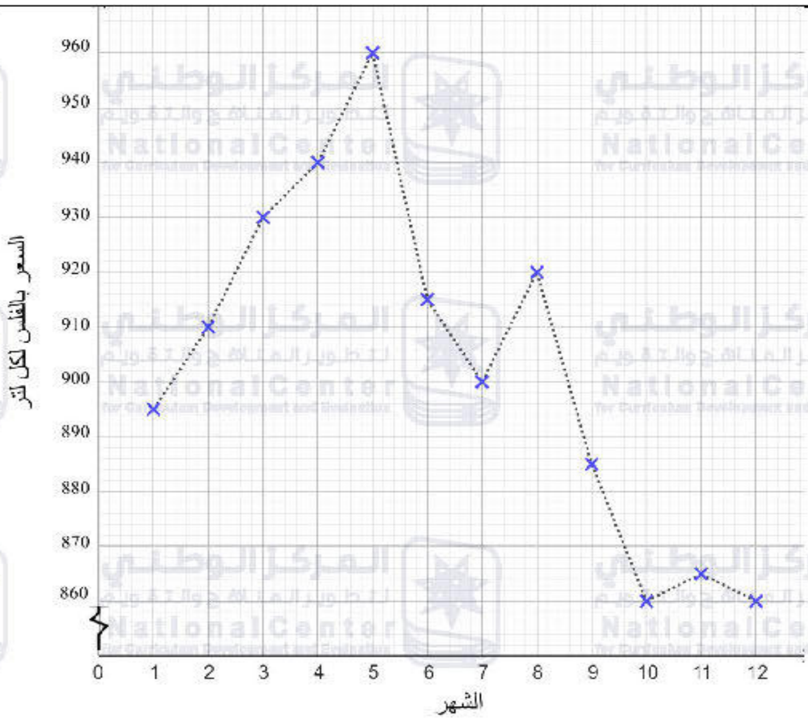
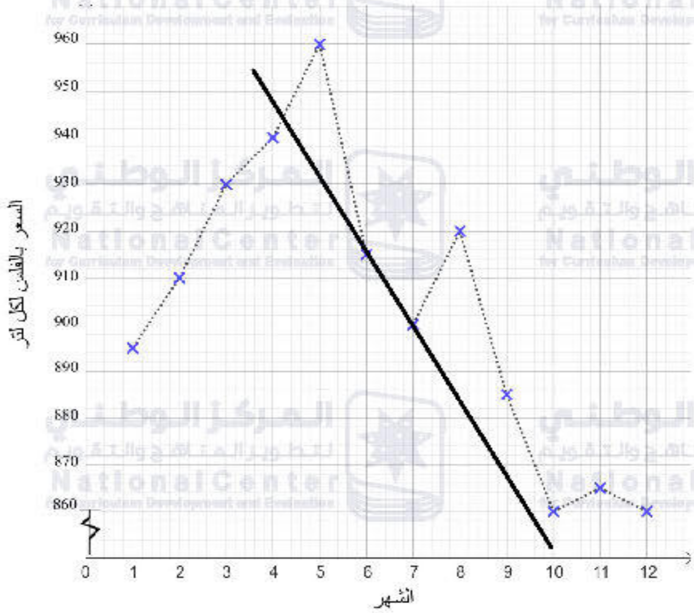
$$m = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{-6437.5}{968750} \approx -0.007$$

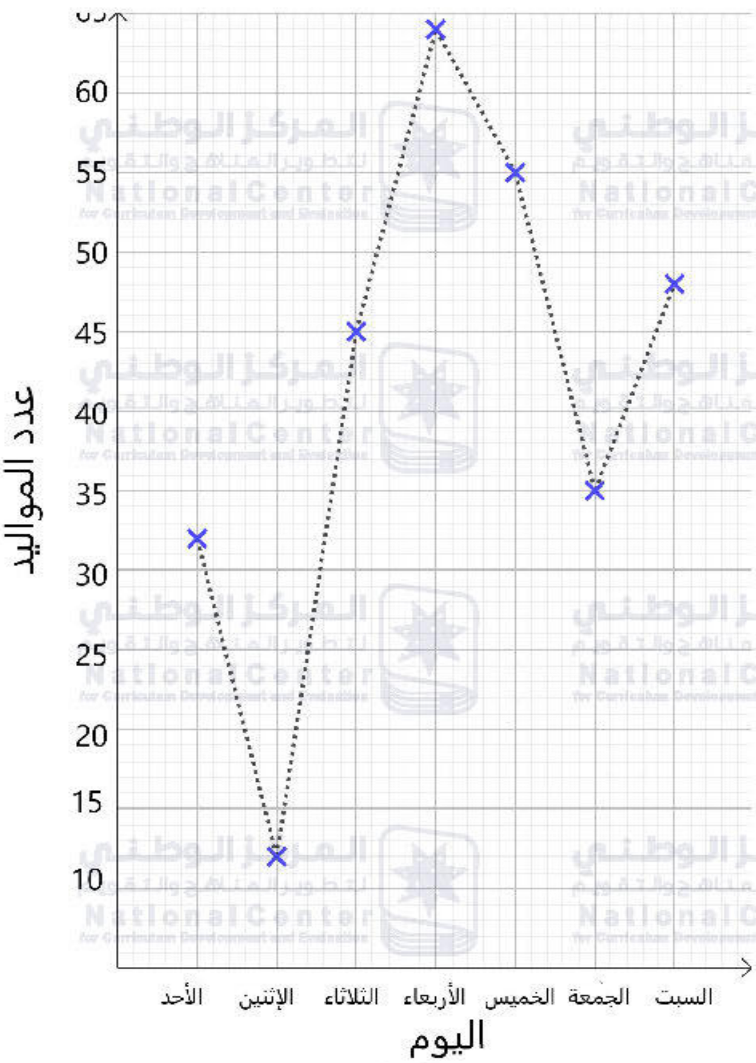
$$b = \bar{y} - m\bar{x} = 13.375 - (-0.007) \times 1512.5 \approx 23.9625$$

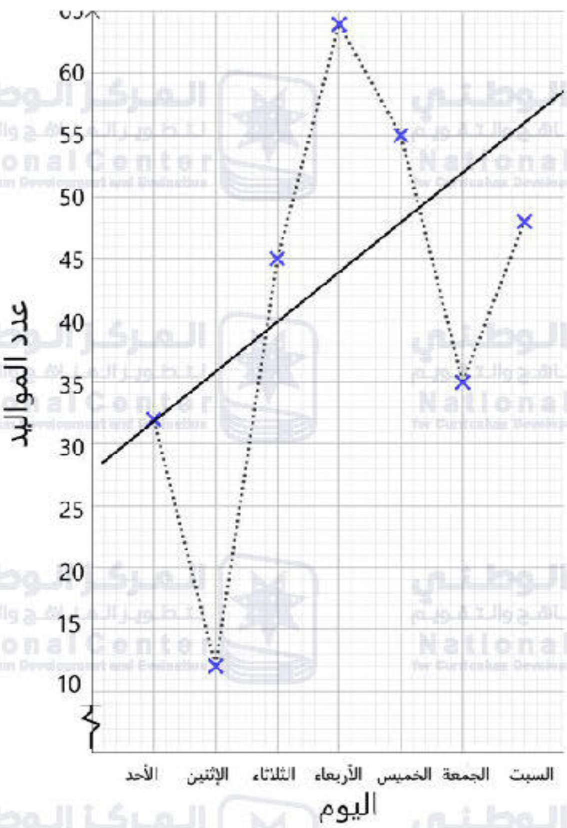
$$y = mx + b \Longrightarrow y = -0.007x + 23.9625$$

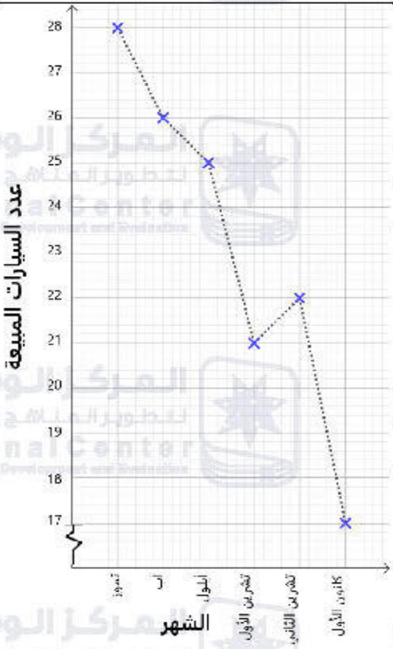
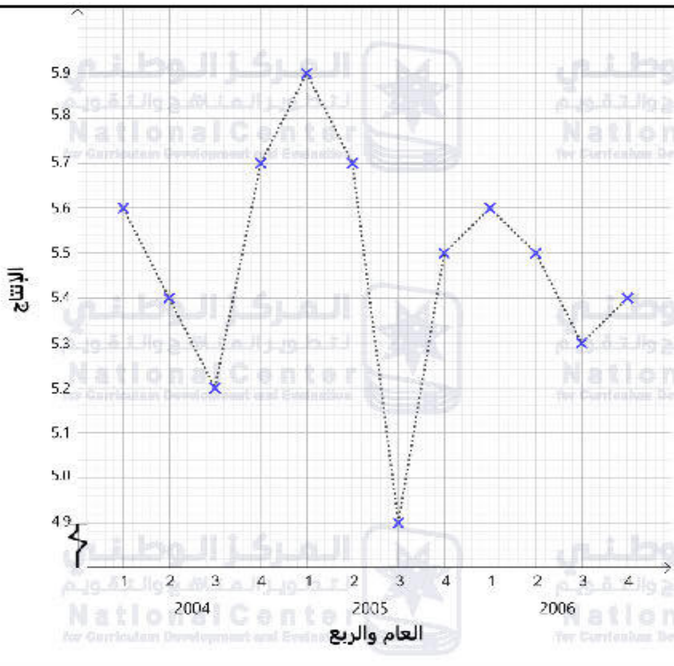
24	يدل الميل $m \approx -0.007$ على أن المسافة تنقص بمعدل 0.7 km لكل لتر لكل زيادة 100 cc في سعة المحرك. أما المقطع $b \approx 24$ فيدل على المسافة عندما تكون سعة محرك السيارة صفرًا، و هذا غير منطقي، لأنه لا توجد سيارة سعة محركها صفر، ويمكن القول أن نقطة بداية خط الانحدار هي $(0,24)$
25	$y = -0.007(1500) + 23.9625 = 13.4625$ من المتوقع ان تقطع هذه السيارة 13.5 كيلومترًا تقريبًا لكل لتر إذا كانت سعة محركها 1500 cc.

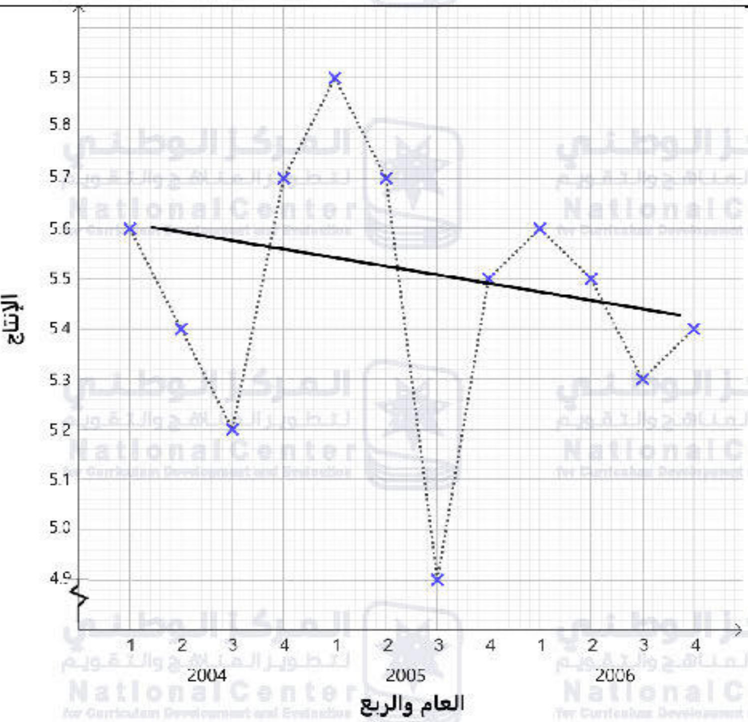
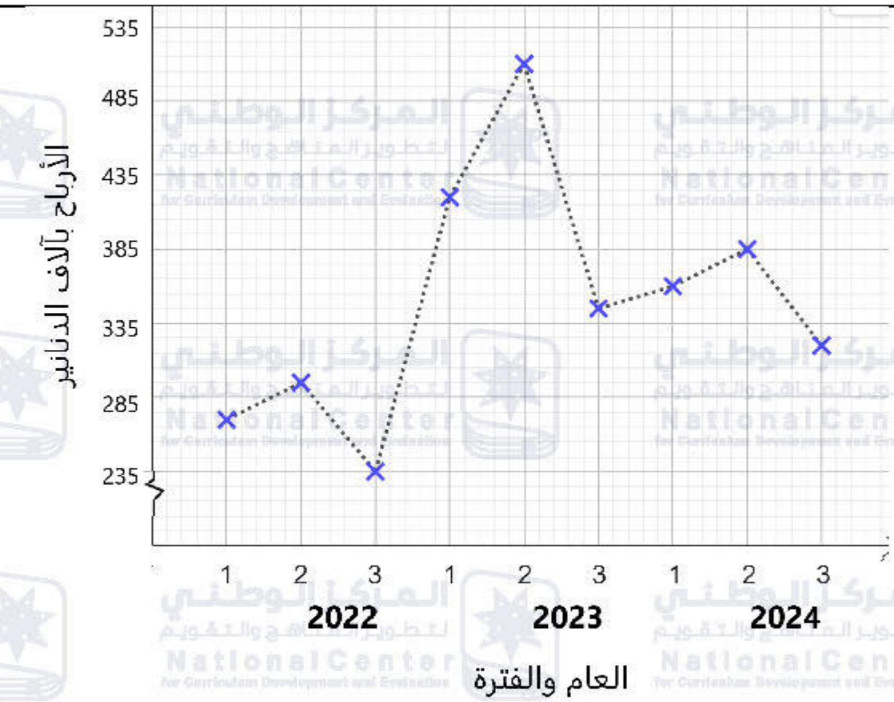
الدرس الثاني: السلاسل الزمنية

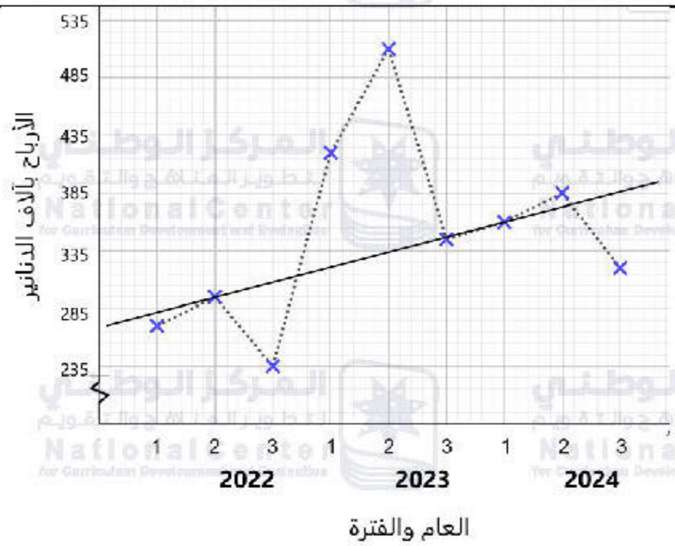
1	
2	

3	عدد المواليد 65 60 55 50 45 40 35 30 25 20 15 10 الأحد الإثنين الثلاثاء الأربعاء الخميس الجمعة السبت اليوم

4	
5	يتباين عدد المواليد على مدار الأسبوع، إذا يكون في أدنى مستوياته يوم الإثنين، ثم يبدأ في التزايد ليصل إلى الذروة في يوم الأربعاء، ثم يبدأ بالانخفاض بعد ذلك. والتمثيل البياني يوضح أن عدد المواليد آخذ بالتزايد كل يوم بوجه علم.
6	كانت المبيعات في أدنى مستوى لها في شهر آذار.
7	كان النقص في المبيعات أقل بين شهري نيسان وأيار.
8	$\bar{x} = \frac{1100 + 840 + 780 + 960 + 880 + 1200}{6} = 960$ نعم، لقد حقق صاحب المحل الهدف.

<table>
<tr><td>9</td><td>
</td></tr>
<tr><td>10</td><td>خط اتجاه البيانات العام هو من النوع الهابط، ما يعني أن عدد السيارات المبيعة مرشح للتناقص مستقبلاً.</td></tr>
<tr><td>11</td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>12</td><td>
</td></tr>
<tr><td>13</td><td>خط اتجاه البيانات العام هو من النوع الهابط، ما يعني أن كميات الغاز الطبيعي الربعية المستخرجة من هذا الحقل مرشحة للتناقص مستقبلاً.</td></tr>
<tr><td>14</td><td>في سنة 2004 كانت كمية الغاز المستخرجة في الربع الرابع هي الأعلى، وفي السنتين التاليتين كانت كميات الغاز المستخرجة من الحقل في أعلى مستوى لها في الربع الأول.</td></tr>
<tr><td>15</td><td>
</td></tr>
</table>

16	
17	خط اتجاه البيانات العام هو من النوع الصاعد، ما يعني أن أرباح هذا المصنع مرشحة للزيادة مستقبلًا.
18	بوجه عام، ارتفعت أرباح هذا المصنع بين الثلث الأول والثاني من كل عام، ثم عادت إلى الانخفاض في الفترة بين الثلثين الثاني والثالث من كل عام.

الدرس الثالث: التباين في السلاسل الزمنية

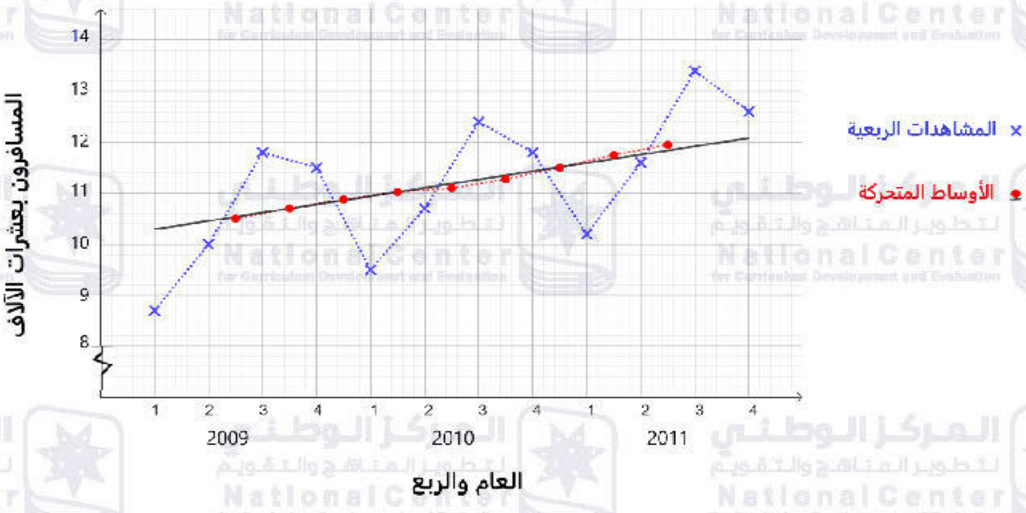
1	$M_1 = \dfrac{56 + 58 + 62 + 64}{4} = 60$ $M_2 = \dfrac{58 + 62 + 64 + 60}{4} = 61$ $M_3 = \dfrac{62 + 64 + 60 + 66}{4} = 63$ $M_4 = \dfrac{64 + 60 + 66 + 72}{4} = 65.5$ $M_5 = \dfrac{60 + 66 + 72 + 74}{4} = 68$ $M_6 = \dfrac{66 + 72 + 74 + 74}{4} = 71.5$ $M_7 = \dfrac{72 + 74 + 74 + 76}{4} = 74$ $M_8 = \dfrac{74 + 74 + 76 + 80}{4} = 76$

2	$M_1 = \frac{93+87+90}{3} = 90$ $M_2 = \frac{87+90+81}{3} = 86$ $M_3 = \frac{90+81+78}{3} = 83$ $M_4 = \frac{81+78+75}{3} = 78$ $M_5 = \frac{78+75+78}{3} = 77$ $M_6 = \frac{75+78+72}{3} = 75$ $M_7 = \frac{78+72+66}{3} = 72$ $M_8 = \frac{72+66+69}{3} = 69$ $M_9 = \frac{66+69+63}{3} = 66$

3	$M_1 = \frac{8.7 + 10 + 11.8 + 11.5}{4} = 10.5$ $M_2 = \frac{10 + 11.8 + 11.5 + 9.5}{4} = 10.7$ $M_3 = \frac{11.8 + 11.5 + 9.5 + 10.7}{4} = 10.875$ $M_4 = \frac{11.5 + 9.5 + 10.7 + 12.4}{4} = 11.025$ $M_5 = \frac{9.5 + 10.7 + 12.4 + 11.8}{4} = 11.1$ $M_6 = \frac{10.7 + 12.4 + 11.8 + 10.2}{4} = 11.275$ $M_7 = \frac{12.4 + 11.8 + 10.2 + 11.6}{4} = 11.5$ $M_8 = \frac{11.8 + 10.2 + 11.6 + 13.4}{4} = 11.75$ $M_9 = \frac{10.2 + 11.6 + 13.4 + 12.6}{4} = 11.95$

4	(الجدول والتمثيل البياني أدناه)

العام	الربع	المسافرون	منتصف الفترة	الأوساط المتحركة
2009	1	8.7	2.5	10.5
	2	10	3.5	10.7
	3	11.8		
	4	11.5	4.5	10.875
2010	1	9.5	1.5	11.025
	2	10.7	2.5	11.1
	3	12.4		
	4	11.8	3.5	11.275
2011	1	10.2	4.5	11.5
	2	11.6	1.5	11.75
	3	13.4		
	4	12.6	2.5	11.95



5

التباين الموسمي للقيمة 10 من العام الأول $10 - 10.5 = -0.5$

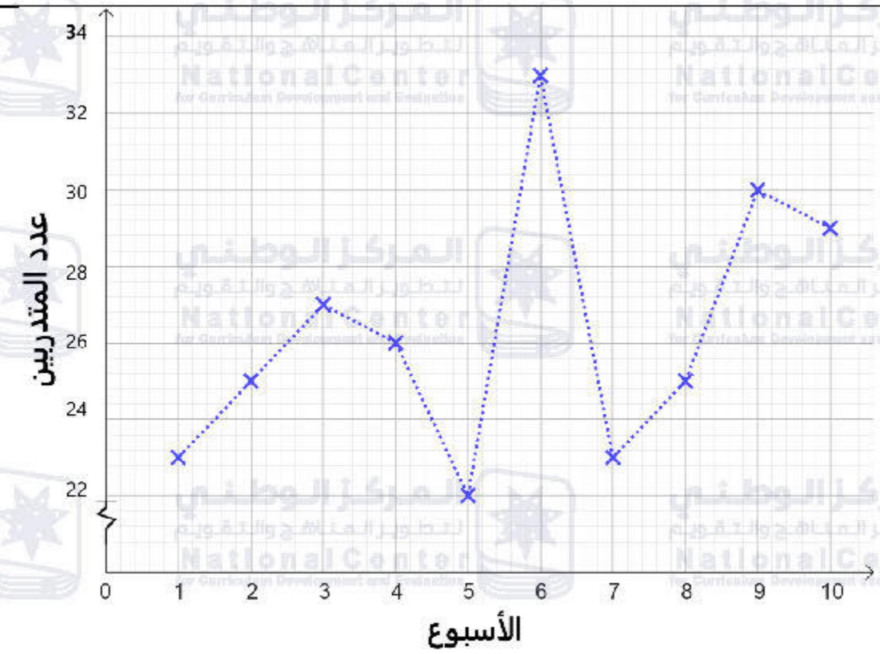
التباين الموسمي للقيمة 10.7 من العام الثاني $10.7 - 11.1 = -0.4$

التباين الموسمي للقيمة 11.6 من العام الثالث $11.6 - 11.8 = -0.2$

الوسط الحسابي للتباينات الموسمية للربع الثاني: $\frac{-0.5 - 0.4 - 0.2}{3} \approx -0.3667$

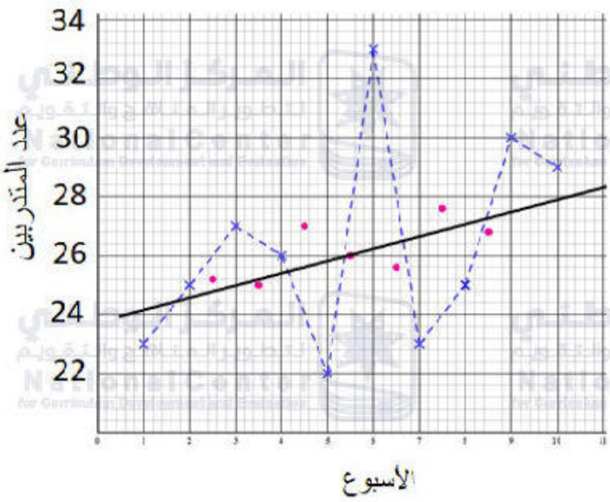
بضرب الوسط الحسابي في 10000: $-0.3667 \times 10000 = -3667$

إذن، الوسط الحسابي للتباينات الموسمية للربع الثاني هو: -3667 مُسافرًا تقريبًا.

6	القيمة المتوقعة: $124000 - 3667 = 120333$ إذن، العدد المتوقع للمسافرين إلى الخارج في الربع الثاني من عام 2012 هو: 120333 مسافرًا.
7	
8	$M_1 = \dfrac{23 + 25 + 27 + 26}{4} = 25.25$ $M_2 = \dfrac{25 + 27 + 26 + 22}{4} = 25$ $M_3 = \dfrac{27 + 26 + 22 + 33}{4} = 27$ $M_4 = \dfrac{26 + 22 + 33 + 23}{4} = 26$ $M_5 = \dfrac{22 + 33 + 23 + 25}{4} = 25.75$ $M_6 = \dfrac{33 + 23 + 25 + 30}{4} = 27.75$ $M_7 = \dfrac{23 + 25 + 30 + 29}{4} = 26.75$

9

الأسبوع	عدد المتدربين	منتصف الفترة	الأوساط المتحركة
1	23	2.5	25.25
2	25		
3	27	3.5	25
4	26	4.5	27
1	22	1.5	26
2	33		
3	23	2.5	25.75
4	25	3.5	27.75
1	30	4.5	26.75
2	29		



10

خط اتجاه البيانات العام هو من النوع الصاعد، ما يعني أن عدد المتدربين مرشح للزيادة مستقبلًا.

11

التباين الموسمي للربع الأول من عام 2021 $240000 - 550000 = -310000$

التباين الموسمي للربع الثاني من عام 2021 $750000 - 580000 = 170000$

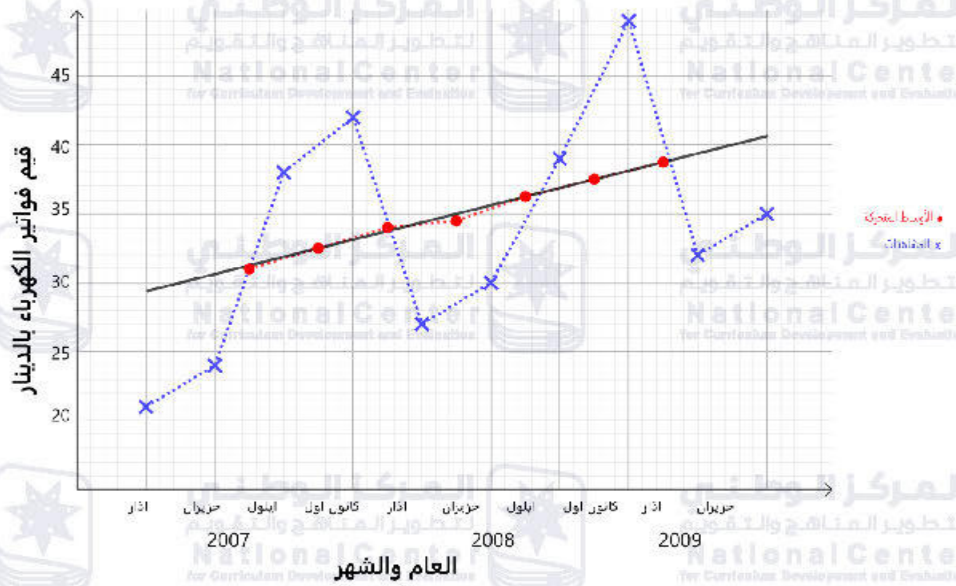
التباين الموسمي للربع الثالث من عام 2021 $400000 - 600000 = -200000$

التباين الموسمي للربع الرابع من عام 2021 $980000 - 650000 = 330000$

12	التباين الموسمي للقيمة 240 من العام الأول $240 - 550 = -310$ التباين الموسمي للقيمة 300 من العام الثاني $300 - 700 = -400$ التباين الموسمي للقيمة 390 من العام الثالث $390 - 850 = -460$ الوسط الحسابي للتباينات الموسمية للربع الأول: $\frac{-310-400-460}{3} \approx -390$ بضرب الوسط الحسابي في 1000: $-390 \times 1000 = -390000$ إذن، الوسط الحسابي للتباينات الموسمية للربع الأول هو: (-390000) JD تقريبًا.
13	القيمة المتوقعة: $1000000 - 390000 = 610000$ إذن، القيمة المتوقعة لأرباح الربع الأول من عام 2024 هو: (610000) JD
14	$M_1 = \frac{21+24+37+42}{4} = 31$ $M_2 = \frac{24+37+42+27}{4} = 32.5$ $M_3 = \frac{37+42+27+30}{4} = 34$ $M_4 = \frac{42+27+30+39}{4} = 34.5$ $M_5 = \frac{27+30+39+49}{4} = 36.25$ $M_6 = \frac{30+39+49+32}{4} = 37.5$ $M_7 = \frac{39+49+32+35}{4} = 38.75$

15

الأوساط المتحركة	منتصف الفترة	قيمة فاتورة الكهرباء	الشهر	العام
31	2.5	21	آذار	2007
		24	حزيران	
32.5	3.5	37	أيلول	
34	4.5	42	كانون الأول	
34.5	1.5	27	آذار	2008
36.25	2.5	30	حزيران	
		39	أيلول	
37.5	3.5	49	كانون الأول	
38.75	4.5	32	آذار	2009
		35	حزيران	



16

خط اتجاه البيانات العام هو من النوع الصاعد، ما يعني أن قيمة فاتورة الكهرباء مرشحة للزيادة مستقبلًا.

17	التباين الموسمي للقيمة 37 من العام الأول $37 - 32 = 5$ التباين الموسمي للقيمة 39 من العام الثاني $39 - 37 = 2$ الوسط الحسابي للتباينات الموسمية لشهر أيلول: $\frac{5+2}{2} = 3.5$ إذن، الوسط الحسابي للتباينات الموسمية لشهر أيلول هو: JD 3.5 تقريبًا.
18	القيمة المتوقعة: $42 + 3.5 = 45.5$ إذن، القيمة المتوقعة لفاتورة الكهرباء لشهر أيلول من علم 2009 هي: JD 45.5

الوحدة الخامسة: التوزيعات الاحتمالية

أستعد لدراسة الوحدة

	إيجاد مضروب العدد الكلي صفحة 19
1	$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
2	$4! + 0! = (4 \times 3 \times 2 \times 1) + 1 = 25$
3	$2! \times 3! = (2 \times 1) \times (3 \times 2 \times 1) = 2 \times 6 = 12$
4	$\frac{9!}{7! \times 2!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{7! \times (2 \times 1)} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$
	إيجاد التوافيق صفحة 19
5	$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!\,3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 6} = 56$
6	$\binom{10}{2} - \binom{7}{0} = \frac{10!}{2!\,8!} - \frac{7!}{0!\,7!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{2 \times 8!} - 1 = 45 - 1 = 44$
7	$\frac{\binom{13}{4}}{\binom{11}{7}} = \frac{\frac{13!}{4!\,9!}}{\frac{11!}{7!\,4!}} = \frac{\frac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9!}{4! \times 9!}}{\frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 4!}} = \frac{13 \times 12}{9 \times 8} = \frac{13}{6}$
	المتغير العشوائي وتوزيعه الاحتمالي صفحة 20
8	$Y \in \{0,1,2,3\}$ $P(Y=0) = P(TTT) = \frac{1}{8}$ $P(Y=1) = P(\{HTT, THT, TTH\}) = \frac{3}{8}$ $P(Y=2) = P(\{THH, HHT, HTH\}) = \frac{3}{8}$ $P(Y=3) = P(HHH) = \frac{1}{8}$

Y	0	1	2	3
$P(Y=y)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

9

$X \in \{0,1,2,3,4,5\}$

$$P(X=0)=P(\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\})=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

$$P(X=1)=P(\{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),(4,5),(5,4),(5,6),(6,5)\})=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$$

$$P(X=2)=P(\{(1,3),(2,4),(3,5),(3,1),(4,6),(4,2),(5,3),(6,4)\})=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$$

$$P(X=3)=P(\{(1,4),(2,5),(3,6),(4,1),(5,2),(6,3)\})=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

$$P(X=4)=P(\{(1,5),(2,6),(5,1),(6,2)\})=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

$$P(X=5)=P(\{(1,6),(6,1)\})=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

X	0	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

توقع المتغير العشوائي، وتباينه، وانحرافه المعياري صفحة 21

10

التوقع $E(X)$:

$$E(x)=\sum x\cdot P(x)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{1}{8}+3\times\frac{1}{4}=0+\frac{3}{8}+\frac{2}{8}+\frac{6}{8}=\frac{11}{8}$$

التباين σ^2:

$$\sigma^2=\sum x^2\cdot P(x)-\left(E(x)\right)^2=0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{3}{8}+2^2\times\frac{1}{8}+3^2\times\frac{1}{4}-\left(\frac{11}{8}\right)^2$$

$$=0+\frac{3}{8}+\frac{4}{8}+\frac{9}{4}-\frac{121}{64}=\frac{25}{8}-\frac{121}{64}=\frac{79}{64}$$

الدرس الأول: التوزيع الهندسي

1	$P(X=4)=\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^3$ $=\frac{343}{4096}\approx 0.084$
2	$P(X\leq 4)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$ $=\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^0+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^1+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^3\approx 0.414$ حلّ آخر باستعمال القاعدة $P(X>x)=(1-p)^x$: $P(X\leq 4)=1-P(X>4)$ $=1-\left(\frac{7}{8}\right)^4\approx 1-0.586\approx 0.414$
3	$P(X\geq 2)=1-P(X<2)$ $=1-P(X=1)$ $=1-\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^0$ $=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}=0.875$ حلّ آخر باستعمال القاعدة $P(X>x)=(1-p)^x$: $P(X\geq 2)=P(X>1)=\left(1-\frac{1}{8}\right)^1=\frac{7}{8}=0.875$
4	$P(3\leq X<5)=P(X=3)+P(X=4)$ $=\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^3\approx 0.179$
5	$P(X<2)=P(X=1)=\frac{1}{8}=0.125$
6	$P(X>5)=\left(1-\frac{1}{8}\right)^5=\left(\frac{7}{8}\right)^5\approx 0.513$
7	$P(1<X<3)=P(X=2)$ $=\frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^1=\frac{7}{64}\approx 0.109$

8	$P(4 < X \leq 6) = P(X=5) + P(X=6)$ $= \frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^4 + \frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^5 \approx 0.137$
9	$P(2 < X \leq 4) = P(X=3) + P(X=4)$ $= \frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^3 \approx 0.179$
10	$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.8} = \frac{10}{8} = 1.25$
11	$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.1} = 10$
12	$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.75} = \frac{100}{75} = \frac{4}{3} \approx 1.33$
13	$P(X=10) = (0.7)(0.3)^9 \approx 0.00001$
14	$P(X \geq 2) = P(X > 1) = (1-p)^1 = 1 - 0.7 = 0.3$
15	$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.7} = \frac{10}{7} \approx 1.4$ يتوقع أن يصيب عماد الهدف أول مرة عندما يطلق رصاصتين على الأكثر.
16	$P(X=7) = (0.05)(0.95)^6 \approx 0.037$
17	$E(X) = 2 \Rightarrow \frac{1}{p} = 2$ $\Rightarrow p = \frac{1}{2}$ $P(X=1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{2}$
18	$P(X > 3) = (1-p)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0.125$

الدرس الثاني: توزيع ذي الحدين

1	$P(X=18)=\binom{20}{18}\left(\frac{1}{8}\right)^{18}\left(\frac{7}{8}\right)^{2}\approx 8.075\times10^{-15}\approx 0$
2	$P(X\le 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$ $=\binom{20}{0}\left(\frac{1}{8}\right)^{0}\left(\frac{7}{8}\right)^{20}+\binom{20}{1}\left(\frac{1}{8}\right)^{1}\left(\frac{7}{8}\right)^{19}+\binom{20}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^{2}\left(\frac{7}{8}\right)^{18}+\binom{20}{3}\left(\frac{1}{8}\right)^{3}\left(\frac{7}{8}\right)^{17}$ ≈ 0.765
3	$P(1<X\le 3)=P(X=2)+P(X=3)$ $=\binom{20}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^{2}\left(\frac{7}{8}\right)^{18}+\binom{20}{3}\left(\frac{1}{8}\right)^{3}\left(\frac{7}{8}\right)^{17}\approx 0.4984$
4	$P(X=3)=\binom{10}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^{3}\left(\frac{3}{5}\right)^{7}\approx 0.215$
5	$P(X\ge 3)=1-P(X<3)=1-\big(P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\big)$ $=1-\left(\binom{10}{0}\left(\frac{2}{5}\right)^{0}\left(\frac{3}{5}\right)^{10}+\binom{10}{1}\left(\frac{2}{5}\right)^{1}\left(\frac{3}{5}\right)^{9}+\binom{10}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{8}\right)\approx 0.167$
6	$P(X=0)=\binom{10}{0}\left(\frac{2}{5}\right)^{0}\left(\frac{3}{5}\right)^{10}\approx 0.006$
7	$E(X)=np\ \Rightarrow 10=n(0.04)$ $\Rightarrow n=250$ عدد الأشخاص الذين يلزم إشراكهم في العينة العشوائية من السكان هو 250 شخصًا

8	$E(X) = np = 40(0.2) = 8$ $Var(X) = \sigma^2 = np(1-p) = 40(0.2)(0.8) = 6.4$
9	$E(X) = np = 280(0.4) = 112$ $Var(X) = \sigma^2 = np(1-p) = 280(0.4)(0.6) = 67.2$
10	$E(X) = np = 48\left(\frac{1}{6}\right) = 8$ $Var(X) = \sigma^2 = np(1-p) = 48\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right) \approx 6.67$
11	ليكن X عدد الأشخاص المصابين بالسكري من بين الـ 12000. $\Longrightarrow X \sim B(12000, 0.09)$ $E(X) = np = 12000(0.09) = 1080$

الدرس الثالث: التوزيع الطبيعي

1	النسبة المئوية للطلبة الذين تقع كتلهم فوق الوسط الحسابي هي 50%
2	النسبة المئوية للطلبة الذين لا يزيد البعد بين كتلهم و الوسط الحسابي على انحراف معياري واحد هي 68%
3	النسبة المئوية للطلبة الذين تقل كتلهم عن الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين هي 47.5%
4	النسبة المئوية للطلبة الذين تزيد كتلهم على الوسط الحسابي بمقدار لا يزيد على انحرافين معياريين، أو تقل عنه بمقدار لا يزيد على انحراف معياري واحد هي $47.5\% + 34\% = 81.5\%$
5	$X \sim N(21, 1.5^2)$
6	منحنى التوزيع الطبيعي يكون متماثلًا حول المستقيم المار بالوسط الحسابي للبيانات، و هذا الشكل لا يحقق هذه الخاصية.
7	من خواص منحنى التوزيع الطبيعي، أن الوسط والوسيط والمنوال (وهي القيمة الأكثر تكرارًا، أي أعلى نقطة في المنحنى) كلها متطابقة وتتوسط البيانات، بينما هذا الشكل لا يحقق هذه الخاصية.
8	$P(X > 8) \approx 0.5$
9	$P(7.8 < X < 8.2) = P\big(8 - (0.2) < X < 8 + (0.2)\big)$ $= P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.68$
10	$P(X > 8.4) = P\big(X > 8 + 2(0.2)\big) = P(X > \mu + 2\sigma) \approx 0.025$
11	$\mu = 2.5$ $\mu + 2\sigma = 2.7 \Rightarrow 2.5 + 2\sigma = 2.7 \Rightarrow \sigma = 0.1$
12	$P(2.5 < X < 2.7) = \frac{1}{2}(95\%) = 47.5\%$

الدرس الرابع: التوزيع الطبيعي المعياري

1	$P(Z < 1.42) = 0.9222$
2	$P(Z < 0.87) = 0.8078$
3	$P(Z > 1.06) = 1 - P(Z < 1.06) = 1 - 0.8554 = 0.1446$
4	$P(Z < -2.78) = 1 - P(Z < 2.78) = 1 - 0.9973 = 0.0027$
5	$P(Z > -1.33) = P(Z < 1.33) = 0.9082$
6	$P(1.1 < Z < 2.1) = P(Z < 2.1) - P(Z < 1.1)$ $= 0.9821 - 0.8643 = 0.1178$
7	$P(-2.65 < Z < -1.43) = P(Z < -1.43) - P(Z < -2.65)$ $= 1 - P(Z < 1.43) - (1 - P(Z < 2.65))$ $= P(Z < 2.65) - P(Z < 1.43)$ $= 0.9960 - 0.9236 = 0.0724$
8	$P(0.24 < Z < 1.1) = P(Z < 1.1) - P(Z < 0.24)$ $= 0.8643 - 0.5948 = 0.2695$
9	$P(Z < -0.54) = 1 - P(Z < 0.54) = 1 - 0.7054 = 0.2946$
10	$P(-1.8 < Z < 1.8) = P(Z < 1.8) - P(Z < -1.8)$ $= P(Z < 1.8) - (1 - P(Z < 1.8)) = 2P(Z < 1.8) - 1$ $= 2(0.9641) - 1 = 0.9282$
11	$P(Z < -1.75) = 1 - P(Z < 1.75) = 1 - 0.9599 = 0.0401$
12	$P(Z > 0.81) = 1 - P(Z < 0.81) = 1 - 0.7910 = 0.2090$
13	$P(-1 < Z < -0.33) = P(Z < -0.33) - P(Z < -1)$ $= 1 - P(Z < 0.33) - (1 - P(Z < 1))$ $= P(Z < 1) - P(Z < 0.33)$ $= 0.8413 - 0.6293 = 0.2120$
14	$P(0.4 < Z < 1.7) = P(Z < 1.7) - P(Z < 0.4)$ $= 0.9554 - 0.6554 = 0.3000$
15	$P(Z > 2.09) = 1 - P(Z < 2.09) = 1 - 0.9817 = 0.0183$

16	$P(0 < Z < 1.2) = P(Z < 1.2) - P(Z < 0) = 0.8849 - 0.5 = 0.3849$
17	$P(-0.5 < Z < 1.5) = P(Z < 1.5) - P(Z < -0.5)$ $= P(Z < 1.5) - \left(1 - P(Z < 0.5)\right)$ $= 0.9332 - (1 - 0.6915) = 0.6247$
18	$P(Z > 1.6) = 1 - P(Z < 1.6) = 1 - 0.9452 = 0.0548$
19	$P(-0.88 < Z < 1.65) = P(Z < 1.65) - P(Z < -0.88)$ $= P(Z < 1.65) - \left(1 - P(Z < 0.88)\right)$ $= 0.9505 - (1 - 0.8106) = 0.7611$
20	$P(Z < a) = 0.9082$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. بما أن قيمة الاحتمال أكبر من 0.5 ، فهذا يعني أن a موجبة، وأنه يمكن استبدالها بالقيمة z. $P(Z < a) = P(Z < z)$ $\Rightarrow 0.9082 = P(Z < z)$ $\Rightarrow z = 1.33$ $\Rightarrow a = 1.33$
21	$P(Z < a) = 0.0314$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. بما أن قيمة الاحتمال أقل من 0.5 ، فهذا يعني أن a سالبة، وأنه يمكن استبدالها بالقيمة $-z$ $P(Z < a) = P(Z < -z)$ $\Rightarrow 0.0314 = P(Z < -z)$ $\Rightarrow 0.0314 = 1 - P(Z < z)$ $P(Z < z) = 1 - 0.0314$ $P(Z < z) = 0.9686$ $\Rightarrow z = 1.86$ $\Rightarrow a = -1.86$
22	$P(Z > a) = 0.95$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة المعيارية a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. بما أن قيمة الاحتمال أكبر من 0.5 ، فهذا يعني أن a سالبة، وأنه يمكن استبدالها بالقيمة $-z$ $P(Z > a) = P(Z > -z)$ $\Rightarrow 0.95 = P(Z > -z)$ $\Rightarrow 0.95 = P(Z < z)$ $\Rightarrow P(Z < z) = 0.95$ $\Rightarrow z = 1.64$ $\Rightarrow a = -1.64$

23	$P(Z < a) = 0.5442$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. بما أن قيمة الاحتمال أكبر من 0.5 ، فهذا يعني أن a موجبة، وأنه يمكن استبدالها بالقيمة z $P(Z < a) = P(Z < z)$ $\Rightarrow 0.5442 = P(Z < z)$ $\Rightarrow z = 0.11$ $\Rightarrow a = 0.11$
24	$P(Z > a) = 0.2743$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي.بما أن قيمة الاحتمال أقل من 0.5 ، فهذا يعني أن a موجبة، وأنه يمكن استبدالها بالقيمة z $P(Z > a) = P(Z > z)$ $\Rightarrow 0.2743 = P(Z > z)$ $\Rightarrow 0.2743 = 1 - P(Z < z)$ $\Rightarrow P(Z < z) = 1 - 0.2743$ $\Rightarrow P(Z < z) = 0.7257$ $\Rightarrow z = 0.6$ $\Rightarrow a = 0.6$

25	$P(Z > a) = 0.6231$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يمين القيمة a أسفل منحنى التوزيع الطبيعي.بما أن قيمة الاحتمال أكبر من 0.5 ، فهذا يعني أن a سالبة، وأنه يمكن استبدالها بالقيمة $-z$ $P(Z > a) = P(Z > -z)$ $\Longrightarrow 0.6231 = P(Z > -z)$ $\Longrightarrow 0.6231 = P(Z < z)$ $\Longrightarrow P(Z < z) = 0.6231$ $\Longrightarrow z = 0.31$ $\Longrightarrow a = -0.31$
26	$P(1 < Z < c) = 0.1408$ $P(Z < c) - P(Z < 1) = 0.1408$ $P(Z < c) - 0.8413 = 0.1408$ $P(Z < c) = 0.9821$ الاحتمال المعطى يمثل المساحة التي تقع يسار القيمة c أسفل منحنى التوزيع الطبيعي. بما أن قيمة الاحتمال أكبر من 0.5 ، فهذا يعني أن قيمة c موجبة، وأنه يمكن استبدالها بالقيمة z $P(Z < c) = P(Z < z)$ $\Longrightarrow 0.9821 = P(Z < z)$ $\Longrightarrow z = 2.1$ $\Longrightarrow c = 2.1$

الدرس الخامس: احتمال المتغير العشوائي الطبيعي باستعمال الجدول

1	$z = \frac{81 - 89}{11.5} = -\frac{8}{11.5} \approx -0.70$
2	$z = \frac{92 - 89}{11.5} \approx 0.26$
3	$z = \frac{100 - 89}{11.5} = \frac{11}{11.5} \approx 0.96$
4	$\frac{x - 220}{10} = 2 \Rightarrow x = 240$
5	$\frac{x - 220}{10} = -3.5 \Rightarrow x = 185$
6	$\frac{x - 220}{10} = 4.2 \Rightarrow x = 262$
7	$P(X < 25.8) = P\left(Z < \frac{25.8 - 17}{10}\right)$ $= P(Z < 0.88) = 0.8106$
8	$P(X > 10.5) = P\left(Z > \frac{10.5 - 17}{10}\right)$ $= P(Z > -0.65)$ $= P(Z < 0.65) = 0.7422$
9	$P(19.4 < X < 30.2) = P\left(\frac{19.4 - 17}{10} < Z < \frac{30.2 - 17}{10}\right)$ $= P(0.24 < Z < 1.32)$ $= P(Z < 1.32) - P(Z < 0.24)$ $= 0.9066 - 0.5948 = 0.3118$
10	$P(4 < X < 17) = P\left(\frac{4 - 17}{10} < Z < \frac{17 - 17}{10}\right)$ $= P(-1.3 < Z < 0)$ $= P(Z < 0) - P(Z < -1.3)$ $= 0.5 - \big(1 - P(Z < 1.3)\big)$ $= 0.5 - (1 - 0.9032) = 0.4032$
11	$P(X < 22.02) = P\left(Z < \frac{22.02 - 20}{3}\right) = P(Z < 0.67) = 0.7486$

12	$P(X > 20.76) = P\left(Z > \frac{20.76 - 20}{3}\right)$ $= P(Z > 0.25)$ $= 1 - P(Z < 0.25)$ $= 1 - 0.5987 = 0.4013$
13	$P(X > 175) = P\left(Z > \frac{175 - 185}{5}\right)$ $= P(Z > -2)$ $= P(Z < 2)$ $= 0.9772$
14	$P(180 < X < 190) = P\left(\frac{180 - 185}{5} < Z < \frac{190 - 185}{5}\right)$ $= P(-1 < Z < 1)$ $= P(Z < 1) - P(Z < -1)$ $= P(Z < 1) - (1 - P(Z < 1))$ $= 2P(Z < 1) - 1$ $= 2(0.8413) - 1 = 0.6826$
15	$P(X > 195) = P\left(Z > \frac{195 - 185}{5}\right)$ $= P(Z > 2)$ $= 1 - P(Z < 2)$ $= 1 - 0.9772 = 0.0228$ $N = 0.0228 \times 2000 = 45.6 \approx 46$ إذن، العدد التقريبي للاعبين الذين تزيد أطوالهم على 195 cm من بين 2000 لاعب هو 46

الوحدة السادسة: الإحصاء الاستدلالي

أستعد لدراسة الوحدة

<table>
<tr><td colspan="2">المجتمع والعينة صفحة 27</td></tr>
<tr><td>المجتمع هو: مجموعات البلاط
العينة هي: 100 بلاطة منها فحصها المهندس.</td><td>1</td></tr>
<tr><td>المجتمع هو: مستمعو البرنامج الإذاعي
العينة هي: 1000 مستمع منهم الذين أرسلت إليهم الرسالة.</td><td>2</td></tr>
<tr><td>المجتمع هو: العلب المنتجة في أحد المصانع.
العينة هي: 25 علبة فول منها التي أختيرت للفحص.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>المجتمع هو: طالبات مدرسة سمر.
العينة هي: 60 طالبة من هذه المدرسة اللواتي سألتهن سمر.</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="2">إيجاد الوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري لبيانات مفردة تمثل مجتمعًا إحصائيًا صفحة 27</td></tr>
<tr><td>

$$\mu = \frac{\sum x}{n} = \frac{18+20+11+13+5+12+14}{7} = \frac{93}{7} \approx 13.29$$

x	x^2
18	324
20	400
11	121
13	169
5	25
12	144
14	196
المجموع	1379

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \mu^2 = \frac{1379}{7} - (13.29)^2 \approx 20.3759$$

$$\sigma = \sqrt{20.3759} \approx 4.51$$

</td><td>5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>6</td><td>

$$\mu = \frac{\sum x}{n} = \frac{27+43+29+34+53+37+19+58}{8} = \frac{300}{8} \approx 37.5$$

x	x^2
27	729
43	1849
29	841
34	1156
53	2809
37	1369
19	361
58	3364
المجموع	12478

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \mu^2 = \frac{12478}{8} - (37.5)^2 = 153.5$$

$$\sigma = \sqrt{153.5} \approx 12.39$$

</td></tr>
<tr><td>7</td><td>

$$\mu = \frac{\sum x}{n} = \frac{12+15+18+16+7+9+14}{7} = \frac{91}{7} = 13$$

x	x^2
12	144
15	225
18	324
16	256
7	49
9	81
14	196
المجموع	1275

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \mu^2 = \frac{1275}{7} - (13)^2 \approx 13.14$$

$$\sigma = \sqrt{13.14} \approx 3.63$$

</td></tr>
</table>

8

$$\mu = \frac{\sum x}{n} = \frac{1+4+5+7+6+14+11}{7} = \frac{48}{7} \approx 6.86$$

x	x^2
1	1
4	16
5	25
7	49
6	36
14	196
11	121
المجموع	444

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \mu^2 = \frac{444}{7} - (6.86)^2 \approx 16.37$$

$$\sigma = \sqrt{16.37} \approx 4.05$$

إيجاد احتمال متغير عشوائي طبيعي غير معياري صفحة 29

9

$$P(X < 6) = P\left(Z < \frac{6-7}{3}\right)$$
$$= P(Z < -0.33)$$
$$= 1 - P(Z < 0.33)$$
$$= 1 - 0.6293 = 0.3707$$

10

$$P(X > 10) = P\left(Z > \frac{10-7}{3}\right)$$
$$= P(Z > 1)$$
$$= 1 - P(Z < 1)$$
$$= 1 - 0.8413 = 0.1587$$

11

$$P(5 < X \leq 12) = P\left(\frac{5-7}{3} < Z \leq \frac{12-7}{3}\right)$$
$$= P(-0.67 < Z \leq 1.67)$$
$$= P(Z \leq 1.67) - P(Z < -0.67)$$
$$= P(Z \leq 1.67) - \left(1 - P(Z < 0.67)\right)$$
$$= 0.9525 - (1 - 0.7486)$$
$$= 0.9525 - 0.2514 = 0.7011$$

12	$P(X<2)=P\left(Z<\frac{2-3}{5}\right)$ $=P(Z<-0.2)$ $=1-P(Z<0.2)$ $=1-0.5793=0.4207$
13	$P(X>4.5)=P\left(Z>\frac{4.5-3}{5}\right)$ $=P(Z>0.3)$ $=1-P(Z<0.3)$ $=1-0.6179=0.3821$
14	$P(3<X<5)=P\left(\frac{3-3}{5}<Z<\frac{5-3}{5}\right)$ $=P(0<Z<0.4)$ $=P(Z<0.4)-P(Z<0)$ $=0.6554-0.5=0.1554$
	إيجاد التوقع والتباين للمتغير العشوائي ذي الحدين صفحة 30
15	$E(X)=5\times 0.4=2$ $Var(X)=5(0.4)(1-0.4)=1.2$
16	$E(X)=30\times\frac{1}{3}=10$ $Var(X)=30\left(\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{20}{3}$
17	$E(X)=40\times 0.8=32$ $Var(X)=40(0.8)(1-0.8)=6.4$
18	$E(X)=28\times 0.7=19.6$ $Var(X)=28(0.7)(1-0.7)=5.88$

الدرس الأول: توزيع الأوساط الحسابية للعينات

العينة غير متحيزة، لأن المشاركين فيها اختيروا عشوائيًا من سكان المدينة.	1
العينة متحيزة، لأن المشاركين فيها هم منتسبو النادي الثقافي، فلا يمثلون الهوايات المختلفة للشباب.	2
العينة متحيزة، لأن المشاركين فيها أولادهم في المدارس الخاصة، فلا يمثلون أولياء جميع طلبة مدارس المدينة.	3
العينة غير متحيزة، لأن المشاركين فيها اختيروا عشوائيًا من عملاء هذا المتجر الإلكتروني.	4
العينة: أل 100 زبون الذين اختارتهم الشركة. المجتمع: جميع زبائن هذه الشركة الاستشارية. العينة العشوائية المُختارة بسيطة، لأن اختيار الزبائن تم بصورة عشوائية.	5
العينة: الألواح التي اختارها مراقب الجودة. المجتمع: جميع ألواح الطاقة الشمسية التي ينتجها المصنع. العينة العشوائية المُختارة منتظمة، لأن اختيار الألواح تم وفقًا لفترات محددة من نقطة بداية عشوائية (كل تاسع لوح على خط الإنتاج).	6
العينة: الأفراد الذين اختارتهم وزارة العمل من الذكور والإناث ممن هم في سن العمل. المجتمع: جميع الأفراد القادرين على العمل. العينة العشوائية المُختارة طبقية، لأنه تم اختيار المشاركين حسب فئات غير متداخلة (ذكور، إناث).	7
العينة: طلبة المدارس الثانوية الذين تم اختيارهم عشوائيًا. المجتمع: جميع طلبة المدارس الثانوية. الإحصائي: الانحراف المعياري لطلبة العينة الذين يستعملون وسائل نقل عامة. المعلمة: الانحراف المعياري لجميع طلبة المدارس الثانوية الذين يستعملون وسائل نقل عامة.	8
العينة: المكالمات الهاتفية الواردة إلى مركز خدمة العملاء التي تم اختيارها عشوائيًا. المجتمع: جميع المكالمات الهاتفية الواردة إلى مركز خدمة العملاء. الإحصائي: الوسط الحسابي لمدة المكالمة الواحدة للعينة المختارة. المعلمة: الوسط الحسابي لمدة المكالمة الواحدة لجميع المكالمات الواردة إلى مركز خدمة العملاء.	9
العينة: الطلبة الجامعيون المختارون عشوائيًا حسب تخصصهم. المجتمع: جميع الطلبة الجامعيين. الإحصائي: النسبة المئوية لطلبة العينة الذين يعملون بدوام جزئي أثناء الدراسة. المعلمة: النسبة المئوية لجميع الطلبة الجامعيين الذين يعملون بدوام جزئي أثناء الدراسة.	10

<table>
<tr><td>11</td><td>$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{1340}{50} = 26.8$</td></tr>
<tr><td>12</td><td>$s^2 = \frac{\sum x^2 - n\bar{x}^2}{n-1} = \frac{36296 - 50(26.8)^2}{49} \approx 7.84$
$s = \sqrt{7.84} \approx 2.8$</td></tr>
<tr><td>13</td><td>$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{6+9+8+7+6+8+7+9+7+10}{10} = 7.7$</td></tr>
<tr><td>14</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>x^2</td></tr>
<tr><td>6</td><td>36</td></tr>
<tr><td>9</td><td>81</td></tr>
<tr><td>8</td><td>64</td></tr>
<tr><td>7</td><td>49</td></tr>
<tr><td>6</td><td>36</td></tr>
<tr><td>8</td><td>64</td></tr>
<tr><td>7</td><td>49</td></tr>
<tr><td>9</td><td>81</td></tr>
<tr><td>7</td><td>49</td></tr>
<tr><td>10</td><td>100</td></tr>
<tr><td>المجموع</td><td>609</td></tr>
</table>
$s^2 = \frac{\sum x^2 - n\bar{x}^2}{n-1} = \frac{609 - 10(7.7)^2}{9} \approx 1.79$</td></tr>
<tr><td>15</td><td>$s = \sqrt{1.79} \approx 1.34$</td></tr>
<tr><td>16</td><td>$\mu_{\bar{x}} = \mu = 42$</td></tr>
<tr><td>17</td><td>$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{7}{\sqrt{30}} \approx 1.28$</td></tr>
<tr><td>18</td><td>أفضل استطلاع من بين الاستطلاعات الثلاثة هو الثالث لأن حجم العينة أكبر.</td></tr>
<tr><td>19</td><td>استنتاج راما غير دقيق، بسبب أن عدد الطالبات اللواتي أعدن الاستبانة صغير نسبيا، وبسبب إغفالها لنسبة 26 طالبة من الطالبات ال60 اللواتي أرسلت لهن الاستبانة وهي أقل من 50 بالمئة.</td></tr>
<tr><td>20</td><td>يمكنها التأكد من أن عينتها تمثل جميع طالبات المدرسة عن طريق زيادة حجم العينة والاختيار الطبقي للعينة العشوائية وفق الصفوف أو المرحلة الدراسية.</td></tr>
<tr><td>21</td><td>لتجنب مشكلة عدم الرد على الاستبانة، يمكنها مقابلة الطالبات ورصد إجابتهن.</td></tr>
</table>

الدرس الثاني: التقريب الاحتمالي باستعمال التوزيع الطبيعي

1	$\mu_{\bar{x}} = \mu = 151.2$ $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{6.3}{\sqrt{20}} \approx 1.41$ $P(147 < \bar{X} < 153) = P\left(\frac{147 - 151.2}{1.41} < Z < \frac{153 - 151.2}{1.41}\right)$ $= P(-2.98 < Z < 1.28)$ $= P(Z < 1.28) - P(Z < -2.98)$ $= P(Z < 1.28) - (1 - P(Z < 2.98))$ $= 0.8997 - (1 - 0.9986)$ $= 0.8997 - 0.0014 = 0.8983$
2	$X \sim B(200, 0.95)$ $np = 200 \times 0.95 = 190 > 5 \quad , \quad n(1-p) = 200 \times 0.05 = 10 > 5$ إذن، يمكن استعمال التوزيع الطبيعي $Y \sim N(np, np(1-p))$ لتقريب توزيع ذي الحدين. $\mu = np = 190$ $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{200 \times 0.95 \times 0.05} \approx 3.08$ المطلوب هو $P(X = 194)$ أي $P(193.5 < Y < 194.5)$ $P(193.5 < Y < 194.5) = P\left(\frac{193.5 - 190}{3.08} < Z < \frac{194.5 - 190}{3.08}\right)$ $= P(1.14 < Z < 1.46)$ $= P(Z < 1.46) - P(Z < 1.14)$ $= 0.9279 - 0.8729$ $= 0.0550$
3	$np = n \times 0.1 \geq 5 \quad \Rightarrow \quad n \geq 50$ $n(1-p) = n \times 0.95 \geq 5 \quad \Rightarrow \quad n \geq 5.26$ الحد الأدنى لحجم العينة الذي يحقق الشرطين معًا هو $n = 50$
4	$np = n \times 0.4 \geq 5 \quad \Rightarrow \quad n \geq 12.5$ $n(1-p) = n \times 0.6 \geq 5 \quad \Rightarrow \quad n \geq 8.33$ الحد الأدنى لحجم العينة الذي يحقق الشرطين معًا هو $n = 13$

5	$np = n \times 0.5 \ge 5 \quad \Rightarrow \quad n \ge 10$ $n(1-p) = n \times 0.5 \ge 5 \quad \Rightarrow \quad n \ge 10$ الحد الأدنى لحجم العينة الذي يحقق الشرطين معًا هو $n = 10$
6	$np = n \times 0.8 \ge 5 \quad \Rightarrow \quad n \ge 6.25$ $n(1-p) = n \times 0.2 \ge 5 \quad \Rightarrow \quad n \ge 25$ الحد الأدنى لحجم العينة الذي يحقق الشرطين معًا هو $n = 25$
7	$X \sim B(200, 0.32)$ $np = 200 \times 0.32 = 64 > 5 \quad , \quad n(1-p) = 200 \times 0.68 = 136 > 5$ إذن، يمكن استعمال التوزيع الطبيعي $Y \sim N(np, np(1-p))$ لتقريب توزيع ذي الحدين. $\mu = np = 64$ $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{200 \times 0.32 \times 0.68} \approx 6.6$ المطلوب هو $P(X < 87)$ أي $P(Y < 86.5)$ $P(Y < 86.5) = P\left(Z < \frac{86.5 - 64}{6.6}\right)$ $= P(Z < 3.41)$ $= 0.9997$
8	المطلوب هو $P(X > 50)$ أي $P(Y > 50.5)$ $P(Y > 50.5) = P\left(Z > \frac{50.5 - 64}{6.6}\right)$ $= P(Z < -2.05)$ $= 1 - P(Z < 2.05)$ $= 1 - 0.9798$ $= 0.0202$
9	المطلوب هو $P(X > 75)$ أي $P(Y > 75.5)$ $P(Y > 75.5) = P\left(Z > \frac{75.5 - 64}{6.6}\right)$ $= P(Z > 1.74)$ $= 1 - P(Z < 1.74) = 1 - 0.9591 = 0.0409$

10	المطلوب هو $P(75 < X < 87)$ أي $P(75.5 < Y < 86.5)$ $P(75.5 < Y < 86.5) = P\left(\frac{75.5-64}{6.6} < Y < \frac{86.5-64}{6.6}\right)$ $= P(1.74 < Z < 3.41)$ $= P(Z < 3.41) - P(Z < 1.74)$ $= 0.9997 - 0.9591$ $= 0.0406$
11	$\mu_{\bar{x}} = \mu = 352 \quad , \quad n = 50 \quad ,$ $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{50}}$ $P(\bar{X} < 350) = 0.33 \quad \Rightarrow P\left(Z < \frac{350-352}{\frac{\sigma}{\sqrt{50}}}\right) = 0.33$ $\Rightarrow P\left(Z < -\frac{2\sqrt{50}}{\sigma}\right) = 0.33$ $\Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{2\sqrt{50}}{\sigma}\right) = 0.33$ $\Rightarrow P\left(Z < \frac{2\sqrt{50}}{\sigma}\right) = 0.67$ $\Rightarrow \frac{2\sqrt{50}}{\sigma} = 0.44$ $\Rightarrow \sigma = \frac{2\sqrt{50}}{0.44} \approx 32.1$

12	بما أن حجم العينة يبلغ 64، و هو أكبر من 30، فإن توزيع الأوساط الحسابية للعينات يقترب من التوزيع الطبيعي بصرف النظر عن توزيع المجتمع الأصلي. $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{8}{\sqrt{64}} = 1$ $P(\lvert\bar{X} - \mu\rvert \leq 2) = P(-2 \leq \bar{X} - \mu \leq 2)$ لكن: $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}} = Z \Rightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{1} = Z \Rightarrow \bar{X} - \mu = Z$ $\Rightarrow P(\lvert\bar{X} - \mu\rvert \leq 2) = P(-2 \leq Z \leq 2)$ $= P(Z \leq 2) - P(Z \leq -2)$ $= P(Z \leq 2) - \big(1 - P(Z \leq -2)\big)$ $= 2P(Z \leq 2) - 1$ $= 2(0.9772) - 1$ $= 0.9544$

الدرس الثالث: فترات الثقة

حجم العينة $n = 50$ الوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 4.8$ الانحراف المعياري للمجتمع $\sigma = 1.2$ مستوى الثقة 90% تقابله القيمة المعيارية: $z = 1.64$ بما أن الانحراف المعياري للمجتمع معلوم، وحجم العينة أكبر من 30، إذن، يمكن حساب الحد الأقصى لخطأ التقدير للوسط الحسابي بالقانون: $E = z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.64 \times \frac{1.2}{\sqrt{50}} \approx 0.28$ وهذا يعني أننا واثقون بنسبة 90% (دون أن نكون متأكدين تمامًا) أن الوسط الحسابي μ لعدد ساعات الدراسة اليومية لطلبة المجتمع كاملًا لن يبتعد أكثر من $0.28\ h$ عن الوسط الحسابي للعينة البالغ $4.8\ h$.	1
حجم العينة $n = 30$ الوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 5$ الانحراف المعياري للعينة $s = 1.8$ مستوى الثقة 99% تقابله القيمة المعيارية $z = 2.57$ بما أن الانحراف المعياري للمجتمع غير معلوم، وحجم العينة يساوي 30، إذن، يمكن حساب الحد الأقصى لخطأ التقدير للوسط الحسابي بالقانون: $E = z \times \frac{s}{\sqrt{n}} = 2.57 \times \frac{1.8}{\sqrt{30}} \approx 0.84$ وهذا يعني أننا واثقون بنسبة 99% (دون أن نكون متأكدين تمامًا) أن الوسط الحسابي μ لعدد الكتب التي قرأها كل طالب من المجتمع لن يبتعد أكثر من 0.84 عن الوسط الحسابي للعينة البالغ 5.	2

3	حجم العينة $n = 50$ الوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 502$ الانحراف المعياري للعينة $s = 3.2$ مستوى الثقة 99% تقابله القيمة المعيارية $z = 2.57$ بما أن الانحراف المعياري للمجتمع غيرمعلوم، وحجم العينة أكبر من 30، إذن، يمكن حساب الحد الأقصى لخطأ التقدير للوسط الحسابي بالقانون: $E = z \times \frac{s}{\sqrt{n}} = 2.57 \times \frac{3.2}{\sqrt{50}} \approx 1.16$ نجد فترة الثقة: $\bar{x} - E < \mu < \bar{x} + E$ $502 - 1.16 < \mu < 502 + 1.16$ $500.84 < \mu < 503.16$ وهذا يعني أننا واثقون بنسبة 99% (دون أن نكون متأكدين تمامًا) أن الوسط الحسابي لأكياس السكر التي ينتجها المصنع يقع بين $500.84\ g$ و $503.16\ g$.
4	حجم العينة $n = 20$ الوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 16.4$ الانحراف المعياري للمجتمع $\sigma = 4.5$ مستوى الثقة 99% تقابله القيمة المعيارية $z = 2.57$ بما أن الانحراف المعياري للمجتمع معلوم، والتوزيع طبيعي، إذن، يمكن حساب الحد الأقصى لخطأ التقدير للوسط الحسابي بالقانون: $E = z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.57 \times \frac{4.5}{\sqrt{20}} \approx 2.59$ نجد فترة الثقة: $\bar{x} - E < \mu < \bar{x} + E$ $16.4 - 2.59 < \mu < 16.4 + 2.59$ $13.81 < \mu < 18.99$ وهذا يعني أننا واثقون بنسبة 99% (دون أن نكون متأكدين تمامًا) أن الوسط الحسابي لأطوال أشجار النخيل يقع بين $13.81\ m$ و $18.99\ m$.

5	$n = \left(\frac{z\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1.64 \times 1600}{400}\right)^2 \approx 44$ إذن، يجب أن تشمل العينة المختارة 44 على الأقل، لضمان مستوى ثقة 90% و هامش خطأ لا يتجاوز 400.
6	حجم العينة $n = 10$ الوسط الحسابي للمجتمع μ الانحراف المعياري للمجتمع $\sigma = 0.5$ مستوى الثقة 95% تقابله القيمة المعيارية $z = 1.96$ $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{13.2 + 11.3 + 13.6 + 10.3 + 12.3 + 12.4 + 11.2 + 10.7 + 12.6 + 9.6}{10}$ $= \frac{117.2}{10} = 11.72$ بما أن الانحراف المعياري للمجتمع معلوم، والتوزيع طبيعي، إذن، يمكن حساب الحد الأقصى لخطأ التقدير للوسط الحسابي بالقانون: $E = z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \times \frac{0.5}{\sqrt{10}} \approx 0.31$ نجد فترة الثقة: $\bar{x} - E < \mu < \bar{x} + E$ $11.72 - 0.31 < \mu < 11.72 + 0.31$ $11.41 < \mu < 12.03$

7	$n = 20$ $\bar{x} = 11.72$ طول الفترة: $12.03 - 11.41 = 0.62$ طول فترة الثقة بمستوى $x\%$: $(\bar{x} + E) - (\bar{x} - E) = 2E$ $2E = 0.62 \quad \Rightarrow \quad E = 0.31$ بما أن الانحراف المعياري للمجتمع معلوم، والتوزيع طبيعي، إذن، يمكن حساب الحد الأقصى لخطأ التقدير للوسط الحسابي بالقانون: $E = z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \quad z \times \frac{0.5}{\sqrt{20}} = 0.31 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{0.31\sqrt{20}}{0.5} \approx 2.77$ $2P(Z < z) - 1 = \frac{x}{100} \quad \Rightarrow \quad 2P(Z < 2.77) - 1 = \frac{x}{100}$ $\Rightarrow \quad 2(0.9972) - 1 = \frac{x}{100}$ $\Rightarrow \quad 0.9944 = \frac{x}{100}$ $\Rightarrow \quad x = 99.44$

1	$H_0: \mu = 5$ (الادعاء) , $H_1: \mu \neq 5$
2	$H_0: \mu \geq 55$, $H_1: \mu < 55$ (الادعاء)
3	$H_0: \mu \leq 80\%$, $H_1: \mu > 80\%$ (الادعاء)
4	وقوع خطأ من النوع I : يحدث هذا النوع من الخطأ عند رفض الفرضية الصفرية بالرغم من أنها صحيحة، وذلك في حال اقرار أن معدل زمن الجري يقل عن 9 دقائق، في حين أنه حقيقة لا يقل عن 9 دقائق.
5	وقوع خطأ من النوع II : يحدث هذا النوع من الخطأ عند قبول الفرضية الصفرية بالرغم من أنها غير صحيحة، وذلك في حال اقرار أن معدل زمن الجري لا يقل عن 9 دقائق، في حين أنه حقيقة يقل عن 9 دقائق.
6	$H_0: \mu \leq 10000$ (k الادعاء) , $H_1: \mu > 10000$ $n = 48$ $\bar{x} = 10015$ $s = 85$ $\alpha = 0.01$ نحسب القيمة الحرجة z_α: بما أن $H_1: \mu > 10000$ إذن، الاختبار أحادي الطرف يمينًا. مستوى الدلالة $\alpha = 0.01$ إذن: $P(Z > z_\alpha) = 0.01 \Rightarrow z_\alpha = 2.32$ نحسب قيمة الإحصائي z: $z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \dfrac{10015 - 10000}{\frac{85}{\sqrt{48}}} \approx 1.22$ بما أن قيمة الإحصائي z لا تقع ضمن المنطقة الحرجة، فإننا لا نرفض الفرضية الصفرية. و هذا يعني أنه لا توجد أدلة كافية لرفض الادعاء k.

7	$H_0: \mu \le 88 \quad , \quad H_1: \mu > 88$ (الادعاء k) $n = 52$ $\bar{x} = 91.2$ $s = 3.9$ $\alpha = 0.05$ نحسب القيمة الحرجة z_α: بما أن $H_1: \mu > 88$ إذن، الاختبار أحادي الطرف يمينًا. مستوى الدلالة $\alpha = 0.05$ إذن: $P(Z > z_\alpha) = 0.05 \Rightarrow z_\alpha = 1.64$ نحسب قيمة الإحصائي z: $z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \dfrac{91.2 - 88}{\frac{3.9}{\sqrt{52}}} \approx 5.92$ بما أن قيمة الإحصائي z تقع ضمن المنطقة الحرجة، فإننا نرفض الفرضية الصفرية. و هذا يعني أنه توجد أدلة كافية تدعم الادعاء k.

8	$H_0: \mu \leq 1.8$ (الادعاء) , $H_1: \mu > 1.8$ $n = 45$ $\bar{x} = 2$ $\sigma = 0.5$ $\alpha = 0.05$ نحسب القيمة الحرجة z_α: بما أن $H_1: \mu > 1.8$ إذن، الاختبار أحادي الطرف يمينًا. مستوى الدلالة $\alpha = 0.05$ إذن: $P(Z > z_\alpha) = 0.05 \implies z_\alpha = 1.64$ نحسب قيمة الإحصائي z: $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{2 - 1.8}{\frac{0.5}{\sqrt{45}}} \approx 2.68$ بما أن قيمة الإحصائي z تقع ضمن المنطقة الحرجة، فإننا نرفض الفرضية الصفرية. و هذا يعني أنه توجد أدلة كافية لرفض الادعاء بأن الوسط الحسابي لاستهلاك أحد أنواع الأجهزة الذكية للطاقة في الساعة هو $1.8\ watt$ على الأكثر.

9	$H_0: \mu = 45$ (الادعاء), $H_1: \mu \neq 45$ $n = 49$ $\bar{x} = 48.2$ $s = 10.5$ $\alpha = 10\% = 0.1$ نحسب القيمة الحرجة z_α: بما أن $H_1: \mu \neq 45$ إذن، الاختبار ثنائي الطرف. مستوى الدلالة $\alpha = 0.1$ إذن: $\frac{\alpha}{2} = 0.05$ $P(Z > z_\alpha) = 0.05 \Rightarrow z_\alpha = 1.64$ نحسب قيمة الإحصائي z: $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{48.2 - 45}{\frac{10.5}{\sqrt{49}}} \approx 2.13$ بما أن قيمة الإحصائي z تقع ضمن المنطقة الحرجة، فإننا نرفض الفرضية الصفرية. و هذا يعني أنه توجد أدلة كافية لرفض الادعاء بأن الوسط الحسابي للوقت الذي يقضيه الزائر داخل المكتبة هو 45 دقيقة.